UNA APLICACION DE LA TEORIA DE POSIBILIDADES A LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION DE PRESTAMOS

Mariano Jiménez López
Departamento de Economía Aplicada I
Universidad del País Vasco

Resumen: *En este trabajo veremos como un prestamista, antes de conceder un préstamo, puede determinar la distribución de posibilidad del tipo de interés medio, equivalente a los tipos de interés inciertos que habrá en el mercado durante la duración del préstamo, los cuales supondremos que son estimados por medio de números borrosos. Una vez determinada la distribución de posibilidad del interés medio, basándonos en la teoría de posibilidades y en los métodos de comparación entre subconjuntos borrosos, veremos como la lógica borrosa puede ayudar al prestamista a adoptar una decisión sobre el tipo de interés constante que debe ofertar en dicho préstamo.*

Para los lectores no familiarizados con la teoría de los subconjuntos borrosos, se ha incluido un apéndice al final del presente trabajo.

Palabras clave *:* amortización de préstamos, relación de preferencia borrosa, teoría de posibilidades.

1. Introducción

De entre los diferentes enfoques que existen para tratar la incertidumbre no probabilística he elegido en este trabajo aquel que considera que los parámetros de cuantía incierta vienen estimados mediante sus distribuciones de posibilidad [Zadeh, 1978], las cuales supondremos que representan números borrosos.

Cuando un prestamista concede un préstamo, hace una estimación de los tipos de interés que estarán vigentes en el mercado en los periodos (futuros) de duración del préstamo. El tipo de interés contractual deberá ajustarse al tipo interés medio equivalente a dichos tipos estimados de mercado.

Una vez que los expertos reflexionan sobre los factores que influyen en la conformación de los tipos de interés y sobre cómo van a cambiar los efectos de esos factores en el futuro [Torrero, 1989 I y II], [Gil Luezas-Meneu Ferrer 1991], pueden efectuar una estimación de la evolución esperada de dichos tipos. Si esta estimación se expresa mediante un único valor, lo lógico es que para evitar riesgos "se tire por lo alto", lo que en definitiva redundará en un encarecimiento del préstamo, lo cual puede conducir a la pérdida de un buen número de potenciales clientes.

Sin embargo, en una situación de incertidumbre como la actual parece lógico suponer que los expertos se encontrarán más cómodos si se les permite expresar su opinión mediante enunciados vagos tales como: "los tipos de interés tendrán una tendencia al alza de alrededor de un punto", o " los tipos de interés no subirán del 8%, pero no bajarán tampoco de 6%", que si se les obliga a dar un único valor.

La utilización de los números borrosos permite recoger con mayor fidelidad las opiniones inseguras e imprecisas que puedan emitir los expertos, de esta forma la información que puede obtenerse de ellos no se cercena en aras de una irreal y por tanto inútil precisión, siendo por consiguiente una información mucho más completa y conteniendo tanto las estimaciones optimistas como las pesimistas. Esta mayor información nos permitirá sopesar mejor el riesgo y por lo tanto ajustar mejor el precio del préstamo, es decir el tipo interés.

2. Determinación de la distribución de posibilidad del tanto medio equivalente a los tipos de interés de mercado

Consideremos una operación financiera formada por una préstación única (C_0, t_0), y contraprestación múltiple (a_1, t_1), $(a_2, t_2), \ldots, (a_n, t_n)$. Si representamos por $i_1, i_2, \ldots, i_n$ los tipos de interés correspondientes a los diferentes periodos de tiempo, la ecuación de equivalencia de financiera es la siguiente:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)$$

El tanto medio constante i_m, equivalente a los tantos variables es el que verifica la siguiente relación:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s (1 + i_m)^{-s}$$

luego,

$$\sum_{s=1}^{n} a_s (1 + i_m)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1} \qquad (1)$$

Supongamos que el prestamista, para determinar el tipo de interés constante que ofertará en sus préstamos, se basa en la estimación de los tipos de interés i_h que espera estarán vigentes en el mercado durante la duración de dichos préstamos. Las cuantías de estos tipos de interés son inciertas pero supondremos que vienen estimadas mediante sus distribuciónes de posibilidad, las cuales representan números borrosos $\tilde{i}_h$ (véase Apendice (A.4)).

Puesto que la cuantía de los i_h es incierta, tambien lo será la cuantía del tanto medio equivalente i_m. Entonces la ecuación (1) se convierte en la siguiente ecuación borrosa

$$\sum_{s=1}^{n} a_s (1 + \tilde{i}_m)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s} (1 + \tilde{i}_h)^{-1}$$

cuya resolución consistirá en determinar la distribución de posibilidad de la incógnita i_m.

Existiran diferentes combinaciones de valores asignados a las cantidades imprecisas i_h, que proporcionaran el mismo resultado i_m^*, para el tanto medio equivalente, entonces, de acuerdo con el principio de extensión (véase Apéndice (A.5)), la posibilidad (véase Apéndice (A.2 y A.3)) de que dicho tanto medio se concrete en un determinado valor i_m^* es la siguiente [Jiménez, 1994]:

$$poss\left[i_m = i_m^*\right] = \max \left\{ \min\left(\mu_{\tilde{i}_1}(i'_1), \mu_{\tilde{i}_2}(i'_2), \ldots, \mu_{\tilde{i}_n}(i'_n)\right) \text{ tal que } i_m^* \text{ sea solución de la ecuación (1) cuando } i_1 = i'_1,\ i_2 = i'_2, \ldots, i_n = i'_n \right\} \qquad (2)$$

donde $\mu_{\tilde{i}_h}(i'_h)$, representan las posibilidades de ocurrencia de i'_h, $h = 1, \ldots, n$.

Ahora bien la ecuación (1) define una función implícita $i_m = f(i_1, i_2, \ldots i_n)$, continua y estrictamente creciente respecto de todas las variables $i_1, i_2, \ldots i_n$. Para cerciorarse de ello basta con calcular $\frac{\partial i_m}{\partial i_h}$; $h = 1,2,\dots,n$. Es inmediato comprobar que todas éstas derivadas son continuas y positivas.

Entonces cualquier combinación de valores $i'_1, i'_2, \dots i'_n$, que proporcionan para la ecuación (1) la solución i^*_m, verificarán tambien que $i^*_m = f(i'_1, i'_2, \dots i'_n)$. Por lo tanto la expresión (2) puede escribirse así [Buckley-Qu, 1990]:

$$poss\left[i_m = i^*_m\right] = \max\left\{\min\left(\mu_{\tilde{i}_1}(i'_1),\ \mu_{\tilde{i}_2}(i'_2),\dots,\ \mu_{\tilde{i}_n}(i'_n)\right) \text{ tal que } i^*_m = f(i'_1, i'_2, \dots i'_n)\right\}$$

luego, cada a-corte $i_{m\alpha}$ (véase Apendice (A.4)) del número borroso $\tilde{i}_m$, cuya gráfica nos da la distribución de posibilidad de los valores i_m que solucionan la ecuación propuesta, es el recorrido de la función implícita f cuando su dominio de definición es el producto cartesiano de los respectivos a-cortes de los números borrosos $\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots, \tilde{i}_n$, [Buckley-Qu 1991]. Es decir que:

$$i_{m_\alpha} = \left\{i_m \in R \middle|\ i_m = f\left(i_1, i_2, \dots i_n\right),\ \text{siendo } i_1 \in i_{1_\alpha},\ i_2 \in i_{2_\alpha}, \dots,\ i_n \in i_{n_\alpha}\right\} \tag{3}$$

donde $i_{1_\alpha}, i_{2_\alpha}, \dots, i_{n_\alpha}$ son los a-cortes de los números borrosos $\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots, \tilde{i}_n$, los cuales son intervalos cerrados (véase Apendice (A.4)).

De la expresión anterior se deduce de inmediato que, a su vez, los a-cortes de $\tilde{i}_m$ son intervalos cerrados puesto que son la imagen de un conjunto conexo por una función continua.

Puesto que, como ya hemos dicho, $f\left(i_1, i_2, \dots i_n\right)$ es creciente respecto de todas sus variables, el extremo inferior de $i^L_{m\alpha}$ cada a-corte i_{m_α} se calcula asi:

$$i^L_{m\alpha} = f\left(i^L_{1\alpha}, i^L_{2\alpha}, \dots, i^L_{n\alpha}\right)$$

y el extremo superior

$$i^R_{m\alpha} = f\left(i^R_{1\alpha}, i^R_{2\alpha}, \dots, i^R_{n\alpha}\right)$$

donde $i^L_{h\alpha}$ e $i^R_{h\alpha}$ representan respectivamente los extremos inferiores y superiores de cada a-corte de $\tilde{i}_h$, $h = 1, \dots, $n.

Es decir,

$\forall\alpha \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
& i_{m\alpha}^{L} \text{ es tal que } \sum_{s=1}^{n} a_s\left(1+i_{m\alpha}^{L}\right)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s}\left(1+i_{h\alpha}^{L}\right)^{-1} \\
& i_{m\alpha}^{R} \text{ es tal que } \sum_{s=1}^{n} a_s\left(1+i_{m\alpha}^{R}\right)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s}\left(1+i_{h\alpha}^{R}\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Para resolver las ecuaciones (4) debe concretarse la relación que se desea guarden entre sí los terminos amortizativos a_s: que sean de cuantía constante, que varíen en progresión geométrica, ... Por ejemplo, si dichos términos deben ser de cuantía constante, las expresiones (4) quedan así:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{n}\left(1+i_{m\alpha}^{L}\right)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} \prod_{h=1}^{s}\left(1+i_{h\alpha}^{L}\right)^{-1} \\
& \sum_{s=1}^{n}\left(1+i_{m\alpha}^{R}\right)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} \prod_{h=1}^{s}\left(1+i_{h\alpha}^{R}\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

De esta forma podemos calcular los a-cortes de $\tilde{i}_m$, y por tanto representar gráficamente la distribución de posibilidad del tanto medio equivalente i_m.

Ejemplo numérico

Supongamos que una entidad bancaria debe decidir qué tipo de interés aplicar a los préstamos de 5 años de duración y anualidades de amortización constantes. Los expertos financieros opinan que el interés de éste tipo de préstamos se mantendrá durante los dos próximos años constante e igual al 14%, pudiendo, como mucho, descender hasta un 13.5% o llegar hasta un 14.25%. A partir del segundo año se espera que inicien una tendencia a la baja de un punto cada año.

De acuerdo con los datos expuestos expresaremos los tipos de interés futuros del mercado mediante los números borrosos triangulares:

$$
\begin{aligned}
& \tilde{i}_1 = \tilde{i}_2 = (0.135,\ 0.14,\ 0.1425) \\
& \tilde{i}_3 = (0.125,\ 0.13,\ 0.1325) \\
& \tilde{i}_4 = (0.115,\ 0.12,\ 0.1225) \\
& \tilde{i}_5 = (0.105,\ 0.11,\ 0.1125)
\end{aligned}
$$

Utilizando las expresiones (5), calculamos algunos a-cortes de $\tilde{i}_m$:

a	$i_{m\alpha}^{L}$	$i_{m\alpha}^{R}$
0	0.129	0.137
0.25	0.1302	0.1362
0.5	0.1315	0.1355
0.75	0.1327	0.1347
1	0.134	0.134

Estos resutados nos permiten obtener una representación gráfica bastante fiel de la distribución de posibilidad del tanto medio i_m:

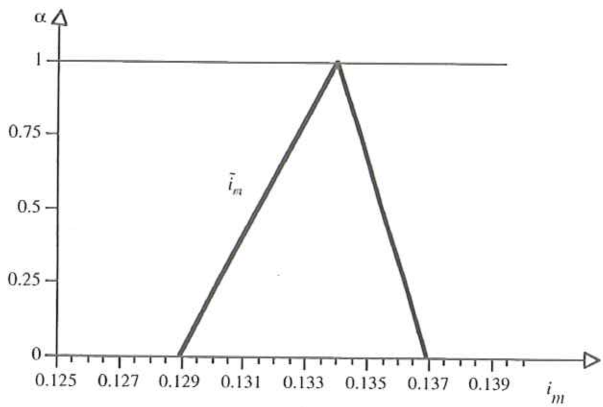

fig.1

3. Elección de un valor para el tipo de interés del préstamo

Una vez obtenida la distribución de posibilidad del tanto medio equivalente, se plantea el problema de la toma de una decisión, es decir de asignar un valor concreto al tipo de interés al que se va a ofertar el préstamo.

El prestamista debe sopesar el hecho de ofertar un tipo de interés atractivo para sus potenciales clientes, con el riesgo de que dicho tipo resulte ser inferior al medio de mercado.

Analicemos para ello la información que nos proporciona el conocimiento de la mencionada distribución de posibilidad, es decir el conocimiento del número borroso $\tilde{i}_m$:

Mediante la expresión (2) obtendremos la posibilidad, $Poss\left(i_m = i_m^*\right)$, de que el tanto medio adopte un determinado valor i_m^*. Por ejemplo en nuestro caso práctico $Poss\left(i_m = 0.1347\right) = 0.75$.

Pero también nos suministra las distribuciones de posibilidad de $i_m \leq i_m^*$, y de $i_m > i_m^*$. De acuerdo con la propiedad 3) de las medidas de posibilidad (véase Apéndice expresiones (7)) definimos $Poss\left(i_m \leq i_m^*\right)$ y $Poss\left(i_m > i_m^*\right)$como la mayor posibilidad de ocurrencia de que $i_m \leq i_m^*$ y de que $i_m > i_m^*$, respectivamente, obtendremos:

$$Poss\left(i_m \leq i_m^*\right) = \begin{cases} Poss\left(i_m = i_m^*\right) & \text{si } \ i_m^* < i_{m1}^L \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$Poss\left(i_m > i_m^*\right) = \begin{cases} Poss\left(i_m = i_m^*\right) & \text{si } \ i_m^* > i_{m1}^R \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6}$$

aquí es conveniente recordar que, contrariamente a lo que ocurre en probabilidad, la suma de las posibilidades de ocurrencia de dos eventos complementarios puede ser mayor que 1 [Dubois-Prade, 1988]. De manera que puede ocurrir que $Poss\left(i_m > i_m^*\right) \neq 1 - Poss\left(i_m \leq i_m^*\right)$. Sin embargo sí es cierto que *la necesidad* de que $i_m > i_m^*$ viene dada por: $Nec\left(i_m > i_m^*\right) = 1 - Poss\left(i_m \leq i_m^*\right)$. La necesidad, o grado de certeza, de un evento *A*, *Nec(A)*, es una medida de la imposibilidad del evento opuesto [Buckley, 1988].

Los a-cortes de la distribución de posibilidad de i_m permiten al decisor conocer el grado de certeza de que el valor de i_m, se mantenga en un determinado intervalo. Así en nuestro ejemplo numérico el 0-corte indica que es imposible que el tanto medio sea menor que 0.129 o mayor que 0.137, o lo que es lo mismo: el grado de certeza de que esté entre 0.129 y 0.137 es igual a 1. El 0.5-corte nos dice que, con un grado de certeza de 0.5, el valor del tanto medio se encontrará entre 0.1315 y 0.1355. Obsérvese que, como es lógico, cuanta mayor precisión se desee, menor será el grado de certeza.

Con toda esta información el decisor puede evaluar el riesgo de ofertar un tipo de interés que en definitiva resulte menor que el medio de mercado. Por ejemplo, $Poss\left(i_m = 0.1302\right) = 0.25$, y por las ecuaciones (6), $Poss\left(i_m \leq 0.1302\right) = 0.25$ y

$Poss(i_m > 0.1302) = 1.$

Pensamos que la lógica borrosa puede aportar aún mayor información que la descrita en el parrafo anterior, para ayudar al decisor a tomar una decisión. Para ello adoptemos el siguiente punto de vista: utilizando una relación de preferencia borrosa entre número borrosos trataremos de determinar en qué grado el número borroso $\tilde{i}_m$ es mayor que un número ordinario *i*. Esto proporcionará al prestamista una medida del riesgo que corre de que el tipo de interés i ofertado en el préstamo resulte inferior al de mercado. Para esta comparación vamos a utilizar un criterio de ordenación de números borrosos debido a Yuan [1991]:

Yuan define una relación de preferencia borrosa $Q(\tilde{A}, \tilde{B})$, entre pares de números borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, por medio de la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_Q(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{cases} \dfrac{S_1 + S_2}{S} \ , & S > 0 \\ \dfrac{1}{2} \ , & S = 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ S_1 &= \int_{\{\alpha | A_\alpha^R > B_\alpha^L\}} \left[A_\alpha^R - B_\alpha^L\right] d\alpha \\ S_2 &= \int_{\{\alpha | A_\alpha^L > B_\alpha^R\}} \left[A_\alpha^L - B_\alpha^R\right] d\alpha \\ S_3 &= \int_{\{\alpha | A_\alpha^R < B_\alpha^L\}} \left[B_\alpha^L - A_\alpha^R\right] d\alpha \\ S_4 &= \int_{\{\alpha | A_\alpha^L < B_\alpha^R\}} \left[B_\alpha^R - A_\alpha^L\right] d\alpha \end{aligned}$$

$\mu_Q(\tilde{A}, \tilde{B})$ es un valor entre 0 y 1 que indica el grado en el que el número borroso $\tilde{A}$ es mayor que el número borroso $\tilde{B}$; $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = h > \frac{1}{2}$ indica que $\tilde{A}$ es preferido a $\tilde{B}$ en un grado *h*, (si $h = 1$, $\tilde{A}$ es absolutamente mayor que $\tilde{B}$); $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = h < \frac{1}{2}$ equivale a decir que $\tilde{B}$ es preferido a $\tilde{A}$ en grado $1\text{-}h$, y $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{2}$ indica que $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son indiferentes.

La explicación que da Yuan de su método es la siguiente: S_1 corresponde a la porción en la que $\tilde{A}$ es preferido a $\tilde{B}$ en la situación más favorable. S_2 es la porción en la que $\tilde{A}$ es preferido a $\tilde{B}$, en la situación más desfavorable. S_3 y S_4 corresponden a las porciones en que $\tilde{A}$ no es preferido a $\tilde{B}$, en las situaciones más favorables y más desfavorables respectivamente. Tambien podría interpretarse así: el grado de preferencia de $\tilde{A}$ sobre $\tilde{B}$, viene medido por el cociente de la distancia a cero de la parte positiva de la diferencia $\tilde{A}$-$\tilde{B}$, y la distancia a cero de $\tilde{A}$-$\tilde{B}$. Es evidente que S=0 si y solo si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ se reducen a números vulgares idénticos.

En las figuras 2 y 3 , puede verse la interpretación geométrica de las componentes que intervienen el índice de Yuan.

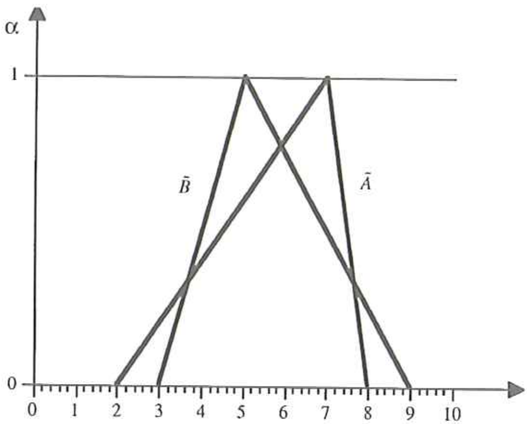

fig.2

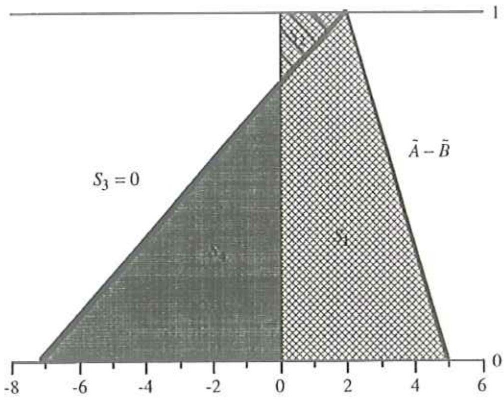

fig. 3

Volvamos ahora a nuestro ejemplo numérico: utilizando el índice de Yuan comparemos el número borroso $\tilde{i}_m$ (véase figura 1), con diferentes valores crisp (no borrosos) i, pertenecientes al soporte de $\tilde{i}_m$, es decir consideraremos sólo valores que tengan posibilidad de ocurrencia mayor que 0. Trazemos la gráfica del índice de comparación $\mu_Q(\tilde{i}_m, i)$. La ordenada de dicha gráfica indica el grado en que el futuro interés medio incierto, cuya distribución de posibilidad viene dado por $\tilde{i}_m$, es superior a un determinado tipo de interés i:

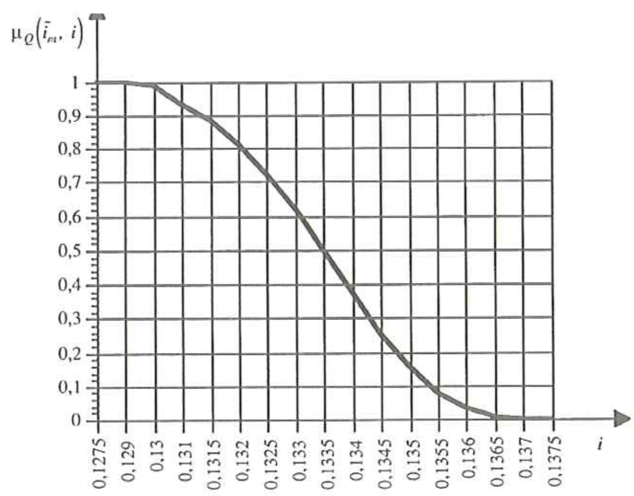

fig. 4

La ordenada de esta gráfica, le suministra al prestamista una medida del riesgo de concertar un tipo de interés menor que el medio futuro de mercado, si se decide por un determinado tipo de interés i . Como se vé, y como era de esperar de acuerdo con la figura 1, el citado riesgo oscila entre el valor 1 (es decir total) para tipos menores que 12.9%, y el valor 0 para tipos mayores que 13.7%. Por ejemplo para i=0.1302, obtenemos $\mu_Q\left(\tilde{i}_m,\ 0.1302\right)$=0.98.

CONCLUSIONES

El tratamiento probabilístico de la incertidumbre corresponde a hechos frecuencialmente estables, categoría a la que dificilmente podemos asumir pertenece la cuantía de los tipos de interés futuros. La borrosidad es apropiada para tratar problemas en los que no existen perfiles definidos en la información disponible, lo que suele ocurrir cuando la opinión de los expertos interviene de manera fundamental en la asignación de valores a los parámetros inciertos del problema. La teoría de posibilidad al trabajar con operadores blandos, tipo max-min, proporciona un método adecuado para tratar la débil información disponible y permite al decisor tomar decisiones basadas en esa información imprecisa.

En este trabajo se muestra como puede utilizarse la teoría de posibilidad para resolver un problema financiero: la determinación, por parte del prestamista, del tipo de interés de un préstamo en base a la estimación de los tantos de interés futuros de mercado, los cuales al ser inciertos se tratan como números borrosos.

Por ser la información imprecisa, también lo será la solución. Hemos visto como obtener la distribución de posibilidad del tanto medio buscado, la cual se corresponde con un número borroso.

Hemos estudiado como, dentro de la teoria de posibilidades, esta solución imprecisa, al contener tanto las sitaciones óptimistas como las pesimistas, permite al prestamista sopesar el hecho de fijar un tipo de interés atractivo para los clientes, con el riesgo de ofertar un tipo de interés que en definitiva resulte menor que el tanto medio de mercado. Además, hemos complementado lo anterior utilizando un criterio de comparación entre números borrosos que proporciona al decisor una medida del mencionado riesgo.

APÉNDICE (nociones elementales sobre subconjuntos borrosos y teoría de posibilidad)

A.1. Noción de subconjunto borroso

Noción de función de pertenencia [Kaufmann, A. 1.973, pg. 1] : dado un referencial Ω y un subconjunto $A \subset \Omega$. Se tiene la costumbre de representar por el símbolo $\in$ que un elemento x de Ω pertenece a A: $x \in A$. Pero puede tambien usarse otro concepto: el de *función carácterística* $\mu_A(x)$, cuyo valor indica si x pertenece o no a A:

$$\begin{array}{lll} \mu_A(x) = 1 & \text{si} & x \in A \\ \mu_A(x) = 0 & \text{si} & x \notin A \end{array}$$

Sin embargo existen conjuntos con fronteras difusas, en los que de algunos elementos no podrá decirse tajántemente que pertenencen o no al conjunto. Por ejemplo si consideramos el conjunto de los hombres altos, y Juan mide 1,76 podremos decir que Juan pertenece en un cierto grado al conjunto de los hombres altos, siendo además la cuantía de este grado de pertenencia una cuestión subjetiva dependiendo de cada observador.

Tal y como lo definió Zadeh [1965], dado un referencial Ω, un **conjunto borroso** $\tilde{A}$, está caracterizado por su **función de pertenencia** $\mu_{\tilde{A}}$ que asocia a cada elemento de Ω con un número α del intervalo [0,1]. De manera que para $x \in \Omega$, $\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x)$ se interpreta como el grado de pertenencia de x al conjunto $\tilde{A}$. Obsérvese que un conjunto ordinario es un caso particular de conjunto borroso, en el que $\mu_A(x)$ solo puede valer 0 (si $x \notin A$) ó 1 (si $x \in A$).

A.2. Distribución de posibilidad

Cuando la lógica borrosa se aplica en el campo de la incertidumbre, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ se interpreta como la posibilidad de que el parámetro de cuantía incierta A adopte el valor x. Esta interpretación ha dado lugar a un rama de la teoría de los conjuntos borrosos llamada *teoría de posibilidades*, propuesta por Zadeh en 1.978. Se trata ahora de dar una visión no probabilista de la incertidumbre y por tanto de modelizar situaciones en las que la información disponible es incompleta.

Supongamos que Juan es un profesor que tiene 33 años, podríamos decir que el grado de pertenencia de Juan al conjunto borroso de *los profesores jóvenes* es de 0.7[1]. Esta es la interpretación *cl ásica* de conjunto borroso: 0.7 es la compatibilidad de 28 años con con el concepto *profesor joven*. La información de que se dispone es completa, sabemos la edad exacta de Juan, la imprecisión viene dada por la *gradualidad* de la propiedad (profesor joven) que caracteriza a los elementos del conjunto.

Sin embargo si lo único que sabemos de Juan es que es un profesor bastante joven. Se trataría ahora de saber cual es la posibilidad de que Juan tenga una determinada edad, asignando, en base a la información incompleta de que se dispone, un grado 1 a aquellas edades que se consideren completamente posibles, un grado 0 a aquellas que se consideren completamente imposibles, y grados intermedios entre 0 y 1 aquellas que no sean ni imposibles ni completamente posibles. De esta manera podríamos obtener una distribución de posibilidad de la edad de Juan. Ahora 0.7 se interpreta como la ***posibilidad*** de que Juan tenga 33 años dada la proposición *Juan es un profesor bastante joven*. De la misma forma esto puede trasladarse a la representación de los valores más o menos posibles que puede tomar en el futuro una magnitud de cuantía incierta.

A.3. Medidas de posibilidad

Supongamos que Ω que representa *el acontecimiento que con seguridad es cierto.* Diremos que la confianza en que ocurra Ω es 1, mientras que la confianza en que ocurra un acontecimiento que se sabe es imposible es 0. Es lógico pues que la confianza en que un evento $A \subseteq \Omega$ sea cierto, corresponda a un valor comprendido entre 0 y 1.

Además parece coherente pensar que si la ocurrencia de un acontecimiento A implica la ocurrencia de otro B, la confianza en A sea menor o igual que la confianza en B.

Dado un enunciado A no borroso se evalua el grado de confianza en que sea verdadero, es decir *hasta que punto existe una interpretación de la información disponible, teniendo un alto grado de posibilidad, para la cual A es verdadero* [Dubois, D. and Prade, H., 1.991]. Esta evaluación corresponde al máximo de los grados de posibilidad de las diferentes interpretaciones de la información disponible que hacen A verdadero. Entonces, dados dos eventos A y B, la posibilidad de que ocurra "A o B", es

[1] Obsérvese que la determinación del grado de pertenencia depende del contexto y de manera subjetiva del observador que asigna el predicado vago *profesor joven*.

la misma que la del tenga mayor posibilidad de ser cierto entre los dos acontecimientos (A, B) que lo componen.

Con las anteriores consideraciones se llama **medida de posibilidad** [Zadeh, L.A., 1978], a una aplicación del conjunto de partes de Ω en el intervalo [0, 1]:

$$poss : \mathrm{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$$

que verifique las siguientes propiedades

1) $poss(\varnothing) = 0 \quad \text{y} \quad poss(\Omega) = 1$
2) $\forall \mathrm{A},\mathrm{B} \in \Omega, \quad \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow poss(\mathrm{A}) \leq poss(\mathrm{B})$
3) $\forall \mathrm{A},\mathrm{B} \in \Omega,\ poss(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \max(poss(\mathrm{A}), poss(\mathrm{B}))$

A.4. Números borrosos

Un número borroso intuitivamente viene a significar que los posibles valores que puede tomar una determinada magnitud están alrededor de un número o intervalo real al que se llama **núcleo**, siendo su posibilidad de ocurrencia menor a medida que nos alejamos del núcleo, (a partir de ahora supondremos que el referencial es el conjunto de los números reales **R**). Los valores del núcleo son aquellos a los que se asigna una mayor posibilidad de ocurrencia, el cual por lo dicho en el último párrafo debe ser 1, pues todo número borroso debe estar normalizado.

Es decir un número borroso es un caso particular de subconjunto borroso, cuya función de pertenencia es, creciente a la izquierda del núcleo y decreciente a la derecha:

$$\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in (-\infty, a_1] \\ f_A(x) & \text{creciente en } [a_1, a_2] \\ 1 & \forall x \in [a_2, a_3] \\ g_A(x) & \text{decreciente en } [a_3, a_4] \\ 0 & \forall x \in [a_4, \infty) \end{cases}$$

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \quad \text{son números reales}$$

Se llama **α-corte** de un subconjunto borroso $\tilde{A}$ al conjunto de los valores cuya posibilidad de ocurrencia es mayor o igual que α, y lo designaremos por A_α, (véanse fig. 2 y 3), es decir que:

$$A_\alpha = \left\{ x \in \Omega | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \right\} \quad (8)$$

Los a-cortes de un número borroso son intervalos cerrados encajados (es decir que si $\alpha < \alpha'$ entonces $A_\alpha \supseteq A_{\alpha'}$.

Un caso particular importante son los **números borrosos triangulares**, cuya función de pertenencia es lineal tanto a la izquierda como a la derecha del núcleo, con lo que quedan definidos mediante cuatro parámetros $(a_1, [a_2, a_3]\ a_4)$, calculándose por tanto sus α-cortes así:

$$A_\alpha = \left[a_1 + (a_2 - a_1)\alpha \, , \; a_4 - (a_4 - a_3)\alpha \right] \quad (9)$$

A.5. Principio de extensión de Zadeh

Supongamos una función f de un conjunto Ω en otro U, $f: \Omega \to U$, es decir $y=f(x)$, siendo $x \in \Omega, y \in U$. Sea $\tilde{A}$ un subconjunto borroso de Ω, entonces f induce en U un subconjunto borroso $\tilde{B} \subset U$, cuya función de pertenencia es (teniendo en cuenta (1.9)):

$$\forall y \in U \qquad \mu_{\tilde{B}}(y) = poss(f^{-1}(y)) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \left\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \right\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = 0 \quad \text{si} \quad f^{-1}(y) = \varnothing$$

es decir que el grado de confianza en un elemento $y \in U$ es el mismo que la posibilidad de ocurrencia del conjunto $f^{-1}(y)$, formado por todos sus antecedentes [Kaufmann 1.973, p. 69] .

La expresión anterior, es el **principio de extensión de Zadeh** [1975] y representa un concepto fundamental para el desarrollo de los cálculos con números borrosos.

Cuando f es una función de varias variables independientes $f: \Omega^n \to U$, siendo $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots\ldots \tilde{A}_n$ los conjuntos borrosos que delimitan los posibles valores de $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega^n$, el principio de extensión se escribe (teniendo en cuenta (2.15)):

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = poss\left(f^{-1}(y)\right) = \sup_{\vec{x} \in f^{-1}(y)} \left\{ \mu_{\tilde{A}_1 x \ldots x \tilde{A}_n}(\vec{x}) \right\} = \sup_{\vec{x} \in f^{-1}(y)} \min\left\{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right\}$$

Es decir que si los argumentos $x_1, x_2, ..., x_n$, de una función están delimitados por sendos subconjuntos borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ... \tilde{A}_n$, entonces dicha función genera un subconjunto borroso $\tilde{B} = f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n\right)$, cuya función de pertenencia viene dada por la expresión anterior.

Referencias

BUCKLEY, J.J. (1988). Possibility and necessity in optimization. *Fuzzy Sets and Systems* **25**, 1-13.

BUCKLEY, J.J. and QU, Y. (1990). On using a-cuts to evaluate fuzzy ecuations. *Fuzzy sets and Systems* **38**, 309-312.

BUCKLEY, J.J. and QU, Y. (1991). Solving fuzzy equations: A new solution concept. *Fuzzy setes and Systems* **39**, 291-301.

DUBOIS, D. et PRADE, H. (1988). *Theorie des Possibilités.* Paris. Masson.

DUBOIS, D. et PRADE, H. (1.991). Les Logiques du Flou et du Très Possible. *La Recherse* 273 Novembre 1991 Volume 22, pp 1308-13015.

GIL LUEZAS, A Y MENEU FERRER, V. (1991). A Note on the Variables Used to Describe the term Structure of Interest Rates. *2nd AFIR International Colloquium.*

JIMÉNEZ, M. (1.994). Métodos matemáticos aplicados a la toma de decisiones financieras en condiciones de incertidumbre. Tesis Doctoral. Universidad del País Vasco.

KAUFMANN, A. (1.973, p. 1). *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous*. Tome I. Paris. Masson.

TORRERO, A. (1989). La formación de los tipos de interés . *Inversión y Finanzas*: I nº 25 oct. pp. 4-9 y II nº 26 nov. pp. 4-11.

YUAN, Y. (1991). Criteria for evaluating fuzzy ranking methods. *Fuzzy Systems* **44**, 139-157.

ZADEH, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control* **8**, 338-353.

ZADEH, L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its aplications to aproximate reasoning. Part I *Information Sciencies* **8** 199-249.

ZADEH, L.A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and Systems* **1**, 3-28.