Sarriko-On

El valor de la información. Cantidad óptima de información

ISBN: 978-84-691-9180-4

José María Usategui Díaz de Otalora

06-08

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

SARRIKO-ON 6/08

El Valor de la Información. Cantidad Óptima de Información.*

José María Usategui

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico II

Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

*Agradezco la financiación de los Ministerios de Educación y Ciencia y de Ciencia e Innovación (SEJ20006-06309 y BEC2003-02084) y del Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco (IT-313-07).

Índice

1 Introducción

En este trabajo se analizan las decisiones de un agente económico cualquiera, en un contexto incierto, cuando puede obtener información que resuelve total o parcialmente la incertidumbre. La presentación se centra en el contexto en el que el decisor es neutral ante el riesgo, dejando para el final la extensión a situaciones en las que el decisor es averso al riesgo. En todos los problemas estudiados se compara la decisión del agente económico cuando no recibe información con su decisión cuando recibe información. El uso de un servicio de información permite al agente adaptar su decisión al mensaje recibido de ese servicio de información y aumentar, como consecuencia de esa adaptación, sus ganancias esperadas (o su utilidad esperada).

El valor de un servicio de información es la cantidad de dinero que está dispuesto a pagar, como máximo, el decisor por utilizar ese servicio de información. Cuando el decisor es neutral ante el riesgo el valor de la información es la diferencia entre las ganancias esperadas del agente económico con información y sus ganancias esperadas sin información. El valor de la información se refiere al valor de una fuente o servicio de información. Es un valor ex-ante, anterior al conocimiento de esa información.

Se denomina información completa a la información que resuelve totalmente la incertidumbre del decisor y permite al decisor saber con seguridad cuál es la situación o el estado en el que se van a producir los resultados de su decisión. Una información que resuelve parcialmente la incertidumbre del decisor es una información incompleta. A menudo hay distintos servicios de información que proporcionan diferentes informaciones incompletas.

La información completa siempre es más valiosa para el decisor que cualquier servicio de información incompleta. El valor de distintos servicios de información incompleta será, en general, diferente. Como se mostrará en la sección 3, los valores de algunos servicios de información incompleta se pueden comparar por su grado de resolución de la incertidumbre.

Un mensaje proporcionado por un servicio de información induce, por parte del decisor, una revisión de las probabilidades asignadas a los distintos estados o situaciones posibles conforme a la Regla o Teorema de Bayes. El valor de la información es positivo si esa revisión de probabilidades hace que el agente económico modifique su decisión con respecto a la que habría tomado si no hubiera recibido información, al menos para uno de los mensajes que puede proporcionar ese servicio de información. Si la revisión de probabilidades implica que, cualquiera que sea el mensaje recibido, la decisión del agente económico es la misma que habría tomado si no hubiera recibido información, o si no fuera posible reaccionar ante la información recibida (ésta llega demasiado tarde, por ejemplo), el valor de la información sería cero. El valor de la información no puede ser negativo en el contexto considerado aquí (el agente económico siempre tiene la posibilidad de no modificar su decisión cuando recibe la información).

La presentación se ha organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se estudia el valor de un servicio de información completa, analizando en detalle el problema de inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado y el problema de elección entre alternativas por parte de un decisor. En la sección 3 se presenta y discute el proceso de revisión de creencias por parte del decisor cuando recibe información. El valor de la información incompleta se estudia en la sección 4. Para ello se muestra cómo se calcula el valor de un servicio de información incompleta, se analizan, también en este contexto, el problema de inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado y el problema de elección entre alternativas por parte de un decisor, se consideran situaciones en las que la incertidumbre tiene varios componentes y se comparan servicios de información que eliminan distintos componentes de esa incertidumbre, y se estudian los valores de informaciones que el decisor recibe simultáneamente y cómo proceder cuando se derivan recomendaciones contradictorias de esos servicios de información. La sección 5 se centra en la determinación del nivel de información que es óptimo para el decisor cuando éste puede elegir el nivel, calidad o amplitud de la información a recibir (pero sigue siendo incierto el mensaje que va a recibir). En la sección 6 se estudia brevemente el valor de la información con aversión al riesgo.

El trabajo incluye, en la sección 7, once Ejercicios que aplican los análisis desarrollados en las secciones anteriores a una gran diversidad de situaciones. Cada Ejercicio se presenta con su solución, a veces en forma abreviada. La presentación se completa con unas Lecturas recomendadas.

2 El valor de la información completa

Un servicio de información que proporciona información completa predice perfectamente lo que va a ocurrir. Si hay n estados o situaciones posibles, la información completa dice cuál de esos n estados va a ocurrir. Ese servicio de información emite, por tanto, un mensaje del grupo de n mensajes constituido por los mensajes asociados a estados de forma que cada uno de esos mensajes informaría que va a ocurrir con seguridad el estado asociado a ese mensaje. Como el decisor no sabe qué estado va a ocurrir, no sabe tampoco qué mensaje va a recibir. Si cree que hay una probabilidad p_i de que ocurra el estado E_i, creerá también que hay una probabilidad p_i de que el mensaje del servicio de información completa diga que el estado va a ser E_i.

En las dos secciones siguientes se plantean dos contextos básicos, con incertidumbre y con la posibilidad de obtener información completa, que son suficientemente amplios como para incluir muchas situaciones reales de elección entre alternativas. En cada uno de esos contextos se analiza el problema del decisor y se calcula el valor de la información completa.

2.1 Inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado con información completa

Un empresario neutral ante el riesgo tiene que decidir si invierte en un proyecto nuevo (análogamente, un decisor tiene que decidir si invierte en un activo arriesgado). Si realiza la inversión hay una probabilidad p de que obtenga una ganancia igual a x (éxito) y una probabilidad $1 - p$ de que obtenga una pérdida igual a z (fracaso), con $x > 0$ y $z > 0$. Si no realiza la inversión sus beneficios son cero. Puede considerarse que, si no realiza la inversión en el proyecto considerado aquí, invierte en un proyecto alternativo preexistente y que las ganancias y pérdidas de invertir en el nuevo proyecto se calculan en relación a las que se obtendrían invirtiendo en ese proyecto preexistente. En esta situación el empresario realizará la inversión en el proyecto nuevo si $px + (1 - p)(-z) > 0 \Leftrightarrow p > \frac{z}{x+z}$ (no realizará la inversión si $p < \frac{z}{x+z}$ y estará indiferente entre realizarla y no realizarla si $p = \frac{z}{x+z}$).

Si x aumenta o si z disminuye (o si ocurren ambas cosas), $\frac{z}{x+z}$ disminuye y se amplia el conjunto de valores de p para los que el empresario está dispuesto a realizar la inversión cuando no recibe información (la inversión resulta ahora más atractiva). Si x disminuye o si z aumenta se obtienen los efectos contrarios.

Si el empresario recibiera información completa realizaría la inversión si la información le dijera que la inversión va a ser un éxito y no realizaría la inversión si la información le dijera que la inversión va a ser un fracaso, ya que la información acierta con lo que va a ocurrir. Como cree que hay una probabilidad p de que la inversión sea un éxito, cree también que hay una probabilidad p de que la información completa diga que la inversión va a ser un éxito y, por tanto, que hay una probabilidad $1-p$ de que la información completa diga que la inversión va a ser un fracaso. Así, la ganancia esperada con información completa es $px + (1-p)(0) = px$.

El valor de la información completa (o diferencia entre la ganancia esperada con información completa y la ganancia esperada sin información) es:

$$VI = \begin{cases} px & \text{si } p \leq \frac{z}{x+z} \\ (1-p)z & \text{si } p \geq \frac{z}{x+z} \end{cases}$$

VI es nulo cuando $p = 0$ y cuando $p = 1$. En estos casos el empresario está seguro de lo que va a ocurrir y cree que la información completa solamente va a confirmar sus creencias (por supuesto, puede equivocarse) y no está dispuesto a pagar nada por esa información. Por otra parte, el valor de la información es máximo cuando $p = \frac{z}{x+z}$ (el valor de la información aumenta con p cuando $p < \frac{z}{x+z}$ y disminuye con p cuando $p > \frac{z}{x+z}$). Cuando $p = \frac{z}{x+z}$ el empresario está indiferente entre realizar la inversión y no realizarla, y es entonces cuando la información resulta más útil para elegir entre ambas alternativas. El valor máximo de VI es $VI_{\max} = \frac{xz}{x+z}$. Nótese que los intervalos de la función VI pueden expresarse también en función del parámetro x o del parámetro z, además de en función de p.

Cuando x aumenta, VI aumenta para aquellos valores de p para los que no se realizaría la inversión en el nivel previo de x si el empresario no recibiera información. La razón es que la información completa permite beneficiarse de una inversión que implica una mayor ganancia cuando el mensaje es que la inversión va a ser un éxito. Cuando x aumenta, el valor máximo de VI aumenta. Cuando z disminuye, VI disminuye para aquellos valores de p para los que se realizaría la inversión en el nivel nuevo de z si el empresario no recibiera información. La razón es que la información completa permite ahorrarse las pérdidas de invertir cuando el mensaje es que la inversión va a ser un fracaso. Cuando z disminuye, el valor máximo de VI disminuye.

2.2 Elección entre alternativas con información completa

Un decisor tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La situación es incierta ya que puede haber n situaciones o estados E_i posibles. El decisor cree que la probabilidad del estado E_i es $\Pr(E_i) = p_i$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i (si $x_i^k < 0$, la alternativa X^k ocasiona una pérdida si el estado es E_i). Esas ganancias y pérdidas podrían calcularse en relación a las que se obtendrían con una alternativa que representaría la situación preexistente o status quo. Si esta alternativa preexistente fuera también una opción a considerar, proporcionaría una ganancia, en relación a sí misma, igual a cero en cada estado.

Si el decisor no recibe información escogerá la alternativa que maximiza su ganancia esperada, es decir, resolverá $\max_k \left\{\sum_{i=1}^n \Pr(E_i) x_i^k\right\}$. Cuando recibe información completa resolverá $\max_k \left\{x_i^k\right\}$ si la información indica que el estado va a ser E_i, para $i = 1, ..., n$. Como el decisor cree que la probabilidad de que la información completa indique que el estado va a ser E_i es igual p_i (para $i = 1, ..., n$), ya que esa es la probabilidad que asigna a priori a ese estado, la ganancia esperada con información completa es $\sum_{i=1}^n (\Pr(E_i) \max_k \left\{x_i^k\right\})$. Por tanto, el valor de la información completa es:

$$VI = \sum_{i=1}^n (\Pr(E_i) \max_k \left\{x_i^k\right\}) - \max_k \left\{\sum_{i=1}^n \Pr(E_i) x_i^k\right\}$$

3 Revisión de creencias cuando se recibe información

El mensaje que se obtiene de un servicio de información sirve para que el decisor revise sus creencias sobre las probabilidades de los estados y decida conforme a esas creencias revisadas. Cada mensaje de un servicio de información da lugar a una modificación distinta de las creencias del decisor. Así, la elección del decisor puede adaptarse a la revisión de creencias causada por cada mensaje.

Cuando la información es completa, la revisión de creencias es fácil de obtener. Como el mensaje que se reciba dirá con seguridad cuál es el estado que va a ocurrir, al recibir el mensaje que pronostica el estado E_i la probabilidad revisada (a posteriori) del estado E_i será 1 y las probabilidades revisadas de los demás estados serán 0.

Cuando se recibe información incompleta la revisión de creencias es un poco más complicada, aunque a veces puede obtenerse de forma bastante directa. Considérese, por ejemplo, que hay tres estados posibles, E_1, E_2 y E_3, y que el decisor cree inicialmente que la probabilidad de cada estado es la misma ($\frac{1}{3}$ para cada uno). Si el decisor adquiere un servicio de información que sólo informa si va a ocurrir el estado E_3 o si no va a ocurrir ese estado, la revisión de creencias sería de la siguiente forma: Si el mensaje que recibe el decisor es que va a ocurrir E_3, el decisor asignará una probabilidad revisada igual a 1 a ese estado y una probabilidad revisada igual a cero a cada uno de los demás estados. Si el mensaje que recibe el decisor es que no va a ocurrir E_3, el decisor sabe que ocurrirá E_1 o E_2, pero no sabe cuál de esos dos estados ocurrirá. Como inicialmente creía que E_1 y E_2 eran igual de probables, seguirá creyendo que son igual de probables (el mensaje que dice que no va a ocurrir E_3 no da al decisor ningún argumento para dejar de creer que E_1 y E_2 son igual de probables). Por tanto, si recibe el mensaje que dice que no va a ocurrir E_3 la probabilidad revisada para E_3 será 0 y las probabilidades revisadas para los estados E_1 y E_2 serán $0,5$ para cada uno (la suma de las probabilidades tiene que ser 1).

En muchos servicios de información incompleta, sin embargo, la revisión de creencias no puede calcularse de forma tan directa. A continuación se presenta el método general de revisión de creencias que es aplicable a cualquier servicio de información.

El método general de revisión de creencias aplica la Regla (o Teorema) de Bayes para revisar las probabilidades asignadas a los estados. Como punto de partida se considera que el decisor tiene unas creencias o probabilidades iniciales sobre los estados. Para calcular la revisión de creencias asociadas a un servicio de información hace falta considerar también la probabilidad que el decisor cree que hay de recibir cada mensaje de ese servicio de información en cada estado posible. Esa probabilidad puede estar basada en la experiencia o en conocimientos previos del decisor.

Este suele ser el contexto al que se enfrenta a menudo un decisor. El decisor no sabe qué estado va a ocurrir pero tiene unas creencias iniciales representadas por las probabilidades que asigna a cada estado posible. Además, el decisor puede conseguir información, pero esa información es pocas veces completa. Evidentemente el decisor no sabe qué le va a decir la información, pero, sin embargo, tiene también unas creencias sobre la probabilidad de que si el estado fuera E_i el servicio de información proporcione el mensaje M_j (y esto para cualesquiera i y j). Así, habrá informaciones (mensajes) que considerará poco probables en ciertos estados pero mucho más probables en otros estados.

Por tanto, inicialmente el decisor tiene unas creencias o probabilidades sobre los estados o situaciones posibles y unas creencias sobre las probabilidades de recibir cada mensaje en cada estado. Sea $\Pr(E_i)$ la probabilidad que asigna inicialmente el decisor al estado E_i y sea $\Pr(M_j/E_i)$ la probabilidad que cree que hay de recibir cada mensaje del servicio de información considerado en cada estado posible.[1] Para obtener las probabilidades revisadas se calcula en primer lugar la probabilidad de recibir cada mensaje:

$$\Pr(M_j) = \sum_{i=1}^{n} (\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)),$$

donde n es el número de estados o situaciones posibles. Una vez obtenidas las probabilidades de los mensajes se calculan las probabilidades revisadas de los estados (en función del mensaje recibido) aplicando la Regla o Teorema

[1] Las probabilidades de los mensajes dado cada estado podrían ser probabilidades en términos esperados. Por ejemplo, $\Pr(M_1/E_2)$ podría depender de alguna variable aleatoria que no esté incorporada en la definición de los estados (la climatología, algún aspecto de la coyuntura económica, la regulación del mercado correspondiente, etc.). Así, $\Pr(M_1/E_2) = 0,3$ puede obtenerse en una situación en la que hay un 50% de posibilidades de que esa probabilidad sea 0,5 y un 50% de posibilidades de que sea 0,1. En todo caso debe ser $\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j/E_i) = 1$ para cualquier estado E_i.

de Bayes:[2]

$$\Pr(E_i/M_j) = \frac{\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)}{\Pr(M_j)}$$

Cuando la información es completa el número de mensajes posibles es igual al número de estados, $\Pr(M_i/E_i) = 1$ para todo i y $\Pr(M_j/E_i) = 0$ para todo $j \neq i$. Para $i = 1, ..., n$, el decisor cree que el servicio de información completa informará que el estado es el E_i con una probabilidad igual a la probabilidad a priori que el propio decisor asignaba a ese estado. Así, $\Pr(M_i)) = \Pr(E_i))$ para todo i, y $\Pr(E_i/M_i) = 1$ para todo i y $\Pr(E_j/M_i) = 0$ para todo $j \neq i$.

Si el servicio de información proporciona información incompleta se procede de la misma manera. En un servicio de información incompleta el número de mensajes puede coincidir también con el número de estados. Pero en muchos servicios de información incompleta el número de mensajes es menor que el número de estados. Considérese el servicio de información incompleta considerado anteriormente en este apartado: hay tres estados posibles, E_1, E_2 y E_3, el decisor cree inicialmente que la probabilidad de cada estado es la misma ($\frac{1}{3}$ para cada uno) y se puede adquirir un servicio de información que sólo informa si va a ocurrir el estado E_3 o si no va a ocurrir ese estado. En este caso sería:

$\Pr(M/E)$	$M_1 : E_3$ ocurre	$M_2 : E_3$ no ocurre
E_1	0	1
E_2	0	1
E_3	1	0

$$\Pr(M_1) = \sum_{i=1}^{n}(\Pr(M_1/E_i)\Pr(E_i)) = \frac{1}{3},$$

$$\Pr(M_2) = \sum_{i=1}^{n}(\Pr(M_2/E_i)\Pr(E_i)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

[2]Nótese que, por la Regla de Bayes, es

$$\Pr(M_1).\Pr(E_1/M_1) + \Pr(M_2).\Pr(E_1/M_2) + \Pr(M_3).\Pr(E_1/M_3) =$$

$$= \Pr(E_1).(\Pr(M_1/E_1) + \Pr(M_2/E_1) + \Pr(M_3/E_1)) = \Pr(E_1).1 = \Pr(E_1)$$

y

$\Pr(E/M)$	M_1	M_2
E_1	0	$\frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$
E_2	0	$\frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$
E_3	$\frac{1/3}{1/3} = 1$	0

Cuando el decisor recibe información incompleta, debe tratar cualquier información que reciba como un mensaje a tener en cuenta para revisar sus creencias sobre las probabilidades de los estados. Considérese una empresa que contrata a unos expertos para que le informen sobre la conveniencia de lanzar al mercado un producto nuevo que acaba de desarrollar. Los mensajes de los expertos pueden ser de distintos tipos. Considérense los siguientes tipos de mensaje:

i) "Las ventas en el mercado están aumentando un 15% en relación al año pasado". En este caso el experto aporta un dato.

ii) "Estimo que hay un 60% de posibilidades de que el producto tenga éxito si se lanza al mercado". En este caso el experto nos comunica su probabilidad a posteriori.

iii) "Mi recomendación es lanzar el producto al mercado". En este caso el experto aporta su opinión sobre la alternativa con mayor utilidad esperada.

Estos tres tipos de mensajes deben ser tratados de la misma manera por el decisor. El decisor tiene que combinar sus probabilidades (o creencias) a priori con las probabilidades que cree que hay de recibir cada mensaje en cada estado para obtener las probabilidades a posteriori. Sin embargo, la matriz de probabilidades de cada mensaje en cada estado depende no sólo de la credibilidad que otorgue el decisor al experto sino también del tipo de mensajes que elabore el experto (datos, estimación de la probabilidad de éxito, etc.).

La revisión de creencias presentada en esta sección es consistente. Deben ser compatibles las creencias iniciales del decisor (sobre las probabilidades de los estados y sobre la probabilidad de recibir cada mensaje en cada estado) y las probabilidades a posteriori que asigna a cada estado. Considérese una situación en la que alguien cree que hay un 20% de posibilidades de que la moneda de un país se deprecie y que si las autoridades monetarias de ese país reducen su tipo de interés la probabilidad de que esa moneda se deprecie es un 80%. En este caso no tendría sentido que esa persona creyera que hay una probabilidad del 50% de que el país reduzca su tipo de interés. Esta última creencia es incompatible con las anteriores. Si alguien cree que hay un 50%

de posibilidades de que el país reduzca su tipo de interés y que si el país reduce su tipo de interés hay una probabilidad del 80% de que la moneda del país se deprecie, no puede creer inicialmente que sólo hay una probabilidad del 20% de que esa moneda se deprecie (esta probabilidad debe ser al menos el 40%). El método de revisión de creencias que se ha planteado evita esta inconsistencia.

4 El valor de la información incompleta

En esta parte del trabajo se analizan situaciones en las que el decisor puede acceder a un servicio de información incompleta y se calcula el valor de la información incompleta en esas situaciones. La información puede ser incompleta de muchas maneras alternativas y, por tanto, podría haber distintos servicios de información que proporcionen diferentes informaciones incompletas. Los valores de distintos servicios de información incompleta serán, en general, diferentes. Cuando el decisor puede optar entre varios servicios de información incompleta escogerá aquél que aumenta más su ganancia esperada, es decir, el servicio de información incompleta para el que es mayor la diferencia entre valor de la información y coste de obtener esa información.

En las secciones siguientes se plantean contextos básicos que son suficientemente amplios como para incluir muchas situaciones reales de elección entre alternativas bajo incertidumbre y con posibilidad de obtención de información incompleta. En cada uno de esos contextos se analiza el problema del decisor y se calculan los valores de las informaciones incompletas.

4.1 Informaciones incompletas: cálculo de sus valores y comparaciones

El valor de un servicio de información incompleta es igual a la diferencia entre la ganancia esperada con ese servicio de información incompleta y la ganancia esperada sin información. La ganancia esperada con un servicio de información incompleta es igual a la suma de los productos de la probabilidad de recibir cada mensaje por la ganancia esperada que se obtiene con la alternativa que proporciona la mayor ganancia esperada si se recibe ese mensaje (y se revisan en consecuencia las probabilidades de los estados).

Considérese que hay n estados E_i, $i = 1, ..., n$, y que el servicio de información incompleta consiste en m mensajes M_j, $j = 1, ..., m$. Las creencias del decisor se concretan en las probabilidades $\Pr(E_i)$ y $\Pr(M_j/E_i)$ para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$. El decisor tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i, con $i = 1, ..., n$ y $k = 1, ..., l$. La ganancia esperada con ese servicio de información incompleta puede expresarse, teniendo en cuenta la Regla o Teorema de Bayes:

$$\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j) \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) x_i^k \right\} = \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) \Pr(M_j) x_i^k \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

Por tanto, no hace falta calcular las probabilidades de los mensajes ni las probabilidades revisadas o a posteriori de los estados para calcular el valor de un servicio de información incompleta. La alternativa que escogería el decisor si recibiera el mensaje M_j sería X^k, donde k es la solución de $\max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$. La ganancia esperada con la alternativa escogida cuando se recibe el mensaje M_j es:

$$\max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i/M_j) x_i^k \right\} = \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i)}{\Pr(M_j)} x_i^k \right\}$$

$$= \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} (\Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i))} x_i^k \right\}$$

Los cálculos que se acaban de presentar permiten saber cuál es el servicio de información incompleta más valioso entre varios servicios de información incompleta alternativos y averiguar cuánto está dispuesto a pagar el decisor por cada servicio de información incompleta. Pero los valores de algunos servicios de información incompleta se pueden comparar por su grado de resolución de la incertidumbre, sin necesidad de calcular explícitamente esos valores. Considérese, por ejemplo, que la incertidumbre del decisor se refiere a cuál de dos estados E_1 o E_2 va a ocurrir y que hay dos posibles servicios de información incompleta, el M y el N. El servicio M proporciona el mensaje M_1 o el mensaje M_2 y el servicio N proporciona el mensaje N_1 o el mensaje N_2. Supóngase que las probabilidades a posteriori (después de recibir un mensaje) del estado E_1 cumplen $\Pr(E_1/M_2) < \Pr(E_1/M_1)$ y $\Pr(E_1/N_2) < \Pr(E_1/N_1)$. En este caso el servicio M de información incompleta es más informativo que el servicio N si los mensajes de M permiten al decisor discriminar mejor entre los estados que los mensajes de N, es decir, si

$$\Pr(E_1/M_2) < \Pr(E_1/N_2) < \Pr(E_1/N_1) < \Pr(E_1/M_1)$$

(el servicio M sería también más informativo que el servicio N si la desigualdad que está más a la derecha, o la que está más a la izquierda, se sustituye por una igualdad). Si el servicio M es más informativo que el servicio N, el valor de la información proporcionada por M es mayor que el valor de la información proporcionada por N. Por ejemplo, si un servicio de información incompleta M es una expansión que conserva la media (*mean-preserving spread* en el espacio de probabilidades a posteriori de los estados) de un servicio de información incompleta N, el servicio M es más informativo que el servicio N.[3]

4.2 Inversión en un proyecto nuevo o en un activo arriesgado con información incompleta

Un empresario neutral ante el riesgo tiene que decidir si invierte en un proyecto nuevo. Si realiza la inversión hay una probabilidad p de que obtenga una ganancia igual a x (éxito: E) y una probabilidad $1-p$ de que obtenga una pérdida igual a z (fracaso: F), con $x > 0$ y $z > 0$. Si no realiza la inversión sus beneficios son cero. Puede considerarse que, si no realiza la inversión en el proyecto considerado aquí, invierte en un proyecto alternativo preexistente y que las ganancias y pérdidas de invertir en el nuevo proyecto se miden en relación a las que se obtendrían invirtiendo en ese proyecto preexistente. En esta situación, si no recibe información, el empresario realizará la inversión si $px - (1-p)z > 0 \Leftrightarrow p > \frac{z}{x+z}$ (no realizará la inversión si $p < \frac{z}{x+z}$ y estará indiferente entre realizarla y no realizarla si $p = \frac{z}{x+z}$).

Si x aumenta o si z disminuye (o si ocurren ambas cosas), $\frac{z}{x+z}$ disminuye y se amplia el conjunto de valores de p para los que el empresario está dispuesto a realizar la inversión cuando no recibe información (la inversión resulta ahora más atractiva). Si x disminuye o si z aumenta se obtienen los efectos contrarios.

[3] En este caso N es una contracción que conserva la media de M.

Suponga que el empresario puede recibir como información los mensajes M y N, de forma que cree que hay una probabilidad q de recibir el mensaje M si la inversión fuera un éxito en caso de realizarse y una probabilidad r de recibir el mensaje N si la inversión fuera un fracaso en caso de realizarse. Se considera, sin pérdida de generalidad, que $q \geq 1 - r$ (se denomina M al mensaje que es más probable en caso de el estado sea E que en caso de que el estado sea F; si los dos mensajes son igual de probables cuando el estado sea E que cuando el estado sea F, se denomina mensaje M a cualquiera de los dos mensajes). Se desea determinar cuál es el valor de este servicio de información incompleta.

Con ese servicio de información incompleta las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(M/E)$) son, por tanto:

$\Pr(M/E)$	M	N
$\acute{e}xito : E$	q	$1-q$
$fracaso : F$	$1-r$	r

La ganancia esperada con este servicio de información incompleta es (véase la sección 4.1):

$$\max\{\Pr(M/E)\Pr(E)x - \Pr(M/F)\Pr(F)z, 0\}$$

$$+\max\{\Pr(N/E)\Pr(E)x - \Pr(N/F)\Pr(F)z, 0\}$$

$$= \max\{qpx - (1-r)(1-p)z, 0\} + \max\{(1-q)px - r(1-p)z, 0\}$$

Nótese que $qpx - (1-r)(1-p)z > 0 \Leftrightarrow p > \frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}$ y que $(1-q)px - r(1-p)z > 0 \Leftrightarrow p > \frac{rz}{(1-q)x+rz}$. Así, cuando recibe el mensaje M el empresario invertirá si y sólo si $p > \frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}$ y cuando recibe el mensaje N invertirá si y sólo si $p > \frac{rz}{(1-q)x+rz}$.

El valor de la información depende de los valores de los parámetros. Si $q + r = 1$, el valor de la información es nulo. La razón es que entonces $qpx - (1-r)(1-p)z = q(px - (1-p)z)$, $(1-q)px - r(1-p)z = (1-q)(px - (1-p)z)$, y $q(px-(1-p)z)$ y $(1-q)(px-(1-p)z)$ tienen el mismo signo que $px - (1-p)z$ (o las tres expresiones son positivas, o las tres son negativas, o las tres expresiones son nulas). Por tanto, la decisión del empresario será la misma si no se recibe información o si se recibe cualquiera de los dos mensajes: o invierte en los tres casos o no invierte en ninguno de ellos.

Si $q+r>1$ ocurre que $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}<\frac{z}{x+z}<\frac{rz}{(1-q)x+rz}$ y, en consecuencia, la información modifica la decisión en dos casos. Cuando el decisor recibe el mensaje M y $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}<p<\frac{z}{x+z}$ decide invertir en el proyecto nuevo y, sin embargo, sin información no habría realizado esa inversión. Por otra parte, cuando el decisor recibe el mensaje N y $\frac{z}{x+z}<p<\frac{rz}{(1-q)x+rz}$ no invierte en el proyecto nuevo y, sin embargo, sin información sí habría invertido en ese proyecto. El valor de la información (VI) en este caso es, por tanto:

$$VI=\begin{cases} pqx-(1-p)(1-r)z \text{ cuando } \frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}<p<\frac{z}{x+z} \\ -p(1-q)x+(1-p)rz \text{ cuando } \frac{z}{x+z}<p<\frac{rz}{(1-q)x+rz} \\ 0 \text{ cuando } p\leq\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} \text{ o cuando } \frac{rz}{(1-q)x+rz}\leq p \end{cases}$$

Nótese que VI es siempre positivo o cero en el análisis que se acaba de realizar. VI es nulo cuando $p=0$ y cuando $p=1$. En estos casos el empresario está seguro de lo que va a ocurrir y cree que la información completa solamente va a confirmar sus creencias (por supuesto, puede equivocarse) y no está dispuesto a pagar nada por esa información. El valor de la información es máximo cuando $p=\frac{z}{x+z}$, es decir, cuando el decisor estaría indiferente entre invertir y no invertir en el proyecto nuevo si no recibiera información. El valor de la información es creciente en p cuando $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z}<p<\frac{z}{x+z}$ y es decreciente en p cuando $\frac{z}{x+z}<p<\frac{rz}{(1-q)x+rz}$. Nótese que los intervalos de la función VI pueden expresarse también en función del parámetro x, o de z, q o r, además de en función de p. El valor máximo de VI es $VI_{\max}=\frac{xz}{x+z}(q+r-1)$ cuando $q+r>1$.

Nótese que cuando se espera recibir siempre el mensaje M ($q=1$ y $r=0$) el servicio de información no es informativo y la situación es la misma que cuando no se recibe información. Lo mismo ocurre cuando se espera recibir siempre el mensaje N ($q=0$ y $r=1$).

4.3 Información cuando la incertidumbre tiene varios componentes

A veces la incertidumbre tiene varios componentes y la información resuelve sólo uno de esos componentes de incertidumbre. En ese caso se pueden obtener y comparar los valores de los distintos servicios de información que eliminan la incertidumbre de cada uno de esos componentes. Considérese un empresario neutral ante el riesgo que tiene que decidir si invierte en un proyecto nuevo. Hay una probabilidad p de que la situación económica sea buena y una probabilidad $1-p$ de que la situación económica sea mala. Si realiza la inversión y la situación económica es buena hay una probabilidad q de que obtenga una ganancia igual a x (BE, éxito en una situación económica buena) y una probabilidad $1-q$ de que obtenga una pérdida igual a z (BF, fracaso en una situación económica buena), con $x>0$ y $z>0$. Si realiza la inversión y la situación económica es mala hay una probabilidad r de que obtenga una pérdida igual a z (MF, fracaso en una situación económica mala) y una probabilidad $1-r$ de que obtenga una ganancia igual a x (ME, éxito en una situación económica mala). Se considera que $q>1-r$ (lo cual implica $q+r>1$). También se considera que merece la pena realizar la inversión si la situación económica es buena: $qx-(1-q)z>0$ y que no merece la pena realizar la inversión si la situación económica es mala: $(1-r)x-rz<0$. Si no realiza la inversión sus beneficios son cero.

En este contexto pueden analizarse y compararse un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea buena, un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea mala y un servicio de información que diga si la situación económica va a ser buena o mala. Hay cuatro estados o situaciones posibles: BE, BF, ME y MF, con probabilidades pq, $p(1-q)$, $(1-p)(1-r)$ y $(1-p)r$, respectivamente. Sin información el empresario realizará la inversión si

$$p(qx-(1-q)z)+(1-p)((1-r)x-rz)>0 \Leftrightarrow p>\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}$$

Nótese que $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}>0$ ya que $q+r-1>0$ y $(x+z)r-x>0$. Además, $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}$ disminuye con q y aumenta con r.

Con un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea buena se puede recibir el mensaje BE o el mensaje BF. El empresario cree que si la situación económica es buena hay una probabilidad q de recibir el mensaje BE y una probabilidad $1-q$ de recibir el mensaje BF. Las probabilidades a posteriori (o revisadas) de los estados después de recibir alguno de esos mensajes son:

$\Pr(E/M)$	mensaje BE	mensaje BF
BE	p	0
BF	0	p
ME	$(1-p)(1-r)$	$(1-p)(1-r)$
MF	$(1-p)r$	$(1-p)r$

La recepción del mensaje BE indica que $q = 1$ y la recepción del mensaje BF indica que $q = 0$. Por tanto, si el mensaje es BE se realizará la inversión si $p > \frac{(x+z)r-x}{(x+z)r}$ y si el mensaje es BF no se realizará la inversión ya que $-pz + (1-p)((1-r)x - rz) < 0$. La ganancia esperada con un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea buena, si se realiza la inversión cuando se recibe el mensaje BE, es, por tanto:

$$q(px + (1-p)((1-r)x - rz))$$

En consecuencia, el valor de ese servicio de información es:

$$VI = \begin{cases} p(1-q)z - (1-q)(1-p)((1-r)x - rz) \text{ si} \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} \leq p \\ q(px + (1-p)((1-r)x - rz)) \text{ si } \frac{(x+z)r-x}{(x+z)r} < p < \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} \\ 0 \quad \text{ si } p \leq \frac{(x+z)r-x}{(x+z)r} \end{cases}$$

Cuando $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} < p$ un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea buena permite no sólo evitar las pérdidas asociadas a un fracaso de la inversión si la situación económica es buena sino también, en el caso en que el mensaje sea BF, evitar las pérdidas que se producirían si se invierte y la situación económica es mala.

Con un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea mala se puede recibir el mensaje ME o el mensaje MF. El empresario cree que si la situación económica es mala hay una probabilidad $1-r$ de recibir el mensaje ME y una probabilidad r de recibir el mensaje MF. Las probabilidades a posteriori (o revisadas) de los estados después de recibir alguno de esos mensajes son:

$\Pr(E/M)$	mensaje ME	mensaje MF
BE	pq	pq
BF	$p(1-q)$	$p(1-q)$
ME	$1-p$	0
MF	0	$1-p$

La recepción del mensaje ME indica que $r = 0$ y la recepción del mensaje MF indica que $r = 1$. Por tanto, si el mensaje es ME se realizará la inversión si $p < \frac{x}{(x+z)(1-q)}$ y si el mensaje es MF se realizará la inversión si $p > \frac{z}{q(x+z)}$. Pero $qx - (1-q)z > 0 \Rightarrow x > (x+z)(1-q)$ y, por tanto, si el mensaje recibido es ME la inversión se realizará para cualquier valor de p. Además, $\frac{z}{q(x+z)} > \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)}$.

La ganancia esperada con un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea mala, si se realiza la inversión cuando se recibe el mensaje ME pero no cuando se recibe el mensaje MF, es, por tanto:

$$(1-r)(p(qx-(1-q)z)+(1-p)x)$$

Además, la ganancia esperada con un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea mala, si se realiza la inversión tanto cuando se recibe el mensaje ME como cuando se recibe el mensaje MF, es la misma que la ganancia esperada sin información. En consecuencia, el valor de ese servicio de información es:

$$VI = \begin{cases} 0 & \text{si} \frac{z}{q(x+z)} \leq p \\ -rp(qx-(1-q)z)+(1-p)rz \text{ si } \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} < p < \frac{z}{q(x+z)} \\ (1-r)(p(qx-(1-q)z)+(1-p)x) \text{ si } p \leq \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} \end{cases}$$

Cuando $\frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} < p < \frac{z}{q(x+z)}$ un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea mala permite evitar las pérdidas asociadas a un fracaso de la inversión si la situación económica es mala pero también, en el caso en que el mensaje sea MF, hace que se pierdan las ganancias que se obtendrían con la inversión si la situación económica fuera buena. Lo que ocurre es que está pérdida de ganancias es menor que el ahorro de pérdidas cuando $p < \frac{z}{q(x+z)}$.

Con un servicio de información que diga si la situación económica va a ser buena o no se puede recibir el mensaje B o el mensaje M. El empresario cree que hay una probabilidad p de recibir el mensaje B y una probabilidad $1-p$ de recibir el mensaje M. Las probabilidades a posteriori (o revisadas) de los estados después de recibir alguno de esos mensajes son:

$\Pr(E/M)$	mensaje B	mensaje M
BE	q	0
BF	$1-q$	0
ME	0	$1-r$
MF	0	r

La recepción del mensaje B indica que $p = 1$ y la recepción del mensaje M indica que $p = 0$. Por tanto, si el mensaje es B se realizará la inversión y si el mensaje es M no se realizará la inversión. La ganancia esperada con un servicio de información que diga si la situación económica es buena o mala es $p(qx - (1-q)z)$. En consecuencia, el valor de ese servicio de información es:

$$VI = \begin{cases} -(1-p)((1-r)x - rz) \text{ si} \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} < p \\ \\ p(qx-(1-q)z) \text{ si } p \leq \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} \end{cases}$$

Los valores de los parámetros determinarán cuál de los tres servicios de información considerados tiene un valor mayor. Considérese, por ejemplo, que $x = 8$, $z = 3$, $p = 0,3$, $q = 0,6$ y $r = 0,9$. En este caso si el empresario no obtuviera información no realizaría la inversión en el proyecto nuevo ya que $p = 0,3 < \frac{(x+z)r-x}{(x+z)(q+r-1)} = 0,345$. El valor de un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea buena es $0,642$, el valor de un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea mala es $0,668$, y el valor de un servicio de información que diga si la situación económica va a ser buena o mala es $1,08$. Sin embargo, si $p = 0,4$ el valor de un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea buena es $0,936$, el valor de un servicio de información que diga si la inversión en el proyecto nuevo va a ser un éxito o no cuando la situación económica sea mala es 1.879, y el valor de un servicio de información que diga si la situación económica va a ser buena o mala es $1,14$.

4.4 Elección entre alternativas con información incompleta

En esta sección el contexto de partida es análogo al de la sección 2.2. Un decisor tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La situación es incierta ya que puede haber n situaciones o estados E_i posibles. El decisor cree que la probabilidad del estado E_i es $\Pr(E_i) = p_i$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i (si $x_i^k < 0$, la alternativa X^k ocasiona una pérdida si el estado es E_i). Esas ganancias y pérdidas podrían calcularse en relación a las que se obtendrían con una alternativa que representaría la situación preexistente o status quo. Si esta alternativa preexistente fuera también una opción a considerar, proporcionaría una ganancia, en relación a sí misma, igual a cero en cada estado.

Si el decisor no recibe información escogerá la alternativa que maximiza su ganancia esperada, es decir, resolverá $\max_k \left\{\sum_{i=1}^n \Pr(E_i)x_i^k\right\}$. Si recibe información incompleta esa información consiste en m mensajes M_j, $j = 1, ..., m$. Las creencias del decisor se concretan en las probabilidades $\Pr(E_i)$ y $\Pr(M_j/E_i)$ para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$. A partir de la sección 4.1 se tiene que la ganancia esperada con ese servicio de información incompleta es:

$$= \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

Por tanto, el valor de ese servicio de información incompleta es:

$$VI = \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\} - \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

4.5 Valores de informaciones simultáneas

Un decisor tiene que elegir entre dos alternativas para invertir una cantidad determinada. Si invierte en la alternativa o activo A conseguirá una ganancia igual a x_A si la situación económica evoluciona bien (expansión fuerte: E) o una pérdida igual a z_A si la situación económica evoluciona peor (expansión moderada o recesión: R), con $x_A > 0$ y $z_A \geq 0$. Si invierte en la alternativa o activo B conseguirá una ganancia igual a x_B si hay una expansión fuerte en la economía o una pérdida igual a z_B si hay expansión moderada o recesión, con $x_B > 0$ y $z_B \geq 0$. El decisor cree que la probabilidad de expansión fuerte es p y la probabilidad de expansión moderada o recesión es $1 - p$. Se va a considerar, sin pérdida de generalidad, que $x_A \geq x_B$ (se denomina A a la alternativa que proporciona mayor ganancia en caso de expansión fuerte de la economía; si las dos alternativas proporcionan la misma ganancia en una expansión fuerte se denomina alternativa A a cualquiera de las dos alternativas). Si el decisor no realiza la inversión sus ganancias son cero.

Se considera que $px_A - (1-p)z_A > 0$ y $px_B - (1-p)z_B > 0$ (esto implica, por ejemplo, que p no puede ser igual a 0). Por tanto, cuando el decisor no adquiere información invierte en A si $px_A - (1-p)z_A > px_B - (1-p)z_B$, invierte en B si $px_A - (1-p)z_A < px_B - (1-p)z_B$ e invierte en cualquiera de las dos alternativas si $px_A - (1-p)z_A = px_B - (1-p)z_B$.

Suponga que el decisor puede adquirir dos servicios de información M y N. El servicio de información M es un servicio que acierta siempre cuando va a ocurrir E pero que sólo acierta con una probabilidad r cuando va a ocurrir R (es un buen servicio para predecir las expansiones fuertes). Se denotan mediante M_E y M_R los mensajes que puede proporcionar el servicio de información M: M_E es el mensaje que dice que va a haber una expansión fuerte y M_R es el mensaje que dice que va a haber una expansión moderada o recesión. El servicio de información N es, en cambio, un servicio que acierta siempre cuando va a ocurrir R pero que sólo acierta con una probabilidad q cuando va a ocurrir E (es un buen servicio para predecir las expansiones moderadas o recesiones). Se denotan mediante N_E y N_R los mensajes que puede proporcionar el servicio de información N: N_E es el mensaje que dice que va a haber una expansión fuerte y N_R es el mensaje que dice que va a haber una expansión moderada o recesión. La probabilidad esperada de que el servicio de información M acierte el estado que va a ocurrir es $p + (1-p)r$ y la probabilidad esperada de que el servicio de información N acierte el estado que va a ocurrir es $pq + 1 - p$.

Se determina, en primer lugar, cuál sería el valor de cada uno de estos servicios de información incompleta si se adquirieran por separado. Con el servicio de información incompleta M las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(M/E)$) son:

$\Pr(M/E)$	M_E	M_R
E	1	0
R	$1-r$	r

Las probabilidades de los mensajes son $\Pr(M_E) = p + (1-r)(1-p)$ y $\Pr(M_R) = r(1-p)$. Utilizando el Teorema de Bayes, las probabilidades revisadas de los estados, en función del mensaje recibido, son:

$\Pr(E/M)$	M_E	M_R
E	$\frac{p}{p+(1-r)(1-p)}$	0
R	$\frac{(1-r)(1-p)}{p+(1-r)(1-p)}$	1

Por tanto, cuando se recibe el mensaje M_E, la ganancia esperada si se invierte en A es:

$$\frac{p}{p+(1-r)(1-p)}x_A - \frac{(1-r)(1-p)}{p+(1-r)(1-p)}z_A$$

y la ganancia esperada si se invierte en B es:

$$\frac{p}{p+(1-r)(1-p)}x_B - \frac{(1-r)(1-p)}{p+(1-r)(1-p)}z_B$$

Cuando se recibe el mensaje M_R, la probabilidad de R es 1 y, en consecuencia, el decisor no invierte.

Sean:

$$G_A^{M_E} = \Pr(M_E/E)\Pr(E)x_A - \Pr(M_E/R)\Pr(R)z_A = px_A - (1-r)(1-p)z_A,$$

$$G_B^{M_E} = \Pr(M_E/E)\Pr(E)x_B - \Pr(M_E/R)\Pr(R)z_B = px_B - (1-r)(1-p)z_B,$$

$$G_A^{M_R} = \Pr(M_R/E)\Pr(E)x_A - \Pr(M_R/R)\Pr(R)z_A = -r(1-p)z_A$$

y

$$G_B^{M_R} = \Pr(M_R/E)\Pr(E)x_B - \Pr(M_R/R)\Pr(R)z_B = -r(1-p)z_B$$

La ganancia esperada con este servicio de información incompleta es:

$$\max\left\{G_A^{M_E}, G_B^{M_E}, 0\right\} + \max\left\{-r(1-p)z_A, -r(1-p)z_B, 0\right\}$$

El valor del servicio de información incompleta M (o diferencia entre la ganancia esperada con la información incompleta y la ganancia esperada sin información) se obtiene de la siguiente manera:

i) Caso en el que se invierte en la alternativa A si no se recibe información: $(px_A - (1-p)z_A > px_B - (1-p)z_B$ (también puede incluirse aquí, sin pérdida de generalidad, el caso $px_A - (1-p)z_A = px_B - (1-p)z_B)$. Como $px_A - px_B > -(1-r)((1-p)z_B - (1-p)z_A)$, la ganancia esperada con este servicio de información incompleta es $px_A - (1-r)(1-p)z_A$. Por tanto, el valor de esa información es $r(1-p)z_A$.

ii) Caso en el que se invierte en la alternativa B si no se recibe información: $(px_B - (1-p)z_B > px_A - (1-p)z_A)$. En este caso $z_B > z_A$, pero puede ocurrir $px_A - (1-r)(1-p)z_A > px_B - (1-r)(1-p)z_B$, ya que $x_A > x_B$. El valor de la información es, por tanto:

$$VI = \begin{cases} r(1-p)z_B & \text{si } G_B^{M_E} > G_A^{M_E} \\ G_A^{M_E} - G_B^{M_E} - r(1-p)z_B & \text{si } G_A^{M_E} > G_B^{M_E} \end{cases}$$

Nótese que el valor de la información es positivo o nulo en todos los casos presentados.

Con el servicio de información incompleta N las probabilidades de cada mensaje dado cada estado ($\Pr(N/E)$) son:

$\Pr(N/E)$	N_E	N_R
E	q	$1-q$
R	0	1

Las probabilidades de los mensajes son $\Pr(N_E) = qp$ y $\Pr(N_R) = (1-q)p + 1-p$. Utilizando el Teorema de Bayes, las probabilidades revisadas de los estados, en función del mensaje recibido, son:

$\Pr(E/N_E)$	N_E	N_R
E	1	$\frac{(1-q)p}{(1-q)p+1-p}$
R	0	$\frac{1-p}{(1-q)p+1-p}$

Por tanto, cuando se recibe el mensaje N_E, la probabilidad de E es 1 y, en consecuencia, el decisor invierte en A. Cuando se recibe el mensaje N_R, la ganancia esperada si se invierte en A es:

$$\frac{(1-q)p}{(1-q)p+1-p}x_A - \frac{1-p}{(1-q)p+1-p}z_A$$

y la ganancia esperada si se invierte en B es:

$$\frac{(1-q)p}{(1-q)p+1-p}x_B - \frac{1-p}{(1-q)p+1-p}z_B$$

Sean:

$$G_A^{N_E} = \Pr(N_E/E)\Pr(E)x_A - \Pr(N_E/R)\Pr(R)z_A = qpx_A,$$

$$G_B^{N_E} = \Pr(N_E/E)\Pr(E)x_B - \Pr(N_E/R)\Pr(R)z_B = qpx_B,$$

$$G_A^{N_R} = \Pr(N_R/E)\Pr(E)x_A - \Pr(N_R/R)\Pr(R)z_A = (1-q)px_A - (1-p)z_A$$

y

$$G_B^{N_R} = \Pr(N_R/E)\Pr(E)x_B - \Pr(N_R/R)\Pr(R)z_B = (1-q)px_B - (1-p)z_B$$

La ganancia esperada con este servicio de información incompleta es:

$$\max\{qpx_A, qpx_B, 0\} + \max\left\{G_A^{N_R}, G_B^{N_R}, 0\right\}$$

El valor del servicio de información incompleta N (o diferencia entre la ganancia esperada con la información incompleta y la ganancia esperada sin información) se obtiene de la siguiente manera:

i) Caso en el que se invierte en la alternativa A si no se recibe información. El valor de la información es:

$$VI = \begin{cases} -G_A^{N_R} & \text{si } 0 > \max\left\{G_A^{N_R}, G_B^{N_R}\right\} \\ 0 & \text{si } G_A^{N_R} > \max\left\{0, G_B^{N_R}\right\} \\ G_B^{N_R} - G_A^{N_R} & \text{si } G_B^{N_R} > \max\left\{G_A^{N_R}, 0\right\} \end{cases}$$

ii) Caso en el que se invierte en la alternativa B si no se recibe información. En este caso $z_B > z_A$. El valor de la información es:

$$VI = \begin{cases} qpx_A - px_B + (1-p)z_B & \text{si } 0 > \max\left\{G_A^{N_R}, G_B^{N_R}\right\} \\ p(x_A - x_B) - (1-p)(z_A - z_B) & \text{si } G_A^{N_R} > \max\left\{0, G_B^{N_R}\right\} \\ qp(x_A - x_B) & \text{si } G_B^{N_R} > \max\left\{G_A^{N_R}, 0\right\} \end{cases}$$

El valor de la información es positivo o nulo en todos los casos presentados.

Para simplificar la presentación en el resto de la sección se van a considerar los siguientes valores para los parámetros: $p = 0,4$, $r = 0,7$, $q = 0,5$, $x_A = 4$, $z_A = 2$, $x_B = 5$ y $z_B = 3$. Con estos valores de los parámetros si no se recibe información el decisor invierte en la alternativa A. El valor del servicio de información M es 0,84 y el valor del servicio de información N es 0,4. Sin embargo la probabilidad esperada de acertar es casi la misma con los dos servicios de información: 0,82 ($= p + r(1-p)$) con el servicio de información M y 0,80 ($= qp + 1 - p$) con el servicio de información N.

Considérese ahora que los dos servicios de información se adquieren simultáneamente. Si los dos servicios de información dicen que va a haber una expansión fuerte (mensajes M_E y N_E), la mejor respuesta del decisor a M_E es invertir en B (utilizando la revisión de probabilidades de los estados resultante al recibir M_E se obtiene que la ganancia esperada cuando se invierte en B es mayor que la ganancia esperada cuando se invierte en A) y la mejor respuesta del decisor a N_E es invertir en A. Si los dos servicios de información dicen que va a haber una expansión moderada o una recesión (mensajes M_R y N_R), la mejor respuesta del decisor a M_R es no invertir (utilizando la revisión de probabilidades de los estados que ocurre al recibir M_R se obtiene que tanto la ganancia esperada cuando se invierte en B como la ganancia esperada cuando se invierte en A son negativas) y la mejor respuesta del decisor a N_R es también no invertir. Si el servicio de información M predice que va a haber una expansión fuerte (mensaje M_E) y el servicio de información N predice que va a haber una expansión moderada o una recesión (mensaje N_R), la mejor respuesta del decisor a M_E es invertir en B y la mejor respuesta del decisor a N_R es no invertir. Si el servicio de información N predice que va a haber una expansión fuerte (mensaje N_E) y el servicio de información M predice que va a haber una expansión moderada o una recesión (mensaje M_R), la mejor respuesta del decisor a M_R es no invertir y la mejor respuesta del decisor a N_E es invertir en A.

Cuando los dos servicios de información recomiendan la misma alternativa, el decisor hará lo que recomiendan los servicios de información. Sin embargo, las recomendaciones de los servicios de información son, en algunos casos, diferentes. Si las recomendaciones de los dos servicios de información son diferentes, se puede proceder de la siguiente manera: Como la probabilidad esperada de acertar es 0,82 con el servicio de información M y 0,80 con el servicio de información N, pondérese la ganancia esperada de cada alternativa después de cada mensaje por $\frac{0{,}82}{0{,}82+0{,}80}$ en el caso de un mensaje del servicio de información M y por $\frac{0{,}80}{0{,}82+0{,}80}$ en el caso de un mensaje del servicio información N. Así, para cada par de mensajes calcúlese la ganancia ponderada esperada de cada alternativa como la suma de los productos del factor de ponderación correspondiente al servicio de información del que ha partido el mensaje por la ganancia esperada con esa alternativa utilizando las probabilidades revisadas de los estados después de recibir ese mensaje. Por ejemplo, si el decisor recibe los mensajes M_E y N_E, la ganancia ponderada esperada de la alternativa A sería:

$$\frac{0,82}{0,82+0,80}\left(\frac{p}{p+(1-r)(1-p)}x_A - \frac{(1-r)(1-p)}{p+(1-r)(1-p)}z_A\right)$$

$$+\frac{0,80}{0,82+0,80}(x_A) = 3,18$$

y, análogamente, la ganancia ponderada esperada de la alternativa B sería $3,89$. El decisor escogería la alternativa con mayor ganancia esperada. En este caso el decisor escogería B, es decir, haría caso a la recomendación del servicio de información M.

5 Nivel de información óptimo para el decisor. El valor de una segunda opinión.

Si se puede decidir el nivel (cantidad o calidad) de información a adquirir, ¿cuánta información adquirirá el decisor? Al decisor le merece la pena adquirir información adicional mientras el aumento en la ganancia esperada con una unidad adicional de información sea mayor que el coste de adquirir esa unidad de información.

En algunas situaciones hay que decidir ex-ante la cantidad de información a adquirir: por ejemplo, ¿a cuántas personas entrevistar sobre un tema? o ¿en cuántas personas probar un medicamento? En otros casos la decisión es secuencial: si se han adquirido una serie de unidades de información, ¿merece la pena adquirir una unidad más (ir a una tienda más, consultar otro artículo sobre un tema que nos interesa, consultar otra página web, entrevistar a otro candidato para un trabajo, visitar otro piso más, buscar otra oferta de trabajo)? El nivel elegido, en ambas situaciones, debe ser aquél para el que se igualan el valor marginal y el coste marginal.

Considérese un inversor neutral ante el riesgo que puede realizar una inversión igual a 1 con la que puede tener una ganancia x, con $x > 0$, si la situación económica futura es buena o perder lo invertido si la situación económica futura es mala. El decisor cree que hay una probabilidad p de que la situación económica futura sea buena y que la probabilidad de que la situación económica futura sea mala es $1 - p$. El decisor puede adquirir una información que le dice con una probabilidad q que la situación económica va a ser buena cuando es esto lo que va a ocurrir y que le dice también con una probabilidad q que la situación económica va a ser mala cuando es esto lo que va a ocurrir. Se considera que $q \geq 0,5$, es decir, que la probabilidad de que el servicio de información diga que la situación económica va a ser buena cuando eso es lo que va a ocurrir es mayor o igual que la probabilidad de que diga que la situación económica va a ser buena cuando va a ocurrir que la situación económica va a ser mala. El coste de este servicio de información aumenta con q (la precisión del servicio):

$$C(q) = q^2$$

Por tanto, $\frac{dC(q)}{dq} = 2q$.

A partir del análisis desarrollado en la sección 4.2, notando que $r = q$ y $z = 1$, podemos obtener el valor de la información. El valor de la información depende de los valores de los parámetros. Si $q = 0,5$, el valor de la información es nulo ya que la forma en que depende la decisión de los parámetros del modelo es la misma con cualquiera de los dos mensajes y sin información. Si $q > 0,5$ la información modifica la decisión en dos casos. Cuando el decisor recibe el mensaje *buena* y $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} < p < \frac{z}{x+z}$ decide invertir y, sin embargo, sin información no habría invertido. Por otra parte, cuando el decisor recibe el mensaje *mala* y $\frac{z}{x+z} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$ escoge no invertir y, sin embargo, sin información habría invertido. El valor de la información (VI) en este caso es, por tanto:

$$VI = \begin{cases} pqx - (1-p)(1-q) \text{ cuando } \frac{1-q}{qx+1-q} < p < \frac{1}{x+1} \\ -p(1-q)x + (1-p)q \text{ cuando } \frac{1}{x+1} < p < \frac{q}{(1-q)x+q} \\ 0 \text{ cuando } p \leq \frac{1-q}{qx+1-q} \text{ o cuando } \frac{q}{(1-q)x+q} \leq p \end{cases}$$

El valor de la información es máximo cuando $p = \frac{1}{x+1}$, es decir, cuando el decisor estaría indiferente entre invertir y no invertir si no recibiera información. Nótese que, para cualquier valor de p para el que el valor de la información es positivo, ocurre que el valor de la información aumenta con q.

El valor marginal de la información en este caso es $\frac{dVI}{dq} = px + 1 - p$. El nivel de información que escogerá el decisor será, por tanto, $px + 1 - p = 2q \Leftrightarrow q = \frac{px+1-p}{2}$. Si, por ejemplo, $x = 3$ y $p = 0,2$ será $q = 0,7$ y se cumple $\frac{1-q}{qx+1-q} < p < \frac{1}{x+1}$. Si, en cambio, $x = 2$ y $p = 0,6$ será $q = 0,8$ y se cumple $\frac{1}{x+1} < p < \frac{q}{(1-q)x+q}$.

El valor de un segundo servicio de información cuando se ha recibido ya un mensaje proporcionado por un primer servicio de información incompleta se calcula como en las secciones 3 y 4.1, utilizando las probabilidades revisadas de los estados tras la recepción de ese mensaje como probabilidades a priori para la nueva revisión de probabilidades de los estados. El valor de un servicio de información adicional cuando ya se han recibido mensajes de otros servicios de información previos se calcula de forma análoga a partir de las probabilidades revisadas en función de los mensajes anteriores.

El valor esperado de la utilización consecutiva de los dos servicios de información incompleta no depende del orden en el que se contraten los dos servicios de información. Considérese que hay n estados E_i, $i = 1, ..., n$, y que el decisor tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i, con $i = 1, ..., n$ y $k = 1, ..., l$. Hay dos servicios de información incompleta M y M'. El servicio de información M consiste en m posibles mensajes M_j, $j = 1, ..., m$, y el servicio de información M' consiste en m' mensajes M'_h, $h = 1, ..., m'$. La ganancia esperada por el decisor si primero recibe un mensaje del servicio de información M y luego recibe un mensaje del servicio de información M' es la misma que la ganancia esperada por el decisor si primero recibe un mensaje del servicio de información M' y luego recibe un mensaje del servicio de información M ya que, utilizando el Teorema de Bayes:

$$\sum_{j=1}^{m} \Pr(M_j) \sum_{h=1}^{m'} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M'_j/E_i) \Pr(E_i/M_j) x_i^k \right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{m'} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M'_j/E_i) \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$
$$= \sum_{h=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m} \max_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Pr(M'_j/E_i) \Pr(M_j/E_i) \Pr(E_i) x_i^k \right\}$$

6 El valor de la información con aversión al riesgo

En las secciones anteriores se ha considerado que el decisor era neutral ante el riesgo. En esta sección se incluye una extensión de los análisis realizados en esas secciones a aquellas situaciones en las que el decisor es averso al riesgo.

Si el decisor fuera averso al riesgo las ganancias en unidades monetarias que resultan con cada alternativa en cada estado deben transformarse en unidades de utilidad conforme a la función de utilidad del decisor. Si el decisor es averso al riesgo esa función de utilidad debe ser cóncava (por ejemplo, $u(x) = \sqrt{x}$, donde x mide las ganancias en dinero). Si se cumplen los axiomas que hacen válida la Teoría de la Utilidad Esperada se puede calcular la utilidad esperada del decisor sin información y la utilidad esperada del decisor con información.

Considérese un decisor que tiene que elegir entre l alternativas X^k, con $k = 1, ..., l$. La situación es incierta ya que puede haber n situaciones o estados E_i posibles. El decisor cree que la probabilidad del estado E_i es $\Pr(E_i) = p_i$. La alternativa X^k proporciona una ganancia x_i^k en el estado E_i (si $x_i^k < 0$, la alternativa X^k ocasiona una pérdida si el estado es E_i). Considérese que puede aplicarse la Teoría de la Utilidad Esperada de forma que la utilidad esperada de la alternativa X^k es igual a $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i^k)$.

Si el decisor no recibe información escogerá la alternativa que maximiza su utilidad esperada, es decir, resolverá $\max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i^k)\right\}$. Cuando recibe información completa resolverá $\max_k \left\{u(x_i^k)\right\}$ si la información indica que el estado va a ser E_i, para $i = 1, ..., n$. Como el decisor cree que la probabilidad de que la información completa indique que el estado va a ser E_i es igual p_i (para $i = 1, ..., n$), ya que esa es la probabilidad que asigna a priori a ese estado, la utilidad esperada con información completa es $\sum_{i=1}^{n}(p_i \max_k \left\{u(x_i^k)\right\})$. Sin embargo, el valor de la información completa no es igual a $\sum_{i=1}^{n}(p_i \max_k \left\{u(x_i^k)\right\}) -$ $\max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i^k)\right\}$, ya que ese valor debe expresarse en unidades monetarias. El valor de la información completa (VI) es igual a la máxima cantidad de dinero que está dispuesto a pagar el decisor por esa información. Por tanto, VI se obtiene a partir de:

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i \max_k \left\{u(x_i^k - VI)\right\}) = \max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i^k)\right\}$$

El análisis sería análogo para calcular el valor de la información incompleta.

7 Ejercicios propuestos y soluciones

Esta sección incluye una serie de ejercicios que ilustran y aplican los análisis desarrollados en las secciones anteriores. La sección incluye también las soluciones de los ejercicios propuestos, aunque en algunos casos esas soluciones se presentan de forma abreviada.

Ejercicio A: Petición de ordenadores para la campaña de Navidad

El dueño de una tienda de informática tiene que decidir el número de ordenadores de un determinado tipo que va a pedir a su suministrador para la campaña de Navidad. Puede vender cada ordenador a 1200 euros pero no sabe cuál va a ser la cantidad demandada de ese tipo de ordenadores. Cree que hay una probabilidad igual a 0,4 de que la cantidad demandada sea 100 ordenadores y una probabilidad igual a 0,6 de que la cantidad demandada sea 60 ordenadores. Considérese que el dueño de la tienda es neutral ante el riesgo y tiene que elegir entre dos alternativas: pedir 100 ordenadores a su suministrador o pedirle 60 ordenadores. Si le pide 100 ordenadores, tiene que pagar 700 euros por cada uno al suministrador. Si, en cambio, le pide 60 ordenadores, cada uno le cuesta 820 euros (el suministrador le hace un descuento cuando le compra más ordenadores). Si el dueño de la tienda devuelve un ordenador al suministrador, éste sólo le reintegra la mitad de lo que había pagado el dueño de la tienda por ese ordenador. Se desea analizar qué valor tendría una información completa (que resuelva completamente la incertidumbre) para el dueño de esta tienda.

Si, en el momento de realizar la petición de ordenadores al suministrador, el dueño de la tienda no conociera el precio al que se van a poder vender los ordenadores, ¿cómo dependería el valor de la información completa del precio r estimado por el dueño de la tienda?

Solución

En este Ejercicio los estados son la situación en la que la cantidad demandada es 100 (expansión fuerte) y la situación en la que la cantidad demandada es 60 (expansión moderada o recesión). Las alternativas son pedir 100 ordenadores al suministrador y pedir 60 ordenadores al suministrador.

Si el dueño de la tienda no recibe ninguna información que resuelva su incertidumbre escogerá aquella alternativa que maximice sus beneficios esperados, dadas las probabilidades que asigna a cada nivel de demanda. El beneficio esperado si pide 60 ordenadores al suministrador es $60(1200-820) = 22800$, y el beneficio esperado si pide 100 ordenadores es:

$$0,6\,[60(1200-700)+(100-60)(350-700)]+$$
$$+0,4\,[100(1200-700)] = 29600$$

Por tanto, el dueño de la tienda pedirá 100 ordenadores si no recibe información. En este caso espera ganar 16000 euros con una probabilidad 0,6 y 50000 euros con una probabilidad 0,4.

Consideremos ahora que el dueño de la tienda puede adquirir un servicio de información que le proporciona información completa sobre cuál va a ser la demanda de ese tipo de ordenadores (supongamos, por ejemplo, que se realiza un buen estudio de mercado que suministra esa información). En este caso el dueño de la tienda comprará 60 ordenadores si el servicio de información le dice que la cantidad demandada va a ser igual a 60 y, en cambio, comprará 100 ordenadores si el servicio de información le dice que la cantidad demandada va a ser igual a 100. Como el decisor cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,6 de que la demanda sea 60, cree también que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 60 será 0,6, y, análogamente, cree que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 100 será 0,4. La ganancia esperada cuando se recibe información completa es, por tanto:

$$0,6\,[60(1200-820)]+0,4\,[100(1200-700)] = 33680$$

En consecuencia, el valor de la información completa es:

$$33680 - 29600 = 4080$$

El dueño de la tienda estaría dispuesto a pagar hasta 4080 euros por un estudio de mercado que proporcionara información completa.

Con un servicio que le proporcione información completa el dueño de la tienda de informática consigue evitar la situación en la que compra 100 ordenadores y la demanda resulta ser 60 (con lo que tiene que devolver 40 ordenadores y pierde dinero con esas devoluciones).

Si el dueño de la tienda cree que el precio al que se van a poder vender los ordenadores va a ser r la ganancia esperada si pide 60 ordenadores al suministrador será $60(r-820)$ (se considera que $r > 820$ para que alternativa

pedir 60 ordenadores al suministrador sea viable) y la ganancia esperada si pide 100 ordenadores será $0,4(100(r-700))+0,6(60(r-700)+(100-60)(350-700))$
$=0,4(100(r-700))+0,6(60r-56000)$. Como cuando $r>820$ ocurre que

$$0,4(100(r-700))+0,6(60r-56000)>60(r-820)$$

y $0,4(100(r-700))+0,6(60r-56000)>0$, el dueño de la tienda de informática pedirá 100 ordenadores al suministrador si no obtiene información. La ganancia esperada con información completa es $0,4(100(r-700))+0,6(60(r-820))$. Por tanto, el valor de la información completa es $0,6(60(r-820)-(60r-56000))=4080$. El valor de la información completa no depende de r en este Ejercicio, ya que las pérdidas por devoluciones de ordenadores al suministrador no dependen del precio al que se venden los ordenadores.

Ejercicio B: Establecimiento de una oficina comercial en un país extranjero

Un empresario de la Unión Europea que es neutral ante el riesgo tiene que decidir si establece o no una delegación u oficina comercial en el país H. El empresario sabe que la Unión Europea está negociando un acuerdo comercial con ese país y cree que hay una probabilidad p de que el acuerdo se firme. Si el empresario establece la delegación y se firma el acuerdo sus ganancias son 200 (millones de euros), y si establece una delegación y no se firma el acuerdo sus pérdidas son 40. Si el empresario no establece una delegación sus ganancias son cero. Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿para qué valores de p decidirá el empresario establecer la delegación si no recibe ninguna información sobre la firma del acuerdo?,

b) ¿qué valor tendría para el empresario conocer con seguridad si se va a firmar el acuerdo con H o no?

Solución

Este Ejercicio es un caso particular de la situación analizada en la sección 2.1. Aquí el empresario tiene que decidir si establece una delegación u oficina comercial en el país C, los estados son la situación en la que la que se firma el acuerdo comercial con el país C (éxito) y la situación en la que no se firma el acuerdo con el país C (fracaso), $x=200$ y $z=40$. Si no obtiene información el empresario establece la delegación sólo si $p > \frac{40}{200+40} = \frac{1}{6}$. El valor de la información completa es $200p$ si $p \leq \frac{1}{6}$ y $40(1-p)$ si $p \geq \frac{1}{6}$.

Ejercicio C: Elección de cultivo

Un agricultor debe decidir qué cultivar en una finca que posee. Está indeciso entre los cultivos A y B ya que sus ganancias pueden dependen de si la primavera es lluviosa o seca. Si cultiva A sus ganancias son 400 independientemente de lo lluviosa que sea la primavera. Si cultiva B sus ganancias son 450 si la primavera es lluviosa y 225 si la primavera es seca. El agricultor es neutral ante el riesgo y cree que hay una probabilidad p de que la primavera sea seca. Conteste a las siguientes preguntas:

a) ¿para qué valores de p decidirá el agricultor cultivar A?,

b) si existe la posibilidad de adquirir una información que predice con certeza el tiempo que hará en primavera, ¿cuál es el valor de esa información para el agricultor?

Solución

a) Cuando el agricultor no recibe información ganará 400 si cultiva A y $225p+(1-p)450 = 450-225p$ si cultiva B. Como $400 > 450-225p \Leftrightarrow p > \frac{2}{9}$, el agricultor cultivará A si su p es tal que $p > \frac{2}{9}$ y, en cambio, cultivará B si su p es tal que $p < \frac{2}{9}$ (estará indiferente entre ambas alternativas cuando $p = \frac{2}{9}$).

b) Si la información indica que la primavera será seca el agricultor cultivará A y ganará 400. Si la información indica que la primavera será lluviosa el agricultor cultivará B y ganará 450. Por tanto, la ganancia esperada con esta información completa es:

$$400p + 450(1-p) = 450 - 50p$$

El valor de esta información completa depende de p. Si $p < \frac{2}{9}$ (sin información cultivaría B) el valor de la información completa es:

$$450 - 50p - (450 - 225p) = 175p$$

Si $p > \frac{2}{9}$ (sin información cultivaría A) el valor de la información completa es:

$$450 - 50p - (400) = 50 - 50p$$

El valor de la información es máximo cuando $p = \frac{2}{9}$ (el valor de la información aumenta con p cuando $p < \frac{2}{9}$ y disminuye con p cuando $p > \frac{2}{9}$). Cuando $p = \frac{2}{9}$ el agricultor está indiferente entre cultivar A o cultivar B y es entonces cuando la información resulta más útil para elegir entre ambas alternativas.

Ejercicio D: Búsqueda de petróleo mediante perforaciones

Considere un decisor neutral ante el riesgo que es dueño de una finca en la que puede haber petróleo. El decisor tiene que decidir si realiza perforaciones en su terreno o no, y cree que la probabilidad de que haya petróleo (estado E_1) es $\frac{1}{3}$ y, por tanto, la probabilidad de que no haya petróleo (estado E_2) es $\frac{2}{3}$. Si decide perforar gana 1000 millones de euros si encuentra petróleo pero pierde 300 millones de euros si no encuentra petróleo (o si la cantidad o características cualitativas del petróleo que encuentra desaconsejan su extracción). Si decide no perforar sus ganancias son cero. Para conseguir información el dueño de la finca puede encargar un estudio geológico del terreno. Conteste las siguientes preguntas:

i) Hay una probabilidad igual a 0,6 de que el estudio geológico suministre información completa y una probabilidad igual a 0,4 de que ese estudio no sea capaz de proporcionar ninguna información útil al decisor. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar como máximo el decisor por ese estudio geológico?

ii) ¿Realizará perforaciones el dueño del terreno si el estudio geológico sólo le proporciona información incompleta (sobre si hay petróleo o no en su finca) de forma que la empresa cree que si el estado es E_1 el estudio geológico dirá que hay petróleo en la finca con una probabilidad $0,6$, pero que si el estado es E_2 el estudio geológico dirá que hay petróleo en la finca con una probabilidad de sólo $0,2$?, ¿Qué valor tiene esa información incompleta para la empresa?

iii) Obtenga el valor del estudio geológico considerado en ii) cuando el dueño de la finca cree que la probabilidad de que haya petróleo (estado E_1) es $\frac{1}{3}$ y pierde 400 millones de euros si realiza perforaciones y no encuentra petróleo.

Solución

Este Ejercicio es un caso particular de las situaciones analizadas en las secciones 2.1 y 4.2. Aquí el empresario tiene que decidir si realiza perforaciones para buscar petróleo, los estados son la situación en la que la que se encuentra petróleo (éxito) y la situación en la que no se encuentra petróleo (fracaso), $p = \frac{1}{3}$, $x = 1000$ y $z = 300$.

i) Si no obtiene información el dueño de la finca decide realizar perforaciones en su finca ya que $\frac{1}{3} > \frac{z}{x+z} = \frac{300}{1300} = 0,231$. El valor de la información completa es $(1 - \frac{1}{3})300 = 200$ millones de euros. Como sólo hay una probabilidad igual a 0,6 de que el estudio geológico proporcione información completa lo máximo que estaría dispuesto a pagar el dueño de la finca por el estudio geológico sería $0,6(200) = 120$.

ii) En este caso $q = 0,6$, $r = 0,8$ y $\frac{z}{x+z} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$. El valor del servicio de información incompleta considerado es $-p(1-q)x+(1-p)rz = \frac{80}{3}$.

iii) En este caso, el dueño de la finca no hará perforaciones en su terreno si no obtiene información ya que $\frac{1}{4} < \frac{z}{x+z} = \frac{400}{1400}$. Ahora $\frac{(1-r)z}{qx+(1-r)z} < p < \frac{z}{x+z}$ y el valor del servicio de información incompleta considerado es $pqx - (1-p)(1-r)z = 90$.

Ejercicio E: Comercialización de un producto nuevo

Una empresa neutral ante el riesgo ha desarrollado un producto nuevo y tiene que decidir si introducirlo en el mercado (comercializarlo) o no. Si comercializa el producto y la comercialización es un éxito la empresa gana 8 (millones de euros). Pero si comercializa el producto y la comercialización fracasa la empresa pierde 2. La empresa cree que hay un 40 por ciento de posibilidades de que el producto sea un éxito (estado E_1) y un 60 por ciento de posibilidades de que el producto fracase (estado E_2). Si no comercializa el producto su ganancia es 0. Si la empresa puede conseguir información, la forma en que obtiene esa información es con un estudio de mercado o mediante un test de mercado consistente en lanzar el producto en una ciudad, región o país que considera representativo del mercado total. Deseamos contestar las siguientes preguntas:

a) ¿comercializará su producto la empresa si no consigue información sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total?,

b) ¿comercializará su producto la empresa si, mediante un estudio o test de mercado, consigue información completa sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total?, ¿qué valor tiene para ella esa información completa?,

c) ¿comercializará su producto la empresa si el test sólo le proporciona información incompleta (sobre cuál va a ser el resultado, éxito o fracaso, que obtendrá si lanza su producto en el mercado total) de forma que la empresa cree que si el estado es E_1 el test tendrá éxito con una probabilidad $\frac{6}{7}$, pero si el estado es E_2, la probabilidad de que el test tenga éxito es sólo $\frac{2}{7}$?, ¿qué valor tiene esa información incompleta para la empresa?,

d) considere que la empresa puede realizar el test de mercado en la ciudad (región o país) C o en la ciudad (región o país) D. Realizando el test de mercado en C obtiene información completa y, en cambio, realizándolo en D obtiene la información incompleta analizada en la pregunta c) (puede considerarse que C es más representativa del mercado total o más grande que D). Si los costes de realizar los tests de mercado son, respectivamente, 0,6 en C y 0,3 en D, ¿en cuál de las dos ciudades (regiones o países) realizará el test de mercado la empresa?

Solución

Este Ejercicio puede resolverse utilizando los desarrollos incluidos en las secciones 2.1 y 4.2. Aquí la empresa tiene que decidir si comercializa el producto nuevo, los estados son la situación en la que la que la comercialización es un éxito y la situación en la que la comercialización fracasa, $p = 0,4$, $x = 8$ (millones) y $z = 2$ (millones). Si no obtiene información el dueño de la finca decide realizar perforaciones en su finca ya que $0,4 > \frac{2}{8+2} = 0,2$. El valor de la información completa es $(1-0,4)2 = 1,2$ millones de euros. En la información incompleta de la parte c) del Ejercicio es $q = \frac{6}{7}$ y $r = \frac{5}{7}$. Como $\frac{6}{7} + \frac{5}{7} > 1$ y $\frac{z}{x+z} = 0,2 < p = 0,4 < \frac{rz}{(1-q)x+rz} = 0,55$, el valor de esa información incompleta es $-p(1-q)x+(1-p)rz = 0,4$. Es mejor realizar el test en la ciudad C que en la ciudad D porque el incremento de coste que supone hacerlo en C en vez de en D es 0,3 y, a cambio, se obtiene un aumento igual a $0,8$ $(1,2-0,4)$ en el valor de la información proporcionada por el test.

Ejercicio F: Revisión de creencias

Considere una situación en la que hay tres posibles estados, E_1, E_2 y E_3, y las probabilidades a priori que asigna un decisor neutral ante el riesgo a cada estado son $\Pr(E_1) = 0,1$, $\Pr(E_2) = 0,5$ y $\Pr(E_3) = 0,4$. Se puede conseguir o generar información sobre los estados y esa información consiste en la recepción del mensaje M_1 o del mensaje M_2. El decisor cree que las probabilidades de recibir cada mensaje en cada estado ($\Pr(M/E)$) vienen dadas por la siguiente matriz:

$\Pr(M/E)$	M_1	M_2
E_1	$0,9$	$0,1$
E_2	$0,3$	$0,7$
E_3	0	1

Calcule las probabilidades que asignaría el decisor a cada estado después de recibir cada mensaje (probabilidades revisadas o a posteriori).

Solución

A partir del análisis desarrollado en la sección 3 se obtiene $\Pr(M_1) = 0,24$, $\Pr(M_2) = 0,76$ y

$\Pr(E/M)$	M_1	M_2
E_1	$0,375$	$0,013$
E_2	$0,625$	$0,461$
E_3	0	$0,526$

Si la información consiste en el mensaje M_1 el decisor cambia la distribución de probabilidades a priori sobre los estados (0,1, 0,5, 0,4) por la distribución de probabilidades a posteriori (0,375, 0,625, 0) que es más favorable para los estados 1 y 2. Si la información consiste en el mensaje M_2 ocurre lo contrario.

Ejercicio G: Renovación de producto y publicidad

Considérese una empresa que tiene que tomar decisiones en un contexto de incertidumbre en el que no sabe cómo va a variar en el futuro la demanda de productos como el suyo. En concreto, la demanda futura puede ser menor (estado E_1), igual (estado E_2) o mayor (estado E_3) que la actual. La empresa tiene que decidir entre las siguientes tres alternativas:

- A: seguir como hasta ahora en términos de características del producto de la empresa y niveles de publicidad,

- B: mantener las características del producto y realizar una campaña publicitaria intensa, y

- C: renovar profundamente el producto y lanzarlo al mercado mediante la correspondiente campaña publicitaria.

El empresario o gerente que debe elegir entre estas tres alternativas es neutral ante el riesgo. Las creencias iniciales de ese decisor son tales que asigna la misma probabilidad a priori a cada estado

($\Pr(E_1)$=$\Pr(E_2)$=$\Pr(E_3)$=$\frac{1}{3}$). Las ganancias que se derivan de cada alternativa dependen del estado en que se desarrollen esas alternativas. Las ganancias que se obtienen con cada alternativa en cada estado (en miles de euros) se recogen en la siguiente matriz (un número negativo indica pérdidas):

	E_1	E_2	E_3
A	24	60	96
B	0	80	130
C	-30	74	151

Así, por ejemplo, renovar profundamente el producto y lanzarlo al mercado mediante la correspondiente campaña publicitaria sería la mejor alternativa si la demanda va a ser mayor en el futuro. Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿qué alternativa escogerá la empresa si no recibe información sobre cuál va a ser la demanda futura?,

b) ¿qué alternativa escogerá la empresa si recibe información completa sobre la demanda futura?, ¿qué valor tiene para ella esa información?,

c) ¿qué alternativa escogerá la empresa si recibe una información (incompleta) sobre la demanda futura que sólo le informa sobre si va a aumentar la demanda o no (es decir, que sólo le informa sobre si va a ocurrir el estado E_3 o no)?, ¿qué valor tiene esa información para la empresa?

Solución

Este Ejercicio puede resolverse utilizando el análisis incluido en las secciones 2.2, 3 y 4.4.

a) y b): Si la empresa no recibiera información escogería la alternativa B (mantener las características del producto y realizar una campaña publicitaria intensa), ya que es la que le proporciona la mayor ganancia esperada, y tendría una ganancia esperada igual 70. Si la empresa recibiera información completa sobre cuál va a ser la demanda futura de productos como el suyo escogerá A si el servicio de información informa que el estado es E_1, B si informa que E_2 y C si informa que E_3. La ganancia esperada (a priori) con este servicio de información perfecta sería:

$$\frac{1}{3}.24+\frac{1}{3}.80+\frac{1}{3}.151=85$$

Por tanto, el decisor estará dispuesto a pagar como máximo por ese servicio de información completa: $85-70=15$ con lo que el valor de la información completa es 15.

c) Un servicio de información incompleta que sólo informa sobre si E_3 ocurrirá o no es un servicio que no puede distinguir entre E_1 y E_2. Si el servicio de información informa que el estado es E_3 la empresa hará C. Si la información recibida indica que E_3 no ocurrirá la empresa asignará las mismas probabilidades a posteriori (es decir, una vez recibida esa información) a los estados E_1 y E_2 y, por tanto, creerá que hay una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea el E_1 y una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea E_2. Si la empresa recibe el mensaje de que E_3 no ocurrirá decidirá realizar la acción A ya que la ganancia esperada con cada acción será:

ganancia esperada $(A)=\frac{1}{2}(24+60)=42$
ganancia esperada $(B)=\frac{1}{2}(0+80)=40$
ganancia esperada $(C)=\frac{1}{2}(-30+74)=22$

La empresa, conforme a sus creencias iniciales cree que hay una probabilidad $\frac{1}{3}$ de que el mensaje indique que E_3 ocurrirá y una probabilidad $\frac{2}{3}$ de que el mensaje indique que E_3 no ocurrirá. Por tanto, la ganancia esperada (a priori) con este servicio de información incompleta es:

$$\frac{2}{3}.42+\frac{1}{3}.151=\frac{235}{3}$$

Por tanto, la empresa estará dispuesta a pagar como máximo por ese servicio de información incompleta: $\frac{235}{3}-70=8,33$. Lógicamente el valor de un servicio de información incompleta, en este caso $8,33$, es menor que el valor de la información completa (15).

Ejercicio H: Decisión de inversión e información incompleta

Un decisor neutral ante el riesgo tiene que decidir si realiza una inversión en un activo. Si no realiza la inversión sus beneficios son cero. Si realiza la inversión sus beneficios son 100 si el estado es E (expansión económica) y -40 (negativos) si el estado es R (recesión económica). La probabilidad que el decisor asigna a priori al estado E es 0,3.

i) ¿Qué acción realizará el decisor si no recibe información adicional?

ii) Suponga que el decisor puede recibir como información los mensajes M y N, de forma que cree que la probabilidad de recibir el mensaje M si el estado es E es 0,6 y la probabilidad de recibir el mensaje M si el estado de la naturaleza es R es 0,2. Determine cuál es el valor de este servicio de información incompleta.

Solución

Véase el análisis realizado en la sección 4.2. En este Ejercicio $p = 0,3$, $x = 100$ y $z = 40$.

Si el decisor no recibe información decidirá invertir ya que la ganancia esperada si invierte es 20. En el servicio de información incompleta considerado $q = 0,6$, $r = 0,8$ y $\frac{z}{x+z} < p < \frac{rz}{(1-q)x+rz}$. Por tanto, el valor de ese servicio de información incompleta es $-p(1-q)x + (1-p)rz = 10,4$.

Ejercicio I: Elección entre alternativas

Un decisor neutral ante el riesgo que tiene que decidir entre las acciones A, B y C. Las ganancias que se derivan de cada acción dependen del estado (de la economía, etc...) en que se desarrollen esas acciones. Hay tres estados posibles que denominamos E_1, E_2 y E_3. Las creencias iniciales del decisor son tales que asigna la misma probabilidad a priori a cada estado (Pr(E_1)=Pr(E_2)=Pr(E_3)=$\frac{1}{3}$). Las ganancias que se obtienen con cada acción $X \in \{A, B, C\}$ en cada estado $g(X/E)$ se recogen en la siguiente matriz:

$g(X/E)$	E_1	E_2	E_3
A	1	5	9
B	6	2	8
C	7	4	3

Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor de la información completa?

b) ¿Cuál es el valor de un servicio de información que sólo informa sobre si ocurrirá E_2 o si no ocurrirá E_2?

c) ¿Cuál es el valor de un servicio de información incompleta con tres mensajes posibles, M_1, M_2 y M_3, tales que las probabilidades de cada mensaje dado cada estado (Pr(M/E)) son

Pr(M/E)	M_1	M_2	M_3
E_1	0,6	0,3	0,1
E_2	0,2	0.6	0.2
E_3	0,1	0,3	0,6

?

Solución

Véanse las secciones 2.2, 3, 4.1 y 4.4.

a) Si el decisor no recibe información escogerá la acción B, que es la que le proporciona la mayor ganancia esperada, y su ganancia esperada será $\frac{16}{3}$. Si el decisor recibe información completa sobre el estado hará C si el servicio de información informa que el estado es E_1, A si informa que E_2 y A si informa que E_3 y su ganancia esperada (a priori) con este servicio de información perfecta será:

$$\frac{1}{3}.7+\frac{1}{3}.5+\frac{1}{3}.9=\frac{21}{3}$$

Por tanto, el valor de la información completa es $\frac{5}{3}$.

b) Un servicio de información que sólo informa sobre si ocurrirá E_2 o si no ocurrirá E_2 no permite distinguir entre E_1 y E_3. Si el servicio de información informa que el estado es E_2 el decisor hará A. Si la información recibida indica que E_2 no ocurrirá el decisor asignará las mismas probabilidades a posteriori (es decir, una vez recibida esa información) a los estados E_1 y E_3 y, por tanto, creerá que hay una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea el E_1 y una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que el estado sea E_3. Las razones para estas probabilidades a posteriori de los estados E_1 y E_3 son que a priori el decisor creía que todos los estados eran igual de probables y que el mensaje recibido, que E_2 no ocurrirá, no da al decisor ningún argumento para dejar de creer que E_1 y E_3 son igual de probables.

Por tanto, si el decisor recibe como mensaje que E_2 no ocurrirá decidirá realizar la acción B ya que:

ganancia esperada $(A)=\frac{1}{2}(1+9)=\frac{10}{2}$
ganancia esperada $(B)=\frac{1}{2}(6+8)=\frac{14}{2}$
ganancia esperada $(C)=\frac{1}{2}(7+3)=\frac{10}{2}$

El decisor, conforme a sus creencias iniciales cree que hay una probabilidad $\frac{1}{3}$ de que el mensaje indique que E_2 ocurrirá y una probabilidad $\frac{2}{3}$ de que el mensaje indique que E_2 no ocurrirá. Por tanto, la ganancia esperada (a priori) con este servicio de información incompleta es:

$$\frac{2}{3}.\frac{14}{2}+\frac{1}{3}.5=\frac{19}{3}$$

Así, el decisor estará dispuesto a pagar como máximo por ese servicio de información completa: $\frac{19}{3}-\frac{16}{3}=\frac{3}{3}=1$.

c) Con este servicio de información incompleta hay que calcular $\max_{X\in\{A,B,C\}}\left\{\sum_{i=1}^{3}\Pr(M_j/E_i)\Pr(E_i)g(X/E_i)\right\}$ para cada mensaje M_j, con

$j \in \{1, 2, 3\}$. Se obtiene:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_1/E_i) \Pr(E_i) g(A/E_i) = \tfrac{2,5}{3} \\
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_1/E_i) \Pr(E_i) g(B/E_i) = \tfrac{4,8}{3} \\
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_1/E_i) \Pr(E_i) g(C/E_i) = \tfrac{5,3}{3} \\
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_2/E_i) \Pr(E_i) g(A/E_i) = 2 \\
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_2/E_i) \Pr(E_i) g(B/E_i) = 1,8 \\
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_2/E_i) \Pr(E_i) g(C/E_i) = 1,8 \\
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_3/E_i) \Pr(E_i) g(A/E_i) = \tfrac{6,5}{3} \\
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_3/E_i) \Pr(E_i) g(B/E_i) = \tfrac{5,8}{3} \\
\sum_{i=1}^{3} \Pr(M_3/E_i) \Pr(E_i) g(C/E_i) = \tfrac{3,3}{3}
\end{gathered}$$

Por tanto, la ganancia esperada con este servicio de información incompleta es $\frac{5,3}{3}+2+\frac{6,5}{3} = \frac{17,8}{3}$ y el valor de esa información incompleta es $\frac{17,8}{3} - \frac{16}{3} = \frac{1,8}{3}$. El valor de este servicio de información incompleta es menor que el valor del servicio de información incompleta considerado en el apartado b).

Ejercicio J: Dos alternativas de inversión e información completa

Un decisor puede elegir entre dos alternativas para invertir una cantidad determinada. Si invierte en la alternativa o activo A conseguirá una ganancia igual a x_A si la situación económica evoluciona bien (expansión fuerte) o una ganancia o pérdida igual a z_A si la situación económica evoluciona peor (expansión moderada o recesión), con $x_A > 0$ y $x_A \geq z_A$. Si invierte en la alternativa o activo B conseguirá una ganancia igual a x_B si hay una expansión fuerte en la economía o una ganancia o pérdida igual a z_B si hay expansión moderada o recesión, con $x_B > 0$ y $x_B \geq z_B$. El decisor cree que la probabilidad de expansión fuerte es p y la probabilidad de expansión moderada o recesión es $1 - p$. Considérese que $x_A \geq x_B$. Si el decisor no realiza la inversión sus ganancias son cero. Calcule el valor de la información completa.

Solución

Cuando el decisor no recibe información no invierte si $0 \geq \max(px_A + (1-p)z_A, px_B + (1-p)z_B)$ y decide invertir si $0 < \max(px_A + (1-p)z_A, px_B + (1-p)z_B)$. Su ganancia esperada si invierte en la alternativa A es $px_A + (1-p)z_A$ y su ganancia esperada si invierte en la alternativa B es $px_B + (1-p)z_B$. Por tanto, cuando $0 < \max(px_A + (1-p)z_A, px_B + (1-p)z_B)$ invierte en A si $px_A + (1-p)z_A > px_B + (1-p)z_B$, invierte en B si $px_A + (1-p)z_A < px_B + (1-p)z_B$ e invierte en cualquiera de las dos alternativas si $px_A + (1-p)z_A = px_B + (1-p)z_B$.

Si el decisor recibiera información completa y la información le dijera que va a haber una expansión económica fuerte invertiría en A si $x_A > x_B$ y estaría indiferente entre invertir en A o en B si $x_A = x_B$. Si la información le dijera que va a haber una expansión moderada o una recesión no invertiría si $0 \geq \max(z_A, z_B)$, invertiría en A si $z_A > \max(0, z_B)$, en B si $z_B > \max(z_A, 0)$ y estaría indiferente entre invertir en A o en B si $z_A = z_B > 0$. Como cree que hay una probabilidad p de que haya una expansión, cree también que hay una probabilidad p de que la información completa diga que va a haber una expansión en la economía y, por tanto, que hay una probabilidad $1 - p$ de que la información completa diga que va a haber una recesión. Así, con información completa la ganancia esperada del decisor es px_A si $0 \geq \max(z_A, z_B)$, $px_A + (1-p)z_A$ si $z_A > \max(0, z_B)$ o si $z_A = z_B > 0$, y $px_A + (1-p)z_B$ si $z_B > \max(z_A, 0)$.

El valor de la información completa (o diferencia entre la ganancia esperada con información completa y la ganancia esperada sin información) se presenta en tres partes, en función de la decisión que se toma cuando no se recibe información:

i) Caso en el que se invierte en la alternativa A si no se recibe información ($px_A + (1-p)z_A > \max(0, px_B + (1-p)z_B)$; también puede incluirse aquí, sin pérdida de generalidad el caso $px_A + (1-p)z_A = px_B + (1-p)z_B > 0$). El valor de la información es:

$$VI = \begin{cases} -(1-p)z_A & \text{si } 0 \geq \max(z_A, z_B) \\ 0 & \text{si } z_A > \max(0, z_B) \text{ o } z_A = z_B > 0 \\ (1-p)(z_B - z_A) & \text{si } z_B > \max(z_A, 0) \end{cases}$$

ii) Caso en el que se invierte en la alternativa B si no se recibe información ($px_B + (1-p)z_B > \max(0, px_A + (1-p)z_A)$). En este caso ocurre que $z_B > z_A$ y el valor de la información es:

$$VI = \begin{cases} p(x_A - x_B) - (1-p)z_B & \text{si } 0 \geq \max(z_A, z_B) \\ \\ p(x_A - x_B) & \text{si } z_B > \max(z_A, 0) \end{cases}$$

iii) Caso en el que no se invierte si no se recibe información (si $0 \geq \max(px_A + (1-p)z_A, px_B + (1-p)z_B)$). En este caso ocurre que $z_A < 0$ y $z_B < 0$, por lo que el decisor no invierte si la información dice que va a haber una expansión moderada o una recesión y, en consecuencia, el valor de la información es px_A .

Nótese que el valor de la información es positivo o nulo en todos los casos presentados. Cuando $p = 0$ se obtiene en cada uno de los tres casos considerados que VI es nulo. Por ejemplo, en el caso i) si $p = 0$ será $z_A \geq z_B$ y $z_A > 0$, ya que el decisor decide A si no recibe información. VI también es nulo cuando $p = 1$. Si $p = 1$ los casos ii) e iii) no pueden ocurrir ya que $x_A \geq x_B > 0$. Cuando $p = 0$, o cuando $p = 1$, el decisor está seguro de lo que va a ocurrir y cree que la información completa solamente va a confirmar sus creencias (por supuesto, puede equivocarse) y no está dispuesto a pagar nada por esa información.

Ejercicio K: Petición de ordenadores para la campaña de Navidad con aversión al riesgo

Resuelva de nuevo el Ejercicio A considerando que el dueño de la tienda de informática es averso al riesgo de forma que la utilidad que le proporcionan unas ganancias iguales a x es $u(x) = \sqrt{x}$. Analice el caso en el cada ordenador puede venderse a 1200 euros.

Solución

Si no recibe ninguna información que resuelva su incertidumbre, la utilidad esperada del dueño de la tienda de informática con cada decisión será:

$$U(60) = \sqrt{60(1200 - 820)} = 151$$

$$U(100) = 0,6\sqrt{60(1200 - 700) + 40(350 - 700)} +$$
$$+0,4\left[\sqrt{100(1200 - 700)}\right] = 165,34$$

El dueño de la tienda pedirá 100 ordenadores si no recibe información también cuando tiene el grado de aversión al riesgo que considerado en este ejercicio.

Si el dueño de la tienda recibe información completa sobre cuál va a ser la demanda de ese tipo de ordenadores comprará 60 ordenadores si la demanda va a ser igual a 60 y, en cambio, comprará 100 ordenadores si la demanda es igual a 100. Como el decisor cree inicialmente que hay una probabilidad igual a 0,6 de que la demanda sea 60, cree también que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 60 será 0,6, y, análogamente, cree que la probabilidad de que la información (completa) indique que la demanda es 100 será 0,4. La utilidad esperada del decisor cuando se recibe información completa es, por tanto:

$$0,6\sqrt{60(1200-820)}+0,4\sqrt{100(1200-700)}=180,04$$

Para calcular el valor de la información completa (la máxima cantidad que estaría dispuesto a pagar el dueño de la tienda de ordenadores por esa información completa) resolvemos

$$0,6\sqrt{60(1200-820)-x}+0,4\sqrt{100(1200-700)-x}=165,34$$

La solución es $x=4862,8$. El dueño de la tienda estaría dispuesto a pagar hasta $4862,8$ euros por un estudio de mercado que proporcionara información completa. Esta cantidad es superior a la cantidad (4080 euros) que estaba dispuesto a pagar por esa información un dueño de la tienda neutral ante el riesgo (véase el Ejercicio A).

Lecturas recomendadas y referencias bibliográficas

Un trabajo clásico sobre el valor de la información es Hirshleifer y Riley (1992), capítulo 5. Análisis más recientes pueden encontrarse en Birchler y Bütler (2007), capítulos 4 y 5, y en Gollier (2001), capítulo 24. Esos trabajos proporcionan otras referencias útiles.

Birchler, *U.* y *M. Bütler*, 2007. Information Economics. Routledge. Londres.

Gollier, *C.*, 2001. The Economics of Risk and Time. The MIT Press. Cambridge. Massachesetts.

Hirshleifer, *J.* y *J.G. Riley*, 1992. The Analytics of Uncertainty and Information. Cambridge University Press.