Sarriko-On

LEHIA EZ-PERFEKTUA-ri buruzko notak

ISBN: 978-84-693-8457-2

Iñaki Aguirre
Norma Olaizola

05-10

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

LEHIA EZ-PERFEKTUA-ri

buruzko notak

Iñaki Aguirre

Norma Olaizola

Analisi Ekonomikoaren Oinarriak I Departamentua

Euskal Herriko Unibertsitatea

AURKIBIDEA

2.2.2. Atzeraeraginezko irizpidea.

2.2.3. Nashen oreka.

2.2.4. Nashen orekaren arazoak eta fintasunak.

2.3. Joko errepikatuak.

2.3.1. Denbora horizonte finitua.

2.3.2. Denbora horizonte infinitua.

2.4. Konklusioak.

3. Gaia. **Oligopolioa**

Sarrera

3.1. Cournoten eredua.

3.1.1. Duopolioa.

3.1.2. Oligopolioa (*n* enpresa).

3.1.3. Ongizatearen analisia.

3.2. Bertranden eredua.

3.2.1. Produktu homogeneoa.

3.2.2. Produktu heterogeneoa.

3.3. Kantitatearen aukeraketan lidergoa. Stackelbergen eredua.

3.4. Kolusioa eta akordioen egonkortasuna.

3.4.1. Kolusioa epe laburrera.

3.4.2. Akordioen egonkortasuna. Denbora horizonte finitu eta infinitua.

1. Gaia. **Monopolioa**

Sarrera

Enpresa bat monopolioa dela esaten dugu, merkatu zehatz batean bera bada ondasun baten (edo ondasunen) saltzaile bakarra.

Arazoak: *ondasuna* eta *merkatua* definitzeko zailtasunak.

Enpresa bat monopolioa izatera eraman dezaketen arrazoiak honako hauek dira, adibidez:

- Lehengaien kontrola.
- Saltzeko erabateko eskubidearen eskuraketa (patentea, subasta…)
- Kapitalen merkatura sarrera hobea.
- Eskalako etekin gorakorrak…etab.

Eskari erabat elastikoari aurre egiten dion enpresa erabat lehiakor (prezioa datu bat bezala hartzen du) batekin alderatuz, monopolista batek merkatu eskariari egiten dio aurre. Beraz, merkatu konkretu baten gain monopolio boterea duen enpresa bat, jakitun izango da saldu dezakeen produktu kantitatea kobratzen duen prezioaren funtzio jarrai bat dela. Hau da, kontuan izango du produkzio mailaren jaitsierek kobra dezakeen prezioa igoko dutela. Monopolioak, beraz, merkatu prezioa finkatzeko gaitasuna dauka. Enpresa erabat lehiakor bat prezio onartzaile edo prezio hartzaile gisa har dezakegun bitartean, monopolio bat prezio erabakitzaile edo prezio finkatzailea da.

1.1. **Monopolista baten mozkinen maximizazioa**

(i) Mozkinen maximizazio arazoa prezioetan eta kantitateetan. Lehen ordenako baldintzak. Bigarren ordenako baldintzak. Maximizazio arazoaren interpretazio grafikoa.

(ii) Sarrera marjinalaren interpretazioa.

(iii) Sarrera marjinala kostu marjinalaren berdina izatearen baldintza.

(iv) Produkzioa eta elastikotasuna.

(v) Monopolio boterearen Lerner-en Indizea.

(vi) Adierazpen grafikoa.

(vii) Bigarren ordenako baldintzak.

(i) *Mozkinen maximizazio arazoa prezioetan eta kantitateetan*

Monopolistaren jarrerari eragiten dioten bi motatako murrizketak daude:

a) Kostuen funtzioan laburtutako murrizketa teknologikoak: $C(x)$.

b) Eskari murrizketak: $x(p)$.

Monopolistaren mozkinen funtzioa bi modu alternatibotan idatz genezake:

- $\Pi(p) = px(p) - C(x(p))$ eskariaren funtzioa erabilita.

- $\Pi(x) = p(x)x - C(x)$ eskariaren alderantzizko funtzioa erabilita.

Eskariak, $x(p)$, eta alderantzizko eskariak, $p(x)$, prezioaren eta eskatutako kantitatearen arteko erlazio bera adierazten dute, nahiz eta ikuspegi ezberdinetik izan. Eskari funtzioak esaten digu zein den prezio bakoitzean eskatutako kantitatea, alderantzizko eskariak merkatuan x unitate saldu ahal izateko prezioa zein den esaten digun bitartean.

$$\begin{array}{ccc} \max\limits_{p} \Pi(p) & & \max\limits_{x\geq 0} \Pi(x) \\ \Downarrow p^m & \equiv & \Downarrow x^m \\ x^m = x(p^m) & & p^m = p(x^m) \end{array}$$

Mozkinen maximizazio arazoa prezioaren arabera

$$\max_{p} \Pi(p) \equiv \max_{p} \; px(p) - C(x(p))$$

$$\Pi^{'}(p) = x(p) + px^{'}(p) - C^{'}(x(p))x^{'}(p) = 0$$

$$\Pi^{"}(p) = 2x^{'}(p) + px^{"}(p) - C^{"}(x(p))\left[x^{'}(p)\right]^2 - C^{'}(x(p))x^{"}(p) < 0$$

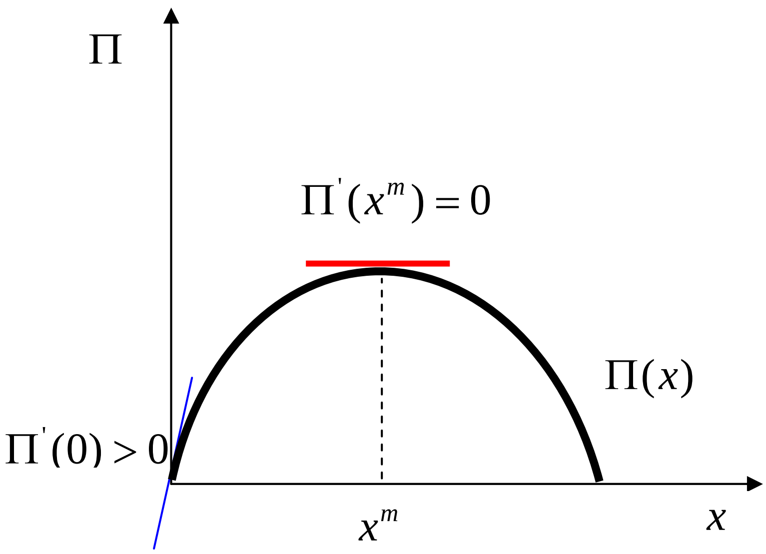
Mozkinen maximizazio arazoa produkzioaren arabera

$$\max_{x\geq 0} \Pi(x) \equiv \max_{x\geq 0} \; p(x)x - C(x)$$

$$\Pi^{'}(0) = p(0) - C^{'}(0) > 0 \Rightarrow \; p(0) > C^{'}(0)$$

$\Pi^{'}(x) = p(x) + xp^{'}(x) - C^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow \; \Pi^{'}(x^m) = 0$ Lehen ordenako baldintza.

$\Pi^{"}(x) = 2p^{'}(x) + xp^{"}(x) - C^{"}(x) < 0$ Mozkinen funtzio hertsiki ahurra (kasu erregularra).



(ii) *Sarrera marjinalaren interpretazioa*

Sarrera marjinala, $r^{'}(x)$, honakoa da:

$$r^{'}(x) = \underbrace{p(x)} + \underbrace{xp^{'}(x)} \qquad (1)$$

Unitate gehigarri bat saltzeagatik sarrera gehigarria.

Jadanik ekoiztutako unitateak prezio txikiago batean saldu beharra izateagatik galdutako sarrerak.

(iii) *Sarrera marjinala kostu marjinalaren berdina izatearen baldintza*

Mozkinak maximotzen dituen produkzio mailak (aurreko soluzioa) honako hau betetzen du:

$$\Pi^{'}(x^m) = r^{'}(x^m) - C^{'}(x^m) = p(x^m) + xp^{'}(x^m) - C^{'}(x^m) = 0 \qquad (2)$$

Monopolistarentzat optimoa den produkzio mailan mozkin marjinala zero egiten da, $\Pi^{'}(x^m) = 0;$ hau da, produkzio mailan aldaketa infinitesimal batek ez ditu mozkinak aldatzen. Produkzio maila bat non $\Pi^{'}(.) > 0$ ezin ditu mozkinak maximizatu, produkzioaren igoera (infinitesimal) batek mozkinak handituko lituzkeelako. Modu berean, produkzio maila bat non $\Pi^{'}(.) < 0$ ezin ditu mozkinak maximizatu, produkzioaren jaitsiera (infinitesimal) batek mozkinak handituko lituzkeelako.

Mozkinak maximotzen dituen produkzio mailan sarrera marjinala kostu marjinalarekin berdintzen da, $r^{'}(x^m) = C^{'}(x^m)$; hau da, produkzio mailaren aldaketa infinitesimal batek sarrera totalei eta kostuei modu berean eragiten die. (Beste era batetara esanda, produkzioaren igoera infinitesimal batek sarrerak produkzio kostuen maila berean igotzen ditu eta produkzioaren jaitsiera infinitesimal batek sarrerak produkzio kostuen maila berean jaisten ditu). Produkzio maila bat non $r^{'}(.) > C^{'}(.)$ ezingo lituzke mozkinak maximizatu, produkzioaren igoera infinitesimal batek sarrera totalen igoera produkzio kostuen igoera baino handiagoa izatea eragingo bailuke (horrela mozkinak handituz). Modu berean, produkzio maila bat non $r^{'}(.) < C^{'}(.)$ ezingo lituzke mozkinak maximizatu, produkzioaren jaitsiera infinitesimal batek sarrera totalen jaitsiera produkzio kostuen jaitsiera baino txikiagoa izatea eragingo bailuke (horrela mozkinak handituz).

(iv) *Produkzioa eta elastikotasuna:* $|\varepsilon(x)| \geq 1$

Ikus dezagun ea monopolioaren produkzio mailan eskariaren prezio elastikotasuna balio absolutuan 1 baino handiagoa edo berdina den. Eskariaren prezio elastikotasuna balio absolutuan definituz hasiko gara:

- prezioaren arabera: $|\varepsilon(p)| = -x^{'}(p)\dfrac{p}{x(p)}$, (3)

- kantitatearen arabera: $|\varepsilon(x)| = -\dfrac{1}{p^{'}(x)}\dfrac{p(x)}{x}$. (4)

Orain sarrera marjinala adieraziko dugu, eskariaren prezio elastikotasunaren arabera:

$$r^{'}(x) = p(x) + xp^{'}(x) \qquad (5)$$

$$r^{'}(x) = p(x)\left[1 + x\frac{p^{'}(x)}{p(x)}\right] \qquad (6)$$

$$r^{'}(x) = p(x)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon(x)|}\right] \qquad (7)$$

Monopolioaren produkzio mailan sarrera marjinala eta kostu marjinala berdintzen dira:

$$r^{'}(x) = p(x)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon(x)|}\right] = C^{'}(x). \quad (8)$$

Kostu marjinala beti ez negatiboa denez (zero baino handiagoa edo berdin) sarrera marjinalak ere ez negatiboa izan beharko du eta hori elastikotasuna balio absolutuan 1 baino handiagoa edo berdina denean gertatzen da. Hau da:

$$C^{'}(x) \geq 0 \Rightarrow p(x)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon(x)|}\right] \geq 0 \underset{p(x)\geq 0}{\Rightarrow} |\varepsilon(x)| \geq 1.$$

(v) *Monopolio boterearen Lerner-en Indizea*

Monopolio boterearen (edo merkatuaren boterea) Lerner-en Indizea lortuko dugu, edo berdina dena, prezio-kostu marjinal erlatibo marjina. (8) baldintzatik honakoa lortzen dugu:

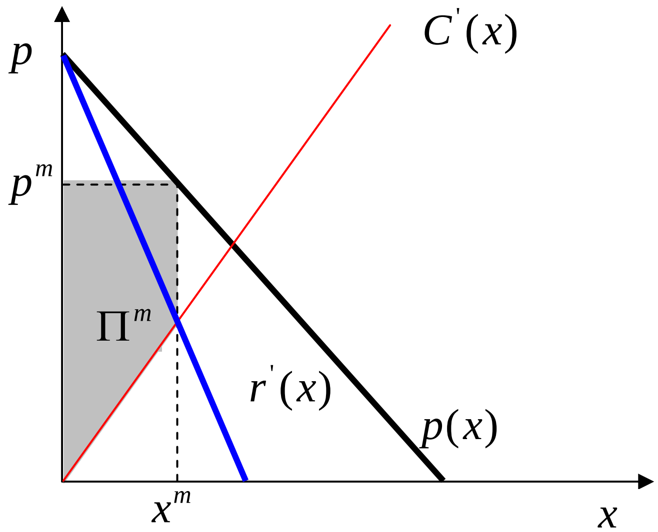
$$p(x) - \frac{p(x)}{|\varepsilon(x)|} = C^{'}(x).$$

Beraz, hau lortzen dugu:

$$\frac{p(x) - C^{'}(x)}{p(x)} = \frac{1}{|\varepsilon(x)|}. \quad (9)$$

Eskariaren prezio elastikotasuna balio absolutuan zenbat eta txikiagoa izan, Lerner-en Indizea orduan eta handiagoa izango da (eta beraz, handiagoa monopolioaren boterea) eta $|\varepsilon(x)| = \infty$ izanez gero, (enpresa erabat lehiakor batekin gertatuko litzatekeen bezala) monopolioaren boterea nulua izango litzateke, $\frac{p(x) - C^{'}(x)}{p(x)} = 0.$

(vi) *Adierazpen grafikoa*



Sarrera marjinala, $r'(x) = p(x) + xp'(x),$ alderantzizko eskariaren azpitik aurkitzen da alderantzizko eskariaren funtzioak malda negatiboa duelako, $p'(x) < 0$. Hau da, $r'(x) < p(x)$ baldin eta $x > 0,$ baina bi funtzioek jatorrizko ordenatu bera dute $r'(0) = p(0).$ Monopolistaren mozkina (kostu finkorik ez badago) honakoagatik emana dator:

$$\Pi^m = \Pi(x^m) = p^m x^m - C(x^m) = p^m x^m - \int_0^{x^m} C'(z)dz = \left[p^m - \frac{C(x^m)}{x^m} \right] x^m$$

(vii) *Bigarren ordenako baldintzak*

Interpretazioa

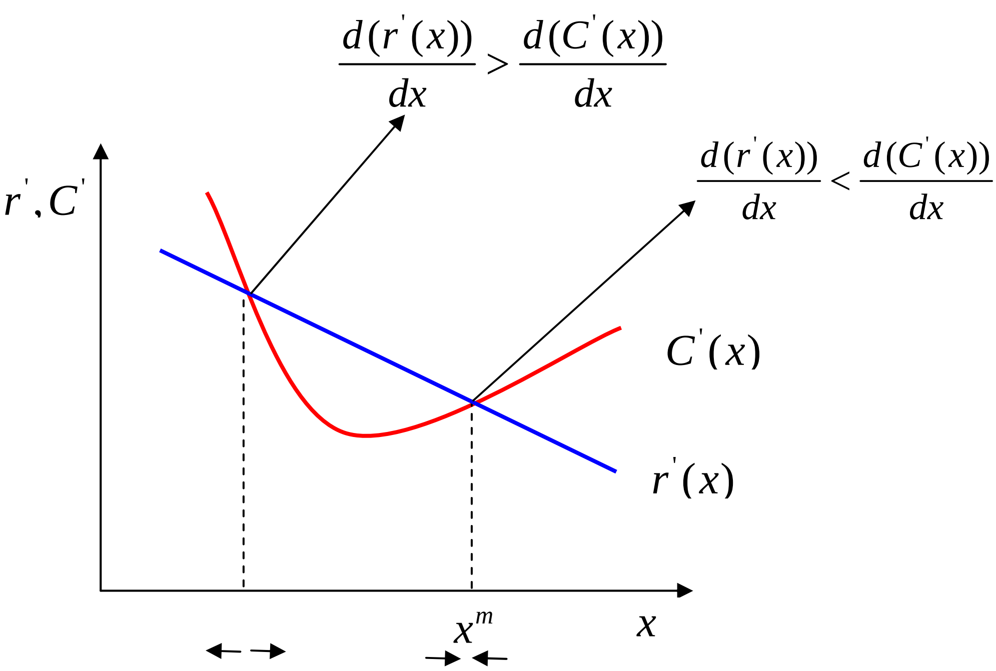
Analisia errazagoa egiteko, suposatuko dugu mozkinen funtzioa hertsiki ahurra dela. Hau da:

$$\Pi''(x) = r''(x) - C''(x) = 2p'(x) + xp''(x) - C''(x) < 0 \qquad (10)$$

(10) baldintza, sarrera marjinalaren maldak kostu marjinalaren malda baino txikiagoa izan behar duela esatearen berdina da:

$$\frac{d(r^{'}(x))}{dx} < \frac{d(C^{'}(x))}{dx}$$

Beste era batetara esanda, sarrera marjinalak kostu marjinalari goitik ebaki behar dio.



Kasuak

1. Kostu hertsiki ganbilak edo linealak: $C^{''}(x) \geq 0$ (CM gorakorra edo konstantea)

a) Eskari hertsiki ahurra edo lineala: $p^{''}(x) \leq 0$

$$\Pi^{''}(x) = 2\underbrace{p^{'}(x)}_{<0} + x\underbrace{p^{''}(x)}_{\leq 0} \underbrace{-C^{''}(x)}_{\leq 0} < 0$$

b) Eskari hertsiki ganbila: $p^{''}(x) > 0$

$r^{''}(x) = 2\underbrace{p^{'}(x)}_{<0} + x\underbrace{p^{''}(x)}_{>0}$. Honakoa egiaztatu behar da $r^{''}(x) < C^{''}(x)$.

2. Kostu hertsiki ahurrak: $C''(x) < 0$ (CM beherakorra)

Kasu bakoitzean honakoa egiaztatu behar da $r''(x) < C''(x)$.

1.2. **Eskari lineala, elastikotasun konstantedun eskaria eta kostu marjinal konstantea**

(i) *Eskari lineala eta kostu marjinal konstantea*

Alderantzizko eskaria: $p(x) = a - bx$ ($a > 0, b > 0$).

Produkzio kostua: $C(x) = cx$ ($c \geq 0$), ($a > c$).

Sarrera marjinala: $r'(x) = a - 2bx$.

Alderantzizko eskariaren malda: $p'(x) = -b$.

Sarrera marjinalaren malda: $\dfrac{d(r'(x))}{dx} = -2b$.

Mozkinen funtzio hertsiki ahurra: $\Pi''(x) = r''(x) = -2b < 0$.

Zero unitate produzitutakoan mozkin marjinala: $\Pi'(0) = p(0) - C'(0) = a - c > 0$.

Mozkinen maximizazioa: $r'(x^m) = C'(x^m) \Rightarrow a - 2bx^m = c \Rightarrow \quad x^m = \dfrac{a-c}{2b}$.

Monopolioaren prezioa: $p^m = p(x^m) \Rightarrow p^m = a - bx^m \Rightarrow \quad p^m = \dfrac{a+c}{2}$.

Monopolioaren mozkinak: $\Pi^m = \Pi(x^m) = [p(x^m) - c]x^m = [p^m - c]x^m = \dfrac{a-c}{2}\dfrac{a-c}{2b} = \dfrac{(a-c)^2}{4b}$

(ii) *Elastikotasun konstantedun eskaria eta kostu marjinal konstantea*

Eskaria: $x(p) = Ap^{-b}$ ($A > 0, b > 1$).

Produkzio kostua: $C(x) = cx$ ($c > 0$).

Eskariaren prezio elastikotasuna: $\left|\varepsilon(p)\right| = -x^{'}(p)\dfrac{p}{x(p)} = bAp^{-(b+1)}\dfrac{p}{Ap^{-b}} = b.$

Alderantzizko eskaria: $p(x) = A^{\frac{1}{b}}x^{-\frac{1}{b}}$.

Sarrera marjinala: $r^{'}(x) = A^{\frac{1}{b}}\dfrac{(b-1)}{b}x^{-\frac{1}{b}}$.

Sarrera marjinalaren malda: $r^{''}(x) = -A^{\frac{1}{b}}\dfrac{(b-1)}{b^2}x^{-\frac{(1+b)}{b}}$.

Mozkinen funtzio hertsiki ahurra:

$$\Pi^{''}(x) = r^{''}(x) = -A^{\frac{1}{b}}\frac{(b-1)}{b^2}x^{-\frac{(1+b)}{b}} < 0 \Leftrightarrow b > 1.$$

Zero produzitutakoan mozkin marjinala: $\Pi^{'}(0) = \infty > 0.$

Mozkinen maximizazioa:

$$r^{'}(x^m) = C^{'}(x^m) \Rightarrow r^{'}(x) = A^{\frac{1}{b}}\frac{(b-1)}{b}(x^m)^{-\frac{1}{b}} = c \Rightarrow \quad (x^m)^{-\frac{1}{b}} = A^{-\frac{1}{b}}\frac{b}{(b-1)}c$$

$$\left((x^m)^{-\frac{1}{b}} \right)^{-b} = \left(A^{-\frac{1}{b}}\frac{b}{(b-1)}c \right)^{-b} \Rightarrow x^m = A\left(\frac{b}{(b-1)}\right)^{-b}c^{-b}$$

Monopolioaren prezioa:

$$p^m = p(x^m) \Rightarrow p^m = A^{\frac{1}{b}}(x^m)^{-\frac{1}{b}} = A^{\frac{1}{b}}\left(A\left(\frac{b}{(b-1)}\right)^{-b}c^{-b} \right)^{-\frac{1}{b}} \Rightarrow p^m = \frac{b}{(b-1)}c$$

Monopolioaren mozkinak:

$$\Pi^m = \Pi(x^m) = [p(x^m) - c]x^m = [p^m - c]x^m = \frac{c}{b-1}A\left(\frac{b}{(b-1)}\right)^{-b}c^{-b} = A\frac{b^{-b}}{(b-1)^{-(b-1)}}c^{-(b-1)}$$

Mozkinen maximizazio arazoa prezioen arabera ebatzita Lerner-en Indizea lortzen da:

$$\frac{p^m - c}{p^m} = \frac{1}{|\varepsilon(p)|}$$

Elastikotasun konstantedun eskariarekin baldintza honela geratzen zaigu $\frac{p^m - c}{p^m} = \frac{1}{b}$, zeinetik oso erraz lor dezakegun monopolioaren prezioa.

1.3. **Estatika konparatiboa**

Ikus dezagun nola aldatzen diren monopolistaren prezioa eta produkzioa produkzio kostuak aldatzen direnean. Intuizio ekonomikoak esaten digu monopolistaren kostu marjinalaren igoera batek produkzioaren jaitsiera bat eta prezioen igoera bat ekarri behar lituzkeela. Sinplifikatzeko, suposatuko dugu kostu marjinala konstante dela (eta ez dagoela kostu finkorik). Kostuen funtzioa $C(x) = cx$ izango da.

$$\max_{x\geq 0} \Pi(x) \equiv \max_{x\geq 0} p(x)x - C(x)$$

$$\Pi^{'}(0) = p(0) - C^{'}(0) > 0 \Rightarrow p(0) > C^{'}(0)$$

$\Pi^{'}(x) = p(x) + xp^{'}(x) - c = 0 \quad (11) \Rightarrow x^m(c) \rightarrow$ monopolioaren produkzioa kostu marjinalen funtzio inplizitu bezala.

$\Pi^{''}(x) = 2p^{'}(x) + xp^{''}(x) - C^{''}(x) < 0$ Mozkinen funtzio hertsiki ahurra (kasu erregularra).

Kostu marjinala aldatutakoan monopolioaren produkzioa nola aldatzen den aztertzeko bi modu baliokide ditugu:

(i) (11) baldintza *x* eta *c*-rengandik erabat diferentziatuz.

$\left[2p^{'}(x)+xp^{''}(x)\right]dx-dc=0$

Askatuz:

$$\frac{dx}{dc}=\frac{1}{\underbrace{2p^{'}(x)+xp^{''}(x)}_{\substack{<0\\ B.O.B}}}<0 \qquad (12)$$

Beraz, kostu marjinalaren igoera infinitesimal batek, produkzioa murrizten du eta kostu marjinalaren jaitsiera infinitesimal batek, produkzioa igotzen du.

(ii) $x^{m}(c)$ kostu marjinalaren funtzio inplizitu bat dela kontuan hartuz. Beraz, definizioz,

$x^{m}(c)$ funtzioak lehen ordenako baldintza betetzen du; hau da

$$p(x^{m}(c))+x^{m}(c)p^{'}(x^{m}(c))-c=0$$

Kostu marjinalarekiko deribatuz:

$2p^{'}(x^{m}(c))x^{m'}(c)+x^{m}(c)p^{''}(x^{m}(c))x^{m'}(c)=1$

$\left[2p^{'}(x^{m}(c))+x^{m}(c)p^{''}(x^{m}(c))\right]x^{m'}(c)=1$

Askatuz: $x^{m'}(c)=\dfrac{1}{\left[2p^{'}(x^{m}(c))+x^{m}(c)p^{''}(x^{m}(c))\right]}<0$

Kostu marjinala aldatutakoan produkzioan ematen den aldaketa behin lortuz gero, zuzenean lortzen da prezioen aldakuntza.

$$\frac{dp}{dc}=\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dc}=\frac{\overbrace{p^{'}(x)}^{<0}}{\underbrace{2p^{'}(x)+xp^{''}(x)}_{\substack{<0\\ B.O.B}}}>0 \qquad (13)$$

Adibideak

(i) Eskari lineala

$$p^m = \frac{a+c}{2} \rightarrow \frac{dp^m}{dc} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dp}{dc} = \frac{p'(x)}{2p'(x) + x\underbrace{p''(x)}_{=0}} = \frac{1}{2}$$

Eskari linealarekin, prezioen igoera kostu marjinalaren igoeraren erdia da: $dp = \frac{1}{2}dc$

(ii) Elastikotasun konstantedun eskaria

$$p^m = \frac{b}{b-1}c \rightarrow \frac{dp^m}{dc} = \frac{b}{b-1} > 1$$

$$p(x) = A^{\frac{1}{b}} x^{-\frac{1}{b}} \rightarrow p'(x) = -A^{\frac{1}{b}} \frac{1}{b} x^{-\frac{(1+b)}{b}} \rightarrow p''(x) = A^{\frac{1}{b}} \frac{(1+b)}{b^2} x^{-\frac{(1+2b)}{b}}$$

$$\frac{dp}{dc} = \frac{1}{2 + x\frac{p''(x)}{p'(x)}} = \frac{1}{2 + x\frac{A^{\frac{1}{b}}\frac{(1+b)}{b^2}x^{-\frac{(1+2b)}{b}}}{-A^{\frac{1}{b}}\frac{1}{b}x^{-\frac{(1+b)}{b}}}} = \frac{1}{2 - \frac{(1+b)}{b}} = \frac{b}{b-1} > 1$$

Elastikotasun konstantedun eskariarekin, monopolioaren prezioa kostu marjinala baino neurri handiagoan handitzen da: $dp > dc$.

1.4. **Ongizatea eta produkzioa**

(i) Kontsumitzaile adierazlearen ikuspegia. Baliagarritasun kuasilineala.

(ii) Ordaintzeko jarrera maximoa eta ordaintzeko jarrera marjinala.

(iii) Errentarekiko independentea den eskari funtzioa.

(iv) Ongizate sozialaren funtzioa eta ongizate sozialaren produkzio maila maximizatzailea.

(v) Gaineratiko totala, kontsumitzailearen gaineratikoa eta produktugilearen gaineratikoa.

(vi) Hainbat kontsumitzaile eta merkaturen presentzian, eraginkortasun baldintzak.

(vii) Mozkinen maximizazio arazoa erabiliz, monopolioaren produkzioaren eta produkzio eraginkorraren arteko konparaketa.

(viii) Ongizate sozialaren maximizazio arazoa erabiliz, monopolioaren produkzioaren eta produkzio eraginkorraren arteko konparaketa.

(ix) Eraginkortasunaren galera berreskuraezina.

(i) *Kontsumitzaile adierazlearen ikuspegia*. *Baliagarritasun kuasilineala*

Ongizateari buruzko analisiak egiteko eta monopolioaren jarrera ikuspuntu sozial batetik baloratzeko, *kontsumitzaile adierazlearen ikuspegia* jarraituko dugu. Ikuspegi honetan merkatuko eskari kurba $x(p)$ kontsumitzaile adierazle bakarraren baliagarritasuna (kuasilineala) maximizatuz lortzen dela suposatzen da.

Suposa dezagun ekonomia bat non bi ondasun ditugun: x eta y. Pentsa dezakegu x ondasuna interesatzen zaigun merkatuan (monopolistikoa) ekoiztuta dagoela. Berriz, y ondasunak "gainerako guztia " jasotzen du: kontsumitzaileari beste ondasunak erosteko gelditzen zaion diru kantitatea x ondasunean kantitate optimoa gastatu ondoren.

Suposatuko dugu kontsumitzaile adierazleak *Baliagarritasun Funtzio Kuasilineala* duela:

$$U(x,y) = u(x) + y \qquad\qquad (u(0) = 0; u^{'}(.) > 0; u^{''}(.) < 0)$$

(ii) *Ordaintzeko jarrera maximoa eta ordaintzeko jarrera marjinala*

Ordaintzeko jarrera maximoa, $R(x)$: ondasun baten x unitate erosteko, kontsumitzailea ordaintzeko prest egongo litzatekeen kantitate maximoa. Kontsumitzaileak maximoa ordainduko du ondorengo bi egoeren artean indiferente badago: a) $R(x)$ ordainduz x unitate kontsumitzen eta b) ondasunik ez kontsumitzen bere errenta dotazioa, m, gainontzeko ondasunen kontsumoan gastatzen. Hau da:

$$U(x, m - R(x)) = U(0, m)$$

Jakin, kontsumitzaileak indiferente gelditu behar duela, eta beraz, aurreko baldintza berdintasunarekin bete behar dela. $U(x, m - \widetilde{R}(x)) > U(0, m)$ izango balitz, orduan kontsumitzailea prest egongo litzateke $\widetilde{R}(x)$ baino kantitate handiago bat ordaintzeko, eta aldiz $U(x, m - \widetilde{R}(x)) < U(0, m)$ izango balitz, orduan $\widetilde{R}(x)$ bere ordaintzeko jarrera maximoa baino handiagoa izango zen.

Baliagarritasun funtzioa kuasilineala denez:

$$U(x, m - R(x)) = U(0, m)$$

$$u(x) + m - R(x) = u(0) + m$$

$$R(x) = u(x)$$

Beraz, baliagarritasun funtzioa kuasilineala denean:

$u(x) \rightarrow$ ***Ordaintzeko jarrera maximoa***

Ordaintzeko jarrera marjinala: kontsumitutako kantitatearen aldaketa infinitesimal baten aurrean, ordaintzeko jarrera maximoan ematen den aldaketa da.

$$u^{'}(x) \rightarrow \textbf{\textit{Ordaintzeko jarrera marjinala}}$$

(iii) *Errentarekiko independentea den eskari funtzioa*

$$\begin{array}{l} \max\limits_{x,y} u(x) + y \\ \quad k.h \quad y + px = m \end{array} \equiv \max_{x,y,\lambda} \overbrace{u(x) + y + \lambda\left[m - y - px\right]}^{L(x,y,\lambda)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = u^{'}(x) - \lambda p = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda = 0 \end{array}\right\} \rightarrow p = u^{'}(x) \rightarrow \text{ Alderantzizko eskari funtzioa}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = m - y - px = 0$$

Eskariaren funtzio zuzena $x(p)$, funtzio honen alderantzizkoa da eta beraz, lehen ordenako baldintza betetzen du:

$$p = u^{'}(x(p)) \rightarrow \text{Eskari funtzioa}$$

Baliagarritasun funtzio kuasilinealaren propietateak: *eskari funtzioa errentarekiko independentea da*.

p-rekiko deribatuz hau lortzen dugu:

$$1 = u^{''}(x(p))x^{'}(p)$$

$$x^{'}(p) = \frac{1}{\underbrace{u^{''}(x(p))}_{<0}} < 0 \rightarrow \text{ malda negatiboa}$$

(iv) *Ongizate sozialaren funtzioa eta ongizate sozialaren produkzio maila maximizatzailea*

Azpiatal honetan $W(x) = u(x) - C(x)$ funtzioaren erabilera ongizate sozialaren funtzio moduan arrazoituko dugu.

Kontsumitzaile adierazlearen baliagarritasuna maximizatzen duen esleipena lortzeko arazoa planteatuko dugu, baliabideen murrizketa batekin: x ondasunaren produkzio kostua, x ondasuna edukitzeko uko egin beharreko y ondasunaren kantitatea bezala interpretatzen da.

$$\max_{x,y} u(x) + y$$
$$k.h \quad y = m - C(x)$$

Helburu funtzioan y ordezkatuz:

$$\max_{x} u(x) + \underbrace{m}_{\text{konstantea}} - C(x) \equiv \max_{x} u(x) - C(x)$$

Ongizate soziala maximizatzeko arazoa honetan datza:

$$\max_{x \geq 0} W(x) \equiv \max_{x \geq 0} u(x) - C(x)$$

$$W^{'}(0) = u^{'}(0) - C^{'}(0) > 0$$

$W^{'}(x) = u^{'}(x) - C^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow \; W^{'}(x^{e}) = 0$ (13) Lehen ordenako baldintza.

$W^{''}(x) = u^{''}(x) - C^{''}(x) < 0$ Ongizate sozialaren funtzio hertsiki ahurra (kasu erregularra).

Beraz, ongizate maila maximizatzen duen produkzio mailan edo produkzio maila eraginkorrean honako hau betetzen da: $W^{'}(x^{e}) = 0 \Leftrightarrow u^{'}(x^{e}) = C^{'}(x^{e})$. Normalean kostu marjinala konstantea dela suposatzen dugunez, eraginkortasun baldintza honela geratzen da:

$$u^{'}(x^{e}) = c,$$

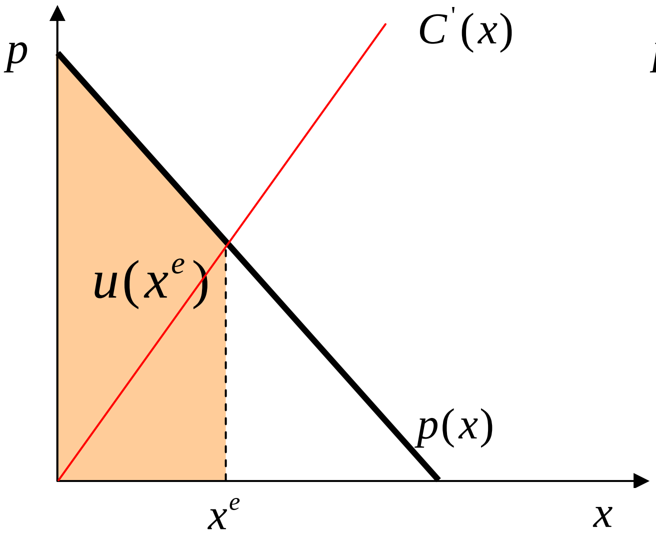
Hau da, produkzio maila eraginkorrean ordaintzeko jarrera marjinala kostu marjinalarekin berdintzen da.

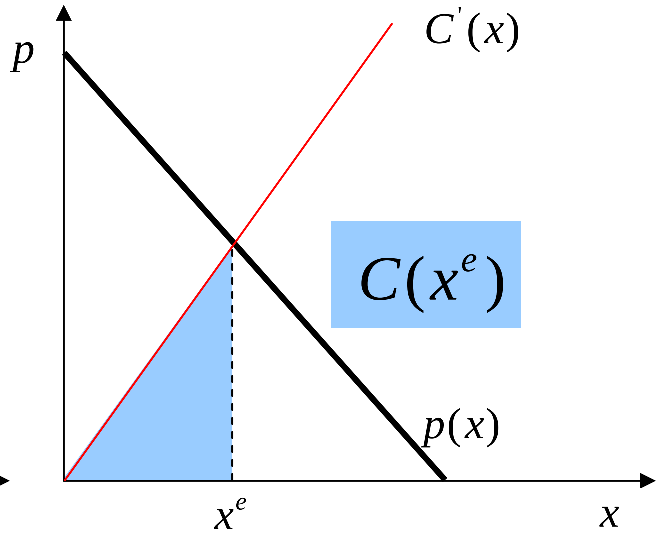
(v) *Gaineratiko totala, kontsumitzailearen gaineratikoa eta produktugilearen gaineratikoa*

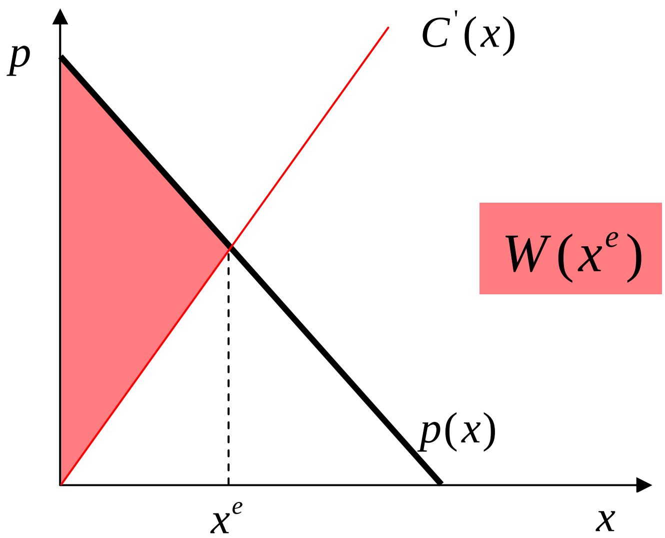
$W(x) = u(x) - C(x)$ funtzioa gaineratiko totala bezala ere interpretatu daiteke; hau da, ordaintzeko jarrera maximoaren eta produkzio kostuaren arteko ezberdintasuna bezala. Definizioz, honakoa betetzen da:

$$u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0} = \int_0^x u^{'}(z)dz \qquad\qquad C(x) - \underbrace{C(0)}_{=F=0} = \int_0^x C^{'}(z)dz$$

Beraz, $u(x) - C(x)$ maximizatzea, alderantzizko eskariaren azpiko eta kostu marjinalaren gaineko eremua maximizatzen duen produkzio maila aukeratzearen berdina da.



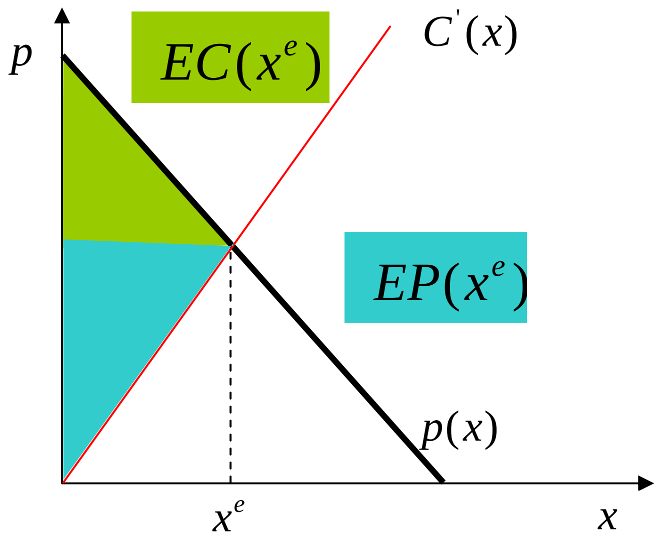




Ondasunean gastuak gehitu eta kenduta gaineratiko totala honela berridatz dezakegu:

$$W(x) = u(x) - C(x) = \underbrace{\left[u(x) - px\right]}_{EC(x)} + \underbrace{\left[px - cx\right]}_{EP(x)}$$

Kontsumitzailearen gaineratikoak, *EC*(*x*), kontsumitzailearen ordaintzeko jarrera maximoaren eta benetan ordaintzen duenaren arteko diferentzia neurtzen du. Produktugilearen gaineratikoak, *EP*(*x*), enpresaren mozkinak (kostu finkorik ez badago) neurtzen ditu. Beraz, produkzio maila eraginkorrak kontsumitzailearen gaineratikoaren eta produktugilearen gaineratikoaren batura ere maximizatzen du.



(vi) *Hainbat kontsumitzaile edo merkaturen presentzian, eraginkortasun baldintzak*

Demagun ekonomian $u_i(x_i) + y_i$ baliagarritasun funtzio kuasilineala eta m_i, $i = 1,2$ errenta dotazioa dituzten bi kontsumitzaile daudela. Paretoren zentzuan eraginkorra den esleipen bat lortzeko arazoa aztertuko dugu. Gizabanako baten baliagarritasuna maximizatuko dugu (adibidez, 1. kontsumitzailearena) bestearen baliagarritasuna konstante mantenduz (adibidez,

2. kontsumitzailearena), baliabideen murrizketa bat emanda (suposatzen dugu kostu marjinala konstantea eta c-ren berdina dela).

$$\max_{x_1,y_1,x_2,y_2} u_1(x_1)+y_1$$
$$k.h \quad u_2(x_2)+y_2=\bar{u}_2$$
$$y_1+y_2=m_1+m_2-c.(x_1+x_2)$$

Bigarren murrizketatik y_2 askatuz eta lehenengoan ordezkatuz, orduan y_1 askatu eta helburu funtzioan ordezkatuz, arazoa honela geratzen da:

$$\max_{x_1,x_2} u_1(x_1)+u_2(x_2)-c.(x_1+x_2)+m_1+m_2-\bar{u}_2$$

Lehen ordenako baldintzetatik honakoa lortzen dugu:

$$\left.\begin{array}{l} u_1^{'}(x_1^e)-c=0 \\ \\ u_2^{'}(x_2^e)-c=0 \end{array}\right\} \rightarrow u_1^{'}(x_1^e)=u_2^{'}(x_2^e)=c \rightarrow \text{Eraginkortasun baldintza} \quad (14)$$

(vii) *Mozkinen maximizazio arazoa erabiliz, monopolioaren produkzioaren eta produkzio eraginkorraren arteko konparaketa*

$$\max_{x\geq 0} \Pi(x) \equiv \max_{x\geq 0} p(x)x-C(x)$$

$$\Pi^{'}(0)=p(0)-C^{'}(0)>0 \Rightarrow p(0)>C^{'}(0)$$

$$\Pi^{'}(x)=p(x)+xp^{'}(x)-C^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \Pi^{'}(x^m)=0 \quad \text{Lehen ordenako baldintza.}$$

$$\Pi^{''}(x)=2p^{'}(x)+xp^{''}(x)-C^{''}(x)<0 \quad \text{Mozkinen funtzio hertsiki ahurra (kasu erregularra).}$$

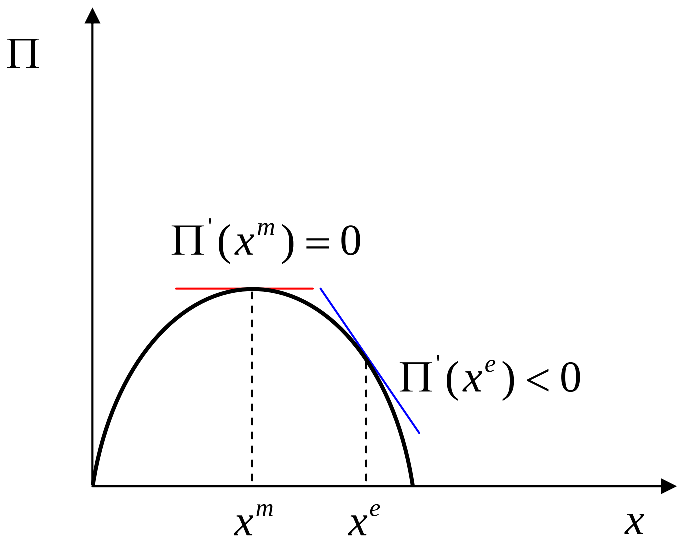
$$\left\{\begin{matrix} \Pi'(x^m) = 0 \\ \Pi'(x^e)? \\ \Pi''(x) < 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Pi'(x^e) = \underbrace{p(x^e)}_{=u'(x^e)} + x^e p'(x^e) - C'(x^e) = \underbrace{\left[u'(x^e) - C'(x^e)\right]}_{=0} + x^e \underbrace{p'(x^e)}_{<0} < 0$$

Produkzio eraginkorraren definizioaz.

$$\left\{\begin{matrix} \Pi'(x^m) = 0 \\ \Pi'(x^e) < 0 \\ \Pi''(x) < 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \Pi'(x^e) < \Pi'(x^m) \rightarrow x^e > x^m$$

$$\Pi''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{d\Pi'(x)}{dx} < 0 \rightarrow \uparrow x \ \downarrow \Pi'(x)$$



(viii) *Ongizate sozialaren maximizazio arazoa erabiliz, monopolioaren produkzioaren eta produkzio eraginkorraren arteko konparaketa*

$$\max_{x\geq 0} W(x) \equiv \max_{x\geq 0} u(x) - C(x)$$

$W^{'}(0) = u^{'}(0) - C^{'}(0) > 0 \Rightarrow \; p(0) > C^{'}(0)$

$W^{'}(x) = u^{'}(x) - C^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow \; W^{'}(x^{e}) = 0$ Lehen ordenako baldintza.

$W^{"}(x) = u^{"}(x) - C^{"}(x) < 0$ Ongizate funtzio hertsiki ahurra.

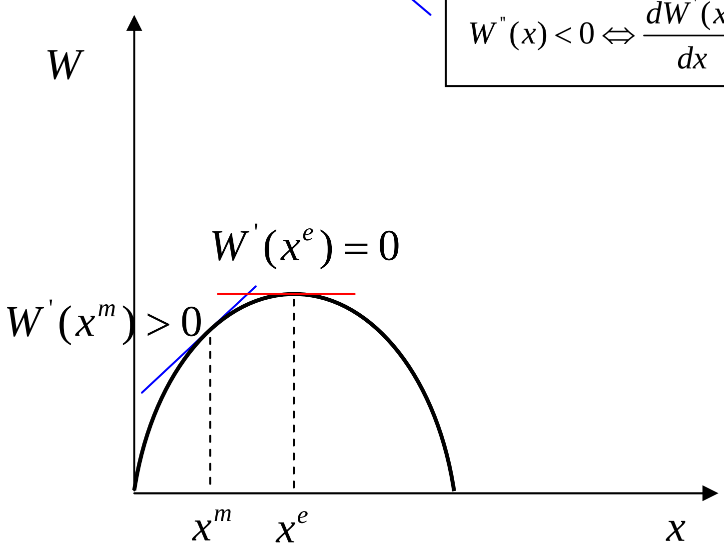
$$\left\{ \begin{matrix} W^{'}(x^{e}) = 0 \\ W^{'}(x^{m})? \\ W^{"}(x) < 0 \end{matrix} \right\}$$

$$W^{'}(x^{m}) = \underbrace{u^{'}(x^{m})}_{p(x^{m})} - C^{'}(x^{m}) = -x^{m} \overbrace{\underbrace{p^{'}(x^{m})}_{<0}}^{u^{"}(x^{m})} > 0$$

Monopolioaren produkzioaren definizioaz.

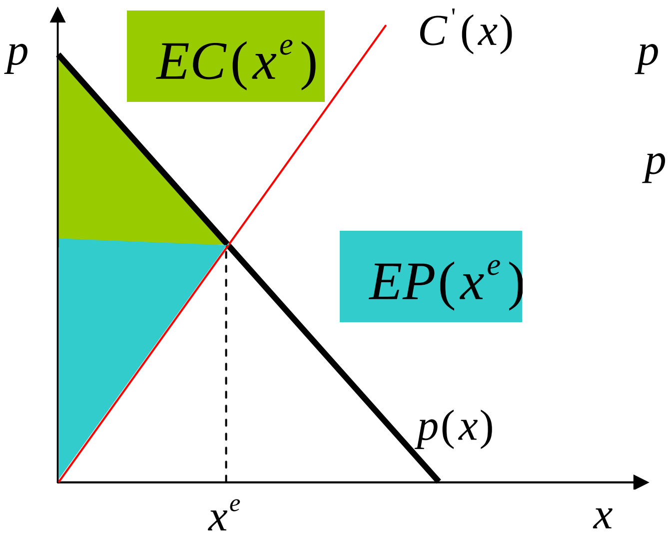
$$\left\{ \begin{matrix} W^{'}(x^{e}) = 0 \\ W^{'}(x^{m}) > 0 \\ W^{"}(x) < 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow W^{'}(x^{e}) < W^{'}(x^{m}) \rightarrow \; x^{e} > x^{m}$$

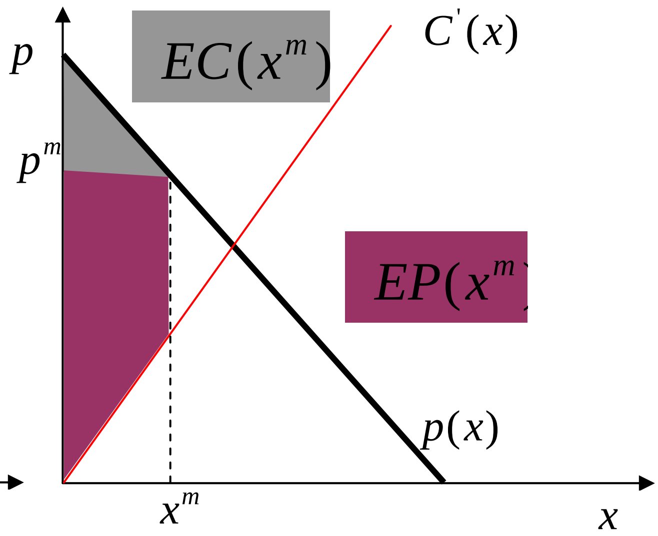
$W^{"}(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{dW^{'}(x)}{dx} < 0 \rightarrow \uparrow x \; \downarrow W^{'}(x)$

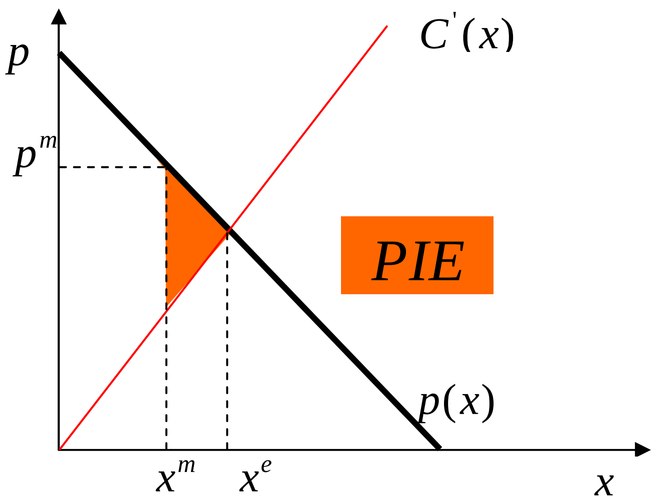


(vii) *Eraginkortasun galera berreskuraezina (PIE)*

$$PIE = W(x^e) - W(x^m) = \int_0^{x^e} [u'(z) - C'(z)]dz - \int_0^{x^m} [u'(z) - C'(z)]dz = \int_{x^m}^{x^e} [u'(z) - C'(z)]dz$$







1.5. ***Prezioen diskriminazioa***

(i) Definizioa.

(ii) Prezioak diskriminatzeko pizgarria.

(iii) Baldintzak edo betebeharrak.

(iv) Sailkapena edo prezioen diskriminazio motak (Pigou, 1920).

(v) Adibideak.

(vi) Eredua.

(i) *Definizioa*

“Prezioen diskriminazioa, ondasun baten unitate ezberdinak prezio ezberdinetan saltzen direnean existitzen da, kontsumitzaile berari nahiz kontsumitzaile ezberdinei ”.

Eztabaida

- Kalitatean ezberdintasunak: bidaiarien garraioa, kirol edo kultur ikuskizunak…
- Posible da prezio bakar bat diskriminatzailea izatea eta prezio ezberdinak, berriz, ez izatea.

Esango dugu prezioen diskriminaziorik ez dela existitzen bi kontsumitzailek ondasun baten unitate batengatik ordaindu duten prezioen arteko diferentziak, kontsumitzaile horiei ondasun hori zerbitzatzeko kostuen ezberdintasuna isladatzen badu.

(ii) *Prezioak diskriminatzeko pizgarria*

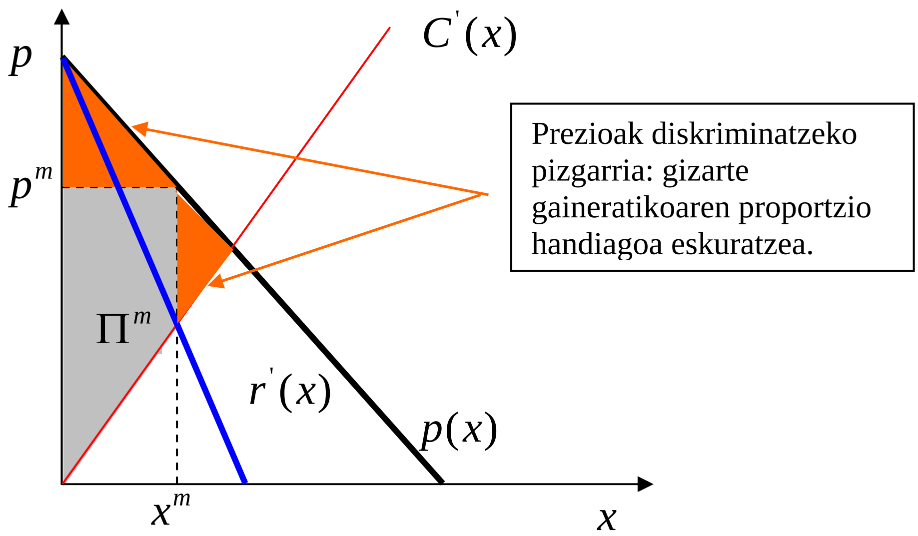
Monopolioaren produkzio mailan, sarrera marjinala kostu marjinalarekin berdintzen da: $r'(x^m) = C'(x^m)$. Hau da:

$$p(x^m) + x^m p'(x^m) = C'(x^m) \quad (1)$$

Unitate gehigarri bat saltzeagatik lortutako sarrera gehigarria.

Jadanik ekoiztutako unitateak prezio baxuagoan saldu beharra izateagatik galdutako sarrerak.

Monopolista unitate gehiago saltzeko prest egongo litzateke prezioak jaitsi beharrik izango ez balu. Kontsumitzailearen gaineratikoaren proportzio handiago bat eskuratzen saiatzeko pizgarriak existitzen dira $\rightarrow$ prezioak diskriminatzeko pizgarria.



(iii) *Baldintzak edo betebeharrak*

Enpresa batek prezioak diskriminatu ahal izateko bi baldintza bete behar dira:

a) enpresak kontsumitzaileak sailkatzeko gai izan behar du (zeina *informazioa*ren menpe dagoen).

b) enpresak birsalmenta galerazteko gaitasuna izan behar du (zeina arbitraje aukeren eta transakzio kostuen menpe dagoen).

Sailkapenaren kasurik errazena enpresak seinale exogeno bat jasotzen duenean gertatzen da (adina, kokapena, okupazioa…) zeinak kontsumitzaileak talde ezberdinetan sailkatzen laguntzen dion.

Kategoria endogeno batekin sailkatzea zailagoa da (adibidez, erositako kantitatea edota erosketaren momentua). Kasu honetan, monopolistak kontsumitzaileak eurak kategori zuzenean auto-klasifikatzeko moduko prezioak ipini behar ditu.

(iv) *Sailkapena edo prezioen diskriminazio motak* (Pigou, 1920)

1) **Lehen mailako prezioen diskriminazioa edo diskriminazio perfektua**.

Saltzaileak prezio ezberdin bat kobratzen du ondasun baten unitate bakoitzarengatik, non prezio hori unitate horregatik ordaintzeko jarrera maximoaren berdina izango den. Kontsumitzaileen lehentasunen *informazio osoa* eskatzen du eta inolako arbitraje motarik *ez* existitzea. Monopolistak kontsumitzailearen gaineratiko osoa bereganatzea lortzen du.

2) **Bigarren mailako prezioen diskriminazioa** (edo prezioen finkatze ez lineala).

Prezioak erositako ondasunaren unitate kopuruaren araberakoak dira, baina ez kontsumitzailearen araberakoa. Kontsumitzaile bakoitzak prezioen zerrenda berdinari egin behar dio aurre , baina hori erosten dituzten kantitateekin aldatu egiten da (edo beste edozein aldagairekin; adibidez, produktuaren kalitatea). Adib.: Produktuaren kantitate handiak erosteagatik deskontuak. Auto-autaketa.

3) **Hirugarren mailako prezioen diskriminazioa**.

Prezio ezberdinak kobratzen zaizkie kontsumitzaile ezberdinei, baina euretako bakoitzak kantitate konstante bat ordaintzen du (prezio bera) erosten duen ondasunaren unitate bakoitzarengatik. Enpresak seinale exogeno bat jasotzen du, zeinak kontsumitzaileak talde ezberdinetan sailkatzen laguntzen dion. Prezioak diskriminatzeko gehien erabiltzen den metodoa hauxe dela esan ohi da. Adibideak: ikasleei deskontuak, asteko egunaren arabera prezio ezberdinak, etab. Identifikazioa.

Batzutan, prezioak diskriminatzeko bi modu bereizten dira: zuzeneko prezioen diskriminazioa eta zeharkako prezioen diskriminazioa. Bigarren mailako prezioen diskriminazioa zeharkako diskriminazioaren kasu bat da (kontsumitzaileek prezio zerrenda bakar bati egiten diote aurre eta euren aukeraketekin auto-sailkatu egiten dira), lehen mailako prezioen diskriminazioa eta hirugarren mailako prezioen diskriminazioa zuzeneko diskriminazioaren kasuak diren bitartean. Hirugarren mailako prezioen diskriminazioan, enpresak talde edo merkatu ezberdinetan dauden kontsumitzaileentzat prezio zerrenda ezberdinak ezartzen ditu.

(v) *Adibideak*

Zailagoa da prezioen diskriminaziorik burutzen ez duten merkatuen kasu errealak aurkitzea, aurkakoa baino. Nahiz eta batzuetan ez den posible modu argi batean nabaritzea zein motatako diskriminazioa aplikatzen den, ariketa interesgarria da ondorengo kasuetan zein motatako prezio diskriminazioa erabiltzen den asmatzea.

- Tarifak bi zatitan: telefonoa, Internet, elektrizitatea, kabledun telebista… Tarifa finkoa, ordukako bonoak, etab.

- Elektrizitate tarifa ezberdinak etxeko eta industriako erabileretarako.

- Museoetan deskontuak, aldizkarien harpidetzak, kultura edo kirol gertakariak,… haurrentzat, gazteentzat edo jubilatuentzat.

- Lehentasunezko interes motak.

- Bono-metro, bono-bus,… garraio publikoan erositako kantitatearen araberako deskontuak.

- Zerbitzu kalitate ezberdina: kultur eta kirol ikuskizunetan prezio ezberdinak produktuaren kalitatearen arabera (tribuna, preferentzia, palkoa…), edo bidaiarien garraioan (turisten klasea, Business class, lehenengoa, bigarrengoa…)

- Errepikatutako erosketengatik deskontuak.

- Erositako kantitatearen araberako deskontuak: 2x1, 3x2 … supermerkatuetan…

- Janariaren etxerako zerbitzua, tele-denda…

(vi) *Eredua*

Prezioak diskriminatzeko hiru modu horiek eredu oso sinple baten bidez aztertuko ditugu. Suposa dezagun baliagarritasun funtzio kuasilinealak dituzten bi kontsumitzaile potentzial ditugula: $u_i(x_i) + y_i, \quad i = 1, 2.$

$u_i(0) = 0, \quad i = 1, 2.$

$u_i(x_i)$: kontsumitzailearen ordaintzeko jarrera maximoa $i = 1, 2.$

$u_i^{'}(x_i)$: kontsumitzailearen ordaintzeko jarrera marjinala $i = 1, 2.$

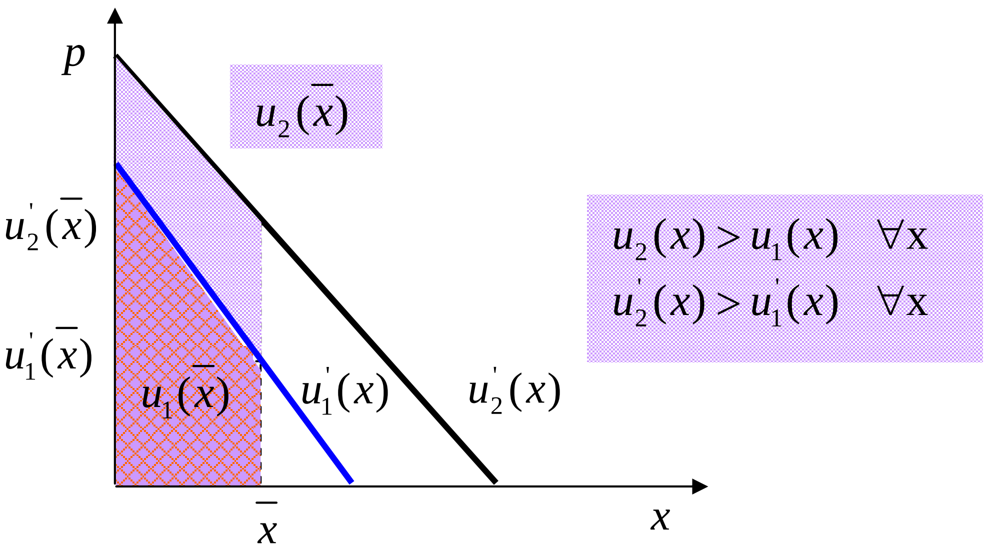
2 kontsumitzailea eskari altua duena dela eta *1 kontsumitzailea eskari baxua* duena dela esango dugu, honakoa betetzen bada:

$$u_2(x) > u_1(x) \quad \forall x$$

$$u_2^{'}(x) > u_1^{'}(x) \quad \forall x$$

Hau da, 2 kontsumitzailea eskari altukoa da eta 1 kontsumitzailea eskari baxukoa, baldin eta 2 kontsumitzailearen ordaintzeko jarrera maximoa eta ordaintzeko jarrera marjinala 1 kontsumitzailearenak baino handiagoak badira kontsumo maila guztietarako.

Ordaintzeko jarrera maximoaren eta ordaintzeko jarrera marjinalaren konparaketak, kontsumo maila berdinarentzako egiten bada bakarrik izango du zentzua. Gainera, konparaketa kontsumo maila guztientzako egin behar da.



Monopolistak kostu marjinal konstantea duela suposatuko dugu (eta kostu finkorik ez dago) $c > 0$. Modu berean, produkzio kostuen funtzioa honakoa da:

$$C(x) = c.x = c.(x_1 + x_2)$$

1.6. ***Lehen mailako prezioen diskriminazioa edo diskriminazio perfektua***

(i) Definizioa eta testuingurua.

(ii) Kontsumitzaile bakarra dugun kasurako arazoaren planteamendua eta ebazpena.

(iii) Oharketak. Eraginkorra al da monopolistak eskainitako kantitatea?

(iv) Bi kontsumitzaile ditugun kasurako arazoaren planteamendua eta ebazpena.

(v) Monopolistak kontsumitzaileei kantitate eraginkorrak eskaintzen al dizkiete? Monopolistak eskari handiko kontsumitzaileari kantitate handiagoa eskaintzen dionaren egiaztapena.

(vi) Zer gertatuko litzateke monopolista ez balitz gai izango kontsumitzaileak identifikatzeko ondasunak erostera doazenean?

(i) *Definizioa eta testuingurua*

Saltzaileak prezio ezberdin bat kobratzen du ondasunaren unitate bakoitzarengatik, non prezio hori unitate horregatik ordaintzeko jarrera maximoaren berdina den.

Kontsumitzaileen lehentasunei buruzko *informazio osoa* eskatzen du eta inolako arbitrajerik *ez* existitzea. Bereziki, monopolista gai da kontsumitzailea identifikatzeko ondasuna erostera doanean. (Adibide klasikoa: herriko medikua).

(ii) *Kontsumitzaile bakarra dagoen kasurako arazoaren planteamendua eta ebazpena*

Monopolistak mozkinik handienak ematen dizkion prezio produkzio konbinaketa (lotea) (r^*, x^*) eskaini nahiko dio kontsumitzaileari. Monopolistak kontsumitzaileari "dena edo ezer ez" aukeraketa planteatuko dio: $\left\langle \begin{matrix} (r^*, x^*) \\ (0,0) \end{matrix} \right.$. Kontsumitzaileak r^* ordaintzen du x^* unitaterengatik edo ondasunik gabe geratzen da. Monopolistaren maximizazio arazoa da:

$$\max_{r,x} r - cx$$
$$k.h \; u(x) \geq r \quad (1)$$

(1) murrizketa honela ere idatz genezake $u(x) - r \geq 0$: honek esaten digu kontsumitzaileak gaineratiko ez negatibo bat lortu behar duela *x* ondasunetik egiten duen kontsumotik. Modu honetako murrizketei, *parte-hartze murrizketak* edo *arrazionaltasun indibidualaren murrizketak* deitzen zaie.

Monopolistak mozkinak maximizatu nahi dituenez, ahal den r tarifa altuena aukeratuko du, eta beraz, (1) murrizketa berdintasunarekin beteko da: $r = u(x)$. Beraz, arazoa honetan datza:

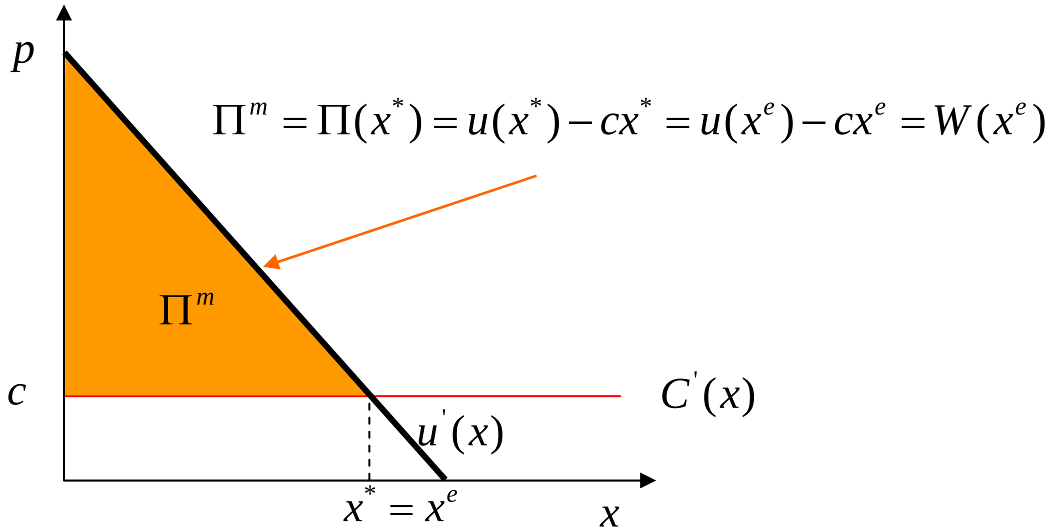
$$\max_x \overbrace{u(x) - cx}^{\Pi(x)}$$
$$\frac{d\Pi}{dx} = u^{'}(x) - c = 0 \rightarrow \quad u^{'}(x^*) = c$$
$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = u^{''}(x) < 0$$

Produkzio maila hau izanda, tarifa honakoa izango da : $r^* = u(x^*)$.

(iii) *Oharketak*

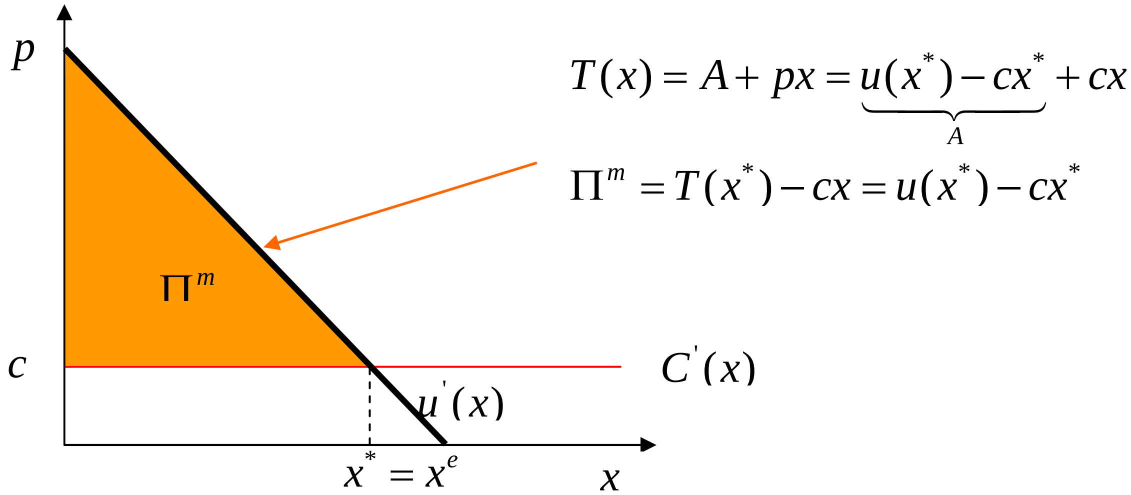
a) **Eraginkorra al da monopolistak eskainitako kantitatea?**

Monopolistak Paretoren zentzuan eraginkorra den kantitate bat ekoizten du, $x^* = x^e$, izan ere, ordaintzeko jarrera marjinala kostu marjinalarekin berdintzen duen kantitate bat eskaintzen du . (Ongizate sozialaren maximizazio arazoa errepasatu eta konparatu ebatzi berri dugunarekin). Hala ere, monopolista gaineratiko sozial guztiarekin geratzen da.



b) Monopolistak enpresa erabat lehiakorra balitz ekoiztuko zukeen kantitate berdina ekoizten du. Prezioa datu bat bezala hartuko balu, bere produkzio erabakia $p(x) = c$ izango zen, baina baliagarritasuna kuasilineala denez, $p(x) = u'(x)$, eta horren ondorioz $u'(x) = c$. Hala ere, komertzioaren mozkinen banaketa aurkakoa izango zen.

c) **Bi zatitako tarifa** batekin ere, emaitza berdinak lortu ahal izango genituzke.



d) Emaitza berdina lortuko genuke monopolistak kontsumitzaileari produkzio unitate bakoitza prezio ezberdinean eta unitate horregatik ordaintzeko duen jarrera maximoaren berdinean salduko balio. Suposa dezagun produkzioa Δx tamainako n zati berdinetan banatzen dugula, beraz, $x = n\Delta x$. Kontsumorako lehenengo unitatearengatik ordaintzeko jarrera maximoa, honako honekin emana dator:

$$u(0) + m = u(\Delta x) + m - p_1 \rightarrow u(0) = u(\Delta x) - p_1$$

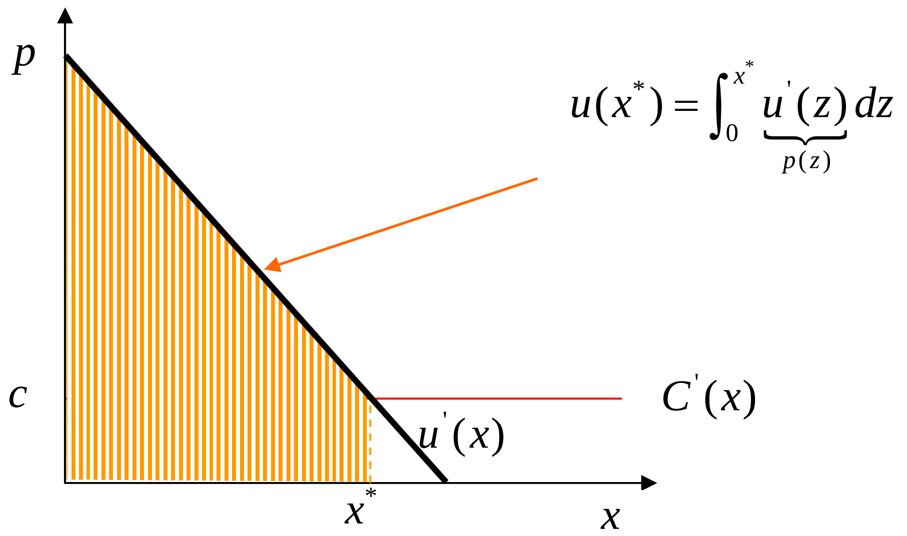
Kontsumorako bigarren unitateagatik ordaintzeko jarrera maximoa hau izango litzateke :

$$u(\Delta x) + m - p_1 = u(2\Delta x) + m - p_1 - p_2 \rightarrow u(\Delta x) = u(2\Delta x) - p_2$$

Eta horrela, hurrenez hurren, honako ekuazioak lortuko genituzke:

$$\begin{aligned} u(0) &= u(\Delta x) - p_1 \\ u(\Delta x) &= u(2\Delta x) - p_2 \\ u(2\Delta x) &= u(3\Delta x) - p_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u((n-1)\Delta x) &= u(n\Delta x) - p_n \end{aligned}$$

Batuz eta kontuan hartuz $u(0) = 0$ dela, hau lortzen dugu: $u(\underbrace{n\Delta x}_{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Δx unitate hauen tamaina infinitesimala bilakatzen denean, kontsumitzaileari "dena edo ezer ez" aukera emateak eta ondasunaren unitate (infinitesimal) bakoitzagatik ordaintzeko jarrera marjinalaren berdina den prezio batean saltzeak emaitza bera ematen dute.



(iv) *Bi kontsumitzaile ditugun kasurako arazoaren planteamendua eta ebazpena*

Monopolistak i kontsumitzaileari, $i=1,2,$ mozkinik handienak ematen dizkion prezio-produkzio konbinazioa (r_i^*, x_i^*) eskaini nahiko dio. Monopolistak i kontsumitzaileari, $i=1,2,$ "dena edo ezer ez " aukeraketa bat planteatuko dio: $\left\langle \begin{matrix} (r_i^*, x_i^*) \\ (0,0) \end{matrix} \right.$. i kontsumitzaileak, $i=1,2,$ r_i^* ordaintzen du x_i^* unitaterengatik edo ondasunik gabe geratzen da. Monopolistaren maximizazio arazoa honakoa da:

$$\begin{aligned} &\max_{r_1,x_1,r_2,x_2} r_1 + r_2 - c.(x_1 + x_2) \\ &k.h \quad u_1(x_1) - r_1 \geq 0 \\ &\qquad\; u_2(x_2) - r_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \underset{\text{mozkinen maximizazioa}}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} r_1 &= u_1(x_1) \\ r_2 &= u_2(x_2) \end{aligned}$$

Beraz, arazoa honela geratzen zaigu:

$$\max_{x_1,x_2} u_1(x_1) + u_2(x_2) - c.(x_1 + x_2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= u_1^{'}(x_1) - c = 0 \\ \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= u_2^{'}(x_2) - c = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow u_1^{'}(x_1^*) = u_2^{'}(x_2^*) = c$$

Produkzio maila hauek emanda, tarifak honakoak izango dira: $r_1^* = u_1(x_1^*)$ y $r_2^* = u_2(x_2^*)$.

(v) *Monopolistak kontsumitzaileei kantitate eraginkorrak eskaintzen al dizkiete? Monopolistak eskari handiko kontsumitzaileari kantitate handiagoa eskaintzen dionaren egiaztapena*

Monopolistak kantitate eraginkorrak eskaintzen ditu: $x_1^* = x_1^e$ eta $x_2^* = x_2^e$. (Esleipen eraginkorra lortzeko arazoa errepasatu eta azpiatal honetan ebatzitako arazoarekin alderatu).

Orain, monopolistak eskari altua duen kontsumitzaileari kantitate handiagoa eskaintzen diola frogatuko dugu: $x_2^* > x_1^*$.

$$\left.\begin{array}{l} u_1^{'}(x_1^*) = c \\ \\ u_2^{'}(x_2^*) = c \end{array}\right\} u_2^{'}(x_2^*) = u_1^{'}(x_1^*) < u_2^{'}(x_1^*)$$

2 kontsumitzailea eskari altukoa:
$u_2^{'}(x) > u_1^{'}(x) \quad \forall x$

Beraz, $u_2^{'}(x_2^*) < u_2^{'}(x_1^*)$ baina u_2 funtzioa hertsiki ahurra denez, $\dfrac{d(u_2^{'}(x))}{dx} < 0$ eta beraz $x_2^* > x_1^*$.

(vi) *Zer gertatuko litzateke monopolista ez balitz gai izango kontsumitzaileak identifikatzeko ondasunak erostera doazenean?*

(Azpiatal honek bigarren mailako prezioen diskriminazioa sartzeko balioko du).

Suposa dezagun orain, monopolista ez dela gai kontsumitzaileak identifikatzeko ondasuna erostera doazenean. Hau da, ezin ditu eskaintza pertsonalizatuak burutu eta beraz, prezioen zerrenda bakarra jartzera mugatuta egongo da. Suposa dezagun prezio zerrenda bat ezartzen duela diskriminazio perfektuko tarifak eta kantitate optimoak erabiliz:

$$\left\langle \begin{array}{c} (r_1^*, x_1^*) \\ (r_2^*, x_2^*) \\ (0,0) \end{array}\right.$$

non $r_1^* = u_1(x_1^*)$ eta $r_2^* = u_2(x_2^*)$ eskari altuko kontsumitzaileak, eskari baxuko kontsumitzailearentzat diseinatutako lotea erosteko pizgarriak dituela frogatuko dugu.

$$0 = \underbrace{u_2(x_2^*) - r_2^*}_{} < \underbrace{u_2(x_1^*) - r_1^*}_{} = \underbrace{u_2(x_1^*) - u_1(x_1^*)}_{>0}$$

Arbitraje pertsonala burutzeko pizgarriak.

2 kontsumitzaileak lortuko lukeen gaineratikoa berarentzat diseinatutako lotea erosiko balu.

2 kontsumitzaileak lortuko lukeen gaineratikoa 1 kontsumitzailearentzat diseinatutako lotea erosiko balu.

1.7. ***Bigarren mailako prezioen diskriminazioa*** **(edo prezio finkatze ez lineala)**

(Oinarrizko terminuak: identifikazio eza, prezioen zerrenda bakarra eta auto-autaketa).

(i) Definizioa eta testuingurua.

(ii) Parte-hartze eta auto-autaketa murrizketak. Interpretazioa.

(iii) Berdintasunarekin zein murrizketa betetzen diren ikusteko frogapena. Interpretazioa.

(iv) Mozkinen maximizazio arazoaren planteamendua eta ebazpena.

(v) Oharketak. Monopolistak kantitate eraginkorrak eskaintzen al ditu? Monopolistak kantitate baxuko kontsumitzaileari, kantitate eraginkorra baino gutxiago eskaintzen dionaren egiaztapena.

(vi) Zein baldintzen pean erabakitzen du monopolistak bi kontsumitzaileei eskaintzea ondasuna?

(vii) Adierazpen grafikoa.

(i) *Definizioa eta testuingurua*

Prezioak erosten den ondasunaren kantitatearen arabera aldatzen dira, baina ez kontsumitzailearen arabera.

Monopolistak kontsumitzaileen lehentasunak ezagutzen dituen testuinguru batean gaude (lehentasunen banaketa ezagutzen du), baina *ez* da kontsumitzailea *identifikatzeko* gai ondasuna erostera doanean. Prezio zerrenda bakarra finkatzera eta kontsumitzaileak eurak auto-sailka edo auto-aukera daitezen uztera behartuta dago. Zentzu honetan, zeharkako diskriminazio mota bat dela esaten da. Kontsumitzaileak prezioen zerrenda berdinari egin behar diote aurre, baina hauek erositako kantitateen menpekoak dira (edo beste edozein aldagairenak; adibidez, produktuaren kalitatea).

(ii) *Parte-hartze eta auto-autaketa murrizketak. Interpretazioa*

Helburua prezioen zerrenda optimoa diseinatzea izango da, non kontsumitzaile bakoitzak berarentzat diseinatutako prezio-kantitate konbinaketa aukeratuko duen.

$$\left\langle \begin{array}{l} (r_1, x_1) \longleftarrow \boxed{\text{1 kontsumitzailea}} \\ (r_2, x_2) \longleftarrow \boxed{\text{2 kontsumitzailea}} \\ (0, 0) \end{array} \right.$$

Monopolistaren murrizketak

- **Parte-hartze murrizketak** (edo arrazionaltasun indibiduala)

$$u_1(x_1) - r_1 \geq 0 \quad (1)$$

$$u_2(x_2) - r_2 \geq 0 \quad (2)$$

Murrizketa hauek bermatzen dute kontsumitzaile bakoitzak ondasuna erostea nahi duela. Kontsumitzaile bakoitzak, ondasuna kontsumituz, gutxienez, kontsumitu gabe adina baliagarritasun lortzen du. Beste era batean esanda, kontsumitzaile bakoitzak gaineratiko ez negatiboa lortzen du ondasuna erosita.

- **Auto-autaketaren murrizketak** (edo pizgarrien bateragarritasuna)

$$u_1(x_1) - r_1 \geq u_1(x_2) - r_2 \quad (3)$$

$$u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - r_1 \quad (4)$$

Murrizketa hauek bermatzen dute kontsumitzaile bakoitzak nahiago duela berarentzat diseinatutako prezio-kantitate konbinaketa beste kontsumitzaile batentzat diseinatutakoa baino. Beste era batean esanda, murrizketa hauek arbitraje pertsonala prebenitzen dute: kontsumitzaile bakoitzak, berarentzat diseinatutako lotea aukeratuz, beste kontsumitzaile batentzat diseinatutako lotea aukeratuta gutxienez bezainbeste gaineratiko lortzen du.

(iii) *Berdintasunarekin zein murrizketa betetzen direneko* ***frogapena***

Murrizketak kontsumitzailearen arabera taldekatuko ditugu.

$$\text{(1) y (3)} \rightarrow \begin{cases} r_1 \leq u_1(x_1) & (1)' \\ r_1 \leq u_1(x_1) - u_1(x_2) + r_2 & (2)' \end{cases}$$

$$\text{(2) y (4)} \rightarrow \begin{cases} r_2 \leq u_2(x_2) & (3)' \\ r_2 \leq u_2(x_2) - u_2(x_1) + r_1 & (4)' \end{cases}$$

Monopolistak mozkinak maximizatu nahi ditu eta beraz, ahal den r_1 eta r_2 altuenak nahi ditu. Horregatik, lehenengo bi ez-berdinketetatik bat bakarrik eta bigarrengoetatik beste bat bakarrik dira eraginkorrak (berdintasunarekin beteko dira). 2 kontsumitzailea eskari altukoa eta 1 kontsumitzailea eskari baxukoa den suposaketa (hau da, honakoa betetzen da: $u_2(x) > u_1(x) \;\; \forall x$ y $u_2^{'}(x) > u_1^{'}(x) \;\; \forall x$) nahikoa da zein murrizketa eraginkorrak diren zehazteko.

1) **(4)'berdintasunarekin eta (3)' ez-berdintasun hertsiarekin betetzen diren frogapena**

Suposa dezagun, ordea, (3)' berdintasunarekin betetzen dela eta beraz $r_2 = u_2(x_2)$. Orduan $(4)' \to r_2 \le r_2 - u_2(x_1) + r_1 \to r_1 \ge u_2(x_1)$. 2 kontsumitzailea eskari altukoa denez $u_2(x) > u_1(x) \ \ \forall x$ eta orduan $r_1 \ge u_2(x_1) > u_1(x_1)$. Hau da, $r_1 > u_1(x_1)$ eta beraz, ez litzateke (1)' murrizketa beteko, zeina kontraesan bat izango litzatekeen. (Eskari altuko kontsumitzailearen parte-hartzearen murrizketa berdintasunez betetzea, ez da bateragarria eskari baxuko kontsumitzaileak ondasuna erostearekin). Ondorioz, (3)' ez da eraginkorra eta (4)' eraginkorra da:

$$r_2 = u_2(x_2) - u_2(x_1) + r_1 \quad (5)$$

2) **(1)' berdintasunarekin eta (2)' ez-berdintasun hertsiarekin betetzen diren frogapena**

Suposa dezagun, ordea, (2)' berdintasunarekin betetzen dela eta beraz $r_1 = u_1(x_1) - u_1(x_2) + r_2$. Orain r_2 ordezkatuz, (5) baldintzatik honakoa lortzen dugu:

$$\cancel{r_1} = u_1(x_1) - u_1(x_2) + \underbrace{u_2(x_2) - u_2(x_1) + \cancel{r_1}}_{=r_2}$$

Honek hau ekartzen du:

$$u_2(x_2) - u_2(x_1) = u_1(x_2) - u_1(x_1)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} u_2'(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} u_1'(t)dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_2'(t) - u_1'(t)]dt = 0$$

Baina honek hautsi egiten du 2 kontsumitzailea eskari altua duen kontsumitzailea denaren suposaketa, $u_2'(x) > u_1'(x) \ \ \forall x.$ Beraz, (2)' ez da eraginkorra eta (1)' eraginkorra da:

$$r_1 = u_1(x_1) \quad (6)$$

Interpretazioa

Eskari baxua duen kontsumitzaileari, arbitrajea burutzeko pizgarririk ez duenez, bere ordaintzeko jarrera maximoa kobratuko zaio. Eskari altua duen kontsumitzaileari, arbitraje pertsonala burutzeko pizgarriak dituelarik (eskari baxuko kontsumitzaile baten itxura eginik), bere lotea erostera bultzatzen dion prezio maximoa kobratuko zaio (eskari altuko kontsumitzaile hau, berari zuzendutako lotearen eta eskari baxuko kontsumitzaileari zuzendutako lotearen artean indiferente geratzen den diru kantitatea, hain zuzen ere).

Ikus dezagun zergatik eskari altuko kontsumitzaileari gaineratiko pixka batekin utzi behar zaion. Kontsidera dezagun, eskari altuko kontsumitzailearen auto-autaketa murrizketa:

$$u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - r_1 \quad (4)$$

Azpimarratu behar da, eskari baxuko kontsumitzaileak ondasuna erostearekin bateragarria izan dezan, murrizketa honen eskubiko aldea positiboa dela. Hau da, r_1-entzako balio maximoa aukeratu bagenu, (4) baldintza honela geratuko zitzaigun:

$$u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - u_1(x_1) > 0$$

2 kontsumitzailea eskari altuko kontsumitzailea delako. (Zeinak esan nahi duen 2 kontsumitzailearen parte-hartze murrizketa ezin dela berdintasunarekin bete). Baina eskari altuko kontsumitzaileari gaineratiko positiboarekin utzi behar diotela kontuan hartuta, posible den gaineratiko txikienarekin utziko dio, 2 kontsumitzailea indiferente utziz berarentzat diseinatutako lotearen eta 1 kontsumitzailearentzat diseinatutako lotearen artean. Hau da, ((5) murrizketa berrordenatuz):

$$u_2(x_2) - r_2 = u_2(x_1) - u_1(x_1) > 0$$

eskari baxuko kontsumitzaileak ez duenez pizgarririk arbitrajerik burutzeko (gaineratiko negatiboa lortuko luke) monopolistak bere ordaintzeko jarrera maximoa kobratuko dio $r_1 = u_1(x_1)$.

(iv) *Mozkinen maximizazio arazoaren planteamendua eta ebazpena*

$$\begin{array}{l} \max\limits_{r_1,x_1,r_2,x_2} \; r_1 + r_2 - c.(x_1 + x_2) \\ k.h \quad \begin{array}{l} u_1(x_1) - r_1 \geq 0 \;\; (1) \\ u_2(x_2) - r_2 \geq 0 \;\; (2) \end{array} \\ u_1(x_1) - r_1 \geq u_1(x_2) - r_2 \;\; (3) \\ u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - r_1 \;\; (4) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \max\limits_{r_1,x_1,r_2,x_2} \; r_1 + r_2 - c.(x_1 + x_2) \\ k.h \quad \begin{array}{l} r_1 = u_1(x_1) \;\; (6) \\ r_2 = u_2(x_2) - [u_2(x_1) - r_1] \;\; (5) \end{array} \end{array}$$

Arazoa honela geratuko zen:

$$\max_{x_1,x_2} \overbrace{u_1(x_1) + u_2(x_2) - [u_2(x_1) - u_1(x_1)] \; - c.(x_1 + x_2)}^{\Pi(x_1,x_2)}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = u_1'(\tilde{x}_1) - c - [u_2'(\tilde{x}_1) - u_1'(\tilde{x}_1)] = 0 \;\; (7)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = u_2'(\tilde{x}_2) - c = 0 \;\; (8)$$

Tarifak honakoekin emanak etorriko dira:

$$\begin{array}{l} \tilde{r}_1 = u_1(\tilde{x}_1) \\ \tilde{r}_2 = u_2(\tilde{x}_2) - [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)] \end{array}$$

(v) *Oharketak*

1) **Monopolistak eskari altuko kontsumitzaileari kantitate eraginkorra eskaintzen dio eta gaineratiko positibo batekin uzten dio**.

(8) baldintzak $u_2^{'}(\tilde{x}_2) = c$ eskatzen du eta, beraz, monopolistak eskari altuko kontsumitzaileari kantitate eraginkorra eskaintzen dio $\tilde{x}_2 = x_2^e$ (eraginkortasun baldintzak egiaztatu).

Gainera, bere ordaintzeko jarrera maximoa baino prezio (tarifa) txikiagoa kobratzen dio, gaineratiko positibo batekin utziz, zeina eskari baxuko kontsumitzaile baten itxurak egin eta 1 kontsumitzailearentzat diseinatutako lotea hartuko balu lortuko lukeen berdina den. $\tilde{r}_2 = u_2(\tilde{x}_2) - [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)]$ eta beraz, bere gaineratikoa honakoa izango litzateke: $u_2(\tilde{x}_2) - \tilde{r}_2 = [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)]$.

2) **Monopolistak eskari baxuko kontsumitzaileari eraginkorra baino kantitate txikiagoa eskaintzen dio (frogapena) eta gaineratiko nuluarekin uzten dio**.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = u_1^{'}(\tilde{x}_1) - c - \underbrace{[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)]}_{>0} = 0 \quad (7)$$

2 kontsumitzailea eskari altukoa denez $[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)] > 0$, eta orduan (7) baldintzatik hau lortzen dugu: $u_1^{'}(\tilde{x}_1) > c.$ Definizioz produkzio eraginkorrak honakoa asetzen du: $u_1^{'}(x_1^e) = c,$ beraz, ondokoa betetzen delarik: $u_1^{'}(\tilde{x}_1) > u_1^{'}(x_1^e).$ Ordaintzeko jarrera maximoa funtzio hertsiki ahurra denez:

$$\left.\begin{array}{l} u_1^{'}(\tilde{x}_1) > u_1^{'}(x_1^e) \\[2ex] \dfrac{d(u_1^{'}(x_1))}{dx_1} < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \tilde{x}_1 < x_1^e$$

Ikus dezagun zein den emaitza honen intuizioa. Horretarako, x_1-en mozkin marjinala interpretatuko dugu eta produkzio maila ezberdinetan ebaluatuko dugu.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \underbrace{u_1^{'}(x_1) - c}_{>0(x_1<x_1^*)} - \underbrace{[u_2^{'}(x_1) - u_1^{'}(x_1)]}_{>0}$$

1 kontsumitzailetik mozkin marjinala: kontsumitzaile honi eskainitako kantitatean aldaketa batek, monopolistak beretik lortzen duen mozkina aldatu egiten da.

2 kontsumitzailetik mozkin marjinala: 1 kontsumitzaileari eskainitako kantitatean aldaketa batek, 2 kontsumitzaileari utzi beharreko gaineratikoa aldatu egiten da, honek ez dezan arbitrajerik egin.

$$\frac{\partial \Pi(x_1^*)}{\partial x_1} = \underbrace{u_1^{'}(x_1^*) - c}_{=0} - \underbrace{[u_2^{'}(x_1^*) - u_1^{'}(x_1^*)]}_{>0} < 0$$

x_1^* kantitatetik abiatuz, 1 kontsumitzaileari eskainitako kantitatean murrizketa batek mozkina handitu egiten du, izan ere, monopolistak 2 kontsumitzaileari utzi beharreko gaineratikoa murriztu egiten baita. x_1-en kantitate bat, $\tilde{x}_1 < x_1 < x_1^*$ izanik, kontsideratu ezkero, honakoa betetzen da:

$$\frac{\partial \Pi(x_1)}{\partial x_1} = \underbrace{u_1^{'}(x_1) - c}_{>0} - \underbrace{[u_2^{'}(x_1) - u_1^{'}(x_1)]}_{>0} < 0$$

Monopolistari x_1 murrizten jarraitzeak konpentsatu egiten dio, izan ere, gaineratiko gutxiagorekin utzi behar izateagatik eskari altuko kontsumitzailetik mozkinetan izaten duen irabaziak, eskari baxuko kontsumitzaileari kantitate txikiagoa eskaintzeagatik mozkinean izaten duen galera konpentsatzen baitio.

$$\frac{\partial \Pi(\tilde{x}_1)}{\partial x_1} = u_1^{'}(\tilde{x}_1) - c - \underbrace{[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)]}_{>0} = 0$$

$\tilde{x}_1$-en irabazi marjinala, x_1-eko murrizketa infinitesimal batetik, eskari altuko kontsumitzaileari gaineratiko gutxiago utzi behar izateagatik, eskari baxuko kontsumitzaileari kantitate baxuagoa eskaintzeagatik izandako galera marjinalarekin berdintzen da.

Gainera bere ordaintzeko jarrera maximoaren berdina den prezio (tarifa) bat kobratzen dio, gaineratiko nuluarekin utziz: $\tilde{r}_1 = u_1(\tilde{x}_1)$.

(vi) *Zein baldintzen pean erabakitzen du monopolistak bi kontsumitzaileei eskaintzea ondasuna?*

Monopolistak bi kontsumitzaileei ondasuna eskaintzea erabakiko du, baldin eta eskari altuko kontsumitzaileari bakarrik eskainita baino mozkin handiagoa lortzen badu. Hau da, ondasuna bi kontsumitzaileei eskainiko die ondokoa betetzen bada:

$$\Pi(0, x_2^*) \le \Pi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

$$u_2(x_2^*) - cx_2^* \le \underbrace{u_1(\tilde{x}_1)}_{\tilde{r}_1} - c\tilde{x}_1 + \underbrace{u_2(x_2^*) - [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)]}_{\tilde{r}_2} - cx_2^*$$

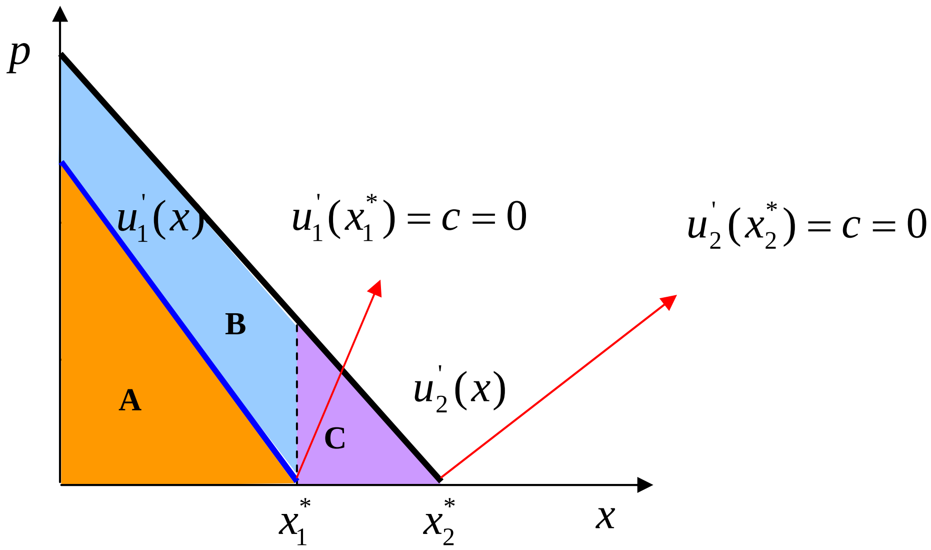
$$[u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)] \le u_1(\tilde{x}_1) - c\tilde{x}_1$$

Baldintza hau ez bada betetzen, monopolistak ondasuna eskari altuko kontsumitzaileari bakarrik eskaintzea erabakiko du. Ikusteko beste modu bat x_1-en mozkin marjinala kontsideratzea da. Negatiboa izango balitz x_1 -en maila guztientzako:

$$\frac{\partial \Pi(x_1)}{\partial x_1} = \underbrace{u_1'(x_1) - c}_{>0} - \underbrace{[u_2'(x_1) - u_1'(x_1)]}_{>0} < 0 \quad \forall x_1$$

orduan monopolistak eskari baxuko kontsumitzaileari ezertxo ere ez eskaintzea erabakiko du, izan ere, x_1-en maila guztientzat, eskari baxuko kontsumitzaileari eskainitako kantitatea murrizteak mozkinak handitzen ditu.

(vi) *Analisi grafikoa (kostu marjinal nulua)*



Diskriminazio perfektua

$$\left\langle \begin{matrix} (r_i^*, x_i^*) \\ (0,0) \end{matrix} \right. \quad i = 1,2$$

$$u_1^{'}(x_1^*) = u_2^{'}(x_2^*) = \underbrace{0}_{c}$$

$$r_1^* = u_1(x_1^*) \equiv A$$

$$r_2^* = u_2(x_2^*) \equiv A + B + C$$

$$\Pi^* = u_1(x_1^*) + u_2(x_2^*) \equiv \underbrace{A}_{r_1^*} + \underbrace{A + B + C}_{r_2^*}$$

Identifikazio eza

Suposa dezagun monopolistak kontsumitzailearen identitatea ez duela ezagutzen eta prezio zerrenda bakarra ezartzen duela, non diskriminazio perfektuko prezio-kantitate optimoen konbinaketak mantentzen dituen. 2 kontsumitzaileak arbitraje pertsonala egiteko pizgarriak izango ditu.

$$\left\langle \begin{array}{l} (\underbrace{r_1^*}_{A}, x_1^*) \\ (\underbrace{r_2^*}_{A+B+C}, x_2^*) \\ (0,0) \end{array}\right.$$

1 kontsumitzailea

2 kontsumitzailea

$$\boxed{0 = \underbrace{A+B+C}_{u_2(x_2^*)} - (\underbrace{A+B+C}_{r_2^*}) < \underbrace{A+B}_{u_2(x_1^*)} - \underbrace{A}_{r_1^*} = B}$$

Bigarren mailako diskriminazioa

Berdintasunarekin betetzen diren murrizketak honakoak dira:

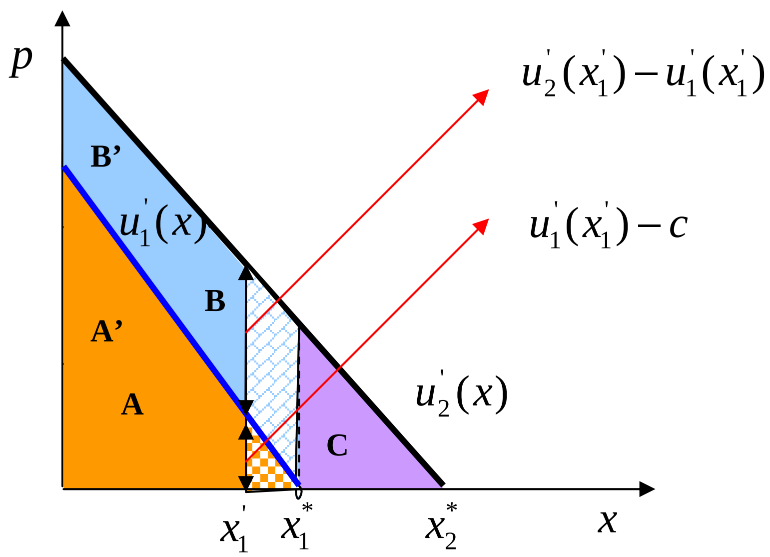
$r_1 = u_1(x_1) \equiv A(x_1) \rightarrow 1$ kontsumitzaileari alderantzizko eskaintzaren azpiko eremua kobratzen zaio.

$u_2(x_2) - r_2 = u_2(x_1) - r_1 \equiv B(x_1) \rightarrow$ 2 kontsumitzaileari $B(x_1)$ gaineratikoarekin utzi behar zaio (posible den txikiena) arbitrajerik egin ez dezan.

Hasieran, eskainitako kantitateak mantendu egiten ditugu; tarifak bakarrik doitzen ditugu.

$$\left\langle \begin{array}{l} (\underbrace{\bar{r}_1}_{A}, x_1^*) \\ (\underbrace{\bar{r}_2}_{A+C}, x_2^*) \\ (0,0) \end{array}\right. \qquad \Pi(x_1^*, x_2^*) = 2A + C$$

$$\Pi(x_1^{'}, x_2^*) = A' + A + B + C - B'$$
$$\Pi(x_1^{'}, x_2^*) - \Pi(x_1^*, x_2^*) \equiv -(A - A') + (B - B') > 0$$

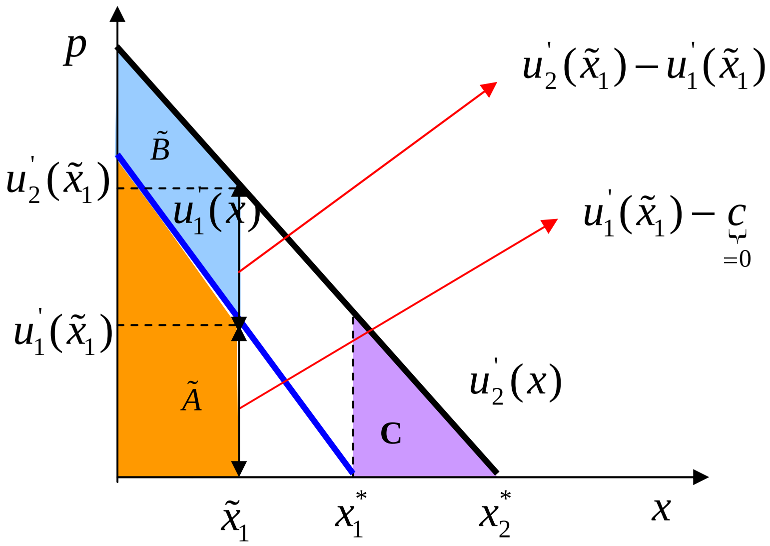


$$\left\langle \begin{array}{l} (\tilde{r}_1, \tilde{x}_1) \\ (\tilde{r}_2, \tilde{x}_2) \\ (0,0) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \Pi(\tilde{x}_1)}{\partial x_1} = u_1^{'}(\tilde{x}_1) - c - \underbrace{[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)]}_{>0} = 0$$

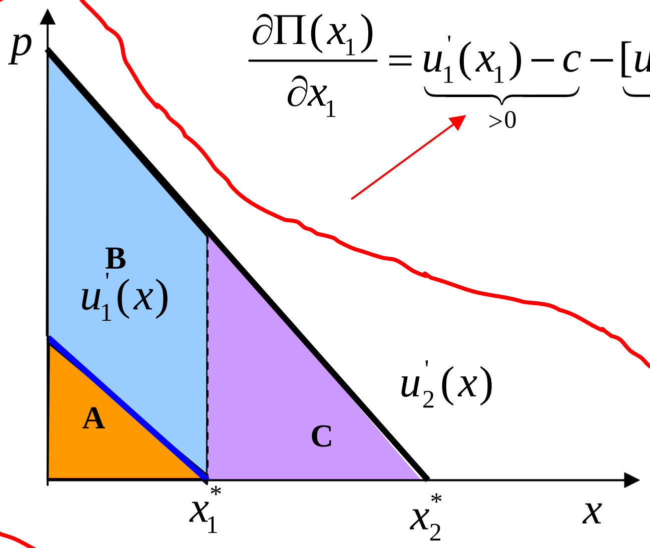
Kostu marjinala zero dela suposatzen ari garenez:

$$\frac{\partial \Pi(\tilde{x}_1)}{\partial x_1} = u_1^{'}(\tilde{x}_1) - \underbrace{[u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)]}_{>0} = 0 \rightarrow u_1^{'}(\tilde{x}_1) = u_2^{'}(\tilde{x}_1) - u_1^{'}(\tilde{x}_1)$$



$$\Pi(\tilde{x}_1, \underbrace{\tilde{x}_2}_{x_2^*}) = u_1(\tilde{x}_1) - \underbrace{c}_{0}\tilde{x}_1 + u_2(x_2^*) - [u_2(\tilde{x}_1) - u_1(\tilde{x}_1)] - \underbrace{c}_{0} x_2^* \equiv \tilde{A} + A + B + C - \tilde{B}$$

Ondasuna eskari altuko kontsumitzaileari bakarrik eskaintzea



$$\frac{\partial \Pi(x_1)}{\partial x_1} = \underbrace{u_1^{'}(x_1) - c}_{>0} - \underbrace{[u_2^{'}(x_1) - u_1^{'}(x_1)]}_{>0} < 0 \quad \forall x_1$$

$$\left\langle \begin{array}{l} (\underbrace{r_2^*}_{A+B+C}, x_2^*) \\ (0,0) \end{array} \right.$$

1.8. ***Hirugarren mailako prezioen diskriminazioa***

(i) Definizioa eta testuingurua.

(ii) Mozkinen maximizazioa. Alderantzizko elastikotasunaren erregela.

(iii) Mozkinen konparaketa prezio uniformearen kasuarekin (monopolioaren prezio sinplea).

(iv) Ongizate sozialaren gaineko eraginak.

(i) *Definizioa eta testuingurua*

Hirugarren mailako prezioen diskriminazioa existitzen da talde edo azpi-merkatu ezberdinetako pertsonei prezio ezberdinak kobratzen zaizkienean, baina kontsumitzaile bakoitzak prezio bera ordaintzen du eskuratzen duen unitate bakoitzarengatik. Hau da, seguruenik, prezio diskriminazio modurik erabiliena. Adibideak: ikasleei deskontuak, asteko egunaren arabera prezio ezberdinak, etab.

Monopolistak *seinale exogeno* bat jasotzen du, zeinak *m* merkatu edo azpi-merkatu erabat banatuak bereizten laguntzen dion: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0.$ *Diskriminazio zuzena*ren modu bat da hau: monopolistak prezio zerrenda ezberdinak ezartzen ditu talde edo merkatu ezberdinetako kontsumitzaileentzat. *Identifikazioa*: monopolistak kontsumitzaile bakoitza talde batean sailkatzen du.

(ii) *Mozkinen maximizazioa. Alderantzizko elastikotasunaren erregela*

Kasurik errazena kontsideratuko dugu, non $m = 2$: monopolistak kontsumitzaileak bi talde edo merkatuetan sailkatzen ditu, zeintzuen alderantzizko eskariaren funtzioak $p_1(x_1)$ eta $p_2(x_2)$ diren, non $p_i^{'}(x_i) < 0,\ i = 1,2.$ Monopolistak prezio ezberdinak ezar ditzake bi merkatuetan, baina merkatu bakoitzaren barnean ezin du diskriminatu. Maximizazio arazoa hau da:

$$\max_{x_1, x_2} \overbrace{p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2)x_2 - c.(x_1 + x_2)}^{\Pi(x_1, x_2)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= p_1(x_1) + x_1 p_1^{'}(x_1) - c = 0 \quad (1) \\ \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= p_2(x_2) + x_2 p_2^{'}(x_2) - c = 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} (i) \rightarrow IM_1 = IM_2 = c$$

$$(i) \rightarrow p_i(x_i) + x_i p_i^{'}(x_i) = c$$

$$p_i(x_i)[1+\frac{x_i p_i^{'}(x_i)}{p_i(x_i)}]=c$$

$$p_i(x_i)[1+\frac{1}{\varepsilon_i(x_i)}]=c$$

$$p_i(x_i)[1-\frac{1}{\left|\varepsilon_i(x_i)\right|}]=c$$

$$p_i(x_i)=\frac{c}{1-\frac{1}{\left|\varepsilon_i(x_i)\right|}} \qquad i=1,2.$$

Beraz, $p_1(x_1)>p_2(x_2)$ baldin eta $\left|\varepsilon_1(x_1)\right|<\left|\varepsilon_2(x_2)\right|$ den. Ondorioz, eskaririk elastikoena duen merkatuari kobratuko zaio preziorik baxuena; hau da, prezioekiko sentikorrena den merkatuari.

(iii) *Mozkinen konparaketa prezio uniformearen kasuarekin (monopolioaren prezio sinplea).*

Hirugarren mailako prezioen diskriminazioarekin monopolistak lortzen duen mozkina, prezio uniformeekin lortuko lukeena gutxienez bezain altua da. Arrazoia oso erraza da: hirugarren mailako prezioen diskriminazioarekin, beharrezkoa izanez gero, beti izango luke prezio berdinak mantentzeko aukera.

(iv) *Ongizate sozialaren gaineko eraginak*

1) Zein da arazoa?

2) Ongizate sozialean aldaketei mugak.

3) Aplikazioak:

a) Eskari lineala.

b) Merkatuen irekiera.

1) **Zein da arazoa?**

Atal honen helburua, ongizate sozialaren ikuspuntutik, hirugarren mailako prezioen diskriminazioa prezio uniformearekin edo monopolioaren prezio sinplearekin konparatzea da. Orokorrean, prezio uniformetik hirugarren mailako prezioen diskriminaziorako aldaketak, agente batzuei irabaziak ekartzen dizkie eta beste batzuei kalteak.

3ºPD-rekin irabazleak: monopolista eta elastikotasun handiena duen merkatuko kontsumitzaileak (merkatu horretan prezioa jaitsi egiten delako).

3ºPD-rekin kaltetuak: elastikotasun txikiena duen merkatuko kontsumitzaileak (merkatu horretan prezioa handitu egiten delako).

Beraz, ongizate sozialaren gaineko eragina zehaztu gabe geratzen da.

2) **Ongizate sozialean aldaketei mugak**

Errazteko, suposa dezagun bi merkatu bakarrik daudela eta abia gaitezen honako forma duen baliagarritasun agregatuaren funtzio batetik: $u_1(x_1)+u_2(x_2)+y_1+y_2$, non x_1 eta x_2 x-tik bi taldeen kontsumoak diren, eta $y = y_1 + y_2$ beste ondasunak kontsumitzen gastatzen duen dirua den. u_1 eta u_2 hertsiki ahurrak dira. Bi azpi-merkatuen alderantzizko eskariaren funtzioak hauek dira: $p_1(x_1)=u_1^{'}(x_1)$ eta $p_2(x_2)=u_2^{'}(x_2)$.

$C(x_1, x_2)$ x_1 eta x_2 eskaintzearen kostua bada, ongizate soziala honela neurtu dezakegu:

$$W(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2) - C(x_1, x_2)$$

Kontsidera ditzagun produkzioaren bi egitura (x_1^0, x_2^0) eta (x_1^1, x_2^1), zeintzuen prezioak (p_1^0, p_2^0) eta (p_1^1, p_2^1) diren, hurrenez hurren. Suposa dezagun, prezioen hasierako multzoa prezio uniformeari dagokiola (monopolioaren prezio sinplea) $p_1^0 = p_2^0 = p^0$ eta p_1^1 eta p_2^1 hirugarren mailako prezioen diskriminazioko prezioak direla. Kontsidera dezagun $\boldsymbol{x}^0$-tik $\boldsymbol{x}^1$-erako pausoa. u_1 eta u_2-ren ahurtasun hertsiagatik, honakoa dugu (ikusi Eranskina):

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x_1^1) < u_1(x_1^0) + \overbrace{u_1^{'}(x_1^0)}^{p_1(x_1^0)=p_1^0}\overbrace{(x_1^1 - x_1^0)}^{\Delta x_1} \quad (1) \rightarrow \Delta u_1 < p_1^0 \Delta x_1 \\ u_1(x_1^0) < u_1(x_1^1) + \underbrace{u_1^{'}(x_1^1)}_{p_1(x_1^1)=p_1^1}\underbrace{(x_1^0 - x_1^1)}_{-\Delta x_1} \quad (1)' \rightarrow \Delta u_1 > p_1^1 \Delta x_1 \end{array}\right\} \rightarrow p_1^0 \Delta x_1 > \Delta u_1 > p_1^1 \Delta x_1 \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_2(x_2^1) < u_2(x_2^0) + \overbrace{u_2^{'}(x_2^0)}^{p_2(x_1^0)=p_2^0}\overbrace{(x_2^1 - x_2^0)}^{\Delta x_2} \quad (2) \rightarrow \Delta u_2 < p_2^0 \Delta x_2 \\ u_2(x_2^0) < u_2(x_2^1) + \underbrace{u_2^{'}(x_2^1)}_{p_2(x_1^1)=p_2^1}\underbrace{(x_2^0 - x_2^1)}_{-\Delta x_2} \quad (2)' \rightarrow \Delta u_2 > p_2^1 \Delta x_2 \end{array}\right\} \rightarrow p_2^0 \Delta x_2 > \Delta u_2 > p_2^1 \Delta x_2 \quad (4)$$

(3) eta (4) batuz

$$p_1^0 \Delta x_1 + p_2^0 \Delta x_2 > \Delta u_1 + \Delta u_2 > p_1^1 \Delta x_1 + p_2^1 \Delta x_2$$

non

$$\begin{array}{l} \Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2;\ \Delta x_1 = x_1^1 - x_1^0;\ \Delta x_2 = x_2^1 - x_2^0 \\ p_1^0 = p_1(x_1^0) = u_1^{'}(x_1^0);\ p_2^0 = p_2(x_2^0) = u_2^{'}(x_2^0); \\ p_1^1 = p_1(x_1^1) = u_1^{'}(x_1^1);\ p_2^1 = p_2(x_2^1) = u_2^{'}(x_2^1). \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= W(x_1^1, x_2^1) - W(x_1^0, x_2^0) = \underbrace{u_1(x_1^1) - u_1(x_1^0)}_{\Delta u_1} + \underbrace{u_2(x_2^1) - u_2(x_2^0)}_{\Delta u_2} - [\underbrace{C(x_1^1, x_2^1) - C(x_1^0, x_2^0)}_{\Delta C}] \\ &= \Delta u_1 + \Delta u_2 - \Delta C \end{aligned}$$

Beraz,

$p_1^0\Delta x_1 + p_2^0\Delta x_2 - \Delta C > \Delta W > p_1^1\Delta x_1 + p_2^1\Delta x_2 - \Delta C$

Kostu marjinala konstantea bada:

$\Delta C = c(x_1^1 + x_2^1) - c(x_1^0 + x_2^0) = c\Delta x_1 + c\Delta x_2$

Ongizateko aldaketei mugak honela geratzen dira:

$$\underbrace{(p_1^0 - c)\Delta x_1 + (p_2^0 - c)\Delta x_2}_{\text{Goiko muga}} > \Delta W > \underbrace{(p_1^1 - c)\Delta x_1 + (p_2^1 - c)\Delta x_2}_{\text{Beheko muga}} \quad (5)$$

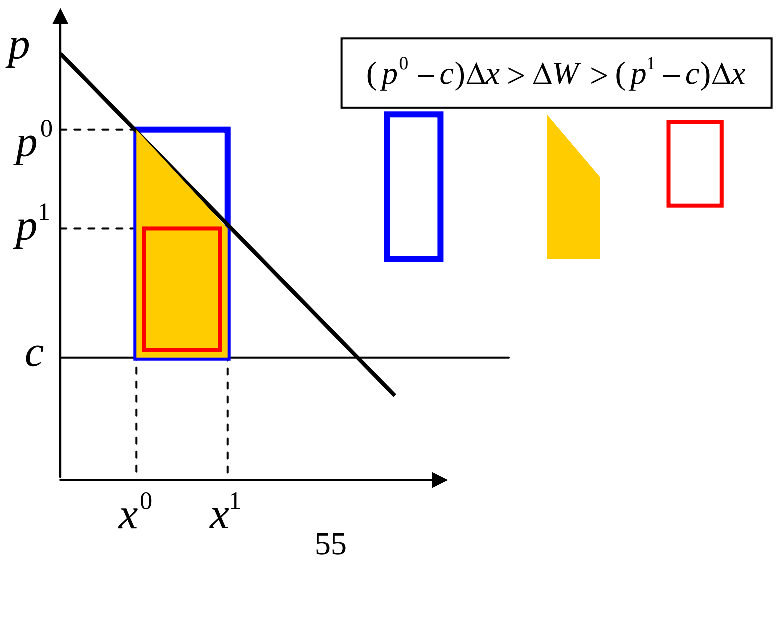
$p_1^0 = p_2^0 = p^0$ denez, ongizatearen aldaketei mugak hauek dira:

$$\underbrace{(p^0 - c)\overbrace{(\Delta x_1 + \Delta x_2)}^{\Delta x}}_{\text{Goiko muga}} > \Delta W > \underbrace{(p_1^1 - c)\Delta x_1 + (p_2^1 - c)\Delta x_2}_{\text{Beheko muga}} \quad (6)$$

- Goiko muga: Ongizate soziala handitzeko, $\Delta W > 0$ *beharrezko baldintza*, produkzio totala handitzea dela eskatzen du. Suposa dezagun, beste aldetik, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \leq 0$ dela. $(p^0 - c) > 0$ denez, orduan (4)$\rightarrow \Delta W < 0$.

- Beheko muga: Hirugarren mailako prezioen diskriminazioarekin, ongizatea handitzeko *baldintza nahiko* bat diskriminaziopeko prezio bat eta kostu marjinalaren arteko diferentziarekin neurtutako produkzioaren aldaketen batuketa positiboa izatea da.

Grafikoki, merkatu bakar baten kasurako mugak hauek izango ziren:



3) **Aplikazioak**

a) ***Eskari lineala***

Suposa dezagun bi merkatuen eskari linealak $x_i(p_i) = \frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{b_i} p_i$, $i = 1, 2,$ direla eta kostu marjinal konstantea nulua dela, $c = 0$. Hirugarren mailako prezio diskriminaziopean, mozkinen maximizazio arazoa honakoa da:

$$\max_{p_1, p_2} p_1 x_1(p_1) + p_2 x_2(p_2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} = x_1(p_1) + p_1 x_1^{'}(p_1) = 0 \rightarrow \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{b_1} p_1 - \frac{1}{b_1} p_1 = 0 \rightarrow p_1^1 = \frac{a_1}{2}; \; x_1^1 = \frac{a_1}{2b_1}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_2} = x_2(p_2) + p_2 x_2^{'}(p_2) = 0 \rightarrow \frac{a_2}{b_2} - \frac{1}{b_2} p_2 - \frac{1}{b_2} p_2 = 0 \rightarrow p_2^1 = \frac{a_2}{2}; \; x_2^1 = \frac{a_2}{2b_2}$$

Saldutako kantitate totala hau da:

$$x^1 = x_1^1 + x_2^1 = \frac{a_1}{2b_1} + \frac{a_2}{2b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2 b_1 b_2}$$

Prezio uniformearekin:

$$\max_{p} p x_1(p) + p x_2(p)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p} = x_1(p) + x_2(p) + p x_1^{'}(p) + p x_2^{'}(p) \rightarrow \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{b_1} p + \frac{a_2}{b_2} - \frac{1}{b_2} p - \frac{1}{b_1} p - \frac{1}{b_2} p = 0$$

$$\rightarrow p^0 = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2(b_1 + b_2)};$$

$$x_1^0 = \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{b_1} \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2(b_1 + b_2)} = \frac{2a_1 b_1 + 2a_1 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1}{2b_1(b_1 + b_2)} = \frac{2a_1 b_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1}{2b_1(b_1 + b_2)}$$

$$x_1^0 = \frac{a_2}{b_2} - \frac{1}{b_2} \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{2(b_1 + b_2)} = \frac{2a_2 b_2 + 2a_2 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2}{2b_2(b_1 + b_2)} = \frac{2a_2 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_2}{2b_2(b_1 + b_2)}$$

Saldutako kantitate totala hau da:

$$x^0 = x_1^0 + x_2^0 = \frac{2a_1b_1 + a_1b_2 - a_2b_1}{2b_1(b_1+b_2)} + \frac{2a_2b_2 + a_2b_1 - a_1b_2}{2b_2(b_1+b_2)}$$
$$= \frac{2a_1b_1b_2 + a_1(b_2)^2 - a_2b_1b_2 + 2a_2b_1b_2 + a_2(b_1)^2 - a_1b_1b_2}{2b_1b_2(b_1+b_2)}$$
$$= \frac{a_1b_1b_2 + a_1(b_2)^2 + a_2b_1b_2 + a_2(b_1)^2}{2b_1b_2(b_1+b_2)} = \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)(b_1+b_2)}{2b_1b_2(b_1+b_2)} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{2b_1b_2}$$

Beraz, produkzioa berdina da prezioen bi politika horiekin. Hau da, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$. Hau da, $\Delta x_1 = -\Delta x_2$. Mugak honela geratuko ziren:

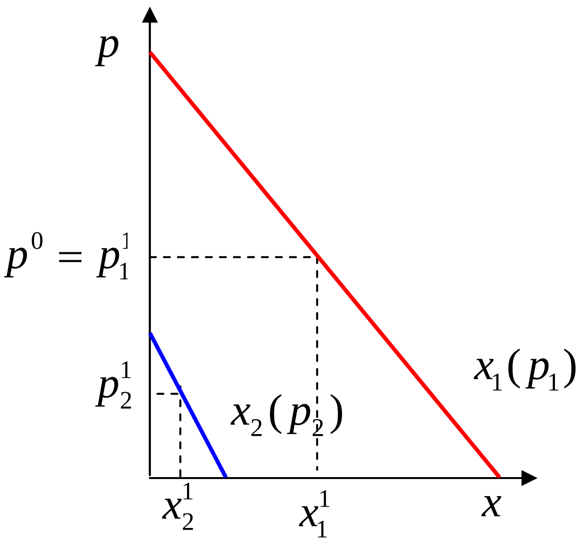
$$(p^0 - c)\overbrace{\underbrace{(\Delta x_1 + \Delta x_2)}_{=0}}^{\Delta x} > \Delta W > \underbrace{(p_1^1 - c)\Delta x_1 + (p_2^1 - c)\Delta x_2}_{<0} \quad (6)$$

Honela, ongizatea jaitsi egiten da: $\Delta W < 0$.

Jarraian ikusiko dugun bezala, emaitza merkatuak prezio uniformepean zerbitzatzearen menpe dago.

b) ***Merkatuen irekiera***

Suposa dezagun, bi merkatuen eskariak ondorengo grafikoan agertzen direnak bezalakoak direla.



Monopolistak prezio berean saldu behar izango balu, 1 merkatuko prezioak horrenbeste jaitsi beharko lituzke zeren eta merkatu horretako mozkinen jaitsiera konpentsatu gabe geratuko zen. Beraz,

$$\underbrace{(p_1^1 - c)}_{p^0}\underbrace{(\underbrace{\Delta x_1}_{=0} + \underbrace{\Delta x_2}_{>0})}_{>0} > \Delta W > \underbrace{\underbrace{(p_1^1 - c)\underbrace{\Delta x_1}_{=0}}_{=0} + \underbrace{(p_2^1 - c)\underbrace{\Delta x_2}_{>0}}_{>0}}_{>0} \quad (6)$$

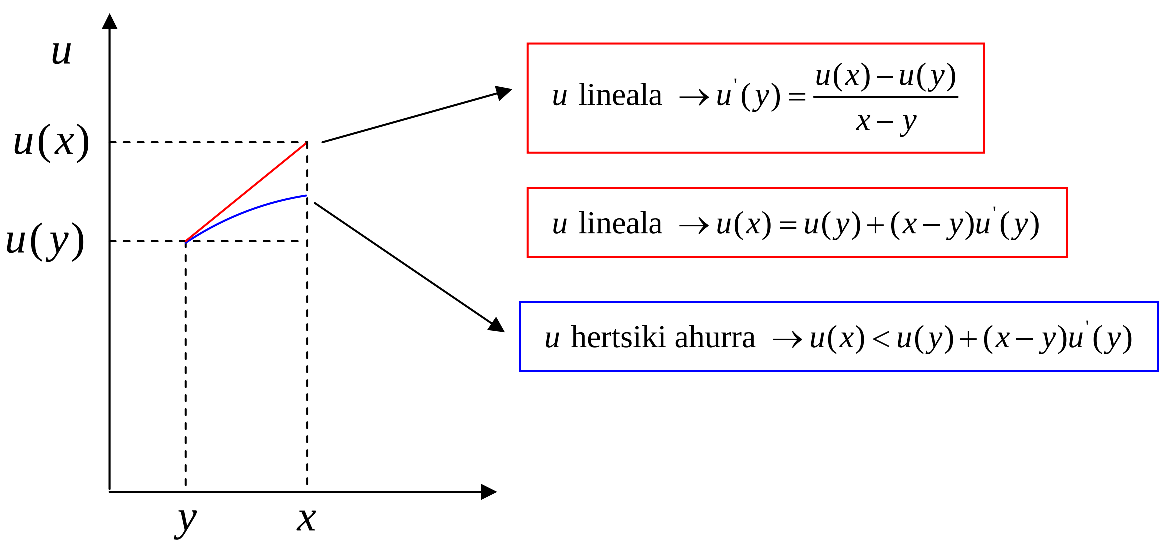
Beraz, beheko muga positiboa denez, $\Delta W > 0.$ Baina ez du ongizatea bakarrik handitzen; hain zuen ere, prezioen diskriminazioak prezio uniformeari garaitu egiten dio Paretoren zentzuan. Prezio uniformetik hirugarren mailako prezioen diskriminaziora igarotzean, monopolistaren mozkinak igotzen dira, 2 merkatuko kontsumitzaileak hobetzen dira eta 1 merkatuko kontsumitzaileak berdin daude.

Eranskina

x eta y guztietarako, u funtzio hertsiki ahurra bada, honakoa betetzen da:

$$u(x) < u(y) + u'(y)(x - y).$$

Funtzioa hertsiki ahurra bada, ukitzaileak beti funtzioaren gainetik kokatuko dira.



2.Gaia. **Joko Ez Kooperatiboen Teoria**

Sarrera

Joko ez Kooperatiboen Teoriak agente ekonomikoen arteko *gatazka egoerak* ikertu eta modelatzen ditu; hau da, agente ekonomiko bakoitzaren mozkinak (irabaziak, baliagarritasuna edo ordainketak) bere ekintza propioen gain ezezik ez, beste agenteen ekintzen menpe ere daudeneko egoerak ikertzen ditu.

Jokalari arrazionalak suposatuko ditugu eta, beraz, euretako bakoitza bere mozkinen (baliagarritasuna edo ordainketak) funtzioa maximizatzen saiatuko da, beste jokalariek nola jokatuko dutenari buruz dituen uste edo sinesmenen arabera. Jokoaren emaitza jokalari guztien emaitzen menpe dago.

Joko ez kooperatiboen oinarrizko ezaugarri bat ondorengoa da: *ezin* dela kanpoko agente batek bermatuko duen jokalarien artean inolako *kontratu*rik ezarri. Hau da, ez da akordioak betetzera behartzeko gai den kanpo erakunderik existitzen (adib. justizia epaitegiak). Testuinguru honetan, jokalarien arteko kooperazioa, oreka edo soluziorako proposamen moduan sortuko da soilik jokalariei horrela jokatzea interesatzen bazaie.

Joko bakoitzarentzat, jokalarien *portaera arrazionala*ren zentzuzko iragarpen bat izango den “soluzioa” proposatzen saiatuko gara (HELBURUA).

Joko ez Kooperatiboen Teoria *menpekotasun estrategikoaz* ezaugarritutako arazo ekonomiko *multipertsonalak* modelatu eta ulertzeko oso baliagarria delako interesatzen zaigu. Adibide gisa kontsidera dezagun industria bateko enpresa ezberdinen arteko lehia. Lehia perfektua eta monopolioa (beste enpresen sarrerarengatik mehatxatuta ez dagoena) kasu oso bereziak dira eta ez dira oso errealistak. Errealitatean ohikoena enpresa gutxi dauden industriak aurkitzea da (edo enpresa askorekin, baina euretako gutxi batzuk produkzio totalaren zati handi bat ekoizten dutelarik). Enpresa gutxi daudenean, euren arteko lehia kontsiderazio estrategikoez gidatuta egongo da: enpresa bakoitzak bere erabakiak (prezioa, ekoizpena, publizitatea...) besteen jokaera kontuan izanik edo antzemanez hartzen ditu. Beraz, enpresen lehia oligopolioaren kasuan, joko ez kooperatibo bat bezala ikus genezake, non enpresak diren jokalariak. Horrela, Jokoen Teoriatik datozen aurreikuspen edo soluzio proposamen ugari oso baliagarriak izango zaizkigu interakzio estrategikoaren peko agente ekonomikoen portaera ulertzeko.

2 atalean, Jokoen Teoriaren oinarrizko ezagutzak definituko ditugu. Joko bat adierazteko bi era ditugula ikusiko dugu: era luzatua eta era normala edo estrategikoa. 3 atalean, soluzioen kontzeptu nagusienak eta euren arazoak aztertuko ditugu. Nashen oreka eta bere fintasunak aztertuko ditugu. 4 atalak joko errepikatuak aztertzen ditu eta, azkenik, 5 atalean zenbait ondorio aurkezten dira.

2.1. **Oinarrizko ezagutzak**

Joko bat adierazteko bi era daude: era luzatua eta era normala edo estrategikoa. Era luzatuko joko baten elementurik garrantzitsuenak aztertuz hasiko gara.

2.2.1. **Jokoak era luzatuan** (dinamikoak edo sekuentzialak edo ondoz ondokoak)

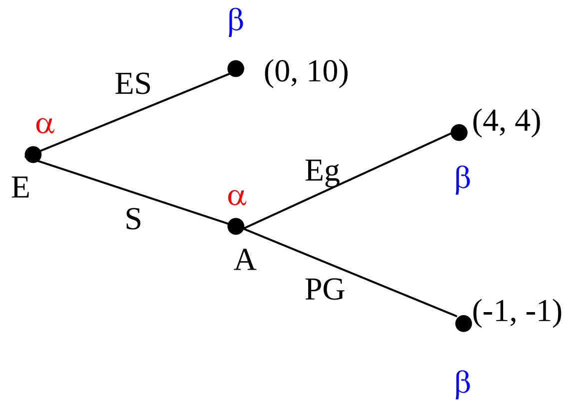
Jokoak era luzatuan honako hau zehaztu behar du:

1) Jokalariak.
2) Jokoaren ordena.
3) Txanda tokatzen zaionean jokalariak dituen aukera egingarriak (erabaki nodo bakoitzean).
4) Jokalari bakoitzak bere joko txanda bakoitzean (nodoak) duen informazioa.
5) Jokalari bakoitzari dagozkion ordainketak, aukeratutako mugimenduen funtziopean.
6) Naturaren mugimenduentzat probabilitatearen banaketak.

Jokoa era luzatuan *erabaki zuhaitz* baten bidez deskribatzen da. Erabaki zuhaitza adarrez eta nodoz osatuta dago. Bi motatako nodoak daude: erabaki nodoak eta amaierako nodoak. Zehaztu beharra dago nodo bakoitzean zein agentek hartu behar duen erabakia. Erabaki nodo batetara iristen garenean, nodo horretako agenteak bere txanda dauka eta zein norabidetatik joan erabakiko du. Amaierako nodo batetara iritsitakoan, ordainketak burutzen dira: amaierako nodo bakoitzean, ordainketa bektore batek esango digu jokalari bakoitzak zenbat irabazi duen.

1 ADIBIDEA: Sarrera jokoa

Kontsidera dezagun industria bat, non enpresa bat (A) finkatuta dagoen eta sartu berri potentzial bat (E) ere dagoen. Jokoaren lehenengo epealdian sartu berri potentzialak (B-k) erabakitzen du industrian sartu edo ez. Ez sartzea erabakitzen badu, jokoa amaitu egiten da eta ordainketak burutzen dira (A-k monopolioaren mozkinak lortzen ditu) eta sartzea erabakitzen badu, berriz, finkatutako enpresari (A-ri) egokitzen zaio txanda, zeinak E-ren sarrerara egokitu (merkatua banatuz) edo bientzat kaltegarria den prezio gatazka bat hasi aukeratu behar duen. Era luzatuan, jokoa honela adierazita geratuko zen:



Jokalariak: E eta A.

Ekintzak: *S* (sartu), *ES* (ez sartu), *Eg* (egokitu), *PG* (prezioen gatazka).

Erabaki nodoak: α.

Amaierako nodoak: β.

(x, y): ordainketa bektorea. x: E jokalariarentzat ordainketa; y: A jokalariarentzat ordainketa.

Amaiera nodo bakoitzean, jokalari bakoitzaren ordainketak zehaztu behar dira (baita euretako bat "fisikoki" jokatzera iristen ez bada ere).

Balizkoak:

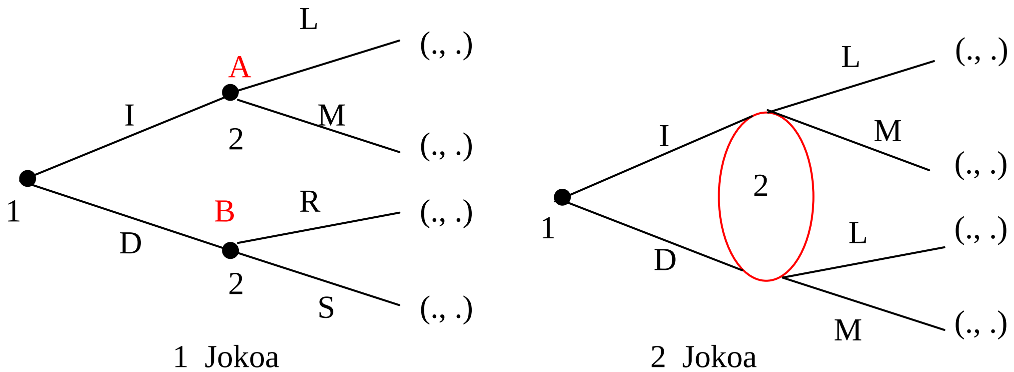
(i) Jokalari guztiek jokoari buruz duten pertzepzioa berdina da.

(ii) Informazio osoa: jokalari bakoitzak gainerako jokalarien ezaugarriak ezagutzen ditu: lehentasunak eta estrategia multzoak.

(iii) Oroimen perfektua: agente bakoitza jokatu duen guztiaz gogoratzen da.

1 Definizioa: **Informazio multzoa**

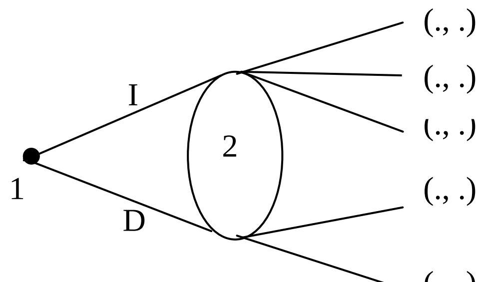
"Jokalari bakoitzak egokitzen zaion erabaki nodo bakoitzean eskuragarri duen informazioa da" .



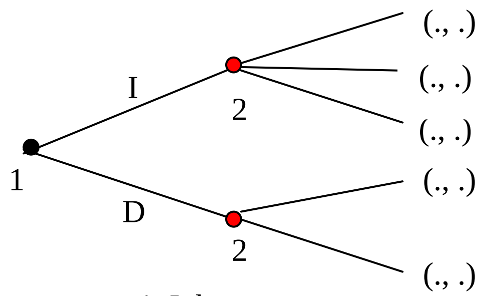
1 jokoan, 2 jokalariak bere nodo bakoitzean informazio ezberdina dauka. *A-n*, jokatzea egokitzen bazaio, badaki 1 jokalariak *I* jokatu duela eta *B-n D* jokatu duela. Informazio multzo hauek erabaki nodo batez osatuta daudela esaten dugu. 2 jokoan, 2 jokalariak informazio berdina dauka bere bi erabaki nodoetan. Hau da, informazio multzoa bi erabaki nodoz osatuta egongo da.

Nodo bat baino gehiagoz osatuta dauden informazio multzoak dituzten jokoak, informazio ez-perfektuko jokoak dira: jokalarietako batek ez ditu beste jokalari(ar)en mugimendu guztiak ikusten. Informazio multzoa ondorengoa da: nodo multzo bat non, zehazki zein nodoan dagoenaren informaziorik gabe, jokalariak jokatu behar duen.

Jokalari guztiek jokatzen ari diren jokoa ezagutzen dute, bestetik oroimen perfektuaren balizkoa dugu. Ondorioz, nodo bat baino gehiagoko informazio multzoak eduki ditzaketen egoerak mugatuak daude.



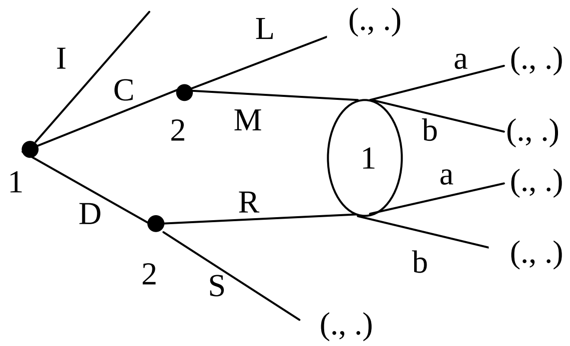
3 Jokoa



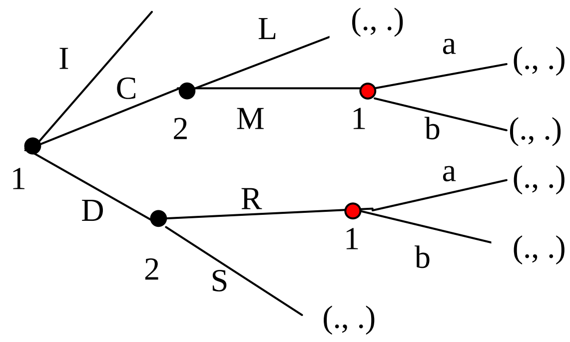
4 Jokoa

3 jokoa gaizki adierazita dago, izan ere, ez litzateke informazio ez-perfektuko joko bat izango. 2 jokalariak jokoa ezagutzen badu, jokatzea egokitzen zaionean eta hiru aukereei aurre egiten

dienean automatikoki ondorioztatuko du goiko nodoan dagoela. Hau da, jokoak era luzatuan 4 jokoa bezalakoa izan behar luke. Beraz*, informazio multzo batek bi erabaki nodo edo gehiago baditu, horietako bakoitzean aukera kopurua (akzioak edo mugimenduak) berbera izan behar du*.



5 Jokoa



6 Jokoa

Oroimen perfektuaren balizkoak, 5 jokoan bezalako egoerak ekiditen ditu. 1 jokalariari bere bigarren erabaki nodoan jokatzea egokitzen zaionean, ezin hobeki “gogoratzen” du lehenengoan egin zuena. Era luzatuak 6 jokoa bezalakoa izan behar zuen.

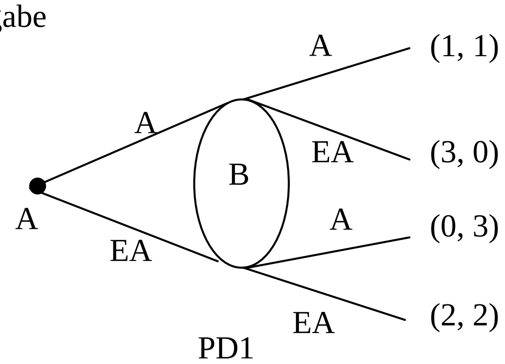
2 definizioa: **Azpiatala**

“Erabaki nodo batetik aurrera jokatzeko geratzen dena da, baldin eta jokatzeko geratzen den hori bi nodo edo gehiagoko informazio multzo baten zati bat ez den. Azpiatalak osatutakoan, informazio multzorik hautsi gabe eraiki daitezkeen zuhaitzaren atalak begiratzen dira. Azpiatal bat erabaki nodo bakarra duen informazio multzo batean hasten da eta informazio multzo bereko erabaki nodo guztiek azpiatal beraren parte izan behar dute.”

2 ADIBIDEA: Presoaren dilema

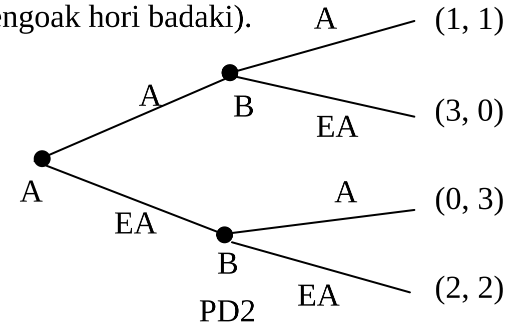
Bi gizabanako, A eta B, delitu bat elkarrekin burutzeagatik, susmagarri gisa atxilotuak izan dira. Gela ezberdinetan egiten dizkie galdeketak, euren artean komunikaziorik ez dagoelarik. Bakoitzak errudun aitortzeko (A) edo errudun ez aitortzeko (EA) aukera dauka. Batek bakarrik aitortzen badu, hau aske geratzen da eta agintariek errua besteari egozten diote, 6 hilabetera zigortuaz. Biek ukatzen badute euren parte hartzea, bakoitza hilabete 1era zigortzen dute. Eta biek aitortzen badute, bakoitza 3 hilabetera zigortzen dute.

- **Aldibereko kasua**: gizabanako bakoitzak bere erabakia hartzen du, besteak zer erabaki duen jakin gabe



Bi erabaki nodo dituen informazio multzo bat dago. Informazio ez-perfektuko joko bat da. Azpiatal bat bakarrik dago, zeina joko osoarekin bat datorren.

- **Ondoz ondoko kasua**: bigarenak, lehenengoak hartutako erabakia ikusten du (eta lehenengoak hori badaki).



PD2 jokoa, informazio perfektuko joko bat da eta hiru azpiatal ditu. “Informazio perfektuko jokoetan, erabaki nodo adina azpiatal daude”.

3 Definizioa: **Estrategia**

“Jokalariaren estrategia bat, jokatzeko bere txanda izanez gero, erabaki nodo bakoitzean *egingo lukeena*ren deskripzio osoa da. Beste jokalari(ar)en jokaeraren eraginez, berarentzat lortu ezinezkoak diren nodoetan ere zehaztu egin behar da”. *Portaera plan* edo *jokabide plan* bat da (Adibideak: saskibaloi entrenatzailea, kontsumitzailearen eskaria, enpresa lehiakorraren eskaintza…). Jokalari bakoitzak, egokitzen zaion nodo bakoitzarentzat, akzio bat zehazten duen funtzio bat da. Jokalari baten estrategiak, jokalariak dituen informazio multzoen adina osagarri ditu.

4 Definizioa: **Akzioa**

“Erabaki nodo bateko aukeraketa (erabaki edo mugimendu) bat da”

Akzioak “fisikoak” dira eta estrategiak “ustezkoak”.

5 Definizioa: **Jokaldia edo estrategien konbinaketa**

“Jokalari bakoitzarentzako estrategia baten zehaketa bat da”. Jokaldi baten emaitzak (ordainketen bektorea) zalantzarik gabe finkaturik geratu behar du.

1 ADIBIDEA: Sarrera jokoa

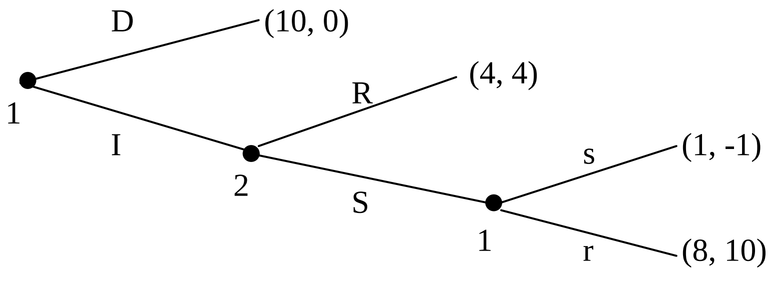
Informazio perfektua eta bi azpiatal dituen joko bat da. Jokalari bakoitzak bi estrategia ditu: $S_E = \{ES, S\}$ eta $S_A = \{Eg, PG\}$. Estrategien konbinaketak: (*ES*, *Eg*), (*ES*, *PG*), (*S*, *Eg*) eta (*S*, *PG*).

2 ADIBIDEA: Presoaren dilema

PD1: Informazio ez-perfektua eta azpiatal bat duen joko bat da. Jokalari bakoitzak bi estrategia ditu: $S_A = \{A, EA\}$ eta $S_B = \{A, EA\}$. Estrategien konbinaketak: (*A*, *A*), (*A*, *EA*), (*EA*, *A*) eta (*EA*, *EA*).

PD2: Informazio perfektua eta hiru azpiatal dituen joko bat da. A jokalariak bi estrategia ditu $S_A = \{A, EA\}$ baina B jokalariak lau dauzka $S_B = \{AA, AEA, EAA, EAEA\}$. Estrategien konbinaketak: (*A*, *AA*), (*A*, *AEA*), (*A*, *EAA*), (*A*, *EAEA*), (*EA*, *AA*), (*EA*,*AEA*), (*EA*, *EAA*) eta (*EA*, *EAEA*).

3 ADIBIDEA



1 jokalariak bere lehenengo erabaki nodoan bi akzio posible dauzka, *D* eta *I*, eta bere bigarren nodoan ere bi akzio: *s* eta *r*. $S_1 = \{Ds, Dr, Is, Ir\}$ eta $S_2 = \{R, S\}$.

2.1.2. **Jokoak era normalean edo estrategikoan** (aldiberekoak edo estatikoak)

Jokoak era normalean honako hau zehaztu behar du:

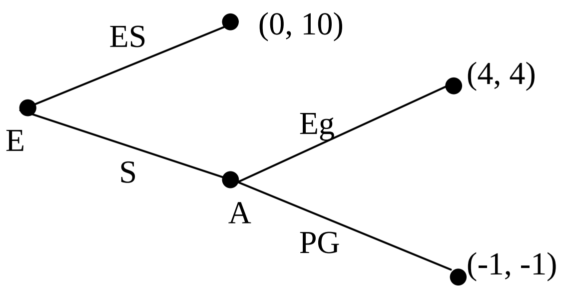
1) Jokalariak.

2) Jokalari bakoitzaren estrategi multzoa (edo eremua).

3) Estrategia konbinaketa bakoitzari, ordainketa bektore bat esleitzen dion ordainketen funtzio bat.

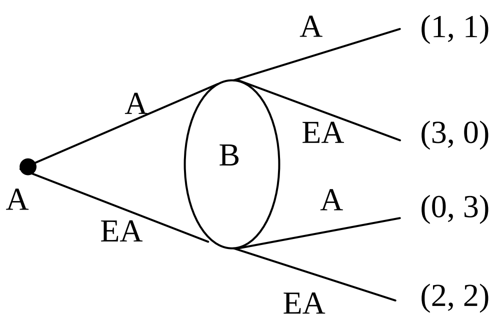
Joko bat era normalean adieraztearen oinarrizko elementua jokalarien estrategien araberako jokoaren ordainketen deskripzioa da, jokoan zehar hartzen ari diren akzioak zehaztu gabe. Adierazpen grafikoa, bi jokalarientzat, ordainketen matrize bat (bitarra) da, zeinen sarrerak bi jokalarien estrategia posibleak diren.

1 ADIBIDEA: Sarrera jokoa

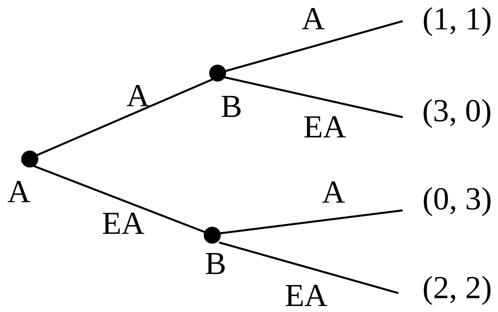


		A: Eg	A: PG
E	ES	(0, 10)	(0, 10)
	S	(4, 4)	(-1, -1)

2 ADIBIDEA: Presoaren dilema

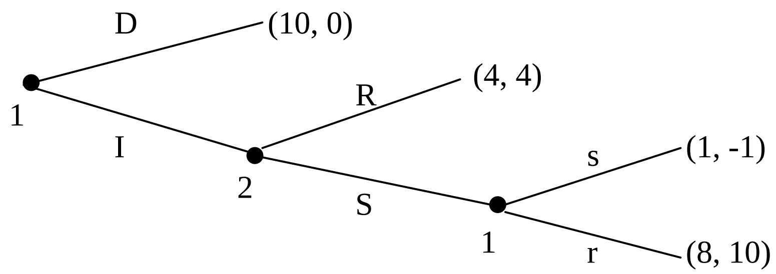


		B: A	B: EA
A	A	(1, 1)	(3, 0)
	EA	(0, 3)	(2, 2)



		B			
		AA	AEA	EAA	EAEA
A	A	(1, 1)	(1, 1)	(3, 0)	(3, 0)
	EA	(0, 3)	(2, 2)	(0, 3)	(2, 2)

3 ADIBIDEA



		2	
		R	S
1	Ds	(10, 0)	(10, 0)
	Dr	(10, 0)	(10, 0)
	Is	(4, 4)	(1, -1)
	Ir	(4, 4)	(8, 10)

Era normaleko jokoen eta era luzatuko jokoen arteko erlazioa

a) Era luzatuko joko ororentzat, zalantzarik gabe, dagokion era normaleko joko bat daukagu. Hau, era normaleko jokoa jokalarien estrategien arabera deskribatzen delako gertatzen da.

b) (Arazoa) Era luzatuko joko ezberdinek, era normal berbera eduki dezakete. (Adibidea: presoen dilema, PD1, jokoaren ordena aldatuta).

2.2. **Joko ez kooperatiboen soluzio kontzeptuak (irizpideak)**

Helburua, jokalariek, joko konkretu bati aurre egitean, zein portaera izango duten aurreikusten saiatzea da. OHARRA: Soluzio proposamen bat ez da ordainketa bektore bat, baizik eta estrategien konbinaketa bat, jokalari bakoitzarentzat bat, ordainketa bektore batengana eramango duena. Portaerak aurreikustea interesatzen zaigu, ez irabaziak.

Notazioa

i: jokalari ordezkagarria, $i = 1,\ldots, n$

S_i: *i* jokalariaren estrategien multzoa edo eremua.

$s_i \in S_i$: *i* jokalariaren estrategia.

$s_{-i} \in S_{-i}$: beste jokalari(ar)en estrategia edo estrategien multzoa.

$\Pi_i(s_i, s_{-i})$: $s \equiv (s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n) \equiv (s_i, s_{-i})$ estrategia konbinaketari dagokion *i* agentearen mozkin edo irabazia.

2.2.1. **Menperatze irizpidea**

6 *Definizioa*: **Estrategia menperatzailea**

“Jokalari batentzat estrategia bat hertsiki menperatzailea izango da, gainerako jokalarien edozein estrategia konbinakaren aurrean, bere gainerako estrategiekin baino emaitza hertsiki hobeagoa (irabazi handiagoa) ematen badu ” .

“s_i^D *i* jokalariaren estrategia menperatzailea da baldin eta $\Pi_i(s_i^D, s_{-i}) > \Pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^D; \forall s_{-i} \in S_{-i}$ den ”.

2 ADIBIDEA: Presoaren dilema

PD1 jokoan “aitortzea”, *A*, jokalari bakoitzarentzako estrategi menperatzailea da. Beste jokalariak egiten duenarekiko independenteki, norberak egin dezakeen onena aitortzea da.

Estrategia menperatzaileak existitzeak jokoaren soluziora eramaten du. Jokalari bakoitzak bere estrategia menperatzailea erabiliko du. PD1 jokoarentzako soluzio proposamena, (*A*, *A*) estrategien konbinaketa da.

7 Definizioa: **Menperatze (hertsiki)**

“Jokalari batentzat, estrategia batek beste bat hertsiki menperatzen duela esaten dugu, baldin eta estrategia horrek emaitza hobeagoak ematen baldin baditu, gainontzeko jokalariek jarraitutako estrategiak edozein direlarik”.

“Baldin eta $\Pi_i(s_i^d, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{dd}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ den, orduan s_i^d -k hertsiki menperatzen du s_i^{dd} ”.

7’ Definizioa: **Estrategia (hertsiki) menperatua**

“Jokalari batentzat, estrategia bat hertsiki menperatua dela esaten dugu, baldin eta beste estrategia bat dagoela zeinak emaitza hobeagoak ematen baldin baditu, gainontzeko jokalariek jarraitutako estrategiak edozein direlarik”.

“ s_i^{dd} hertsiki menperatua dago baldin eta $\exists s_i^d$ zeinetarako $\Pi_i(s_i^d, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{dd}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ den”.

Menperatze irizpidea, menperatutako estrategiak behin eta berriz kentzean datza. Estrategia bat menperatua da, estrategia hau menperatzen duen beste bat existitzen denean.

4 ADIBIDEA

2

		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(4, 3)	(2, 7)	(0, 4)
	s_2	(5, 5)	(5, -1)	(-4, -2)

Joko honetan ez daude estrategia menperatzaileak. Hala ere, estrategia menperatuen presentziak, emaitza aurreikusten lagunduko digu. Menperatze irizpidea aplikatuko dugu. t_3 estrategia, t_2 estrategiaz hertsiki menperatua denez, 1 jokalariak aurreikus dezake 2 jokalariak inoiz ere ez duela estrategia hori erabiliko. Egoera hau ikusirik, zeinak 2 jokalariaren arrazionaltasuna suposatzen duen, 1 jokalariarentzat s_2 hobea da s_1 baino. s_1 estrategia, 2 jokalariak t_3 jokatzeko posibilitatea dagoenean baizik ez da erabiliko. 1 jokalariak 2 jokalaria arrazionala dela pentsatzen duenez, 2 jokalariak t_3 jokatzeari probabilitate hutsa esleituko dio. Kasu horretan, 1 jokalariak s_2 jokatu behar luke eta 2 jokalaria arrazionala baldin bada, egin dezakeen onena t_1 jokatzea da. Menperatze irizpidea errepikatuak (menperatutako estrategiak ezabatuz eta joko murriztuekin jarraituz) jokoa ebazten laguntzen du.

5 ADIBIDEA

2

		t_1	t_2
1	s_1	(10, 0)	(5, 2)
	s_2	(10, 1)	(2, 0)

Joko honetan ez dugu estrategia menperatzailerik ezta estrategia (hertsiki) menperaturik ere.

8 Definizioa: **Menperatze ahula**

“Jokalari batentzat, estrategia batek beste bat ahulki menperatzen du, baldin eta lehenengoarekin bigarrenarekin gutxienez adinako ordainketa lortzen badu, gainontzeko jokalarien estrategiak edozein direlarik, eta lehenengoarekin bigarrenarekin baino ordainketa hertsiki hobeak gainontzeko jokalarien estrategia konbinaketa batentzako gutxienez”.

“Baldin eta $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) \geq \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ den, eta $\exists s_{-i}$ non $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i})$, orduan s_i^{db}-k s_i^{ddb} ahulki menperatzen du”.

8’ Definizioa: **Estrategia ahulki menperatua**

“Jokalari batentzat, estrategia bat ahulki menperatua dela esaten dugu, baldin eta beste estrategia bat dagoela zeinak emaitza hobeagoak ematen baldin baditu, gainontzeko jokalariek jarraitutako estrategiak edozein direlarik, eta hertsiki hobeak gainontzeko jokalarien estrategia konbinaketa batentzako gutxienez”.

“s_i^{ddb} ahulki menperatua dago baldin eta $\exists s_i^{db}$ zeinetarako $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) \geq \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ eta $\exists s_{-i}$ non $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i})$ den”.

5 adibidean, s_1-k ahulki menperatzen du s_2. 2 jokalariak aurreikus dezake 1 jokalariak s_1 jokatuko duela eta aurreikuspen horren aurrean egin dezakeen onena t_2 jokatzea da. Menperatze ahularen irizpidea jarraituz, gure soluzio proposamena (s_1, t_2) izango da.

Hala ere, menperazte ahularen irizpidearen erabilera jarraituak, emaitz arazotsuetara eraman dezake 6 adibidean gertatzen den bezala, edo soluziorik ez proposatzera 7 adibidean gertatzen den bezala (ez delako estrategia menperatzailerik, ez menperaturik ez eta ahulki menperaturikorik existitzen).

6 ADIBIDEA

		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(10, 0)	(5, 1)	(4, -200)
	s_2	(10, 100)	(5, 0)	(0, -100)

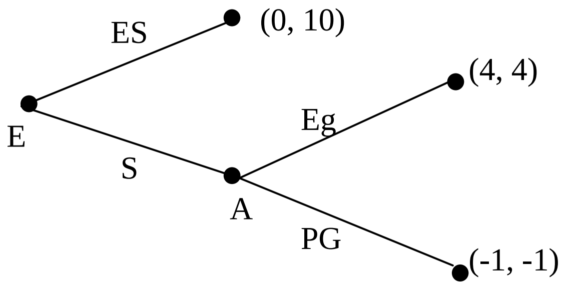
7 ADIBIDEA

		2		
		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(4, 10)	(3, 0)	(1, 3)
	s_2	(0, 0)	(2, 10)	(10, 3)

2.2.2. **Atzeraeraginezko irizpidea**

Era luzatua aztertzeko, menperatze irizpidea erabiliko dugu. Kontsidera dezagun 1 adibidea.

1 ADIBIDEA: Sarrera jokoa



		A	
		Eg	PG
E	ES	(0, 10)	(0, 10)
	S	(4, 4)	(-1, -1)

Era normaleko jokoan, A jokalariak estrategia bat ahulki menperatua dauka: *PG*. E jokalariak hori aurreikus dezake eta *S* jokatu. Hala ere, E jokalariak *ES* ere aukera dezake, horrela A jokalariak *PG* aukeratzeko duen posibilitatearen aurrean ordainketa ziurtatzeko.

Era luzatuko jokoan, soluzioa naturalagoa da. Atzeranzko indukzioa (edo atzeraeraginezkoa) aplikatzen da. E jokalariak lehenengo jokatzen duenez, aurreikus dezake, eta zuzen egon, *S* jokatzen badu, A jokalariak ziur *Eg* aukeratuko duela. E jokalariak, A jokalariak baino lehen jokatzen duenez, A jokalariaren portaera aurreikus dezake. Era luzatuan informazio gehiago daukagu, izan ere, A jokalariak jokatzen duenean badaki E jokalariaren mugimendua. Atzeraeraginezko irizpidea, irizpide menperatzaile jarraitua atzera eraginez aplikatzean datza azkeneko azpiatale(ta)tik hasita. 1 adibidean, era luzatuan, atzeraeraginezko irizpideak (*S*, *Eg*) soluzioa proposatzen du.

Emaitza: *Jokoa informazio perfektukoa eta berdinketarik gabe bada, atzeraeraginezko irizpideak soluzio proposamen bakar batetara eramango gaitu.*

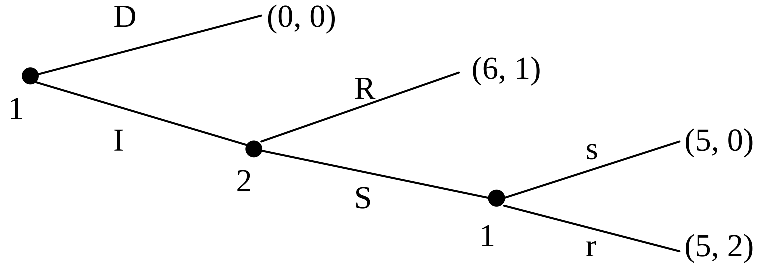
Arazoak

(i) *Berdinketen posibilitatea*.

(ii) *Informazio ez-perfektua*. Nodo bat baino gehiago duten informazio multzoen existentzia.

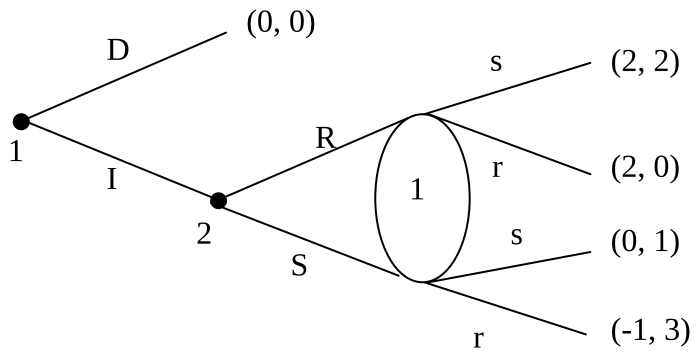
(iii) Atzeraeraginezko indukzioaren erabileraren atzean agenteen aurreikuspen guztien arrazionaltasuna dago, atzeranzko bidearen luzera zein den kontuan izan gabe. (*Mugarik gabeko arrazionaltasuna* eskatzen du)

8 ADIBIDEA



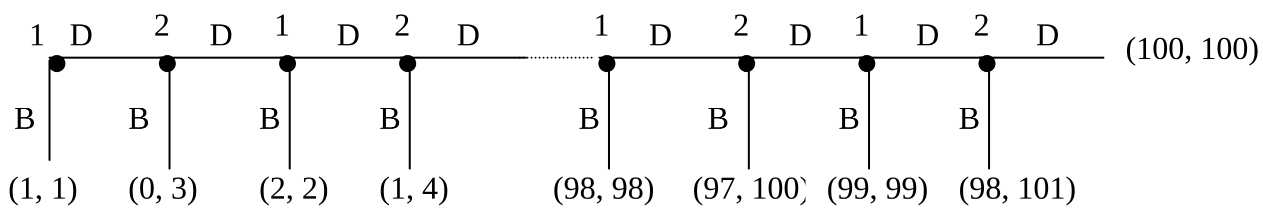
Atzeraeraginezko indukzioak, ez digu soluzio proposamen batetara eramaten, izan ere, azken azpiatalean 1 jokalaria indiferente dago *s* eta *r* artean. Aurreko azpiatalean, 2 jokalariak ez luke menperatutako akziorik edukiko (ez litzatekeelako 1 jokalariaren portaera aurreikusteko gai izango).

9 ADIBIDEA



Ezin dugu atzeraeraginezko irizpidea aplikatu.

10 ADIBIDEA: Rosenthal-eko ehunzangoa (1981)



Atzeraeraginezko emaitzan, ordainketak (1, 1) dira. Posiblea al da beste arrazionaltasunik?

2.2.3. **Nashen oreka**

i jokalaria, $i = 1,\ldots, n$, honakoarekin ezaugarrituta dago:

(i) Bere eremu (multzo) estrategikoa: S_i.

(ii) Mozkinen funtzio edo irabazien funtzio bat, $\Pi_i(s_i, s_{-i})$ non $s_i \in S_i$ eta $s_{-i} \in S_{-i}$.

Jokalari bakoitza bere mozkinen funtzioa maximizatzen saiatuko da (baliagarritasuna edo irabaziak) estrategia egokia aukeratuz, gainontzeko jokalarien eremu estrategikoak eta mozkinen funtzioak ezaguturik, baina lehiakideek erabilitako estrategia zehatza ezagutu gabe. Beraz, jokalari bakoitzak aurreikusi behar du lehiakideek erabilitako estrategia.

9 Definizioa: **Nashen oreka**

"Jokaldi edo estrategien konbinaketa batek $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ Nashen oreka bat osatzen du baldin eta jokalari bakoitzaren emaitza, gainontzeko jokalarien jokaldiak konstante mantenduz, edozein beste estrategi bat jokatuta lortuko zukeen emaitza baino hobea edo berdina bada. Hau da, $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ Nashen oreka bat da baldin eta:

$\Pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*)\ \forall s_i \in S_i, \forall i, i = 1, \ldots, n$."

Oreka egoera batean, bi baldintza bete behar dira:

(i) Jokalariek, euren lehiakideek nola jokatuko duteni buruz, eginiko *aurreikuspenek zuzenak* izan behar dute.

(ii) Inolako jokalariak ez du bere estrategia aldatzeko pizgarririk izango, beste jokalarien estrategiak emanik. Honek *arrazionaltasun indibiduala* eskatzen du: besteek egiten dutena kontuan izanik, ahalik eta ondoen egin. Edo berdina dena: inolako jokalariak ez ditu bere mozkinak (baliagarritasuna edo ordainketak) handitzen *bera bakarrik desbideratuz.*

Nashen oreka izatea beharrezko baldintza edo gutxiengo betekizun bat da joko baten edozein soluzio proposamen jokalarien portaeraren aurreikuspen arrazional bat izan dadin. Hala ere, ikusiko dugun bezala, ez da baldintza nahikoa. Hau da, estrategien konbinaketa bat Nashen oreka izatea ez da nahikoa joko baten soluzioaren gure aurreikuspena izan dadin.

10 Definizioa: **Nashen oreka**

“Jokaldi edo estrategien konbinaketa batek $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ Nashen oreka osatzen du, baldin eta jokalari bakoitzaren estrategia onena bada (edo euretako bat behintzat), beste jokalariek jarraitutako estrategien aurrean.” Hau da, $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ Nashen oreka izango da baldin eta: $s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*) \forall i, i = 1, \ldots, n$ non

$$MR_i(s_{-i}^*) = \left\{ s_i^{'} \in S_i : \Pi_i(s_i^{'}, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*),\ \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^{'} \right\}$$

Nashen oreka kalkulatzeko modu erraz bat honako hau da: beste jokalari(ar)en estrategien (edo estrategia konbinaketen) aurrean, jokalari bakoitzaren erantzunik onenen multzoa eraiki eta elkarrekiko erantzunik onenak diren estrategien konbinaketak bilatu.

11 ADIBIDEA

		2		
		h	i	j
	a	(5, 3)	(5, 11)	(20, 5)
1	b	(9, 11)	(2, 8)	(15, 6)
	c	(3, 10)	(10, 2)	(0, 5)

s_1	MR_2	s_2	MR_1
a	i	h	b
b	h	i	c
c	h	j	a

(*b*, *h*) estrategien konbinaketak osatzen du joko honetako Nashen oreka bakarra.

7 ADIBIDEA

		2		
		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(4, 10)	(3, 0)	(1, 3)
	s_2	(0, 0)	(2, 10)	(10, 3)

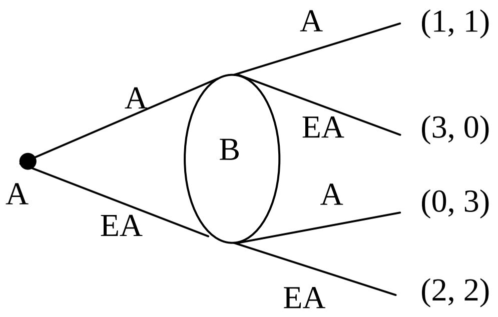
Gogoratu, joko honetarako menperatze irizpideak ez zigula inolako soluziorik proposatzen. Hala ere, (s_1, t_1) estrategien konbinaketak osatzen du joko honetako Nashen oreka bakarra.

2.3. **Nashen orekaren arazoak eta fintasunak**

2.3.1. **Ez eraginkortasunaren posibilitatea**

Ohikoa da Nashen oreka Paretoren zentzuan optimoa (eraginkorra) ez deneko jokoak aurkitzea.

2 ADIBIDEA: Presoaren dilema



		B	
		A	EA
A	A	(1, 1)	(3, 0)
	EA	(0, 3)	(2, 2)

(*A*, *A*) estrategien konbinaketa Nashen oreka bat da estrategia menperatzaileetan. Hala ere, estrategien beste konbinaketa bat aurkitzen dugu (*EA*, *EA*) non bi jokalariek irabazi handiagoak lortzen dituzten.

2.3.2. **Nashen orekaren existentzia eza**

12 ADIBIDEA

		2	
		t_1	t_2
1	s_1	$(\underline{1}, 0)$	$(0, \underline{1})$
	s_2	$(0, \underline{1})$	$(\underline{1}, 0)$

Joko honetan, estrategia garbietan ez da Nashen orekarik existitzen. Hala ere, estrategia mistoen (jokalari baten estrategia garbien eremuaren gaineko probabilitatearen banaketa) erabilera onartuz, “estrategia mistoetan (joko finituetan) Nashen oreka beti existitzen da” delakoaren emaitza lortzen da.

2.3.3. **Nashen oreken ugaritasuna**

Bi motatako jokoak bereiztuko ditugu.

2.3.3.1. ***Fintzeko edo aukeratzeko posibilitaterik gabe***

13 ADIBIDEA: Sexuen arteko gatazka

Bikote batek zinera edo antzokira joan aukeratu behar du. Mutil lagunak zinea nahiago du antzokia baino, baina nahiago du antzokira konpainian joan zinera bakarrik joan baino. Berdina (baina alderantziz) gertatzen da neska lagunarekin. Jokoa era normalean honela da:

		Ne	
		Z	A
Mu	Z	$(\underline{3}, \underline{2})$	(1, 1)
	A	(1, 1)	$(\underline{2}, \underline{3})$

Joko honetan Nashen bi oreka daude: (*Z*, *Z*) eta (*A*, *A*). *Koordinazio garbia*ren arazoa existitzen da.

2.3.3.2. ***Fintzeko edo aukeratzeko posibilitatearekin***

a) *Eraginkortasunaren irizpidea*

Jokalariei ordainketarik handienak emango dizkien Nashen oreka aukeratu. Orokorrean ez da aukeraketa irizpide egokia.

b) *Menperatze ahularen irizpidea*

Ahulki menperaturiko estrategietan oinarrituriko Nashen orekak ezabatzean datza irizpide hau. Nahiz eta soluzio kontzeptu moduan ez izan ona, Nashen oreken artean aukeratzen laguntzen digu.

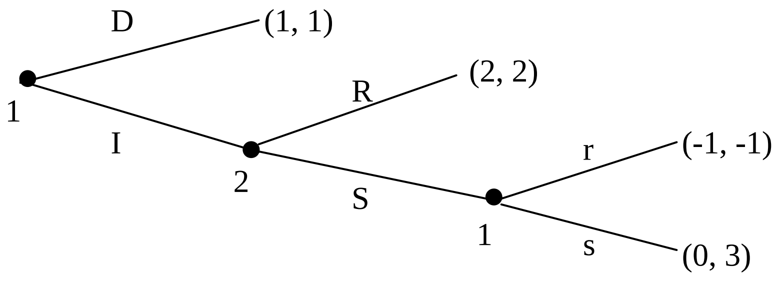
14 ADIBIDEA

		2	
		D	I
1	D	($\underline{1}$, $\underline{1}$)	(0, 0)
	I	(0, 0)	($\underline{0}$, $\underline{0}$)

Nashen oreka bi ditugu: (*D*, *D*) eta (*I*, *I*). *I* jokatzea, jokalari bakoitzarentzat ahulki menperaturiko estrategia bat da. *D* jokatuz, jokalari bakoitzak, gutxienez *I* jokaturik lortuko zukeen ordainketa bermatzen du. (*I*, *I*)-ri uko egiteko joera izango dugu, ahulki menperaturiko estrategietan oinarrituta egoteagatik. Beraz, soluzio moduan (*D*, *D*) estrategien konbinaketa proposatzen dugu.

c) *Atzeraeraginezko indukzioaren eta azpiataletan oreka perfektuaren irizpidea*

15 ADIBIDEA



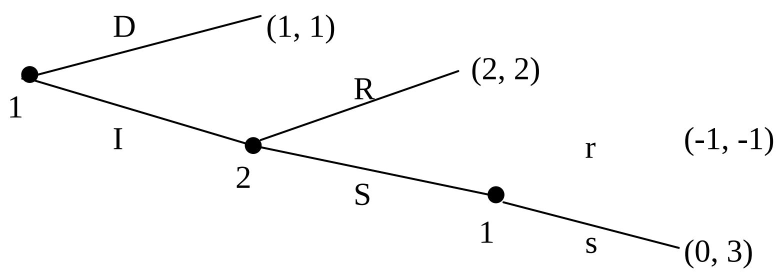
s_1	MR_2	s_2	MR_1
Dr	R, S	R	Ir, Is
Ds	R, S	S	Dr, Ds
Ir	R		
Is	S		

Joko honetan hiru Nashen oreka daude: (*Dr*, *S*), (*Ds*, *S*) eta (*Ir*, *R*). Soluzio eraginkorrari begira has gaitezen: (*Ir*, *R*). Nashen oreka honek arazo bat dauka: 1 jokalaria bere bigarren erabaki nodoan, nahiz eta ez den lorgarria, aurreratzen ari da (mehatxatzen) *r* jokatuko duela. *r* jokatzearekin mehatxatuz 2 jokalariak *R* jokatzea lortu nahi du eta horrela ordainketa handiagoa lortu. Baina oreka hau sinesgarria ez den mehatxu batean oinarritzen da: nahiz eta, 2 jokalariaren estrategia dela eta, 1 jokalariaren bigarren erabaki nodoa ez izan lorgarria, lorgarria izan bazen, 1 jokalariak inoiz ez zukeen *r* aukeratuko, izan ere, *s*-k menperatutako (mehatxu ez sinesgarria) akzio bat da azken azpiatalean. Erabiliko dugun finketa, sinesgarriak ez diren mehatxuetan (hau da, azpiatalen barnean menperatutako akzioak) oinarritzen diren oreken ezabaketan datza. Nashen orekaren kontzeptuaren eta atzeraeraginezko indukzioaren irizpidearen erabilera bateratutik, ondorengo kontzeptua sortzen da:

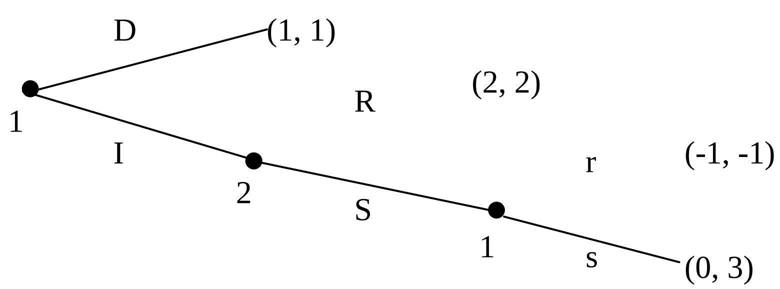
11 Definizioa: **Oreka perfektua azpiataletan**

“Jokaldi edo estrategien konbinaketa bat $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, zeina Nashen oreka den, *oreka perfektua azpiataletan* da, baldin eta jokalari bakoitzaren orekako estrategien zatiak, dagozkien azpiatal bakoitzarentzat ere orekakoak badira.”

15 adibidean (*Dr, S*) eta (*Ir, R*) ez dira oreka perfektuak azpiataletan. Oreka perfektua azpiataletan atzeraeraginezko indukzioarekin lortzen da. Azkeneko azpiatalatik hasten gara. Azpiatal honetan *r* menperatutako akzio bat da; beraz, oreka perfektua azpiataletan dugunean, *r* ezin da 1 jokalariaren estrategiaren parte izan, modu horretara *r* ezabatu egiten dugu eta joko laburtua hartzen dugu kontuan.



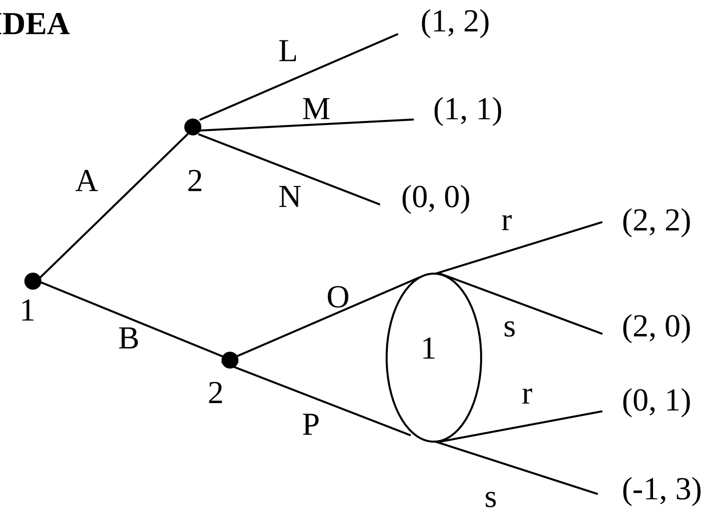
Atzeraeraginezko indukzioaren bigarren epealdian aurreko azpiatalean begiratuko dugu, 2 jokalariari dagokiona. Azpiatal honetan *R* menperatutako akzio bat da 2 jokalariarentzat. 2 jokalariak, 1 jokalariak *r* ez duela jokatuko aurreikusten duenez, *R* jokatzea menperatutako akzio edo sinesgarria ez den mehatxu bat da. Beraz, ezabatu egiten dugu eta mugatutako jokoa hartzen dugu kontuan.



1 jokalariak, bere lehen erabaki nodoan, akzio menperatua (joko mugatuan) dauka *I*, eta beraz *D* jokatuko du. Beraz, oreka perfektua azpiataletan (*Ds, S*) da. Atzeraeraginezko indukzioaren logika modu honetara interpreta genezake: 2 jokalariak aukeratu behar duenean, aurreikusi behar luke *S* jokatuz gero, ziur 1 jokalariak *s* jokatuko duela. 2 jokalaria gai da 1 jokalariaren

portaera arrazionala aurreikusteko, izan ere, 1 jokalariak 2 jokalariak aukeratutako akzioa ikusten du. 1 jokalariak, modu berean bada arrazionala, 2 jokalariaren portaera aurreikusi behar luke eta *D* jokatu.

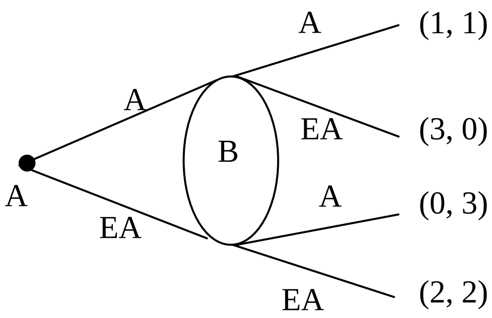
16 ADIBIDEA



Joko honetan Nashen oreka bat baino gehiago ditugu, eta informazio ez-perfektuko azpiatal bat izanik ezin dugu atzeraeraginezko indukzioa aplikatu. Egingo duguna honako hau da: 2 jokalariaren beheko azpiatala ebatzi, bere baitan joko bat izan balitz bezala. Azpiatal honetan Nashen oreka bat dago, zeina *O*, *r* den. Goiko azpiatalean, 2 jokalariaren mehatxu sinesgarri bakarra *L* da. Beraz, 1 jokalariak *A* eta *B* artean aukeratu behar duenean, *A* aukeratzen badu 2 jokalariak *L* aukeratuko duela eta *B* aukeratzen badu, 2 jokalariak eta 1 jokalariak *O*, *r* jokatuko dutela aurreikusiko du. Beraz, azpiataletako oreka perfektua (*Br*, *LO*) da. Gogoratu behar da orekako estrategien zatiak, dagozkien azpiataletan ere orekakoak direla.

2.3. **Joko errepikatuak**

2 ADIBIDEA: Presoaren dilema



		B: A	B: EA
A	A	(1, 1)	(3, 0)
	EA	(0, 3)	(2, 2)

Jokoa behin jokatzen denean, (*A*, *A*) Nashen oreka da estrategia menperatzaileetan eta jokalarien arteko kooperazioa edo kolusioa ezin da oreka bezala mantendu. Nahiz eta jokalariek ordainketa handiagoak lortuko zituzten (*EA*, *EA*) estrategien konbinaketarekin, biek beraien estrategia menperatzaileak erabiliz desbideratzeko pizgarriak izango dituzte. Orain, jokoa errepikatzen denean jokalarien artean kooperazioa lortzeko zein posibilitate dagoen aztertuko dugu.

2.3.1. **Denbora horizonte finitua**

Suposa dezagun jokoa (presoaren dilema) modu finituan errepikatzen dela: **T** aldiz (bi jokalariek ezagutzen dutelarik). Badakigu T = 1 bada, joko honetako Nashen oreka bakarra (*A*, *A*) dela.

Gogoratu behar den lehen gauza hau da, jokoa T denboralditan zehar errepikatzen bada, joko errepikatuko jokalari baten estrategiak, igarotako historia kontuan hartuta, jokoaren etapa bakoitzean jokalari horrek zer egingo lukeen adierazi behar du.

*Atzeraeraginezko indukzioa*ren argudio bat erabiliko dugu, joko errepikatu honetako azpiataletako oreka perfektu bakarrean, jokalari bakoitzak (igarotako historia edozein delarik) jokoaren etapa bakoitzean “aitortzea” erabakiko duela erakusteko. Kontsidera dezagun presoaren dilemako T, t = 1, 2,….., T errepikapen.

Has gaitezen **T** denboraldia begiratuz: jokoaren azken etapa honetan, aurreko guztiak (jokoaren igarotako historiak) ez du garrantzirik (etorkizunik ez dagoelako) eta presoaren dilema bakarrik geratzen da behin jokatzeko. Beraz, jokalari bakoitzak estrategia menperatzaile moduan (jokoa behin bakarrik jokatzen denean) “aitortzea” duenez, azken denboraldian jokalari bakoitzak “aitortzea” erabakiko du. Jokoaren etapa batean “ez aitortzea” jokatzeko arrazoi bakarra, etorkizunean hobetzen saiatzea izango da, izan ere, akzio hau borondate oneko keinu bezala interpreta dezake beste jokalari batek, bere kooperazioa lortuz. Baina jokoaren azken etapan jadanik ez dago etorkizunik eta beraz (A, A) ekidin ezina da.

Kontsidera dezagun orain T-1 denboraldia. Jokalariek aurreikusi egiten dutenez azken denboraldian ez dutela kooperatuko, T-1 denboraldian egin dezaketen onena epe laburrera euren estrategia menperatzailearekin jarraitzea da, hau da, “aitortzea”. Jokoaren etapa honetan “ez aitortzea” jokatzeko arrazoi bakarra etorkizunean hobetzen saiatzea izango litzateke, baina T denboraldian jokalariek (A, A) aukeratuko dute. Argudio berbera aplikatuko litzaieke T-2, T-3,….denboraldiei 1 denboraldirarte. Beraz, T aldiz finituki errepikatutako presoen dilemaren oreka perfektua azpiataletan, epe laburrean Nashen oreka T aldiz errepikatzean datza. Beraz, jokoa finitu aldiz (eta ezaguna) errepikatuko balitz, azpiataletako oreka perfektu bakarrean jokalari bakoitzak epe laburrera bere estrategia menperatzailea aukeratuko luke jokoaren txanda bakoitzean. Horregatik, jokalarien arteko kooperazioa ezin da oreka moduan mantendu denbora horizontea finitua denean.

2.3.2. **Denbora horizonte infinitua**

Denbora horizonte infinitu bat interpretatzeko bi modu daude:

(i) *Interpretazio literala*: jokoa infinitu denboralditan errepikatzen da. Testuinguru honetan, jokalari batek estrategi bat beste estrategi batekin alderatzen duenean, irabazi bakoitzaren gaurko balio deskontatua alderatu behar luke. Izan dadila δ deskontu faktorea, 0 < δ < 1. Interes tasa r bada, orduan $\delta = \dfrac{1}{1+r}$.

(ii) *Interpretazio informazionala*: ez da jokoaren iraupena ezagutzen. Jokoaren etapa bakoitzean, jokoak jarraitzeko 0 < δ < 1 probabilitatea existitzen da. Egoera honetan, jokalari bakoitzak estrategia ezberdinen itxarondako ordainketak (hau ere deskontatu daiteke) alderatu behar lituzke.

Testuinguru honetan, jokalari baten estrategia batek ***t*** denboraldi bakoitzean bere portaera azalduko du jokoaren igarotako historiaren funtzioa bezala. $H_{t-1} = \{s_{1\tau}, s_{2\tau}\}_{\tau=1}^{t-1}$, non $s_{i\tau} \in \{A, EA\}$ jokoaren igarotako historia da.

Gogoratu, joko infinituki errepikatuan oreka perfektua azpiataletan badugula, denboraldi bakoitzean jokalari bakoitzak A (epe laburrera bere estrategia menperatzailea) aukeratzen duena hain zuzen. Jokalari bakoitzak estrategia moduan “denboraldi bakoitzean aitortu, jokoaren igarotako historia edozein delarik” edukiko du.

Ikus dezagun aurreko orekaz gain, ea ba al dagoen beste oreka perfektua azpiataletan, non jokalariek kooperatu egiten duten. Kontsidera dezagun epe luzerako ondorengo estrategien konbinaketa, $s_i^c \equiv \{s_{it}(H_{t-1})\}_{t=1}^{\infty}$ non

$$s_{it}(H_{t-1}) = \begin{cases} EA; & H_{t-1}\text{-eko elementu guztiak } (EA, EA)\text{-ren berdinak badira edo } t=1 \\ A; & \text{aurkako kasuan} \end{cases}$$

i =1,2.

Epe luzeko estrategia hauek “zigor mehatxu inplizituak” dituztela kooperazio akordioa (inplizitua) betetzen ez den kasuetarako. Mehatxuak, sinesgarria izan dadin, Nashen oreka izan behar du.

Testuinguru honetan kooperazioa oreka moduan mantendu daitekeen ikusteko, jokalariek desbideratzeko pizgarririk ez dutela ziurtatu behar dugu; hau da, (s_1^c, s_2^c) estrategien konbinaketak joko errepikatuko Nashen oreka osatzen duela. Kooperatzeagatik, *i* jokalariak dituen etorkizuneko irabazien gaurko balio deskontatua honela zehaztuta dator:

$$\pi_i(s_i^c, s_j^c) = 2 + 2\delta + 2\delta^2 + ... = 2(1+\delta+\delta^2 + ...) = \frac{2}{1-\delta}$$

Suposa dezagun *i* jokalaria desbideratu egiten dela eta jokoaren lehen denboraldian egiten duela. Estrategiak osatuta dauden moduan, beste jokalariak joko guztirako zigortuko duenez, egin dezakeen onena hau da, lehenengo denboraldian aitortu egiten badu, gainontzeko joko guztian ere aitortzea. Bere irabaziak honakoak izango ziren:

$$\pi_i(s_i, s_j^c) = 3 + 1\delta + 1\delta^2 + ... = 3 + \delta(1+\delta+\delta^2 + ...) = 3 + \delta\frac{1}{1-\delta}$$

Kooperazioa Nashen oreka izango da baldin eta jokalari batek ere ez badu desbideratzeko pizgarririk; hau da, baldin eta $\pi_i(s_i^c, s_j^c) \geq \pi_i(s_i, s_j^c)$ bada. Erraz baieztatzen da $\delta \geq \frac{1}{2}$ bada jokalari batek ere ez duela pizgarririk izango kolusioa akordioa hausteko.

Aurrean lortutako emaitza oreka perfektua azpiataletan dela ikustatuko dugu orain, hau da: mehatxuak sinesgarriak direla. Kontsidera dezagun desbideraketa bat burutu ondoren sortzen den azpiatal bat. Jokalari bakoitzaren estrategiak “aitortzea” eskatzen du etorkizuneko denboraldi guztietan, lehiakideen portaera edozein delarik. Estrategia konbinaketa honek infinituki errepikatutako presoen dilema baten oreka osatzen du, izan ere, jokalari bakoitzak, desbideratuko ez balitz, honako ordainketa jasoko luke (desbideraketa T-1 denboraldian gertatu bada)

$$\delta^{T-1}(1+\delta+\delta^2+...) = \frac{\delta^{T-1}}{1-\delta}$$

Kooperazio estrategiatik desbideratzen den denboraldi bakoitzean, 0 ordainketa jasoko lukeen bitartean.

Aurreko analisiak, denbora horizonte infinitua duten joko errepikatuetan gertatzen den printzipio orokor baten adibide moduan balio du. Joko hauetan posible da epe laburrean orekakoak ez diren portaerak, oreka moduan mantentzea. Hau “zigor mehatxu inplizitua”-ri esker gertatzen da, non akordioa betetzen ez den kasuetan joko guztirako “zigortzen” den. Modu horretan, epe laburreko mozkinen (akordioa hausteari esker lortutakoak) igoerak, ez du gainontzeko joko osoan zehar izandako mozkin galera konpentsatzen.

2.4. **Ondorioak**

Jokoak ebazteko modu ezberdinak ikusi ditugu, nahiz eta euretako inor ez egon arazoetatik salbu. Menperatze irizpidea (menperatutako estrategiak ezabatzea), nahiz eta joko batzuk ebazteko baliagarria izan beste batzuetarako ez du balio, soluzio proposamenik ematen ez duelako. Irizpide honen bertsio “ahula” (ahulki menperaturiko estrategiak ezabatzea) oso baliagarria da Nashen oreken artean aukeraketa egiteko, bereziki era normal edo estrategikoan adierazitako jokoetan. Atzeraeraginezko indukzioaren irizpideak era luzatuko jokoetan soluzio proposamenak ematea baimentzen du. Propietate garrantzitsu bat dauka, izan ere, informazio perfektuko eta berdinketarik gabeko jokoetan soluzio proposamen bakar batetara eramaten gaitu. Baina berdinketaren posibilitatea, informazio ez-perfektuaren existentzia eta joko batzuetan eska dezakeen arrazionaltasun mugagabea dira dituen arazo nagusiak. Atzeraeraginezko indukzioaren irizpide hau oso baliagarria da Nashen oreken artean aukeraketa egiteko (era luzatuko jokoetan). Irizpide honen eta Nashen orekaren kontzeptuaren baterako erabileratik, azpiataletako oreka perfektuaren kontzeptua sortzen da.

Nahiz eta arazoak dituen (eraginkortasun eza, existentzi eza eta ugaritasuna), Nashen oreka da jokoak ebazteko dugun soluzio irizpiderik orokorrena eta gehien erabiltzen dena. Kontsideratzen da Nashen oreka izatea beharrezko (nahiz eta ez nahiko) baldintza dela edozein soluzio proposamen jokalarien portaera arrazionalaren zentzuzko aurreikuspen bat izan dadin. Joko baten soluzio moduan Nashen oreka ez den estrategia konbinaketa bat proposatzen bada, jokalarien portaerari buruzko aurreikuspen hau jokoaren garapenarekin ezeztatuko litzateke. Jokalari batek, gutxienez, berarentzat aurreikusitako estrategia aldatzeko pizgarriak izango ditu. Ondorioz, nahiz eta arazoak dituen, ia erabateko adostasuna dago soluzio proposamen guztiek gutxienez Nashen oreka izan behar dutela esaterakoan.

3 Gaia. **Oligopolioa**

Sarrera

Joko ez Kooperatiboen Teoria oso baliagarria da *menpekotasun estrategikoaz* ezaugarritutako agente ugari dituzten arazo ekonomikoak modelatzeko, bereziki industria bateko enpresen arteko lehia aztertzeko. Lehia perfektua eta monopolioa (sarrerarengatik mehatxatuta ez egotearen zentzuan) ez dira merkatu egitura oso errealistak. Sarriagoak dira enpresa gutxi dituzten industriak edota nahiz eta enpresa ugari izan, euretako oso gutxik produkzio totalaren portzentaia oso altu bat ekoizten dutenak. Enpresa gutxirekin, lehia kontsiderazio estrategikoz ezaugarrituta egongo da: enpresa bakoitzak bere erabakiak (prezioa, ekoizpena, publizitatea, I+G gastuak…) gainontzeko enpresen portaera kontuan izanik hartzen ditu. Lehia, oligopolio batean, joko ez kooperatibo bat bezala ikus dezakegu, non jokalariak enpresak diren. Horrela, Jokoen Teoriaren ikuspegia hartuko dugu oligopolioen eredu ezberdinak aztertzeko. Kasu bakoitzerako galdetuko dugu ea zein den enpresak jokatzen ari diren jokoa (informazioa, joko ordena, estrategiak…) eta ea zein den orekaren kontzeptua. Aurreko kapituluko jokoen eta kapitulu honetan ebatziko ditugun jokoen arteko ezberdintasun garrantzitsu bat zera da, haiek joko finituak zirela eta hauek joko infinituak direla.

3.1. **Cournoten eredua**

3.1.1. ***Duopolioa***

(i) Testuingurua.

(ii) Jokoaren adierazpena era normalean.

(iii) Orekaren kontzeptua.

(iv) Erantzun onenaren funtzioa. Orekaren karakterizazioa.

(v) Adibidea. Adierazpen grafikoa.

(i) *Testuingurua*

Cournoten duopolio ereduak oinarrizko lau ezaugarri ditu:

a) *2 enpresa* dituen merkatua kontsideratzen dugu.

b) *Produktu homogeneoa*. Hau da, kontsumitzaileen ikuspegitik, bi enpresek ekoiztutako produktuak ordezgarri perfektuak dira.

c) *Lehia kantitateetan*. Enpresa bakoitzak aukeratu beharreko aldagaia produkzio maila da. Izan daitezela x_1 eta x_2, 1 eta 2 enpresen produkzio mailak, hurrenez hurren.

d) *Aldibereko aukeraketa*. Enpresek aldi berean aukeratu behar dituzte produkzio mailak. Hau da, enpresa bakoitzak bere produkzio maila aukeratu beharko du bere lehiakidearen aukeraketa zein izango den jakin gabe. Aldibereko aukeraketak ez du esan nahi aukeraketak denbora momentu berean burutzen direnik. Hau bezalako testuinguru bat honakoa izango litzateke: enpresa batek lehenik bere produkzio maila aukeratzea eta ondoren, bigarren enpresa batek bere produkzioa aukeratzea, baina lehenengoak hartutako erabakia ikusi gabe. Beste hitz batzuekin esanda, aukeraketa sekuentziala informazio ez perfektuarekin (bigarren lekuan jokatzen duen jokalariak ez du ikusten lehenengoak zer egiten duen) aldibereko aukeraketaren berdina da.

Alderantzizko eskariaren funtzioa $p(x)$ da, $p^{'}(x) < 0$ izanik. Produktua homogeneoa denez, edozein enpresak bere produkzioa saldu dezakeen prezioa produkzio agregatuaren menpe egongo da: $p(x) = p(x_1 + x_2)$.

i enpresaren produkzio kostua honakoa da: $C_i(x_i)$, i=1,2.

(ii) *Jokoaren adierazpena era normalean*

1) $i = 1, 2.$ (Jokalariak)

2) $x_i \geq 0.$ i jokalariaren estrategi moduan edozein kantitate ez negatibok balioko liguke (edozein zenbaki erreal ez negatibo). Beraz, i jokalariaren estrategiak honela adieraz ditzakegu: $x_i \in [0, \infty),\ i = 1, 2.$

3) (x_1, x_2) estrategia konbinaketa emanik, enpresa bakoitzak lortzen dituen irabaziak honakoak dira:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1(x_1, x_2) = p(x_1 + x_2)x_1 - C_1(x_1) \\ \\ \Pi_2(x_1, x_2) = p(x_1 + x_2)x_2 - C_2(x_2) \end{array}\right\} \equiv \Pi_i(x_i, x_j) = p(x_i + x_j)x_i - C_i(x_i),\ i, j = 1, 2,\ j \neq i.$$

(iii) *Orekaren kontzeptua. Cournot-Nashen oreka*

Erraza da aurreko kapituluan ikusi genuen Nashen orekaren definizioa testuinguru berrira egokitzea.

“ $s^* \equiv (s_1^*, .., s_n^*)$ Nashen oreka da baldin eta $\Pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*)\ \ \forall s_i \in S_i, \forall i, i = 1, ..., n$ den”

Cournoten duopolio jokoan honakoa esango dugu:

"(x_1^*, x_2^*) Cournot-Nashen oreka da baldin eta $\Pi_i(x_i^*, x_j^*) \geq \Pi_i(x_i, x_j^*)\ \forall x_i \geq 0, i, j = 1, 2, j \neq i$ den".

Erantzun onenetan oinarritutako bigarren definizioa erabilgarriagoa izango da.

"$s^* \equiv (s_1^*, .., s_n^*)$ Nashen oreka da baldin eta $s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*)\ \forall i, i = 1, .., n$ den, non $MR_i(s_{-i}^*) = \left\{ s_i^{'} \in S_i : \Pi_i(s_i^{'}, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*),\ \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^{'} \right\}$".

Cournoten duopolio jokoan honakoa esango dugu:

"(x_1^*, x_2^*) Cournot-Nashen oreka da baldin eta $x_i^* = f_i(x_j^*),\ i, j = 1, 2, j \neq i$ den",

non $f_i(x_j)$ i enpresaren erantzunik onenaren funtzioa den, j enpresaren produkzioarekiko.

(iv) *Erantzunik onenaren funtzioa. Orekaren karakterizazioa*

Nashen oreka lortzeko erabiliko dugun prozedura aurreko kapituluan erabiltzen genuenaren antzekoa izango da. Lehenik, jokalari bakoitzaren erantzunik onena kalkulatuko dugu, bere lehiakidearen estrategia posibleen aurrean, eta ondoren, estrategien konbinaketa bat bilatuko dugu non, elkarren artean, estrategia bat bestearekiko erantzunik onena izango den.

j enpresaren estrategia bat emanik, *i* enpresari mozkinik handienak emango dizkion estrategia aurkituko dugu. Hau da, $x_j \geq 0$ estrategia izanik, *i* enpresaren erantzunik onena, x_i estrategia bat aukeratzean datza non:

$$\max_{x_i \geq 0} \Pi_i(x_i, x_j) \equiv p(x_i + x_j)x_i - C_i(x_i)$$
$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_j) + x_i p^{'}(x_i + x_j) - C_i^{'}(x_i) = 0 \quad (1) \rightarrow \bar{f}_i(x_j)$$
$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i^2} = 2p^{'}(x_i + x_j) + x_i p^{''}(x_i + x_j) - C_i^{''}(x_i) < 0$$

Negatibotasun ezaren murrizketa kontuan izanik, $x_i \geq 0,$ edo jokoen teoriaren terminotan erantzunik onenak jokalariaren estrategi eremukoa izan behar duelarik, erantzunik onenaren funtzioa honakoa izango da: $f_i(x_j) = \max\left\{\bar{f}_i(x_j), 0\right\}$.

Cournot-Nashen oreka, (x_1^*, x_2^*) estrategien konbinaketa bat da non enpresa bakoitzaren estrategia lehiakidearen estrategiaren aurrean emaitzarik onena den. Hau da,

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = f_1(x_2^*) = \max\left\{\bar{f}_1(x_2^*), 0\right\} \\ \\ x_2^* = f_2(x_1^*) = \max\left\{\bar{f}_2(x_1^*), 0\right\} \end{array}\right\} \leftrightarrow x_i^* = f_i(x_j^*) = \max\left\{\bar{f}_i(x_j^*), 0\right\}, \; i, j = 1, 2, \; j \neq i.$$

Orain ahaztu dezagun negatibotasun ezaren murriztapena eta suposa dezagun erantzunik onenaren funtzioa (1) baldintzaz (barne soluzioa) guztiz ezaugarrituta dagoela. Definizioz, erantzunik onenaren funtzioak lehen ordenako baldintza bete behar du: $\frac{\partial \Pi_i(f_i(x_j), x_j)}{\partial x_i} = 0 \rightarrow$

i enpresaren emaitzarik onena $x_j \geq 0$ aurrean $f_i(x_j)$ da. Cournot-Nashen orekan $\frac{\partial \Pi_i(x_i^*, x_j^*)}{\partial x_i} = 0$ betetzen da, izan ere $x_i^* = f_i(x_j^*),\; i = 1, 2.$ Estrategien konbinaketa bat Nashen oreka bat den egiaztatzeko modu sinple bat dugu: kalkulatu estrategien konbinaketa horri dagokion enpresa bakoitzaren mozkin marjinala, eta hauetako zenbait zero ez bada ez litzateke oreka baldintza beteko.

$$\frac{\partial \Pi_i(\hat{x}_i,\hat{x}_j)}{\partial x_i} > 0 \rightarrow f_i(\hat{x}_j) > \hat{x}_i \rightarrow (\hat{x}_i,\hat{x}_j) \text{ ez da Cournot-Nash oreka.}$$

$$\frac{\partial \Pi_i(\hat{x}_i,\hat{x}_j)}{\partial x_i} < 0 \rightarrow f_i(\hat{x}_j) < \hat{x}_i \rightarrow (\hat{x}_i,\hat{x}_j) \text{ ez da Cournot-Nash oreka.}$$

(v) *Adibidea. Adierazpen grafikoa*

Kontsidera dezagun eskari lineala eta kostu marjinal konstantearen kasua: $p(x) = a - bx$ eta $C_i(x_i) = c_i x_i,\ i = 1,2.$ Sinplifikatzeko suposatuko dugu kostu marjinala berdina dela bientzat: $c_i = c > 0,\ i = 1,2.$ ($a > c$ adibideak zentzua izan dezan).

i enpresaren erantzun onenaren funtzioa lortuz hasiko gara, $i = 1,2.$

$$\max_{x_i \geq 0} \Pi_i(x_i,x_j) \equiv p(x_i + x_j)x_i - C_i(x_i) \equiv [a - b(x_i + x_j)]x_i - cx_i \equiv [a - c - b(x_i + x_j)]x_i$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_j) + x_i p'(x_i + x_j) - C_i'(x_i) = a - 2bx_i - bx_j - c = 0 \rightarrow \overline{f}_i(x_j) = \frac{a - c - bx_j}{2b}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i^2} = -2b < 0$$

Beraz, erantzun onenaren funtzioa honela geratuko litzateke:

$$f_i(x_j) = \max\left\{ \overline{f}_i(x_j), 0 \right\} = \max\left\{ \frac{a - c - bx_j}{2b}, 0 \right\}.$$

Cournot-Nashen orekan honakoa betetzen da:

$$x_1^* = f_1(x_2^*) = \max\left\{ \frac{a - c - bx_2^*}{2b}, 0 \right\} \underbrace{\geq 0}_{a>c \text{ delako}}$$

$$x_2^* = f_2(x_1^*) = \max\left\{ \frac{a - c - bx_1^*}{2b}, 0 \right\} \underbrace{\geq 0}_{a>c \text{ delako}}$$

Sistema ebatziz:

$$x_1^* = f_1(x_2^*) = f_1(\underbrace{f_2(x_1^*)}_{x_2^*})$$

$$x_1^* = \frac{a-c-bx_2^*}{2b} = \frac{a-c-b\left(\dfrac{a-c-bx_1^*}{2b}\right)}{2b} = \frac{\dfrac{a-c+bx_1^*}{2}}{2b} = \frac{a-c+bx_1^*}{4b} \rightarrow x_1^* = \frac{a-c}{3b}.$$

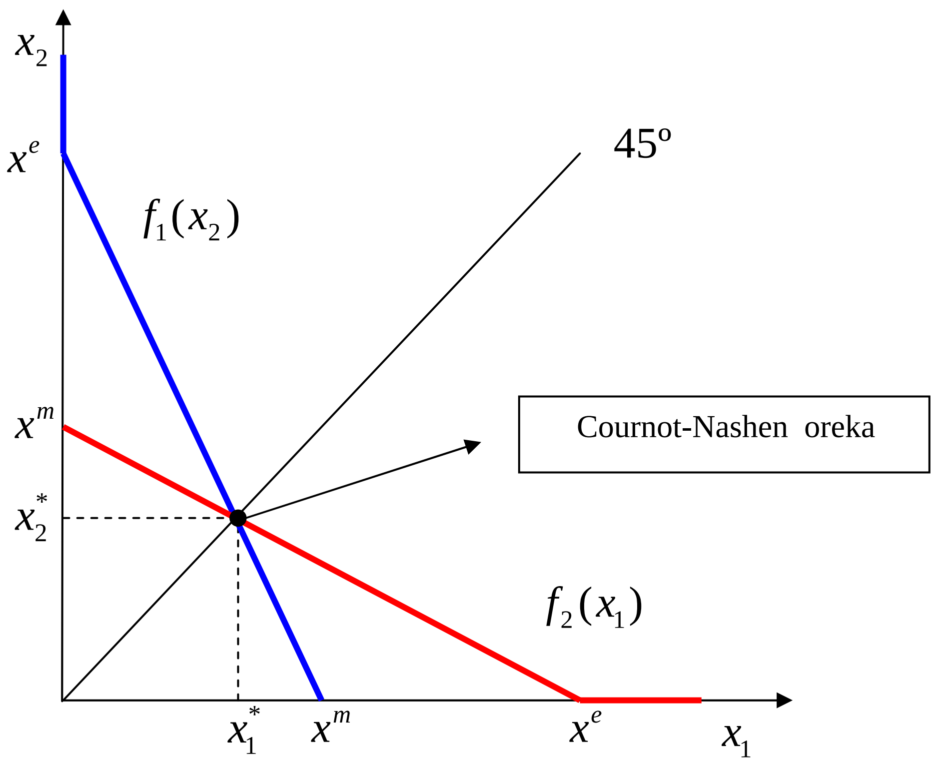
$$\rightarrow x_2^* = \frac{a-c-bx_1^*}{2b} = \frac{a-c-b\left(\dfrac{a-c}{3b}\right)}{2b} = \frac{2(a-c)}{6b} = \frac{a-c}{3b}.$$

Cournot-Nashen orekan ekoizpen totala honakoa da: $x^* = x_1^* + x_2^* = \dfrac{2(a-c)}{3b}$ eta orekako prezioa $p^* = p(x_1^* + x_2^*) = a - b\dfrac{2(a-c)}{3b} = \dfrac{a+2c}{3}$. Azkenik, mozkinak honakoak dira:

$$\Pi_1^* = \Pi_1(x_1^*, x_2^*) = [p(x_1^* + x_2^*) - c]x_1^* = \frac{a-c}{3}\frac{a-c}{3b} = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

$$\Pi_2^* = \Pi_2(x_1^*, x_2^*) = [p(x_1^* + x_2^*) - c]x_2^* = \frac{a-c}{3}\frac{a-c}{3b} = \frac{(a-c)^2}{9b}.$$

Adierazpen grafikoa



3.1.2. ***Oligopolioa***

(i) Jokoaren adierazpena era normalean.

(ii) Orekaren kontzeptua. Erantzunik onenaren funtzioa. Cournot-Nashen oreka.

(iii) Lerner Indizea.

(iv) Kasu bereziak. Kostu marjinal konstantea.

(i) *Jokoaren adierzapena era normalean*

1) $i = 1, 2, \ldots, n.$ (Jokalariak)

2) $x_i \geq 0.$ Modu berean, $x_i \in [0, \infty),$ $i = 1, 2, .., n.$

3) (x_i, x_{-i}) estrategien konbinaketa izanik, enpresa bakoitzak lortzen dituen irabaziak honakoak dira: $\Pi_i(x_i, x_{-i}) = p(\underbrace{x_i + x_{-i}}_{x})x_i - C_i(x_i),$ $i = 1, 2, \ldots, n.$

Jokoa era normalean adierazteko modua zerbait aldatu egin da. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ estrategien konbinaketa emanik, i enpresarentzat, $i = 1, 2, \ldots, n,$ garrantzitsuena gainontzeko enpresek ekoiztutako kantitate totala da: $x_{-i} = \sum_{j \neq i} x_j.$ Beraz, (x_i, x_{-i}) ez da benetako estrategien konbinaketa bat eta $\Pi_i(x_i, x_{-i})$ i enpresak x_i ekoizten dueneko eta gainontzeko enpresek agregatuan x_{-i} ekoizten duteneko estrategien konbinaketa guztiei dagokien mozkina izango litzateke (*i* enpresarentzat, x_{-i} produkzioa *n*-1 enpresen artean nola banatzen den garrantzirik ez duelarik).

(ii) *Orekaren kontzeptua. Erantzun onenaren funtzioa. Cournot-Nashen oreka* Cournoten oligopolio jokoan honako hau esango dugu:

“ $(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*) \equiv (x_i^*, x_{-i}^*)$ Cournot-Nashen oreka dela baldin eta

$$\Pi_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq \Pi_i(x_i, x_{-i}^*)\ \forall x_i \geq 0,\ \forall i, i = 1, 2, ..., n \text{ den”.}$$

Erantzun onenen terminotan definizioa honakoa da:

“ $(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*) \equiv (x_i^*, x_{-i}^*)$ Cournot-Nashen oreka da baldin eta $x_i^* = f_i(x_{-i}^*),\ \forall i, i = 1, 2, .., n$ den”,

non $f_i(x_{-i})$ i enpresaren erantzun onenaren funtzioa den, ekoizpen totala x_{-i} duten beste jokalarien estrategien konbinaketa guztien aurrean.

Ekoizpen totala x_{-i} duten beste jokalarien estrategia konbinaketa guztien aurrean, i enpresaren erantzunik onena lortuko dugu orain. *i* enpresaren erantzunik onena, x_i estrategia bat aukeratzean datza non:

$$\max_{x_i \geq 0} \Pi_i(x_i, x_{-i}) \equiv p(x_i + x_{-i})x_i - C_i(x_i)$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_{-i}) + x_i p'(x_i + x_{-i}) - C_i'(x_i) = 0 \quad (1) \rightarrow \overline{f}_i(x_{-i})$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i^2} = 2p'(x_i + x_{-i}) + x_i p''(x_i + x_{-i}) - C_i''(x_i) < 0$$

Negatibotasun ezaren murrizketa kontuan izanik, $x_i \geq 0$, edo jokoaren teoriaren terminotan erantzun onenak jokalariaren estrategien eremukoa izan behar duelarik, erantzun onenaren funtzioa honakoa izango da: $f_i(x_{-i}) = \max\left\{\overline{f}_i(x_{-i}), 0\right\}$.

Cournot-Nashen oreka $(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*) \equiv (x_i^*, x_{-i}^*)$ estrategien konbinaketa bat da non $x_i^* = f_i(x_{-i}^*),\ \forall i, i = 1, 2, .., n.$".

Orain ahaztu dezagun negatibotasun ezaren murrizketa eta suposa dezagun erantzun onenaren funtzioa (1) baldintzaz (barne soluzioa) guztiz ezaugarrituta dagoela. Definizioz, erantzun onenaren funtzioak lehen ordenako baldintza bete behar du: $\frac{\partial \Pi_i(f_i(x_{-i}), x_{-i})}{\partial x_i} = 0 \rightarrow$ i enpresaren erantzunik onena $x_{-i} \geq 0$ aurrean $f_i(x_{-i})$ da. Cournot-Nashen orekan $\frac{\partial \Pi_i(x_i^*, x_{-i}^*)}{\partial x_i} = 0$ betetzen da, izan ere $x_i^* = f_i(x_{-i}^*),\ i = 1, 2, ..., n.$

Berriro ere egiazta genezake estrategien konbinaketa bat Nashen oreka al den, estrategien konbinaketa horri dagokion enpresa bakoitzaren mozkin marjinala kalkulatuz eta hauetako zenbait ez balitz zero izango, ez lirateke orekako baldintzak beteko.

$\frac{\partial \Pi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_{-i})}{\partial x_i} > 0 \rightarrow f_i(\hat{x}_{-i}) > \hat{x}_i \rightarrow (\hat{x}_i, \hat{x}_{-i})$ ez da Cournot-Nash oreka.

$\frac{\partial \Pi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_{-i})}{\partial x_i} < 0 \rightarrow f_i(\hat{x}_{-i}) < \hat{x}_i \rightarrow (\hat{x}_i, \hat{x}_{-i})$ ez da Cournot-Nash oreka.

(iii) *Lerner Indizea*

Soluzioa barnekoa dela suposaturik, (1) baldintza eraldatuko dugu merkatuko boterearen Lerner Indizea lortu arte.

$$p(\underbrace{x_i + x_{-i}}_{x}) + x_i p'(x_i + x_{-i}) - C_i'(x_i) = 0$$

$$p(x)[1 + x_i \frac{p'(x)}{p(x)}] - C_i'(x_i) = 0$$

$$p(x)[1+\frac{x_i}{x}\underbrace{\frac{xp^{'}(x)}{p(x)}}_{-\frac{1}{|\varepsilon(x)|}}]-C_i^{'}(x_i)=0$$

i enpresaren merkatu kuota $s_i=\frac{x_i}{x}$ definituz, honakoa lortzen dugu:

$$p(x)[1-\frac{s_i}{|\varepsilon(x)|}]-C_i^{'}(x_i)=0$$

Honela, *i* enpresaren merkatuko boterearen Lerner Indizea hau izango da:

$$\frac{p(x)-C_i^{'}(x_i)}{p(x)}=\frac{s_i}{|\varepsilon(x)|}$$

Beraz, Cournoten eredua monopolio kasuaren ($s_i=1$) eta lehia perfektuaren ($\lim_{s_i\to 0}\frac{p-C^{'}}{p}=0$)

artean aurkitzen da.

(iv) *Kasu bereziak. Kostu marjinal konstantea*

a) **Kostu marjinal konstantea:** $c_i>0,\ i=1,..,n.$

Orekan, enpresa bakoitzaren lehen ordenako baldintza bete behar da (barne soluzioa):

$$p(\underbrace{x_i^*+x_{-i}^*}_{x^*})+x_i^*p^{'}(x_i^*+x_{-i}^*)-c_i=0\quad i=1,2..,n.$$

Lehen ordenako *n* baldintzak batuz:

$$np(x^*)+\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^*}_{x^*}p^{'}(x^*)-\sum_{i=1}^n c_i=0$$

Hau da: $$np(x^*)+x^*p^{'}(x^*)=\sum_{i=1}^n c_i$$

Beraz, Cournot-Nashen orekan, industriaren ekoizpen agregatua kostu marjinalen baturaren menpe dago (barne soluzio batean, n enpresa kantitate positiboak ekoiztuz), ez enpresen arteko beraien banaketan.

b) **Kostu marjinal konstante berdina:** $c_i = c > 0,\ i = 1,..,n.$

Lerner Indizea honakoa da:

$$\frac{p(x)-c}{p(x)} = \frac{s_i}{|\varepsilon(x)|}$$

Kontuan izanik, produktua homogeneoa denez eta kostu marjinala berdina denez, Cournot-Nashen orekak simetrikoa izan behar duela, orduan:

$$s_i = \frac{x_i^*}{x^*} = \frac{\overline{x}^*}{n\overline{x}^*} = \frac{1}{n},\quad i = 1,..,n.$$

Eskariaren elastikotasuna konstantea balitz:

$$\frac{p(x)-c}{p(x)} = \frac{1}{n|\varepsilon|}$$

Beraz, enpresa kopurua handitzen doan heinean prezio-kostu marjinal diferentzia erlatiboa (Lerner Indizea) murriztu egiten da, eta limitean $n \to \infty$ denean, orduan $p \to c.$

3.1.3. *Ongizatearen analisia*

Ongizatearen analisi bat burutuko dugu enpresa guztien kostu marjinala konstantea eta berdina deneko kasu sinplerako.

$$p(\underbrace{x_i^* + x_{-i}^*}_{x^*}) + x_i^* p'(x_i^* + x_{-i}^*) - c = 0 \quad i = 1,2..,n.$$

Lehen ordenako n baldintza batuz:

$$np(x^*) + x^* p'(x^*) - nc = 0$$

Cournot-Nashen orekako ekoizpen maila eraginkorra den ekoizpen mailarekin alderatzeko erabiliko dugun prozedura monopolioaren kapituluan erabili genuenaren antzekoa da.

(*Ongizate sozialaren funtzioa nola lortzen zen errepasatu*)

$$\max_{x\geq 0} W(x) \equiv \max_{x\geq 0} u(x) - C(x)$$

$$W^{'}(0) = u^{'}(0) - C^{'}(0) > 0 \Rightarrow \; p(0) > C^{'}(0)$$

$W^{'}(x) = u^{'}(x) - C^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow \; W^{'}(x^{e}) = 0$ Lehen ordenako baldintza.

$W^{"}(x) = u^{"}(x) - C^{"}(x) < 0$ Ongizate funtzio hertsiki ahurra.

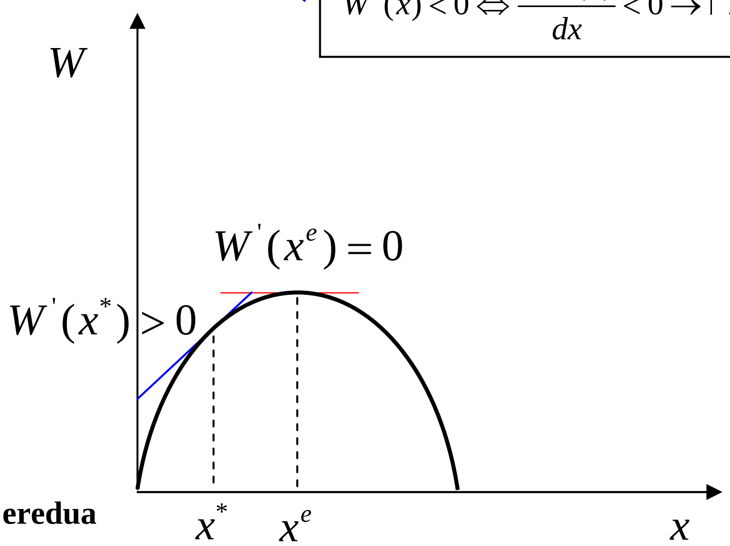
$$\begin{Bmatrix} W^{'}(x^{e}) = 0 \\ W^{'}(x^{*})? \\ W^{"}(x) < 0 \end{Bmatrix}$$

$$W^{'}(x^{*}) = \underbrace{u^{'}(x^{*})}_{p(x^{*})} - C^{'}(x^{*}) = -\frac{x^{*}}{n} \overbrace{\underbrace{p^{'}(x^{*})}_{<0}}^{u^{"}(x^{*})} > 0$$

Cournoten ekoizpenaren definizioagatik.

$$\begin{Bmatrix} W^{'}(x^{e}) = 0 \\ W^{'}(x^{*}) > 0 \\ W^{"}(x) < 0 \end{Bmatrix} \rightarrow W^{'}(x^{e}) < W^{'}(x^{*}) \rightarrow \; x^{e} > x^{*}$$

$$W^{"}(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{dW^{'}(x)}{dx} < 0 \rightarrow \uparrow x \;\downarrow W^{'}(x)$$



3.2. **Bertranden eredua**

3.2.1. ***Produktu homogeneoa***

(i) Testuingurua.

(ii) Gainontzeko-eskaria.

(iii) Jokoaren adierazpena era normalean. Orekaren kontzeptua.

(iv) Bertranden paradoxa. Orekaren karakterizazioa eta bakantasuna.

(i) *Testuingurua*

Bertranden eredua honako elementuek zehazten dute:

1) *2 enpresa* dituen industria bat kontsideratzen dugu.

2) Enpresek *produktu homogeneo* bat saltzen dute.

3) *Prezioetan lehia*.

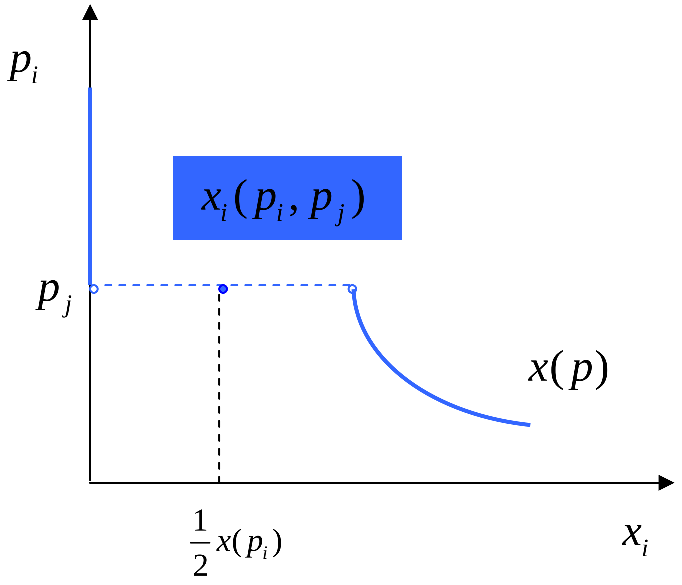
4) *Aldibereko aukeraketa*. Enpresa bakoitzak bere produktuarentzat prezioa aukeratu behar du, bere lehiakidearen aukeraketa zein den ezagutu gabe. Berriro ere, aldibereko aukeraketak ez du esan nahi aukeraketa denbora momentu berean burutzen denik; garrantzitsuena zera da, nahiz eta enpresa batek bestea baino lehenengo jokatu, ondoren jokatzen duenak lehenengoaren jokaldia ez ikustea.

5) Bi enpresentzat *kostu marjinal konstantea eta berdina*: $c_1 = c_2 = c > 0$.

(ii) *Gainontzeko-eskaria*

Enpresek produktu homogeneo bat saltzen dute eta prezioetan lehiatzen dira. Beraz, kontsumitzaileen ikuspegitik, garrantzitsua den gauza bakarra bi enpresen prezioen arteko erlazioa da; horrela kontsumitzaileek ondasuna merkeen saltzen duen enpresari erosiko diote. Hau da, enpresa batek bestearena baino prezio baxuagoa jartzen badu, lehenengoa merkatu guztiarekin "geratuko litzateke" eta bigarrenak ez luke ezer salduko. Biek prezio berbera ipiniko balute, kontsumitzaileak indiferente egongo ziren enpresa bati edo besteari erostearen artean. Prezioak berdinak direnean, enpresa bakoitzak merkatuaren erdiari salduko liokeela suposatuko dugu. Beraz, *i* enpresaren, $i, j = 1, 2,\ j \neq i,$ gainontzeko-eskaria honakoa litzateke:

$$x_i(p_i, p_j) = \begin{cases} x(p_i) & p_i < p_j \\ \frac{1}{2}x(p_i) & p_i = p_j \\ 0 & p_i > p_j \end{cases}$$



(iii) *Jokoaren adierazpena era normalean. Orekaren kontzeptua*

Jokoa **era normalean** honela da:

1) $i = 1, 2.$ (Jokalariak)

2) $p_i \geq 0.$ i jokalariaren estrategia moduan edozein prezio ez negatibok balioko liguke (edozein zenbaki erreal ez negatibo). Beraz, i jokalariaren estrategiak $p_i \in [0, \infty),\ i = 1, 2$ bezala adieraz genitzake.

3) (p_1, p_2) estrategien konbinaketa emanik, enpresa bakoitzak lortzen dituen irabaziak hauek dira:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1(p_1,p_2)=(p_1-c)x_1(p_1,p_2)\\ \\ \Pi_2(p_1,p_2)=(p_2-c)x_2(p_1,p_2)\end{array}\right\}\equiv\Pi_i(p_i,p_j)=(p_i-c)x_i(p_i,p_j),\ i,j=1,2,\ j\neq i$$

non *i* enpresaren, $i, j = 1, 2,\ j \neq i$, gainontzeko-eskaria honakoa den:

$$x_i(p_i,p_j)=\begin{cases}x(p_i) & p_i<p_j\\ \frac{1}{2}x(p_i) & p_i=p_j\\ 0 & p_i>p_j\end{cases}.$$

Bertranden duopolioaren jokoan honako hau esango dugu:

"(p_1^*, p_2^*) Bertrand-Nashen oreka da baldin eta

$$\Pi_i(p_i^*,p_j^*)\geq\Pi_i(p_i,p_j^*)\ \forall p_i\geq 0,\ i,j=1,2,\ j\neq i\ \text{ den}".$$

Analisia errazteko, definizio hau bakarrik erabiliko dugu, izan ere, enpresa bakoitzaren gainontzeko-eskaria prezioaren funtzio ez jarraitu bat denez, ezin ditugu optimizatzeko ohiko tresnak erabili (hain zuzen, erantzun onenaren funtzioa lortu beharrean, erantzun onenaren korrespondentzia lortuko genuen eta analisia zailagoa izango zen).

(iv) *Bertranden paradoxa. Orekaren karakterizazioa eta bakantasuna*

Bertranden jokoaren Nashen oreka bakarra honakoa dela frogatuko dugu:

$$p_1^* = p_2^* = c$$

Emaitza hau *Bertranden paradoxa* bezala ezagutzen da:

"*Nahikoa da bi enpresa prezioetan lehiatzen aritzea, emaitza lehiakor bat lortzeko* ".

Frogapena

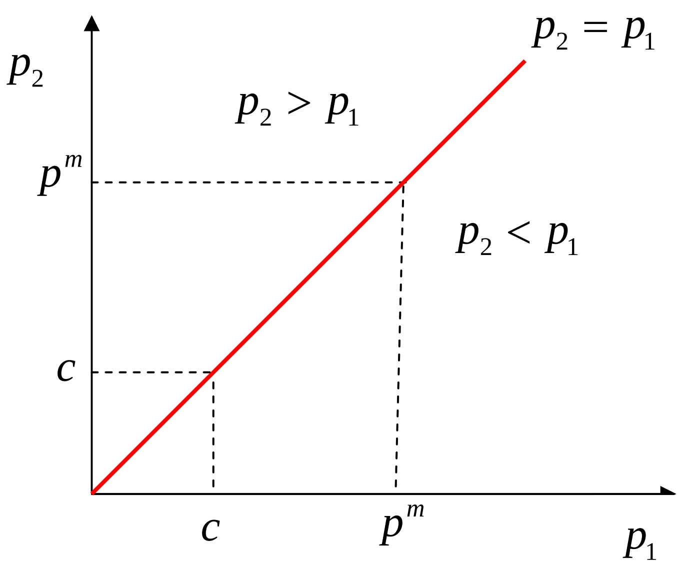
Froga dezagun $p_1^* = p_2^* = c$ estrategien konbinaketa:

a) **Nashen oreka** dela, eta b) **Nashen oreka bakarra** dela.

a) (c,c) estrategia konbinaketarako, enpresa bakoitzaren mozkina hau da: $\Pi_i(c,c)=(c-c)\frac{1}{2}x(c)=0,\ i=1,2.$ i enpresa bere kabuz (bera bakarrik) desbideratzen bada $p_i > c$ prezioa finkatuz, ez lioke inori ere salduko eta bere mozkina nulua izango zen, berriz $p_i < c$ finkatuz prezioa jaitsiko balu, merkatu osoari salduko lioke baina mozkin negatiboak lortuko lituzke. Beraz,

$$\Pi_i(c,c)\geq \Pi_i(p_i,c)\ \forall p_i\geq 0,\ i,j=1,2,\ j\neq i$$

b) Orain froga dezagun Nashen oreka izan daitekeen beste estrategia konbinaketarik ez dagoela. Ondorengo grafikoan, eman daitezkeen estrategien konbinaketa mota guztiak agertzen dira. Ondorengo prozedura erabiliko dugu estrategia konbinaketa bat oreka den edo ez ikustatzeko: estrategien konbinaketa horretan jokalari bakoitzak lortzen duen mozkina kalkulatuko dugu eta jokalariren batek bere kabuz desbideratzeko pizgarririk ba ote duen aztertuko dugu. Estrategien konbinaketa bat Nashen oreka bezala ezeztatzeko, nahikoa da jokalari bat bere kabuz desbideratuta hobetu egiten dela frogatzea.



1) Prezio berdinak: $p_i = p_j$

a) $p_i = p_j > c$ Nashen oreka al da? EZ. Hau bezalako estrategien konbinaketa batean, enpresa bakoitzaren irabazia honakoa izango litzateke: $\Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}x(p_i).$ Edozein enpresak bere kabuz desbideratzeko pizgarriak izango lituzke. Adibidez, $p_i^{'} = p_i - \varepsilon$ aukera dezakegu (non ε kantitate arbitrario positiboa eta nahi bezain txikia den):

$$(p_i^{'} - c)x(p_i^{'}) = (p_i^{'} - c)x_i(p_i^{'}, p_j) = \Pi_i(p_i^{'}, p_j) > \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}x(p_i).$$

Hain zuzen, infinitu desbideraketa posible ditugu non i enpresa aldebakarreko desbideraketa batekin hobetu egingo zen.

b) $p_i = p_j < c$ Nashen oreka al da? EZ. Hau bezalako estrategien konbinaketa batean, enpresa bakoitzaren irabazia honakoa izango litzateke: $\Pi_i(p_i, p_j) = \underbrace{(p_i - c)}_{<0}x_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}x(p_i) < 0.$ Edozein enpresak bere kabuz desbideratzeko pizgarriak izango lituzke. Adibidez, edozein $p_i^{'} > p_i$:

$$0 = (p_i^{'} - c)\underbrace{x_i(p_i^{'}, p_j)}_{=0} = \Pi_i(p_i^{'}, p_j) > \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}x(p_i).$$

2) Prezio ezberdinak: $p_i \neq p_j$

c) $p_i > p_j > c$ Nashen oreka al da? EZ. Hau bezalako estrategia konbinaketa batean i enpresaren irabazia nulua izango litzateke $\Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = 0$ eta j enpresarena $\Pi_j(p_i, p_j) = (p_j - c)x_j(p_i, p_j) = (p_j - c)x(p_j) > 0$ izango litzateke. i enpresarentzat edozein $p_i^{'}$ aldebakarreko desbideraketa non $c < p_i^{'} \leq p_j$ bere mozkinak igotzen ditu:

$$(p_i^{'} - c)\underbrace{x(p_i^{'})}_{p_i^{'} < p_j \text{ bada}} = (p_i^{'} - c)x_i(p_i^{'}, p_j) = \Pi_i(p_i^{'}, p_j) > \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = (p_i - c)0 = 0.$$

Nahiz eta dagoeneko (p_i, p_j) estrategien konbinaketa, non $p_i > p_j > c$ den, ezin daitekeela oreka izan frogatu dugun, ikus dezakegu kasu askotan j enpresak ere bere kabuz desbideratzeko pizgarriak izan ditzakeela. (Adibidez, $p^m \geq p_i > p_j > c$ bada, edozein $p_i > p_j^{'} > p_j$ aldebakarreko desbideraketak j enpresaren mozkinak igotzen ditu. $p_i > p_j > p^m > c$ eta $p_i > p^m > p_j > c$ kasuetan ere erraz aurkitzen dira j enpresaren mozkinak igotzen dituzten desbideraketak. j enpresak desbideratzeko pizgarriak izango ez lituzkeen egoera bakarra $p_i > p^m = p_j > c$ denean izango litzateke).

d) Beste kasuak:

- $p_i > c \geq p_j$ Nashen oreka al da? EZ. i enpresak ez luke bere kabuz desbideratzeko pizgarririk izango. Baina j enpresarentzat, $p_i > c > p_j$ denean edozein $p_j^{'} > p_j$ mozkinak igotzen ditu, eta $p_i > c = p_j$ denean prezioak behar bezala igoz j enpresak mozkinak handitzen ditu. Adibidez, baldin eta $p^m \geq p_i > c = p_j$ den, edozein $p_i > p_j^{'} > c$ j enpresaren mozkinak igotzen ditu. Eta baldin eta $p_i > p^m > c = p_j$ den, edozein preziok, non $p^m > p_j^{'} > c$ (eta beste askok), *j* enpresaren mozkinak igotzen ditu.

- $c \geq p_i > p_j$ Nashen oreka al da? EZ. *i* enpresak ez luke bere kabuz desbideratzeko pizgarririk izango, *j* enpresarentzat edozein $p_j^{'} > p_j$ preziok mozkinak igotzen dituen bitartean.

3.2.2. ***Produktu heterogeneoa*** (produktu bereiztuak)

(i) Produktu heterogeneoa. Gainontzeko-eskaria.

(ii) Jokoaren adierazpena era normalean.

(iii) Orekaren kontzeptua. Erantzun onenaren funtzioa. Bertrand-Nashen oreka.

(i) *Produktu heterogeneoa. Gainontzeko-eskaria*

Bertranden ereduko gainontzeko suposaketa guztiak mantendu egingo ditugu (bi enpresa, aldibereko aukeraketa, kostu marjinal konstantea eta berdina, prezioetan lehia) baina orain suposatuko dugu bi enpresek produktu heterogeneoak saltzen dituztela. Hau da, enpresek nahiko ordezgarriak baina ordezgarri ez perfektuak diren produktuak saltzen dituzte.

i enpresak ekoiztutako produktuaren eskaria, hau da, gainontzeko-eskaria, $x_i(p_i, p_j)$ funtzioak emana dator. Suposatuko dugu $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0$, $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$ eta $\left|\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right| > \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ direla; hau da, *i* produktuaren eskaria *i* produktuaren prezioarekiko beherakorra dela, produktuak ordezgarriak dira eta *i* produktuaren eskatutako kantitatearengan eragin gehiago dauka produktu horren prezioaren aldaketak, produktu ordezgarriaren prezio aldaketak baino.

(ii) *Jokoaren adierazpena era normalean. Orekaren kontzeptua*

Jokoa **era normalean** honela da:

1) $i = 1, 2.$ (Jokalariak)

2) $p_i \geq 0.$ i jokalariaren estrategia moduan edozein prezio ez negatibok balioko liguke (edozein zenbaki erreal ez negatibo). Modu berean i jokalariaren estrategiak $p_i \in [0, \infty),$ $i = 1, 2$ bezala adieraz ditzakegu.

3) (p_1, p_2) estrategien konbinaketa emanik enpresa bakoitzak lortzen duen irabazia honakoa da:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)x_1(p_1, p_2) \\ \\ \Pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)x_2(p_1, p_2) \end{array}\right\} \equiv \Pi_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j), \; i, j = 1, 2, \; j \neq i$$

Orain, produktu bakoitzaren eskaria bere prezioarekiko funtzio jarraitu bat da.

(iii) *Orekaren kontzeptua*. *Erantzun onenaren funtzioa. Bertrand-Nashen oreka*

Erantzun onenen terminotan Bertrand-Nashen orekaren definizioa honakoa da:

“(p_1^*, p_2^*) Bertrand-Nashen oreka da baldin eta $p_i^* = g_i(p_j^*),$ $\forall i, j = 1, 2, \; j \neq i$ den”.

non $g_i(p_j)$, i enpresaren erantzun onenaren funtzioa den, enpresa lehiakidearen p_j prezioaren aurrean.

i enpresaren erantzun onena p_i estrategia bat aukeratzean datza non:

$$\max_{p_i \geq 0} \Pi_i(p_i, p_j) \equiv (p_i - c)x_i(p_i, p_j)$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = x_i(p_i, p_j) + (p_i - c)\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = 0 \quad (1) \rightarrow g_i(p_j)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i^2} = 2\frac{\partial x_i}{\partial p_i} + (p_i - c)\frac{\partial^2 x_i}{\partial p_i^2} < 0.$$

3.3. **Kantitatearen aukeraketan lidergoa. Stackelbergen eredua**

(i) Testuingurua.

(ii) Bi apealdietako jokoa. Informazio perfektua. Estrategiaren kontzeptua.

(iii) Atzeraeraginezko indukzioa. Oreka perfektua azpiataletan.

(iv) Adibidea: eskari lineala eta kostu marjinal konstantea.

(v) Beste Nashen oreka ez perfektuak azpiataletan.

(i) *Testuingurua*

Stackelberg-en duopolioaren ereduak oinarrizko lau ezaugarri ditu:

a) *2 enpresa* dituen merkatu bat kontsideratzen dugu.

b) *Produktu homogeneoa*. Hau da, kontsumitzaileen ikuspuntutik bi enpresek ekoiztutako produktuak ordezgarri perfektuak dira.

c) *Lehia kantitateetan*. Enpresa bakoitzaren aukeratzeko aldagaia ekoizpen maila da. Izan daitezela x_1 eta x_2 1 eta 2 enpresen ekoizpen mailak, hurrenez hurren.

d) *Ondoz ondoko aukeraketa (sekuentziala)*. Enpresetako batek (liderrak), 1 enpresak, aukeratzen du lehenengo bere ekoizpen maila. Jarraian beste enpresak (jarraitzaileak), 2 enpresak, bere ekoizpen maila aukeratzen du 1 enpresak aukeratutako ekoizpen maila ikusi eta gero. Jokoen teoriaren ikuspuntutik informazio perfektuko joko bati buruz ari gara.

(ii) *Jokoa bi epealdietan. Informazio perfektua. Estrategia*

Enpresek bi epealdietako joko bat jokatuko dute:

1 Epealdia: 1 enpresak bere $x_1 \geq 0$ ekoizpen maila aukeratzen du.

2 Epealdia: 2 enpresak bere $x_2 \geq 0$ ekoizpen maila aukeratzen du, 1 enpresak aukeratutako ekozipen maila zein den ikusi ondoren.

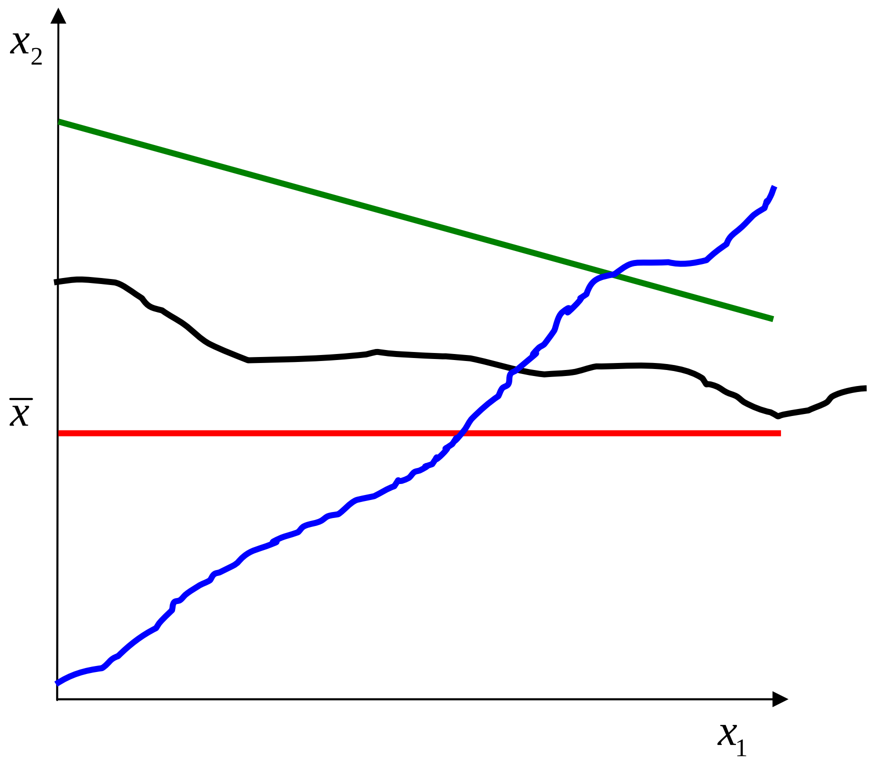
Bi jokalariek jokoa modu berean ezagutzen dutenez, 2 jokalariak 1 jokalariaren aukeraketa ikusteaz gain, 1 jokalariak, bere erabakia hartzerakoan, berak aukeratutakoa 2 jokalariak ikusiko duela badaki. Hau da, informazio perfektua da eta bi jokalariek aurreikuspen berbera dute ea jokoa nolakoa ote den.

(Oharra: joko bat bi epealdietan, hau da, sekuentziala, baina bigarrengo jokatzen duenak lehenengo jokatzen duenaren ekoizpena ikusten ez duenean, hau da, informazio ez perfektukoa, aldibereko joko baten berdina izango litzateke, Cournoten jokoa den bezala).

Bi jokalarien estrategia eremuak honakoak izango lirateke:

- $x_1 \geq 0$: 1 jokalariaren estrategi moduan edozein kantitate ez negatibok balioko liguke (edozein zenbaki erreal ez negatibo; modu berean $x_1 \in [0, \infty)$).

- 2 jokalariaren estrategien deskripzioa zailagoa da. Gogoratu behar da jokalariaren estrategia bat, jokatzeko bere txanda izanez gero, erabaki nodo bakoitzean egingo lukeenaren deskripzio osoa dela, beste jokalari(ar)en portaeraren eraginez, erabaki nodo baten bat berarentzat lortu ezinezkoa den ala ez axola gabe. Suposatzen ari garen joko honetan, 1 enpresaren ekoizpen posible bakoitzak 2 enpresarentzat erabaki nodo ezberdin bat sortzen du. Beraz, 2 enpresaren estrategia bat $x_2(x_1)$ funtzio bat izango da , zeinak 1 enpresaren ekoizpen posible bakoitzerako, 2 enpresak zenbat ekoiztuko duen esango digun.



(iii) *Atzeraeraginezko indukzioa. Oreka perfektua azpiataletan*

Nahiz eta jokoak oso zaila ematen duen, badakigu informazio perfektuko jokoetan eta berdinketarik ez badago, atzeraeraginezko indukzioak estrategia konbinaketa bakar bat proposatzen duela soluzio moduan, eta soluzio honek azpiataletako oreka perfektuarekin bat egingo duela. Prozedura, aurreko kapituluan joko finituekin erabili genuenaren antzekoa izango da.

Azkeneko azpiataletan kokaturik hasiko gara, hau da, 2 epealdian.

2 Epealdia

Azpiatal bakoitzean mehatxu ez sinesgarriak edo ekintza menperatuak baztertuko ditugu. 1 enpresaren ekoizpen bat, x_1, emanik (azpiatal bat), 2 enpresaren sinesgarria den mehatxu bakarra zera da: mozkinak maximizatuko dituen ekoizpen maila bat aukeratzea:

$$\max_{x_2 \geq 0} \Pi_2(x_1, x_2) \equiv p(x_1 + x_2)x_2 - C_2(x_2)$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = p(x_1 + x_2) + x_2 p^{'}(x_1 + x_2) - C_2^{'}(x_2) = 0 \quad (1) \rightarrow \overline{f}_2(x_1)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x_2^2} = 2p^{'}(x_1 + x_2) + x_2 p^{''}(x_1 + x_2) - C_2^{''}(x_2) < 0$$

Negatibotasun ezaren murrizketa kontuan izanik, $x_2 \geq 0$, honakoa lortzen dugu:

$f_2(x_1) = \max\left\{ \overline{f}_2(x_1), 0 \right\} \rightarrow$ ***2 enpresaren estrategia azpiataletako oreka perfektuan***.

Joko finituetan, prozedurak mehatxu ez sinesgarriak baztertuz eta joko murriztua kontuan hartuz jarraitzen du. Aztertzen ari garen jokoan, sinezgarriak ez diren mehatxu guztiak ezabatzea $f_2(x_1) = \max\left\{ \overline{f}_2(x_1), 0 \right\}$-ekiko ezberdinak diren 2 jokalariaren estrategia guztiak ezabatzearen berdina da.

1 Epealdia

1 jokalariak aurreikusten du 2 enpresak azpiatal bakoitzean $f_2(x_1) = \max\left\{ \overline{f}_2(x_1), 0 \right\}$ estrategiaren araberako portaera izango duela. Mozkinen funtzioa era murriztuan 1 enpresarentzat honakoa da: $\Pi_1(x_1, f_2(x_1)) \equiv p(x_1 + f_2(x_1))x_1 - C_1(x_1)$. Beraz, 1 enpresaren arazoa honakoa da:

$$\max_{x_1 \geq 0} \Pi_1(x_1, f_2(x_1)) \equiv p(\underbrace{x_1 + f_2(x_1)}_{x})x_1 - C_1(x_1).$$

$$\frac{d\Pi_1}{dx_1} = p(x_1 + x_2) + x_1[1 + f_2'(x_1)]p'(x_1 + x_2) - C_1'(x_1) = 0 \quad (2) \rightarrow x_1^L$$

$$\frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} < 0$$

Beraz, **oreka perfektua azpiataletan** estrategien konbinaketa hau da:

$$(x_1^L, f_2(x_1)).$$

(iv) *Adibidea: eskari lineala eta kostu marjinal konstantea*

2 Epealdia

Azpiatal bakoitzean mehatxu ez sinesgarriak edo ekintza menperatuak baztertuko ditugu. 1 enpresaren ekoizpen bat, x_1, emanik (azpiatal bat), 2 enpresaren sinesgarria den mehatxu bakarra zera da: mozkinak maximizatuko dituen ekoizpen maila bat aukeratzea:

$$\max_{x_2 \geq 0} \Pi_2(x_1, x_2) \equiv p(x_1 + x_2)x_2 - C_2(x_2) \equiv [a - b(x_1 + x_2)]x_2 - cx_2$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = p(x_1 + x_2) + x_2 p'(x_1 + x_2) - C_2'(x_2) = 0 \quad (1) \rightarrow \overline{f}_2(x_1) = \frac{a - c - bx_1}{2b}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x_2^2} = 2p'(x_1 + x_2) + x_2 p''(x_1 + x_2) - C_2''(x_2) = -2b < 0$$

Negatibotasun ezaren murrizketa kontuan izanik, $x_2 \geq 0$, hau lortzen dugu:

$$f_2(x_1) = \max\left\{\overline{f}_2(x_1), 0\right\} = \max\left\{\frac{a - c - bx_1}{2b}, 0\right\}$$ ***2 enpresaren estrategia OPA-n.***

1 Epealdia

1 jokalariak aurreikusten du 2 enpresak azpiatal bakoitzean $f_2(x_1) = \max\left\{ \overline{f}_2(x_1), 0 \right\} = \max\left\{ \dfrac{a-c-bx_1}{2b}, 0 \right\}$ estrategiaren araberako portaera izango duela. Mozkinen funtzioa era murriztuan 1 enpresarentzat honakoa da: $\Pi_1(x_1, f_2(x_1)) \equiv p(x_1 + f_2(x_1))x_1 - C_1(x_1)$. Beraz, 1 enpresaren arazoa honakoa da:

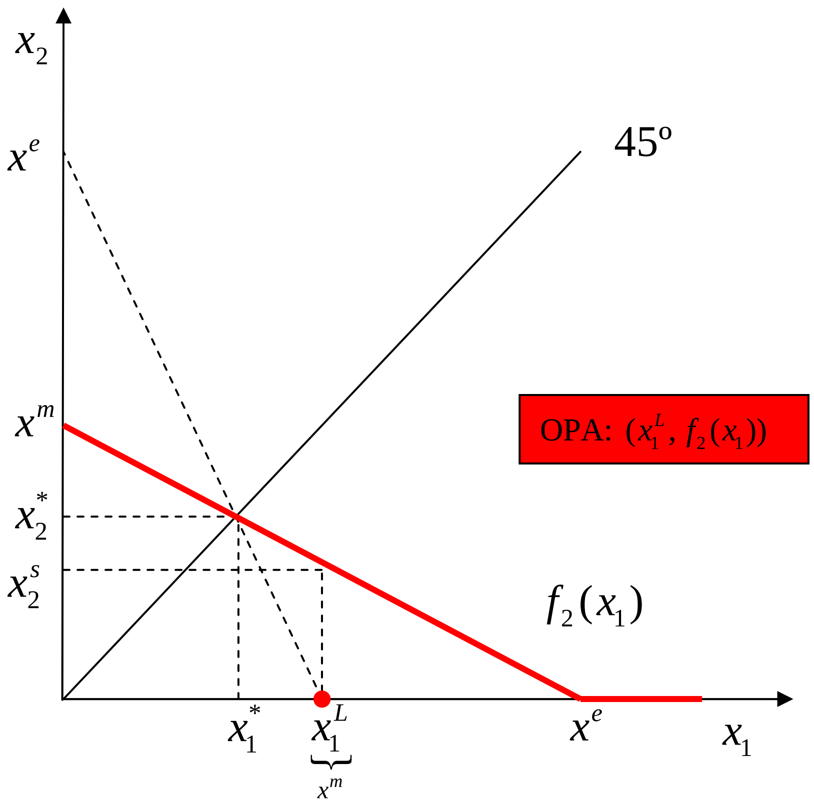
$$\max_{x_1 \geq 0} \Pi_1(x_1, f_2(x_1)) \equiv [a-c-b(x_1 + f_2(x_1))]x_1 \equiv [a-c-b(x_1 + \frac{a-c-bx_1}{2b})]x_1 \equiv [\frac{a-c-bx_1}{2}]x_1$$

$$\frac{d\Pi_1}{dx_1} = p(x_1 + x_2) + x_1[1 + f_2^{'}(x_1)]p^{'}(x_1 + x_2) - C_1^{'}(x_1) = a - c - 2bx_1 = 0 \;\; (2) \rightarrow x_1^L = \frac{a-c}{2b}$$

$$\frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} < 0$$

Beraz, **oreka perfektua azpiataletan** estrategien konbinaketa hau da:

$$(x_1^L, f_2(x_1)).$$



Enpresa bakoitzak lortzen dituen mozkinak kalkulatzeko, jokoa jokatu beharra dago:

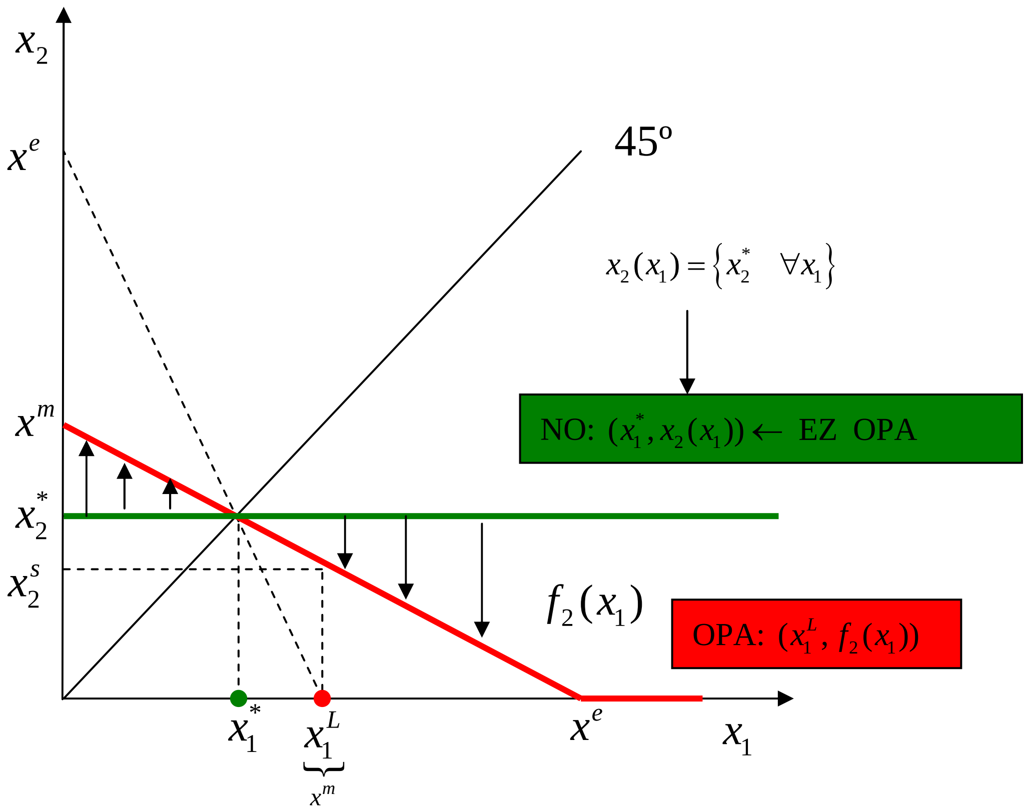
$$x_2^s = f_2(x_1^L) = \frac{a-c-bx_1^L}{2b} = \frac{a-c-b\left(\frac{a-c}{2b}\right)}{2b} = \frac{a-c}{4b}$$

$$x^s = x_1^L + x_2^s = \frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{4b} = \frac{3(a-c)}{4b}$$

$$p^s = p(x^s) = a - bx^s = a - b\frac{3(a-c)}{4b} = \frac{a+3c}{4}; \;\; p^s - c = \frac{a-c}{4}$$

$$\Pi_1^L = (p^s - c)x_1^L = \frac{(a-c)}{4}\frac{(a-c)}{2b} = \frac{(a-c)^2}{8b} =; \;\; \Pi_2^s = (p^s-c)x_2^s = \frac{(a-c)}{4}\frac{(a-c)}{4b} = \frac{(a-c)^2}{16b}.$$

(v) *Beste Nashen oreka ez perfektuak azpiataletan*



2.4. **Kolusioa eta akordioen egonkortasuna**

2.4.1. ***Kolusioa epe laburrean***

(i) Cournoten eredua. Kolusio akordioa ez da oreka epe laburrean.

(ii) Bertranden eredua. Kolusio akordioa ez da oreka epe laburrean.

(i) *Cournoten eredua. Kolusio akordioa ez da oreka epe laburrean*

Enpresak, kolusioa egin nahi balute, mozkin agregatuak maximizatzen interesatuta egongo lirateke.

$$\max_{x_1, x_2} \Pi_1(x_1, x_2) + \Pi_2(x_1, x_2) \equiv p(x_1 + x_2)x_1 - C_1(x_1) + p(x_1 + x_2)x_2 - C_2(x_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= p(x_1^m + x_2^m) + (x_1^m + x_2^m)\, p'(x_1^m + x_2^m) - C_1'(x_1^m) = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= p(x_1^m + x_2^m) + (x_1^m + x_2^m)\, p'(x_1^m + x_2^m) - C_2'(x_2^m) = 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} IM_I = C_1' = C_2'$$

Kostu marjinalak berdinak eta konstanteak direnean, (1) eta (2) baldintzak berdinak dira. Bi ekuazioren sistemak infinitu soluzio izango lituzke: edozein ekoizpen pare non $x_1 + x_2 = x^m$ industriaren mozkina maximizatuko luke. Kasu hauetan beti ariko gara kolusio akordio simetrikoari buruz non enpresa bakoitzak monopolioaren ekoizpenaren erdia ekoizten duen: $x_i^m = \dfrac{x^m}{2},\ i = 1, 2.$

Orain egiaztatuko dugu nola kolusio akordioa ezin den mantendu oreka bezala jokoa behin bakarrik jokatzen denean. Hau da, (x_1^m, x_2^m) estrategien konbinaketa Cournoten jokoaren Nashen oreka bat ez dela egiaztatuko dugu.

$x_j \geq 0$ estrategia izanik, *i* enpresaren erantzunik onena x_i estrategia bat aukeratzean datza non:

$$\max_{x_i \geq 0} \Pi_i(x_i, x_j) \equiv p(x_i + x_j)x_i - C_i(x_i)$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_j) + x_i p'(x_i + x_j) - C_i'(x_i) = 0 \quad (1) \rightarrow \overline{f}_i(x_j)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i^2} = 2p'(x_i + x_j) + x_i p''(x_i + x_j) - C_i''(x_i) < 0$$

Negatibotasun ezaren murrizketa kontuan hartuta, $x_i \geq 0$, edo jokoen teoriaren terminotan erantzun onena jokalariaren estrategia eremukoa izan behar delarik, erantzun onenaren funtzioa hau izango da: $f_i(x_j) = \max\left\{\overline{f}_i(x_j), 0\right\}$.

(x_1^m, x_2^m) estrategien konbinaketa Nashen oreka bat ez dela egiaztatzeko, enpresa bakoitzaren mozkin marjinala kalkulatuko dugu:

$$\frac{\partial \Pi_i(x_i^m, x_j^m)}{\partial x_i} = p(x_i^m + x_j^m) + x_i^m p'(x_i^m + x_j^m) - C_i'(x_i^m) = -x_j^m \underbrace{p'(x_i^m + x_j^m)}_{<0} > 0$$

Kolusio akordioaren definizioa.

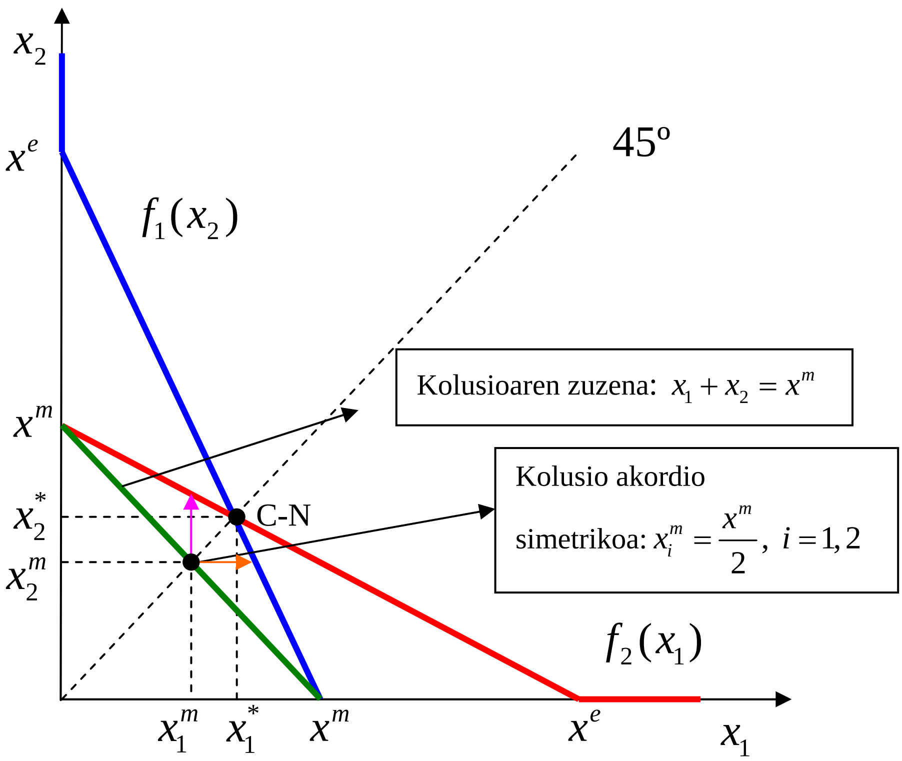
Beraz, kolusio akordio batetik abiatuta, ekoizpenaren igoera batek *i* enpresaren mozkina igotzen du, eta beraz, *i* enpresak kolusio akordioa hausteko pizgarriak izango lituzke. Beste era batetara ikusita, erantzun onenaren funtziaoren definizioa emanda $\frac{\partial \Pi_i(f_i(x_j^m), x_j^m)}{\partial x_i} = 0$ eta

beraz, $\frac{\partial \Pi_i(x_i^m, x_j^m)}{\partial x_i} > 0$ denez, ondorioz $f_i(x_j^m) > x_i^m$.

i enpresak kolusio akordioa haustea erabakiko balu bere desbideraketa optimoa zein izango litzatekeen ezagutzen dugunez, $f_i(x_j^m)$, izendatuko dugu $\overline{\Pi}_i$ *i* enpresak kolusio akordiotik optimoki desbideratuko balitz, eta bere lehiakideak errespetatuko balu, lortuko lukeen mozkina. Hau da,

$$\overline{\Pi}_i = \Pi_i(f_i(x_j^m), x_j^m).$$

Analisi grafikoa: eskari lineala eta kostu marjinal konstantea



Oligopolioa

Kasu hau *n* enpresen kasura orokortu dezakegu. Kolusio akordioa definitzen duen baldintza (mozkin agregatua maximizatzen duen estrategien konbinaketa) hau da:

$$p(x_i^m + x_{-i}^m) + (x_i^m + x_{-i}^m)\, p^{'}(x_i^m + x_{-i}^m) - C_i^{'}(x_i^m) = 0 \quad i = 1,..,n.$$

$(x_1^m,..,x_n^m)$ estrategien konbinaketa Nashen oreka bat ez dela frogatzeko, enpresa bakoitzaren mozkin marjinala kalkulatuko dugu:

$$\frac{\partial \Pi_i(x_i^m, x_{-i}^m)}{\partial x_i} = p(x_i^m + x_{-i}^m) + x_i^m\, p^{'}(x_i^m + x_{-i}^m) - C_i^{'}(x_i^m) = -x_{-i}^m \underbrace{p^{'}(x_i^m + x_{-i}^m)}_{<0} > 0$$

Kolusio akordioaren definizioa.

Kolusio akordio batetik abiatuta, ekoizpenaren igoera batek *i* enpresaren mozkina igotzen du, eta beraz, *i* enpresak kolusio akordioa hausteko pizgarriak izango lituzke. Beste era batera ikusita, erantzun onenaren funtzioaren definizioa emanda $\frac{\partial \Pi_i(f_i(x_{-i}^m), x_{-i}^m)}{\partial x_i} = 0$ eta beraz,

$\frac{\partial \Pi_i(x_i^m, x_{-i}^m)}{\partial x_i} > 0$ denez, ondorioz $f_i(x_{-i}^m) > x_i^m$.

i enpresak kolusio akordioa haustea erabakiko balu bere desbideraketa optimoa zein izango litzatekeen ezagutzen dugunez, $f_i(x_{-i}^m)$, izendatuko dugu $\overline{\Pi}_i$ *i* enpresak kolusio akordiotik optimoki desbideratuko balitz, eta bere lehiakideek errespetatuko balute, lortuko lukeen mozkina. Hau da,

$$\overline{\Pi}_i = \Pi_i(f_i(x_{-i}^m), x_{-i}^m).$$

(ii) *Bertranden eredua. Kolusio akordioa ez da oreka epe laburrean*

Kontsidera dezagun Bertranden eredua produktu homogeneoarekin eta kostu marjinal konstante eta berdinekin. Kolusio akordioa adierazten duen estrategia konbinaketa (p^m, p^m) da. Enpresa bakoitzak lortuko lukeen irabazia hau da:

$$\Pi_i^m = \Pi_i(p^m, p^m) = (p^m - c)\frac{1}{2}x(p^m) = \frac{1}{2}\Pi^m$$

Ikusi genuen $p_i = p_j > c$ motako estrategia konbinaketa bat ez zela Nashen oreka. Edozein enpresak edukiko lituzke pizgarriak bere kabuz desbideratzeko. Adibidez, aukera dezakegu $p_i^{'} = p^m - \varepsilon$ (non ε kantitate arbitrario positiboa eta nahi bezain txikia den). Infinitu desbideraketa ditugu non azkenean *i* enpresa hobetu egiten den.

Zailagoa da *i* enpresaren desbideraketa optimoa aurkitzea. Hoberena lehiakidearen prezioa kantitate positibo ahalik eta txikienean jaistea da, $\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$. Nahiz eta desbideraketa optimo hau ondo definituta ez eduki, monopolioaren preziotik nahi bezain hurbil egongo gara. Izendatuko dugu $\overline{\Pi}_i$ *i* enpresak kolusio akordiotik optimoki desbideratuko balitz, eta bere lehiakideak errespetatuko balu, lortuko lukeen mozkina. Hau da,

$$\overline{\Pi}_i = \Pi_i(p^m - \varepsilon, p^m) = (p^m - \varepsilon - c)x(p^m - \varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\simeq} (p^m - c)x(p^m) = \Pi^m$$

3.4.2. *Akordioen egonkortasuna. Denbora horizonte finitua eta infinitua*

Ikusi dugu epe laburrera kolusioa ezin dela oreka bezala mantendu, ez erreferentziazko jokoa Cournotena denean eta ezta Bertrandena denean ere. Atal honetan, jokoa errepikatzen denean enpresen artean kolusioa edo kooperazioa gertatzeko ditugun aukerak aztertuko ditugu.

(i) ***Denbora horizonte finitua***

Atzeraeraginezko indukzioaren argudioa: kooperazioa edo kolusioa ezin da oreka bezala mantendu (epealdi bakoitzean enpresek epe laburrean bezalako portaera izango dute). Arrazonamendua presoen dilemakoa bezalakoa da.

(ii) ***Denbora horizonte infinitua***

Denbora horizonte infinitua interpretatzeko bi modu daude:

(i) *Interpretazio literala*: jokoa infinitu denboraldi errepikatzen da. Testuinguru honetan, jokalari batek estrategia bat bestearekin alderatzen duenean, irabazien egungo balio deskontatuak alderatu beharko lituzke. Izan dadila δ deskontu faktorea, 0 < δ < 1. Eta r interes tasa bada, orduan $\delta = \dfrac{1}{1+r}$.

(ii) *Interpretazio informazionala*: ez da jokoaren iraupena ezagutzen. Jokoaren epealdi bakoitzean 0 < δ < 1 probabilitatea existitzen da jokoak jarraitzeko. Testuinguru honetan, jokalari bakoitzak estrategia ezberdinen esperotako ordainketak (hauek ere deskontatu daitezke) alderadu behar lituzke.

Zigor mehatxu inplizituek kolusioa joko errepikatuen oreka moduan mantentzeko balio dutela ikusiko dugu ondoren.

Lehenik, kontuan hartu infinituki errepikatutako jokoan azpiataletako oreka perfektu bat dugula, non jokalari bakoitzak denboraldi bakoitzean epe laburreko Nashen orekaren estrategia erabiltzen duen. Cournoten ereduan, jokalari bakoitzak denboraldi bakoitzean Cournoten kantitatea ekoiztean datza, jokoaren igarotako historiari kasurik egin gabe. Bertranden ereduan, jokalari bakoitzak denboraldi bakoitzean kostu marjinalaren berdina den prezioa jartzean datza, jokoaren igarotako historiari kasurik egin gabe.

Orain ikusiko dugu ea, aurreko orekaz gain, jokalariek kooperatzen duten azpiataletako oreka perfekturik ba al dagoen. Kontsidera dezagun ondorengo estrategien konbinaketa epe luzera: $s_i^c \equiv \{s_{it}^c(H_{t-1})\}_{t=1}^{\infty}, \quad i = 1, 2,$

non,

$$s_{it}^c(H_{t-1}) = \begin{cases} \overbrace{\text{"kooperatu"}}^{kolusioa} & H_{t-1}\text{-eko elementu guztiak ("kooperatu","kooperatu") badira edo } t = 1 \\ \text{"ez kooperatu" (Nashen orekaren estrategia epe laburrera)} & \text{aurkako kasuan} \end{cases}$$

Cournoten:

$$s_{it}^c(H_{t-1}) = \begin{cases} x_i^m & H_{t-1}\text{-eko elementu guztiak } (x_i^m, x_{-i}^m) \text{ badira edo } t = 1 \\ x_i^* & \text{aurkako kasuan} \end{cases}$$

Bertranden:

$$s_{it}^c(H_{t-1}) = \begin{cases} p^m & H_{t-1}\text{-eko elementu guztiak } (p^m, p^m) \text{ badira edo } t = 1 \\ c & \text{aurkako kasuan} \end{cases}$$

Ohartu epe luzeko estrategia hauek “zigor mehatxu inplizituak” dituztela kooperazio akordioa (inplizitua) hausten den kasurako. Mehatxuak, sinesgarria izan dadin, Nashen oreka izan behar du.

Testuinguru honetan kooperazioa oreka moduan mantendu al daitekeen ikusteko, jokalariek desbideratzeko pizgarririk ez dutela frogatu behar dugu; hau da, (s_1^c, s_2^c) estrategien konbinaketak joko errepikatuen Nashen oreka osatzen duela.

Notazioa

$\Pi_i^m \rightarrow$ jokoaren epealdi bakoitzean *i* enpresaren kolusiopeko mozkina.

$\Pi_i^* \rightarrow$ jokoaren epealdi bakoitzean *i* enpresaren epe laburreko soluzioko mozkina.

$\overline{\Pi}_i \rightarrow$ *i* enpresaren mozkina, gainontzekoek kooperatzen badute eta bera desbideratzen bada.

$$\overline{\Pi}_i > \Pi_i^m > \Pi_i^*$$

i jokalariak kooperatzeagatik dituen irabaziaen egungo balio deskontatuta ondorengo hau da:

$$\pi_i(s_i^c, s_j^c) = \Pi_i^m + \delta\Pi_i^m + \delta^2\Pi_i^m + ... = \Pi_i^m(1 + \delta + \delta^2 + ...) = \frac{\Pi_i^m}{1-\delta}$$

i jokalaria lehenengo denboraldian desbideratzen bada, bere irabaziak honakoak izango ziren:

$$\pi_i(\overline{s}_i, s_j^c) = \overline{\Pi}_i + \delta\Pi_i^* + \delta^2\Pi_i^* + ... = \overline{\Pi}_i + \delta(1 + \delta + \delta^2 + ...)\Pi_i^* = \overline{\Pi}_i + \delta\frac{\Pi_i^*}{1-\delta}$$

Kooperazioa Nashen oreka izango da jokalari batek ere ez badauka desbideratzeko pizgarririk; hau da, baldin eta $\pi_i(s_i^c, s_j^c) \geq \pi_i(\overline{s}_i, s_j^c)$ bada. Erraz egiaztatzen da $\delta \geq \overline{\delta}$ bada, jokalari batek ere ez daukala kolusio akordioa hausteko pizgarririk, non $\overline{\delta} = \dfrac{\overline{\Pi}_i - \Pi_i^m}{\overline{\Pi}_i - \Pi_i^*}$.

Oinarrizko Bibliografia

Varian, H. R., 1992, *Análisis Microeconómico*, tercera edición, Barcelona: Antoni Bosch editor. Cap. 13, secciones 13.6, 13.7, 13.9 y 13.10. Cap. 14, secciones: introducción, 14.1, 14.2, 14.3, 14.5, 14.6, 14.7 y 14.8. Cap. 16, secciones: 16.1, 16.3, 16.4, 16.5, 16.6, 16.10 y 16.11.

Bibliografia Osagarria

Kreps, D. M., 1994, *Curso de Teoría Microeconómica*, McGraw-Hill.

Tirole, J., 1990, *La Teoría de la Organización Industrial*, Ariel Economía.

Varian, H. R., 1998, *Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Moderno*, cuarta edición, Barcelona: Antoni Bosch editor.