

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

para Estudiantes
de Física

Juan M. Aguirregabiria

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

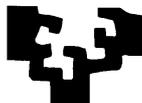
ARGITALPEN
ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
para Estudiantes de Física

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Estudiantes de Física

Juan M. Aguirregabiria

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco	Euskal Herriko Unibertsitatea
servicio editorial	argitalpen zerbitzua

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de la cubierta, puede ser reproducida, almacenada o transmitida en manera alguna ni por ningún medio, ya sea eléctrico, químico, mecánico, óptico, de grabación o de fotocopiado, sin permiso previo y por escrito de la entidad editora, sus autores o representantes legales.

© 1997-2000 Juan M. Aguirregabiria

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco

I.S.B.N.: 84-7585-452-4

Depósito Legal: BI-2289-00

Montaje e impresión:

Servicio Editorial de la UPV/EHU

A LEIRE Y AITOR

Prólogo

Hell is paved with good intentions.

James Boswell

Este texto está pensado para ser utilizado por alumnos de física que abordan por primera vez el estudio sistemático de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Tras enseñar durante muchos años esta materia en la asignatura de *Métodos Matemáticos II* de la licenciatura de Física en la Universidad del País Vasco, me fui convenciendo poco a poco de que entre los muchos y excelentes textos que había a nuestra disposición ninguno se adecuaba con precisión al enfoque eminentemente práctico que quería imprimir a la asignatura, de forma que la exposición teórica por parte del profesor se redujera al máximo, en favor del tiempo dedicado a que los alumnos resolvieran problemas. Me atreví, por ello (y para intentar erosionar la costumbre de la gran mayoría de estudiantes de convertir la asistencia a clase en un mero ejercicio de copiado al dictado), a escribir unos apuntes que, tras ser utilizados con distintos grupos y sufrir numerosas adiciones y correcciones, se han convertido en este texto, que podría resultar útil para cualquier estudiante de física (y, probablemente, también para los de matemáticas e ingeniería, a quienes ofrecería un punto de vista distinto) con conocimientos de álgebra lineal y cálculo diferencial. Espero que la osadía de añadir otro texto a la larga lista de los ya existentes sea disculpada, y que puedan reconocerse aportaciones originales en algunos problemas y en el enfoque de varios apartados, ya que, por razones obvias, no las hay en resultados fundamentales.

Teniendo en cuenta el objetivo primordial de que el alumno desarrolle su capacidad de cálculo, no debe extrañar que, de acuerdo con una tradición bien establecida en textos para físicos, la exposición teórica prescindiera en ocasiones de demostraciones formales y puntos de rigor, ni que esté salpicada de ejercicios que el alumno debe ir resolviendo mientras se comenta brevemente el resto de la teoría. (Para evitar lagunas en el texto, se recogen en el apéndice G los resultados de los ejercicios que no se incluyen en el propio enunciado). Al final de cada capítulo hay una lista de problemas: así el lector tendrá la oportunidad de comprobar lo que ha aprendido. Algunos problemas son aplicación directa de lo visto en teoría, pero en otros muchos se estudian cosas nuevas: complementos de la teoría, demostraciones que quedaron sin hacer, anticipos de lo que se verá en temas ulteriores, etc. A menudo, el estudiante concienzudo encontrará en los problemas un contenido más interesante del que pudiera creer a primera vista, y se le recomienda que intente hacerlos todos, ya que me he esforzado en elegirlos con cuidado. Los últimos de cada lista han aparecido en exámenes en los últimos años. (No se han incluido las soluciones de los problemas, para ayudar al alumno a superar la tentación de ahorrarse trabajo personal). Debe insistirse, especialmente en los exámenes, en que los cálculos han de llevarse, en lo posible, hasta el final, de forma que las integrales sean resueltas, las series sumadas, etc.

Hay una pregunta importante que todo autor actual de un manual de estas características debe

plantearse y responder: ¿qué hay que hacer con los potentes sistemas de cálculo simbólico y numérico que cada día nos resultan más accesibles? En modo alguno creo que puedan ignorarse y seguir enseñando y estudiando la asignatura como hace treinta años, o limitarse a añadir al final de la lista de problemas de cada capítulo algunos para ser resueltos, numéricamente o simbólicamente, por medio del ordenador, como si éste fuera un vecino fastidioso pero inevitable al que, por cortesía, hay que conceder un mínimo de atención.

Consideremos, por ejemplo, el caso de las ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes: su resolución a mano, cuando es posible, no tiene dificultades de principio, pero resulta a menudo fatigosa y propensa a errores, mientras que los sistemas de álgebra por ordenador proporcionan la solución correcta de forma eficaz (aunque a menudo haga falta cierta ayuda por parte del usuario para conseguir la expresión más sencilla). Por ello, el numeroso espacio que a menudo se les dedica, incluso en los más recientes textos, donde cada caso particular posible es estudiado en gran detalle, me parece fuera de lugar. No quiero decir con esto que deberían eliminarse por completo de los textos actuales los métodos de resolución de estas ecuaciones. Y no porque no esté de más saber cómo podrían resolverse a mano, sino, sobre todo, porque las ideas fundamentales del método de Euler son imprescindibles para entender la estabilidad lineal. Lo que creo más conveniente, y así he intentado plasmarlo en el texto, es explicar las ideas básicas y resumir los métodos de resolución rápidamente para que el alumno los aplique una vez, aunque use un sistema de cálculo simbólico para los cálculos intermedios. Hay, sin embargo, que dejarle bien claro que, excepto en los casos más triviales —es tan ridículo usar un sistema de cálculo algebraico para resolver el oscilador armónico como valerse de una calculadora para sumar $2+2$ —, en la práctica resultará más eficaz y seguro usar álgebra por ordenador para resolver directamente ese tipo de problemas. Algo parecido podría decirse de otras muchas familias de ecuaciones con método de resolución bien conocido: probablemente no sea inútil verlas rápidamente una vez, porque algunas ideas y técnicas (como la búsqueda de cambios de variables apropiados y el uso de las simetrías) pueden resultar de gran interés en otros muchos casos en los que los sistemas de cálculo algebraico son de escasa ayuda; pero no parece razonable que en un examen la única dificultad consista en identificar la receta que hay que aplicar a una ecuación.

Tampoco creo que el enfoque adoptado en muchos de los libros titulados «Ecuaciones Diferenciales con . . .» sea el más adecuado. Aquí pretendemos enseñar al alumno ecuaciones diferenciales, no a valerse de un programita (tan fácil de usar como inútil una vez que cambiemos de apartado) que, por ejemplo, nos fuera pidiendo los coeficientes de una ecuación lineal para evitarnos el trabajo escasamente superior de aprender la sintaxis que permite pedir la solución de cualquier tipo de ecuación.

En resumen, deberíamos aceptar el cálculo simbólico como una herramienta imprescindible en el uso cotidiano de las matemáticas. El alumno debería tener a su disposición uno de estos sistemas tanto en clase como en los exámenes, lo que evitaría perder el tiempo en largos cálculos triviales para invertirlo en aprender cosas más interesantes. Quiero resaltar, sin embargo, que hay que enseñarle a manejar correctamente el álgebra por ordenador, porque puede inducir a errores más fácilmente de lo que pueda parecer¹. Afortunadamente, en esta asignatura esa tarea se ve facilitada por el hecho de que el resultado, una vez hallado, puede muchas veces comprobarse fácilmente mediante un cálculo directo, que puede hacerse con el mismo programa usado para encontrarlo. (El alumno debería aprender la conveniencia de realizar siempre esta comprobación final, que suele ser mucho más corta que el cálculo inicial que condujo al resultado). Incluso cuando esta comprobación directa no es posible, puede recurrirse a menudo al mismo sistema

¹Véase, por ejemplo, el artículo [40].

para hallar la solución numérica del problema en casos particulares y compararla con la obtenida por métodos exactos, lo que permite a menudo descubrir errores en el cálculo original o aumentar nuestra confianza en él, aunque, en rigor, nunca constituya una prueba de su exactitud.

No quiero decir que los métodos numéricos deban reducirse a este papel auxiliar del cálculo exacto; por el contrario, constituyen el método de resolución más importante en la práctica cotidiana de la ciencia y la tecnología actuales. Merecen, por esa razón y porque tampoco su uso es trivial, un estudio detallado, que es más propio de una asignatura de cálculo numérico que de una como la que este texto pretende cubrir, donde tan solo se hará una introducción a los que son directamente aplicables a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Afortunadamente, al igual que no hace falta conocer el algoritmo de Risch para resolver una integral mediante cálculo simbólico, no es necesario un conocimiento profundo de cálculo numérico para usar uno de los programas integrados que permiten hallar fácilmente, sin necesidad de programación de ningún tipo, la solución numérica de ecuaciones y sistemas diferenciales. Deberíamos estimular a nuestros alumnos a usar un programa de ese tipo para comprobar los dibujos que aparecen en los textos, así como para dibujar espacios de fases y compararlos con las conclusiones cualitativas obtenidas por los métodos analizados en el capítulo 8.

He hecho una elección consciente que quisiera comentar con cierto detalle: se utiliza en el texto la notación matemática anglosajona, ya que un estándar para las expresiones matemáticas, aunque no derive de un consenso explícito, parece altamente conveniente. Por ello, se escribe ‘0,1’ en vez de ‘0, 1’ o ‘0’1’², ‘sin x ’ en vez de ‘sen x ’, ‘tan x ’ en vez de ‘tg x ’, ‘erf(x)’ en vez de ‘fer(x)’, etc. La razón principal de esta discutible decisión es iniciar al alumno en la notación que va a encontrar en prácticamente todos los artículos y libros profesionales. Mucho me temo (?) que, al igual que pasa ya de hecho con la lengua científica, la potencia creadora y la gran influencia del mundo anglosajón la hayan convertido en la notación universal. (Basta fijarse en las teclas de cualquier calculadora, e, incluso, en lo incómodo que ahora nos resultan los escasísimos programas ‘localizados’ que utilizan la coma como separador decimal). Cuando se usan dos notaciones, he elegido la que creo más precisa, aunque no sea la más corriente: el logaritmo neperiano se escribe como ‘ln x ’ (en vez de ‘log x ’) y he preferido ‘arcsinh x ’ a ‘sinh⁻¹ x ’ (y a ‘arg sh x ’ o ‘arc sh x ’, claro).

La inexcusable lista de agradecimientos está encabezada por los excelentes textos que he podido manejar a lo largo de los años y que, al menos en cierta medida, se indican en la bibliografía. La presentación de muchos puntos se ha beneficiado de forma importante de conversaciones con Manu Valle, con quien he compartido muchas veces la responsabilidad de esta asignatura y a quien también debo un cierto número de correcciones de erratas en los apuntes que precedieron a este texto. También quiero agradecer la ayuda prestada por mi compañero Martín Rivas en la realización de las figuras 8.33 y 8.34. El resto de las precisiones de rigor —que los errores remanentes solo pueden achacarse a mi ignorancia o desidia, que todos los elementos gramaticales con formas personales masculinas y femeninas diferentes deben ser entendidos en ambos géneros, etc.— se dan por sobreentendidas, y espero que serán comprendidas y aceptadas por el sabio lector.

Leioa, junio de 1997–febrero de 2000

²La edición de 1999 de la *Ortografía* de la Real Academia Española dice, en el apartado 5.13.1.b): *Es aceptable, de acuerdo con la normativa internacional, el uso del punto para separar la parte entera de la parte decimal en las expresiones numéricas escritas con cifras.*

Índice general

Prólogo	v
Índice de figuras	xv
Índice de apuntes biográficos	xix
1. Conceptos fundamentales	1
1.1. Ecuaciones diferenciales	1
1.2. Tipos de soluciones	3
1.3. Existencia de soluciones	5
1.4. Unicidad de la solución	6
1.5. Métodos de resolución	7
1.6. Problemas	10
2. Ecuaciones de primer orden	13
2.1. Significado geométrico	13
2.1.1. Familias uniparamétricas de curvas	13
2.1.2. Congruencias de curvas	14
2.2. Teorema de existencia y unicidad	16
2.3. Ecuaciones exactas	17
2.4. Factores integrantes	20
2.5. Ecuaciones separables	21
2.6. Factores integrantes especiales	22
2.6.1. Factores integrantes que no dependen de y	22
2.6.2. Factores integrantes que no dependen de x	23
2.6.3. Factores integrantes del tipo $\mu(x, y) = g(h(x, y))$	23
2.7. Ecuaciones lineales	24
2.8. Métodos de transformación	25
2.9. Ecuaciones homogéneas	25
2.10. Ecuaciones del tipo $y' = f(ax + by + c)$	26
2.11. Ecuaciones del tipo $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$	26
2.12. Ecuaciones de Bernoulli	27
2.13. Ecuaciones de Riccati	27
2.14. Envoltentes y soluciones singulares	28
2.15. Ecuaciones no resueltas en la derivada	29
2.15.1. Ecuaciones de la forma $F(y') = 0$	31
2.15.2. Ecuaciones de la forma $x = g(y')$	32

2.15.3. Ecuaciones de la forma $y = g(y')$	32
2.15.4. Ecuaciones de Clairaut	32
2.15.5. Ecuaciones de Lagrange	33
2.15.6. Método de derivación	34
2.16. Problemas	35
3. Ecuaciones de orden superior	39
3.1. Significado geométrico	39
3.2. Teorema de existencia y unicidad	40
3.3. Equivalencia entre ecuaciones y sistemas	40
3.4. Reducción de orden	40
3.4.1. Ecuaciones sin la variable dependiente	41
3.4.2. Ecuaciones autónomas	41
3.4.3. Ecuaciones equidimensionales en x	42
3.4.4. Ecuaciones equidimensionales en y	43
3.4.5. Ecuaciones exactas	44
3.5. Dependencia lineal de funciones	45
3.6. Ecuaciones diferenciales lineales	46
3.7. Ecuaciones lineales homogéneas	47
3.7.1. Wronskiano y dependencia lineal	47
3.7.2. Espacio de soluciones de la ecuación homogénea	48
3.7.3. Sistema fundamental de soluciones y ecuación lineal homogénea	49
3.7.4. Fórmula de Liouville	50
3.7.5. Resolución de la ecuación homogénea	51
3.8. Ecuaciones lineales completas	53
3.8.1. Método de variación de constantes	54
3.8.2. Método de Cauchy	56
3.9. Funciones generalizadas	57
3.9.1. Función escalón unidad de Heaviside	57
3.9.2. Derivada generalizada	58
3.9.3. Delta de Dirac	59
3.9.4. Límite generalizado	59
3.9.5. Sucesiones que convergen a la delta de Dirac	61
3.9.6. Solución elemental	61
3.10. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes	63
3.11. Ecuaciones completas con coeficientes constantes	65
3.11.1. Método de coeficientes indeterminados	66
3.11.2. Método del operador inverso	68
3.12. Ecuaciones de Cauchy-Euler	71
3.13. Problemas	72
4. Sistemas de ecuaciones	77
4.1. Definición y propiedades generales	77
4.1.1. Sistemas dinámicos autónomos	79
4.2. Métodos de resolución	80
4.2.1. Reducción a una ecuación	81
4.2.2. Integrales primeras	81

4.3.	Sistemas lineales de primer orden	83
4.4.	Sistemas lineales homogéneos	85
4.4.1.	Espacio de soluciones	86
4.4.2.	Matrices fundamentales	86
4.5.	Sistemas lineales completos	88
4.6.	Sistemas lineales con coeficientes constantes	89
4.6.1.	Exponencial de una matriz	90
4.6.2.	Resolución del sistema homogéneo	91
4.6.3.	Resolución del sistema completo	94
4.7.	Problemas	96
5.	Transformación de Laplace	101
5.1.	Definición	102
5.1.1.	Espacio $F(\alpha)$	102
5.1.2.	Existencia y propiedades asintóticas	103
5.2.	Propiedades	104
5.2.1.	Linealidad	104
5.2.2.	Teorema del desplazamiento	104
5.2.3.	Cambio de escala	105
5.2.4.	Derivadas y productos por potencias	105
5.3.	La transformación inversa	106
5.4.	La convolución	107
5.5.	Transformación de funciones generalizadas	108
5.6.	Ecuaciones lineales con coeficientes constantes	109
5.6.1.	Una ecuación de orden arbitrario	110
5.6.2.	Sistemas de ecuaciones	110
5.6.3.	Osciladores	110
5.6.4.	Funciones continuas por trozos	111
5.7.	Problemas	113
6.	Solución por series de ecuaciones lineales	119
6.1.	Repaso de series de potencias	119
6.2.	Soluciones en forma de series	121
6.2.1.	Puntos ordinarios y singulares	121
6.3.	Puntos ordinarios	122
6.3.1.	Ecuación de Hermite	123
6.4.	Ecuación de Bessel	126
6.5.	Método de Frobenius	130
6.5.1.	Demostración del teorema	132
6.5.2.	Observaciones	134
6.5.3.	Un ejemplo con índice doble	134
6.5.4.	Un ejemplo con término logarítmico	136
6.5.5.	Un ejemplo sin término logarítmico	137
6.5.6.	Suma de las series	138
6.6.	Problemas	140

7. Métodos aproximados	143
7.1. Símbolo de orden de magnitud	144
7.2. Series de potencias	144
7.2.1. Método de la serie de Taylor	145
7.2.2. Método de coeficientes indeterminados	146
7.3. Método de Picard de aproximaciones sucesivas	146
7.4. Métodos perturbativos	148
7.4.1. Perturbación regular	148
7.4.2. El oscilador de van der Pol	148
7.4.3. El método WKB	152
7.5. Métodos numéricos	153
7.5.1. Método de Euler	154
7.5.2. Método de Heun	155
7.5.3. Método del punto medio	156
7.6. Métodos de Runge-Kutta	157
7.7. Métodos de varios pasos	158
7.8. Métodos de extrapolación	160
7.9. Métodos implícitos	161
7.10. Problemas	163
8. Teoría de la estabilidad	167
8.1. Concepto de estabilidad	168
8.2. Sistemas dinámicos autónomos bidimensionales	170
8.3. Sistemas dinámicos conservativos	173
8.4. Sistemas cuasilineales	174
8.5. Estabilidad lineal	176
8.5.1. Raíces características reales distintas	176
8.5.2. Raíces características complejas	179
8.5.3. Raíces características reales iguales	181
8.5.4. Resumen: Clasificación de los puntos fijos	183
8.6. Trayectorias de fases	184
8.7. Sistemas mecánicos unidimensionales	186
8.8. Funciones de Liapunov	191
8.8.1. Observaciones	192
8.8.2. Demostración del teorema	193
8.8.3. Ejemplos	194
8.8.4. Sistemas mecánicos unidimensionales disipativos	195
8.8.5. Sistemas mecánicos unidimensionales conservativos	195
8.9. Centros no lineales	196
8.9.1. Sistemas dinámicos conservativos	197
8.9.2. Sistemas dinámicos hamiltonianos	197
8.9.3. Sistemas dinámicos reversibles	198
8.10. Ciclos límite	199
8.11. Más dimensiones...	202
8.12. ... y caos determinista	204
8.12.1. Dependencia sensible de las condiciones iniciales	205
8.12.2. Exponente de Liapunov	206

8.12.3. Transformación del panadero	206
8.12.4. Atractores extraños	207
8.13. Problemas	211
9. Problemas de contorno de Sturm-Liouville	219
9.1. Producto escalar de funciones	220
9.2. Ecuación adjunta	222
9.3. Problemas de Sturm-Liouville	223
9.4. Series de Fourier	227
9.5. Problema inhomogéneo de Sturm-Liouville	228
9.6. Función de Green	229
9.7. Problemas	233
 Apéndices	
A. Teoremas fundamentales	239
A.1. El teorema de Picard	239
A.1.1. Existencia de la solución	240
A.1.2. Unicidad de la solución	241
A.1.3. Dependencia continua de las condiciones iniciales	242
A.2. Comparación de soluciones	242
A.3. Existencia global de la solución	243
 B. Métodos simbólicos	245
B.1. Métodos exactos	245
B.2. Transformaciones de Laplace y Fourier	251
B.3. Métodos aproximados analíticos	254
B.3.1. Método de la serie de Taylor	254
B.3.2. Método de Picard	255
B.3.3. Métodos perturbativos	256
B.3.4. Métodos numéricos	259
B.4. Otros cálculos	261
B.4.1. Ecuaciones algebraicas	261
B.4.2. Exponencial de matrices	262
B.4.3. Valores y vectores propios	262
B.4.4. Funciones especiales	263
B.4.5. Suma de series y resolución de integrales	263
B.4.6. Desarrollos en serie	264
B.4.7. Series de Fourier	265
B.4.8. Ecuaciones en diferencias finitas	267
 C. Resumen de métodos analíticos exactos	269
C.1. Ecuaciones de primer orden resueltas en la derivada	270
C.2. Ecuaciones de primer orden no resueltas en la derivada	271
C.3. Ecuaciones lineales de orden superior al primero	272
C.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas	273
C.3.2. Ecuaciones lineales completas	274
C.4. Ecuaciones no lineales de orden superior al primero	275

C.5. Sistemas de ecuaciones lineales	276
C.5.1. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas	276
C.5.2. Sistemas completos de ecuaciones lineales	277
C.6. Sistemas de ecuaciones no lineales	277
D. Definición y propiedades de algunas funciones	279
D.1. Números complejos	279
D.2. Valor principal de Cauchy	281
D.3. Función de Lambert	282
D.4. Función error	283
D.5. Función gamma de Euler	284
D.6. Función subfactorial	286
D.7. Integral exponencial	286
D.8. Integrales elípticas	287
D.9. Funciones de Bessel	289
D.10. Función hipergeométrica confluyente de Kummer	290
D.11. Función hipergeométrica de Gauss	291
D.12. Polinomios ortogonales	292
D.12.1. Polinomios de Chébichev	293
D.12.2. Polinomios de Hermite	294
D.12.3. Polinomios generalizados de Laguerre	295
D.12.4. Polinomios de Legendre	296
E. Tablas de transformadas de Laplace	297
E.1. Propiedades de la transformación de Laplace	298
E.2. Valores en los límites	299
E.3. Transformadas de funciones elementales	300
E.4. Transformadas de funciones especiales	301
F. Tablas de transformadas de Fourier	303
F.1. Propiedades de la transformación de Fourier	304
F.2. Transformadas de Fourier	305
G. Soluciones y sugerencias para algunos ejercicios	307
Bibliografía	321
Índice alfabético	325

Índice de figuras

2.1.	Congruencia de curvas, derivada y pendiente de la tangente.	15
2.2.	Congruencia y campo de direcciones.	16
2.3.	Circunferencias tangentes al eje de abscisas.	16
2.4.	Envolvente y puntos múltiples de un haz de curvas.	28
2.5.	Órbitas elípticas, pericentros y apocentros.	30
3.1.	Función escalón unidad de Heaviside.	58
3.2.	Familia de gaussianas.	60
3.3.	Descomposición de $f(t)$ en impulsos.	62
3.4.	Una función continua por trozos.	75
4.1.	La congruencia de un sistema autónomo y su proyección en el espacio de fases.	79
4.2.	Una solución de (4.21) y su proyección sobre el plano de fases.	80
4.3.	Circuito RLC.	97
5.1.	Dominios de integración	108
6.1.	Algunas funciones de Bessel J_n de orden entero.	128
6.2.	Algunas funciones de Bessel Y_n de orden entero.	129
7.1.	Aproximación con términos seculares.	149
7.2.	Aproximación sin términos seculares.	151
7.3.	Método de Euler.	154
7.4.	Método de Euler para cuadratura numérica.	155
7.5.	Método de Heun.	155
7.6.	Método de los trapecios.	156
7.7.	Método del punto medio.	156
7.8.	Método del punto medio en cuadratura numérica.	157
8.1.	Punto de equilibrio (a) estable, (b) asintóticamente estable, (c) inestable.	169
8.2.	Diagrama de bifurcación de $\dot{x} = ax$	169
8.3.	Solución general del sistema autónomo y su proyección sobre el espacio de fases.	170
8.4.	Una solución de (8.9) y su proyección sobre el espacio de fases.	171
8.5.	Evolución de un dominio del espacio de fases.	173
8.6.	Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 1$, $r = -5/2$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$	177
8.7.	Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 1$, $r = 5/2$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$	178
8.8.	Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = r = -1$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$	178
8.9.	Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 3$, $r = -1$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$	180
8.10.	Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 1$, $r = 0$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$	180

8.11. Espacio de fases de (8.57)–(8.58) con (a) $n = 2$, (b) $n = 3$	181
8.12. Espacio de fases de (8.61)–(8.62) con (a) $\epsilon = 0$ y (b) $\epsilon = 1$	182
8.13. Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 1$, $r = -2$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$	183
8.14. Clasificación de los puntos fijos.	183
8.15. Hoja de Descartes y espacio de fases del sistema (8.69).	185
8.16. Energía potencial y espacio de fases del sistema (8.78) para $\gamma = 0,1$	187
8.17. Diagrama de energía en las proximidades de un mínimo.	188
8.18. Energía potencial y espacio de fases del sistema (8.78) para $\gamma = 0$	189
8.19. Variedades estable e inestable del punto cúspide.	190
8.20. Energía potencial y espacio de fases del péndulo.	190
8.21. Trayectorias de fases y evolución de los correspondientes valores de U	193
8.22. Espacio de fases del sistema (8.94).	195
8.23. Espacio de fases del sistema (8.104).	197
8.24. Una trayectoria de fases de (8.107) y su «gemela».	198
8.25. Espacio de fases de (8.108)–(8.109) para $\lambda = -0,01$	199
8.26. Diagrama de bifurcación de la ecuación (8.110).	200
8.27. Espacio de fases de (8.108)–(8.109) para $\lambda = 1/2$	200
8.28. El ciclo límite del oscilador de van der Pol para $\epsilon = 2$	202
8.29. Proyecciones y sección de Poincaré del sistema (8.114)–(8.116).	203
8.30. Proyecciones de una órbita del atractor de Lorenz.	204
8.31. Evolución de dos soluciones inicialmente muy próximas.	205
8.32. Proyecciones de una órbita del atractor de Rössler.	207
8.33. La transformación del panadero.	207
8.34. Estructura de conjunto de Cantor del atractor de Rössler.	208
8.35. Secciones estroboscópicas del atractor de Duffing.	208
8.36. Sección estroboscópica del atractor de Duffing para $t \bmod 2\pi = 0$	209
8.37. Ampliaciones de la sección estroboscópica del atractor de Duffing.	209
8.38. Construcción del conjunto ternario de Cantor.	214
8.39. Cuenta ensartada en alambre liso.	214
8.40. Espacio de fases cerca de un puerto.	215
8.41. Sistema del problema 8.40.	217
8.42. Gráfica de la función $f(y)$ del problema 8.42.	217
9.1. La función $f(x) = \theta(x) \sin x$ en $(-\pi, \pi)$	227
9.2. Función sierra.	234
D.1. Formas cartesiana y polar de un número complejo.	280
D.2. La rama principal de la función de Lambert en la recta real.	282
D.3. Las funciones de error.	284
D.4. La función gamma de Euler en el eje real.	285
D.5. Integral exponencial.	286
D.6. Integrales seno y coseno.	287
D.7. Integrales elípticas completas.	288
D.8. Algunas funciones de Bessel de orden entero.	290
G.1. Las funciones φ_0 y φ_2	309
G.2. Espacio de fases del ejercicio 4.4.	311
G.3. La fuerza y la solución del ejercicio 5.23.	312

G.4. Diagrama de bifurcación de la ecuación (8.4).	314
G.5. Espacio de fases del oscilador armónico.	314
G.6. Espacio de fases del sistema (8.70).	315
G.7. Serie de Fourier de la función de la figura 9.2: se han usado 64 términos.	318

Índice de apuntes biográficos

Abel, Niels Henrik	50
Abraham, Max	38
Adams, John Couch	159
Bernoulli, Jacob	27
Bertrand, Joseph Louis Francois	215
Bessel, Friedrich Wilhelm	126
Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp	205
Cardano, Girolamo	143
Cauchy, Augustin Louis	56
Cayley, Arthur	91
Chébichev, Pafnuty Lvovich	140
Clairaut, Alexis Claude	32
D'Alembert, Jean Le Rond	51
De Moivre, Abraham	280
Descartes, René	185
Dirac, Paul Adrien Maurice	59
Einstein, Albert	3
Euler, Leonhard	64
Ferrari, Ludovico	143
Fibonacci, Leonardo Pisano	75
Fourier, Jean Baptiste Joseph	226
Fredholm, Erik Ivar	229
Frobenius, Ferdinand Georg	121
Gauss, Johann Carl Friedrich	139
Green, George	222
Gibbs, Josiah Willard	234
Hamilton, William Rowan	172
Heaviside, Oliver	57
Hermite, Charles	124
Hilbert, David	221
Hopf, Heinz	199
Jacobi, Karl Gustav Jacob	108
Kepler, Johannes	164
Kronecker, Leopold	221
Kummer, Ernst Eduard	142
Kutta, Martin Wilhelm	157
Lagrange, Joseph-Louis	33

Laguerre, Edmond Nicolas	141
Landau, Lev Davidovich	204
Laplace, Pierre-Simon	102
Lebesgue, Henri Léon	58
Legendre, Adrien-Marie	140
Lerch, Mathias	106
Leibniz, Gottfried Wilhelm von	88
L'Hôpital, Guillaume Francois Antoine Marqués de	163
Liapunov, Aleksandr Mikhailovich	168
Liouville, Joseph	53
Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund	239
Lissajous, Jules Antoine	315
Lorentz, Hendrik Antoon	38
Maxwell, James Clerk	3
Newton, Isaac	2
Ostrogradski, Mikhail Vasilevich	50
Parseval des Chênes, Marc-Antoine	234
Peano, Giuseppe	7
Picard, Charles Émile	146
Poincaré, Jules Henri	167
Poisson, Siméon Denis	235
Riccati, Jocopo Francesco	27
Richardson, Lewis Fry	160
Riemann, Georg Friedrich Bernhard	58
Rodrigues, Olinde	125
Runge, Carle David Tolmé	157
Schrödinger, Erwin	2
Schwarzschild, Karl	217
Simpson, Thomas	158
Stirling, James	284
Sturm, Jacques Charles Francois	224
Taylor, Brook	145
Torricelli, Evangelista	11
Vandermonde, Alexandre Théophile	310
Verhulst, Pierre Francois	211
Volterra, Vito	114
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm	234
Wronski, Josef Hoëné de	45

Capítulo 1

Conceptos fundamentales

*How can it be that mathematics,
being after all a product of human thought independent of experience,
is so admirably adapted to the objects of reality?*
Albert Einstein

En este primer capítulo se discuten algunas generalidades sobre ecuaciones diferenciales que irán siendo analizadas con mayor detalle en los siguientes capítulos. Comenzaremos introduciendo el concepto de ecuación diferencial y una primera clasificación de los tipos a que puede pertenecer. Luego analizaremos las distintas formas en que aparecen sus soluciones y haremos las primeras observaciones sobre la existencia y unicidad de la solución en las dos principales familias de problemas que aparecen en física. Acabaremos el capítulo clasificando los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

1.1. Ecuaciones diferenciales

En una ecuación ordinaria —que por oposición a las diferenciales será llamada en este texto **finita**— como

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1.1}$$

no aparecen las derivadas de la incógnita. Cuando aparezca alguna de esas derivadas, diremos que se trata de una **ecuación diferencial**. Un ejemplo sencillo es

$$x + yy' = 0, \tag{1.2}$$

donde, como haremos a partir de ahora siguiendo una extendida costumbre, hemos usado una prima para indicar la derivada con respecto a x :

$$y' \equiv \frac{dy}{dx}. \tag{1.3}$$

Puesto que tomamos derivadas con respecto a x , decimos que x es la **variable independiente**, mientras que la incógnita (y en este caso) recibe el nombre de **variable dependiente**. Ya que en (1.2) solo hay una variable independiente y la derivada es ordinaria, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**, como lo es también la ecuación del péndulo matemático:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \tag{1.4}$$

En esta última expresión hemos seguido la costumbre de la mecánica de que cada punto indica una derivada con respecto t , que es la variable independiente de la ecuación (1.4):

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}. \quad (1.5)$$

A partir de este momento utilizaremos indistintamente las abreviaturas (1.3) y (1.5), alternándolas con el uso ocasional de la notación completa para la derivada. También serán abundantes los ejemplos tomados de la física, lo que no debería sorprendernos si tenemos en cuenta, además del tipo de público a que está destinado este texto, que la historia y las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales están inextricablemente unidas a la física: baste recordar las contribuciones del propio Newton¹ o el papel central que las ecuaciones diferenciales juegan entre los útiles matemáticos del físico.

También es ordinaria la ecuación de Newton para el movimiento relativo en un sistema de dos cuerpos si la interacción mutua viene dada por un campo de fuerzas newtoniano:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Puesto que en este último caso cada vector tiene tres componentes, nos hallamos en realidad en presencia de un **sistema de ecuaciones diferenciales**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1.9)$$

donde las variables dependientes son tres: x, y, z .

Si la ecuación contiene derivadas parciales, se llama **ecuación diferencial en derivadas parciales**. Por ejemplo, en la ecuación de Schrödinger²

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + V(\mathbf{r})\psi \quad (1.10)$$

las variables independientes de las que depende la función de onda ψ son el tiempo t y las tres coordenadas espaciales que aparecen tanto en el vector \mathbf{r} como en forma de variables de derivación en el operador laplaciano ∇^2 .



¹ **Isaac Newton** nació el día de Navidad de 1642 (4 de enero de 1643 en el calendario gregoriano) en Woolsthorpe (Inglaterra) y murió el 31 de marzo de 1727 en Londres. Su magna obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) es considerada sin discusión el libro científico más importante e influyente de todos los tiempos. En él sentó las bases de la mecánica y la teoría de la gravitación universal. Fue el creador, al tiempo que Leibniz, del cálculo diferencial, que él llamó de **fluxiones**.

Su contribución a la óptica es también de excepcional importancia e incluye el telescopio reflector y su influyente *Opticks* (1704). Su nombre aparece en muchos otros contextos, incluyendo la cuadratura numérica, el desarrollo de las potencias del binomio y la regla de Barrow, a quien sucediera como *Lucasian Professor* en Cambridge.



² **Erwin Schrödinger** (12-08-1887, Viena; 4-01-1961, Alpbach, Austria). En 1926 su mecánica ondulatoria supuso, junto a la mecánica matricial que Heisenberg había propuesto en 1925, el nacimiento de la mecánica cuántica, aunque nunca aceptó la interpretación probabilística de la función de onda sostenida por Born y la escuela de Copenhague. También trabajó en radiactividad, dinámica de redes cristalinas, física atómica y relatividad general. Compartió con Dirac el premio Nobel de Física

de 1933.

Puesto que se llama **orden** de una ecuación al máximo orden de derivación que en ella aparece, las ecuaciones del péndulo, de Newton y de Schrödinger que acabamos de mencionar son de segundo orden, como la mayor parte de las ecuaciones fundamentales de la física, mientras que (1.2) es de primer orden. Igualmente, las ecuaciones de Maxwell³ en el vacío constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden con dos variables dependientes vectoriales (o seis escalares):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J}. \quad (1.12)$$

Las ecuaciones de Schrödinger y Maxwell satisfacen el principio de superposición (la suma de soluciones es solución), lo que matemáticamente se traduce por su carácter **lineal**: las incógnitas aparecen solo en forma de combinaciones lineales con coeficientes que son constantes o que dependen exclusivamente de las variables independientes. La aparición de una función no lineal, el seno, en la ecuación del péndulo matemático hace que ésta sea no lineal excepto en la aproximación de pequeñas oscilaciones en la que se reduce al oscilador armónico

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.13)$$

Tampoco es lineal la ecuación (1.6), ni lo son las ecuaciones de Einstein⁴ en el vacío, que, aunque se escriben como

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (1.14)$$

esconden bajo esa apariencia engañosamente simple un sistema altamente no lineal.

No debe pensarse que las ecuaciones diferenciales agotan —junto con las finitas— los tipos de ecuaciones que aparecen en física. Por ejemplo, veremos en los problemas 5.12 y 5.16 del capítulo 5 un caso muy simple de ecuaciones integro-diferenciales, en las que las incógnitas o sus derivadas aparecen bajo el signo de integral y en el problema 5.31 aparece el caso más simple de ecuaciones diferenciales funcionales: las ecuaciones diferenciales con retraso, en las que la incógnita y sus derivadas aparecen para distintos valores de la variable independiente.

Desde este momento solo consideraremos ecuaciones diferenciales ordinarias y dejaremos las ecuaciones en derivadas parciales para otros textos.

1.2. Tipos de soluciones

Aunque los conceptos que estudiaremos aquí se pueden generalizar de forma inmediata a sistemas de ecuaciones, para simplificar la notación nos limitaremos a considerar en este apartado



³ **James Clerk Maxwell** (13-06-1831, Edimburgo, Escocia; 5-11-1879, Cambridge, Inglaterra). Su primera contribución relevante fue la predicción de que los anillos de Saturno debían estar compuestos de numerosas partículas para ser estables. Es el creador, junto a Boltzmann, de la teoría cinética de los gases y su inmortal contribución, las leyes del electromagnetismo que llevan su nombre, apareció en el libro *A Treatise on Electricity and Magnetism* en 1873. Su proposición de que la luz es un fenómeno ondulatorio electromagnético fue confirmada experimentalmente por Hertz.



⁴ **Albert Einstein** (14-03-1879, Ulm, Alemania; 18-04-1955, Princeton, EE.UU.) Cualquiera de sus contribuciones de 1905 —la hipótesis del cuanto de luz para explicar el efecto fotoeléctrico (que le valió el premio Nobel de 1921), los dos trabajos sobre el movimiento browniano, el artículo fundador de la teoría de la relatividad especial y aquél en que estableció la equivalencia entre masa y energía— le hubiera valido por sí sola un puesto de honor en la historia de la física. En 1906 escribió el primer trabajo en teoría cuántica del estado sólido al estudiar los calores específicos. En 1907 formula el principio de equivalencia, que inicia una serie de trabajos que culminaría en 1916 y establecería la teoría general de la relatividad.

una única ecuación diferencial ordinaria de orden arbitrario n , que siempre puede escribirse como

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.15)$$

por medio de una función F adecuada.

Se llama **solución explícita** de la ecuación (1.15) a toda función de la variable independiente,

$$y = f(x), \quad (1.16)$$

que sustituida en la ecuación diferencial la convierte en una identidad en un cierto intervalo I , que es el **intervalo de definición** de la solución:

$$F[x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)] = 0, \quad \forall x \in I. \quad (1.17)$$

EJERCICIO 1.1 Compruebe que $y = \sqrt{1-x^2}$ es solución explícita de la ecuación (1.2). ¿Cuál es su intervalo de definición?

No siempre se expresa la solución de una ecuación diferencial con la variable dependiente despejada. De hecho, a menudo es más fácil hallar una **solución implícita**, es decir, una ecuación finita,

$$g(x, y) = 0, \quad (1.18)$$

tal que cada una de sus soluciones $y = f(x)$ (con $g(x, f(x)) = 0, \forall x \in I$) sea solución explícita de la ecuación diferencial. El concepto de solución implícita es útil porque, en general, no es necesario hallar las soluciones explícitas de (1.18), ya que puede verse si son soluciones de la ecuación diferencial comprobando que

$$F\left(x, y, -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}, \dots\right) = 0 \quad (1.19)$$

se satisface idénticamente como consecuencia de (1.18). En la práctica, a menudo es más fácil comprobar que la ecuación diferencial se convierte en una identidad si en ella se sustituyen juiciosamente la ecuación finita y las que se obtienen derivando ésta con respecto a x .

EJERCICIO 1.2 Compruebe que $x^2 + y^2 = 1$ (que puede escribirse en la forma (1.18) sin más que cambiar de miembro el 1) es una solución implícita de (1.2). No despeje y para hacer esta comprobación.

No obstante, aunque no haga falta calcularla es preciso asegurarse de que existe alguna solución explícita de la ecuación (1.18), ya que en caso contrario tendríamos una **solución formal**.

EJERCICIO 1.3 Compruebe que $x^2 + y^2 = -1$ es una solución formal de (1.2), al menos si no admitimos soluciones complejas.

Puesto que a menudo es más fácil dar soluciones paramétricas de las ecuaciones finitas que hallar las correspondientes soluciones explícitas, no debería extrañar que también sean útiles las **soluciones paramétricas** de ecuaciones diferenciales, que consisten en un par de funciones de un parámetro, $x = f(t)$ e $y = g(t)$, que convierten a la ecuación diferencial en una identidad,

$$F\left(f(t), g(t), \frac{g'(t)}{f'(t)}, \dots\right) = 0, \quad (1.20)$$

a lo largo de un cierto intervalo del parámetro.

EJERCICIO 1.4 Compruebe que $x = \cos t, y = \sin t$ es una solución paramétrica de (1.2).

1.3. Existencia de soluciones

Aunque es cierto que no toda ecuación diferencial tiene soluciones (por ejemplo, es obvio que tanto la ecuación finita $y^2 + 1 = 0$ como la diferencial $(y')^2 + 1 = 0$ carecen de soluciones reales), las ecuaciones diferenciales que se encuentran en la práctica tienen muchas soluciones, en general. De hecho, son corrientes las **familias paramétricas de soluciones**, es decir, soluciones (explícitas, implícitas o paramétricas) que dependen de uno o varios parámetros que son constantes en la derivación con respecto a la variable independiente.

EJERCICIO 1.5 Compruebe que las siguientes expresiones definen familias uniparamétricas de soluciones de la ecuación (1.2):

$$y = \sqrt{C^2 - x^2}, \quad (1.21)$$

$$y = -\sqrt{C^2 - x^2}, \quad (1.22)$$

$$x^2 + y^2 = C^2, \quad (1.23)$$

$$x = C \cos t, \quad y = C \sin t. \quad (1.24)$$

¿De qué tipo es cada una de estas familias?

Se llama **solución general** a cualquier familia de soluciones de una ecuación de orden n que dependa, precisamente, de n parámetros independientes. Por ejemplo, todas las soluciones del anterior ejercicio son soluciones generales, ya que dependen de un parámetro y la ecuación es de primer orden. El mismo ejercicio demuestra que la solución general no es necesariamente única. Es, por tanto, claro que solución general no es sinónimo de conjunto de todas las soluciones de la ecuación excepto, como veremos, en las ecuaciones lineales.

EJERCICIO 1.6 Demuestre que $y^3 - 3xy = 2C$ es solución general implícita de la siguiente ecuación:

$$y + (x - y^2)y' = 0. \quad (1.25)$$

¿Puede hallar la correspondiente solución general explícita?

Por cada elección de los valores de los parámetros de una familia de soluciones (sea general o no) se obtiene una **solución particular**. Así, tomando $C = 1$ en las soluciones generales (1.21), (1.23) y (1.24) del ejercicio 1.5 se obtienen soluciones particulares que habían sido discutidas anteriormente en algunos ejercicios. Una solución de una ecuación diferencial que no sea solución particular de una cierta solución general, es decir, que no pueda ser obtenida eligiendo adecuadamente los valores de los parámetros en la solución general⁵ se dice que es una **solución singular** respecto a la general considerada.

EJERCICIO 1.7 Compruebe que

$$y = C(x - C), \quad (1.26)$$

es una solución general de

$$(y')^2 - xy' + y = 0. \quad (1.27)$$

Clasifique como particulares o singulares las siguientes soluciones de esta misma ecuación:

$$y = 0, \quad (1.28)$$

$$y = x - 1, \quad (1.29)$$

$$y = \frac{x^2}{4}. \quad (1.30)$$

⁵En general, se admite también tomar límites cuando los parámetros van a $\pm\infty$, ya que este proceso equivale a sustituir un parámetro arbitrario C por otro parámetro arbitrario $D \equiv 1/C$ y tomar $D = 0$.

1.4. Unicidad de la solución

El anterior apartado ha puesto de manifiesto que las ecuaciones diferenciales tienen habitualmente un número infinito de soluciones. Se plantea, en consecuencia, el problema de identificar la que corresponde al problema físico concreto que queremos analizar. Dicho de otra forma, el problema no está completamente planteado cuando se conoce la ecuación diferencial: son necesarios otros datos. Es fácil sospechar que, hablando en términos generales, harán falta tantos datos (condiciones) adicionales como parámetros aparezcan en la solución general.

Una forma habitual de proporcionar esos datos adicionales consiste en dar los valores de la variable dependiente, $y(x_0)$, y de sus $n - 1$ primeras derivadas, $y'(x_0), \dots, y^{n-1}(x_0)$, para un cierto valor, $x = x_0$, de la variable independiente. Se dice entonces que se ha planteado un **problema de condiciones iniciales** o un **problema de Cauchy**. Por ejemplo, es inmediato comprobar que el problema de valores iniciales

$$(y')^2 - xy' + y = 0, \quad y(0) = -1 \quad (1.31)$$

admite como soluciones a $y = \pm x - 1$, que se obtienen sin más que elegir $C = \pm 1$ en la solución general. Nótese que aunque el punto $x = x_0$ se llama «inicial», nada impide integrar la ecuación hacia atrás, es decir, para valores $x < x_0$.

EJERCICIO 1.8 Demuestre que

$$(y')^2 - xy' + y = 0, \quad y(0) = 0 \quad (1.32)$$

admite también dos soluciones, mientras que si elegimos $y(0) = 1$ no hay ninguna (real).

Estos dos ejemplos muestran sin lugar a dudas que las condiciones iniciales no garantizan siempre la existencia y unicidad de las soluciones. Como podemos sospechar, acertadamente, que al menos parte del problema proviene del hecho de que en la ecuación diferencial estudiada antes la derivada de orden más alta está elevada al cuadrado, consideremos una ecuación escrita en **forma normal**, es decir, con la derivada de orden más alta despejada. Para hacer creíble la existencia y unicidad de la solución de un problema de condiciones iniciales del tipo

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1.33)$$

intentemos construir la solución en forma de serie de Taylor alrededor del punto $x = x_0$ donde se ha dado la condición inicial:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!}y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots \quad (1.34)$$

El primer coeficiente de la serie nos lo da directamente la condición inicial, $y(x_0) = y_0$, que junto con la propia ecuación diferencial y sus derivadas también permite calcular los otros coeficientes:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad (1.35)$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)f(x_0, y_0), \quad (1.36)$$

⋮

Por supuesto, para que este procedimiento constructivo garantice la existencia y unicidad deben añadirse condiciones matemáticas que aseguren la existencia y convergencia del desarrollo.

Seguendo trabajos del propio Cauchy, Peano⁶ demostró que basta la continuidad de la función $f(x, y)$ para garantizar la existencia de soluciones, pero el siguiente ejercicio demuestra que esa condición no es suficiente para asegurar la unicidad, lo que obligará a enunciar en distintos contextos teoremas precisos de existencia y unicidad.

EJERCICIO 1.9 Demuestre que $y = 0$ e

$$y = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

son dos soluciones diferentes del problema de condiciones iniciales

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0. \quad (1.38)$$

¿Cuál puede ser el origen de la ausencia de unicidad?

No siempre se dan las condiciones adicionales en un único punto. Cuando las mismas se proporcionan para distintos valores de la variable independiente se dice que se ha planteado un **problema de condiciones de contorno**. Podemos adelantar que este problema es, en general, mucho más difícil que el de condiciones iniciales. (Por ejemplo, la falta de solución para la mayoría de los valores de la energía es la razón de que dicha magnitud aparezca cuantizada en muchos sistemas cuánticos). Limitémonos aquí a analizar un ejemplo ilustrativo muy sencillo.

EJERCICIO 1.10 Considere el oscilador armónico clásico unidimensional en variables adimensionales apropiadas:

$$y'' + y = 0. \quad (1.39)$$

Compruebe que $y = A \cos x + B \sin x$ es la solución general y admitamos, hasta que lo demostremos en el capítulo 3, que contiene todas las posibles soluciones. Demuestre que el número de soluciones de los problemas de condiciones de contorno

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad (1.40)$$

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2, \quad (1.41)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad (1.42)$$

es, respectivamente, uno, nulo e infinito.

1.5. Métodos de resolución

Una parte importante del contenido de este texto está dedicado a describir métodos que permitan hallar las soluciones de ecuaciones diferenciales. En general, preferiríamos disponer de un **método exacto**, es decir, de uno que proporcione una expresión analítica cerrada para la solución. De hecho, a este tipo pertenecen la mayor parte de los métodos descritos en este texto. Pero ya podemos adelantar que, al igual que ocurre con las ecuaciones finitas o las integrales,



⁶ **Giuseppe Peano** (27-08-1858, Cuneo, Piamonte; 20-04-1932, Turín, Italia). Además del teorema de existencia de soluciones, se recuerdan los axiomas de Peano que definen los números naturales en términos de conjuntos y las curvas que rellenan por completo el interior de un cuadrado. Es junto con Frege el fundador de la lógica matemática y destacó por la importancia que concedía al rigor matemático.

solo unos pocos tipos de ecuaciones (muy especialmente las lineales) son abordables mediante métodos exactos. Desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales se considera que el problema está terminado cuando ha sido **reducido a cuadraturas**, es decir cuando la solución ha sido escrita en una forma que contenga a lo sumo integrales de funciones que dependen solo de la variable independiente. Sin embargo, urgimos al lector a intentar resolver todas las integrales que aparezcan, ya que, en contra de lo que sucede a menudo en la práctica, serán casi siempre resolubles en los ejemplos y problemas considerados en este libro.

También debe tenerse en cuenta que al expresar analíticamente la solución de una ecuación diferencial deben usarse muy a menudo **funciones especiales**, es decir, funciones que no son **elementales** (como lo son el seno hiperbólico, la exponencial o el arco tangente) y que en muchos casos tienen como definición natural el hecho de ser soluciones apropiadas de ciertas ecuaciones diferenciales.

La aparición y desarrollo de sistemas de **cálculo simbólico** ha aliviado notablemente la dificultad de aplicar los métodos exactos más conocidos (y algunos menos conocidos, o poco prácticos para el cálculo a mano).

El reducido número de ecuaciones que pueden resolverse mediante métodos exactos obliga a recurrir a menudo a **métodos aproximados** que, a su vez, pueden clasificarse en distintos tipos. A pesar de su gran importancia, el nivel de esta asignatura nos obligará a ver solo un poco sobre **métodos aproximados analíticos**. Los **métodos gráficos** siguen siendo muy importantes para estudiar propiedades cualitativas de algunas ecuaciones diferenciales, pero como métodos de resolución aproximada han sido sustituidos por los **métodos numéricos**, que con la gran extensión alcanzada por los ordenadores se han convertido en los más usados en la práctica por científicos y técnicos.

Como alternativa a los **métodos cuantitativos** que hemos mencionado hasta ahora y en los que se intenta construir (aunque sea aproximadamente) la solución, existen los **métodos cualitativos** con los que se pretende obtener información descriptiva del sistema. Por ejemplo, a menudo interesa conocer el comportamiento del sistema en alguno de los límites $t \rightarrow \pm\infty$ —si t es la variable independiente—, en especial si se sabe que el comportamiento asintótico es simple y que se alcanza rápidamente tras un corto transitorio más o menos difícil de calcular. El capítulo 8 estará dedicado a los métodos cualitativos.

No queremos terminar este apartado sin recordar que para un físico el método más importante y útil para resolver ecuaciones diferenciales consiste en el uso de sus conocimientos de física. De hecho muchos conceptos y técnicas aprendidas en las asignaturas de física —muy especialmente las leyes de conservación y las simetrías asociadas— son de gran ayuda para resolver (o, al menos, avanzar en la resolución de) las ecuaciones diferenciales que aparecen en la práctica de la física.

Consideremos, como ejemplo, el péndulo matemático

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (1.43)$$

e intentemos resolverlo. A menudo en los libros de texto se utiliza en este caso una de las técnicas de solución de problemas más fructíferas: se hace una aproximación, que en este caso consiste en suponer que las oscilaciones son lo suficientemente pequeñas como para que $\sin \theta \approx \theta$, con lo que la ecuación se reduce al oscilador armónico, que es una ecuación lineal cuya conocida solución se recuerda en el problema 1.3.

Si queremos hallar la solución exacta, aprovecharemos que es un sistema conservativo unidimensional para reducirlo a cuadraturas. Primero utilizaremos la **ley de conservación** de la

energía mecánica para obtener una **integral primera**, concepto éste que analizaremos en el apartado 3.4.5.

EJERCICIO 1.11 Multiplique los dos miembros de la ecuación (1.43) por $ml^2\dot{\theta}$ e integre el resultado para obtener la energía mecánica conservada en función de la amplitud α .

También nos es conocida de mecánica la siguiente técnica que, como veremos en el apartado 2.5, recibe el nombre de **separación de variables**.

EJERCICIO 1.12 Demuestre que el resultado del ejercicio 1.11 puede reescribirse, cuando el péndulo está ascendiendo, como

$$\int_0^\theta \frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), \quad (1.44)$$

siendo t_0 el instante en que ha pasado por el mínimo: $\theta(t_0) = 0$.

La integral de la última expresión no puede expresarse en términos de funciones elementales: hacen falta funciones especiales. En efecto, se calcula fácilmente haciendo uso de las integrales elípticas del apartado D.8.

EJERCICIO 1.13 Use el cambio de variable de integración $\sin(\varphi/2) = \sin(\alpha/2) \sin \nu$ para probar que la solución implícita del péndulo es

$$F \left[\arcsin \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \middle| \frac{\alpha}{2} \right] = \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0). \quad (1.45)$$

¿Cuál es la solución explícita?

1.6. Problemas

1.1 Escriba la ecuación diferencial que describe la caída de una partícula puntual en el seno de un fluido en el que el rozamiento es proporcional a la velocidad y clasifíquela. ¿Qué sucede si el rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad?

1.2 Compruebe si $y^2 - 2y = x^2 - x - 1$ es solución de la ecuación

$$2y' = \frac{2x - 1}{y - 1}.$$

En caso afirmativo, discuta el correspondiente intervalo de definición.

1.3 Oscilador armónico. Demuestre que el oscilador armónico,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

admite como solución general todas y cada una de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \\ x &= D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t}, \\ x &= A \cos(\omega t + \varphi), \\ x &= A \cos[\omega(t - t_0)]. \end{aligned}$$

¿Son equivalentes entre sí? ¿Podría añadir alguna expresión a la anterior lista?

1.4 ¿Cuáles son los intervalos de definición de las soluciones (1.21) y (1.22) de la ecuación (1.2)?

¿Es solución

$$y = \begin{cases} \sqrt{C^2 - x^2}, & x < 0, \\ -\sqrt{C^2 - x^2}, & x \geq 0? \end{cases}$$

1.5 ¿Es $x^2 + Cy^2 = 1$ solución general implícita de

$$y' = \frac{xy}{x^2 - 1}?$$

1.6 Compruebe que

$$y = \frac{1 - Ce^{2x}}{1 + Ce^{2x}}$$

es solución general de $y' = y^2 - 1$. Halle directamente dos soluciones sencillas por inspección y discuta si son soluciones singulares o no.

1.7 Compruebe que *todas* las soluciones de la ecuación

$$xy' = y$$

satisfacen la condición inicial $y(0) = 0$. ¿Por qué no se cumple la unicidad de la solución? ¿Es la función

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

una solución de este problema de condiciones iniciales?

1.8 Demuestre que el problema de valores iniciales

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

admite como solución toda función

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq C, \\ (x - C)^2, & x \geq C, \end{cases}$$

con $C \geq 0$.

1.9 El cubo vacío. Si nos muestran un cubo vacío con un pequeño agujero en el fondo es imposible saber cuándo estaba lleno de agua hasta el borde. Demuestre que este hecho es consecuencia de que no se satisface el teorema de existencia y unicidad.

Nota: Recuerde que la altura h del agua viene dada por la ley de Torricelli⁷:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h},$$

donde k es una constante.

1.10 Período del péndulo. Use el ejercicio 1.13 para calcular el período del péndulo. Desarrolle el resultado hasta el cuarto orden en la amplitud α .



⁷ **Evangelista Torricelli** (15-10-1608, Faenza, Romagna; 25-10-1647, Florencia, Toscana). Fue secretario de Galileo y el primero en crear y mantener un vacío importante. También descubrió el principio del barómetro e hizo otras contribuciones en matemáticas, mecánica de la partícula e hidrodinámica, incluyendo la ley que lleva su nombre.

Capítulo 2

Ecuaciones de primer orden

*In order to solve this differential equation
you look at it till a solution occurs to you.*

George Polya

Se analizan en este capítulo las principales propiedades de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que constituyen el caso más sencillo «a priori», de forma que resultan de gran utilidad para introducir o refinar conceptos que serán analizados en capítulos subsiguientes en contextos más generales. También se recogen los métodos exactos de resolución más conocidos, cuya importancia estriba en que, en la práctica, en numerosas ocasiones (con la importante salvedad de las ecuaciones y sistemas lineales) la resolución de ecuaciones orden superior o sistemas de ecuaciones acaba por recurrir a la resolución de una única ecuación de primer orden.

2.1. Significado geométrico

Para motivar el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden podemos valernos de su sencillo significado geométrico.

2.1.1. Familias uniparamétricas de curvas

Como es bien sabido, una ecuación finita del tipo $\varphi(x, y) = 0$ define una curva en el plano. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 1$ (o la expresión equivalente $x^2 + y^2 - 1 = 0$) describe la circunferencia unidad centrada en el origen. Si en vez de una curva consideramos una familia uniparamétrica de curvas, su ecuación será del tipo

$$\varphi(x, y, C) = 0, \quad (2.1)$$

de forma que para cada valor del parámetro C (dentro de un cierto rango) se obtiene una curva de la familia. Por ejemplo, la familia de circunferencias centradas en el origen tiene como ecuación

$$x^2 + y^2 = C^2, \quad (2.2)$$

siendo el parámetro C el radio de la circunferencia (para $C \geq 0$).

Si entre la ecuación de una familia y su derivada

$$\varphi(x, y, C) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, C) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, C) y' = 0 \quad (2.4)$$

eliminamos el parámetro C , obtendremos la **ecuación diferencial de la familia** en la forma

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2.5)$$

que, recordando el significado geométrico de la derivada, establece una relación entre cada punto del dominio y la pendiente de las curvas de la familia que por él pasan.

EJERCICIO 2.1 Derive la ecuación (2.2) para comprobar que la ecuación diferencial de la familia de circunferencias centradas en el origen es

$$x + yy' = 0. \quad (2.6)$$

Nótese que en otros muchos casos, para hallar la ecuación diferencial de la familia, será preciso usar, además de la derivada, la ecuación finita de partida.

EJERCICIO 2.2 Halle la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio unidad con centro en el eje de abscisas. ¿Hay soluciones singulares?

Como por construcción las funciones (2.1) forman una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (2.5) y ésta es de primer orden, la familia es una solución general de la ecuación diferencial. Por supuesto, nada impide que haya, además, otras soluciones, tanto singulares como generales, que hayan sido introducidas en el proceso de derivación y eliminación de C . Cada curva de la familia cuya ecuación es (2.1) recibe el nombre de **curva integral** y su ecuación viene dada por una solución particular de la ecuación diferencial. En los ejemplos anteriores, cada circunferencia es una curva integral de la correspondiente ecuación diferencial y su ecuación una solución particular.

2.1.2. Congruencias de curvas

Existe un caso particular muy importante: si las curvas de la familia no se cortan, es decir, si por cada punto del plano dentro de un cierto dominio pasa una curva de la familia y solo una, se dice que la familia es una **congruencia** de curvas. En tal caso, a cada punto le corresponde la curva del haz que por él pasa y, por tanto, el valor del parámetro que identifica a esa curva. En consecuencia, es posible despejar —al menos en principio— en la ecuación de la familia (2.1) el parámetro y escribir la misma en la forma

$$u(x, y) = C, \quad (2.7)$$

que nos da el valor C que corresponde al punto (x, y) . Un ejemplo de congruencia es la familia de circunferencias que hemos estado estudiando en el ejercicio 2.1 y que, de hecho, hemos escrito en (2.2) con el parámetro despejado.

EJERCICIO 2.3 ¿Es una congruencia la familia analizada en el ejercicio 2.2?

Como hemos visto en el ejercicio 2.1, en el caso de una congruencia, al calcular la derivada de su ecuación se obtiene directamente la correspondiente ecuación diferencial ya que el parámetro desaparece:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) y' = 0. \quad (2.8)$$

Multiplicando por dx esta ecuación puede escribirse en **forma simétrica**,

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (2.9)$$

con $P \equiv \partial u / \partial x$ y $Q \equiv \partial u / \partial y$. En el caso de la ecuación (2.6) la forma simétrica es

$$x dx + y dy = 0. \quad (2.10)$$

Veremos que la forma simétrica es útil en ciertas ocasiones, pero mucho más usual es la **forma normal** que se obtiene cuando se despeja la derivada de orden más alta

$$y' = f(x, y), \quad (2.11)$$

con

$$f(x, y) \equiv -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (2.12)$$

En el ejemplo (2.6) la forma normal es

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (2.13)$$

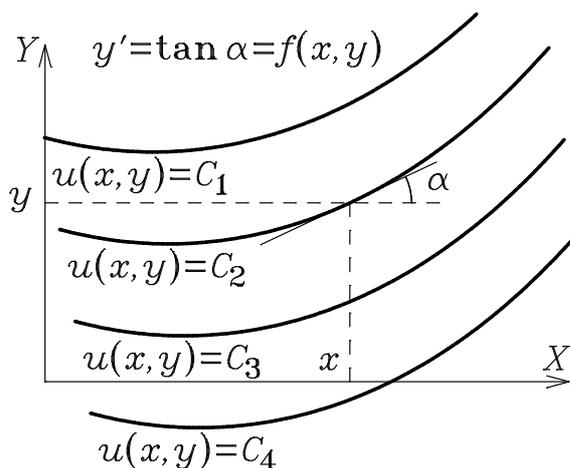


FIGURA 2.1 Congruencia de curvas, derivada y pendiente de la tangente.

La forma normal permite una interpretación geométrica precisa que se esboza en la figura 2.1. La ecuación diferencial (2.11) da la pendiente $y' = \tan \alpha$ de la tangente en el punto (x, y) a la curva integral que por él pasa. Por cada punto pasa una única curva que tiene allí una tangente dada que define una dirección. Hay, por tanto, un **campo de direcciones**, descrito precisamente por la ecuación diferencial (2.11) en su dominio de definición, que nos da la dirección que corresponde a cada punto.

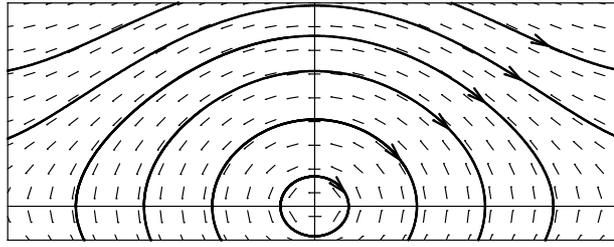


FIGURA 2.2 Congruencia y campo de direcciones.

2.2. Teorema de existencia y unicidad

La relación entre congruencias y ecuaciones diferenciales en forma normal es biunívoca, en su dominio de definición, si se cumplen ciertas condiciones matemáticas que se establecen con precisión en un **teorema de existencia y unicidad**. Aunque demostramos una forma más refinada del teorema en el apéndice A, nos limitaremos aquí a enunciar sin demostración una variante menos potente, pero que resulta de mayor utilidad práctica, ya que las condiciones suficientes son más fáciles de comprobar que otras menos restrictivas que pueden utilizarse en su lugar.

Teorema 2.1 (Existencia y unicidad) *Si la función f y su derivada $\partial f/\partial y$ son continuas en un dominio, el problema de condiciones iniciales*

$$y' = f(x, y), \quad (2.14)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.15)$$

tiene una única solución para cada condición inicial (x_0, y_0) en el dominio.

Esto garantiza que el conjunto de curvas integrales es una congruencia, con tal de que se cumpla una condición de continuidad, o incluso algo menos como veremos en el apéndice A. (La necesidad de condiciones matemáticas de regularidad ya había sido anticipada en el ejercicio 1.9).

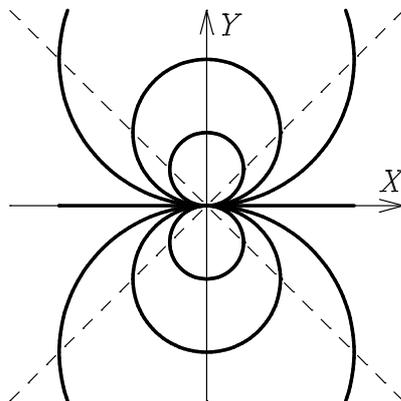


FIGURA 2.3 Circunferencias tangentes al eje de abscisas.

Como ejemplo consideremos el conjunto de circunferencias tangentes al eje de abscisas con origen en el de ordenadas que aparece en la figura 2.3.

EJERCICIO 2.4 Demuestre que la ecuación diferencial de esa familia es

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \quad (2.16)$$

Por el origen pasan infinitas soluciones, pero esto no contradice el teorema de existencia y unicidad ya que allí la ecuación diferencial tiene una singularidad. También la tiene en las dos bisectrices $y = \pm x$, pero excepto en el origen esto no impide la unicidad —sino que refleja el hecho más trivial de que allí la tangente a las curvas integrales es vertical— ya que la continuidad es condición suficiente, pero no necesaria.

2.3. Ecuaciones exactas

Como vimos en el apartado 2.1, al derivar la ecuación de una congruencia de curvas $u(x, y) = C$ se obtiene una ecuación diferencial en forma simétrica

$$du \equiv P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (2.17)$$

con

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.18)$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.19)$$

Por definición, una ecuación obtenida de esta forma como diferencial de una función, es decir, tal que cumpla las condiciones (2.18)–(2.19), se llama **exacta**.

Como consecuencia del teorema de Schwarz, que nos asegura la igualdad de las derivadas cruzadas de funciones regulares¹ se cumple

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.20)$$

para una ecuación diferencial exacta. Además, el recíproco de este resultado elemental es también cierto.

Teorema 2.2 Una ecuación diferencial en forma simétrica, $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, es exacta si y solo si se satisface la condición (2.20).

La demostración del teorema es interesante porque es constructiva y proporciona, por tanto, un método de resolución de ecuaciones que satisfagan (2.20). Para que se cumpla (2.18) definamos $u(x, y)$ como la integral indefinida de P con respecto a x :

$$u(x, y) \equiv \int_{x_0}^x P(v, y) dv + h(y), \quad (2.21)$$

¹Como es costumbre en física, llamaremos **funciones regulares** a aquellas que satisfacen, junto con sus derivadas, las condiciones de continuidad necesarias para garantizar el enunciado en que se usa el calificativo «regular». Esta costumbre, aunque poco precisa, aligera los enunciados de resultados matemáticos al evitar tener que indicar la clase de diferenciabilidad de las funciones involucradas. En los casos de interés práctico, las condiciones necesarias suelen cumplirse, salvo a lo sumo en algunos puntos (o lugares geométricos). Hay que señalar, sin embargo, que esos puntos **singulares** suelen ser de gran importancia en física (en uno de ellos se encuentra, por ejemplo, la carga puntual que crea el más sencillo de los campos electrostáticos) y en matemáticas (en especial, en la teoría de las funciones analíticas). Algunos puntos singulares jugarán un importante papel en el capítulo 6.

donde $h(y)$, que no depende de x , está aún por determinar. Para que se satisfaga (2.19) debe cumplirse

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y}(v, y) dv + h'(y), \quad (2.22)$$

que, si hacemos uso de la hipótesis (2.20), se convierte en

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x}(v, y) dv + h'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + h'(y). \quad (2.23)$$

Simplificando el resultado tenemos una ecuación en la que la x ha desaparecido y que se integra directamente con respecto a y :

$$h'(y) = Q(x_0, y) \iff h(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, v) dv + D, \quad (2.24)$$

donde D es una constante de integración arbitraria. Sustituyendo este valor en (2.21) la solución general de la ecuación exacta será la ecuación de la congruencia $u(x, y) = C$ o, si se prefiere una expresión más formal,

$$\int_{x_0}^x P(v, y) dv + \int_{y_0}^y Q(x_0, v) dv = C, \quad (2.25)$$

tras una redefinición trivial de la constante arbitraria.

No hemos escrito esta última ecuación porque recomendamos su uso para resolver ecuaciones exactas (para lo que no hay nada mejor que recordar la definición y calcular la integral indefinida con respecto a una variable, derivar respecto a la otra y volver a integrar), sino porque es un caso particular de un resultado general que conocemos del cálculo vectorial.

Si consideramos que $V = -u$ es un potencial escalar, la congruencia de curvas ($u = C$ ó $V = -C$), es el conjunto de líneas equipotenciales y la ecuación diferencial de la congruencia $dV = 0$ expresa que el potencial es constante a lo largo de las líneas equipotenciales y también que el campo vectorial correspondiente

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla V = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} \quad (2.26)$$

es ortogonal en cada punto a dichas líneas ($\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = P dx + Q dy = -dV = 0$). Además, reconocemos en este contexto que la condición (2.20) indica, precisamente, que el campo vectorial es conservativo: $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Sabemos que en este caso el potencial puede recuperarse mediante una integral curvilínea:

$$V(x, y) = V(x_0, y_0) - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V(x_0, y_0) - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P dx + Q dy). \quad (2.27)$$

El camino de integración es arbitrario y si elegimos el formado por los segmentos $(x_0, y_0) - (x_0, y)$ y $(x_0, y) - (x, y)$, la ecuación de las líneas equipotenciales (2.27) viene dada por (2.25).

Como ejemplo consideremos la ecuación

$$x dx + y dy = 0, \quad (2.28)$$

que como se comprueba inmediatamente es exacta. Si integramos respecto a x el coeficiente de dx obtenemos $u = 1/2 x^2 + h(y)$, y si derivamos respecto a y e igualamos al coeficiente de dy se obtiene $h'(y) = y$, que integrado da $h = 1/2 y^2 + D$, con lo que la solución general, tras una redefinición de la constante arbitraria es, como ya sabíamos, la familia de circunferencias centradas en el origen $x^2 + y^2 = C^2$.

EJERCICIO 2.5 Resuelva la ecuación

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0. \quad (2.29)$$

Vemos a continuación dos familias de ecuaciones diferenciales que son casos particulares de las exactas.

Ecuaciones sin la variable dependiente

Si en la ecuación falta la variable dependiente,

$$y' = f(x), \quad (2.30)$$

es claro que la ecuación es exacta ya que las dos derivadas cruzadas son nulas. De hecho, esta ecuación es muy simple y está prácticamente reducida a cuadraturas:

$$y = \int f(x) dx + C. \quad (2.31)$$

EJERCICIO 2.6 Resuelva el siguiente problema:

$$y' = \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0. \quad (2.32)$$

¿Es única la solución?

Ecuaciones de variables separadas

También cuando las variables dependiente e independiente aparecen separadas en dos términos distintos,

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0, \quad (2.33)$$

las derivadas cruzadas son nulas por lo que la ecuación es exacta. De hecho, se resuelve directamente mediante cuadraturas:

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = C. \quad (2.34)$$

Tomando $f = -P$ y $Q = 1$ se recupera como caso particular el anterior. Un ejemplo de este tipo de ecuación es (2.28), que ha sido resuelta antes como si fuera una exacta del tipo más general posible.

EJERCICIO 2.7 Resuelva $(1 + y)e^y y' = 2x$.

2.4. Factores integrantes

Consideremos qué sucede si en la ecuación (2.28) se despeja y' , para obtener

$$\frac{x}{y} dx + dy = 0. \quad (2.35)$$

Aunque las derivadas cruzadas no son iguales y, por tanto, la ecuación no es exacta, sabemos que en realidad se trata de una ecuación exacta que ha sido multiplicada por $1/y$. La pregunta es si este proceso es reversible en general, al igual que en este caso particular basta multiplicar la ecuación no exacta por y para recuperar la exacta de partida.

Si dada una ecuación no necesariamente exacta

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2.36)$$

existe una función $\mu(x, y)$ tal que

$$\mu(x, y) [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = 0 \quad (2.37)$$

sea exacta, se dice que μ es un **factor integrante** o **multiplicador** de la ecuación (2.36). Como la nueva ecuación es exacta, puede resolverse y sus soluciones serán también solución de la ecuación de partida, *con alguna posible excepción*.

En efecto, como la ecuación original se obtiene multiplicando (2.37) por $1/\mu(x, y)$, puede haber soluciones de la ecuación original que anulen este factor sin anular la nueva ecuación (2.37), por lo que cuando se haya usado un factor integrante deberá comprobarse si hay soluciones de $1/\mu(x, y) = 0$ que no estén en la general obtenida resolviendo la ecuación exacta, en cuyo caso serán soluciones singulares de la original. Como ejemplo, consideremos la ecuación $xy dx + y^2 dy = 0$, que no es exacta, pero que admite el factor integrante $\mu = 1/y$, con el que recuperamos la ecuación (2.28), pero entonces $1/\mu = y = 0$ es una solución singular.

Por otro lado, es posible que al multiplicar la ecuación de partida por μ se hayan añadido soluciones, que lo sean de $\mu(x, y) = 0$ y, por tanto, de (2.37), sin serlo de la ecuación de partida (2.36), por lo que deberá comprobarse en cada caso si las soluciones de esa ecuación finita lo son realmente de (2.36).

EJERCICIO 2.8 Compruebe que la ecuación diferencial

$$(xy + y^2) dx - x^2 dy = 0 \quad (2.38)$$

admite como factor integrante $\mu = 1/xy^2$. Calcule la solución general. ¿Hay alguna solución singular? ¿Y alguna raíz de μ que no satisfaga la ecuación diferencial?

Es obvio que si multiplicamos un factor integrante por una constante se sigue teniendo un factor integrante. Incluso veremos en distintos problemas que los factores integrantes no son necesariamente únicos en un sentido mucho menos trivial: es posible tener dos factores integrantes que no sean el uno múltiplo del otro. Tras responder negativamente a la unicidad, podemos plantear otra pregunta más difícil: ¿admite toda ecuación (2.36) un factor integrante que la convierta en exacta? La respuesta es afirmativa, pero un poco decepcionante: como consecuencia directa del teorema de existencia y unicidad, toda ecuación de primer orden admite algún factor integrante, pero no se conocen métodos generales que permitan hallarlo. La condición que debe satisfacerse es que la nueva ecuación (2.37) sea exacta:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad (2.39)$$

que tras manipulación elemental se convierte en

$$Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Aunque esta ecuación en derivadas parciales tiene solución, debería ser claro que resolverla no va a ser, en general, más sencillo que resolver la ecuación original; pero veremos en subsiguientes secciones que, al menos en ciertos casos, proporciona una guía para intentar la búsqueda de un factor integrante de tipo especial.

En términos de la analogía vectorial de la anterior sección, podemos decir que todo campo vectorial bidimensional, $\mathbf{E} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$, es ortogonal a las líneas equipotenciales de un campo conservativo, que es, por tanto, paralelo (y por ello proporcional) en cada punto al campo de partida. En otras palabras, siempre pueden encontrarse trayectorias ortogonales a las líneas de corriente de cualquier campo de fuerza bidimensional. Nótese que esto no es cierto en tres dimensiones; solo los **campos integrables**, que satisfacen $\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$, son proporcionales a un gradiente, $\mathbf{E} = -h(\mathbf{r})\nabla V$, y admiten superficies ortogonales. Solo en dos dimensiones es cierto que todos los campos vectoriales sean integrables.

Veamos algunos casos en que pueden construirse factores integrantes de forma sistemática.

2.5. Ecuaciones separables

Se llama **separable** a toda ecuación en la que las variables independiente y dependiente aparecen agrupadas en factores diferentes en los coeficientes de dx y dy :

$$R(x)S(y) dx + U(x)V(y) dy = 0. \quad (2.41)$$

El factor integrante $\mu = 1/SU$ separa las variables y, por tanto, permite reducir a cuadraturas una ecuación de este tipo:

$$\int \frac{R(x)}{U(x)} dx + \int \frac{V(y)}{S(y)} dy = C. \quad (2.42)$$

Las soluciones de $S(y) = 0$, si existen, pueden ser soluciones singulares. Por ejemplo, si multiplicamos la ecuación

$$x(1+y)y' = y \quad (2.43)$$

por el factor $\mu = dx/xy$, obtenemos

$$\left(\frac{1}{y} + 1\right) dy = \frac{dx}{x}, \quad (2.44)$$

que se integra directamente para dar $ye^y = Cx$ —o, usando la función de Lambert del apartado D.3, $y = W(Cx)$ —. La solución $y = 0$ de $1/\mu = 0$ no es singular, ya que está incluida en la general para $C = 0$.

EJERCICIO 2.9 Resuelva la ecuación

$$(x-4)y^4 dx - x^3(y^2-3) dy = 0. \quad (2.45)$$

Como veremos en otras secciones, este tipo de ecuaciones es importante porque para varias familias de ecuaciones el método sistemático de resolución que se conoce pasa por convertir la ecuación en una separable.

2.6. Factores integrantes especiales

Algo que puede intentarse —sin garantías de éxito, por lo general— es probar en la condición (2.40) que debe satisfacer el factor integrante funciones μ con estructura funcional particular. Aunque desarrollamos abajo la teoría completa en algunos casos y damos las expresiones que permiten ensayar distintas posibilidades, recomendamos una vez más usar las ideas fundamentales, que en este caso se reducen a recordar qué es un factor integrante y ver si es posible construir uno en que las variables x e y aparezcan solo en una cierta forma (que tal vez sea sugerida por nuestro conocimiento del problema en que aparece la ecuación a resolver).

2.6.1. Factores integrantes que no dependen de y

Si ensayamos $\mu(x)$ en (2.40) obtenemos

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (2.46)$$

Por tanto la condición necesaria y suficiente para que la ecuación admita un factor integrante de este tipo es que el miembro de la derecha de esta expresión no dependa de y , aunque puedan hacerlo sus componentes:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (2.47)$$

en cuyo caso el factor integrante es

$$\mu(x) = C \exp \int \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx. \quad (2.48)$$

La constante de integración C no es importante, ya que si μ es un factor integrante también lo es $C\mu$, pero cambiar C equivale a multiplicar toda la ecuación con una constante, lo que no añade nada nuevo.

Por ejemplo, si multiplicamos la ecuación

$$(2x^2 + y) dx + (x^2y - x) dy = 0 \quad (2.49)$$

con el factor $\mu(x)$, para que la nueva ecuación sea exacta las derivadas cruzadas deben satisfacer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[(2x^2 + y) \mu(x) \right] &= \mu(x) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2y - x) \mu(x) \right] &= (2xy - 1)\mu(x) + (x^2y - x) \mu'(x), \end{aligned} \quad (2.50)$$

que también se escribe como

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2xy - 2}{x^2y - x} = -\frac{2}{x}. \quad (2.51)$$

Puesto que en el último miembro de esa ecuación no aparece y , la misma puede integrarse para ver que $\mu = 1/x^2$ es un factor integrante. (Por supuesto, también podía haberse usado directamente (2.48) para obtener el mismo resultado). La ecuación obtenida al multiplicar la original con el factor integrante,

$$\left(2 + \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(y - \frac{1}{x} \right) dy = 0, \quad (2.52)$$

es exacta, claro, y se integra fácilmente:

$$y^2 - 2\frac{y}{x} + 4x = C. \quad (2.53)$$

EJERCICIO 2.10 Resuelva la ecuación

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy) y' = 0 \quad (2.54)$$

con un factor integrante que solo depende de x .

2.6.2. Factores integrantes que no dependen de x

Substituyendo $\mu(y)$ en (2.40) se obtiene

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \quad (2.55)$$

Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que la ecuación admita un factor integrante de este tipo es que el miembro de la derecha de esta expresión no dependa de x , en cuyo caso el factor integrante es

$$\mu(y) = C \exp \int \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy. \quad (2.56)$$

EJERCICIO 2.11 ¿Admite la ecuación del ejercicio 2.10 un factor integrante del tipo $\mu(y)$?

2.6.3. Factores integrantes del tipo $\mu(x, y) = g(h(x, y))$

Un factor integrante que solo dependiera de x e y a través de la función intermedia h vendría dado por

$$\mu(h) = C \exp \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \frac{\partial h}{\partial x} - P \frac{\partial h}{\partial y}} dh, \quad (2.57)$$

y la condición para que exista es que el integrando solo dependa de x e y por medio de h .

En general, solo un poco de vista o el conocimiento que tenemos del problema físico a resolver pueden guiarnos en la elección de la forma de h .

EJERCICIO 2.12 Resuelva la ecuación

$$(3xy + y^2) dx + (3xy + x^2) dy = 0 \quad (2.58)$$

utilizando un factor integrante de la forma $\mu(x + y)$.

2.7. Ecuaciones lineales

Una ecuación en la que la incógnita y su derivada solo aparezcan en combinaciones lineales puede escribirse, despejando la derivada, como

$$y' + A(x)y = B(x) \quad (2.59)$$

y recibe el nombre de **ecuación lineal**. Cuando el término independiente B es nulo se dice que la ecuación es **homogénea** y en caso contrario se llama **completa** o, a veces, **inhomogénea**.

Es inmediato comprobar que se satisface la condición (2.47) que garantiza la existencia de un factor integrante $\mu(x)$, que vendrá dado por (2.48):

$$\mu(x) = \exp \int A(x) dx, \quad (2.60)$$

y que convierte a la ecuación en

$$e^{\int A dx} y' + A e^{\int A dx} y = B e^{\int A dx}, \quad (2.61)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx} [e^{\int A dx} y] = B e^{\int A dx}, \quad (2.62)$$

que proporciona la solución general mediante una segunda cuadratura,

$$y = e^{-\int A dx} \left[C + \int B e^{\int A dx} dx \right], \quad (2.63)$$

aunque, una vez más, no recomendamos aprender una fórmula como ésta, sino recordar que la ecuación lineal siempre admite un factor integrante que solo depende de la variable independiente y aplicar lo que esto significa. Sí tiene esta expresión la virtud de poner de manifiesto una estructura que, como veremos en el capítulo 3, es cierta para las ecuaciones lineales de cualquier orden: *la solución general de la completa es suma de la solución general de la homogénea* (que se obtiene tomando $B = 0$) *y de una solución particular de la completa* (que puede obtenerse de la expresión general (2.63) dando un valor particular, como $C = 0$, a la constante de integración). La solución particular puede elegirse de infinitas formas, ya que se obtiene una por cada valor de la constante C , pero como esta última es arbitraria, todas las elecciones conducen a la misma solución general.

EJERCICIO 2.13 Resuelva la ecuación

$$xy' + (1+x)y = e^x. \quad (2.64)$$

Nótese que, como μ no depende de y , en el caso de ecuaciones lineales no se ha ganado ni perdido ninguna solución al usar el factor integrante, por lo que la expresión (2.47) contiene todas las soluciones de la ecuación lineal.

Debe notarse que la ecuación lineal homogénea de primer orden es separable y que, por tanto, puede también resolverse por el método del apartado 2.5.

EJERCICIO 2.14 Separe las variables de la ecuación $y' + a_1(x)y = 0$ para escribir la solución por medio de una cuadratura. Concluya que, si k es constante, se cumple lo siguiente:

$$y' - ky = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = Ce^{kx}. \quad (2.65)$$

2.8. Métodos de transformación

Como sabemos bien de asignaturas de física, muchos problemas son considerablemente más sencillos si se abordan en las coordenadas adecuadas. Lo mismo sucede con las ecuaciones diferenciales en general: a menudo un cambio de variables, que puede serlo de la independiente, de la dependiente o de ambas, permite resolver la ecuación. Se dice en esos casos que se utiliza un **método de transformación**. Veremos a continuación algunas de las familias más conocidas que se resuelven por métodos de este tipo.

2.9. Ecuaciones homogéneas

Recordemos que se llama **función homogénea de grado r** a la que satisface la condición

$$f(ax, ay) = a^r f(x, y), \quad \forall a. \quad (2.66)$$

Se dice que la ecuación diferencial $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es **homogénea** si P y Q son funciones homogéneas del mismo grado:

$$P(ax, ay) = a^r P(x, y), \quad Q(ax, ay) = a^r Q(x, y), \quad \forall a. \quad (2.67)$$

Nótese que aquí se exige la homogeneidad con respecto a x e y , mientras que se dice que la ecuación lineal (2.59) es homogénea cuando $B = 0$, es decir, cuando lo es con respecto a y e y' , pero no con respecto a x . Aunque confusa, esta nomenclatura es la usada por todos los autores.

EJERCICIO 2.15 Demuestre que una ecuación diferencial es homogénea si y solo si puede escribirse en la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.68)$$

Este ejercicio sugiere directamente el cambio de variables

$$u \equiv \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = xu, \quad y' = u + xu', \quad (2.69)$$

de forma que la nueva incógnita tenga la misma invariancia que la propia ecuación frente al cambio de escala $(x, y) \rightarrow (ax, ay)$. En efecto, con el mencionado cambio la ecuación homogénea se transforma en una separable

$$u' + \frac{1}{x} [u - f(u)] = 0, \quad (2.70)$$

que como ya sabemos se reduce a cuadraturas tras separar variables.

EJERCICIO 2.16 Resuelva

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right) dx - x dy = 0. \quad (2.71)$$

Una generalización de las ecuaciones homogéneas son las isobáricas, que presentan una invariancia de escala generalizada y se discutirán en el problema 2.16.

2.10. Ecuaciones del tipo $y' = f(ax + by + c)$

El cambio de variables obvio, $u = ax + by + c$ (o $u = ax + by$), reduce estas ecuaciones a separables:

$$u' = a + bf(u). \quad (2.72)$$

EJERCICIO 2.17 Resuelva la ecuación diferencial $y' = (x + y + 1)^2$.

2.11. Ecuaciones del tipo $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

En este tipo de ecuaciones existen dos casos según que las rectas $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ sean paralelas o se corten.

1. Si las rectas son paralelas,

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} \equiv k, \quad (2.73)$$

tenemos que

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + \gamma}\right) \quad (2.74)$$

y, por tanto, la ecuación solo depende en realidad de $ax + by$ y pertenece al tipo anterior, que se reduce a una separable con el cambio $u = ax + by$.

EJERCICIO 2.18 Resuelva la siguiente ecuación:

$$y' = \frac{x - y}{x - y - 1}. \quad (2.75)$$

2. Si las rectas no son paralelas se cortan en un punto (x_0, y_0) , por lo que el cambio de coordenadas $u \equiv x - x_0$, $v \equiv y - y_0$ traslada ese punto de corte al origen y convierte las ecuaciones de las rectas en $au + bv = 0$ y $\alpha u + \beta v = 0$ y la propia ecuación en una homogénea,

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right) = f\left(\frac{a + bv/u}{\alpha + \beta v/u}\right), \quad (2.76)$$

que se reduce a separable con el cambio $z = v/u$.

EJERCICIO 2.19 Resuelva la ecuación

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}. \quad (2.77)$$

2.12. Ecuaciones de Bernoulli

Se llama ecuación de Bernoulli² a la que tiene la siguiente estructura:

$$y' + A(x)y = B(x)y^n, \quad (2.78)$$

excepto en los casos $n = 0, 1$, en los que se trata en realidad de una lineal. Es inmediato comprobar que el cambio $u = y^{1-n}$ las convierte en la lineal

$$u' + (1 - n)Au = (1 - n)B. \quad (2.79)$$

EJERCICIO 2.20 Resuelva la ecuación

$$y' - y \cos x = \frac{1}{2}y^2 \sin 2x. \quad (2.80)$$

2.13. Ecuaciones de Riccati

Se llama ecuación de Riccati³ a la que tiene la siguiente estructura:

$$y' + A(x)y + B(x)y^2 = C(x), \quad (2.81)$$

excepto en los casos $B = 0$ y $C = 0$, en los que se trata en realidad de una lineal y una de Bernoulli, respectivamente. No existe método general para resolver este tipo de ecuaciones, pero si por cualquier razón (inspección, propiedades físicas del problema, etc.) se conoce una solución particular de la ecuación $y = y_1(x)$,

$$y_1' + A(x)y_1 + B(x)y_1^2 = C(x), \quad (2.82)$$

el cambio de variables $u = y - y_1$ la reduce a una de Bernoulli, ya que restando (2.81) y (2.82) se obtiene

$$u' + (A + 2By_1)u + Bu^2 = 0. \quad (2.83)$$

EJERCICIO 2.21 Compruebe que $y = 1/x$ es solución de

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2} \quad (2.84)$$

y utilice este hecho para hallar la solución general.

Cuando no se conoce ninguna solución, puede usarse el cambio de variables del problema 3.27, que la convierte en una lineal homogénea de segundo orden —de hecho, como allí veremos las ecuaciones de Riccati son en cierto sentido preciso equivalentes a las lineales homogéneas de segundo orden— y pueden ensayarse los métodos de los capítulos 3 y 6. Si esto también falla habrá que recurrir, como muchas otras veces, a los métodos aproximados del capítulo 7.



² **Jacob Bernoulli** (27-12-1654, Basilea, Suiza; 16-08-1705, Basilea). Este miembro de una excepcional familia de matemáticos (era hermano de Johann y tío de Daniel) fue el primero en utilizar la palabra «integral», estudió la catenaria, descubrió la isocrona, trabajó en teoría de probabilidades, inventó el cálculo variacional y las coordenadas polares, así como los números y la distribución que llevan su nombre.



³ **Jacopo Francesco Riccati** (28-05-1676, Venecia; 15-04-1754, Treviso, República de Venecia). Aparte de sus trabajos prácticos en hidráulica, fue un gran estudioso de las ecuaciones diferenciales y a él son debidos diversos métodos de reducción de orden, la separación de variables y el análisis detallado de la ecuación que lleva su nombre, que, sin embargo, había sido estudiada antes por Jacob Bernoulli.

2.14. Envoltentes y soluciones singulares

Antes de estudiar las ecuaciones no resueltas en la derivada, haremos una breve digresión geométrica. Consideremos el haz de curvas de la figura 2.4, cuya ecuación es $\varphi(x, y, C) = 0$. Como puede observarse, existe una curva, E , que no pertenece a la familia (y, por tanto, no

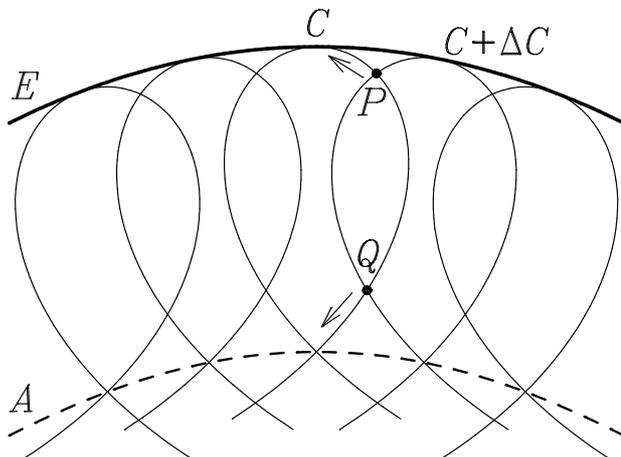


FIGURA 2.4 Envoltente y puntos múltiples de un haz de curvas.

satisface dicha ecuación uniparamétrica), pero que es tangente en cada punto a una curva de la familia. Una curva con esta propiedad se llama **envoltente** del haz de curvas. Como sabemos, al derivar la ecuación del haz y eliminar el parámetro C obtenemos la ecuación diferencial de la familia $F(x, y, y') = 0$ que, a diferencia de lo que ocurre con la ecuación finita, sí será satisfecha por la envolvente, ya que en cada punto (x, y) su pendiente y' es la misma que la de la curva del haz a la que allí es tangente. Será por tanto una solución singular tanto en el sentido dado hasta ahora a ese concepto —puesto que no pertenece a la solución general— como en el más restrictivo usado a veces de ser una solución con la propiedad de que en todos sus puntos se infringe la propiedad de unicidad por pasar por ellos más de una solución con la misma tangente.

Como veremos, ésta es una forma típica, aunque no exclusiva, en que aparecen las soluciones singulares de ecuaciones no resueltas en la derivada. Para que podamos comprobar este extremo, veamos cómo puede calcularse la ecuación de la envolvente. El punto P de la figura está en dos curvas del haz correspondientes a los valores C y $C + \Delta C$ del parámetro; por tanto, satisface las ecuaciones de ambas curvas $\varphi(x, y, C) = 0$ y $\varphi(x, y, C + \Delta C) = 0$, o combinaciones lineales independientes de estas dos ecuaciones como

$$\varphi(x, y, C) = 0, \quad (2.85)$$

$$\frac{\varphi(x, y, C + \Delta C) - \varphi(x, y, C)}{\Delta C} = 0. \quad (2.86)$$

En el límite $\Delta C \rightarrow 0$ las dos curvas tenderán a confundirse y el punto P irá a la envolvente que, por tanto, satisfará las ecuaciones que se obtienen tomando dicho límite:

$$\varphi(x, y, C) = 0, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C}(x, y, C) = 0. \quad (2.88)$$

La ecuación finita de la envolvente se obtiene eliminando el parámetro C entre las dos ecuaciones anteriores. La envolvente no satisface la ecuación de la familia para ningún valor fijo de C ,

pero —suponiendo, además de la regularidad, que $\partial^2\varphi/\partial C^2 \neq 0$ — puede en principio usarse la ecuación (2.88) para obtener el valor $C(x, y)$ que corresponde a la curva de la familia tangente a la envolvente en (x, y) . Sustituyendo ese valor variable de la constante en (2.87) se obtiene la ecuación implícita de la envolvente. Nótese, sin embargo, que las ecuaciones (2.87)–(2.88) pueden contener otros lugares geométricos aparte de envolventes. Por ejemplo, el punto Q satisfará en ese límite las mismas ecuaciones, pero converge a una línea de **puntos múltiples**⁴, es decir, puntos donde cada curva del haz se corta a sí misma. Pero nótese que la línea de puntos múltiples A no es tangente al haz y, por tanto, no tiene la misma pendiente. En consecuencia, pueden distinguirse las envolventes de otras curvas que satisfagan las ecuaciones (2.87)–(2.88) porque ellas satisfacen, además, la ecuación diferencial del haz. (Véase también el problema 2.29).

EJERCICIO 2.22 Halle las envolventes del haz $(x - a)^2 + y^2 = 1$. ¿Hay puntos múltiples?

2.15. Ecuaciones no resueltas en la derivada

Si se quiere resolver una ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$, puede intentarse despejar z de la ecuación finita $F(x, y, z) = 0$ y resolver las ecuaciones $y' = z(x, y)$ —con $F(x, y, z(x, y)) = 0, \forall(x, y)$ — que aparezcan, al tiempo que se tiene cuidado con las soluciones singulares que puedan perderse o ganarse en el proceso.

Por ejemplo, la ecuación

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0 \quad (2.89)$$

puede escribirse, resolviendo para la derivada, como

$$(y' - x)(y' - y) = 0, \quad (2.90)$$

por lo que las soluciones son las que se obtienen anulando cada factor: $y = x^2/2 + C$ e $y = Ce^x$.

Otro ejemplo lo encontramos al resolver el problema de Kepler en mecánica. En el caso del potencial newtoniano $V = -k/r$, las leyes de conservación de la energía mecánica y el momento angular en coordenadas polares son

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{k}{r}, \quad L = mr^2\dot{\phi}. \quad (2.91)$$

Si se elimina t de estas ecuaciones y en lugar de la distancia polar r se usa $u \equiv 1/r$, la ecuación de la órbita se escribe como sigue:

$$(u')^2 + u^2 - \frac{2\varepsilon}{p}u = \frac{e^2 - 1}{p^2}. \quad (2.92)$$

El signo $\varepsilon \equiv |k|/k$ debe elegirse como $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) en el caso de fuerzas atractivas (repulsivas). El parámetro focal $p \equiv L^2/m|k|$ se llama *semilatus rectum* en astronomía y la excentricidad $e \equiv \sqrt{1 - E/E_0}$ se define por medio de la energía mínima $E_0 \equiv -|k|/2p$ de las órbitas circulares del caso atractivo.

La ecuación

$$\frac{du}{\sqrt{\frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2\varepsilon}{p}u - u^2}} = \pm d\phi, \quad (2.93)$$

⁴También son llamados, a veces, puntos **acnodales**.

que se obtiene tras despejar la derivada $u' = du/d\varphi$ y separar variables, se resuelve haciendo la integral

$$\int \frac{du}{\sqrt{A + 2Bu - u^2}} = \arccos \frac{B - u}{\sqrt{A + B^2}}, \quad (2.94)$$

de forma que, usando la constante de integración φ_0 que nos da la posición del pericentro, la ecuación de la órbita se escribe como

$$u = \frac{\varepsilon + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{p}. \quad (2.95)$$

Al separar variables en (2.92), se han perdido las envolventes de la solución general (2.95) dadas por

$$u = \frac{\varepsilon \pm e}{p}, \quad (2.96)$$

que también se obtienen haciendo $u' = 0$ en (2.92). El significado geométrico de esas soluciones singulares es obvio: dan las posiciones de los ábsides, ya que corresponden a los valores mínimo y máximo de r . El primero de esos lugares geométricos corresponde a los pericentros $pu = \varepsilon + e$ y existe siempre; pero, como $u > 0$, la solución $pu = \varepsilon - e$, que nos da los apocentros, solo aparece cuando, como en el caso de la figura 2.5, la fuerza es atractiva ($\varepsilon = 1$) y la energía negativa ($0 \leq e < 1$).

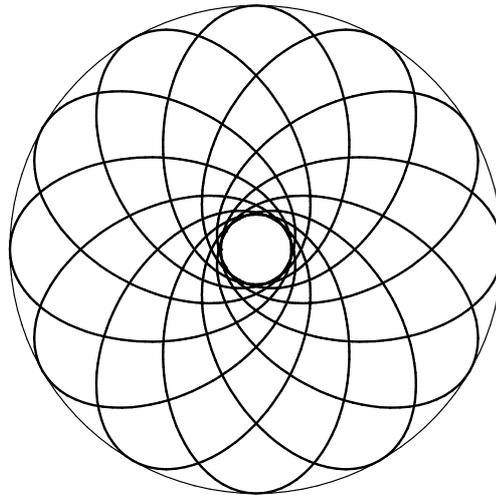


FIGURA 2.5 Órbitas elípticas, pericentros y apocentros.

EJERCICIO 2.23 Resuelva la ecuación $y^2(1 + y'^2) = 1$.

No obstante, en muchos casos el mero hecho de despejar la derivada (es decir, z) no es tarea fácil y aun cuando pueda hacerse el resultado puede ser complicado. Por ello, a menudo, en vez de buscar la solución explícita de la ecuación finita $F(x, y, z) = 0$, es mejor resolverla en forma paramétrica:

$$x = \alpha(u, v), \quad (2.97)$$

$$y = \beta(u, v), \quad (2.98)$$

$$z = \gamma(u, v), \quad (2.99)$$

con $F[\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)] = 0, \forall(u, v)$, y utilizar luego el hecho de que $dy = z dx$, es decir,

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} du + \frac{\partial \beta}{\partial v} dv = \gamma \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} du + \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv \right), \quad (2.100)$$

para obtener una ecuación en forma simétrica. Por cada solución $v(u)$ de esta ecuación que seamos capaces de calcular, tenemos una solución paramétrica de la ecuación de partida en la forma

$$x = \alpha[u, v(u)], \quad (2.101)$$

$$y = \beta[u, v(u)]. \quad (2.102)$$

Por ejemplo, si completamos cuadrados en la ecuación (2.92) del problema de Kepler,

$$(u')^2 + \left(u - \frac{\varepsilon}{p}\right)^2 = \frac{e^2}{p^2}, \quad (2.103)$$

se ve sin dificultad cómo obtener soluciones paramétricas. Por ejemplo, eligiendo como parámetros el nuevo ángulo θ y el ángulo polar φ , una solución es

$$\varphi = \varphi, \quad (2.104)$$

$$u = \frac{\varepsilon}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta, \quad (2.105)$$

$$u' = -\frac{e}{p} \sin \theta. \quad (2.106)$$

Si ahora usamos estas ecuaciones para calcular $du = u' d\varphi$, obtenemos $d\theta = d\varphi$, cuya solución $\theta = \varphi - \varphi_0$ sustituida en (2.105) nos devuelve la órbita (2.95).

EJERCICIO 2.24 Use la parametrización $x = u, y = \cos v, y' = \tan v$ para resolver la ecuación $y^2(1 + y'^2) = 1$.

EJERCICIO 2.25 Resuelva $x^2 + (y'^2) = 1$.

Veamos, a continuación algunas familias de ecuaciones en las que es inmediato acertar con la parametrización adecuada.

2.15.1. Ecuaciones de la forma $F(y') = 0$

Si faltan tanto la variable independiente como la dependiente, las soluciones son de la forma $y' = u$, para toda raíz u de la ecuación $F(u) = 0$. Por tanto, tenemos $y = ux + C$, es decir, $u = (y - C)/x$, por lo que la solución de la ecuación diferencial puede escribirse en forma implícita,

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0, \quad (2.107)$$

sin necesidad de hallar las raíces de F . Claro está que si no existe ninguna de tales raíces la solución que acabamos de escribir será formal.

EJERCICIO 2.26 Escriba la solución de $(y')^7 - 5y' + 3 = 0$. ¿Es formal dicha solución si solo admitimos soluciones reales?

En las ecuaciones que estudiaremos en los siguientes cuatro apartados, tras hacer $y' = u$, hay que resolver la condición $dy = u dx$.

2.15.2. Ecuaciones de la forma $x = g(y')$

Si falta la incógnita y puede despejarse la variable independiente, la solución paramétrica de la ecuación es inmediata: basta tomar $y' = u$, $x = g(u)$, con lo que luego hay que resolver $dy = ug'(u) du$ que tiene sus variables separadas y proporciona directamente la solución paramétrica de la ecuación de partida:

$$x = g(u), \quad y = \int ug'(u) du + C. \quad (2.108)$$

EJERCICIO 2.27 Resuelva $(y')^2 - x - 1 = 0$.

2.15.3. Ecuaciones de la forma $y = g(y')$

Si falta la variable independiente y puede despejarse la incógnita, la solución paramétrica de la ecuación es $y' = u$, $y = g(u)$ y hay que resolver $g'(u) du = u dx$, que es separable y permite hallar la solución paramétrica de la ecuación de partida:

$$x = \int \frac{g'(u)}{u} du + C, \quad y = g(u). \quad (2.109)$$

EJERCICIO 2.28 Resuelva $y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5$.

2.15.4. Ecuaciones de Clairaut

La ecuación de Clairaut⁵

$$y = xy' + g(y') \quad (2.110)$$

puede resolverse, como los casos anteriores, con el parámetro $y' = u$, ya que la ecuación paramétrica será $y = xu + g(u)$ y la condición $dy = u dx$ que debe satisfacerse: $u dx + [x + g'(u)] du = u dx$. Por tanto, ésta es la solución:

$$y = xu + g(u), \quad (2.111)$$

$$[x + g'(u)] du = 0. \quad (2.112)$$

Puesto que en (2.112) puede anularse cualquiera de los factores, tendremos dos soluciones.

Solución general

Si se anula el segundo factor (o usamos el factor integrante $\mu \equiv 1/[x + g'(u)]$) obtenemos $du = 0$ y sustituyendo $u = C$ en (2.111) obtenemos la solución general

$$y = Cx + g(C), \quad (2.113)$$

que, como vemos, es siempre un haz de rectas.



⁵ **Alexis Claude Clairaut** (7-05-1713, París; 17-05-1765, París). Entre los muchos problemas que estudió destaca el de los tres cuerpos. En su estudio del movimiento de la Luna, usó métodos de cálculo de soluciones singulares. Calculó la vuelta del cometa Halley en 1759 y participó en la expedición dirigida por Maupertuis para comprobar la predicción teórica de Newton de que la Tierra es un esferoide oblato.

Solución singular

Si se anula el primer factor, tenemos directamente una solución en forma paramétrica:

$$x + g'(u) = 0, \quad (2.114)$$

$$y = xu + g(u), \quad (2.115)$$

es decir, $x = -g'(u)$, $y = -ug'(u) + g(u)$. Esta solución singular (que también se obtiene haciendo $1/\mu = 0$) es precisamente la ecuación de la envolvente de la general, ya que la ecuación (2.115) es la del haz (con $u = C$) y (2.114) su derivada con respecto al parámetro.

EJERCICIO 2.29 Resuelva $y = xy' - y^2$.

2.15.5. Ecuaciones de Lagrange

La ecuación de Lagrange⁶ es

$$y = xf(y') + g(y') \quad (2.116)$$

con $f(u) \neq u$. Usando de nuevo el cambio $y' = u$ obtenemos la ecuación paramétrica $y = xf(u) + g(u)$ y la condición $dy = u dx$ que debe cumplirse: $f(u)dx + [xf'(u) + g'(u)] du = u dx$. Por tanto,

$$y = xf(u) + g(u), \quad (2.117)$$

$$[f(u) - u] dx + [xf'(u) + g'(u)] du = 0. \quad (2.118)$$

La segunda ecuación es lineal con respecto a x y, tras multiplicarla por $\mu \equiv 1/[f(u) - u]$, obtenemos

$$\frac{dx}{du} + \frac{f'(u)}{f(u) - u} x + \frac{g'(u)}{f(u) - u} = 0. \quad (2.119)$$

Sabemos obtener la solución general $x = \varphi(u, C)$, que sustituida en (2.117) nos da la general de la ecuación de Lagrange en forma paramétrica

$$x = \varphi(u, C), \quad (2.120)$$

$$y = \varphi(u, C)f(u) + g(u). \quad (2.121)$$

La posibilidad de soluciones singulares viene de la anulación del factor $1/\mu = [f(u) - u] = 0$. En efecto, si hay soluciones (constantes) de la ecuación

$$u = f(u) \quad (2.122)$$

(lo que puede ocurrir para uno o varios valores de u , pero no para todo u , ya que entonces estaríamos en caso de la ecuación de Clairaut), cada una de ellas define una recta $y = xf(u) + g(u)$ que satisface la ecuación de Lagrange.

Nótese que en vez de utilizar todo el procedimiento descrito arriba, basta recordar que tras hacer el cambio $y' = u$ la derivada de la ecuación de partida —es decir, la ecuación (2.118)— admite un factor integrante que depende solo de u .



⁶ **Joseph-Louis Lagrange** (25-01-1736, Turín, Cerdeña-Piamonte; 10-04-1813, París). Destacó en estudios sobre análisis, teoría de números, mecánica celeste y mecánica analítica, de la que puede ser considerado como principal fundador. Recogió todo lo que sobre mecánica se había hecho desde Newton en su obra maestra: *Mécanique analytique* (1788). Se le recuerda por sus ecuaciones del movimiento, las coordenadas generalizadas, el concepto de energía potencial y los multiplicadores que llevan su nombre.

EJERCICIO 2.30 Halle la solución general de $y = 2xy' - y'^3$. ¿Hay soluciones singulares?

EJERCICIO 2.31 Halle un factor integrante de la ecuación (2.118).

2.15.6. Método de derivación

En algunos casos la forma más rápida de resolver una ecuación diferencial consiste en derivarla primero, ya que la nueva ecuación puede ser más simple que la original. Claro que la nueva ecuación tendrá más soluciones y habrá que elegir entre ellas aquéllas que también satisfagan la ecuación original. A título de ejemplo volveremos a resolver la ecuación (2.92) del problema de Kepler. Al derivar la ecuación obtenemos

$$2u' \left(u'' + u - \frac{\varepsilon}{p} \right) = 0. \quad (2.123)$$

La condición de que se anule lo que hay entre paréntesis es la ecuación de Binet:

$$u'' + u = \frac{\varepsilon}{p}. \quad (2.124)$$

Como en este caso describe un oscilador armónico sometido a una fuerza externa constante, se resuelve fácilmente y, como veremos en el siguiente capítulo, todas las soluciones se hallan contenidas en la solución general

$$u = \frac{\varepsilon}{p} + C \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (2.125)$$

Aquí hay dos constantes arbitrarias, C y φ_0 , pero, como la ecuación original es de primer orden, solo puede quedar una. En efecto, si sustituimos la familia de soluciones que acabamos de hallar en (2.92), se ve directamente que hay que elegir $C = e/p$; por tanto, se vuelven a obtener las órbitas (2.95). Si en (2.123) lo que se anula es u' , sustituyendo la solución $u = C$ en la ecuación (2.92) se hallan las soluciones singulares que describen los ápsides.

EJERCICIO 2.32 Resuelva $(y')^2 + 2y = 1$.

2.16. Problemas

2.1 Halle las ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas: (a) rectas que pasan por el origen, (b) $y = C \sin 2x$.

2.2 Halle la solución general de

$$\frac{(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy}{(1 - xy)^2} = 0.$$

Discuta los intervalos de definición de las soluciones correspondientes a las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$.

2.3 Resuelva $(ye^{xy} + 2x) dx + (xe^{xy} - 2y) dy = 0$, $y(0) = 2$.

2.4 ¿Una paradoja? Consideremos, para $(x, y) \neq (0, 0)$, la ecuación diferencial:

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

(a) Demuestre la igualdad de las derivadas cruzadas.

(b) Pruebe que la ecuación puede escribirse como $d(\arctan y/x) = 0$, o, en coordenadas polares, como $d\varphi = 0$.

(c) Calcule la integral curvilínea del campo asociado a la ecuación diferencial a lo largo de una circunferencia centrada en el origen.

(d) El resultado así obtenido debería resultarle paradójico. Comente este extremo.

2.5 Halle, en coordenadas polares, todas las curvas cuyos arcos tengan longitudes proporcionales al ángulo que sustentan desde el origen.

2.6 Resuelva $(1 - x^2) y' = 1 - y^2$, $y(1) = 1$.

2.7 Halle la condición necesaria y suficiente para que la ecuación $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ admita un factor integrante, cuya expresión debe hallarse, de la forma $\mu(xy)$.

2.8 Resuelva $y' = \frac{2x^3y - y^4}{x^4 - 2xy^3}$.

2.9 Demuestre que si la ecuación $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es exacta y admite un multiplicador $\mu(x, y)$ distinto de una constante, $\mu(x, y) = C$ es una solución general de la ecuación.

2.10 Halle la solución de $2xy dx + (1 - x^2 - y^2) dy = 0$.

2.11 Resuelva $y' - x^2y = x^5$.

2.12 Halle $y(10)$, si se cumple $y' - 2xy = 1$ e $y(0) = 1$.

Sugerencia: Use la definición y propiedades de la función error que pueden hallarse en la página 283.

2.13 Halle la solución general de $y^3 dx + (xy - y^4) dy = 0$.

Sugerencia: Use la definición de la integral exponencial de la página 286.

2.14 Circuito RL. Sea un circuito eléctrico con resistencia R y autoinducción L , sometido a una diferencia de potencial $V(t)$. Conocida la intensidad inicial $I_0 = I(t_0)$, halle $I(t)$ y aplique los resultados al caso de una tensión alterna sinusoidal $V = V_0 \sin \omega t$.

2.15 Ecuación homogénea. Demuestre que si $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es una ecuación homogénea, admite el factor integrante $(xP + yQ)^{-1}$, si el mismo es finito. ¿Cuál será el factor integrante si $xP + yQ = 0$?

2.16 Ecuación isobárica. Las ecuaciones homogéneas tienen una invariancia de escala frente a transformaciones $(x, y) \rightarrow (ax, ay)$. Una generalización viene dada por las ecuaciones isobáricas, que son invariantes frente a cambios del tipo $(x, y) \rightarrow (ax, a^\lambda y)$ para algún valor de λ ; es decir, son ecuaciones del tipo $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ con

$$P(ax, a^\lambda y) = a^r P(x, y), \quad Q(ax, a^\lambda y) = a^{r-\lambda+1} Q(x, y), \quad \forall a. \quad (2.126)$$

Discuta el método de solución de ecuaciones de este tipo.

2.17 Resuelva $(y^2 - 1) dx + (3x^2 - 2xy) dy = 0$.

2.18 Trayectorias ortogonales. Dada una familia uniparamétrica de curvas $\varphi(x, y, C) = 0$, se llaman trayectorias ortogonales las curvas que cortan a las de la familia en ángulo recto en todos los puntos. Si $F(x, y, y') = 0$ es la ecuación diferencial de la familia, ¿cuál será la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales?

2.19 Halle las trayectorias ortogonales a las parábolas $y^2 = Cx$.

2.20 Resuelva $(6x + 4y + 3) dx + (3x + 2y + 2) dy = 0$.

2.21 Masa variable. Un cohete de masa estructural M contiene combustible con una masa inicial m . Se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra y expulsa, con velocidad v , k kilogramos de gases por segundo. Si se desprecian todas las fuerzas excepto el peso y se supone que la aceleración de la gravedad se mantiene constante durante todo el trayecto, ¿cuáles serán la velocidad y altura cuando se agote el combustible?

2.22 Masa relativista. En relatividad especial la masa de una partícula que se mueve con velocidad v es $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, siendo m_0 su masa en reposo y c la velocidad de la luz en el vacío.

(a) Si la partícula parte del reposo y se mueve en el espacio vacío bajo la influencia de un campo gravitatorio constante, ¿cuál será su velocidad en el instante t , y cuando haya transcurrido un gran lapso de tiempo?

(b) Sea $\Delta m \equiv m - m_0$ la variación de la masa de la partícula y ΔE el trabajo realizado por la fuerza $F = d(mv)/dt$. Verifique directamente que $\Delta E = \Delta m c^2$.

(c) Como comprobación, deduzca la ley de variación de la masa de la partícula con la velocidad usando como punto de partida este último resultado y la definición de fuerza.

2.23 Resuelva

$$y' = \left(\frac{x - y + 3}{x - y + 1} \right)^2.$$

2.24 Demuestre que toda ecuación homogénea es separable en coordenadas polares.

2.25 Resuelva $y' + e^{-x}y^2 - y - e^x = 0$.

2.26 Halle la solución general de $(y')^2 - 2xy' + y = 0$.

2.27 Demuestre que si la recta $x = x_0$ corta a la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial $y' + p(x)y = q(x)$, las tangentes en los puntos de intersección son concurrentes. Demuestre que en el caso de $y' - y/x = -x^{-3}$, el lugar geométrico de los puntos de concurrencia obtenidos al variar x_0 es una línea recta.

2.28 Halle las envolventes y los puntos múltiples del haz de **estrofoides** $(x - C)^2(1 - y) = (1 + y)y^2$. Dibuje el haz.

2.29 Además de envolventes y puntos múltiples, las ecuaciones (2.87)–(2.88) pueden contener **cúspides**. Como ejemplo, halle y dibuje la solución general de la ecuación diferencial $9y(y')^2 = 4$. Analice la solución de (2.87)–(2.88) en este caso. ¿Es solución de la ecuación diferencial?

2.30 «Radio» del universo. En el modelo cosmológico estándar el factor de escala R del universo de Robertson-Walker evoluciona de acuerdo con la ecuación de Friedmann:

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{R} - k, \quad (2.127)$$

donde $k = -1, 0, 1$. Discuta las soluciones de esta ecuación y vea en qué casos hay «gran explosión» y en cuáles el universo camina hacia un colapso final.

2.31 Condiciones en el infinito. A veces, para determinar la solución, en vez de dar la condición inicial, se impone una condición adecuada en el infinito. Como ejemplo, halle la única solución que se mantiene acotada en el límite $x \rightarrow \infty$ de la ecuación

$$y' - y = \sin x.$$

2.32 Halle todas las soluciones de $(y')^2 + y^2 = 1$.

2.33 Encuentre una expresión que dé por medio de una cuadratura la solución general de ecuaciones de la forma

$$y f(xy) dx + x g(xy) dy = 0.$$

2.34 Discuta el método de solución de ecuaciones de la forma

$$\frac{df}{dy}(y) y' + A(x)f(y) = B(x).$$

Aplique el método para resolver $3y^2y' - xy^3 = x^2$.

2.35 Ecuación de Abraham⁷-Lorentz⁸. En la aproximación no relativista, una partícula puntual de carga q que se mueve en un campo eléctrico constante y uniforme \vec{E} satisface la ecuación

$$m\vec{a} = q\vec{E} + \frac{2}{3}q^2\dot{\vec{a}},$$

cuando se tiene en cuenta el frenado debido a la radiación emitida. Demuestre que estas ecuaciones tienen soluciones físicamente inaceptables, en las que la aceleración crece sin límite. Compruebe que la condición adicional de que en el límite $q \rightarrow 0$ se recupere $m\vec{a} = 0$ permite seleccionar las soluciones físicas. ¿Cuáles son éstas?

2.36 Demuestre que una ecuación del tipo

$$\dot{x} = f(x)$$

no puede tener soluciones oscilantes. ¿Por qué no constituye la solución $x = \sin(t - t_0)$ de la ecuación $\dot{x} = \sqrt{1 - x^2}$ un contraejemplo de la anterior afirmación?

Sugerencia: Considere la gráfica de una solución oscilante.

2.37 Halle todas las soluciones de la ecuación

$$xy' = -y + \sqrt{xy + 1}.$$

2.38 Resuelva el siguiente problema y discuta el intervalo de definición de las soluciones:

$$\dot{x} = \frac{1}{e^x - t}, \quad x_0 = \ln t_0.$$

2.39 Resuelva la siguiente ecuación diferencial, para los distintos valores reales de α :

$$y^2 - (y')^2 = \alpha.$$



⁷ **Max Abraham** (26-03-1875, Dánzig, Alemania —hoy día se llama Gdansk y pertenece a Polonia—; 16-11-1922, Múnich). Este estudiante de Planck trabajó especialmente en electrodinámica y su teoría del electrón alcanzó gran notoriedad hasta que fue sustituida por la de Lorentz. Se opuso el resto de su vida a la relatividad especial de Einstein, que era compatible con la teoría de Lorentz.



⁸ **Hendrik Antoon Lorentz** (18-07-1853, Arnhem, Países Bajos; 4-02-1928, Haarlem, Países Bajos). Su refinamiento de la teoría de Maxwell y su proposición, antes de que la existencia del electrón estuviera confirmada, de que la luz era creada por oscilaciones de la carga eléctrica en los átomos le llevaron a su teoría del electrón, que le valdría el premio Nobel de Física en 1902. En ciertos aspectos es un antecesor de la teoría de la relatividad especial de Einstein, donde las transformaciones que

llevan su nombre juegan un papel central.

Capítulo 3

Ecuaciones de orden superior

*I consider that I understand an equation
when I can predict the properties of its solutions,
without actually solving it.*
Paul Adrien Maurice Dirac

En este capítulo estudiaremos ecuaciones diferenciales de orden arbitrario. Tras repasar los pocos métodos generales que pueden utilizarse para intentar resolver una ecuación de orden superior al primero, nos concentraremos en las ecuaciones lineales, para las cuales una elegante combinación de álgebra lineal y teorema de existencia y unicidad permite establecer una teoría completa sobre la estructura del espacio de sus soluciones, aunque no proporciona, por desgracia, un método general de resolución. Al final, veremos los primeros métodos (esta vez sistemáticos) para resolver ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Otro método para este caso de coeficientes constantes (incluidos los sistemas) es el de la transformación de Laplace que abordaremos en el capítulo 5, mientras que la solución de ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden —que constituye, probablemente, el caso más importante en física— volverá a ser estudiada en el capítulo 6.

3.1. Significado geométrico

El significado geométrico de una ecuación diferencial es extensión directa del correspondiente a la de primer orden. Si tenemos una familia de curvas planas que depende de n parámetros independientes C_1, C_2, \dots, C_n y entre su ecuación y las n primeras derivadas

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'' = 0, \quad (3.3)$$

\vdots

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y^{(n)} = 0 \quad (3.4)$$

eliminamos los n parámetros, obtenemos la ecuación diferencial de la familia:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3.5)$$

La ecuación de la familia (3.1) es la solución general de esta ecuación y cada una de sus curvas es una curva integral.

EJERCICIO 3.1 Halle la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio unidad.

3.2. Teorema de existencia y unicidad

De nuevo se trata de una extensión directa del caso correspondiente a primer orden y se aplican los comentarios que allí hicimos y no vamos a repetir ahora. Si tenemos una ecuación en forma normal

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (3.6)$$

tal que f y sus derivadas $\partial f/\partial y, \partial f/\partial y', \dots, \partial f/\partial y^{(n-1)}$ son continuas, existe una única solución que satisface la ecuación y un conjunto de n condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \quad (3.7)$$

$$y'(x_0) = y'_0, \quad (3.8)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3.9)$$

3.3. Equivalencia entre ecuaciones y sistemas

Siempre puede rebajarse el orden de una ecuación, a costa de aumentar el número de incógnitas y ecuaciones. Así, si definimos las nuevas variables dependientes $y_1 \equiv y, y_2 \equiv y', \dots, y_n \equiv y^{(n-1)}$, la ecuación de orden n (3.6) es equivalente al sistema de n ecuaciones de primer orden

$$y'_1 = y_2, \quad (3.10)$$

$$y'_2 = y_3, \quad (3.11)$$

$$\vdots$$

$$y'_{n-1} = y_n, \quad (3.12)$$

$$y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (3.13)$$

EJERCICIO 3.2 Escriba la ecuación del oscilador armónico forzado como un sistema de ecuaciones.

3.4. Reducción de orden

Cuando se trata de resolver una ecuación de orden superior al primero que no pertenece a ningún tipo conocido, una de las pocas cosas que pueden ensayarse es intentar reducir su orden hasta llegar a ecuaciones (de primer orden en el mejor de los casos) que se sepan resolver. Vamos a ver algunos casos en que esta reducción de orden puede hacerse de forma sistemática.

3.4.1. Ecuaciones sin la variable dependiente

Si falta la variable dependiente,

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.14)$$

basta considerar a $u \equiv y'$ como la nueva variable dependiente y usar $y'' = u', \dots, y^{(n)} = u^{(n-1)}$ para obtener una ecuación de orden $n - 1$,

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = 0, \quad (3.15)$$

cuya solución general $\tilde{\varphi}(x, u, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$ es, una vez deshecho el cambio $u = y'$, una familia de ecuaciones diferenciales de primer orden: $\tilde{\varphi}(x, y', C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$. Si, a su vez, estas últimas pueden ser resueltas, proporcionarán la solución general de la ecuación de partida $\varphi(x, y, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n) = 0$. Además, cada solución singular de (3.15) será una ecuación diferencial de primer orden que dará una familia de soluciones singulares de la ecuación original.

Por ejemplo, poniendo $u = y'$ en la ecuación

$$y''^2 = 240x^2y', \quad (3.16)$$

se obtiene la ecuación de primer orden $u'^2 = 240x^2u$, que admite $u = 15(x^2 + C_1)^2$ como solución general. Al deshacer el cambio de variables, quedan las ecuaciones $y' = 15(x^2 + C_1)^2$, que tras una sencilla integración dan la solución general $y = 3x^5 + 10C_1x^3 + 15C_1^2x + C_2$. Además, existe la solución singular $u = y' = 0$ que conduce a la familia $y = C_3$.

EJERCICIO 3.3 Halle la velocidad de una partícula puntual que cae a lo largo de una recta vertical bajo la acción de la gravedad en el seno de un fluido cuyo rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad. Demuestre que se alcanza una **velocidad límite**.

Nótese que si, además de y , faltan $y', \dots, y^{(m-1)}$, la ecuación es de orden $n - m$ en $u \equiv y^{(m)}$.

3.4.2. Ecuaciones autónomas

Si falta la variable independiente,

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.17)$$

la ecuación se llama autónoma y es invariante frente a traslaciones $x \rightarrow x - a$, lo que se traduce por el hecho de que una de las constantes arbitrarias de integración está siempre relacionada con el origen de la variable independiente, ya que si $\varphi(x, y) = 0$ es solución de la ecuación (3.17), también $\varphi(x - x_0, y) = 0$ lo será para todo x_0 . Por tanto, una solución general podrá expresarse en términos de n constantes arbitrarias C_1, C_2, \dots, C_{n-1} y x_0 como $\varphi(x - x_0, y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$. Para reducir el orden de este tipo de ecuaciones basta considerar a y como la nueva variable independiente, a $u \equiv y'$ como la nueva incógnita, y usar

$$y'' = \frac{du}{dy}u, \quad (3.18)$$

$$y''' = \frac{d^2u}{dy^2}u^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 u, \quad (3.19)$$

\vdots

$$y^{(n)} = \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}u^{n-1} + \dots + \left(\frac{du}{dy}\right)^{n-1} u \quad (3.20)$$

en la ecuación, lo que proporciona una ecuación de orden $n - 1$,

$$\tilde{F}\left(y, u, \frac{du}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right) = 0, \quad (3.21)$$

cuya solución general $\tilde{\varphi}(y, u, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$ es, una vez deshecho el cambio $u = y'$, una familia de ecuaciones de primer orden que una vez resuelta nos proporcionará la solución general de la ecuación de partida $\varphi(x, y, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n) = 0$. Cada solución singular será una ecuación de primer orden que dará una familia uniparamétrica de soluciones singulares.

Un ejemplo bien conocido nos lo proporciona un sistema mecánico conservativo unidimensional en el que una partícula cuya posición es x se mueve en el seno de un campo de fuerzas $F(x) = -V'(x)$. La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} = -V'(x). \quad (3.22)$$

Como falta la variable independiente (el tiempo t en este caso), consideraremos que la nueva incógnita es la velocidad $v = \dot{x}$ y usando $\ddot{x} = \dot{v} = vv'$, la ecuación se escribe como

$$m vv' = -V'(x), \quad (3.23)$$

que puede integrarse directamente, puesto que tiene separadas sus variables, para obtener la ley de conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E, \quad (3.24)$$

que, si tenemos en cuenta que $v = \dot{x}$, y despejamos la derivada se convierte en un par de ecuaciones separables de primer orden:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}. \quad (3.25)$$

Tras separar las variables e integrar obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = \pm (t - t_0). \quad (3.26)$$

EJERCICIO 3.4 Resuelva $y'' = (2y + 1)y'$.

3.4.3. Ecuaciones equidimensionales en x

Si la ecuación, en vez de frente a traslaciones de x , es invariante frente a todos cambios de escala del tipo $x \rightarrow ax$,

$$F(ax, y, a^{-1}y', a^{-2}y'', \dots, a^{-n}y^{(n)}) = 0 \iff F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.27)$$

la ecuación se llama equidimensional en x y el cambio de variable independiente $x \rightarrow t \equiv \ln x$ dado por

$$x = e^t, \quad (3.28)$$

$$y' = \frac{1}{x} \dot{y}, \quad (3.29)$$

$$y'' = \frac{1}{x^2} (\ddot{y} - \dot{y}), \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ y^{(n)} &= \frac{1}{x^n} \left[\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{dy}{dt} \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

la reduce a una autónoma, ya que

$$F(x, y, y', y'', \dots) = F[x \cdot 1, y, x^{-1} \dot{y}, x^{-2} (\ddot{y} - \dot{y}), \dots] = 0 \quad (3.32)$$

será equivalente a

$$\tilde{F}(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) \equiv F(1, y, \dot{y}, \ddot{y} - \dot{y}, \dots) = 0, \quad (3.33)$$

cuyo orden puede rebajarse con el cambio $(t, y) \rightarrow (y, u \equiv \dot{y})$, por ser autónoma.

EJERCICIO 3.5 Resuelva la ecuación $xy'' = yy'$.

3.4.4. Ecuaciones equidimensionales en y

Si la ecuación es invariante frente a todos los cambios de escala del tipo $y \rightarrow ay$,

$$F(x, ay, ay', ay'', \dots, ay^{(n)}) = 0 \iff F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.34)$$

se llama equidimensional en y y usaremos el cociente invariante y'/y en el cambio de variable dependiente $y \rightarrow u \equiv y'/y$,

$$y' = yu, \quad (3.35)$$

$$y'' = y(u' + u^2), \quad (3.36)$$

$$\vdots \quad (3.37)$$

$$y^{(n)} = y(u^{(n-1)} + \dots + u^n), \quad (3.38)$$

que reduce el orden de la ecuación, ya que

$$F(x, y, y', y'', \dots) = F[x, y \cdot 1, yu, y(u' + u^2), \dots] = 0 \quad (3.39)$$

será equivalente a

$$\tilde{F}(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \equiv F(x, 1, u, u' + u^2, \dots) = 0. \quad (3.40)$$

Si se resuelve esa ecuación y se deshace el cambio $u = y'/y$ queda una ecuación de primer orden, en forma muy parecida a la discutida en anteriores apartados.

El caso más habitual dentro de esta familia es el de las **ecuaciones homogéneas**, que son las que se escriben por medio de una función homogénea con respecto a la incógnita y sus derivadas:

$$F(x, ay, ay', \dots, ay^{(n)}) = a^r F(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \quad (3.41)$$

Nótese, de nuevo, que, aunque prácticamente universal, esta nomenclatura es confusa. En una ecuación de orden superior al primero, o en una ecuación lineal de primer orden solo se pide la homogeneidad con respecto a la incógnita y sus derivadas, mientras que para el resto de ecuaciones de primer orden se exige en (2.67) la homogeneidad con respecto a x e y . (Por ello, el cambio útil era entonces $u = y/x$, en vez del $u = y'/y$ que ahora usamos). Tal vez fuera mejor, aun a riesgo de resultar muy largo, usar el nombre de **homogéneas en y (y sus derivadas)**.

Debe señalarse que, aunque este método puede aplicarse a una ecuación lineal homogénea (a la que dedicaremos gran atención más adelante), la ecuación de orden inferior obtenida en tal caso es, en general, no lineal y tan difícil o más que la de partida. Por ejemplo, veremos en el problema 3.27 que al reducir el orden de una ecuación lineal homogénea de segundo orden se obtiene una de Riccati, con lo que rara vez se gana algo. Nótese también que, si $r > 0$, $y = 0$ es siempre una solución (tal vez singular).

EJERCICIO 3.6 Resuelva $yy'' = y'^2$.

3.4.5. Ecuaciones exactas

Si la ecuación es una derivada exacta

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad (3.42)$$

por cuadratura se obtiene inmediatamente una **integral primera**

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C, \quad (3.43)$$

que es una ecuación de orden $n - 1$.

EJERCICIO 3.7 Resuelva $yy'' + y'^2 = 0$.

Incluso si la ecuación no es exacta, a veces es posible reescribirla (usando un factor integrante o una transformación adecuada) de forma que sea exacta.

EJERCICIO 3.8 Convierta en exacta la ecuación $yy'' - y'^2 = 0$ dividiéndola por y^2 . Discuta las posibles soluciones singulares.

Recuerde que en física las simetrías están asociadas a leyes de conservación que proporcionan integrales primeras (que son llamadas a menudo **constantes del movimiento**).

EJERCICIO 3.9 Multiplique por la velocidad \dot{x} la ecuación (3.22) de la partícula puntual que se mueve en un campo conservativo unidimensional para convertirla en exacta y obtener como integral primera la ley de conservación de la energía mecánica.

3.5. Dependencia lineal de funciones

El resto del capítulo estará dedicado a las ecuaciones lineales, cuya naturaleza lineal hace que las soluciones de la homogénea tengan estructura de espacio vectorial. Se tratará de subespacios de dimensión finita del espacio vectorial de dimensión infinita de las funciones regulares¹ en un cierto intervalo I de la recta real. La estructura vectorial viene inducida por las operaciones habituales de adición de funciones y multiplicación por una constante y el elemento nulo es la función nula en el intervalo considerado. Por consiguiente, las funciones regulares

$$\{y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I\} \quad (3.44)$$

serán linealmente independientes si la única combinación lineal nula,

$$\sum_{k=1}^n C_k y_k(x) = 0, \quad \forall x \in I, \quad (3.45)$$

es la que tiene todos sus coeficientes nulos: $C_1 = \dots = C_n = 0$.

Por ejemplo, para todo n el conjunto de potencias $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es linealmente independiente en todo intervalo, ya que si el polinomio $C_1 + C_2x + \dots + C_{n+1}x^n$ tiene algún coeficiente no nulo, a lo sumo puede anularse en sus raíces, que nunca son más de n y no pueden llenar ningún intervalo. Como consecuencia de este resultado hay tantos vectores linealmente independientes como queramos y la dimensión de un espacio de funciones regulares es infinita.

Como estamos estudiando ecuaciones diferenciales, nos interesan (además de sus propiedades algebraicas) las derivadas de las funciones. Veremos que hay ciertas relaciones entre propiedades que involucran derivadas y otras puramente algebraicas. Empecemos definiendo el **determinante de Wronski**² o **wronskiano** de un conjunto de funciones $\{y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I\}$ como la función

$$W[y_1, \dots, y_n](x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (3.46)$$

Si el conjunto $\{y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I\}$ es linealmente dependiente, la combinación con coeficientes constantes (3.45) y sus $n - 1$ primeras derivadas se anularán en todo el intervalo:

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x) &+ C_2 y_2(x) &+ \cdots &+ C_n y_n(x) &= 0, \\ C_1 y_1'(x) &+ C_2 y_2'(x) &+ \cdots &+ C_n y_n'(x) &= 0, \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) &+ C_2 y_2^{(n-1)}(x) &+ \cdots &+ C_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

En cada punto x estas ecuaciones constituyen un sistema lineal homogéneo cuyas incógnitas son las C_k y que, por la hipótesis de dependencia lineal, tiene solución no nula. Por tanto en cada punto del intervalo el determinante del sistema, que es precisamente el wronskiano, se anulará.

¹Véase la nota de la página 17.



² **Josef Hoëné de Wronski** (23-08-1778, Wolsztyn, Polonia; 8-08-1853, Neuilly, Francia). Los determinantes que llevan su nombre los introdujo al estudiar el desarrollo de funciones en series criticando un trabajo anterior de Lagrange.

Esto demuestra que *el wronskiano de un conjunto linealmente dependiente de funciones se anula en todos los puntos del intervalo*. En consecuencia, si el wronskiano no se anula idénticamente, las funciones serán linealmente independientes.

EJERCICIO 3.10 Compruebe que el wronskiano de $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ no se anula en ningún punto de la recta real, lo que vuelve a demostrar que las potencias son linealmente independientes en todo intervalo.

El recíproco del anterior resultado, sin embargo, no es cierto, a menos que, como haremos enseguida, añadamos más condiciones. Si el wronskiano es nulo, el sistema (3.5) admite una solución no trivial en cada punto; pero, en general, nada garantiza que la misma pueda elegirse de forma que sea constante de punto a punto.

EJERCICIO 3.11 Considere la familia de funciones

$$\varphi_a(x) \equiv \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-(x-a)^2}\right), & \text{para } |x-a| < 1, \\ 0, & \text{para } |x-a| \geq 1. \end{cases} \quad (3.48)$$

Compruebe que las funciones $y_1 = \varphi_0$ e $y_2 = \varphi_2$ son linealmente independientes en el intervalo $(-1, 3)$, aunque su wronskiano se anule idénticamente. ¿Son regulares?

Por tanto, sin más condiciones, la anulación del wronskiano no garantiza la dependencia lineal de las funciones, pero si es distinto de cero las funciones son necesariamente independientes.

EJERCICIO 3.12 Use el último comentario para demostrar que el sistema

$$\{e^{k_i x} : i = 1, \dots, n\} \quad (3.49)$$

es linealmente independiente en todo intervalo si $k_i \neq k_j$ cuando $i \neq j$.

Diferiremos hasta el problema 3.6 la demostración de que todo sistema del tipo

$$\{x^{p_i} e^{k_i x} : p_i = 0, \dots, m_i; i = 1, \dots, n\} \quad (3.50)$$

es linealmente independiente en todo intervalo. Este resultado, que generaliza los dos de independencia lineal que hemos demostrado en los ejercicios 3.10 y 3.12, resultará de suma importancia al estudiar las ecuaciones lineales de coeficientes constantes.

3.6. Ecuaciones diferenciales lineales

Consideremos una ecuación lineal de orden n :

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x). \quad (3.51)$$

Puesto que dividiendo por a_0 lo único que puede variar es el intervalo de definición, consideraremos desde ahora que la derivada de orden más alto tiene coeficiente unidad:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x). \quad (3.52)$$

Como en el caso de la ecuación lineal de primer orden estudiada en el apartado 2.7, diremos que la ecuación es **homogénea** (o **incompleta**) cuando el término independiente es nulo: $b = 0$. En caso contrario se llama **completa** (o **inhomogénea**).

Supondremos siempre que *las funciones* a_1, a_2, \dots, a_n y b *son continuas en un cierto intervalo* I de la recta real en donde, por consiguiente, se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad del apartado 3.2. Puede, además, demostrarse, como veremos en el apartado A.3, que la solución que satisface esas condiciones iniciales *está definida en todo el intervalo* I en el caso de ecuaciones lineales. Por ello, en el resto del capítulo consideraremos soluciones definidas en todo el intervalo I en que los coeficientes a_k son continuos.

Para simplificar la notación usaremos el operador de derivación $D \equiv d/dx$ y definiremos para cada ecuación lineal (3.52) el operador lineal

$$L \equiv D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x), \quad (3.53)$$

que asocia a toda función regular definida en I , $f(x)$, la función

$$(Lf)(x) = f^{(n)}(x) + a_1(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)f'(x) + a_n(x)f(x). \quad (3.54)$$

Usando L la ecuación (3.52) se escribe simplemente como $Ly = b$ y la homogénea asociada como $Ly = 0$. La linealidad del operador,

$$L(C_1f_1 + C_2f_2) = C_1Lf_1 + C_2Lf_2, \quad \text{para constantes } C_1 \text{ y } C_2, \quad (3.55)$$

está garantizada por las propiedades elementales de la derivación, la adición y la multiplicación.

3.7. Ecuaciones lineales homogéneas

Consideremos una ecuación lineal homogénea de orden n :

$$Ly = 0. \quad (3.56)$$

La linealidad del operador L garantiza el **principio de superposición** que asegura que la suma de dos soluciones es una nueva solución y, en general, que dado cualquier conjunto de funciones $\{y_k : k = 1, \dots, r\}$ que son solución de la homogénea, toda combinación lineal de las mismas con coeficientes constantes C_k es también solución:

$$Ly_k = 0 \quad \implies \quad L \sum_{k=1}^r C_k y_k = \sum_{k=1}^r C_k Ly_k = 0. \quad (3.57)$$

Esto prueba que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea es un espacio vectorial. Para determinar su dimensión, demostraremos primero el recíproco del resultado sobre el wronskiano que hemos visto en el apartado 3.5, que será cierto con la hipótesis adicional de que las funciones sean solución de una ecuación lineal homogénea.

3.7.1. Wronskiano y dependencia lineal

Teorema 3.1 *Un conjunto de n soluciones, $Ly_k = 0$, de una ecuación lineal homogénea de orden n definida en el intervalo I es linealmente dependiente en I si y solo si su wronskiano se anula idénticamente en I , lo que a su vez sucede si y solo si se anula en un punto $x_0 \in I$.*

El hecho de que si el conjunto es dependiente su wronskiano se anula en todos los puntos de I (y , en particular, en x_0), era una propiedad algebraica demostrada en el apartado 3.5. Para el recíproco, en el que supondremos que el wronskiano se anula en un cierto punto x_0 , hace falta usar el teorema de existencia y unicidad, que será ahora aplicable porque suponemos que las funciones satisfacen una misma ecuación diferencial lineal. Construyamos una combinación lineal $y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$ con coeficientes C_k a determinar e impongamos que ella y sus primeras $n - 1$ derivadas se anulen en x_0 :

$$\begin{aligned} y(x_0) &= C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ y'(x_0) &= C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

Como por hipótesis el determinante de este sistema lineal, que es el wronskiano en x_0 , se anula, existe una solución no trivial para las C_k . Esto, por sí solo, demuestra que la combinación lineal y se anula en x_0 con coeficientes no nulos, pero no necesariamente que lo haga en el resto de los puntos de I con los mismos valores de los coeficientes, para demostrar lo cual usaremos el hecho de que, por la linealidad de la ecuación, la y construida con las C_k calculadas en x_0 es solución de la misma y satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, que no son otra cosa que las condiciones (3.58) y son también satisfechas por la función nula en el intervalo, que, además, siempre es solución de una ecuación homogénea. La unicidad garantiza, por tanto, que $y = \sum_{k=1}^n C_k y_k = 0$ en todo el intervalo con coeficientes no triviales y que, en consecuencia, las n soluciones y_k son linealmente dependientes, lo que acaba la demostración del resultado.

3.7.2. Espacio de soluciones de la ecuación homogénea

En un segundo paso demostraremos que la dimensión del espacio de soluciones de la ecuación homogénea de orden n no puede ser inferior a n ya que el teorema de existencia y unicidad garantiza que existen n soluciones correspondientes, respectivamente, a las condiciones iniciales dadas en las siguientes n columnas:

$$\begin{array}{ccc} y_1(x_0) = 1, & y_2(x_0) = 0, & y_n(x_0) = 0, \\ y_1'(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & y_n'(x_0) = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1, \end{array} \quad (3.59)$$

elegidas de forma que esas soluciones tengan en x_0 un wronskiano igual a 1 y sean, en consecuencia, linealmente independientes.

Se llama **sistema fundamental de soluciones** a todo conjunto formado por n soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de orden n . Acabamos de demostrar su existencia y es obvio que son infinitos, ya que basta cambiar las condiciones iniciales usadas en el anterior razonamiento manteniendo un determinante no nulo para obtener otro sistema fundamental. Además, demostraremos en un tercer paso que un sistema fundamental de soluciones es una base del espacio de soluciones de la ecuación, que, por tanto, tiene dimensión n y no puede contener conjuntos con más de n soluciones independientes.

Teorema 3.2 *Dadas n soluciones y_k linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de orden n , toda otra solución puede expresarse de forma única como combinación lineal con coeficientes constantes de esas soluciones.*

En efecto, si y es solución podemos plantear en un punto x_0 del intervalo I el sistema lineal

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1 y_1(x_0) & + & C_2 y_2(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n(x_0) & = & y(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) & + & C_2 y_2'(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n'(x_0) & = & y'(x_0), \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y^{(n-1)}(x_0), \end{array} \quad (3.60)$$

que tiene solución única para las C_k ya que su determinante es el wronskiano de las y_k y no se anula por ser éstas linealmente independientes. Utilicemos esos C_k para construir en todo I la combinación lineal $\sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$, que satisfará al igual que y la ecuación lineal homogénea y por construcción cumplirá las mismas condiciones iniciales que y en el punto x_0 . El teorema de existencia y unicidad garantiza que ambas soluciones coinciden en todo el intervalo, lo que demuestra que $y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$ en todo I . Por ejemplo, un conjunto fundamental para el oscilador armónico $y'' + \omega^2 y = 0$ es $\{\cos \omega x, \sin \omega x\}$, ya que sus elementos son obviamente solución y su wronskiano es ω . La solución general del oscilador armónico es, en consecuencia, $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$.

Nótese que, por tanto, la solución general de una ecuación lineal homogénea es la combinación lineal con coeficientes constantes arbitrarios de n soluciones linealmente independientes, y que no hay más soluciones. Aunque pueden elegirse distintos conjuntos fundamentales y expresar la solución general de formas aparentemente distintas, todas contienen exactamente las mismas soluciones: este tipo de ecuación carece de soluciones singulares. En el caso arriba mencionado del oscilador armónico, vimos en el problema 1.3 cinco expresiones equivalentes de la solución general.

EJERCICIO 3.13 Compruebe que $\{1, e^x, e^{-x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $y''' - y' = 0$. Halle otro sistema fundamental de soluciones. Escriba la solución general de dos formas distintas y compruebe su equivalencia.

3.7.3. Sistema fundamental de soluciones y ecuación lineal homogénea

Un sistema fundamental de soluciones caracteriza por completo la ecuación lineal homogénea a que corresponde, siempre que, como de costumbre, el coeficiente de la derivada más alta se elija igual a la unidad. En efecto, si un conjunto de n funciones es fundamental para los operadores L_1 y L_2 , también lo será para el operador $L_1 - L_2$, pero este último es a lo sumo de orden $n - 1$ y no puede admitir n soluciones independientes a menos que sea el operador nulo, es decir, si $L_1 = L_2$.

Además, conocido un conjunto fundamental $\{y_1, \dots, y_n\}$, puede construirse inmediatamente la ecuación lineal homogénea que satisface. Puesto que el sistema fundamental proporciona la solución general, podríamos recurrir al procedimiento del apartado 3.1 para construir la ecuación que le corresponde, pero en este caso particular existe una alternativa mejor. Cualquier otra solución y de la misma ecuación puede expresarse como combinación lineal de las y_k y, por tanto, el sistema $\{y_1, \dots, y_n, y\}$ es linealmente dependiente, por lo que su wronskiano se anula idénticamente, $W[y_1, \dots, y_n, y] = 0$; pero esta última expresión es precisamente una ecuación lineal homogénea de orden n para y que admite como soluciones independientes a las y_k . Si desarrollamos este wronskiano y lo dividimos por el coeficiente de $y^{(n)}$ (que, como se comprueba inmediatamente, es precisamente $W[y_1, \dots, y_n]$ y no se anula por ser las y_k independientes) obtenemos la única ecuación lineal normalizada que admite ese conjunto de soluciones. Por ejemplo, x y x^{-1}

son linealmente independientes en cualquier intervalo que no contenga el origen y la ecuación lineal homogénea que les corresponde es

$$W[x, x^{-1}, y] = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & y \\ 1 & -x^{-2} & y' \\ 0 & 2x^{-3} & y'' \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} y'' - \frac{2}{x^2} y' + \frac{2}{x^3} y = 0. \quad (3.61)$$

Para escribir la ecuación en forma normal hay que dividirla por el wronskiano del sistema fundamental $W[x, x^{-1}] = -2x^{-1}$.

EJERCICIO 3.14 Halle la ecuación lineal homogénea que admite el conjunto fundamental $\{x, e^x\}$. ¿En qué intervalo puede estar definida?

Claro está que el problema inverso —dada una ecuación lineal homogénea de orden n hallar n soluciones linealmente independientes y, por tanto, todas las soluciones— es bastante más difícil.

3.7.4. Fórmula de Liouville

Existe una útil fórmula atribuida, según los distintos autores, a Liouville, Abel³ u Ostrogradski⁴, que nos dice cómo cambia de punto a punto el wronskiano W de n soluciones y_k de una ecuación lineal homogénea de orden n :

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_1(u) du}, \quad \forall x \in I, \quad (3.62)$$

donde como siempre suponemos que $a_0 \equiv 1$. Nótese que, como una exponencial no se anula nunca, la anulación en un único punto x_0 es equivalente a la anulación en todo el intervalo de definición de la ecuación, lo que ya había sido demostrado en el teorema 3.1. La demostración de este resultado consiste en establecer y resolver la ecuación diferencial que satisface W . Para simplificar la notación supondremos que $n = 2$, pero la demostración se extiende inmediatamente a todos los valores de n . Si derivamos el determinante wronskiano por filas queda

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}, \quad (3.63)$$

donde el primer sumando es obviamente nulo. Si sustituimos en el segundo el hecho de que y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación ($y_k'' = -a_1 y_k' - a_2 y_k$) obtenemos

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1 y_1' - a_2 y_1 & -a_1 y_2' - a_2 y_2 \end{vmatrix} \quad (3.64)$$



³ **Niels Henrik Abel** (5-08-1802, Finnøy, Noruega; 6-04-1829, Froland, Noruega). En 1823 proporcionó la primera solución a una ecuación integral y el año siguiente estableció la imposibilidad de resolver algebraicamente la ecuación general de quinto grado. Jugó un papel central en la introducción del rigor en el análisis y publicó importantes trabajos sobre funciones elípticas. Es sorprendente el elevado número de conceptos y resultados que llevan su nombre a pesar de su corta vida.



⁴ **Mikhail Vasilevich Ostrogradski** (24-09-1801, Pashennaya, Ucrania; 1-01-1862, Poltava, Ucrania). Su principal contribución es, quizás, en hidrodinámica, pero publicó numerosos e importantes trabajos sobre termodinámica, teoría del potencial, integrales dobles, elasticidad, álgebra y ecuaciones diferenciales.

y sumando a la segunda fila a_2 veces la primera obtenemos

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1 y_1' & -a_1 y_2' \end{vmatrix} = -a_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \tag{3.65}$$

pero esta ecuación, $W' + a_1 W = 0$, es lineal homogénea de orden 1 y, por tanto, separable y cuando se reduce a cuadraturas se obtiene la fórmula de Liouville (3.62).

EJERCICIO 3.15 Compruebe directamente la fórmula de Liouville en el caso del ejercicio 3.14 para $x_0 = 0$.

3.7.5. Resolución de la ecuación homogénea

Si todos los coeficientes a_k de la ecuación lineal homogénea son constantes, puede usarse el método de Euler del apartado 3.10 para buscar n soluciones linealmente independientes y, con ellas, la solución general, y lo mismo puede decirse de las ecuaciones de Cauchy-Euler que veremos en el apartado 3.12. En los demás casos la resolución suele ser más difícil, pero al menos podemos decir que en la búsqueda de las n soluciones independientes que hacen falta para resolver completamente la ecuación homogénea, la mayor dificultad estriba en encontrar las $n - 1$ primeras, puesto que la última puede expresarse directamente como una cuadratura, ya que corresponde a resolver una ecuación lineal homogénea (separable) de primer orden. En efecto, si conocemos por cualquier razón una solución particular y_1 no nula de $\mathcal{L}y_1 = 0$, el cambio de variables $y = y_1 \int u \, dx$ del **método de d'Alembert**⁵ reduce la ecuación a una lineal homogénea de orden $n - 1$, puesto que si calculamos las derivadas y, tras multiplicarlas por a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 y 1 respectivamente, las sumamos,

$$\begin{array}{l} a_n \left\{ \begin{array}{l} y = y_1 \int u \, dx \\ y' = y_1' \int u \, dx + y_1 u \\ y'' = y_1'' \int u \, dx + 2y_1' u + y_1 u' \\ \vdots \\ y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u \, dx + ny_1^{(n-1)} u + \dots + y_1 u^{(n-1)} \end{array} \right\} \\ a_{n-1} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \vdots \\ \end{array} \right\} \\ a_{n-2} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \vdots \\ \end{array} \right\} \\ 1 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \vdots \\ \end{array} \right\} \end{array} \tag{3.66}$$

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}y_1 \int u \, dx + y_1 u^{(n-1)} + \tilde{a}_1 u^{(n-2)} + \dots + \tilde{a}_{n-1} u,$$

obtenemos en el miembro de la izquierda la ecuación de partida y en el de la derecha queda una ecuación lineal en $u, u', \dots, u^{(n-1)}$, ya que la combinación de términos que tienen una integral se cancela por ser y_1 solución de la ecuación homogénea: $\mathcal{L}y_1 = 0$. Por tanto, cada solución independiente hallada permite rebajar el orden de la ecuación en una unidad.



⁵ **Jean Le Rond d'Alembert** (17-11-1717, París; 29-10-1783, París). En su *Traité de dynamique* de 1742 perfeccionó la definición de fuerza e introdujo el principio que lleva su nombre. Fue un pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales y en particular de la ecuación de ondas. También trabajó en hidrodinámica y en los fundamentos del análisis al discutir el concepto de límite y su aplicación a la derivada.

EJERCICIO 3.16 Compruebe que $y = x$ es solución particular de toda ecuación que satisfaga $a_{n-1}(x) + xa_n(x) = 0$, es decir, que sea de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}(x)y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0. \quad (3.67)$$

Use esta interesante observación para resolver completamente la ecuación $xy'' - xy' + y = 0$. ¿Cuál debe ser la estructura de la homogénea para que admita como solución particular $y = 1$? ¿Y para que $e^{\pm x}$ sea solución?

EJERCICIO 3.17 Resuelva la ecuación $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Ecuación lineal homogénea de segundo orden

En el caso de la ecuación homogénea de segundo orden, que es el más habitual, basta, por tanto, conocer una solución para ser capaz de construir, módulo cuadraturas, la general.

EJERCICIO 3.18 Use el método de d'Alembert para demostrar que, si y_1 es una solución particular de la ecuación homogénea de segundo orden⁶ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, su solución general es

$$y = C_1y_1 + C_2y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx. \quad (3.68)$$

EJERCICIO 3.19 Compruebe directamente el anterior resultado por medio de la fórmula de Liouville aplicada a $\{y_1, y_1 \int u dx\}$.

EJERCICIO 3.20 Use el ejercicio 3.18 y la solución $y_1 = e^{kx}$ para demostrar el siguiente resultado:

$$y'' - 2ky' + k^2y = 0 \quad \iff \quad y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}. \quad (3.69)$$

Si no se conoce ninguna solución de la ecuación homogénea de segundo orden, puede intentarse alguno de los siguientes cambios de variables para hallar la primera solución particular. Claro está que en la mayor parte de los casos la nueva ecuación será tan difícil como la primera, pero en ocasiones la sabremos resolver y, por ello, reducir el problema a cuadraturas. Comencemos estudiando un cambio de variable independiente.

EJERCICIO 3.21 Haga en la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ el cambio de variable independiente $x \rightarrow t \equiv \int \sqrt{Q} dx$ y demuestre que permite obtener las soluciones si resulta que $2PQ + Q' = 0$. Resuelva la ecuación

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0. \quad (3.70)$$

¿En qué otros casos puede resultar útil este cambio?

También puede cambiarse la variable dependiente.

⁶Aquí y en el capítulo 6 usaremos esta notación alternativa para la ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$.

EJERCICIO 3.22 Haga en la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ el cambio de variable dependiente dado por la **transformación de Liouville**⁷ $y \rightarrow u \equiv y e^{\frac{1}{2} \int P dx}$ y demuestre que reduce la ecuación a la **forma normal**

$$u'' + f(x)u = 0. \quad (3.71)$$

Concluya que cuando resulta que el coeficiente $f(x) \equiv (4Q - P^2 - 2P')/4$ es una constante, dicha transformación permite obtener las soluciones. (También es útil si la mencionada expresión resulta ser de la forma $c/(ax + b)^2$, con constantes a, b y c , porque entonces la ecuación se reduce a una de Cauchy-Euler que, como veremos en el apartado 3.12, son fácilmente resolubles). Halle la solución general de

$$xy'' + 2y' + xy = 0. \quad (3.72)$$

Otro cambio de variables que —a veces, solo a veces— es útil será estudiado en el problema 6.15. Si todos estos cambios fallan, deberá recurrirse a los métodos que estudiaremos en el capítulo 6 o a métodos aproximados. Nótese, sin embargo, que si todos los coeficientes a_k son constantes el método de Euler, que veremos más adelante, permite buscar sistemáticamente las soluciones para cualquier orden n mediante procedimientos esencialmente algebraicos.

3.8. Ecuaciones lineales completas

Debido a que la ecuación es lineal, si y_1 e y_2 son soluciones correspondientes a los términos inhomogéneos b_1 y b_2 , entonces $a_1y_1 + a_2y_2$ es la solución que corresponde al término inhomogéneo $a_1b_1(x) + a_2b_2(x)$, si los coeficientes a_i son constantes:

$$\mathcal{L}y_1 = b_1, \quad \mathcal{L}y_2 = b_2 \quad \implies \quad \mathcal{L}(a_1y_1 + a_2y_2) = a_1\mathcal{L}y_1 + a_2\mathcal{L}y_2 = a_1b_1 + a_2b_2. \quad (3.73)$$

Este principio de superposición para las ecuaciones lineales completas asegura, por tanto, que la suma de una solución de la homogénea y otra de la completa es solución de la completa,

$$\mathcal{L}y_1 = 0, \quad \mathcal{L}y_2 = b \quad \implies \quad \mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}y_1 + \mathcal{L}y_2 = b, \quad (3.74)$$

y, al revés, que la diferencia entre dos soluciones de la completa es solución de la homogénea:

$$\mathcal{L}y_1 = \mathcal{L}y_2 = b \quad \implies \quad \mathcal{L}(y_1 - y_2) = \mathcal{L}y_1 - \mathcal{L}y_2 = 0. \quad (3.75)$$

Esto demuestra que *la solución general de la ecuación completa es la suma de la solución general de la homogénea asociada y una solución particular cualquiera de la completa*. Por tanto, la resolución de la ecuación completa se hace en dos pasos:

1. Primero debe resolverse la homogénea asociada hallando n soluciones linealmente independientes y_k , con las que se construye su solución general $\sum_{k=1}^n C_k y_k$ (que se llama a veces **función complementaria**):

$$\mathcal{L}y = 0 \quad \iff \quad y = \sum_{k=1}^n C_k y_k. \quad (3.76)$$



⁷ **Joseph Liouville** (24-03-1809, Saint-Omer, Francia; 8-09-1882, París). Trabajó en electromagnetismo, astronomía y mecánica, donde su teorema sobre la conservación del volumen del espacio de fases de un sistema hamiltoniano es de fundamental importancia para la mecánica estadística. Estudió ecuaciones diferenciales (con Sturm), funciones elípticas y teoría de integración de funciones algebraicas. Demostró la existencia de los números trascendentes e inventó la derivada fraccionaria.

2. Luego debe hallarse una solución particular y_p de la completa:

$$\mathcal{L}y_p = b. \quad (3.77)$$

La solución general de la ecuación lineal completa será $y = \sum_{k=1}^n C_k y_k + y_p$:

$$\mathcal{L}y = b \iff y = \sum_{k=1}^n C_k y_k + y_p. \quad (3.78)$$

Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$y''' - y' = 1. \quad (3.79)$$

Como vimos en el ejercicio 3.13, la solución general de la ecuación homogénea $y''' - y' = 0$ es $A + Be^x + Ce^{-x}$. En este simple ejemplo, una solución particular de la completa se halla fácilmente por inspección: $y = -x$ satisface la ecuación completa. Por tanto, su solución general será $y = A + Be^x + Ce^{-x} - x$.

EJERCICIO 3.23 Halle la solución general de $y'' + y = x$.

El problema de hallar la solución particular puede abordarse de forma sistemática por medio de cualquiera de los dos métodos que discutimos a continuación, una vez resuelta la parte que suele ser más difícil: hallar la solución general de la homogénea.

3.8.1. Método de variación de constantes

Conocida la solución general de la homogénea $\sum_{k=1}^n C_k y_k$, se busca una solución particular de la completa sustituyendo los coeficientes constantes C_k por funciones a determinar $g_k(x)$ y ensayar $y_p = \sum_{k=1}^n g_k(x) y_k(x)$. Si imponemos que las derivadas de esas n funciones satisfagan las siguientes n condiciones:

$$\begin{aligned} g'_1 y_1 + g'_2 y_2 + \cdots + g'_n y_n &= 0, \\ g'_1 y'_1 + g'_2 y'_2 + \cdots + g'_n y'_n &= 0, \\ \vdots & \\ g'_1 y_1^{(n-1)} + g'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + g'_n y_n^{(n-1)} &= b, \end{aligned} \quad (3.80)$$

la función que ensayamos y sus derivadas cumplirán las siguiente relaciones y su suma:

$$\begin{aligned} a_n \quad & \left\{ \begin{array}{l} y_p = \sum_{k=1}^n g_k y_k \\ \end{array} \right\} \\ a_{n-1} \quad & \left\{ \begin{array}{l} y'_p = \sum_{k=1}^n g_k y'_k + \left[\sum_{k=1}^n g'_k y_k = 0 \right] \\ \end{array} \right\} \\ a_{n-2} \quad & \left\{ \begin{array}{l} y''_p = \sum_{k=1}^n g_k y''_k + \left[\sum_{k=1}^n g'_k y'_k = 0 \right] \\ \end{array} \right\} \\ & \vdots \\ a_1 \quad & \left\{ \begin{array}{l} y_p^{(n-1)} = \sum_{k=1}^n g_k y_k^{(n-1)} + \left[\sum_{k=1}^n g'_k y_k^{(n-2)} = 0 \right] \\ \end{array} \right\} \\ 1 \quad & \left\{ \begin{array}{l} y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^n g_k y_k^{(n)} + \left[\sum_{k=1}^n g'_k y_k^{(n-1)} = b \right] \\ \end{array} \right\} \\ \hline \mathcal{L}y_p &= \sum_{k=1}^n g_k \mathcal{L}y_k + b \end{aligned} \quad (3.81)$$

Puesto que las y_k son soluciones de la homogénea, $\mathcal{L}y_k = 0$, la solución ensayada satisface la ecuación completa: $\mathcal{L}y_p = b$. Los valores entre corchetes de las anteriores igualdades son las condiciones (3.80), que constituyen un sistema lineal con determinante no nulo (porque es el wronskiano de un sistema fundamental de la homogénea), por lo que tienen una única solución para las derivadas,

$$g'_k(x) = f_k(x), \quad (3.82)$$

que integradas,

$$g_k(x) = \int f_k(x) dx + C_k, \quad (3.83)$$

y sustituidas en la combinación ensayada proporcionan una solución

$$y_p = \sum_{k=1}^n \left(\int f_k(x) dx \right) y_k + \sum_{k=1}^n C_k y_k, \quad (3.84)$$

que de hecho contiene no solo la particular buscada sino todas las soluciones de la completa, ya que las n constantes de integración reconstruyen la solución general de la homogénea.

Como ejemplo estudiaremos la ecuación

$$y'' - y = x^2, \quad (3.85)$$

aunque veremos más adelante que ecuaciones de este tipo (pero no otras más generales, como la del ejercicio 3.24 que aparece abajo) se resuelven de forma más fácil mediante el método de Euler. Se comprueba sin dificultad que la solución de la homogénea es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Por ello, en vez de las constantes C_1 y C_2 hay que usar las funciones $g(x)$ y $h(x)$:

$$\begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y_p = ge^x + he^{-x} \\ y'_p = ge^x - he^{-x} + [g'e^x + h'e^{-x} = 0] \\ y''_p = ge^x + he^{-x} + [g'e^x - h'e^{-x} = x^2] \end{array} \right\} \quad (3.86)$$

$$\hline y''_p - y_p = \quad 0 \quad + \quad x^2.$$

De las condiciones entre corchetes,

$$g'e^x + h'e^{-x} = 0, \quad (3.87)$$

$$g'e^x - h'e^{-x} = x^2, \quad (3.88)$$

se obtiene

$$g' = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}, \quad h' = -\frac{1}{2}x^2 e^x, \quad (3.89)$$

y de aquí

$$g = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C_1, \quad h = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^x + C_2. \quad (3.90)$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2. \quad (3.91)$$

EJERCICIO 3.24 Halle la solución general de $y'' + y = 1/\cos x$.

hecho, es la solución particular que satisface condiciones iniciales nulas $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, como se ve tomando $x = x_0$ en (3.94).

Volvamos al ejemplo de la ecuación (3.85). Puesto que la solución de la homogénea es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, la familia de soluciones que necesitamos es del tipo $K(x, s) = C_1(s)e^x + C_2(s)e^{-x}$ y debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$K(s, s) = C_1(s)e^s + C_2(s)e^{-s} = 0, \quad (3.95)$$

$$K'(s, s) = C_1(s)e^s - C_2(s)e^{-s} = 1. \quad (3.96)$$

De aquí obtenemos $C_1(s) = e^{-s}/2$ y $C_2(s) = -e^s/2$. Por tanto, $K(x, s) = \sinh(x - s)$ y la solución que satisface condiciones iniciales nulas es

$$y = \int_0^x \sinh(x - s) s^2 ds = 2 \cosh x - x^2 - 2. \quad (3.97)$$

Si ahora el término inhomogéneo no es x^2 sino x , para hallar la correspondiente solución basta hacer una integral:

$$y = \int_0^x \sinh(x - s) s ds = \sinh x - x. \quad (3.98)$$

EJERCICIO 3.26 Use el método de Cauchy para reducir a cuadraturas el oscilador armónico forzado $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$.

Nótese que el esfuerzo de calcular la familia $K(x, s)$ viene compensado por la ventaja de tener una expresión que mediante una simple cuadratura permite hallar la solución correspondiente a cualquier término inhomogéneo b (a cualquier fuerza externa $f(t)$ en el último ejemplo), en vez de tener que resolver cada vez el sistema algebraico para las g'_k y calcular sus n integrales como sucede en el método de variación de constantes.

3.9. Funciones generalizadas

Para interpretar desde un punto de vista muy útil en física el método de Cauchy, introduzcamos primero unas «funciones» que aligeran notablemente muchos cálculos.

3.9.1. Función escalón unidad de Heaviside

Se llama **función escalón unidad** o **función de Heaviside**⁹ a la que está definida como

$$\theta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ 1, & \text{si } x > a. \end{cases} \quad (3.99)$$



⁹ **Oliver Heaviside** (18-05-1850, Camden Town, Inglaterra; 3-02-1925, Torquay, Inglaterra). Aparte de importantes trabajos en electricidad y electromagnetismo, debe mencionarse que fue, junto a Gibbs, el introductor del cálculo vectorial. La eficacia de su cálculo operacional para resolver como algebraicas las ecuaciones diferenciales que aparecen en teoría de circuitos, no evitó una gran controversia en su tiempo, hasta que se pudo establecer el fundamento matemático de sus métodos.

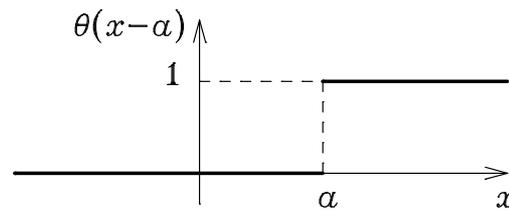


FIGURA 3.1 Función escalón unidad de Heaviside.

Es obvio que tiene derivada nula excepto en $x = a$, donde es discontinua; pero es más interesante su derivada generalizada que se define como sigue. Sean dos funciones f y g y la siguiente integral resuelta por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) dx. \quad (3.100)$$

Si suponemos un comportamiento en el infinito tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |fg| = 0$, el primer término es nulo y queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) dx, \quad (3.101)$$

que es cierta cuando f y g cumplan, además, las adecuadas condiciones matemáticas de regularidad.

3.9.2. Derivada generalizada

De hecho, la expresión (3.101) también puede interpretarse como la definición de la **derivada generalizada** de cualquier función g , aunque ésta no cumpla las condiciones que garantizan que la expresión sea cierta en el sentido de las funciones ordinarias. Como la función de Heaviside es discontinua, no puede ser la primitiva de ninguna función en toda la recta real y, por tanto, no puede hacerse la integración por partes (3.100), pero podemos usar (3.101) para definir su derivada generalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x-a) dx \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\theta(x-a) dx = - \int_a^{\infty} f'(x) dx = f(a). \quad (3.102)$$

Si interpretamos la derivada $\theta'(x-a)$ que aparece en el primer miembro de la anterior expresión en el sentido ordinario, puesto que la misma no está definida en el punto $x = a$ debemos usar la integral de Lebesgue¹⁰ que es una generalización de la integral de Riemann¹¹ y permite concluir que la integral de la derivada ordinaria es cero debido a que el integrando se anula en casi todos los puntos. La derivada generalizada, por el contrario, es por definición tal que dicha integral no



¹⁰ **Henri Léon Lebesgue** (28-06-1875, Beauvais, Francia; 26-07-1941, París). Inició la teoría de la medida y generalizó la integral de Riemann al introducir la que lleva su nombre y que constituye desde entonces uno de los ingredientes básicos del análisis funcional. También trabajó sobre topología, análisis de Fourier y teoría del potencial.



¹¹ **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (17-09-1826, Breselenz, Hanover —hoy día Alemania—; 20-07-1866, Selasca, Italia). Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las superficies de Riemann aparecen ya en su tesis doctoral. Refinó el concepto de integral e hizo una famosa conjetura sobre los ceros de la función que lleva su nombre; pero es conocido sobre todo por su contribución a una herramienta básica de la actual física teórica: la geometría diferencial.

es nula sino $f(a)$. Vemos, por tanto, que la derivada generalizada de la función de Heaviside no coincide con su derivada ordinaria, sino que es un objeto matemático que cuando se introduce bajo el signo integral junto con una función $f(x)$ devuelve el valor de esta función en el punto $x = a$ donde la propia función escalón es discontinua:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x-a) dx = f(a). \quad (3.103)$$

A un objeto de este tipo, que asocia a una función bajo el signo integral un número, se le llama **función generalizada** o **distribución** y la derivada de la función de Heaviside es la más famosa y útil de todas ellas: la delta de Dirac.

3.9.3. Delta de Dirac

Se llama «función» **impulso unidad** o **delta de Dirac**¹² a la derivada generalizada de la función de Heaviside, $\delta(x-a) \equiv \theta'(x-a)$, que colocada bajo el signo integral junto a una función devuelve el valor de ésta en el punto en que la delta está tomada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx \equiv f(a). \quad (3.104)$$

EJERCICIO 3.27 Demuestre las siguientes propiedades:

$$\int_b^c f(x)\delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a), & \text{si } a \in (b, c), \\ 0, & \text{si } a \notin [b, c], \end{cases} \quad (3.105)$$

$$g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a). \quad (3.106)$$

3.9.4. Límite generalizado

El método operacional usado para introducir la delta de Dirac es una caricatura «al estilo de los físicos» de la rigurosa teoría de distribuciones¹³ de Schwartz [27]. Existen, sin embargo, otros métodos de abordar matemáticamente las funciones generalizadas.

Una posibilidad es considerarlas como límites de funciones «buenas» [22], pero aquí volveremos a usar el punto de vista simplificado de los físicos para entender la delta de Dirac como el límite ideal de impulsos unidad de anchura decreciente. Consideremos cualquier función **sumable**, es decir, tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |g| dx < \infty$, y construyamos la familia de funciones

$$g_\varepsilon(x-a) \equiv \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right), \quad (3.107)$$

que se obtienen trasladando g hacia la derecha una distancia a y cambiando las escalas en abscisas y ordenadas por factores opuestos, ε y $1/\varepsilon$, de forma que todas tengan la misma integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x-a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx. \quad (3.108)$$



¹² **Paul Adrien Maurice Dirac** (8-08-1902, Bristol, Inglaterra; 20-10-1984, Tallahassee, EE.UU.) Su central contribución al establecimiento de la mecánica cuántica en un artículo de 1925 y el libro *The principles of Quantum Mechanics* publicado en 1930 le valieron compartir con Schrödinger el premio Nobel de Física de 1933. Es también el «padre» de la electrodinámica cuántica y su ecuación del electrón predijo, con ciertas dificultades iniciales de interpretación, la existencia de la antimateria.

¹³En dicha teoría se estudian las condiciones matemáticas que debe satisfacer la función f que aparece en la integral al usar funciones generalizadas. Aquí solo hemos mencionado dos de ellas: regularidad y tender a cero en el infinito.

En el ejemplo más corriente de pulso, la gaussiana $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, se obtiene la familia de pulsos $g_\varepsilon(x - a) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-(x-a)^2/\varepsilon^2}$ de la figura 3.2: a pesar de la anchura decreciente, la integral de los pulsos se mantiene inalterada.

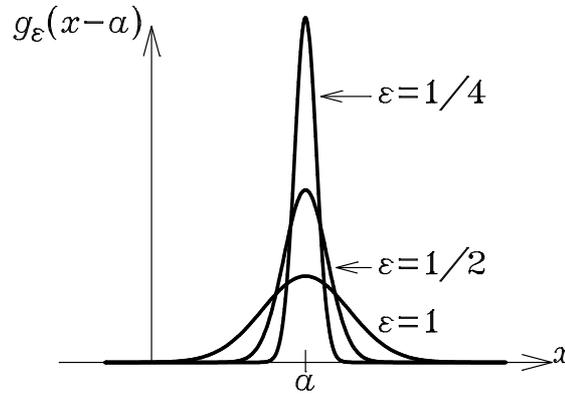


FIGURA 3.2 Familia de gaussianas.

Pretendemos calcular, para una familia $g_\varepsilon(x - a)$ arbitraria, el **límite generalizado**, que se define bajo el signo integral como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x - a) \right] dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_\varepsilon(x - a) dx. \quad (3.109)$$

Al igual que se hizo con la derivada generalizada, se ha usado aquí como definición de una operación para las funciones generalizadas una propiedad —la conmutación del límite y la integral— que no siempre es válida para funciones, como veremos en un ejemplo un poco más adelante.

Necesitaremos la siguiente importante propiedad.

EJERCICIO 3.28 Compruebe que el límite y la derivada generalizadas conmutan; es decir, que la derivada del límite es el límite de la derivada. ¿Es esto cierto para funciones ordinarias?

Definamos la integral indefinida

$$G_\varepsilon(x - a) \equiv \int_{-\infty}^x g_\varepsilon(u - a) du. \quad (3.110)$$

EJERCICIO 3.29 Use la definición de las g_ε y un cambio de variable obvio para demostrar que, en el sentido de las funciones ordinarias,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(x - a) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \right] \theta(x - a). \quad (3.111)$$

De acuerdo con un teorema de convergencia debido a Lebesgue, en el caso de G_ε el límite generalizado es el mismo; es decir, a diferencia de lo que ocurre con g_ε , los dos miembros de (3.109) son también iguales en el sentido de las funciones ordinarias para G_ε .

3.9.5. Sucesiones que convergen a la delta de Dirac

Calculando la derivada generalizada de la expresión (3.111) obtenemos el siguiente resultado importante, gracias a la definición (3.110) y a los resultados de los ejercicios 3.28 y 3.29.

Teorema 3.3 Dada una función g sumable, $\int_{-\infty}^{\infty} |g| dx < \infty$, tenemos, en el sentido de las funciones generalizadas,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \right] \delta(x-a). \quad (3.112)$$

En otras palabras, hemos demostrado que para cualquier $f(x)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \right] f(a), \quad (3.113)$$

o, si se prefiere, que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ los pulsos $g_{\varepsilon}(x-a)$ mantienen su intensidad constante mientras que su anchura disminuye y, bajo el signo integral, convergen a (un múltiplo de) la delta de Dirac.

Por ejemplo, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ la anchura de los pulsos gaussianos mencionados anteriormente decrece sin variar su intensidad total y en el límite se encuentra $\delta(x-a)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}} = \delta(x-a). \quad (3.114)$$

Este resultado traduce al compacto lenguaje de las funciones generalizadas el siguiente límite de integrales ordinarias:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}} dx = f(a). \quad (3.115)$$

Si el límite se hubiera realizado en el sentido de las funciones ordinarias antes de calcular la integral, hubiéramos obtenido un resultado nulo ya que el integrando se anularía en el límite, excepto en $x = a$. El límite generalizado se obtiene, sin embargo, calculando primero la integral, lo que conduce a otro resultado y permite reinterpretar el límite bajo la integral en un sentido generalizado.

EJERCICIO 3.30 Construya y analice una sucesión convergente a $\delta(x-a)$ a partir de la **función puerta**:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1/2, \\ 0, & \text{si } |x| > 1/2. \end{cases} \quad (3.116)$$

3.9.6. Solución elemental

Dada una ecuación lineal de orden n , $Ly = b$, se llama solución elemental a la que satisface condiciones iniciales nulas del problema completo impulsivo:

$$LE(x, a) = \delta(x-a), \quad (3.117)$$

$$E(x, a) = 0, \quad \text{para } x < a. \quad (3.118)$$

Insertando el término impulsivo en el método de Cauchy tenemos, para $x_0 < a$,

$$E(x, a) = \int_{x_0}^x K(x, s) b(s) ds = \int_{x_0}^x K(x, s) \delta(s-a) ds = \theta(x-a) K(x, a), \quad (3.119)$$

en virtud de las propiedades (3.105)–(3.106).

resolver el problema correspondiente a cualquier fuerza externa. Al igual que sucedía con el método de Cauchy, esto proporciona la solución con condiciones iniciales nulas (que corresponde a un oscilador en reposo o a un circuito descargado antes de que comenzara a actuar el agente externo). Por supuesto, la solución general contiene también todas las soluciones de la homogénea, que corresponden a sistemas aislados en ausencia de agentes externos. En los dos ejemplos físicos considerados, esta solución de la homogénea describe los transitorios que decaen más o menos rápidamente, pero en otros casos pueden corresponder a soluciones muy importantes (como la radiación electromagnética en la teoría de Maxwell). Este tipo de método de solución de ecuaciones completas tiene una extensión natural a las ecuaciones lineales en derivadas parciales que aparecen en teorías de campos, donde suele conocerse como método de la **función de Green**. También nos aparecerá al estudiar los problemas inhomogéneos de Sturm-Liouville en el apartado 9.6.

3.10. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Si los coeficientes a_k de la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (3.124)$$

son constantes, el operador diferencial L es en realidad un polinomio de derivación

$$L = P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n, \quad (3.125)$$

al que está asociado un **polinomio característico** que se obtiene con la sustitución formal $D \rightarrow z$:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n. \quad (3.126)$$

Por el teorema fundamental del álgebra, sabemos que este polinomio característico puede escribirse como

$$P(z) = \prod_{i=1}^r (z - k_i)^{m_i} \quad (3.127)$$

donde k_i es una raíz (real o compleja) de multiplicidad m_i ,

$$P(k_i) = P'(k_i) = \cdots = P^{(m_i-1)}(k_i) = 0, \quad P^{(m_i)}(k_i) \neq 0, \quad (3.128)$$

y $\sum_{i=1}^r m_i = n$. La linealidad del operador de derivación $D = d/dx$ y el hecho de que los coeficientes sean constantes hacen que el propio polinomio diferencial admita la misma factorización

$$P(D) = \prod_{i=1}^r (D - k_i)^{m_i}, \quad (3.129)$$

donde el orden de los factores es irrelevante, como sucede en el polinomio característico.

EJERCICIO 3.32 Para demostrar el isomorfismo entre polinomios diferenciales y algebraicos, compruebe directamente las siguientes igualdades:

$$(D - k)(D - k') = (D - k')(D - k) = D^2 - (k + k')D + kk'. \quad (3.130)$$

EJERCICIO 3.33 Pruebe la siguiente relación entre los polinomios diferencial y característico:

$$P(D)e^{kx} = P(k)e^{kx}. \quad (3.131)$$

El ensayo de soluciones exponenciales constituye la base del método de Euler¹⁴ para resolver ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, $P(D)y = 0$, que como consecuencia de la factorización del polinomio diferencial se reduce a resolver problemas elementales del tipo $(D - k)^m y = 0$. En el caso $m = 1$ vimos que la solución es $y = C_1 e^{kx}$ en el ejercicio 2.14, y que cuando $m = 2$ es $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$ en el 3.20. El caso general lo demostraremos a continuación.

EJERCICIO 3.34 Demuestre usando el resultado probado en el problema 3.6 que la solución general de la ecuación lineal homogénea $(D - k)^m y = 0$ es $(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) e^{kx}$, donde las C_k son constantes arbitrarias.

Vemos pues que cada factor $(D - k_i)^{m_i}$ proporciona m_i soluciones linealmente independientes: $e^{k_i x}$, $x e^{k_i x}$, \dots , $x^{m_i-1} e^{k_i x}$. (Como ya se ha dicho, demostraremos en el problema 3.6 la independencia lineal de esas soluciones). Además, como $\sum_{i=1}^r m_i = n$, el método permite hallar todas las soluciones. El proceso es, por tanto, simple: basta hallar las raíces k_i del polinomio característico —llamadas **raíces características** o **exponentes característicos**— con sus multiplicidades m_i (un problema algebraico que puede resultar de resolución exacta difícil o imposible dependiendo del orden de la ecuación, es decir, del grado del polinomio) y escribir directamente la solución general como suma de **cuasipolinomios** (productos de polinomios por exponenciales) con coeficientes arbitrarios:

$$y = \sum_{i=1}^r (C_{i1} + C_{i2}x + \dots + C_{im_i} x^{m_i-1}) e^{k_i x}. \quad (3.132)$$

Por ejemplo,

$$y''' + y'' - y' - y = 0 \quad (3.133)$$

puede escribirse como

$$(D + 1)^2(D - 1)y = 0, \quad (3.134)$$

por lo que la solución general se escribe directamente como

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + C_3 e^x. \quad (3.135)$$

EJERCICIO 3.35 Resuelva por el método de Euler el oscilador armónico

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.136)$$



¹⁴ **Leonhard Euler** (15-04-1707, Basilea, Suiza; 18-09-1783, San Petersburgo, Rusia). Este discípulo de Johann Bernoulli es uno de los matemáticos más importantes y prolíficos de todos los tiempos (se calcula que escribió unas 15.000 páginas de matemáticas nuevas durante seis décadas de trabajo, que no fue interrumpido ni por su creciente y, finalmente, total ceguera) y es el autor más citado en este texto. Su libro *Mechanica* (1736-37) supuso la primera presentación de esta disciplina con técnicas del análisis, en lugar de las geométricas usadas desde Newton. Fue el primero en escribir $f = ma$. Además de la mecánica del sólido rígido, estudió elasticidad, teoría lunar, el problema de los tres cuerpos, acústica, óptica, hidráulica, música, etc. A él se deben los factores integrantes, algunos métodos de reducción de orden, el primer estudio sistemático del cálculo de variaciones, la constante γ , la función Γ , la notación $f(x)$, el uso de e para la base de los logaritmos naturales, i para $\sqrt{-1}$, π para la razón de la circunferencia al diámetro, \sum para los sumatorios, etc.

En el caso de ecuaciones reales, los coeficientes del polinomio son reales y las raíces complejas solo puede aparecer por pares complejos conjugados $k_i = \alpha + i\omega$, $k_j = \alpha - i\omega$. En tal caso, las soluciones correspondientes a ese par que pueden escribirse de forma abreviada como $p_i(x)e^{k_ix} + p_j(x)e^{k_jx}$ (usando $p_i(x) \equiv C_{i1} + C_{i2}x + \dots + C_{im_i}x^{m_i-1}$) y pueden reescribirse como

$$e^{\alpha x} \{ [p_i(x) + p_j(x)] \cos \omega x + i [p_i(x) - p_j(x)] \sin \omega x \}. \quad (3.137)$$

Si la ecuación es real y solo nos interesan soluciones reales, estamos obligados a elegir $p_j(x) = \overline{p_i(x)}$, por lo que los coeficientes del seno y del coseno,

$$p_i(x) + p_j(x) = 2 \operatorname{Re} p_i(x) \equiv D_{i1} + D_{i2}x + \dots + D_{im_i}x^{m_i-1}, \quad (3.138)$$

$$i [p_i(x) - p_j(x)] = -2 \operatorname{Im} p_i(x) \equiv E_{i1} + E_{i2}x + \dots + E_{im_i}x^{m_i-1}, \quad (3.139)$$

son polinomios reales y la parte de la solución correspondiente al par complejo conjugado puede escribirse en forma manifiestamente real como

$$e^{\alpha x} \left[\begin{array}{l} (D_{i1} + D_{i2}x + \dots + D_{im_i}x^{m_i-1}) \cos \omega x + \\ (E_{i1} + E_{i2}x + \dots + E_{im_i}x^{m_i-1}) \sin \omega x \end{array} \right], \quad (3.140)$$

donde los coeficientes son constantes reales arbitrarias.

EJERCICIO 3.36 Compruebe que la solución del oscilador armónico que ha obtenido en el anterior ejercicio 3.35 puede escribirse de forma manifiestamente real.

Antes de acabar con este apartado, queremos indicar que las ecuaciones con coeficientes constantes son también fácilmente resolubles por el método de la transformación de Laplace que veremos en el capítulo 5 y que resulta especialmente útil cuando se trata de un problema de condiciones iniciales.

3.11. Ecuaciones completas con coeficientes constantes

Debería ser obvio que también cuando los coeficientes a_k de la ecuación lineal completa

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \quad (3.141)$$

son constantes, $P(D)y = b$, puede calcularse la solución particular que hay que añadir a la completa de la homogénea $P(D)y = 0$ mediante el método de variación de constantes o el de Cauchy. No obstante, en el caso particular en que el término inhomogéneo b es un cuasipolinomio

$$b = (A_1 + A_2 x + \dots + A_q x^{q-1}) e^{\lambda x} \quad (3.142)$$

o una suma de cuasipolinomios, las integrales que aparecen en aquellos métodos son fáciles pero engorrosas y existen otros dos métodos más eficaces para proceder al cálculo de la solución particular.

3.11.1. Método de coeficientes indeterminados

Este método de ensayo se basa en el hecho ya probado de que

$$(D - \lambda)^q \left[(A_1 + A_2x + \cdots + A_q x^{q-1}) e^{\lambda x} \right] = 0, \quad (3.143)$$

si los A_i son constantes. Por tanto, si la ecuación objeto de estudio es

$$P(D)y = (A_1 + A_2x + \cdots + A_q x^{q-1}) e^{\lambda x}, \quad (3.144)$$

se cumple que

$$(D - \lambda)^q P(D)y = 0, \quad (3.145)$$

por lo que también se conoce a este método con el nombre de **método del operador de anulación**. La solución particular buscada estará entre las soluciones de esta ecuación homogénea de orden $n + q$ que no sean solución de la homogénea de partida. Pero, puesto que podemos escribir directamente las soluciones de ambas homogéneas, es fácil ver cómo determinar la solución buscada.

1. Si hay más de un cuasipolinomio en el término inhomogéneo, basta recordar el principio de superposición que se aplica a ecuaciones lineales y usar el método esbozado a continuación con cada uno de los cuasipolinomios para determinar la parte correspondiente de la solución particular buscada y luego sumar todas ellas.
2. Si λ no está entre las raíces características de la ecuación homogénea de partida ($P(\lambda) \neq 0$), la solución particular buscada solo puede provenir de cuasipolinomios correspondientes a la raíz λ y hay que ensayar un cuasipolinomio del mismo grado y correspondiente a la misma raíz,

$$P(D) (B_1 + B_2x + \cdots + B_q x^{q-1}) e^{\lambda x} = (A_1 + A_2x + \cdots + A_q x^{q-1}) e^{\lambda x}, \quad (3.146)$$

ya que así son todas las soluciones del término $(D - \lambda)^q y = 0$. Tras aplicar el polinomio de derivación, basta igualar los coeficientes de las distintas potencias de x para determinar las constantes B_i y, por consiguiente, la solución particular buscada.

Por ejemplo,

$$y''' + y'' - y' - y = 18e^{2x} - 64xe^{-3x} \quad (3.147)$$

tiene como homogénea a (3.133), cuyas raíces características son $\lambda = \pm 1$. El término $18e^{2x}$ tiene como exponente característico $\lambda = 2$, que no está entre los de la homogénea, y aparece multiplicado por un polinomio de grado 0, por lo que hay que ensayar un cuasipolinomio del mismo tipo con coeficientes a determinar. Sustituyendo $y = Ae^{2x}$ en $y''' + y'' - y' - y = 18e^{2x}$ se obtiene $A = 2$, por lo que la parte correspondiente de la solución particular es $2e^{2x}$. Como $-64xe^{-3x}$ es un cuasipolinomio de grado 1, habrá que ensayar $y = (A + Bx)e^{-3x}$ en $y''' + y'' - y' - y = -64xe^{-3x}$ y determinar los coeficientes A y B , que resultan ser 5 y 4, respectivamente, por lo que recordando la solución general de la homogénea (3.135) y usando el principio de superposición, obtenemos que la solución general de (3.147) es

$$y = (C_1 + C_2x) e^{-x} + C_3 e^x + 2e^{2x} + (5 + 4x)e^{-3x}. \quad (3.148)$$

EJERCICIO 3.37 Halle la solución general de $\ddot{x} + x = (6t - 4t^2) e^{-t}$.

3. Si λ es una raíz característica de multiplicidad m de la ecuación homogénea¹⁵ de partida ($P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$, $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$), en la ecuación homogénea (3.145) aparecerá el factor $(D - \lambda)^{m+q}$, por lo que habría que ensayar un cuasipolinomio con la misma estructura que la solución general que corresponde a ese operador:

$$P(D) \left(B_1 + B_2x + \dots + B_{m+q}x^{m+q-1} \right) e^{\lambda x} = \left(A_1 + A_2x + \dots + A_qx^{q-1} \right) e^{\lambda x}. \quad (3.149)$$

Pero los m primeros términos son anulados por el factor $(D - \lambda)^m$ del operador $P(D)$, por lo que B_1, B_2, \dots, B_m quedarán indeterminados (aparecen en las constantes arbitrarias de la solución general de la homogénea) y en realidad basta probar

$$P(D) \left(D_1 + D_2x + \dots + D_qx^{q-1} \right) x^m e^{\lambda x} = \left(A_1 + A_2x + \dots + A_qx^{q-1} \right) e^{\lambda x} \quad (3.150)$$

e igualar los coeficientes de las distintas potencias de x para determinar los valores de las constantes $D_j \equiv B_{m+j}$.

Por ejemplo, en

$$y''' + y'' - y' - y = -24x(x+1)e^{-x} \quad (3.151)$$

el polinomio es de segundo grado, por lo que hay que ensayar un polinomio del mismo tipo $(A + Bx + Cx^2) e^{-x}$ multiplicado por x^2 , ya que la raíz $\lambda = -1$ está dos veces en la homogénea. Sustituyendo $(A + Bx + Cx^2) x^2 e^{-x}$ en (3.151) e igualando coeficientes se obtiene $A = 6$, $B = 4$ y $C = 1$, por lo que la solución particular buscada es $(6 + 4x + x^2) x^2 e^{-x}$.

EJERCICIO 3.38 Resuelva $y'' - y' - 2y = \cosh 2x + x$.

Si la ecuación es real y hay un seno o un coseno en el término inhomogéneo, pueden convertirse los mismos en exponenciales complejas o ensayarse directamente la suma de un cuasipolinomio del mismo tipo conteniendo el seno y de otro con el coseno, aunque solo aparezca una de estas funciones trigonométricas, ya que ambas corresponden a las dos raíces características complejas $\alpha \pm i\omega$ asociadas a cada término $e^\alpha \sin \omega x$ (o $e^\alpha \cos \omega x$). Por ejemplo, en

$$y'' + y = 25xe^x \cos x \quad (3.152)$$

el término inhomogéneo corresponde simultáneamente a las dos raíces $\lambda = 1 \pm i$ con multiplicidad 2 (ya que el polinomio es de grado 1). Como esas raíces no lo son de la homogénea, el polinomio a ensayar es $(D_1 + D_2x)e^x \cos x + (E_1 + E_2x)e^x \sin x$. También podrían ensayarse, juntas o por separado con las correspondientes partes del término inhomogéneo, soluciones de la forma $(D_1 + D_2x)e^{(1 \pm i)x}$. En cualquier caso, la solución general escrita en forma manifiestamente real es

$$y = A \cos x + B \sin x + [(5x - 2) \cos x + 2(5x - 7) \sin x] e^x. \quad (3.153)$$

Observamos que la solución particular incluye un seno, aunque no lo había en el término inhomogéneo.

En el caso de

$$y'' + y = x \cos x \quad (3.154)$$

¹⁵Cuando esto sucede con un oscilador se dice en mecánica que hay **resonancia**, ya que coinciden las frecuencias del oscilador y de la fuerza externa del término inhomogéneo.

los exponentes característicos $\lambda = \pm i$ aparecen con multiplicidad 2 en el término inhomogéneo y son también raíces características de la homogénea con multiplicidad 1, por lo que el polinomio a ensayar es $x[(D_1 + D_2x) \cos x + (E_1 + E_2x) \sin x]$.

EJERCICIO 3.39 Halle la solución general de $y'' + y = x \cos x$.

3.11.2. Método del operador inverso

Este método, que se halla en la base del **cálculo simbólico de Heaviside**, se basa en la idea de que si existiera un operador inverso $\frac{1}{P(D)}$ definido por la propiedad

$$P(D) \frac{1}{P(D)} = 1, \quad (3.155)$$

la función $y = \frac{1}{P(D)}b$ satisfaría $P(D)y = b$ y sería, por tanto, la solución particular buscada.

Por ejemplo, el operador inverso de la derivación es la integral indefinida:

$$\frac{1}{D}f = \int f dx. \quad (3.156)$$

La existencia de una constante de integración arbitraria muestra que (en este caso y en general) el operador inverso no es único y que $P(D)\frac{1}{P(D)} = 1$ no implica $\frac{1}{P(D)}P(D) = 1$, lo que por otro lado corresponde al hecho de que hay infinitas soluciones particulares de la completa. El objetivo no es construir todos los operadores inversos: basta uno para hallar una solución particular.

Las siguientes propiedades del operador inverso son inmediatas.

EJERCICIO 3.40 Demuestre que el operador inverso es lineal:

$$\frac{1}{P(D)}(af + bg) = a \frac{1}{P(D)}f + b \frac{1}{P(D)}g, \quad (3.157)$$

con a y b constantes.

EJERCICIO 3.41 Demuestre

$$\frac{1}{P(D)Q(D)} = \frac{1}{P(D)} \frac{1}{Q(D)}. \quad (3.158)$$

En consecuencia, de (3.129) se sigue la siguiente factorización del operador inverso:

$$\frac{1}{P(D)} = \prod_{i=1}^r \frac{1}{(D - k_i)^{m_i}}. \quad (3.159)$$

Aunque existe una expresión formal para el inverso que ahora necesitamos,

$$\frac{1}{(D - k_i)^{m_i}}b(x) = e^{k_i x} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{m_i-1}}{(m_i-1)!} e^{-k_i t} b(t) dt, \quad (3.160)$$

la necesidad de calcular la integral anula la ventaja de este método sobre el de variación de constantes; pero si el término inhomogéneo $b(x)$ es suma de cuasipolinomios el problema se reduce a dar significado a $\frac{1}{(D - k_i)^{m_i}}p(x)e^{k_i x}$, donde $p(x)$ es un polinomio con coeficientes constantes. Veremos cómo puede conseguirse este objetivo por pasos.

1. Si recordamos que, como caso particular de (3.131), se cumple $(D - k')e^{kx} = (k - k')e^{kx}$, tenemos que

$$\frac{1}{D - k'}e^{kx} = \frac{e^{kx}}{k - k'}, \quad \text{si } k' \neq k \quad (3.161)$$

y, en consecuencia,

$$\frac{1}{P(D)}e^{kx} = \frac{e^{kx}}{P(k)}, \quad \text{si } P(k) \neq 0. \quad (3.162)$$

En el caso de $y'' - y' - 2y = e^x$, $P(D) = D^2 - D - 2$ y como $P(1) = -2 \neq 0$,

$$\frac{1}{D^2 - D - 2}e^x = -\frac{1}{2}e^x, \quad (3.163)$$

por lo que la solución general será $C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - e^x/2$.

2. Puesto que es fácil comprobar por inducción que

$$(D - k)^m \frac{x^m}{m!} e^{kx} = e^{kx}, \quad (3.164)$$

se cumple

$$\frac{1}{(D - k)^m} e^{kx} = \frac{x^m e^{kx}}{m!}. \quad (3.165)$$

Por tanto, si k es una raíz de multiplicidad m de $P(D)$,

$$P(D) = (D - k)^m Q(D), \quad \text{con } Q(k) \neq 0, \quad (3.166)$$

tenemos que

$$\frac{1}{P(D)} e^{kx} = \frac{x^m e^{kx}}{m! Q(k)}. \quad (3.167)$$

Por ejemplo en $y'' - y' - 2y = e^{2x}$, tenemos $P(D) = (D - 2)(D + 1)$ y, por consiguiente,

$$\frac{1}{(D - 2)} \frac{1}{(D + 1)} e^{2x} = \frac{1}{3} x e^{2x}. \quad (3.168)$$

3. Es inmediato comprobar que $(D - k')p(x)e^{kx} = e^{kx}(D + k - k')p(x)$ y que, como consecuencia de la factorización de los polinomios diferenciales, $P(D)p(x)e^{kx} = e^{kx}P(D + k)p(x)$. En consecuencia,

$$\frac{1}{P(D)}p(x)e^{kx} = e^{kx} \frac{1}{P(D + k)}p(x). \quad (3.169)$$

4. Lo único que queda por hallar es, por tanto, la actuación del operador inverso sobre un polinomio $p(x)$,

$$\frac{1}{P(D)}p(x), \quad \text{con } p(x) = a_0x^q + a_1x^{q-1} + \cdots + a_{q-1}x + a_q. \quad (3.170)$$

Primero se separan los factores del tipo $\frac{1}{D^s}$ que se reducen a s integraciones elementales de polinomios.

Para los términos restantes, se descompone la identidad como $1 = P(D)Q(D) + R(D)$ con un resto $R(D) = a_1D^{q+1} + a_2D^{q+2} + \dots$ que anulará idénticamente al polinomio, $R(D)p(x) = 0$, por lo que tendremos $p(x) = P(D)Q(D)p(x)$ y, por tanto,

$$\frac{1}{P(D)}p(x) = Q(D)p(x). \quad (3.171)$$

Como la imagen de $p(x)$ a través de $Q(D)$ es fácil de calcular, lo único que resta es ver cómo hallar el cociente $Q(D)$, pero para ello basta recordar el isomorfismo de los polinomios de derivación con los polinomios ordinarios y aplicar la división sintética de polinomios en orden creciente de potencias.

Veamos un ejemplo: $y'' - y' - 2y = x^2e^{2x} - (1 + 2x)e^x$. Tenemos, para el primer término inhomogéneo

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 - D - 2}x^2e^{2x} &= e^{2x} \frac{1}{D^2 + 3D}x^2 = e^{2x} \frac{1}{D} \frac{1}{D + 3}x^2 = \\ &= e^{2x} \frac{1}{D} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) = \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{27} \right) e^{2x}, \end{aligned} \quad (3.172)$$

ya que

$$1 = (3 + D) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}D + \frac{1}{27}D^2 \right) - \frac{1}{27}D^3 \quad (3.173)$$

como se obtiene con la siguiente división entre polinomios:

$$\begin{array}{r} 1 \\ - \frac{1}{3}D \\ \frac{1}{9}D^2 \\ - \frac{1}{27}D^3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 3 + D \\ \hline \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{9}D \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{9}D + \frac{1}{27}D^2 \end{array} \right. \quad (3.174)$$

Por tanto,

$$\frac{1}{D + 3}x^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}D + \frac{1}{27}D^2 \right) x^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}. \quad (3.175)$$

EJERCICIO 3.42 Compruebe que

$$\frac{1}{D^2 - D - 2}(1 + 2x)e^x = -(1 + x)e^x. \quad (3.176)$$

La solución particular de la ecuación será, en consecuencia,

$$y_p = \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{27} \right) e^{2x} + (1 + x)e^x. \quad (3.177)$$

3.12. Ecuaciones de Cauchy-Euler

Se llama **ecuación de Cauchy-Euler** a la que tiene la siguiente estructura:

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = B(x), \quad (3.178)$$

con a , b y a_k constantes. Esta ecuación es equidimensional en $ax + b$ y el cambio de variable independiente $ax + b = e^t$ la convierte en una lineal con coeficientes constantes, ya que

$$\frac{dy}{dx} = ae^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad (3.179)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad (3.180)$$

⋮

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n e^{-nt} \left(\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{dy}{dt} \right), \quad (3.181)$$

y los factores e^{-kt} cancelan las potencias $(ax + b)^k$.

En consecuencia, la homogénea se puede resolver mediante el citado cambio de variable o utilizando la traducción inmediata del método de Euler, que consiste en ensayar en la ecuación $(ax + b)^k$ (en vez de e^{kt}) para hallar las raíces características y aplicar las reglas dadas para los coeficientes constantes con las siguientes sustituciones sistemáticas:

$$t^p e^{kt} \longrightarrow \ln^p(ax + b)(ax + b)^k, \quad (3.182)$$

$$t^p e^{\alpha t} \cos \omega t \longrightarrow \ln^p(ax + b)(ax + b)^\alpha \cos[\omega \ln(ax + b)], \quad (3.183)$$

$$t^p e^{\alpha t} \sin \omega t \longrightarrow \ln^p(ax + b)(ax + b)^\alpha \sin[\omega \ln(ax + b)]. \quad (3.184)$$

Por ejemplo, haciendo el cambio $x = e^t$ en

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 0 \quad (3.185)$$

se obtiene la ecuación $\ddot{y} + \frac{3}{2} \dot{y} - y = 0$, pero puede ensayarse directamente x^k en la ecuación y se obtiene

$$k(k-1) + \frac{5}{2}k - 1 = \left(k - \frac{1}{2}\right)(k+2) = 0, \quad (3.186)$$

lo que nos dice que $x^{1/2}$ y x^{-2} son solución. Como, además, son linealmente independientes, la solución general será $y = A\sqrt{x} + B/x^2$.

EJERCICIO 3.43 Resuelva $(2x + 1)^2 y'' + (8x + 4)y' + y = 9x$.

3.13. Problemas

3.1 Halle la ecuación diferencial que satisfacen todas las circunferencias del plano.

$$3.2 \quad \frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

$$3.3 \quad y'' - xy''' + (y''')^3 = 0.$$

3.4 Reduzca a cuadraturas la ecuación

$$y'' + f(y) = 0.$$

Incluso sin resolver la última integral que aparece, puede usarse la física para obtener información cualitativa interesante sobre las soluciones de este tipo de ecuaciones. ¿Por qué?

3.5 Considere las funciones $y_1 = x$ e $y_2 = |x|$. ¿Son linealmente independientes en el intervalo $(-1, 1)$? Calcule su wronskiano y comente el resultado.

3.6 Demuestre que las funciones $\{x^{p_i} e^{k_i x} : p_i = 0, \dots, n_i, i = 1, \dots, n\}$ son linealmente independientes en todo segmento de la recta, si $k_i \neq k_j$ cuando $i \neq j$.

3.7 Halle las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden que satisfacen los siguientes pares de funciones:

(a) x, x^2 , (b) $x + 1, x^2 + 1$, (c) x, e^{2x} .

$$3.8 \quad (x + 1)y'' + xy' - y = (x + 1)^2.$$

3.9 Método de derivación. A veces, el método del apartado 2.15.6 es útil con ecuaciones de orden superior, aunque sean lineales y la derivada más alta aparezca despejada. Como ejemplo, resuelva el problema 3.8 mediante dicho método.

3.10 Discuta el problema elemental de $y' + A(x)y = B(x)$.

3.11 Función de Green de dos puntos del oscilador armónico. Halle y simplifique la solución del siguiente problema de contorno:

$$G''(x, s) + \omega^2 G(x, s) = \delta(x - s), \quad G(0, s) = G(\ell, s) = 0.$$

Discuta el resultado para los distintos valores de los parámetros $0 \leq s \leq \ell$.

$$3.12 \quad y'' - y = xe^x.$$

$$3.13 \quad y'' + y = xe^{-x} \cos x.$$

$$3.14 \quad (D^3 + D)y = 1 + e^{2x} + \cos x.$$

$$3.15 \quad (D + 1)^3 y = e^{-x} + x^2.$$

$$3.16 \quad x^2 y'' - xy' + y = x \ln^3 x.$$

3.17 Una cadena de 6 m se coloca sobre una mesa lisa con un tramo de 1 m colgando más allá del borde. ¿Cuándo caerá el último eslabón?

$$\mathbf{3.18} \quad yy'' + (y')^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\mathbf{3.19} \quad (x^2 - 1)y'' - 6y = 1.$$

Sugerencia: Existe una solución polinómica de la homogénea.

$$\mathbf{3.20} \quad y'' + 10y' + 25y = 2^x + xe^{-5x}.$$

$$\mathbf{3.21} \quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

3.22 Compruebe que $x^{-1/2} \sin x$ es una solución de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0.$$

Halle la solución general.

3.23 Reduzca a cuadraturas la ecuación $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$.

$$\mathbf{3.24} \quad (2x - 3)^2y'' - 6(2x - 3)y' + 12y = 0.$$

3.25 Tres soluciones de la completa. Demuestre que si la ecuación completa

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

admite tres soluciones particulares, y_1 , y_2 e y_3 , que satisfacen

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

la solución general es $y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$ y que la propia ecuación puede escribirse como $W[y_1 - y_3, y_2 - y_3, y - y_3] = 0$.

3.26 Demuestre que si las funciones y_1 e y_2 se anulan en el mismo punto $x \in I$, no pueden formar en I un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

3.27 Ecuaciones de Riccati y lineales homogéneas de segundo orden. Demuestre que la ecuación lineal homogénea $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ se convierte en una de Riccati con el cambio $u = y'/y$. Halle la transformación que convierte toda ecuación de Riccati en una lineal homogénea de segundo orden.

3.28 Oscilador forzado. Sea el oscilador

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t, \quad (\gamma, \omega_0 > 0).$$

Demuestre que la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, que describe su **comportamiento transitorio**, es

$$x = \begin{cases} e^{-\gamma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), & \text{si } \gamma < \omega_0, \\ Ae^{-(\gamma+\lambda)t} + Be^{-(\gamma-\lambda)t}, & \text{si } \gamma > \omega_0, \\ (A + Bt)e^{-\omega_0 t}, & \text{si } \gamma = \omega_0, \end{cases}$$

donde $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ y $\lambda \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$. Compruebe que como solución particular necesaria para escribir la solución general del oscilador puede elegirse la siguiente, que describe el **comportamiento permanente**:

$$x = f \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\gamma\Omega \sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = A \cos(\Omega t + \alpha),$$

$$A \equiv \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}},$$

$$\alpha \equiv \arctan \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\gamma\Omega} - \frac{\pi}{2}.$$

3.29 Oscilador amortiguado. Demuestre que el oscilador sobreamortiguado

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (\gamma^2 - \omega_0^2 > 0)$$

puede pasar a lo sumo una vez por la posición de equilibrio. ¿Qué pasa en el caso de amortiguamiento crítico?

3.30 Calcule la derivada generalizada de la **función signo** que se define como sigue:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3.31 Calcule el siguiente límite generalizado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ng [n(x - a)].$$

3.32 ¿Cuál será la definición operacional bajo el signo integral de la derivada $\delta'(x - a)$? ¿Para qué puede usarse en física?

3.33 Sea $\beta = (1 - \gamma^{-2})^{1/2}$. Calcule el siguiente límite que resulta muy útil en relatividad especial y general:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma g(\gamma(x - \beta t)),$$

para cualquier función sumable g .

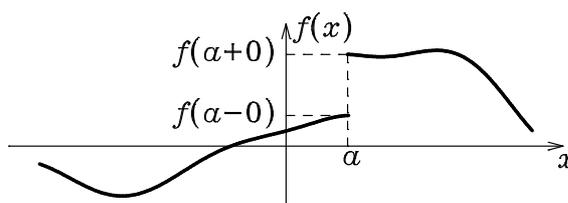


FIGURA 3.4 Una función continua por trozos.

3.34 Considere la familia

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.187)$$

Calcule $\varphi'_\varepsilon(x)$ y dibuje $\varphi_\varepsilon(x)$ y $\varphi'_\varepsilon(x)$ para $\varepsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$. Halle los límites $\varepsilon \rightarrow 0$ de $\varphi_\varepsilon(x)$ y $\varphi'_\varepsilon(x)$ y comente el resultado.

3.35 ¿Cuál es la diferencia entre las derivadas ordinaria y generalizada de la función de la figura 3.4?

3.36 Ecuaciones diferenciales lineales exactas de segundo orden. Halle la condición necesaria y suficiente para que la expresión diferencial lineal de segundo orden $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$ sea exacta, es decir, para que exista una expresión diferencial lineal de primer orden, $A_1(x)y' + A_2(x)y$, tal que

$$[A_1(x)y' + A_2(x)y]' = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y.$$

Encuentre la condición que debe satisfacer el factor integrante $\mu(x)$ que hace exacta la expresión $\mu(x)[a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y]$ si la de partida no lo era. Discútase el método de integración de la ecuación diferencial lineal

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x),$$

si el miembro de la izquierda es exacto. Aplíquese el método a la ecuación

$$y'' + xy' + y = 0.$$

3.37 Ecuaciones en diferencias finitas. El método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes puede extenderse directamente a la resolución de ecuaciones en diferencias finitas del mismo tipo. Como ejemplo, considere la siguiente ecuación:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

1. Probando soluciones del tipo apropiado, halle la solución general de dicha ecuación.
2. La solución particular correspondiente a las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ recibe el nombre de **sucesión de Fibonacci**.¹⁶ Halle una expresión para el n -ésimo número de Fibonacci F_n .



¹⁶ **Leonardo Pisano Fibonacci** (1170, Pisa; 1250, Pisa). Su *Liber abaci*, publicado en 1202, supuso la introducción en Europa de la numeración indoarábica, mientras que *Practica geometriae* (1220) era una compilación de la geometría de la época e introdujo algunos conceptos trigonométricos.

3. Calcule el valor de la **razón áurea**, que puede obtenerse, entre otras muchas formas, como:

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n.$$

3.38 Encuentre la ecuación diferencial de *mínimo orden* que admite las soluciones $y = C_1 + \ln(C_2x)$ con C_1 y C_2 arbitrarios. Comente el resultado.

3.39 Resuelva la ecuación

$$xy'' = 2yy'.$$

3.40 Demuestre que $y_1 = 1$ e $y_2 = 1/x$ son soluciones linealmente independientes de la **ecuación de Burgers**:

$$y'' + 2yy' = 0.$$

¿Cuál es su solución general? (¡Cuidado!)

3.41 Resuelva la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' - xy = 0.$$

3.42 Halle la solución general de la ecuación

$$(2x^2 - 2x)y'' + (5x - 1)y' + y = 0.$$

3.43 Supongamos que se conoce una solución particular, y_h , de la ecuación lineal homogénea de primer orden, $y' + A(x)y = 0$. Utilice el método de variación de constantes para escribir mediante una única cuadratura la solución general de la ecuación completa $y' + A(x)y = B(x)$.

Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones

La multitude qui ne se réduit pas à l'unité est confusion. . .

Blaise Pascal

Este capítulo es una extensión de los dos anteriores¹ y trata el caso más general en ecuaciones diferenciales ordinarias: los sistemas de ecuaciones, que siempre pueden considerarse como de primer orden en virtud de lo dicho en el apartado 3.3. Una vez más, la mayor atención será dedicada al caso lineal, donde usaremos una notación matricial que resulta muy económica y eficaz.

4.1. Definición y propiedades generales

En el espacio tridimensional una curva es la intersección de dos superficies $\varphi_1(x, y, z) = 0$ y $\varphi_2(x, y, z) = 0$. Una congruencia de curvas en el espacio será, por tanto, una familia biparamétrica de curvas

$$\varphi_1(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad (4.1)$$

$$\varphi_2(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad (4.2)$$

con la propiedad de que por cada punto (x, y, z) del dominio de definición considerado pasa una curva de la familia y solo una. Esta propiedad se traduce por la posibilidad de despejar de las ecuaciones de la familia los valores de los parámetros que identifican la curva que pasa por cada punto (x, y, z) y expresar dichas ecuaciones como

$$\psi_1(x, y, z) = C_1, \quad (4.3)$$

$$\psi_2(x, y, z) = C_2, \quad (4.4)$$

con lo que derivando respecto a la variable que elijamos como independiente, la x por ejemplo, obtenemos las ecuaciones diferenciales de la congruencia:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} z' = 0, \quad (4.5)$$

¹Para ser más precisos, hay que reconocer que, de acuerdo con lo dicho en el apartado 4.2.1, es en el fondo una repetición del capítulo 3, pero su estudio desde un nuevo punto de vista y con una nueva notación resultará finalmente fructífero.

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} z' = 0. \quad (4.6)$$

Si se despejan las derivadas tenemos el sistema en **forma normal**:

$$y' = f_1(x, y, z), \quad (4.7)$$

$$z' = f_2(x, y, z), \quad (4.8)$$

mientras que si se aíslan las diferenciales logramos la **forma canónica**:

$$\frac{dx}{g_1(x, y, z)} = \frac{dy}{g_2(x, y, z)} = \frac{dz}{g_3(x, y, z)}. \quad (4.9)$$

EJERCICIO 4.1 Halle el sistema de ecuaciones diferenciales de la congruencia de circunferencias

$$x^2 + y^2 + z^2 = A^2, \quad (4.10)$$

$$x + y + z = B, \quad (4.11)$$

y escríbalos en sus formas normal y canónica.

En un espacio de dimensión $n + 1$, cambiaremos un poco la notación para ajustarnos al uso más extendido en el caso de sistemas y llamaremos $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ a las coordenadas. La variable independiente será t , mientras que x_i se usará para las dependientes. Una congruencia vendrá dada por una familia de n ecuaciones que dependen de n parámetros y pueden escribirse en la forma

$$\psi_i(t, x_1, \dots, x_n) = C_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

Las ecuaciones diferenciales de la congruencia se obtienen por derivación:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

Si despejamos las derivadas, el sistema se escribe en forma normal:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.14)$$

donde hemos seguido la costumbre de utilizar un punto para denotar la derivada «temporal»: $\dot{x} \equiv dx/dt$. Aislado las diferenciales se obtiene la forma canónica:

$$\frac{dt}{g_0} = \frac{dx_1}{g_1} = \frac{dx_2}{g_2} = \dots = \frac{dx_n}{g_n}. \quad (4.15)$$

Cada curva de la congruencia es una curva integral de estos sistemas de ecuaciones diferenciales y el conjunto de ecuaciones finitas de las curvas integrales constituye una solución general de dichos sistemas diferenciales.

Como ya vimos en el apartado 3.3 siempre puede rebajarse el orden de una ecuación hasta el primero a costa de introducir más incógnitas y las correspondientes ecuaciones. Por ello, en este capítulo podremos considerar, sin pérdida de generalidad, únicamente sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, ya que en realidad incluyen los sistemas de ecuaciones de orden arbitrario. Vamos también a suponer que las derivadas pueden despejarse y el sistema ser escrito en forma normal (o canónica, de acuerdo con las circunstancias).

El **teorema de existencia y unicidad**, que tampoco vamos a demostrar aquí, no presenta sorpresas. Dado un sistema que puede escribirse en forma normal

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.16)$$

si las funciones f_i y $\partial f_i / \partial x_j$ son continuas, existe una única solución que satisface el sistema y un conjunto de n condiciones iniciales

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.17)$$

4.1.1. Sistemas dinámicos autónomos

A menudo la influencia de la mecánica hace que se llame **sistema dinámico** a todo sistema normal de ecuaciones de primer orden como los que estamos considerando y se dice que el mismo es **autónomo** cuando la variable independiente no aparece explícitamente:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

Claro está que siempre puede convertirse un sistema en autónomo considerando t como una nueva incógnita y añadiendo una ecuación trivial $dt/d\tau = 1$, donde τ , que es casi igual a t , es la nueva variable independiente; aunque no siempre es esto lo más conveniente ya que añade una dimensión al espacio de configuración.

A semejanza de lo pasaba con una única ecuación autónoma en el apartado 3.4.2, si el sistema es autónomo, su invariancia frente a traslaciones de la variable independiente t hace que una constante de integración sea casi trivial y aparezca sumada a la variable independiente en la forma $t - t_0$.

EJERCICIO 4.2 Compruebe la última afirmación; es decir, que si $x_i = g_i(t)$ es solución del sistema (4.18), también lo es la trasladada por cualquier valor t_0 , que se escribe como $x_i = g_i(t - t_0)$.

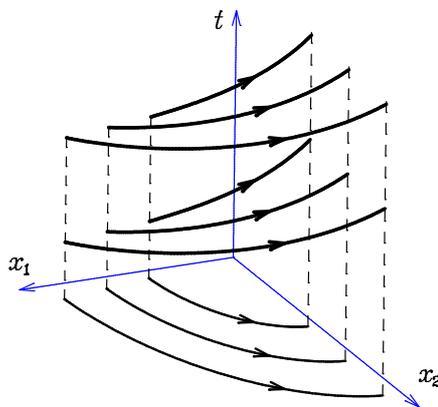


FIGURA 4.1 La congruencia de un sistema autónomo y su proyección en el espacio de fases.

En este contexto de los sistemas autónomos, el espacio n -dimensional de las variables dependientes (x_1, \dots, x_n) recibe el nombre de **espacio de fases**² y cada solución $x_i = \varphi_i(t)$ del sistema dinámico define una **trayectoria de fases**: la curva dada en forma paramétrica por $x_i = \varphi_i(t)$, es decir, la proyección sobre el espacio de fases de la correspondiente curva integral del espacio (t, x_1, \dots, x_n) . Si eliminamos t dividiendo todas las ecuaciones diferenciales (4.18) por una cualquiera de ellas,

$$\frac{dx_i}{dx_\alpha} = \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{f_\alpha(x_1, \dots, x_n)}, \quad i = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

²Al usar este nombre se está pensando en las ecuaciones canónicas de primer orden de la mecánica hamiltoniana y no en las de segundo orden de la mecánica de Lagrange. Por desgracia, en muchos textos matemáticos se llama **número de grados de libertad** del sistema a la dimensión del espacio de fases, que es el doble del número de grados de libertad en mecánica.

obtenemos las $n - 1$ ecuaciones diferenciales de las trayectorias de fases, que también allí forman una congruencia (si se satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad).

Si escribimos el sistema dinámico autónomo en forma canónica,

$$dt = \frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots, x_n)}, \quad (4.20)$$

y olvidamos la primera igualdad trivial a dt , observamos que las trayectorias de fases son las líneas de corriente del campo de velocidades (f_1, f_2, \dots, f_n) , lo que hace que usando una imagen hidrodinámica, se llame **flujo** a la aplicación que nos da la evolución del sistema en el espacio de fases asociando a cada condición inicial el punto representativo en dicho espacio para cada valor del «tiempo» t .

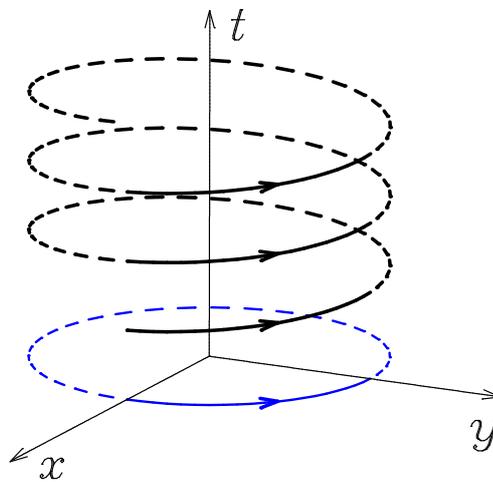


FIGURA 4.2 Una solución de (4.21) y su proyección sobre el plano de fases.

Por ejemplo, las soluciones del sistema

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \quad (4.21)$$

son

$$x = R \cos(t - t_0), \quad y = R \sin(t - t_0), \quad (4.22)$$

que, como se muestra en la figura 4.2, representan hélices de radio R y paso 2π centradas en el eje t y que son también las ecuaciones paramétricas de las trayectorias de fases: las circunferencias centradas en el origen que se obtienen al proyectar las hélices sobre el espacio de fases (x, y) . Cambiar el valor de la constante de integración t_0 traslada la hélice en la dirección de t , pero no cambia su proyección en el plano de fases aunque sí los valores de t que corresponden a cada punto. Nótese que la ecuación de las trayectorias en el espacio de fases se obtiene eliminando t de la solución $(x^2 + y^2 = R^2)$ o de las propias ecuaciones diferenciales $(dy/dx = -x/y)$.

4.2. Métodos de resolución

Como ya sucediera en el caso de una única ecuación, existe una detallada teoría para sistemas lineales, que incluye métodos efectivos de resolución si, además, los coeficientes son constantes. Para el caso más general —no lineal— mencionaremos solo dos posibilidades: la reducción a una única ecuación y la búsqueda de integrales primeras.

4.2.1. Reducción a una ecuación

En el apartado 3.3 se vio cómo a costa de añadir incógnitas y ecuaciones puede reducirse el orden de cualquier ecuación al primero. El recíproco también es cierto. Por derivación y sustitución es posible, en principio, reemplazar un sistema de n ecuaciones de primer orden por una única ecuación de orden n para una de las variables dependientes, que si puede ser resuelta proporciona por mera sustitución, *sin resolver ninguna otra ecuación diferencial*, las soluciones para todas las variables. Además, esto puede hacerse de forma que si el sistema es lineal, la ecuación obtenida sea lineal. No vamos a ver la teoría general, con las condiciones precisas, sino a remitir al lector interesado al libro de Elsgoltz [3] y a ver un par de ejemplos.

Sea $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$. Si derivamos la primera, $\ddot{x} = \dot{y}$ y sustituimos la segunda obtenemos $\ddot{x} = x$, cuya solución por el método de Euler es inmediata: $x = Ae^t + Be^{-t}$. Para calcular y , no hay que resolver $\dot{y} = x$, tras sustituir la solución general para x , ya que esto proporcionaría una tercera constante de integración; en su lugar, hay que usar la primera de las ecuaciones $y = \dot{x}$, donde sustituyendo la solución para x obtenemos $y = Ae^t - Be^{-t}$.

EJERCICIO 4.3 Resuelva el sistema $\dot{x} = 3x - 2y$, $\dot{y} = 2x - y$.

Por supuesto que este método también puede intentarse con ecuaciones no lineales.

EJERCICIO 4.4 Resuelva el sistema $\dot{x} = y$, $\dot{y} = xy$.

4.2.2. Integrales primeras

Se llama **integral primera** del sistema a toda función $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ cuyo valor permanece constante a lo largo del flujo (de la «evolución» del sistema), es decir, si se sustituyen las x_i por las funciones correspondientes a cualquier solución del sistema dinámico. Tendremos, por tanto, una ecuación

$$\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = C \quad (4.23)$$

que se satisface a lo largo de las soluciones: el valor C variará de solución a solución, pero no al variar t a lo largo de cada solución. Para cada C esa ecuación representa una hipersuperficie del espacio de las (t, x_1, \dots, x_n) que contiene a una familia con $n-1$ parámetros de curvas integrales. Una curva integral que tiene un punto en común con esa hipersuperficie está completamente contenida en ella.

La forma de comprobar en la práctica, sin necesidad de hallar las soluciones del sistema, si una función es integral primera o no, consiste en derivarla a lo largo del flujo y ver si se anula:

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} f_i = 0. \quad (4.24)$$

Por ejemplo, en el caso del sistema $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$, la función $\Phi = e^{-t}(x+y)$ es una integral primera, ya que su derivada es nula: $\dot{\Phi} = -e^{-t}(x+y) + e^{-t}(\dot{x} + \dot{y}) = -e^{-t}(x+y) + e^{-t}(y+x) = 0$.

EJERCICIO 4.5 Compruebe que, además de $e^{-t}(x+y)$, también $e^t(x-y)$ y $x^2 - y^2$ son integrales primeras del sistema $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$.

Podemos usar cada integral primera (4.23) para despejar una de las variables dependientes, a costa de introducir una constante arbitraria: $x_i = \Psi(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, C)$. De esa forma, la mencionada variable desaparece del problema. En el caso del anterior ejemplo, podemos obtener $y = Ae^{-t} - x$ de $e^{-t}(x+y) = A$, para reducir el problema a una ecuación: $\dot{x} = Ae^{-t} - x$. Un conjunto de n integrales primeras

$$\Phi_i(t, x_1, \dots, x_n) = C_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.25)$$

funcionalmente independientes,

$$\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0, \quad (4.26)$$

proporciona una solución general (una congruencia de curvas integrales), ya que en principio podemos despejar (localmente) las incógnitas x_i en términos de la variable independiente t y las n constantes arbitrarias C_i .

EJERCICIO 4.6 Compruebe que las primeras dos integrales del ejercicio 4.5 son independientes y úselas para resolver el sistema. Demuestre que la tercera integral primera es dependiente de las otras dos.

En el caso de sistemas dinámicos autónomos, un conjunto de $n - 1$ integrales primeras independientes entre sí y de t proporciona la ecuación de las trayectorias de fases; para saber, además, en qué punto de la trayectoria se encuentra el sistema en cada «instante» hace falta la n -ésima integral primera independiente, que dependerá explícitamente de t , a menos que se trate del sistema trivial $\dot{x}_i = 0$. En el ejercicio 4.5, la integral $x^2 - y^2 = C$ nos dice que las trayectorias de fases son hipérbolas, pero hace falta una de las otras integrales para saber cómo evoluciona el sistema dentro de cada hipérbola.

Sobre la búsqueda de integrales primeras nos limitaremos a recordar, una vez más, que en física las simetrías están asociadas a leyes de conservación, que proporcionan integrales primeras, y a indicar que en casos sencillos un poco de práctica en combinar las ecuaciones sacando partido de las simetrías matemáticas que presenten permite en ocasiones hallar algunas integrales. Veamos un par de ejemplos.

Sea el sistema

$$\dot{x} = y - z, \quad (4.27)$$

$$\dot{y} = z - x, \quad (4.28)$$

$$\dot{z} = x - y, \quad (4.29)$$

que tiene una alta simetría. En primer lugar, si sumamos la tres ecuaciones los miembros de la derecha se cancelan, $(x + y + z)' = 0$, y lo mismo sucede si las sumamos tras multiplicarlas, respectivamente, por x , y , y z , para dar $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$. Hemos obtenido así dos integrales primeras $x + y + z = A$ y $x^2 + y^2 + z^2 = B$ que, como no dependen explícitamente del tiempo, nos dan las ecuaciones de las trayectorias de fases.

EJERCICIO 4.7 Elimine t de las ecuaciones (4.27)–(4.29) para hallar las ecuaciones diferenciales de las trayectorias de fases y compruebe el resultado con el del ejercicio 4.1.

EJERCICIO 4.8 Halle la ecuación de las trayectorias de fases del ejercicio 4.4.

En ciertos casos, la forma canónica, es especialmente apropiada para hallar las combinaciones que conducen a integrales primeras, por mostrar de forma más simétrica todas las variables. Por ejemplo, sea el sistema

$$\dot{x} = \frac{2tx}{t^2 - x^2 - y^2}, \quad \dot{y} = \frac{2ty}{t^2 - x^2 - y^2}, \quad (4.30)$$

que aparece en forma canónica como

$$\frac{dt}{t^2 - x^2 - y^2} = \frac{dx}{2tx} = \frac{dy}{2ty}. \quad (4.31)$$

Simplificando la última igualdad tenemos

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad (4.32)$$

donde ha desaparecido t y resulta ser una ecuación para x e y de variables separadas, por lo que una cuadratura proporciona la integral primera $y = Ax$, que nos dice que las trayectorias de fases son las rectas que pasan por el origen. Por otro lado, si multiplicamos los numeradores y denominadores de cada fracción por t , x e y , respectivamente, y los sumamos obtenemos

$$\frac{t dt + x dx + y dy}{t(t^2 + x^2 + y^2)} = \frac{dx}{2tx}. \quad (4.33)$$

Si ahora simplificamos la t que aparece en ambos denominadores, vemos que los dos miembros de esa ecuación son diferenciales exactas que se integran inmediatamente y nos proporcionan la segunda integral primera necesaria para determinar la solución general: $t^2 + x^2 + y^2 = Bx$.

EJERCICIO 4.9 Resuelva el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \frac{y}{x+y}, \quad \dot{y} = \frac{x}{x+y}. \quad (4.34)$$

4.3. Sistemas lineales de primer orden

En el resto del capítulo consideraremos un sistema lineal de primer orden:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t), \quad (4.35)$$

donde suponemos que las funciones a_{ij} y b_i son continuas en un cierto intervalo I , en el que se satisface, por tanto, el teorema de existencia y unicidad. En este caso, además, el teorema asegura que si las a_{ij} y las b_i son continuas en un intervalo I , existe una única solución del sistema que satisface condiciones iniciales dadas en un punto del intervalo y que *está definida en todo el intervalo* I . Consideraremos, por tanto, soluciones definidas en todo el intervalo de continuidad de a_{ij} y b_i .

Para aligerar la notación agruparemos todas las incógnitas en un vector columna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

y todas las funciones a_{ij} en una matriz cuadrada, usando el primer subíndice para las filas y el segundo para las columnas:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Con los términos independientes b_i construimos otro vector columna \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Como estas matrices dependen de la variable independiente tenemos, por ejemplo,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

En notación matricial el sistema se escribe simplemente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (4.40)$$

o, introduciendo el operador lineal $L\mathbf{x} \equiv \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, como

$$L\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (4.41)$$

Se comprueba sin dificultad que el operador es lineal: $L(ax + by) = aLx + bLy$, si a y b son constantes.

EJERCICIO 4.10 Escriba en forma matricial el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x. \quad (4.42)$$

Si \mathbf{b} no es idénticamente nulo tendremos un **sistema completo**, al que le corresponde el **sistema homogéneo** que se obtiene al anular el término inhomogéneo \mathbf{b} : $L\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ó $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, siendo $\mathbf{0}$ el vector nulo.

La teoría que desarrollamos en los siguiente apartados es extensión natural de la que vimos en el anterior capítulo para la ecuación lineal. De hecho, puesto que toda ecuación lineal de orden n puede reescribirse como n ecuaciones lineales de primer orden y al revés, lo que vemos a continuación es en realidad la misma teoría expresada en una notación matricial más ágil.

4.4. Sistemas lineales homogéneos

Comenzaremos estudiando el sistema homogéneo: $L\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ó $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. La linealidad del operador garantiza el principio de superposición, que asegura que toda combinación lineal con coeficientes constantes de soluciones del sistema homogéneo es también solución del mismo:

$$L\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \implies \quad L \sum C_i \mathbf{x}_i = \sum C_i L\mathbf{x}_i = \mathbf{0}. \quad (4.43)$$

Por consiguiente, el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo es un subespacio vectorial del espacio de funciones vectoriales regulares $\mathbf{x}(t)$ definidas en el intervalo considerado I , donde la **independencia lineal** de un sistema de vectores \mathbf{x}_i se define, en la forma habitual, como la imposibilidad de hallar más combinación lineal que se anule en todo el intervalo que la que tiene coeficientes nulos. Si el sistema $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es linealmente dependiente, existe solución no trivial del sistema lineal homogéneo

$$\sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0} \quad \iff \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} C_j = 0, \quad \forall t \in I, \quad (4.44)$$

siendo x_{ij} la fila número i del vector columna \mathbf{x}_j . En consecuencia, el determinante del sistema, que es el **wronskiano** del conjunto de vectores,

$$W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \equiv |\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n| \equiv \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4.45)$$

se anula en todo el intervalo I .

En general, el recíproco de este resultado no es cierto, pero si los vectores son solución del sistema homogéneo, $L\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, y el wronskiano se anula en un cierto punto del intervalo, $W(t_0) = 0$, el sistema lineal homogéneo

$$\sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j(t_0) = \mathbf{0} \quad \iff \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}(t_0) C_j = 0 \quad (4.46)$$

tiene una solución no trivial para los C_j , con la que podemos construir para todo $t \in I$ el vector $\mathbf{x} \equiv \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j$. Por el principio de superposición este vector es solución del sistema diferencial homogéneo y satisface condiciones iniciales nulas en $t = t_0$ por la forma en que se han elegido los C_j . El teorema de existencia y unicidad asegura entonces que el vector \mathbf{x} tiene que ser el elemento nulo, que satisface las mismas ecuaciones y condiciones, por lo que

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in I, \quad (4.47)$$

y los vectores son linealmente dependientes, lo que a su vez implica que el wronskiano se anula en todos los puntos del intervalo. Vemos, por tanto, que para un conjunto de n soluciones del sistema de orden n las condiciones de dependencia lineal, anulación del wronskiano en un punto y anulación del mismo en todo el intervalo son completamente equivalentes, como ya sucediera con la ecuación lineal homogénea de orden n .

4.4.1. Espacio de soluciones

Que el espacio de soluciones tiene al menos dimensión n se sigue del teorema de existencia y unicidad que garantiza la existencia de las n soluciones linealmente independientes correspondientes a las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

o cualesquiera otras que hagan que el wronskiano en t_0 no sea nulo. Existen, por tanto, **sistemas fundamentales de soluciones**, que están formados por definición por n soluciones linealmente independientes. Que un sistema fundamental, $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, es una base del espacio de soluciones, que tiene, por tanto, dimensión n , se sigue del hecho de que toda solución \mathbf{x} de la homogénea, $L\mathbf{x} = \mathbf{0}$, puede expresarse como combinación lineal de las del sistema fundamental con coeficientes constantes C_j que pueden calcularse resolviendo en un punto t_0 el sistema

$$\mathbf{x}(t_0) = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j(t_0) \iff x_i(t_0) = \sum_{j=1}^n x_{ij}(t_0) C_j, \quad (4.49)$$

que tiene solución única porque su determinante, que es el wronskiano del sistema fundamental en t_0 , es distinto de cero. La unicidad de la solución correspondiente a condiciones iniciales en t_0 garantiza que

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j(t), \quad \forall t \in I, \quad (4.50)$$

con los coeficientes elegidos en t_0 . Por tanto, la solución general del sistema homogéneo — que incluye todas las soluciones — es una combinación con coeficientes constantes arbitrarios de vectores de un conjunto fundamental: $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j$.

EJERCICIO 4.11 Compruebe que

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones del sistema (4.42) y escriba su solución general.

4.4.2. Matrices fundamentales

Colocando como columnas los n vectores de un sistema fundamental obtenemos una **matriz fundamental**

$$\mathbf{F}(t) \equiv (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

que por construcción es no singular,

$$\det \mathbf{F}(t) = W[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n](t) \neq 0, \quad (4.53)$$

y constituye una solución matricial del sistema homogéneo

$$\mathbf{L}\mathbf{F} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}, \quad (4.54)$$

donde ahora $\mathbf{0}$ es la matriz nula $n \times n$, ya que al ser $F_{ij} = x_{ij}$ la fila i de la solución j del sistema tenemos

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj}, \quad (4.55)$$

que es tanto el desarrollo de la expresión matricial $\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_j$ como el de $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$. De hecho, es obvio que el recíproco es cierto: toda solución matricial no singular del sistema homogéneo es una matriz fundamental, es decir, sus columnas constituyen un sistema fundamental.

EJERCICIO 4.12 Halle una matriz fundamental del sistema (4.42).

El desarrollo de la solución general en un sistema fundamental $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j$, que tiene como filas

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} C_j, \quad (4.56)$$

puede expresarse, usando el hecho de que $F_{ij} = x_{ij}$, como el producto de la matriz fundamental por un vector columna constante,

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

con lo que la solución del sistema es simplemente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{c}, \quad (4.58)$$

con un vector columna constante arbitrario \mathbf{c} .

EJERCICIO 4.13 Halle la solución del sistema (4.42) usando una matriz fundamental.

La matriz fundamental no es única, como no lo son los sistemas fundamentales ni, en un contexto más amplio, las bases de espacios vectoriales. Pero, si estamos interesados en dar siempre las condiciones iniciales en un cierto punto t_0 , hay una matriz fundamental única que nos permite considerar esas condiciones iniciales como las n constantes C_k que seleccionan cada solución particular. En efecto, de (4.58) obtenemos $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{F}(t_0) \cdot \mathbf{c}$ y, como \mathbf{F} es invertible, $\mathbf{c} = \mathbf{F}(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}(t_0)$, que sustituido en (4.58) nos da $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}(t_0)$. Definamos

$$\mathbf{K}(t, t_0) \equiv \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t_0)^{-1}, \quad (4.59)$$

con lo que tenemos que

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0). \quad (4.60)$$

Es obvio que por construcción \mathbf{K} es una matriz fundamental

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}(t, t_0), \quad (4.61)$$

$$\det \mathbf{K}(t, t_0) = \frac{\det \mathbf{F}(t)}{\det \mathbf{F}(t_0)} \neq 0, \quad (4.62)$$

que, además, satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$\mathbf{K}(t_0, t_0) = \mathbf{1}, \quad (4.63)$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad. La unicidad nos garantiza que el recíproco es cierto. Toda solución matricial (4.61) que se reduce a la identidad en $t = t_0$ es una matriz fundamental que satisface (4.60). Se llama **matriz canónica fundamental** a la que da la solución general por medio de la expresión (4.60) o, equivalentemente, las (4.61)–(4.63).

EJERCICIO 4.14 ¿Por qué no hace falta imponer la condición (4.62)?

EJERCICIO 4.15 Calcule la matriz canónica fundamental $\mathbf{K}(t, t_0)$ del sistema (4.42).

4.5. Sistemas lineales completos

Al igual que sucedía con la ecuación completa, si se suma a una solución del sistema homogéneo una del completo, se obtiene una nueva solución del completo:

$$L\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \quad L\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} \quad \implies \quad L(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = L\mathbf{x}_1 + L\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}. \quad (4.64)$$

Y al revés, la diferencia entre dos soluciones del completo es solución del homogéneo:

$$L\mathbf{x}_1 = L\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} \quad \implies \quad L(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = L\mathbf{x}_1 - L\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad (4.65)$$

En consecuencia, la solución general del sistema completo $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede escribirse como suma de la solución general del sistema homogéneo asociado,

$$L\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \iff \quad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j, \quad (4.66)$$

y de una solución particular cualquiera del completo,

$$L\mathbf{x}_p = \mathbf{b}, \quad (4.67)$$

de forma que

$$L\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \iff \quad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_p. \quad (4.68)$$

El **método de variación de constantes** se extiende de modo inmediato a sistemas, donde consiste en ensayar una solución con la estructura (4.58), pero sustituyendo el vector constante arbitrario \mathbf{c} por uno a determinar que depende de t : $\mathbf{g}(t)$. Si se ensaya el vector $\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$ en la ecuación completa, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$, y se usa la regla de Leibniz³ aquella se convierte en

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{b}, \quad (4.69)$$



³ **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1-07-1646, Leipzig, Sajonia; 14-11-1716, Hanover, hoy día Alemania). Este discípulo de Christiaan Huygens es el creador de la notación utilizada hoy día en el cálculo diferencial e integral. Aunque Newton puso por escrito su método de **fluxiones** en 1671, no fue publicado hasta 1736. Este retraso explica la larga y amarga polémica entre los dos grandes creadores del cálculo infinitesimal.

y al tener en cuenta que \mathbf{F} satisface la homogénea, $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$, se obtiene $\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{g}} = \mathbf{b}$, que se resuelve como $\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{b}$, ya que \mathbf{F} es invertible. Integrando este resultado y sustituyéndolo en $\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$ se halla

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{F}(t) \cdot \int \mathbf{F}(t)^{-1} \cdot \mathbf{b}(t) dt, \quad (4.70)$$

donde \mathbf{c} es el vector constante arbitrario que se obtiene al hacer la integral. Esta última expresión es la solución general de la completa y muestra su estructura como suma de la general de la homogénea y una particular de la completa.

EJERCICIO 4.16 Resuelva el sistema $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \frac{1}{\cos t}$.

Si escribimos la integral indefinida que aparece en (4.70) de forma completamente equivalente como una definida con límite superior variable se obtiene

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{F}(t) \cdot \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s)^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) ds. \quad (4.71)$$

Si, tomando $t = t_0$, despejamos de aquí \mathbf{c} en términos de las condiciones iniciales se ve que $\mathbf{c} = \mathbf{F}(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}(t_0)$, por lo que, recordando la definición $\mathbf{K}(t, t_0) \equiv \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t_0)^{-1}$, se halla

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{K}(t, s) \cdot \mathbf{b}(s) ds. \quad (4.72)$$

El primer término del miembro de la derecha de esta expresión es la solución general de la homogénea, mientras que el segundo es precisamente la solución particular de la completa que satisface condiciones iniciales nulas en t_0 y que constituye, por tanto, la esencia del **método de Cauchy** para sistemas. Nótese que la familia de soluciones $\mathbf{K}(t, s)$ satisface las condiciones (4.61) y (4.63) que son las equivalentes a las (3.93) de la página 56 exigidas a $K(x, s)$ en el caso de una única ecuación de orden arbitrario.

EJERCICIO 4.17 Use el método de Cauchy con $\mathbf{b} = \delta(t-a)\mathbf{1}$ para probar que la **solución elemental** del operador L , es decir, la solución de

$$L\mathbf{E}(t, a) = \delta(t-a)\mathbf{1}, \quad \mathbf{E}(t, a) = \mathbf{0} \quad (\text{para } t < a), \quad (4.73)$$

es $\mathbf{E}(t, a) = \theta(t-a)\mathbf{K}(t, a)$. Compruebe el resultado por sustitución directa.

4.6. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Si la matriz del sistema es constante, $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, existen métodos sistemáticos para abordar la resolución del sistema lineal. Veremos en primer lugar un método de gran interés teórico y en el diseño de sistemas de álgebra por ordenador, aunque en raras ocasiones sea de utilidad real para resolver a mano un sistema dado. Tanto el problema homogéneo como el completo quedan esencialmente resueltos si se calcula una matriz fundamental \mathbf{F} ,

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(t), \quad \det \mathbf{F}(t) \neq 0, \quad (4.74)$$

o la matriz canónica fundamental \mathbf{K} que, como hemos visto, está definida por las condiciones

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}(t, t_0), \quad \mathbf{K}(t_0, t_0) = \mathbf{1}. \quad (4.75)$$

Si por un momento nos olvidáramos de que se trata de un problema matricial, o si consideráramos el caso $n = 1$, escribiríamos sin problemas la solución:

$$\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t}, \quad (4.76)$$

o, si se prefiere,

$$\mathbf{K}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}. \quad (4.77)$$

Como vamos a ver, esta respuesta sigue siendo válida para todo n .

4.6.1. Exponencial de una matriz

Exactamente igual que la de un número, la exponencial de una matriz cuadrada puede definirse, como un límite⁴

$$e^{\mathbf{A}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}}{n} \right)^n \quad (4.78)$$

o, en forma más conveniente, como la suma de una serie

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k, \quad (4.79)$$

donde $\mathbf{A}^0 = \mathbf{1}$ y $\mathbf{A}^k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{k-1} = \mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{A}$.

EJERCICIO 4.18 Pruebe las siguientes propiedades:

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}, \quad (4.80)$$

$$e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}, \quad \text{si } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.81)$$

Como consecuencia inmediata de estas propiedades también tenemos que la exponencial de cualquier matriz es invertible,

$$\det e^{\mathbf{A}} \neq 0, \quad (4.82)$$

y que su inversa es

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}. \quad (4.83)$$

Nótese que como, en general, dos matrices no conmutan —aunque toda matriz conmuta consigo misma, con la identidad, sus potencias, su exponencial y los múltiplos, potencias y exponenciales de matrices con las que conmuta, entre las que se encuentra su inversa si ésta existe—, tampoco suelen hacerlo sus exponenciales, como veremos en los problemas 4.12, 4.13 y 4.14.

La exponencial que más nos interesa se obtiene con la sustitución $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}(t - t_0)$ que da

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \mathbf{A}^k. \quad (4.84)$$

⁴La noción de límite de sucesiones de matrices puede definirse mediante la convergencia en norma en la que $\mathbf{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\mathbf{A} - \mathbf{A}_n) \cdot \mathbf{x}| = 0$ para todo vector \mathbf{x} . Un tratamiento más riguroso puede hallarse, por ejemplo, en [19].

EJERCICIO 4.19 Demuestre, a partir de la definición, que

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.85)$$

Las propiedades (4.80), (4.82) y (4.85) prueban que la matrices canónicas deseadas (4.74) y (4.75) son $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ y $\mathbf{K}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$, respectivamente.

EJERCICIO 4.20 Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + b_1(t), \quad (4.86)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + b_2(t), \quad (4.87)$$

cuya matriz es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Demuestre que $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{1}$. Halle expresiones para \mathbf{A}^{2k} y \mathbf{A}^{2k+1} y concluya que

$$e^{\mathbf{A}t} = \cosh(\sqrt{2}t) \mathbf{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) \mathbf{A}. \quad (4.89)$$

Escriba la solución del sistema (4.86)–(4.87).

También es fácil calcular la exponencial de una matriz que puede diagonalizarse, porque entonces tenemos

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

En el caso genérico, existe un procedimiento sistemático⁵ —aunque algo trabajoso, por lo que es mejor usar un sistema de cálculo algebraico: véase el apartado B.4.2— basado en el teorema de Cayley⁶-Hamilton que no vamos a describir aquí, ya que para el tipo de problema que nos interesa preferimos presentar a continuación un método alternativo de solución que ayudará a entender la estabilidad lineal en el capítulo 8.

4.6.2. Resolución del sistema homogéneo

Los sistemas con coeficientes constantes pueden resolverse utilizando la transformación de Laplace que estudiaremos en el capítulo 5 y que resulta especialmente útil en problemas de condiciones iniciales. Por otro lado, por derivación y sustitución siempre podremos reducir el sistema a una única ecuación lineal de coeficientes constantes de orden n y aplicar los métodos del capítulo 3, pero no es realmente necesario ya que el **método de Euler** que allí estudiábamos se traduce fácilmente al caso de sistemas.

⁵Véase, por ejemplo, la referencia [2], páginas 471–473.



⁶ **Arthur Cayley** (16-08-1821, Richmond, Inglaterra; 26-01-1895, Cambridge, Inglaterra). Sus mayores contribuciones se refieren a la teoría de grupos, el álgebra de matrices, la geometría no euclídea y la geometría en dimensión arbitraria. Publicó más de 900 trabajos, incluyendo unos 250 durante los 14 años en que trabajó como abogado antes de volver a dedicarse en exclusiva a su vocación, la matemática, a pesar de que sus ingresos se vieron mermados de forma muy importante al aceptar la cátedra en Cambridge.

En vez de ensayar una solución escalar $y = Ce^{kx}$, habrá que probar una solución vectorial $\mathbf{x} = e^{kt}\mathbf{c}$, donde \mathbf{c} es un vector constante a determinar. Si sustituimos $\mathbf{x} = e^{kt}\mathbf{c}$ en la ecuación homogénea $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, obtenemos $ke^{kt}\mathbf{c} = e^{kt}\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}$ y, tras simplificar la exponencial que no se anula nunca,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = k\mathbf{c}, \quad (4.91)$$

que no es sino el problema de valores propios para la matriz del sistema \mathbf{A} . Por tanto, el método consiste en resolver primero la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - k\mathbf{1}) = 0, \quad (4.92)$$

que nos proporciona los posibles valores propios —llamados **exponentes característicos** o **raíces características**— de la matriz del sistema. Por cada valor propio hay que hallar los vectores propios asociados resolviendo

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{1}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.93)$$

Cada vector propio independiente nos proporciona una solución del sistema lineal, y toda combinación lineal con coeficientes constantes será también solución.

Por ejemplo, el sistema $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = 4x + 3y$ tiene como matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (4.94)$$

por lo que la ecuación característica será

$$\det(\mathbf{A} - k\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = (k+1)(k-5) = 0. \quad (4.95)$$

Hay, por tanto, dos valores propios $k = -1, 5$ que nos darán dos soluciones linealmente independientes (ya que corresponden a exponenciales distintas) que se hallan calculando los vectores propios.

EJERCICIO 4.21 Compruebe que los vectores propios para $k = -1$ y $k = 5$ son, respectivamente,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (4.96)$$

y todos los vectores proporcionales a cada uno de ellos.

La solución general es, por consiguiente, $\mathbf{x} = A\mathbf{x}_1e^{-t} + B\mathbf{x}_2e^{5t}$ con A y B arbitrarias. Por componentes:

$$x = Ae^{-t} + Be^{5t}, \quad (4.97)$$

$$y = -Ae^{-t} + 2Be^{5t}. \quad (4.98)$$

Si, como en el anterior ejemplo, hay n vectores propios independientes —lo que sucederá, por ejemplo, si hay n valores propios distintos o, incluso si alguno tiene multiplicidad superior a 1, si la matriz es simétrica, hermítica, ortogonal o unitaria— los mismos multiplicados por la correspondiente exponencial constituyen un sistema fundamental de soluciones, que nos permite construir la solución mediante una combinación lineal con n coeficientes constantes arbitrarios.

EJERCICIO 4.22 Resuelva

$$\dot{x} = -2x + y + z, \quad (4.99)$$

$$\dot{y} = x - 2y + z, \quad (4.100)$$

$$\dot{z} = x + y - 2z. \quad (4.101)$$

Si el espacio generado por los vectores propios⁷ tiene dimensión inferior a n no hay suficientes soluciones del tipo $e^{kt}\mathbf{c}$ y, como ya sucediera con la ecuación lineal, hay que considerar también términos del tipo $t^p e^{kt}\mathbf{c}$. Nos limitaremos a proporcionar (omitiendo la demostración, que puede hallarse, por ejemplo, en las referencias [19] y [24]) la receta que permite hallar siempre, tanto si hay suficientes vectores propios como si no, la solución general: por cada exponente característico k de multiplicidad m ensáyese

$$\mathbf{x} = (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_m t^{m-1}) e^{kt} \quad (4.102)$$

con m vectores constantes \mathbf{c}_k a determinar. Esto proporcionará exactamente m soluciones independientes o, si se prefiere, una solución con m constantes arbitrarias. Repitiendo este tipo de ensayo con los demás valores propios pueden obtenerse siempre los n vectores linealmente independientes que constituyen un sistema fundamental de soluciones. El cálculo de los mismos es elemental, pero puede resultar tedioso. Nada puede justificar hoy día no utilizar para este tipo de cálculo (de hecho para resolver directamente cualquier sistema lineal con coeficientes constantes) un programa de cálculo simbólico. Sin embargo, hay que comprender bien las distintas formas que puede tomar la solución para entender la estabilidad lineal, que estudiaremos en el capítulo 8.

Por ejemplo, la matriz del sistema

$$\dot{x} = x - y, \quad (4.103)$$

$$\dot{y} = y \quad (4.104)$$

tiene un único vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el valor propio doble $k = 1$. Por ello, hay que ensayar una solución del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^t \quad (4.105)$$

para obtener

$$\begin{pmatrix} A + B + Bt \\ C + D + Dt \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} A - C + (B - D)t \\ C + Dt \end{pmatrix} e^t. \quad (4.106)$$

Igualando los coeficientes de cada potencia en las dos filas, se halla $C = -B$ y $D = 0$; la solución, por tanto, será

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt \\ -B \end{pmatrix} e^t. \quad (4.107)$$

(En este sencillo ejemplo, puesto que la incógnita x no aparece en la segunda ecuación, ésta puede resolverse directamente separando variables para obtener y , que sustituido en la otra ecuación nos deja por resolver una simple ecuación lineal de primer orden).

⁷Nos permitimos sugerir al lector que recuerde sus conocimientos sobre diagonalización de matrices, y para una discusión completa en relación con la solución de sistemas diferenciales le remitimos a los textos [19] y [24] de la bibliografía.

EJERCICIO 4.23 Halle la solución general de

$$\dot{x} = x - y, \quad (4.108)$$

$$\dot{y} = x + 3y. \quad (4.109)$$

Cuando el sistema es real y aparece una raíz compleja, podemos obtener soluciones manifiestamente reales agrupando cada par complejo conjugado $k = \alpha \pm i\omega$, y ensayando directamente

$$\mathbf{x} = e^{\alpha t} \left[(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_m t^{m-1}) \cos \omega t + (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 t + \cdots + \mathbf{d}_m t^{m-1}) \sin \omega t \right], \quad (4.110)$$

con vectores \mathbf{c}_i y \mathbf{d}_i constantes. Igualando los coeficientes de las potencias, al final quedarán $2m$ constantes arbitrarias por cada par complejo conjugado con multiplicidad m . La matriz del sistema

$$\dot{x} = x - y, \quad (4.111)$$

$$\dot{y} = x + y, \quad (4.112)$$

por ejemplo, tiene como valores propios $k = 1 \pm i$, por lo que ensayando

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \sin t \right] \quad (4.113)$$

se ve fácilmente que la solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} \sin t \right]. \quad (4.114)$$

EJERCICIO 4.24 Resuelva el sistema

$$\dot{x} = x - 5y, \quad (4.115)$$

$$\dot{y} = 2x - y. \quad (4.116)$$

4.6.3. Resolución del sistema completo

Por cada término inhomogéneo de tipo cuasipolinómico

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 t + \cdots + \mathbf{a}_q t^{q-1}) e^{\lambda t} \quad (4.117)$$

con vectores columna constantes conocidos \mathbf{a}_i , el **método de coeficientes indeterminados** consiste en ensayar una solución de la misma forma,

$$\mathbf{x} = (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_q t^{q-1}) e^{\lambda t}, \quad (4.118)$$

con vectores constantes \mathbf{c}_i a determinar, excepto en los casos en que λ resulta ser también raíz característica de la homogénea con multiplicidad $m \geq 1$, en cuyo caso hay que ensayar

$$\mathbf{x} = (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_{q+m} t^{q+m-1}) e^{\lambda t}, \quad (4.119)$$

no siendo siempre cierto, a diferencia de lo que sucede con la ecuación lineal, que pueda prescindirse de los primeros m términos. Por ejemplo, en el caso del sistema

$$\dot{x} = x - y - 2te^t - 9t^2e^{-2t}, \quad (4.120)$$

$$\dot{y} = y + 2e^t - 3e^{-2t}, \quad (4.121)$$

la raíz $k = 1$ aparece dos veces (es decir, en un cuasipolinomio de primer grado) en el término inhomogéneo y, como vimos al estudiar el sistema (4.104)–(??), tiene multiplicidad $m = 2$ en la matriz del sistema homogéneo, por lo que debe ensayarse un cuasipolinomio vectorial de tercer grado:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt + Ct^2 + Dt^3 \\ E + Ft + Gt^2 + Ht^3 \end{pmatrix} e^t. \quad (4.122)$$

Como $k = -2$ no es raíz característica de la parte homogénea, para ella hay que ensayar uno de segundo grado porque la parte correspondiente del término inhomogéneo es de ese grado:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt + Ct^2 \\ D + Et + Ft^2 \end{pmatrix} e^{-2t}. \quad (4.123)$$

EJERCICIO 4.25 Ensaye, por separado, esos dos cuasipolinomios y compruebe que la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt - 2t^2 \\ -B + 2t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 + 2t + 3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}. \quad (4.124)$$

En el caso un par complejo conjugado de raíces, $\lambda = \alpha \pm i\omega$, puede ensayarse la solución manifiestamente real

$$\mathbf{x} = e^{\alpha t} \left[\left(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_{q+m} t^{q+m-1} \right) \cos \omega t + \left(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 t + \cdots + \mathbf{d}_{q+m} t^{q+m-1} \right) \sin \omega t \right] \quad (4.125)$$

para un par de raíces λ que tienen multiplicidad $q > 0$ en el término inhomogéneo y $m \geq 0$ en la ecuación homogénea.

EJERCICIO 4.26 Resuelva el sistema

$$\dot{x} = x - y + e^t \cos t, \quad (4.126)$$

$$\dot{y} = x + y + e^t \sin t. \quad (4.127)$$

Por otro lado, si en el término inhomogéneo hay partes que no son cuasipolinomios, para calcular la parte de la solución particular que les corresponde habrá que recurrir al método general de variación de constantes (o al de Cauchy).

4.7. Problemas

4.1 $\ddot{x} = y, \quad \ddot{y} = x.$

4.2 $\ddot{x} - 2\dot{y} + x = 0, \quad \ddot{y} - 2\dot{x} + y = e^{2t}.$

4.3 Halle dos integrales primeras independientes y la ecuación de primer orden restante del siguiente sistema:

$$a\dot{x} = (b - c)yz, \quad b\dot{y} = (c - a)zx, \quad c\dot{z} = (a - b)xy,$$

donde a, b y c son constantes. ¿Cuál es el significado en mecánica de este sistema de ecuaciones? ¿Qué representan las integrales primeras halladas?

4.4 $\frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{y(z - x)} = \frac{dz}{z(x - y)}.$

4.5 ¿Son linealmente independientes los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$? Calcule su wronskiano y comente el resultado.

4.6 **Fórmula de Liouville.** Demuestre que el wronskiano de cualquier sistema fundamental del sistema lineal homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ satisface $W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{tr } \mathbf{A} dt$, recordando que la traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal: $\text{tr } \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{kk}$.

Sugerencia: Considere primero el caso $n = 2$.

4.7 **Sistemas y ecuaciones.** Considere el sistema lineal de primer orden asociado a una ecuación lineal de segundo orden. Establezca la relación entre las soluciones fundamentales de sistema y ecuación y compare los correspondientes wronskianos.

4.8 Halle el sistema lineal homogéneo cuya matriz fundamental es $\begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.9 Demuestre que dada una matriz \mathbf{A} se tiene $\det e^{\mathbf{A}} = e^{\text{tr } \mathbf{A}}$.

Sugerencia: Use $\det e^{\mathbf{A}t}$ en la fórmula de Liouville y haga $t = 1$.

4.10 **Estabilidad asintótica del origen.** Supongamos que la matriz $n \times n$ \mathbf{A} es constante y tiene n valores propios reales distintos. ¿Qué condición deben satisfacer dichos valores propios para que toda solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema lineal homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ satisfaga $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$? ¿Qué pasa si los valores propios no son necesariamente reales? ¿Y si no hay n distintos?

4.11 Clasifique, en función de a y b , las órbitas en el espacio de fases del sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4.12 Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule $e^{\mathbf{A}}$, $e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{B}} \cdot e^{\mathbf{A}}$ y $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$. Comente los resultados.

4.13 Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Desarrolle $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{B} \cdot e^{-\mathbf{A}t}$ en serie de Taylor alrededor de $t = 0$ para demostrar que

$$e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} = \left(\mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \cdots + \frac{1}{n!} \underbrace{[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \dots, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] \dots]}_{n \text{ veces}} + \cdots \right) \cdot e^{\mathbf{A}},$$

donde $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ es el **conmutador** de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} .

4.14 Fórmula de Glauber. Sean dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} que conmutan con su conmutador $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Halle la ecuación diferencial que satisface $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{B}t}$ y resuélvala para demostrar

$$e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \cdot e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}$$

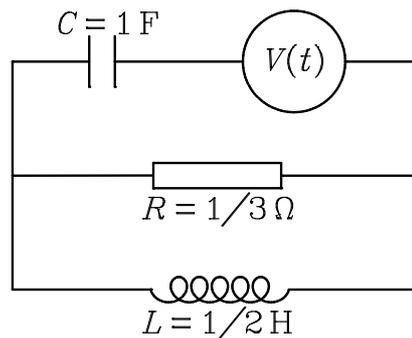


FIGURA 4.3 Circuito RLC.

4.15 Circuito RLC. Halle el sistema lineal que describe el circuito de la figura 4.3 en función de la intensidad a través de la autoinducción y de la diferencia de potencial entre las placas del condensador. Calcule la matriz fundamental y la solución para condiciones iniciales nulas cuando $t = 0$, si la tensión aplicada es

$$V(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{para } t > 1. \end{cases}$$

4.16 $\dot{x} = x + y + z$, $\dot{y} = -2y + t$, $\dot{z} = 2z + \sin t$.

4.17 $\dot{x} + 6x + 3y - 14z = 0$, $\dot{y} - 4x - 3y + 8z = 0$, $\dot{z} + 2x + y - 5z = \sin t$.

4.18 Demuestre que la trayectoria prerrelativista de un electrón que parte del reposo y se mueve en presencia de un campo electromagnético uniforme y constante con $\vec{E} \perp \vec{B}$ es una cicloide.

4.19 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & -5 & 18 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$.

4.20 Desintegración radiactiva. Sea un isótopo A , inicialmente puro, que sufre una doble desintegración $A \rightarrow B \rightarrow C$. Si C es estable, ¿cuál será en un instante de tiempo arbitrario la concentración relativa de A , B y C en función de los períodos de semidesintegración de A y B ?

4.21 Analice la ley de caída de una partícula puntual en el seno de un medio en el que el rozamiento es proporcional a la velocidad.

$$4.22 \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}.$$

$$4.23 \quad \dot{x} + 3x + 4y = 0, \quad \dot{y} + 2x + 5y = 0.$$

$$4.24 \quad \dot{x} = -5x - 2y, \quad \dot{y} = x - 7y.$$

$$4.25 \quad \dot{x} - y + z = 0, \quad \dot{y} - x - y = t, \quad \dot{z} - x - z = t.$$

4.26 Cómo puede calcularse el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que admite una matriz fundamental dada? Aplíquese la respuesta al cálculo del sistema cuya solución general es

$$\begin{aligned} x &= Ae^{3t} + Ce^{-2t}, \\ y &= \frac{3}{2}Ae^{3t} + Be^{-t} - Ce^{-2t}, \\ z &= \frac{3}{2}Ae^{3t} - Be^{-t} - Ce^{-2t}. \end{aligned}$$

4.27 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z \sin t - y, \\ \dot{y} &= x - z \cos t, \\ \dot{z} &= y \cos t - x \sin t. \end{aligned}$$

¿Puede encontrar una interpretación geométrica sencilla del resultado?

Sugerencia: Escriba la solución general en forma matricial y en función de las condiciones iniciales en $t = 0$.

4.28 Calcule la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y' &= 4\frac{xy - z}{x^2 - 1}, \\ z' &= 2\frac{xz - y}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

4.29 Sistemas de Cauchy-Euler. Describa cómo puede resolverse un sistema de ecuaciones diferenciales que en notación matricial puede escribirse como

$$t \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x},$$

con $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, usando un método análogo al desarrollado para las ecuaciones del mismo nombre. Aplique el método para obtener la solución general de

$$\begin{aligned} t \dot{x} &= 3x - 2y, \\ t \dot{y} &= 2x - 2y. \end{aligned}$$

4.30 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned}y' &= \frac{z}{x}, \\z' &= -xy.\end{aligned}$$

4.31 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 4v + 64te^{2t}, \\ \dot{v} &= u\end{aligned}$$

y use la solución para encontrar la del siguiente casi sin ningún cálculo adicional:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y^2 + 64te^{2t}, \\ \dot{y} &= \frac{x}{y}.\end{aligned}$$

Capítulo 5

Transformación de Laplace

*Change is not made without inconvenience,
even from worse to better.*
Samuel Johnson

La estrecha relación que existe entre la solución de ecuaciones y sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes y la de algunos problemas algebraicos fue estudiada en los capítulos 3 y 4. Aquí será analizada de nuevo por medio de unas muy útiles transformaciones integrales lineales que asocian a una función $f(t)$ una transformada $F(s)$ definida mediante una expresión del tipo

$$F(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt. \quad (5.1)$$

Estas transformaciones tienen la propiedad de convertir el problema diferencial lineal en un problema algebraico lineal equivalente. Algunas de las elecciones más útiles para los límites a y b , y el **núcleo** k se recogen en la siguiente tabla¹:

Transformada	directa	inversa
Laplace ²	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{st} F(s) ds$
Fourier	$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ipx} dx$	$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(p) e^{ipx} dx$
Mellin	$F(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(s) t^{-s} ds$
Hankel	$F(k) = \int_0^\infty f(t) J_n(kt) t dt$	$f(t) = \int_0^\infty F(k) J_n(kt) k dk$
Hilbert	$g(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x) dx}{x - y}$	$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{g(y) dy}{y - x}$

¹Algunas integrales deben calcularse en valor principal de Cauchy, que se define en el apartado D.2.

²La transformación de Carson-Heaviside, $f(t) \rightarrow s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, difiere de la de Laplace en un factor trivial. En la transformación inversa la recta $\xi + iy$ es cualquiera que se encuentre a la derecha de todas las singularidades de $F(s)$.

Las más usuales en física son la transformación de Fourier y la de Laplace, mientras que la de Mellin está siendo muy utilizada en los métodos simbólicos que discutiremos en el apéndice B. Aunque dedicaremos algunos problemas a la transformación de Fourier, en este capítulo estudiaremos la transformación de Laplace, que es más conveniente cuando se quieren estudiar problemas de condiciones iniciales, (y, por tanto, el transitorio es importante) y cuando el término inhomogéneo («la fuerza externa») es solo continuo por trozos. Aunque, debido al desarrollo de los métodos simbólicos, el uso de estas transformaciones a la hora de hallar las soluciones de ecuaciones diferenciales ha disminuido, su importancia teórica no ha cambiado: en teoría de circuitos, mecánica cuántica y muchas otras áreas, es a veces más cómodo trabajar directamente en el espacio de transformadas.

Tablas de transformadas de Laplace y Fourier, que también resumen las propiedades más importantes, pueden hallarse en los apéndices E y F respectivamente y otras más completas en las obras de referencia de la página 323.

5.1. Definición

La transformación de Laplace³ asocia a una función f una nueva función $F = \mathcal{L}[f]$ definida mediante la integral impropia

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (5.2)$$

EJERCICIO 5.1 Compruebe que

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0. \quad (5.3)$$

Notemos, en primer lugar, que los valores de f para $t < 0$ no intervienen para nada en esta definición, por lo que *supondremos siempre que la función es nula a la izquierda del origen*: $f(t) = \theta(t)f(t)$. Por ello, el anterior resultado es también la transformada de $\theta(t)$:

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0. \quad (5.4)$$

En segundo lugar, hay que restringir las funciones f para asegurar la existencia de la integral impropia. Veamos un conjunto de condiciones necesarias.

5.1.1. Espacio $F(\alpha)$

Llamaremos $F(\alpha)$ al espacio de las funciones continuas por trozos y orden exponencial finito α . Al suponer que la función f , que como dijimos consideraremos truncada para $t < 0$, es continua por trozos, admitimos que en todo subintervalo $[0, a]$ de longitud finita es continua salvo a lo sumo en un número finito de puntos donde presenta discontinuidades finitas. Esta primera



³ **Pierre-Simon Laplace** (28-03-1749, Beaumont-en-Auge, Francia; 5-03-1827, París). En *Exposition du système du monde* (1796) publicó su hipótesis nebular. Su obra maestra, el monumental *Traité de Mécanique Céleste*, fue publicada en 5 volúmenes entre 1799 y 1825 y recoge la obra de varias generaciones sobre gravitación, incluyendo las aportaciones del propio Laplace, en especial a la teoría del potencial. En 1812 puso bases sólidas al cálculo de probabilidades con su *Théorie Analytique des Probabilités*. Entre otras aportaciones, contribuyó al establecimiento del sistema métrico decimal durante la Revolución Francesa.

hipótesis garantiza que $\int_0^a e^{-st} f(t) dt$ existe para todo a finito. Para asegurar la convergencia de la integral impropia cuando $a \rightarrow \infty$ exigimos que sea de crecimiento exponencial, es decir, que exista un valor α (llamado orden exponencial) y constantes positivas t_0 y M tales que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \forall t > t_0. \quad (5.5)$$

EJERCICIO 5.2 Compruebe que las funciones 1 , $\sin at$, $\cos at$ y e^{iat} pertenecen a $F(0)$.

EJERCICIO 5.3 Use el desarrollo en serie de Taylor de $e^{\epsilon t}$ para hallar el orden exponencial de t^n para $n > 0$.

EJERCICIO 5.4 Demuestre que si $f \in F(\alpha)$ y $g \in F(\beta)$, entonces $fg \in F(\alpha + \beta)$.

5.1.2. Existencia y propiedades asintóticas

Nótese que, como $f \in F(\alpha)$ es continua por trozos, está acotada en $[0, t_0]$: por ejemplo $|f(t)| \leq L, \forall t \in [0, t_0]$. Esto junto con (5.5) permite acotar la integral que define la transformación de Laplace para todo $a > t_0$ como sigue

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_0^{t_0} e^{-st} |f(t)| dt + \int_{t_0}^a e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq L \int_0^{t_0} e^{-st} dt + M \int_{t_0}^a e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= L \frac{1 - e^{-st_0}}{s} + M \frac{e^{-(s-\alpha)t_0} - e^{-(s-\alpha)a}}{s - \alpha}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

de donde tomando $a \rightarrow \infty$ se sigue inmediatamente que si $f \in F(\alpha)$:

- $F(s)$ existe para $s > \alpha$ (o para $\operatorname{Re} s > \alpha$),
- $sF(s)$ se mantiene acotado cuando $s \rightarrow \infty$ y, por tanto, $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

Como $1 \in F(0)$ esperamos que $\mathcal{L}[1]$ exista para $s > 0$, que es precisamente lo que habíamos visto que sucedía en el ejercicio 5.1. También comprobamos que esa transformada, $1/s$, tiende a 0 en el infinito, mientras que multiplicada por s se mantiene acotada.

EJERCICIO 5.5 Demuestre que

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a}, \quad \text{para } s > a. \quad (5.7)$$

En el resto de este capítulo supondremos, salvo que se diga explícitamente lo contrario, que la función $f(t)$ pertenece a un espacio $F(\alpha)$, para un α adecuado.

5.2. Propiedades

5.2.1. Linealidad

La linealidad de la integral conduce inmediatamente a la de la transformación de Laplace:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)], \quad (5.8)$$

para a y b constantes. Esta propiedad fundamental permitirá conservar la linealidad del problema diferencial cuando se convierta en algebraico.

EJERCICIO 5.6 Use la linealidad y la transformada de la exponencial para hallar

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a| \quad (5.9)$$

sin hacer ninguna integral.

5.2.2. Teorema del desplazamiento

Usando la definición (5.2) de la transformada de Laplace, tenemos que, si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ para $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t) dt = F(s-a), \quad (s-a > \alpha), \quad (5.10)$$

y, por tanto, hemos demostrado que

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), \quad \text{para } s > \alpha + a. \quad (5.11)$$

Es decir, la transformada del producto de una exponencial e^{at} por una función $f(t)$ es la trasladada por a de la transformada de la función. Por ejemplo, usando las siguientes transformadas, que demostraremos en el problema 5.1,

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \text{para } s > 0, \quad (5.12)$$

es inmediato obtener

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos bt] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \mathcal{L}[e^{at}\sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \text{para } s > a. \quad (5.13)$$

EJERCICIO 5.7 Use esta propiedad y el resultado (5.3) para recuperar (5.7) sin hacer ninguna integral.

El recíproco de este teorema es cierto, si recordamos la hipótesis de que nuestras funciones se anulan para $t < 0$ y consideramos la trasladada por a de f que estará ahora truncada a la izquierda de $t = a$.

EJERCICIO 5.8 Compruebe mediante un cambio de variables que si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ para $s > \alpha$, entonces para $a > 0$

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > \alpha. \quad (5.14)$$

EJERCICIO 5.9 Compruebe sin hacer la integral que para $a > 0$

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{para } s > 0. \quad (5.15)$$

¿Qué pasa si $a < 0$?

5.2.3. Cambio de escala

EJERCICIO 5.10 Demuestre que si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ para $s > \alpha$, entonces para $a > 0$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{para } s > a\alpha. \quad (5.16)$$

5.2.4. Derivadas y productos por potencias

Supongamos que $f, f', \dots, f^{(n)}$ pertenecen a $F(\alpha)$ y que $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ para $s > \alpha$. Calculemos la transformada de la derivada usando integración por partes, suponiendo que f es continua en $[0, \infty)$:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (5.17)$$

Debido a que el orden exponencial de f es α , tendremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$ para $s > \alpha$, por lo que usando el resultado (5.17) e inducción completa tenemos las siguientes transformadas de las derivadas en la semirrecta $s > \alpha$:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0), \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0), \quad (5.19)$$

⋮

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (5.20)$$

donde puesto que $f(t) = 0$ para $t < 0$, los valores $f^{(k)}(0)$ deben entenderse como un límite por la derecha cuando $t \rightarrow 0$, que debe existir por la hipótesis de continuidad. Además, en (5.19) debe suponerse que f y f' son continuas, y en (5.20) que lo son f, f', \dots, f^{n-1} .

EJERCICIO 5.11 Use (5.18) para obtener directamente la transformada de e^{at} .

La importancia de estos resultados estriba en que sustituyen derivadas por combinaciones algebraicas, lo que permitirá en ciertos casos convertir problemas diferenciales en algebraicos, como veremos en el apartado 5.6. El recíproco es aún más fácil.

EJERCICIO 5.12 Use inducción completa para demostrar que si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ para $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s), \quad \text{para } s > \alpha \quad (5.21)$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad \text{para } s > \alpha. \quad (5.22)$$

EJERCICIO 5.13 Demuestre sin calcular integrales que

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{para } s > 0, \quad (5.23)$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \text{para } s > a. \quad (5.24)$$

5.3. La transformación inversa

El problema inverso de hallar la función $f(t)$ cuya transformada de Laplace es una función $F(s)$ dada es más difícil. En primer lugar, no siempre tiene solución. Por ejemplo, 1 no tiende a 0 cuando $s \rightarrow \infty$ y, por tanto, no puede ser la transformada de una función de $F(\alpha)$, ni de ninguna otra función porque como veremos en el apartado 5.5 es de hecho la transformada de la función generalizada $\delta(t)$.

Tampoco es necesariamente única, pero el **teorema de Lerch**⁴, que no demostraremos, asegura que si $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, entonces

$$\int_0^x [f(t) - g(t)] dt = 0, \quad \forall x > 0, \quad (5.25)$$

cuya derivada con respecto a x implica que si f y g tienen la misma transformada solo pueden diferir en los puntos de discontinuidad. En particular, si f y g son continuas y tienen la misma transformada deben ser iguales (para todo $t > 0$), y las transformadas inversas que aquí nos interesan son soluciones de ecuaciones diferenciales y, por tanto, continuas.

Existe una fórmula para la transformada inversa $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (5.26)$$

donde la recta vertical de integración debe elegirse a la derecha de las singularidades de F , pero si la transformada (directa e inversa) de Laplace es útil es precisamente porque permite hacer cálculos sin resolver integrales. En efecto, usando tablas como las incluidas en el apéndice E, la linealidad de la transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)], \quad (5.27)$$

que se sigue de la de la directa, y manipulaciones algebraicas elementales, es fácil conseguir en la práctica la transformada inversa continua de muchas expresiones.

En el tipo de problemas abordados en este capítulo (ecuaciones lineales con coeficientes constantes) se trata siempre de hallar la transformada inversa de una función racional, para lo que es útil la descomposición en fracciones simples. Por ejemplo, dada $F(s) = 1/s(s+1)^2$ basta usar

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \quad (5.28)$$

y los resultados (5.3), (5.7), (5.24) y (5.27) para hallar su transformada inversa continua:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)^2} \right] = 1 - (1+t)e^{-t}. \quad (5.29)$$

Para realizar la descomposición en fracciones simples es útil recordar el siguiente resultado que forma parte de otro conocido como **fórmula de desarrollo de Heaviside**.



⁴ **Mathias Lerch** (20-02-1860, Milinov, Bohemia —hoy en la República Checa—; 3-08-1922, Susice, Checoslovaquia). Aunque trabajó también en geometría y métodos numéricos, sus aportaciones son más numerosas en análisis y teoría de números. Parte de su trabajo es fundamental en la moderna teoría de operadores.

EJERCICIO 5.14 Supongamos que el grado del polinomio $P(s)$ es inferior al de $Q(s)$ y que éste admite una raíz simple en $s = a$: $Q(a) = 0$, $Q'(a) \neq 0$. Demuestre que el correspondiente coeficiente A en la descomposición en fracciones simples de la función racional $P(s)/Q(s)$,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A}{s-a} + \dots, \quad (5.30)$$

es el siguiente residuo:

$$A = \lim_{s \rightarrow a} \frac{(s-a)P(s)}{Q(s)}. \quad (5.31)$$

¿Qué puede decirse si la raíz es doble?

EJERCICIO 5.15 Halle las transformadas inversas de las siguientes funciones:

$$F(s) = \frac{s}{s^3 - s^2 - s + 1}, \quad F(s) = \frac{2s}{s^2 + 1}. \quad (5.32)$$

Si se prefieren soluciones manifiestamente reales cuando los coeficientes lo son, en vez de factorizar términos cuadráticos del denominador con discriminante negativo, que corresponden a raíces complejas, deben reescribirse completando cuadrados,

$$as^2 + bs + c = a \left[\left(s + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} \right)^2 \right], \quad \text{si } b^2 - 4ac < 0, \quad (5.33)$$

para poder utilizar el resultado (5.13) y los correspondientes a sus derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \mathcal{L} \left[e^{-t} \sin t \right]. \quad (5.34)$$

EJERCICIO 5.16 Halle la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{2s - 4}{s^2 + 4s + 8}. \quad (5.35)$$

5.4. La convolución

En general, se define el producto de convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ como la función $h = f * g$ dada por

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u) du, \quad (5.36)$$

pero como aquí las funciones se suponen truncadas a la izquierda del origen, tendremos en la primera integral que $f(u) = 0$ para $u < 0$ y que $g(t-u) = 0$ para $u > t$, y algo parecido sucede en la segunda integral. Por consiguiente, usaremos en este capítulo como definición de convolución la siguiente, que a veces se llama **convolución de Laplace**:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du = \int_0^t f(t-u)g(u) du. \quad (5.37)$$

Las siguientes propiedades del producto de convolución son inmediatas:

$$f * (g * h) = (f * g) * h, \quad (5.38)$$

$$f * (g + h) = (f * g) + f * h, \quad (5.39)$$

$$f * g = g * f, \quad (5.40)$$

$$f * 0 = 0, \quad (5.41)$$

pero la propiedad más importante es que la transformación de Laplace convierte el producto de convolución en el producto ordinario. En efecto, usemos las definiciones de convolución y transformación de Laplace:

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(u)g(t-u) du \right] dt = \iint_{R_1} e^{-st} f(u)g(t-u) du dt. \quad (5.42)$$

La integral doble está extendida al segundo octante R_1 del plano, pero haciendo el cambio de variables $(u, v) = (u, t-u)$, que tiene jacobiano⁵ unidad, el dominio de integración pasa a ser el primer cuadrante R_2 , como se muestra en la figura 5.1. Con ello se obtiene

$$\mathcal{L}[f * g] = \iint_{R_2} e^{-s(u+v)} f(u)g(v) du dv = \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \int_0^\infty e^{-sv} g(v) dv, \quad (5.43)$$

es decir,

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g] = F(s)G(s). \quad (5.44)$$

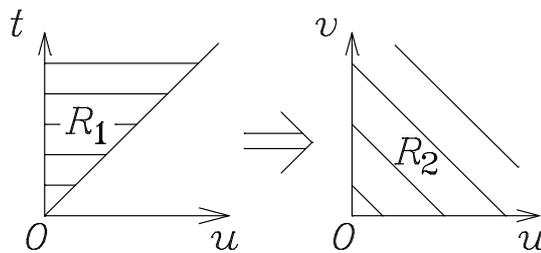


FIGURA 5.1 Dominios de integración

Veamos un ejemplo en el cálculo de la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+1} \right] = 1 * \sin t = \int_0^t \sin u du = 1 - \cos t. \quad (5.45)$$

Como vemos en este último resultado, *la unidad de convolución no es 1*. Para hallarla, necesitamos volver a considerar funciones generalizadas.

5.5. Transformación de funciones generalizadas

Si usamos la transformada (5.15) de la función de Heaviside $\theta(t-a)$ para $a > 0$, recordamos que su derivada es la delta de Dirac, $\delta(t-a) = \theta'(t-a)$, y usamos (5.18) junto con $\theta(-a) = 0$, obtenemos la transformada de la delta de Dirac:

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}, \quad \text{para } a, s > 0. \quad (5.46)$$



⁵ **Karl Gustav Jacob Jacobi** (10-12-1804, Potsdam, Prusia; 18-02-1851, Berlín). Es el fundador de la teoría de las funciones elípticas. Aplicó sus estudios sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a la mecánica, donde son muy importantes la integral de Jacobi y la teoría de Hamilton-Jacobi. Aunque el determinante que lleva su nombre fue utilizado antes por Cauchy, Jacobi lo analizó con detalle en *De determinantibus functionalibus* (1841), donde estableció su relación con la dependencia funcional.

EJERCICIO 5.17 Compruebe que lo mismo se obtiene usando directamente la definición de la delta en la de la transformación de Laplace.

El doble camino elegido para ver ese resultado ha permitido comprobar la validez de lo visto para funciones normales, cuando se usan en su lugar funciones generalizadas. Lo mismo sucede con la convolución.

EJERCICIO 5.18 Use la definición de convolución para demostrar

$$\delta(t - a) * f(t) = \theta(t - a)f(t - a). \quad (5.47)$$

Compruebe la coherencia de este resultado con las expresiones (5.14), (5.44) y (5.46).

En el límite $a \rightarrow 0$ obtenemos las expresiones correspondientes a $\delta(t)$:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \text{para } s > 0, \quad (5.48)$$

$$\delta(t) * f(t) = f(t), \quad (5.49)$$

lo que nos dice que la unidad de convolución es la $\delta(t)$, al igual que la unidad del producto ordinario es su transformada 1.

EJERCICIO 5.19 ¿Por qué hemos elegido tomar el límite $a \rightarrow 0$?

5.6. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Como la transformación de Laplace convierte la derivada en un producto, cuando se quiere resolver un problema de condiciones iniciales de una ecuación o un sistema lineal con coeficientes constantes, el siguiente método es a menudo el más eficaz:

1. calcule la transformada de Laplace del problema diferencial, usando (5.18)–(5.20) y las condiciones iniciales,
2. resuelva el problema algebraico resultante, y
3. calcule la transformada inversa del resultado.

Para que esto sea práctico en un cálculo a mano, tiene que resultar que las transformadas directas e inversas necesarias se hallen en las tablas o puedan obtenerse mediante manipulación algebraica simple a partir de las que allí aparecen, lo que siempre sucede si los coeficientes son constantes. Se supone también que las condiciones iniciales se dan en el origen $t = 0$; pero si esto no fuera así, puede usarse una simple traslación para hacer que el punto donde se dan las condiciones iniciales sea el origen. Veamos algunos ejemplos.

5.6.1. Una ecuación de orden arbitrario

Por ejemplo, consideremos el problema

$$\dot{x} - 2x = e^{5t}, \quad x(0) = 3, \quad (5.50)$$

que por medio de la linealidad y (5.18) da lugar al problema algebraico

$$sX - 3 - 2X = \frac{1}{s-5}, \quad (5.51)$$

siendo $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Despejando la transformada de la incógnita y reduciendo a fracciones simples (para que el cálculo de la inversa se reduzca a una consulta a las tablas), se obtiene

$$X = \frac{3s - 14}{(s-2)(s-5)} = \frac{8}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-5}, \quad (5.52)$$

cuya transformada inversa nos da la solución del problema:

$$x = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}. \quad (5.53)$$

EJERCICIO 5.20 Resuelva el problema $\ddot{x} + x = e^{-2t} \sin t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

5.6.2. Sistemas de ecuaciones

El método se aplica tanto a una ecuación de orden n como a un sistema de n ecuaciones de primer orden.

EJERCICIO 5.21 Resuelva el sistema

$$\dot{x} - 6x + 3y = 8e^t, \quad (5.54)$$

$$\dot{y} - 2x - y = 4e^t \quad (5.55)$$

con las condiciones iniciales $x(0) = -1$ e $y(0) = 0$.

5.6.3. Osciladores

En este ejemplo consideremos el oscilador lineal general,

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t), \quad (5.56)$$

que puede ser el oscilador mecánico (3.122) o el circuito RLC (3.123). Si denotamos las condiciones iniciales como $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, calculamos la transformada del problema y despejamos la transformada de la incógnita, obtenemos

$$X(s) = \frac{F(s) + (as + b)x_0 + a\dot{x}_0}{as^2 + bs + c}, \quad (5.57)$$

que puede escribirse en términos de la **función del sistema** o **función de transferencia**

$$H(s) \equiv \frac{1}{as^2 + bs + c}, \quad (5.58)$$

que solo depende del oscilador y no del agente externo, como

$$X(s) = H(s)F(s) + \frac{(as + b)x_0 + a\dot{x}_0}{as^2 + bs + c}. \quad (5.59)$$

Si invertimos esta expresión y definimos

$$h(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[H(s)], \quad (5.60)$$

$$x_1(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{as + b}{as^2 + bs + c}\right], \quad (5.61)$$

$$x_2(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{as^2 + bs + c}\right], \quad (5.62)$$

obtenemos que la solución se escribe como

$$x(t) = \int_0^t h(t-u)f(u) du + [x_0 x_1(t) + \dot{x}_0 x_2(t)]. \quad (5.63)$$

Los dos términos entre corchetes representan la solución general de la homogénea con las constantes arbitrarias elegidas igual a las condiciones iniciales. En muchos problemas estos términos, que dan la solución en ausencia de agentes externos ($f(t) = 0$), son decrecientes y a todos los efectos prácticos desaparecen tras un transitorio. Por otro lado, se reconoce en el primer término la solución particular dada por el método de Cauchy, que es la correspondiente a condiciones iniciales nulas $x_0 = \dot{x}_0 = 0$. La función $h(t-u)$ es precisamente la familia de soluciones de la homogénea que hemos llamado $K(t, u)$ en el apartado 3.8.2.

EJERCICIO 5.22 Compruebe que si sustituimos $f(t) = \delta(t-a)$ en (5.63), obtenemos que la solución elemental es $E(t, a) = \theta(t-a)h(t-a)$.

5.6.4. Funciones continuas por trozos

Cuando hay funciones definidas por trozos, el uso de las funciones escalón permite expresarlas de forma que las tablas sean directamente aplicables.

EJERCICIO 5.23 Sea

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{para } t > \pi, \end{cases} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (5.64)$$

Demuestre que el término inhomogéneo es $\theta(t) - \theta(t-\pi)$ y resuelva el problema. ¿Son continuas la solución y su derivada?

A veces, como en el anterior ejemplo, la fuerza externa $f(t)$ no es continua en el intervalo $0 < t < T$ que nos interesa, sino continua por trozos. Definamos $t_0 \equiv 0$ y $t_n \equiv T$ y supongamos que los puntos de discontinuidad son t_1, \dots, t_{n-1} . Además, definimos los límites por la izquierda y la derecha como de costumbre:

$$f(t \pm 0) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t \pm \epsilon). \quad (5.65)$$

Entonces, f es continua en cada intervalo (t_{i-1}, t_i) para $i = 1, \dots, n$, y los límites $f(t_0 + 0)$, $f(t_1 \pm 0)$, \dots , $f(t_{n-1} \pm 0)$ y $f(t_n - 0)$ son finitos. A pesar de los puntos de discontinuidad, existe una solución única en el intervalo $0 < t < T$ que satisface tanto las condiciones iniciales como las siguientes:

- $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ son continuas en todo el intervalo $0 \leq t \leq T$.
- $\ddot{x}(t)$ es continua en cada subintervalo $t_{i-1} < t < t_i$.
- La ecuación (5.56) se cumple en cada subintervalo $t_{i-1} < t < t_i$.

En efecto, el teorema de existencia y unicidad garantiza la existencia de una única solución que satisface las mencionadas propiedades en el intervalo $t_0 \leq t < t_1$. Además, $x(t_1 - 0)$ y $\dot{x}(t_1 - 0)$ son finitos, y para que x y \dot{x} sean continuas en $t = t_1$ basta elegir como condiciones iniciales para el siguiente subintervalo

$$x(t_1 + 0) = x(t_1 - 0), \quad \dot{x}(t_1 + 0) = \dot{x}(t_1 - 0). \quad (5.66)$$

Así, la solución se extiende de forma única a $t_1 \leq t < t_2$, y de allí al intervalo completo sin más que repetir una y otra vez el mismo procedimiento. Este resultado se extiende directamente a sistemas y ecuaciones más generales con términos inhomogéneos continuos por trozos.

5.7. Problemas

5.1 Demuestre *sin hacer integrales* que, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

5.2 Calcule $\mathcal{L}[\sin^2 at]$, *sin calcular ninguna integral*.

5.3 Halle la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi, \\ \sin t + \cos t, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

5.4 Calcule la transformada recíproca de $F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}$.

5.5 Halle la transformada recíproca de $F(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$.

5.6 Demuestre que si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ y existe el límite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$, se tiene que

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u) du.$$

¿Para qué imponemos la existencia del límite?

5.7 Demuestre que si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, se cumple que

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u) du\right] = \frac{1}{s} \left[F(s) - \int_0^a f(u) du \right].$$

5.8 Usando la definición y propiedades de la función gamma de Euler, que pueden hallarse en el apartado D.5, calcule $\mathcal{L}[t^b]$ y $\mathcal{L}[t^b e^{at}]$ para $b > -1$. En particular, ¿cuáles son $\mathcal{L}[t^{-1/2}]$ y $\mathcal{L}[t^{1/2}]$? ¿Qué sucede cuando b es un entero no negativo? Analice el comportamiento de $sF(s)$ cuando $s \rightarrow \infty$ para $-1 < b < 0$ y comente el resultado.

5.9 Usando la definición y propiedades de la función error, que pueden hallarse en el apartado D.4 de la página 283, calcule $\mathcal{L}[\operatorname{erf}(a\sqrt{t})]$. ¿Qué pasa si $a < 0$?

5.10 Calcule las transformadas de Laplace de las funciones $\operatorname{Si}(t)$, $\operatorname{Ci}(t)$ y $-\operatorname{Ei}(-t)$, que, para $t > 0$, son (véase el apartado D.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{Si}(t) &= \int_0^t \frac{\sin u}{u} du, \\ \operatorname{Ci}(t) &= -\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du, \\ -\operatorname{Ei}(-t) &= \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du. \end{aligned}$$

Sugerencia: Haga cambios de variables adecuados para que los nuevos límites inferiores de las dos últimas integrales sean constantes.

5.11 Halle la transformada recíproca de $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)}$.

5.12 Ecuación integral de Volterra⁶. Discútase el método de solución por medio de la transformación de Laplace de las ecuaciones del tipo

$$x(t) = g(t) + \int_0^t k(t-u)x(u) du.$$

5.13 Resuelva $x(t) = \cos t + \int_0^t e^{-(t-u)} x(u) du$.

5.14 Halle la solución del siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \delta(t - \pi), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

5.15 Sea $f(t)$ una función periódica de período T , $f(t+T) = f(t)$, para $t > 0$. Demuestre que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

5.16 Demuestre que si $\ddot{y}(t) \equiv x(t)$, la ecuación integral de Volterra

$$x(t) + \int_0^t (t-u)x(u) du = \sin 2t$$

es equivalente al problema de valores iniciales

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \sin 2t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Resuelva ambos problemas.

5.17 La función de Bessel $J_0(x)$ es la solución de la **ecuación de Bessel** de orden cero,

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

que satisface la condición inicial $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$.

(a) Halle la transformada de Laplace de J_0 .

(b) Mediante un desarrollo en serie de $1/s$ de este resultado y una integración formal término a término, calcule el desarrollo de J_0 .

Sugerencia: Use la serie binómica (D.54) y simplifíquela en este caso particular por medio del subfactorial (D.61).



⁶ **Vito Volterra** (23-05-1860, Ancona, Estados Pontificios; 11-10-1940, Roma). Con 13 años consiguió algún progreso en el problema de tres cuerpos. Estudió ecuaciones en derivadas parciales en relación con las ondas cilíndricas, pero sus trabajos más importantes se refieren a ecuaciones integrales. También se dedicó a la ecología matemática estudiando la ecuación logística y el modelo de depredador y presa.

5.18 Tautocrona. Halle la ecuación de la curva plana a lo largo de la cual el tiempo de caída hasta el mínimo no depende del punto del que ha partido del reposo una partícula puntual que se mueve sin rozamiento bajo la acción de la gravedad a lo largo de la curva. Supongamos que para hallar la ecuación $x(y)$ de dicha curva elegimos el eje y en dirección vertical y hacia arriba, así como que s es la abscisa curvilínea medida desde el mínimo.

- (a) Integre la ley de conservación de la energía mecánica para hallar el tiempo de caída hasta el mínimo.
- (b) Resuelva mediante la transformación de Laplace la ecuación integral obtenida para ds/dy .
- (c) Halle e integre dx/dy , para encontrar la ecuación de la tautocrona.

5.19 Calcule $\mathcal{L} \left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \right]$.

5.20 Resuelva $\dot{x} + 2x + \int_0^t x(u) du = \sin t, \quad x(0) = 1.$

5.21 $\ddot{x} + x = \theta(t - \pi) - \theta(t - 2\pi), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

5.22 Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \dot{y} &= t + 1, \\ \dot{x} + \dot{y} - 3x + y &= 2t - 1, \\ x(0) = 0, \quad y(0) &= -11/9, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

5.23 $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2}(0) = 2, \quad \frac{d^3x}{dt^3}(0) = -3.$

5.24 $t\ddot{x} + (3t - 1)\dot{x} - (4t + 9)x = 0, \quad x(0) = 0.$

5.25 $\ddot{x} + x = e^{-t} \cos t, \quad x(\pi) = \dot{x}(\pi) = 0.$

5.26 Demuestre que la onda sinusoidal rectificada es

$$|\sin t| = \sin t + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta(t - k\pi) \sin(t - k\pi),$$

por lo que su transformada de Laplace resulta ser $\frac{1}{s^2 + 1} \coth \frac{\pi s}{2}$.

5.27 Delta de Dirac. Utilice la transformación de Laplace para calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall a > 0.$$

Use este resultado y el correspondiente a $a < 0$ para demostrar que las transformadas directa e inversa de Fourier de la unidad son la delta de Dirac, salvo una constante:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ipx} dp = \delta(x).$$

Sugerencia: Separe partes real e imaginaria, recuerde el problema 3.30 y use el resultado D.25.

5.28 Fórmula de inversión de Fourier. Utilice el resultado del problema 5.27 para demostrar que si la transformada de Fourier de $f(x)$ es

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ipx} dx,$$

se satisface

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)e^{ipx} dp = f(x),$$

lo que prueba que la transformación inversa de Fourier viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)e^{ipx} dp.$$

5.29 Teorema de Parseval. Supongamos que las transformada de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$ son $\hat{f}(p)$ y $\hat{g}(p)$. Use el problema 5.27 para demostrar la siguiente igualdad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(p)} \hat{g}(p) dp = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

5.30 Use el teorema de Parseval para calcular la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

5.31 Ecuaciones diferenciales con retraso. Considere la solución continua de la ecuación diferencial con retraso

$$\dot{x}(t) + x(t-1) = 0$$

que satisface la condición inicial $x(t) = 1$ para $-1 \leq t \leq 0$. Calcule su transformada de Laplace y escríbala como una serie de potencias de $s^{-1}e^{-s}$. Calcule la transformada recíproca para hallar la solución buscada. ¿Puede obtenerse esta misma solución por algún otro método? Discuta la diferenciabilidad de la solución.

5.32 Probablemente ha oído que un grupo de gente marchando de forma acompasada sobre un puente puede llegar a provocar su caída. Justifique este hecho estudiando el siguiente problema:

$$\ddot{x} + x = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - 2k\pi), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

¿Qué es lo que hace que la mencionada catástrofe solo ocurra en determinadas condiciones?

5.33 La transformada de Laplace de $f(t) = \ln t$ es

$$F(s) = -\frac{\ln s + \gamma}{s}.$$

¿Por qué no se mantiene acotada $sF(s)$ cuando $s \rightarrow \infty$?

5.34 Dé dos ejemplos sencillos (y bien distintos) de funciones que no admitan transformada de Laplace.

5.35 Fórmula de Duhamel. Sea una ecuación lineal de coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

donde f es continua por trozos y de orden exponencial. Demuestre que la solución que satisface condiciones iniciales nulas, $y(0) = y'(0) = 0$, puede escribirse como

$$y(x) = \int_0^x z'(u)f(x-u) du,$$

siendo z la solución de

$$az'' + bz' + cz = 1, \quad \text{con} \quad z(0) = z'(0) = 0.$$

Aplique la fórmula al oscilador forzado

$$y'' + \omega^2 y = f(x),$$

y compare el resultado con la expresión obtenida mediante el método de Cauchy.

5.36 ¿Durante cuánto tiempo debe aplicarse una fuerza externa constante sobre un oscilador armónico que se halla inicialmente en reposo, para que al desaparecer la fuerza siga para siempre en reposo?

5.37 Halle las soluciones de

$$\int_0^t y(u) du = \int_0^t y(u)y(t-u) du.$$

¿Es una ecuación lineal?

5.38 Halle la solución del siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} t, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi, \end{cases} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Capítulo 6

Solución por series de ecuaciones lineales

Though this be madness, yet there is method in 't.
William Shakespeare

En el análisis de un gran número de problemas de física se tiene en algún momento necesidad de resolver —o de analizar las propiedades de las soluciones de— una ecuación lineal de segundo orden. Como vimos en el capítulo 3, la mayor dificultad estriba en hallar una solución particular de la homogénea, ya que a partir de ella es posible escribir las soluciones generales de la homogénea y de la completa mediante cuadraturas. Vimos allí algunos cambios de variables que pueden intentarse, pero no debe esperarse que siempre funcionen, ni mucho menos que la solución pueda escribirse en términos de funciones elementales. De hecho, las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden definen a menudo funciones especiales. En este capítulo veremos cómo pueden hallarse las soluciones de ecuaciones homogéneas de segundo orden en términos de series de potencias, cuya suma es en numerosas ocasiones una función especial.

6.1. Repaso de series de potencias

Por conveniencia, recogemos sin demostración las conocidas propiedades de las series de potencias. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, si el límite

$$\rho(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (6.1)$$

existe o es $+\infty$, su valor es el **radio de convergencia** de la serie, de forma que la misma converge absoluta y uniformemente en $|x - x_0| < \rho$ y diverge para $|x - x_0| > \rho$. Si $\rho = 0$ la serie no converge en ningún punto, excepto, quizás, en x_0 , y si $\rho = +\infty$ converge por doquier.

EJERCICIO 6.1 ¿Puede dar alguna otra expresión para calcular el radio de convergencia?

Sean dos series $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ que convergen para $|x - x_0| < \rho$ (podemos elegir ρ como el mínimo de sus radios de convergencia). Entonces, para $|x - x_0| < \rho$:

1. Toda serie construida mediante combinaciones lineales con coeficientes constantes α y β de los coeficientes a_n y b_n de ambas series converge a la correspondiente combinación de las sumas:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) (x - x_0)^n. \quad (6.2)$$

En particular, las series pueden sumarse y restarse término a término.

2. El producto formal de las series converge al producto de las sumas:

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right] (x - x_0)^n. \quad (6.3)$$

También puede calcularse la serie del cociente $f(x)/g(x)$, si $g(x_0) \neq 0$, pero el cálculo de los coeficientes no es tan simple y la serie resultante puede tener un radio de convergencia inferior a ρ .

3. La serie es indefinidamente derivable en $|x - x_0| < \rho$ y sus derivadas pueden calcularse derivando las series término a término:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \quad (6.4)$$

Además, los coeficientes de la serie son

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (6.5)$$

y, por tanto, la serie es su propia serie de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n. \quad (6.6)$$

4. Dos series son iguales $f(x) = g(x)$ si y solo si los coeficientes de potencias iguales coinciden: $a_n = b_n$.

Recordemos también que si $\rho > 0$, $f(x)$ es analítica alrededor de $x = x_0$ y que, como consecuencia de las propiedades que acabamos de revisar, si f y g son analíticas alrededor de x_0 , también lo son $\alpha f + \beta g$, $f g$ y f/g (con tal de que, en el último caso, $g(x_0) \neq 0$). Obviamente, los polinomios son analíticos alrededor de cualquier punto, como lo son $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\sinh x$ y $\cosh x$. Por el contrario, los radios de convergencia de las series de Taylor de $(1+x)^\nu$ y $\ln(1+x)$ alrededor del origen son finitos ($\rho(0) = 1$). (El lector debería ser capaz de escribir y reconocer sin vacilar las series de potencias de todas estas funciones elementales).

EJERCICIO 6.2 Halle el radio de convergencia y la suma de las siguientes series de potencias:

$$f_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad (6.7)$$

$$f_2(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots, \quad (6.8)$$

$$f_3(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, \quad (6.9)$$

$$f_4(x) = 1 + x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{5}{16}x^8 + \frac{3}{16}x^{10} + \dots \quad (6.10)$$

6.2. Soluciones en forma de series

En el resto del capítulo vamos a considerar el problema de hallar las soluciones de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (6.11)$$

en forma de una serie de potencias ordinaria,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad (6.12)$$

o de una **serie de Frobenius**¹ alrededor de un cierto punto x_0 , que por definición es el producto,

$$y = (x - x_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad c_0 \neq 0, \quad (6.13)$$

de una serie de potencias por una potencia $(x - x_0)^\lambda$ cuyo exponente λ se llama **índice** y puede ser complejo o real, entero o no, positivo, negativo o nulo². La introducción del factor $(x - x_0)^\lambda$ viene motivada por la experiencia con ecuaciones de Cauchy-Euler como la (3.185), cuyas soluciones $x^{1/2}$ y x^{-2} no admiten desarrollos en series de Taylor alrededor de $x = 0$, pero son series de Frobenius (finitas, en este sencillo caso). Para decidir el tipo de serie que debemos utilizar hay que analizar la naturaleza del punto $x = x_0$.

6.2.1. Puntos ordinarios y singulares

Diremos que el punto $x = x_0$ alrededor del cual quiere hallarse la solución es un **punto ordinario**, si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ (con el coeficiente de y'' puesto igual a la unidad como en (6.11)) son analíticas alrededor de x_0 . En caso contrario, x_0 es un **punto singular**. Si el punto es singular pero las funciones

$$p(x) \equiv (x - x_0)P(x), \quad q(x) \equiv (x - x_0)^2Q(x) \quad (6.14)$$

son analíticas alrededor de x_0 (es decir, si P y Q tienen a lo sumo un polo de primer y segundo orden, respectivamente) el punto se llama **singular regular**. Si ni siquiera esto es cierto, porque P o Q tienen un polo de orden más alto, el punto es **singular irregular**.

EJERCICIO 6.3 Clasifique los puntos singulares de

$$x^2(x^2 - 1)^2 y'' - 2x(x + 1)y' - y = 0. \quad (6.15)$$

Para simplificar la notación, supondremos siempre que buscamos una solución alrededor de $x_0 = 0$, lo que puede lograrse mediante una traslación trivial (o, si estamos interesados en desarrollos alrededor del punto del infinito, con el cambio de variable independiente $x = 1/t$).



¹ **Ferdinand Georg Frobenius** (26-10-1849, Berlín, Prusia; 3-08-1917, Berlín). Este discípulo de Weierstrass es recordado, aparte de sus trabajos sobre funciones elípticas y ecuaciones diferenciales, por sus importantes contribuciones a la teoría de grupos, incluyendo la teoría de representaciones de grupos finitos, que jugó después un importante papel en mecánica cuántica.

²Si queremos soluciones reales y λ no es un entero, habrá que sustituir $(x - x_0)^\lambda$ por $|x - x_0|^\lambda$.

6.3. Puntos ordinarios

En este caso los coeficientes P y Q de la ecuación (6.11) son analíticos alrededor del origen y, por tanto, los desarrollos

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n \quad (6.16)$$

son convergentes para $|x| < \rho$ con un $\rho > 0$ apropiado. Consideremos la serie (6.12) y sus derivadas:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (6.17)$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n, \quad (6.18)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n, \quad (6.19)$$

donde se han hecho dos corrimientos de índices, $n \rightarrow n+1$ y $n \rightarrow n+2$, para lograr que las series vuelvan a empezar por $n=0$. Si se ensayan dichas series en la ecuación (6.11) y se tienen en cuenta los desarrollos (6.16) y la propiedad (6.3) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} Qy &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n Q_{n-k} c_k \right] x^n, \\ Py' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (k+1) P_{n-k} c_{k+1} \right] x^n, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n, \end{aligned}$$

$$y'' + Py' + Qy = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1) c_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1) P_{n-k} c_{k+1} + Q_{n-k} c_k] \right\} x^n. \quad (6.20)$$

Por tanto, para que la ecuación se satisfaga, deben cumplirse las siguientes condiciones para los valores $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1) P_{n-k} c_{k+1} + Q_{n-k} c_k] = 0, \quad (6.21)$$

y, en consecuencia, tras elegir como se quiera las constantes c_0 y c_1 , todas las otras pueden calcularse una a una usando la última expresión. En efecto, si ya conocemos $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$, el siguiente coeficiente es

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^n [(k+1) P_{n-k} c_{k+1} + Q_{n-k} c_k]. \quad (6.22)$$

Nótese que en el término de la derecha solo aparecen coeficientes conocidos con anterioridad. Aunque aquí no lo demostremos (véase, por ejemplo, [4]), la serie así construida es convergente para $|x| < \rho$ y, puesto que contiene las constantes arbitrarias c_0 y c_1 , es la solución general de la ecuación (6.11).

En resumen, si el origen es un punto ordinario, la solución general puede expresarse en forma de la serie de potencias ordinaria (6.17), donde c_0 y c_1 son constantes arbitrarias y el resto de los coeficientes vienen dados por la recurrencia (6.22). La serie converge en los puntos $|x| < \rho$.

El ejemplo más sencillo es el del oscilador armónico, $y'' + y = 0$, para el que todos los puntos son ordinarios. Podríamos usar las expresiones que acabamos de obtener, pero basta recordar simplemente que la solución viene dada por una serie de potencias ordinaria (6.17). Sustituyendo (6.17) y (6.19) en la ecuación del oscilador obtenemos que el coeficiente de x^n es

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.23)$$

Por tanto, podemos elegir c_0 y c_1 sin restricciones y

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.24)$$

Como en esta recurrencia aparecen c_{n+2} y c_n , pero falta c_{n+1} , los términos pares, $n+2 = 2k$, e impares, $n+2 = 2k+1$, se separan naturalmente y las correspondientes recurrencias se deshacen fácilmente:

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{(2k)(2k-1)} = \frac{c_{2k-4}}{(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)} = \dots = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}, \quad (6.25)$$

$$c_{2k+1} = -\frac{c_{2k-1}}{(2k+1)(2k)} = \frac{c_{2k-3}}{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)} = \dots = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}. \quad (6.26)$$

Sustituyendo estos valores obtenemos la solución esperada

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \cos x + c_1 \sin x, \quad (6.27)$$

ya que las series son las del coseno y el seno.

EJERCICIO 6.4 Halle por el método de series la solución de

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0. \quad (6.28)$$

Compruebe el resultado usando la transformación de Liouville del ejercicio 3.22.

6.3.1. Ecuación de Hermite

Para estudiar la ecuación de Schrödinger del oscilador armónico

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi \quad (6.29)$$

conviene utilizar las siguientes variables adimensionales:

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (6.30)$$

$$\epsilon = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 \equiv \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (6.31)$$

EJERCICIO 6.5 Demuestre que con estas variables la ecuación del oscilador se escribe como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\epsilon - x^2)\psi = 0, \quad (6.32)$$

donde hemos simplificado la notación eliminando la tilde sobre la x . Ensaye una serie de potencias para ψ y demuestre que los coeficientes deben satisfacer la recurrencia:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + \epsilon c_n = 0, \quad n = 0, 1, \quad (6.33)$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + \epsilon c_n - c_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.34)$$

Esta recurrencia, a diferencia de las que hemos encontrado hasta ahora, es de tres puntos, ya que el coeficiente c_{n+2} depende no de uno sino de dos coeficientes anteriores. En general, es más difícil deshacer este tipo de recurrencias que las que son de dos puntos, aunque veremos en el problema 6.13 un caso en que puede hacerse con relativa facilidad. En la práctica, las recurrencias de tres puntos aparecen, a veces, cuando el punto del infinito $t = 1/x = 0$ es singular irregular, como en este caso, y factorizando el comportamiento en el infinito puede suceder que la nueva recurrencia sea de dos puntos. En este ejemplo, para valores muy grandes de $|x|$ el comportamiento asintótico de las soluciones es del tipo $\psi \sim e^{\pm x^2/2}$, ya que si sustituimos esto en la ecuación obtenemos

$$(x^2 \pm 1 + \epsilon - x^2)e^{\pm x^2/2} \quad (6.35)$$

y los términos dominantes (proporcionales a $x^2 e^{\pm x^2/2}$) se cancelan. Esto sugiere que la mayor parte de las soluciones se comportarán como $\psi \sim e^{x^2/2}$ (lo que da lugar a soluciones inaceptables como funciones de onda, que deben tender a cero en el infinito), pero que puede haber casos en que sean como $\psi \sim e^{-x^2/2}$. Para explorar con más detalle esta posibilidad, el cambio evidente $\psi(x) \sim e^{-x^2/2}y(x)$ es útil.

EJERCICIO 6.6 Demuestre que haciendo el cambio de variables $\psi = e^{-x^2/2}y$, y usando el nuevo parámetro $\lambda = \epsilon - 1$, la ecuación del oscilador armónico cuántico se reduce a la ecuación de Hermite³:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (6.36)$$

Como los coeficientes de y' e y son polinómicos, todos los puntos (y en particular el origen) son ordinarios. Al sustituir la serie de potencias (6.17) y sus derivadas (6.18)–(6.19) e igualar los coeficientes de x^n obtenemos

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.37)$$

Como esperábamos, c_0 y c_1 pueden elegirse sin condiciones y los demás coeficientes vienen dados por

$$c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)}c_n. \quad (6.38)$$

De nuevo se separan las potencias pares e impares y se obtiene

$$y = c_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda(4-\lambda)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!}x^6 - \dots \right] + c_1 \left[x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)}{7!}x^7 + \dots \right], \quad (6.39)$$



³ **Charles Hermite** (24-12-1822, Dieuze, Francia; 14-01-1901, París). A él se debe la primera prueba de que e es trascendente. También trabajó en funciones elípticas y la ecuación de quinto grado. Llevan su nombre una ecuación diferencial, unos polinomios, un método de interpolación y un tipo de matrices. Los polinomios de Hermite y las matrices hermíticas resultaron posteriormente de capital importancia en mecánica cuántica.

que puede escribirse en forma más compacta usando la función gamma de Euler descrita en el apartado D.5, con la que se obtiene que la solución es

$$y = c_0 M\left(-\frac{\lambda}{4}, \frac{1}{2}, x^2\right) + c_1 x M\left(\frac{2-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, x^2\right), \quad (6.40)$$

en términos de las funciones de Kummer del problema 6.22 y el apartado D.10.

Para valores grandes de $|x|$ los términos más importantes serán los correspondientes a valores altos de n para los que se tiene que la recurrencia (6.38) es

$$c_{n+2} \approx \frac{2}{n+2} c_n \approx \frac{2}{n+1} c_n, \quad (n \rightarrow \infty), \quad (6.41)$$

cuya solución para los índices pares es $c_{2k} = c_{2(k-1)}/k = c_0/k!$ y corresponde a e^{x^2} .

EJERCICIO 6.7 Compruebe que algo parecido ocurre con los coeficientes impares para $n \rightarrow \infty$.

Por tanto, tal y como esperábamos, el comportamiento asintótico de la mayoría de las soluciones es $\psi = e^{-x^2/2} y \sim e^{x^2/2}$, y para que la función de onda, $\psi = e^{-x^2/2} y$, no diverja en el infinito y sea de cuadrado sumable hay que limitarse a considerar las soluciones polinómicas que se obtendrán cuando una de las series de arriba se corte y se elija el coeficiente c_0 o c_1 de la otra igual a 0. Vemos que eso solo es posible cuando

- $\lambda = 0, \quad c_1 = 0, \quad y = c_0,$
- $\lambda = 2, \quad c_0 = 0, \quad y = c_1 x,$
- $\lambda = 4, \quad c_1 = 0, \quad y = c_0 (1 - 2x^2),$
- $\lambda = 6, \quad c_0 = 0, \quad y = c_1 \left(x - \frac{2}{3}x^3\right),$
- etc.

La existencia de soluciones aceptables solo para valores discretos del parámetro λ es la razón matemática de la cuantización de la energía del oscilador.

EJERCICIO 6.8 ¿A qué valores de la energía E corresponden las soluciones polinómicas de la ecuación de Hermite?

Eligiendo adecuadamente los coeficientes en las soluciones polinómicas, se obtienen los **polinomios de Hermite**, que vienen dados por la relación de recurrencia

$$H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x), \quad H_0(x) = 1, \quad (6.42)$$

o por la fórmula de Rodrigues⁴ del apartado D.12.2. Otras interesantes propiedades de estos polinomios pueden hallarse, por ejemplo, en las tablas de Abramowitz y Stegun [35].

⁴**Olinde Rodrigues** (1794-1851). La única contribución de importancia a las matemáticas de este banquero francés, más interesado por la organización científica de la sociedad, fue la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre, aunque por extensión se aplica el mismo nombre a fórmulas similares.

6.4. Ecuación de Bessel

Tras separar variables en muchas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de problemas físicos con simetría cilíndrica, aparece la ecuación de Bessel⁵

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (6.43)$$

Supongamos que ensayamos la serie de potencias (6.17):

$$\begin{aligned} x^2 y &= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n, \\ -\nu^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\nu^2 c_n) x^n, \\ xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n, \\ x^2 y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n, \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y &= -\nu^2 c_0 + (1 - \nu^2) c_1 x + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - \nu^2) c_n + c_{n-2}] x^n. \end{aligned}$$

Para que se cumpla la ecuación tienen que anularse los coeficientes de todas las potencias x^n :

$$-\nu^2 c_0 = 0, \quad (6.45)$$

$$(1 - \nu^2) c_1 = 0, \quad (6.46)$$

$$(n^2 - \nu^2) c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.47)$$

La discusión de este resultado es sencilla. En primer lugar, en el caso $\nu = 0$, c_0 es arbitraria, pero hay que elegir $c_1 = 0$ y solo logramos una solución. Cuando $\nu = \pm 1$, hay que hacer $c_0 = 0$ y c_1 es arbitraria. Igualmente, si $\nu = \pm k \equiv \pm 2, \pm 3, \dots$, hay que tomar $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$ y c_k será arbitraria. Por tanto, si ν es entero se encuentra una solución (y no dos) ensayando una serie de potencias. Pero si ν no es entero, obtenemos solo la solución nula $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = 0$. En consecuencia, ensayando una serie de potencias no encontraremos ninguna solución en la mayor parte de los casos.

La razón del fracaso del método de la serie de potencias estriba en que el origen no es un punto ordinario, sino singular regular. Hay, por tanto, que ensayar una serie de Frobenius y sus derivadas:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda+n}, \quad (6.48)$$



⁵ **Friedrich Wilhelm Bessel** (22-07-1784, Minden, Westfalia; 17-03-1846, Königsberg, Prusia, Kaliningrad en la Rusia actual). Destacó tanto por su labor de observación en astronomía (fue el primero en determinar la distancia de una estrella fija y demostró que Sirio tiene una compañera oscura) como por sus contribuciones teóricas a la mecánica celeste. Introdujo las funciones que llevan su nombre —aunque en casos particulares habían sido utilizadas antes por Jacob y Daniel Bernoulli, Euler y Lagrange— en el estudio perturbativo del problema de tres cuerpos.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) c_n x^{\lambda+n-1}, \quad (6.49)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n x^{\lambda+n-2}. \quad (6.50)$$

Usando estas series obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 y &= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{\lambda+n}, \\ -\nu^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\nu^2 c_n) x^{\lambda+n}, \\ xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) c_n x^{\lambda+n}, \\ x^2 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n x^{\lambda+n}, \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y &= (\lambda^2 - \nu^2) c_0 x^\lambda + [(\lambda + 1)^2 - \nu^2] c_1 x^{\lambda+1} + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} \{ [(\lambda + n)^2 - \nu^2] c_n + c_{n-2} \} x^{\lambda+n}. \end{aligned}$$

En consecuencia, los coeficientes de x^λ , $x^{\lambda+1}$ y $x^{\lambda+n}$ de la solución son, respectivamente:

$$(\lambda^2 - \nu^2) c_0 = 0, \quad (6.52)$$

$$[(\lambda + 1)^2 - \nu^2] c_1 = 0, \quad (6.53)$$

$$[(\lambda + n)^2 - \nu^2] c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.54)$$

La primera de estas condiciones es la **ecuación indicial**, $\lambda^2 = \nu^2$, y nos da los **índices** $\lambda = \pm \nu$, que son los únicos valores de λ para los que la serie de Frobenius es solución de la ecuación de Bessel. Si sustituimos esta ecuación indicial en la segunda de las anteriores condiciones, obtenemos al desarrollar el cuadrado del binomio $(2\lambda + 1)c_1 = 0$, que nos dice que $c_1 = 0$. Nótese que en el caso $\nu = -\lambda = 1/2$ el coeficiente c_1 es arbitrario, por lo que nada impide elegirlo nulo. Además, este caso particularmente sencillo fue completamente resuelto en términos de funciones elementales en el problema 3.22 y será abordado de nuevo en el 6.5. Finalmente, la tercera condición es,

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(\lambda + n)^2 - \nu^2} = -\frac{c_{n-2}}{n(2\lambda + n)}, \quad (6.55)$$

lo que junto a $c_1 = 0$ nos dice que todos los coeficientes impares son nulos, $c_{2k+1} = 0$, mientras que los pares satisfacen una recurrencia que se resuelve sin dificultad usando (D.53):

$$\begin{aligned} c_{2k} &= -\frac{c_{2(k-1)}}{4k(\lambda + k)} = \frac{c_{2(k-2)}}{4^2 k(k-1)(\lambda + k)(\lambda + k - 1)} = \dots \\ &= \frac{(-1)^k c_0}{4^k k(k-1) \dots 1 (\lambda + k)(\lambda + k - 1) \dots (\lambda + 1)} = \\ &= \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k! (\lambda + 1)_k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda + 1) c_0}{2^{2k} k! \Gamma(\lambda + k + 1)}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Multiplicando y dividiendo este resultado por 2^λ e insertándolo en (6.48) obtenemos la solución

$$y = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}, \quad (6.57)$$

que, salvo por el coeficiente constante fuera del sumatorio define la **función de Bessel de primera especie de orden λ** :

$$J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}. \quad (6.58)$$

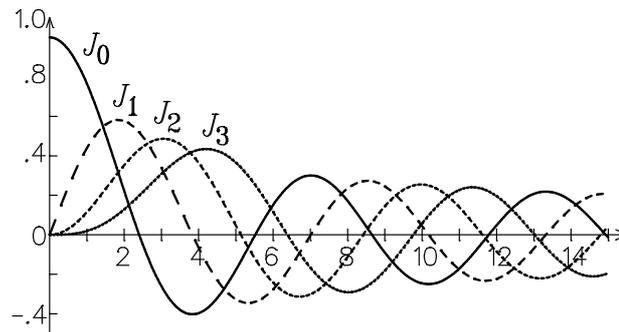


FIGURA 6.1 Algunas funciones de Bessel J_n de orden entero.

Vemos, por tanto, que la ecuación de Bessel de orden ν admite como soluciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$. La **función de Bessel de segunda especie** —también llamada función de Newmann o función de Weber y denotada a veces como N_ν — de orden ν se define como la siguiente combinación lineal con coeficientes constantes:

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (6.59)$$

y es, en consecuencia, solución de la ecuación. Como puede verse, por ejemplo, en [15], el wronskiano de J_ν y $J_{-\nu}$ es

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}, \quad (6.60)$$

por lo que tenemos dos casos. Si ν no es entero, la solución general puede escribirse como $y = A J_\nu + B J_{-\nu}$, ya que J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente independientes porque sus series empiezan con distintas potencias de x . Sin embargo, si $\nu = 0, 1, \dots$, el wronskiano se anula y las dos funciones de primera especie son linealmente dependientes. De hecho, cuando $\nu = 0$ tenemos un único índice ($\lambda = 0$) y, por tanto, una única solución dada por (6.58). Además, la constante $\Gamma(\lambda + 1)$ que hemos eliminado al pasar de (6.57) a (6.58) es infinita para los valores $\lambda = -n = -1, -2, \dots$, cuando $\nu = n = 1, 2, \dots$, y la función J_{-n} restante es igual u opuesta a J_n .

EJERCICIO 6.9 Demuestre que también cuando $\lambda = -1, -2, \dots$ puede usarse la expresión (6.58), que se cumple la relación

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = \cos(n\pi) J_n(x), \quad (6.61)$$

y que, por tanto, la función J_{-n} definida por la fórmula (6.58) es solución de la ecuación de Bessel, aunque no sea linealmente independiente de J_n .

No hay en este caso dos soluciones independientes en forma de serie de Frobenius, y veremos más adelante que esto sucede siempre que hay un solo índice (cuando $\nu = 0$ en este caso) y puede también pasar cuando la diferencia entre los índices es un entero (aquí ocurre si ν es un entero, pero no si es semientero, aunque la diferencia 2ν sea entonces entera). Discutiremos en las siguientes secciones cómo puede abordarse este problema en el caso general, pero con la ecuación de Bessel es mejor usar el siguiente hecho.

EJERCICIO 6.10 Compruebe que

$$W[J_\nu, Y_\nu] = \frac{2}{\pi x}. \quad (6.62)$$

Por tanto, J_ν y Y_ν son siempre linealmente independientes, incluso cuando ν es un entero, en cuyo caso se define como

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (6.63)$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación de Bessel puede escribirse como $y = C J_\nu + D Y_\nu$ tanto si ν es entero como si no lo es.

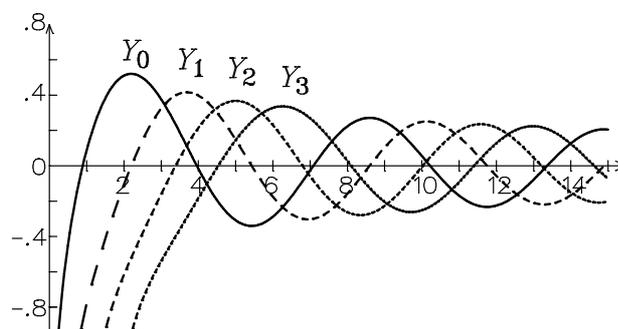


FIGURA 6.2 Algunas funciones de Bessel Y_n de orden entero.

De entre las muchas propiedades de las funciones de Bessel que pueden encontrarse en las tablas, algunas útiles relaciones de recurrencia se demostrarán el problema 6.4. Nos limitaremos aquí a señalar que, como puede verse de la propia definición o en la figura 6.1, $J_0(0) = 1$ y $J_1(0) = J_2(0) = \dots = 0$, mientras que las Y_n divergen en el origen, como se aprecia en la figura 6.2. Veremos en el siguiente apartado que esto sucede a menudo con la solución correspondiente al índice pequeño cuando la diferencia entre índices es un entero, incluso si el mismo no es negativo.

EJERCICIO 6.11 Utilice los resultados de este apartado y el ejercicio D.12 para recuperar la solución en términos de funciones elementales de la ecuación de Bessel de orden $1/2$ que se halló en el problema 3.22.

6.5. Método de Frobenius

En este apartado enunciamos y demostramos el resultado general para un punto ordinario o singular regular que hemos trasladado al origen. El cálculo es más cómodo si multiplicamos la ecuación por x^2 y usamos la notación (6.14):

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.64)$$

También supondremos que el origen es un punto ordinario o singular regular, es decir, que p y q admiten desarrollos en series de potencias

$$p(x) = xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad (6.65)$$

$$q(x) = x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (6.66)$$

convergentes para $|x| < \rho$ con $\rho > 0$.

EJERCICIO 6.12 Compruebe que el origen será un punto ordinario si y solo si $p_0 = q_0 = q_1 = 0$.

Con las hipótesis que acabamos de enunciar, el método de Frobenius consiste en ensayar en la ecuación (6.64) una serie de Frobenius

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda+n}, \quad c_0 \neq 0, \quad (6.67)$$

que será convergente, al menos, para $0 < |x| < \rho$. Nótese que la linealidad y homogeneidad de la ecuación conducen a que c_0 sea arbitrario, si la solución existe.

Si derivamos la serie (6.67) término a término dos veces y multiplicamos la primera y segunda derivadas por x y x^2 respectivamente obtenemos

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) c_n x^{\lambda+n}, \quad (6.68)$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n x^{\lambda+n}, \quad (6.69)$$

y, usando (6.3), (6.65) y (6.66),

$$q(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n q_{n-k} c_k \right] x^{\lambda+n}, \quad (6.70)$$

$$xp(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n p_{n-k} (\lambda + k) c_k \right] x^{\lambda+n}. \quad (6.71)$$

Si sustituimos estas dos expresiones y (6.69) en (6.64) e igualamos los coeficientes de cada potencia obtenemos, para $n = 0, 1, \dots$,

$$(\lambda + n)(\lambda + n - 1)c_n + \sum_{k=0}^n [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}] c_k = 0, \quad (6.72)$$

que, introduciendo la **función indicial** de la ecuación

$$\mathcal{I}(u) \equiv u(u-1) + p_0u + q_0, \quad (6.73)$$

se escribe en forma más conveniente como

$$\mathcal{I}(\lambda+n)c_n + \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda+k) + q_{n-k}] c_k = 0. \quad (6.74)$$

(Nótese que ahora el sumatorio acaba en $k = n - 1$).

El coeficiente de la potencia más baja se obtiene tomando $n = 0$ en la última expresión lo que da $\mathcal{I}(\lambda)c_0 = 0$. Puesto que $c_0 \neq 0$ —ya que elegir $c_0 = 0$ correspondería a redefinir $(c_1, \lambda) \rightarrow (c_0, \lambda + 1)$ — para que (6.67) sea una solución de (6.64), tiene que cumplirse la **ecuación indicial**

$$\mathcal{I}(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + p_0\lambda + q_0 = 0. \quad (6.75)$$

Las dos raíces de esta ecuación cuadrática, λ_1 y λ_2 se llaman los **índices** de la ecuación diferencial y corresponden, con las excepciones que discutiremos luego, a las dos soluciones linealmente independientes que nos hacen falta para construir la solución general. El procedimiento parece claro: para cada índice c_0 es arbitrario, c_1 puede calcularse despejándolo de (6.74) con $n = 1$,

$$c_1 = -\frac{1}{\mathcal{I}(\lambda+1)} (p_1\lambda + q_1) c_0, \quad (6.76)$$

y el resto de los coeficientes pueden calcularse de forma recurrente, ya que una vez conocidos c_0, c_1, \dots, c_{n-1} , el siguiente coeficiente, c_n , viene dado por

$$c_n = -\frac{1}{\mathcal{I}(\lambda+n)} \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda+k) + q_{n-k}] c_k, \quad (6.77)$$

cuyo miembro derecho solo depende de los coeficientes ya calculados. El único obstáculo de principio a este método es la posibilidad de que el denominador de la expresión (6.77) se anule para un cierto $n = N > 0$, lo que solo puede ocurrir si $\lambda + N$ es el otro índice, $\mathcal{I}(\lambda + N) = 0$, es decir, si la diferencia entre ambos índices es un entero $N = \lambda_1 - \lambda_2$. Por otro lado, si los dos índices resultan ser iguales —es decir, si hay un único índice doble— el procedimiento solo proporciona una solución. Estos casos serán tratados más adelante, ya que aunque el índice mayor (o con mayor parte real, o el índice único) dará sin problemas una solución la segunda puede contener un término logarítmico no descrito por una serie del tipo (6.67).

Teorema 6.1 (Frobenius) *Sea $x = 0$ un punto ordinario o singular regular de la ecuación*

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \quad (6.78)$$

de forma que las funciones p y q admiten desarrollos,

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (6.79)$$

convergentes para $|x| < \rho$, con $\rho > 0$. Si λ_1 y λ_2 son las dos raíces de la ecuación indicial

$$\mathcal{I}(\lambda) \equiv \lambda(\lambda-1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \quad (6.80)$$

con $N \equiv \lambda_1 - \lambda_2$ (siendo $N \geq 0$ o $\text{Re } N \geq 0$), y definimos recurrentemente las funciones

$$a_0(\lambda) \equiv 1, \quad (6.81)$$

$$a_n(\lambda) \equiv -\frac{1}{\mathcal{I}(\lambda+n)} \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda+k) + q_{n-k}] a_k(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.82)$$

entonces la ecuación (6.78) tiene dos soluciones, y_1 e y_2 , que son linealmente independientes en $0 < |x| < \rho$. La primera se puede obtener siempre como

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) x^{\lambda_1+n}, \quad (6.83)$$

mientras que la segunda puede ser:

1. si $N \neq 0, 1, 2, \dots$,

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) x^{\lambda_2+n}, \quad (6.84)$$

2. si $N = 0$,

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{\lambda_1+n}, \quad (6.85)$$

con

$$b_n \equiv a'_n(\lambda_1) = \left. \frac{d}{d\lambda} a_n(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.86)$$

3. si $N = 1, 2, \dots$,

$$y_2 = A y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda_2+n}, \quad (6.87)$$

con

$$A \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2} [(\lambda - \lambda_2) a_N(\lambda)], \quad (6.88)$$

$$c_0 \equiv 1, \quad (6.89)$$

$$c_n \equiv \left. \frac{d}{d\lambda} [(\lambda - \lambda_2) a_n(\lambda)] \right|_{\lambda=\lambda_2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.90)$$

6.5.1. Demostración del teorema

La demostración de que las soluciones tienen la mencionada forma consiste en ensayar una solución del tipo

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) x^{\lambda+n} \quad (6.91)$$

en la ecuación

$$\mathcal{L}y \equiv x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \quad (6.92)$$

lo que, por el mismo argumento utilizado en las expresiones (6.68)–(6.74), da para el miembro de la izquierda

$$\mathcal{L}y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathcal{I}(\lambda+n) c_n(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda+k) + q_{n-k}] c_k(\lambda) \right\} x^{\lambda+n}, \quad (6.93)$$

que exigiendo que se cumpla

$$\mathcal{I}(\lambda + n)c_n(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}] c_k(\lambda) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.94)$$

se reduce a

$$\mathbb{L}y(x, \lambda) = \mathcal{I}(\lambda)c_0(\lambda)x^\lambda. \quad (6.95)$$

El miembro de la derecha de esta ecuación se anula para los índices, $\mathcal{I}(\lambda_1) = \mathcal{I}(\lambda_2) = 0$, por lo que obtenemos las soluciones (6.83) y (6.84) sin más que tomar en (6.91), con $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$ respectivamente, el valor particular $c_0(\lambda) = 1$, que hace que (6.94) se reduzca a (6.82).

Si el índice es doble,

$$\mathcal{I}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2, \quad (6.96)$$

(6.83) y (6.84) coinciden, pero podemos obtener una segunda solución haciendo $c_0(\lambda) = 1$, derivando (6.95) y usando (6.96) y la linealidad del operador \mathbb{L} , para ver que

$$\mathbb{L}\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda) = 2(\lambda - \lambda_1)x^\lambda + (\lambda - \lambda_1)^2 x^\lambda \ln x, \quad (6.97)$$

que se anula para $\lambda = \lambda_1$. Por tanto, otra solución se obtiene derivando (6.91) en $\lambda = \lambda_1$:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(\lambda_1)x^{\lambda_1+n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_1)x^{\lambda_1+n} \ln x, \quad (6.98)$$

que es no es otra cosa que (6.85).

Cuando $\lambda_1 = \lambda_2 + N$ con $N = 1, 2, \dots$, la dificultad al hallar la segunda solución proviene de que el coeficiente de $c_N(\lambda)$ en (6.94) para $n = N$ es $\mathcal{I}(\lambda + N) = (\lambda + N - \lambda_1)(\lambda + N - \lambda_2) = (\lambda - \lambda_2)(\lambda + N - \lambda_2)$ y se anula para $\lambda = \lambda_2$. Ahora bien, si elegimos

$$c_0(\lambda) = \lambda - \lambda_2, \quad (6.99)$$

como consecuencia de (6.94) también $c_1(\lambda), \dots, c_{N-1}(\lambda)$ tendrán un factor $(\lambda - \lambda_2)$, por lo que ese factor aparecerá en todos los sumandos de (6.94) para $n = N$, que, por tanto, se satisfará cuando $\lambda = \lambda_2$. La ecuación (6.95) será

$$\mathbb{L}y(x, \lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 x^\lambda, \quad (6.100)$$

que se anula para $\lambda = \lambda_2$, por lo que una solución es

$$y(x, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_2)x^{\lambda_2+n} = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(\lambda_2)x^{\lambda_2+n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{N+n}(\lambda_2)x^{\lambda_1+n} = Ay_1, \quad (6.101)$$

con los valores definidos en (6.83) y (6.88), ya que los primeros N sumandos se anularán debido a que los coeficientes contienen el factor $(\lambda_2 - \lambda_2)$, mientras que el siguiente término será $c_N(\lambda_2)x^{\lambda_2+N} = Ax^{\lambda_2+N} = Ax^{\lambda_1}$. Para obtener la segunda solución procederemos como antes derivando (6.100),

$$\mathbb{L}\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda) = (\lambda - \lambda_2)^2 x^\lambda + 2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)x^\lambda + (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 x^\lambda \ln x, \quad (6.102)$$

que también se anula para $\lambda = \lambda_2$, por lo que una solución será

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(\lambda_2)x^{\lambda_2+n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_2)x^{\lambda_2+n} \ln x, \quad (6.103)$$

que coincide con (6.87) si tenemos en cuenta (6.101) y la elección (6.99). (La demostración de que el dominio de convergencia contiene los puntos $0 < |x| < \rho$ puede hallarse en el libro [21]).

6.5.2. Observaciones

- Si solo quieren calcularse algunos términos de la solución puede ser más fácil ensayar directamente el tipo de serie que se sabe que va a aparecer y calcular los coeficientes correspondientes.
- Si se ha conseguido sumar la serie de la primera solución y_1 , el método más conveniente para hallar la segunda solución es a menudo la reducción de orden (3.68).
- La posible aparición de términos logarítmicos no debería sorprendernos a la vista de la experiencia con las ecuaciones de Cauchy-Euler estudiadas en el apartado 3.12.
- Si solo hay un índice, $\lambda_1 = \lambda_2$, la segunda solución contiene necesariamente un término logarítmico.
- Si la diferencia entre los índices es un entero no nulo $N = \lambda_1 - \lambda_2$, la ecuación (6.94) para el coeficiente $c_N(\lambda_2)$ tiene la forma

$$0 \cdot c_N(\lambda_2) + \sum_{k=0}^{N-1} [p_{N-k}(\lambda + k) + q_{N-k}] c_k(\lambda_2) = 0, \quad (6.104)$$

por lo que existen dos posibilidades:

- Si debido a la estructura de la ecuación resulta que

$$\sum_{k=0}^{N-1} [p_{N-k}(\lambda + k) + q_{N-k}] c_k(\lambda_2) = 0, \quad (6.105)$$

entonces $c_N(\lambda_2)$ es arbitrario, por lo que $A = 0$ y la solución correspondiente al índice pequeño, λ_2 , no tiene término logarítmico. Además, como en esa solución habrá dos constantes arbitrarias, $c_0(\lambda_2)$ y $c_N(\lambda_2)$, la misma será la solución general y contendrá, en particular, la correspondiente al índice mayor, λ_1 , que se recupera tomando $c_0(\lambda_2) = 0$ y $c_N(\lambda_2) = 1$. De hecho, esto sucede siempre que el punto es ordinario, con las ecuaciones de Bessel de orden semientero o en distintos ejemplos que veremos en problemas.

- Si no se cumple (6.105), la condición (6.104) no tiene solución para $c_N(\lambda_2)$, por lo que la solución correspondiente a λ_2 tendrá un término logarítmico y $A \neq 0$.

Dedicaremos el resto del capítulo a distintos ejemplos de aplicación de este teorema.

6.5.3. Un ejemplo con índice doble

Sea la ecuación

$$xy'' + (1+x)y' + y = 0, \quad (6.106)$$

en donde la sustitución $y = \sum a_n x^{\lambda+n}$ e identificación de coeficientes conduce a

$$\lambda^2 a_0 = 0, \quad (6.107)$$

$$(\lambda+n)^2 a_n + (\lambda+n)a_{n-1} = 0. \quad (6.108)$$

La primera de estas ecuaciones nos dice que el índice $\lambda = 0$ es doble y la segunda nos da la recurrencia

$$a_n(\lambda) = -\frac{a_{n-1}(\lambda)}{\lambda + n} = (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{\lambda + k}, \quad (6.109)$$

con $a_0(\lambda) = 1$. Una solución se obtiene tomando $\lambda = 0$ en la última expresión

$$a_n(0) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (6.110)$$

con lo que

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}. \quad (6.111)$$

Para hallar la segunda solución mediante (6.85)–(6.86) es conveniente utilizar la derivada logarítmica:

$$\begin{aligned} b_n = a'_n(0) &= a_n(0) \frac{d}{dx} \ln |a_n(\lambda)| \Big|_{\lambda=0} = -\frac{(-1)^n}{n!} \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n \ln(\lambda + k) \Big|_{\lambda=0} \\ &= -\frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda + k} \Big|_{\lambda=0} = -\frac{(-1)^n}{n!} \Omega_n, \end{aligned} \quad (6.112)$$

donde hemos utilizado los números armónicos $\Omega_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ (véase la página 287). La solución general de la ecuación será, por tanto,

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \left[e^{-x} \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Omega_n x^n \right]. \quad (6.113)$$

EJERCICIO 6.13 Compruebe que también puede hallarse y_2 ensayando la solución

$$y_2 = e^{-x} \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \quad (6.114)$$

EJERCICIO 6.14 Demuestre que usando y_1 y (3.68) se obtiene como solución general

$$y = [A + B \operatorname{Ei}(x)] e^{-x}. \quad (6.115)$$

Compruebe que se trata de la misma solución utilizando (6.111), (D.64) y (D.66).

EJERCICIO 6.15 Resuelva

$$x^2(1+x)y'' + (x^2 - x)y' + y = 0. \quad (6.116)$$

6.5.4. Un ejemplo con término logarítmico

Sea

$$(x + x^2)y'' - xy' + y = 0, \quad (6.117)$$

en donde la sustitución $y = \sum a_n x^{\lambda+n}$ lleva a

$$\lambda(\lambda - 1) a_0 = 0, \quad (6.118)$$

$$(\lambda + n)(\lambda + n - 1) a_n + [(\lambda + n - 1)(\lambda + n - 3) + 1] a_{n-1} = 0. \quad (6.119)$$

La primera ecuación nos da los índices $\lambda = 0, 1$, cuya diferencia $N = 1$ es entera, mientras que la segunda nos da la recurrencia

$$a_n(\lambda) = -\frac{(\lambda + n - 2)^2}{(\lambda + n)(\lambda + n - 1)} a_{n-1}(\lambda). \quad (6.120)$$

EJERCICIO 6.16 Compruebe que, para $n = 1, 2, \dots$,

$$a_n(\lambda) = \frac{(-1)^n \lambda (\lambda - 1)^2}{(\lambda + n)(\lambda + n - 1)^2}. \quad (6.121)$$

El índice mayor $\lambda = 1$ nos da siempre una solución que en este caso es $y_1 = x$, ya que $a_0 = 1$ siempre y vemos en (6.121) que $a_n(1) = 0$. Claro está que en este simple ejemplo, esta solución podía haberse hallado por inspección usando la observación hecha en la página 52 con respecto a las ecuaciones del tipo (3.67). En este caso la solución general puede hallarse fácilmente mediante la reducción de orden $y = x \int u dx$, pero queremos ilustrar la aplicación del teorema de Frobenius. Como $N = 1$ y $\lambda_2 = 0$, tenemos

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda a_1(\lambda) = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{\lambda(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 1)\lambda^2} = -1. \quad (6.122)$$

Por otro lado,

$$c_n = \left. \frac{d}{d\lambda} \lambda a_n(\lambda) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \frac{(-1)^n \lambda^2 (\lambda - 1)^2}{(\lambda + n)(\lambda + n - 1)^2} \right|_{\lambda=0}, \quad (6.123)$$

que, debido a que $\lambda = 0$ es una raíz doble del numerador, se anulará para todo n , excepto para $n = 1$ en que el término λ^2 está también en el denominador, por lo que se tiene

$$c_1 = \left. -\frac{d}{d\lambda} \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 1)} \right|_{\lambda=0} = 3, \quad (6.124)$$

con lo que la solución general de la ecuación es $y = C_1 x + C_2(-x \ln x + 1 + 3x)$, o, equivalentemente, $y = Ax + B(1 - x \ln x)$, con A y B arbitrarios.

EJERCICIO 6.17 Resuelva

$$x(y'' + y') - y = 0. \quad (6.125)$$

6.5.5. Un ejemplo sin término logarítmico

Como ya se ha dicho (y hemos comprobado en el anterior ejemplo), cuando la diferencia entre los índices es un entero no nulo puede resultar que solo haya una solución en forma de serie de Frobenius y que la segunda solución contenga un término logarítmico. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto. Puede suceder que el término logarítmico esté ausente y que haya dos soluciones en forma de serie de Frobenius, como pasaba en el caso de la ecuaciones de Bessel de orden semientero, e incluso en forma de serie de potencias ordinarias, como sucedía cuando el punto era ordinario. En este último caso los coeficientes P y Q de la ecuación (6.11) son analíticos alrededor del origen y, por tanto, $p_0 = q_0 = q_1 = 0$, $p_{n+1} = P_n$, $q_{n+2} = Q_n$, con lo que la ecuación indicial es siempre

$$\mathcal{I}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad (6.126)$$

y los índices son $\lambda = 0, 1$. Aunque en este caso la diferencia entre los índices es un entero, $N = 1$, veremos que usar el índice pequeño no solo no acarrea problemas, sino que proporciona directamente todas las soluciones. En efecto, tomemos $\lambda = 0$ en la recurrencia (6.74) con $n = 0, 1$, que corresponden, respectivamente a la ecuación indicial y al valor $n = N = 1$ que podía ocasionar problemas. Usando $\lambda = q_1 = 0$ obtenemos:

$$\mathcal{I}(0)c_0 = 0, \quad (6.127)$$

$$\mathcal{I}(1)c_1 = 0. \quad (6.128)$$

Vemos que, como $\mathcal{I}(0) = \mathcal{I}(1) = 0$, tanto c_0 como c_1 pueden elegirse arbitrariamente en la serie correspondiente al índice menor ($\lambda = 0$). Como hay dos constantes arbitrarias esto proporciona todas las soluciones. Las soluciones correspondientes al índice mayor ($\lambda = 1$) se recuperan con la elección $c_0 = 0$ y $c_1 \neq 0$.

Veamos otro ejemplo sin término logarítmico. Ensayando $y = \sum a_n x^{\lambda+n}$ en

$$x^2 y'' - xy' - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right) y = 0, \quad (6.129)$$

cuyo origen es singular regular, obtenemos que la función indicial es

$$\mathcal{I}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 5/4 = \left(\lambda - \frac{5}{2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}\right), \quad (6.130)$$

con lo que los índices son $\lambda = 5/2, -1/2$, cuya diferencia es $N = 3$. Además, la recurrencia de coeficientes va de dos en dos en la forma

$$\mathcal{I}(\lambda + 1) \quad a_1 = 0, \quad (6.131)$$

$$\mathcal{I}(\lambda + n) \quad a_n - a_{n-2} = 0, \quad (6.132)$$

de donde se sigue que $a_1 = 0$, puesto que $\mathcal{I}(\lambda + 1) \neq 0$.

Como siempre, una solución viene dada por el índice mayor $\lambda = 5/2$, para el que como consecuencia de la anulación de a_1 solo habrá coeficientes pares:

$$a_{2k} \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{a_{2(k-1)}}{\mathcal{I}(5/2 + 2k)} = \frac{a_{2(k-1)}}{2k(2k + 3)}. \quad (6.133)$$

EJERCICIO 6.18 Deshaga la recurrencia y complete factoriales para demostrar que

$$a_{2k} \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{3(2k+2)}{(2k+3)!} \quad (6.134)$$

y, como consecuencia,

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(2k+2)x^{2k+5/2}}{(2k+3)!}. \quad (6.135)$$

Puesto que $\lambda_2 = -1/2$, el coeficiente del término logarítmico será

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow -1/2} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) a_3(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -1/2} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{a_1(\lambda)}{\mathcal{I}(\lambda+3)} = \lim_{\lambda \rightarrow -1/2} \frac{a_1(\lambda)}{\lambda + 7/2} = 0 \quad (6.136)$$

ya que $a_1(\lambda) = 0$ y el denominador no se anula. Como ya sucediera con los puntos ordinarios, vemos una vez más que puede ocurrir que el término logarítmico no aparezca aunque la diferencia de índices sea un entero no nulo. En este caso particular, la razón estriba en que la ecuación (6.132) para $n = N = 3$, que es la que podría dejar a_3 indefinido, resulta ser

$$\mathcal{I}(\lambda+3)a_3 - a_1 = 0, \quad (6.137)$$

que se satisface para todo a_3 cuando $\lambda = -1/2$, ya que tanto $\mathcal{I}(5/2)$ como a_1 se anulan. No solo no hay problema con el índice pequeño, sino que, como sucede siempre que A resulta ser nulo, nos da directamente la solución general al contener una constante arbitraria adicional. En este caso, los términos impares están desacoplados de los pares, admiten como factor común al a_3 arbitrario y, por tanto, empiezan realmente por $x^{3-1/2} = x^{5/2}$, es decir, reproducen exactamente la solución y_1 (en otros casos, la solución correspondiente al índice mayor puede aparecer en forma de una combinación lineal con la otra solución). Los términos pares nos proporcionan otra solución linealmente independiente:

$$a_{2k} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{a_{2(k-1)}}{\mathcal{I}(2k-1/2)} = \frac{a_{2(k-1)}}{2k(2k-3)}. \quad (6.138)$$

EJERCICIO 6.19 Demuestre que esta solución es

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)x^{2k-1/2}}{(2k)!}. \quad (6.139)$$

6.5.6. Suma de las series

Como se dijo en el prólogo, no deberíamos conformarnos con dejar los resultados en forma de series sin intentar sumarlas. A falta de unas buenas tablas o un programa de cálculo algebraico (véase el apartado B.4.5), no es ésta empresa fácil salvo en casos sencillos, pero nada excusa perder unos minutos examinando la estructura de la serie para ver si la podemos identificar o puede transformarse en una o varias series conocidas. Una regla que *puede* funcionar en ejemplos simples cuyo coeficiente general contenga solo combinaciones algebraicas del índice y factoriales o funciones gamma, es como sigue:

- Si en el denominador del coeficiente general no hay factoriales, sino solo combinaciones algebraicas, puede ser útil recordar las series de funciones logarítmicas, incluyendo las funciones hiperbólicas inversas.

- Si en el denominador del coeficiente general aparece un único factorial, puede intentar transformarse en una o varias de las series que tienen esta estructura, es decir, la serie de la exponencial y sus combinaciones: seno, coseno, seno hiperbólico y coseno hiperbólico. También pueden considerarse las series de la función error (D.39) y de la integral exponencial (D.64).
- Si en el denominador aparecen dos factoriales, o un factorial y una gamma, el candidato obvio son las funciones de Bessel (6.58) (o, más en general, las funciones hipergeométricas confluentes de Kummer (D.91) discutidas en el problema 6.22 y el apartado D.10).
- Si en el denominador aparecen dos factoriales, o un factorial y una gamma, y en el numerador hay otra gamma, puede probar a compararse con la serie binómica (D.55) o, más en general, con la **función hipergeométrica de Gauss**⁶, que está definida por

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \beta; \gamma; x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!},
 \end{aligned} \tag{6.140}$$

e incluye muchas otras funciones, como se discute en el apartado D.11.

En el caso de las series (6.135) y (6.139) reconocemos series de tipo exponencial que pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)x^{2k+5/2}}{(2k+3)!} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+3)x^{2k+3}}{(2k+3)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\
 &= \frac{x \cosh x - \sinh x}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned} \tag{6.141}$$

EJERCICIO 6.20 Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)x^{2k-1/2}}{(2k)!} = \frac{x \sinh x - \cosh x}{\sqrt{x}}. \tag{6.142}$$

EJERCICIO 6.21 Resuelva la ecuación $xy'' - y' + 4x^3y = 0$.



⁶ **Johann Carl Friedrich Gauss** (30-04-1777, Brunswick, hoy día Alemania; 23-02-1855, Gotinga, Hanover). En su tesis proporcionó la primera demostración satisfactoria del teorema fundamental del álgebra. Aunque es, quizás, más conocido por sus contribuciones a la geometría diferencial, realizó observaciones astronómicas hasta avanzada edad y, además de otras contribuciones prácticas, escribió numerosos trabajos sobre mecánica celeste, magnetismo, ecuaciones diferenciales, teoría de aproximaciones y probabilidad. Tuvo una enorme influencia en muchas áreas del conocimiento científico y técnico.

6.6. Problemas

6.1 Ecuación de Legendre⁷. Considere la siguiente ecuación, que aparece al resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0.$$

- (a) Halle sus soluciones por series alrededor de $x = 0$ en $(-1, 1)$.
- (b) ¿Cuáles de estas soluciones son polinomios?
- (c) Determine algunos de los **polinomios de Legendre**, que son las soluciones polinómicas que satisfacen la condición inicial $y(1) = 1$

6.2 Ecuación de Chébiev⁸(o Tchebycheff, o Chebyshev...) Halle las soluciones en $(-1, 1)$ de la ecuación

$$(1 - x^2) y'' - xy' + \nu^2 y = 0.$$

Determine sus soluciones polinómicas y, en particular, las que satisfacen $y(1) = 1$ (y reciben el nombre de **polinomios de Chébiev**).

6.3 Calcule, hasta sexto orden, la solución de

$$xy'' + y' + 2y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 4.$$

6.4 Funciones de Bessel. Demuestre las siguientes propiedades de las funciones de Bessel:

- (a) $\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(kx)] = kx^\nu J_{\nu-1}(kx).$
- (b) $\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(kx)] = -kx^{-\nu} J_{\nu+1}(kx).$
- (c) $\frac{d}{dx} [J_\nu(kx)] = kJ_{\nu-1}(kx) - \frac{\nu}{x} J_\nu(kx).$
- (d) $\frac{d}{dx} [J_\nu(kx)] = -kJ_{\nu+1}(kx) + \frac{\nu}{x} J_\nu(kx).$
- (e) $\frac{d}{dx} [J_\nu(kx)] = \frac{k}{2} [J_{\nu-1}(kx) - J_{\nu+1}(kx)].$
- (f) $J_\nu(kx) = \frac{kx}{2\nu} [J_{\nu-1}(kx) + J_{\nu+1}(kx)].$

¿Se cumplen propiedades parecidas con las funciones de segunda especie Y_ν ?



⁷ **Adrien-Marie Legendre** (18-09-1752, París; 10-01-1833, París). Introdujo los polinomios que llevan su nombre calculando el campo gravitatorio generado por ciertos cuerpos con simetría de revolución. Su estudio las funciones e integrales elípticas son, probablemente, su mayor contribución. También proporcionó una prueba simplificada de que π es irracional.



⁸ **Pafnuty Lvovich Chébiev** (16-05-1821, Okatovo, Rusia; 8-12-1894, San Petersburgo). Aunque es especialmente recordado por su contribución a la teoría de números, escribió sobre muchos otros temas, incluyendo mecánica, teoría de probabilidades e integración.

6.5 Ecuación de Bessel de orden $1/2$. Halle la ecuación que se obtiene a partir de la de Bessel si se hace el cambio de variables $y(x) = x^{-1/2}u(x)$. Utilice este resultado para obtener la solución de la ecuación de Bessel de orden $1/2$.

6.6 $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0.$

6.7 $x(x-1)y'' + (2x-1)y' - 2y = 0.$

6.8 $(x^3 - x^2)y'' + (2x^2 - 3x)y' - y = 0.$

6.9 $xy'' - y = 0.$

6.10 $x^4y'' + xy' + 2y = 0.$

6.11 $2x^2y'' + x(2x+1)y' - y = 0.$

6.12 $y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0.$

6.13 $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0.$

6.14 Ecuación de Laguerre⁹. Halle una solución en $x > 0$ de

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + \nu y = 0, \quad (\alpha \geq 0).$$

Discuta las soluciones polinómicas, que son (salvo una constante multiplicativa) los polinomios generalizados de Laguerre.

6.15 Ecuación de Bessel. Demuestre que la ecuación

$$x^2y'' + (2c+1)xy' + [a^2b^2x^{2b} + (c^2 - \nu^2b^2)]y = 0$$

se convierte en una de Bessel con el cambio $(x, y) \rightarrow (t, u)$ con $t \equiv ax^b$ y $u \equiv x^c y$.

6.16 Halle por el método de series la solución de

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

6.17 Halle los primeros términos de la solución por series de

$$y'' + (\cos x)y = 0.$$

6.18 $(x^3 - x)y''' + (9x^2 - 3)y'' + 18xy' + 6y = 0.$



⁹ **Edmond Nicolas Laguerre** (9-04-1834, Bar-le-Duc, Francia; 14-08-1886, Bar-le-Duc). Aunque es especialmente recordado por la ecuación y los polinomios que llevan su nombre, trabajó en otras áreas del análisis, la geometría y los métodos de aproximación.

6.19 A veces, las series de potencias y las de Frobenius pueden usarse también para calcular una solución particular de la ecuación completa. Consideremos, por ejemplo, la siguiente ecuación:

$$x^2 y'' - x(x+1)y' + (x+1)y = x^2.$$

Resuelva la ecuación homogénea y use una serie adecuada para calcular una solución particular de la completa. Compare el resultado con el obtenido mediante el método de variación de constantes.

6.20 Ecuación hipergeométrica de Gauss. Considere la ecuación

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Halle sus soluciones alrededor de $x=0$ cuando $\gamma \neq 1, 0, -1, -2, \dots$. Escriba la solución usando la **función hipergeométrica de Gauss** $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$, que es precisamente la solución que satisface la condición inicial $F(\alpha, \beta; \gamma; 0) = 1$.

Sugerencia: Use el cambio $y = x^{1-\gamma} z$ para hallar la segunda solución.

6.21 Demuestre que $F(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\beta, \alpha; \gamma; x)$ y halle $F(1, \beta; \beta; x)$ y $F(\alpha, \beta; \beta; x)$.

6.22 Ecuación hipergeométrica confluyente. Halle la solución que satisface $y(0) = 1$ y corresponde al índice nulo de

$$xy'' + (\nu - x)y' - \alpha y = 0,$$

bajo la hipótesis de que $\nu \neq 1, 0, -1, -2, \dots$. Dicha solución recibe el nombre de **función hipergeométrica confluyente** o **función de Kummer**¹⁰ y suele denotarse como $M(\alpha, \nu, x)$ o ${}_1F_1(\alpha; \nu; x)$. Discuta los casos en que la misma se reduce a un polinomio y algún otro caso en que se recuperen funciones elementales. Calcule la segunda solución linealmente independiente haciendo uso del cambio de variable $y = x^{1-\nu} z$. Discuta la relación entre esta ecuación y la hipergeométrica de Gauss y úsese la misma para recuperar los resultados de los anteriores apartados. (*Sugerencia:* Considere el cambio $t = \beta x$ en la ecuación de Gauss). Comente la restricción impuesta a los valores de ν .

6.23 Halle la solución general de la ecuación

$$xy'' + xy' + y = 0.$$

6.24 Halle todas las soluciones de

$$xy'' - y' + y = 0.$$

6.25 Halle la solución general de la siguiente ecuación en términos de funciones elementales:

$$x(x-1)y'' + 3y' - 2y = 0.$$

6.26 Halle la solución general de la ecuación

$$(x^2 - x)y'' + (1 - 2x^2)y' + (4x - 2)y = 0.$$

6.27 Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0.$$



¹⁰ **Ernst Eduard Kummer** (29-01-1810, Sorau, Prusia; 14-05-1893, Berlín). Trabajando en el último teorema de Fermat descubrió el concepto de ideal. Además de la superficie que lleva su nombre, es también recordado por sus trabajos sobre las series hipergeométricas que extendieron los de Gauss.

Capítulo 7

Métodos aproximados

*Although this may seem a paradox,
all exact science is dominated by the idea of approximation.*
Bertrand Russell

Puesto que, en realidad, son muy pocas las integrales que somos capaces de resolver de forma exacta o las ecuaciones finitas para las que conocemos métodos de resolución sin aproximaciones (recordemos, por ejemplo, los problemas que suscitan las ecuaciones que contienen funciones trascendentes e, incluso, las polinómicas de orden superior al cuarto), no debería sorprendernos que la mayor parte de las ecuaciones diferenciales resistan nuestros esfuerzos de solución explícita exacta. En la mayor parte de los casos prácticos hay que recurrir a algún tipo de aproximación. Incluso si la ecuación tiene una solución exacta, ésta puede ser tan complicada que resulte de escasa o nula utilidad, especialmente si el objetivo que nos guía es de orden práctico y lo que pretendemos es calcular el valor (aproximado) de la solución en una serie de casos interesantes. (En un contexto más familiar podemos recordar lo poco útiles que, en general, resultan las soluciones de las ecuaciones algebraicas de tercer y cuarto grado obtenidas por los métodos de Cardano¹ y Ferrari²).

Adelantemos que un único capítulo no puede hacer justicia a la importancia que los métodos aproximados tienen en la práctica real de la física. También ignoraremos por completo los métodos gráficos que suelen recogerse en los textos (las isoclinas, etc.) porque, aun cuando conservan su importancia para analizar propiedades cualitativas (como veremos, en un contexto restringido, en el capítulo 8), como métodos aproximados de resolución han sido sustituidos casi por completo por los potentes métodos numéricos que tenemos a nuestra disposición. Comenzaremos viendo algunos métodos clásicos elementales de aproximación analítica, incluyendo un atisbo de la teoría de perturbaciones que, aunque necesariamente limitado, puede estimular el interés del lector



¹ **Girolamo Cardano** (24-09-1501, Pavía, Ducado de Milán; 21-09-1576, Roma). Este médico y matemático es conocido también por su nombre en latín e inglés: Cardan. Su obra maestra, *Ars Magna* (1545), supuso la publicación de los métodos de solución por radicales de las ecuaciones cúbica y cuártica, que eran debidos esencialmente a Scipione del Ferro y Tartaglia, en el primer caso, y a Ferrari, en el caso de la ecuación de cuarto grado.

² **Ludovico Ferrari** (2-02-1522, Bolonia Estados Pontificios; 5-10-1565, Bolonia). Cardano le cedió su puesto cuando este discípulo tenía dieciocho años. Halló el método de solución por radicales de la ecuación cuártica, pero no pudo ser publicado hasta que Cardano descubrió que la solución de la cúbica (que era usada por el de Ferrari y que Tartaglia había comunicado confidencialmente a Cardano) se encontraba también entre los papeles (anteriores) de Ferro.

por esta técnica, cuya importancia en física es difícil sobrevalorar. Los métodos numéricos son hoy día tan importantes en la práctica que merecen asignatura aparte, pero al menos discutiremos los aspectos más elementales para descender parcialmente la cortina que oculta la «magia» de las eficaces rutinas que están cada día más al alcance de todos (véase la bibliografía a partir de la página 321).

El nivel elemental del capítulo hará que consideremos muchas veces tan solo el caso de una única ecuación diferencial de primer (o segundo) orden, para evitar innecesarias complicaciones técnicas (e, incluso, de notación). No obstante, la mayor parte de lo dicho puede extenderse con facilidad a ecuaciones de orden superior y sistemas de ecuaciones: a menudo basta añadir un índice para enumerar las variables dependientes o las derivadas de la incógnita.

7.1. Símbolo de orden de magnitud

Diremos que la función $f(x)$ es **del orden de magnitud de** $g(x)$ **cuando** $x \rightarrow x_0$, y escribiremos $f(x) = O(g(x))$, si el cociente $f(x)/g(x)$ se mantiene acotado cuando $x \rightarrow x_0$, lo que sucede en particular si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x)$ existe y es finito.

La « O » recibe el nombre de **símbolo de Landau** o de Bachmann-Landau y es muy utilizada como abreviatura en cálculos aproximados. A menudo se omite la mención explícita del límite $x \rightarrow x_0$ si el valor de x_0 (normalmente 0 ó ∞) se infiere del contexto.

EJERCICIO 7.1 Demuestre que, para x_0 a determinar, se cumple $\tanh x = O(x)$, $\tanh x = x + O(x^3)$ y $\tanh x = O(e^x)$. ¿Es cierto que $\tanh x = O(x^2)$? ¿Y que $\tanh x = O(2x)$?

EJERCICIO 7.2 Demuestre las siguientes relaciones:

$$O(f) + O(g) = O(|f| + |g|), \quad (7.1)$$

$$O(f)O(g) = O(fg), \quad (7.2)$$

$$O(O(f)) = O(f). \quad (7.3)$$

EJERCICIO 7.3 Compruebe que cuando $\epsilon \rightarrow 0$ las funciones (a) $2/\sqrt{3 + e^{-\epsilon t}}$, (b) $1 + \sin(\epsilon t/8)$, (c) $1 + \tan(\epsilon t/8)$, y (d) $\exp(\epsilon t/8)$ son equivalentes módulo $O(\epsilon^2)$. ¿Qué sucede cuando $t \rightarrow \infty$?

7.2. Series de potencias

Debido a lo dicho en el apartado 1.4, un método aproximado casi obvio consiste en construir una serie de potencias

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad (7.4)$$

para la solución de un problema de condiciones iniciales de la forma

$$y' = f(x, y), \quad (7.5)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (7.6)$$

Nótese que el planteamiento es distinto al hecho en el capítulo 6, ya que allí se trataba de hallar *todas* las soluciones de una ecuación *lineal*, mientras que ahora queremos una solución *particular* de una ecuación *no necesariamente lineal*. Además, en aquél capítulo se calculaban

todos los términos de las series, que podían, a veces, sumarse o definían funciones especiales, mientras que ahora pocas veces podrá pasarse del cálculo de los primeros términos de la serie. La serie truncada aproximará de forma razonable la solución para $|x - x_0|$ «suficientemente pequeño», aunque hacer más preciso este enunciado resulta casi siempre imposible en la práctica, en la que rara vez se puede demostrar realmente la calidad de las aproximaciones realizadas. Un criterio muy usado en la práctica de métodos aproximados —aunque en rigor no demuestre absolutamente nada— consiste en calcular una aproximación más fina (un término más de la serie, por ejemplo) y comprobar que las predicciones en el rango que interesen no varían por encima del margen de error que no se quiera rebasar.

7.2.1. Método de la serie de Taylor

Para construir la serie de Taylor³ de la solución alrededor del punto $x = x_0$,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n, \quad (7.7)$$

podemos usar el hecho de que los coeficientes, es decir, las derivadas en x_0 , pueden hallarse sistemáticamente como consecuencia de la ecuación y sus derivadas,

$$y' = f(x, y), \quad (7.8)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) f(x, y), \quad (7.9)$$

⋮

junto con la condición inicial y los valores que se obtienen sustituyéndola en las anteriores expresiones:

$$y(x_0) = y_0, \quad (7.10)$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad (7.11)$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) f(x_0, y_0), \quad (7.12)$$

⋮

Consideremos como ejemplo la ecuación

$$y' = x^2 + y^2, \quad (7.13)$$

que fue estudiada por John Bernoulli en 1694 y por Riccati (es «la» ecuación de Riccati) en 1724.

EJERCICIO 7.4 Compruebe que toda solución de la ecuación de Riccati satisface:

$$y'' = 2(x + yy'), \quad (7.14)$$

$$y''' = 2(1 + y'^2 + yy''), \quad (7.15)$$

$$y^{(4)} = 2(3yy'' + yy'''), \quad (7.16)$$

⋮

y halle la solución correspondiente a la condición inicial $y(0) = 1$.



³ **Brook Taylor** (18-08-1685, Edmonton, Inglaterra; 29-12-1731, Londres). Inventó el cálculo de diferencias finitas, la integración por partes y la fórmula que lleva su nombre. También trabajó en teoría de aproximaciones, mecánica y magnetismo, y estableció las bases de la perspectiva.

EJERCICIO 7.5 Demuestre que la solución de esta ecuación de Riccati para $y(0) = 0$, que James Bernoulli estudió en 1703, es

$$\begin{aligned}
 y = & \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{13}{218295}x^{15} + \frac{46}{12442815}x^{19} \\
 & + \frac{15178}{66108676095}x^{23} + \frac{404}{28332289755}x^{27} \\
 & + \frac{190571}{215183740689225}x^{31} + \frac{5858822}{106515951641166375}x^{35} + \dots \quad (7.17)
 \end{aligned}$$

7.2.2. Método de coeficientes indeterminados

En muchos casos —en especial si no es fácil calcular las derivadas de f — es más eficaz ensayar una serie truncada con coeficientes que se determinarán igualando los de cada potencia de la variable independiente. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de Riccati con $y(0) = 1$, sabemos que la serie empieza por $y_0 = 1$ y ensayamos, por ejemplo,

$$y = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + O(x^5) \quad (7.18)$$

y su derivada y cuadrado

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + O(x^4), \quad (7.19)$$

$$y^2 = 1 + 2c_1x + (c_1^2 + 2c_2)x^2 + (2c_3 + 2c_1c_2)x^3 + O(x^4), \quad (7.20)$$

que sustituidos en la ecuación proporcionan, sucesivamente:

$$\begin{aligned}
 1 & : c_1 = 1 & \implies & c_1 = 1, \\
 x & : 2c_2 = 2c_1 & \implies & c_2 = 1, \\
 x^2 & : 3c_3 = 1 + c_1^2 + 2c_2 & \implies & c_3 = 4/3, \\
 & \vdots & &
 \end{aligned} \quad (7.21)$$

de acuerdo con los resultados del ejercicio 7.4.

EJERCICIO 7.6 Halle la solución aproximada de $y' = x + y^3$, $y(0) = 1$.

7.3. Método de Picard de aproximaciones sucesivas

La idea del método de Picard⁴ es resolver el problema de condiciones iniciales

$$y' = f(x, y), \quad (7.22)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (7.23)$$



⁴ **Charles Émile Picard** (24-07-1856, París; 11-12-1941, París). Además de este método que permite demostrar la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, se le recuerda por el llamado gran teorema de Picard sobre los valores de una función analítica cerca de una singularidad esencial. También publicó importantes trabajos en análisis y geometría, así como en elasticidad, termodinámica y electricidad.

mediante aproximaciones sucesivas que se construyen partiendo de una aproximación de orden cero

$$y^{[0]}(x) = \psi(x), \quad (7.24)$$

que puede venir dada por (casi) cualquier función $\psi(x)$, aunque una elección frecuente, por obvia, es $y^{[0]}(x) = y_0$. Ahora se procede de forma iterativa: tras obtener cada aproximación $y^{[n]}$, se construye la siguiente sustituyendo esta última en el miembro de la derecha de la ecuación diferencial, para tener así una ecuación de variables separadas

$$y' = f[x, y^{[n]}(x)], \quad (7.25)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (7.26)$$

que se resuelve directamente por cuadraturas:

$$y^{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[u, y^{[n]}(u)] du. \quad (7.27)$$

Al probar el teorema de existencia y unicidad en el apartado A.1 demostraremos que, bajo condiciones apropiadas, la sucesión $y^{[n]}(x)$ converge, cuando $n \rightarrow \infty$, a la solución $y(x)$ del problema de condiciones iniciales, que es completamente equivalente a la ecuación integro-diferencial que se obtiene en el límite $n \rightarrow \infty$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[u, y(u)] du. \quad (7.28)$$

EJERCICIO 7.7 Demuestre que el problema de condiciones iniciales (7.22)–(7.23) y la ecuación integro-diferencial (7.28) son efectivamente equivalentes.

Como ejemplo consideremos la ecuación de Riccati $y' = x^2 + y^2$ con la condición inicial $y(0) = 1$ y elijamos $y^{[0]} = 1$. La primera aproximación es, por tanto:

$$y^{[1]}(x) = 1 + \int_0^x (u^2 + 1) du = 1 + x + \frac{1}{3}x^3. \quad (7.29)$$

EJERCICIO 7.8 Compruebe que las siguientes aproximaciones son:

$$y^{[2]}(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7, \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} y^{[3]}(x) = & 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{8}{15}x^5 + \frac{29}{90}x^6 \\ & + \frac{47}{315}x^7 + \frac{41}{630}x^8 + \frac{299}{11340}x^9 + \frac{4}{525}x^{10} \\ & + \frac{184}{51975}x^{11} + \frac{1}{2268}x^{12} + \frac{4}{12285}x^{13} + \frac{1}{59535}x^{15}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

La rapidez con que crecen las aproximaciones en este sencillísimo caso, en que no hay más que polinomios, y la dificultad de realizar las integrales en casos más realistas hacen que el interés de este método para cálculos analíticos sea muy limitado, en acusado contraste con su enorme importancia teórica (ya que, por ejemplo, proporciona una de las pruebas estándar del crucial teorema de existencia y unicidad, como veremos en el apartado A.1) y su potencialidad en métodos numéricos, en los cuales las integrales pueden realizarse eficazmente.

7.4. Métodos perturbativos

En muchos problemas de física existe un parámetro pequeño, una **perturbación**, que hace que el desarrollo natural no sea en potencias de la variable independiente (la posición x o el tiempo t , por ejemplo), sino en términos de aquel parámetro, partiendo como aproximación de orden cero de la que se obtiene al anular el mismo (o darle otro valor particular) y que corresponde a menudo a un caso en que se conoce bien la solución del problema y que, por ello, constituye un buen punto de partida para construir aproximaciones sucesivas. La teoría de perturbaciones es una de las herramientas básicas del físico experimentado, pero, ¡ay!, ¡una vez más!, nos vemos obligados a limitarnos a presentar una introducción que solo pretende despertar el interés por el problema y describir las ideas más elementales⁵ (casi deberíamos decir triviales). Empezaremos con un ejemplo muy sencillo y luego veremos un caso más realista e interesante.

7.4.1. Perturbación regular

Supongamos que queremos hallar las posibles soluciones periódicas del oscilador no lineal

$$\ddot{x} + 2x = \sin t + \epsilon x^2, \quad (7.32)$$

para ϵ pequeño. Cuando ϵ es nulo tenemos un oscilador lineal elemental.

EJERCICIO 7.9 Demuestre que la única solución periódica de $\ddot{x} + 2x = \sin t$ es $x = \sin t$.

El caso no lineal es bastante más complicado. Buscaremos una solución perturbada de la forma

$$x = \sin t + \epsilon x_1 + O(\epsilon^2) \quad (7.33)$$

que satisfaga la ecuación hasta primer orden en ϵ .

EJERCICIO 7.10 Compruebe que sustituyendo (7.33) en (7.32) se obtiene

$$\epsilon \left[\ddot{x}_1 + 2x_1 = \frac{1 - \cos 2t}{2} \right] + O(\epsilon^2). \quad (7.34)$$

Resuelva la ecuación para x_1 hallando la única solución periódica.

EJERCICIO 7.11 Halle el siguiente orden en el desarrollo perturbativo.

7.4.2. El oscilador de van der Pol

Consideremos la siguiente ecuación, que describe una válvula electrónica hoy día en desuso, pero que ocupa un lugar de honor en la historia de las ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\ddot{x} + \epsilon (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0. \quad (7.35)$$

Si el parámetro ϵ es positivo, cuando x es muy pequeño el término $x^2 \dot{x}$ es despreciable y tenemos, debido al término $-\epsilon \dot{x}$, un oscilador antiamortiguado que recibe energía del entorno en vez de

⁵El lector interesado en aprender más puede encontrar una breve y accesible introducción en el texto de Strogatz [28] y un tratamiento sistemático en el de Holmes [20].

perderla, por lo que esperamos que la amplitud de la oscilación crezca sin cesar. Sin embargo, cuando dicha amplitud se hace comparable a la unidad, el término $x^2\dot{x}$ empieza a ser importante y juega el papel de un término disipativo, que hace perder energía mecánica. No es de extrañar, pues, que para un amplio rango del parámetro ϵ se establezca un equilibrio dinámico que haga que la oscilación ni crezca ni disminuya, en promedio. Pero ¿cómo comprobar esta intuición? Veamos qué puede decirnos la teoría de perturbaciones, que partirá de la aproximación correspondiente a $\epsilon = 0$, que no es sino el oscilador armónico $\ddot{x} + x = 0$, cuya solución puede escribirse como $x = A \cos(t + \varphi)$.

La siguiente aproximación será

$$x(t) = A \cos(t + \varphi) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2). \quad (7.36)$$

EJERCICIO 7.12 Compruebe que sustituida esta aproximación en la ecuación de van der Pol el primer orden en ϵ resulta ser

$$\epsilon \left[\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{A^3}{4} \sin 3(t + \varphi) + \left(\frac{A^3}{4} - A \right) \sin(t + \varphi) \right]. \quad (7.37)$$

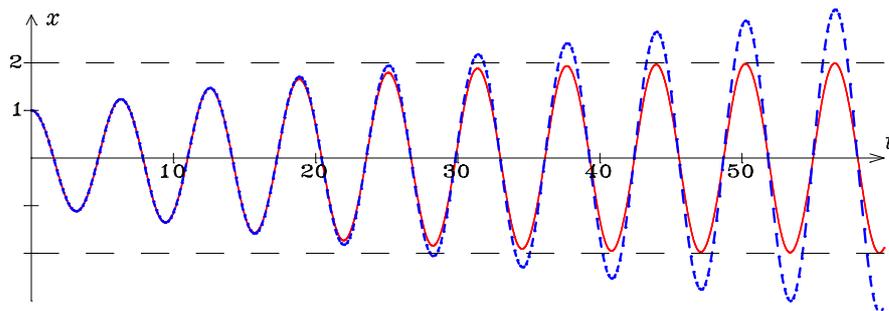


FIGURA 7.1 Aproximación con términos seculares.

Se trata, de nuevo, de un oscilador armónico, pero ahora hay un término inhomogéneo, es decir, una fuerza externa. Esto no plantea excesivas dificultades, y la solución puede hallarse fácilmente (véase el apartado B.3.3), pero no hace falta hacerlo para darse cuenta de que el último término inhomogéneo, $(A - A^3/4) \sin(t + \varphi)$, corresponde a los mismos exponentes característicos $k = \pm i$ (en el lenguaje de la mecánica, a la misma frecuencia $\omega = 1$) que tiene la ecuación homogénea (el oscilador libre), es decir, hay **resonancia**. Como vimos en el capítulo 3, esto hace que la solución particular correspondiente sea del tipo $\epsilon t [\alpha \cos(t + \varphi) + \beta \sin(t + \varphi)]$, con constantes α y β adecuadas. Los términos trigonométricos están acotados, pero no pasa lo mismo con el factor ϵt , que crece lentamente, pero sin límite. Como este tipo de obstáculo apareció por primera vez en mecánica celeste, se dice que se trata de un **término secular** y es uno de los problemas que aparecen fácilmente cuando se intentan métodos ingenuos de perturbaciones, como el que estamos usando. En efecto, la hipótesis básica del desarrollo perturbativo es que la corrección ϵx_1 es pequeña comparada con el término sin perturbar, pero como éste está acotado, dicha hipótesis será cierta mientras ϵt sea pequeño (es decir, durante un tiempo relativamente grande, $t \lesssim 1/\epsilon$), pero luego la hipótesis dejará de ser cierta y la aproximación de ser válida. Podemos comprobar esto de forma gráfica en la figura 7.1 donde puede verse en línea continua una solución numérica para $\epsilon = 0,1$ junto con la predicción de la aproximación con términos seculares en línea discreta. Aunque al principio las dos soluciones son casi iguales, mientras que la solución numérica tiende a oscilaciones periódicas, la amplitud de la aproximación crece sin cesar.

La forma de intentar arreglar este tipo de problemas es recordar que las aproximaciones no son únicas, ni mucho menos, como pudimos comprobar en el ejemplo 7.3. Como aproximación de orden cero hemos elegido antes la solución exacta $A \cos(t + \varphi)$ de la ecuación de orden cero $\ddot{x} + x = 0$, pero nada impide elegir cualquier función, $x_0(t) = A \cos(t + \varphi) + \epsilon f(t)$, que difiera de ella en términos de orden ϵ , ya que seguirá satisfaciendo la ecuación de orden cero, aunque ya no de forma exacta sino solo cuando despreciamos los términos de orden ϵ o superior. Entre las infinitas elecciones del orden cero, conviene seleccionar una que tenga la propiedad de hacer desaparecer los términos resonantes de la ecuación que debe satisfacer la siguiente aproximación, ya que esto evitará la aparición de los términos seculares. En este caso vemos que los términos resonantes son proporcionales a ϵt , por lo que parece conveniente modificar el orden cero por términos que dependen no ya de ϵ sino de ϵt . Como veremos, basta en este caso suponer que la amplitud A y la fase φ no son constantes, sino función de ϵt como

$$A(\epsilon t) = A(0) + \epsilon t A'(0) + O(\epsilon^2), \quad \varphi(\epsilon t) = \varphi(0) + \epsilon t \varphi'(0) + O(\epsilon^2). \quad (7.38)$$

Se dice que A y φ dependen de un **tiempo lento** (ϵt) y por ello este método recibe el nombre de **método de los dos tiempos** o **de las múltiples escalas**. Un tiempo viene marcado por el período del oscilador libre y otro por el tiempo característico de crecimiento de los términos seculares.

EJERCICIO 7.13 Compruebe que sustituida la aproximación

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\epsilon t) \cos[t + \varphi(\epsilon t)] + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \\ &= [A(0) + \epsilon t A'(0)] \cos[t + \varphi(0) + \epsilon t \varphi'(0)] + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (7.39)$$

en la ecuación de van der Pol, el primer orden en ϵ resulta ser

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= \frac{A(0)^3}{4} \sin 3[t + \varphi(0)] + \left[2A'(0) + \frac{A(0)^3}{4} - A(0) \right] \sin[t + \varphi(0)] \\ &\quad + 2A(0)\varphi'(0) \cos[t + \varphi(0)]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

El último término resonante se elimina sin más que tomar $\varphi(\epsilon t) = \varphi_0 + O(\epsilon^2)$ y para evitar el término resonante anteriormente existente hay que exigir que su coeficiente se anule,

$$2A'(0) + \frac{A(0)^3}{4} - A(0) = 0. \quad (7.41)$$

mas no deberíamos pensar que basta despejar de esta ecuación $A'(0)$ y sustituirlo en la última expresión de (7.39), ya que si así lo hiciéramos la propia solución ensayada tendría un término secular: el primero, que crecería sin límite. Lo que necesitamos es una solución del tipo

$$x(t) = A(\epsilon t) \cos(t + \varphi_0) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2), \quad (7.42)$$

con una amplitud $A(\epsilon t)$ que satisfaga (7.41), pero que no crezca de forma ilimitada con t . En este caso, eso puede lograrse simplemente suponiendo que la condición (7.41) no solo se satisface en $\epsilon t = 0$, sino en todos los puntos y es, por tanto, la ecuación diferencial que debe satisfacer la amplitud:

$$2A'(\epsilon t) + \frac{A(\epsilon t)^3}{4} - A(\epsilon t) = 0. \quad (7.43)$$

EJERCICIO 7.14 Compruebe que la solución de (7.43) es

$$A(\epsilon t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}}}, \quad (7.44)$$

con $A_0 \equiv A(0)$. Concluya que la solución de la ecuación de van der Pol puede escribirse como

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}}} \cos(t + \varphi_0) - \frac{\epsilon}{32} A_0^3 \sin 3(t + \varphi_0) + O(\epsilon^2), \quad (7.45)$$

o, con el mismo grado de aproximación, como

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}}} \left[\cos(t + \varphi_0) - \frac{\epsilon}{32} A_0^2 \sin 3(t + \varphi_0) \right] + O(\epsilon^2). \quad (7.46)$$

Demuestre que, independientemente de las condiciones iniciales, todas las soluciones aproximadas (menos una: ¿cuál?) tienden hacia una órbita periódica, aislada que es llamada **ciclo límite**, como veremos en el capítulo 8.

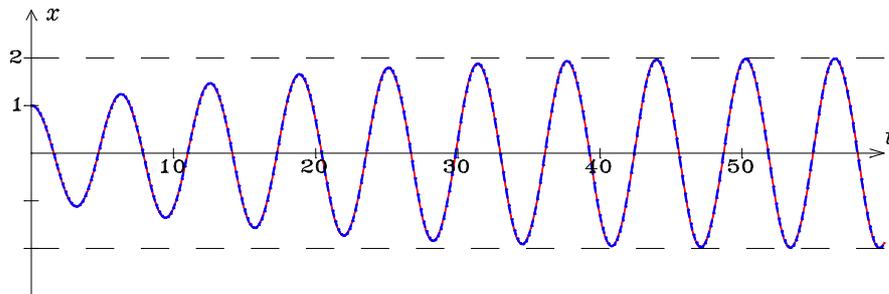


FIGURA 7.2 Aproximación sin términos seculares.

En la figura 7.2 podemos ver cómo cuando $\epsilon = 0,1$ esta aproximación reproduce de forma excelente el comportamiento de la ecuación de van der Pol y permite calcular en buena aproximación su ciclo límite. A la resolución de la figura las gráficas obtenidas por integración numérica y usando la aproximación (7.46) son prácticamente indistinguibles. También vemos en (7.46) que, mientras que el tiempo rápido t interviene en la parte periódica de la solución, el lento ϵt aparece en la amplitud lentamente variable y, por tanto, en el proceso de acercamiento al ciclo límite.

No debería pensarse que siempre basta con permitir que la amplitud de la oscilación sea una función del tiempo lento. En general hay que hacer también la misma hipótesis para la otra constante de integración: la fase inicial φ . También puede ser necesario suponer la existencia de un tiempo **superlento**: $\epsilon^2 t$, o $(\epsilon \ln \epsilon) t$, por ejemplo.

En el caso particular de un oscilador sin término disipativo como el del problema 7.9, sabemos de antemano que la solución será periódica, por lo que bastará suponer que la frecuencia —y, por ello, el período— depende de ϵ ensayando algo del tipo

$$x = A \cos [\omega(\epsilon)t + \varphi] + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \quad (7.47)$$

con $\omega(\epsilon) = 1 + \epsilon \omega_1 + \dots$, lo que implica suponer que solo la fase inicial depende del tiempo lento mientras que la amplitud es constante:

$$x = A \cos [t + \phi(\epsilon t)] + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \quad (7.48)$$

con $\phi(\epsilon t) = \varphi + \epsilon t \omega_1 + \dots$. Al utilizar esta hipótesis simplificada estamos usando, en un caso particular, el **método de Poincaré-Lindstedt**.

7.4.3. El método WKB

En la mayoría de los casos hay que recurrir a métodos aproximados para resolver la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m que se mueve en un potencial $V(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi. \quad (7.49)$$

En la aproximación semiclásica se considera que \hbar es pequeña y puede utilizarse el método de Wentzel, Kramers y Brillouin, que también puede aplicarse a cualquier ecuación del tipo

$$\varepsilon^2 y'' + f(x)y = 0, \quad (7.50)$$

donde ε es un parámetro pequeño. Usemos como guía el caso en que $a \equiv \sqrt{-f(x)}$ es constante, de forma que la solución es la combinación lineal de dos exponenciales (reales o complejas):

$$y = Ae^{ax/\varepsilon} + Be^{-ax/\varepsilon}. \quad (7.51)$$

Notemos que todas las soluciones, excepto la nula, divergen cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, lo que corresponde al hecho de que la ecuación 7.50 es singular, porque su orden se reduce (a cero) en ese límite. (En el problema 2.35 vimos otra ecuación singular, pero allí, en el marco de una teoría clásica, nos interesaba la única solución regular en el límite apropiado, mientras que en mecánica cuántica el límite $\hbar \rightarrow 0$ es singular). Basados en la forma de la solución para el caso en que $f(x)$ es constante, parece razonable ensayar un cambio de variable dependiente de tipo exponencial

$$y = \exp\left[\frac{u(x)}{\varepsilon}\right] = \exp\left[\frac{u_0 + \varepsilon u_1 + \dots}{\varepsilon}\right]. \quad (7.52)$$

En la aproximación WKB se desprecian todos los términos del desarrollo de $u(x)$ excepto u_0 y u_1 , que son hallados fácilmente:

$$y \approx e^{\frac{1}{\varepsilon}u_0 + u_1}, \quad (7.53)$$

$$y' \approx \left[\frac{1}{\varepsilon}u_0' + u_1'\right] y, \quad (7.54)$$

$$y'' \approx \left[\frac{1}{\varepsilon^2}u_0'^2 + \frac{1}{\varepsilon}(u_0'' + 2u_0'u_1') + u_1'' + u_1'^2\right] y. \quad (7.55)$$

EJERCICIO 7.15 Demuestre que para que (7.52) sea solución de (7.50) debe cumplirse

$$u_0(x) = A \pm \int_{x_0}^x \sqrt{-f(t)} dt, \quad u_1(x) = B - \frac{1}{4} \ln[f(x)]. \quad (7.56)$$

En consecuencia, la solución aproximada se escribirá, en término de dos constantes arbitrarias (reales o complejas) como

$$y = [f(x)]^{-1/4} \left\{ C_+ \exp\left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x \sqrt{-f(t)} dt\right] + C_- \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x \sqrt{-f(t)} dt\right] \right\}. \quad (7.57)$$

No discutiremos aquí en detalle el difícil problema de la validez de la aproximación WKB, pero al menos está claro que la misma falla cerca de los puntos en que $f(x) = 0$. Desafortunadamente, esos puntos pueden ser de gran importancia. En el caso de la partícula en un potencial son los **puntos de retroceso**, definidos por la condición $E = V(x)$. En el problema clásico asociado

esos puntos limitan el movimiento, ya que debe cumplirse $f(x) \equiv 2m[E - V(x)] \geq 0$; pero en el problema cuántico (7.49) simplemente separan las zonas en las que la solución es de tipo oscilatorio (cuando $f(x) > 0$) de aquellas en las que es exponencial (con $f(x) < 0$) debido a la atenuación de la función de onda al penetrar en la barrera de potencial. Se plantea por ello el importante problema de empalmar las soluciones en esas dos regiones, para lo que puede recurrirse a las **fórmulas de enlace** que se discuten en los textos de mecánica cuántica y en [25].

EJERCICIO 7.16 Resuelva por el método WKB la ecuación $\epsilon^2 y'' + xy = 0$.

7.5. Métodos numéricos

Los métodos numéricos son, con gran diferencia, los más usados para resolver ecuaciones diferenciales, gracias a su amplia difusión a través de potentes y eficaces rutinas incluidas en librerías numéricas, en sistemas integrados de cálculo matemático o en programas dedicados exclusivamente a su solución (véase la bibliografía de la página 323). Vamos a analizar someramente algunos de los métodos elementales, con objeto de entender un poco la forma en que pueden diseñarse rutinas de integración de ecuaciones diferenciales. No recomendamos, sin embargo, usar directamente los métodos estudiados en este capítulo, excepto a modo de prueba para comprenderlos mejor. *Para trabajo serio deberían usarse rutinas avanzadas o uno de los sistemas o programas indicados en la bibliografía de la página 323, u otros alternativos.* Los esfuerzos de algunos (incluso investigadores serios) en programar directamente un Runge-Kutta resultan tan patéticos como ver a alguien construirse un ábaco para realizar una larga sucesión de operaciones aritméticas en vez de utilizar la calculadora. Para ampliar conocimientos sobre métodos numéricos en general, recomendamos el clásico texto de Stoer y Bulirsch [34] y para los relativos a la resolución de ecuaciones diferenciales el de Hairer, Norsett y Wanner [32]. Métodos numéricos prácticos listos para ser usados en FORTRAN y C pueden hallarse en la última referencia, así como en [33] y en [31].

Para resolver un problema de condiciones iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (7.58)$$

los métodos numéricos comienzan por discretizar el mismo: en vez de intentar obtener una aproximación a la solución en todos los puntos, $y(x)$, se intenta obtener aproximaciones a los valores $y_n = y(x_n)$ en una serie de puntos x_n , $n = 1, 2, \dots$. Si hace falta conocer los valores en puntos intermedios se usa interpolación (que es automáticamente proporcionada por algunos métodos avanzados). Los métodos se aplican paso a paso: a partir de la condición inicial, que nos da el punto de partida (x_0, y_0) , se calcula el siguiente punto (x_1, y_1) y, más en general, una vez obtenido el punto (x_n, y_n) se calcula el siguiente (x_{n+1}, y_{n+1}) . La distancia que se avanza cada vez, $h \equiv x_{n+1} - x_n$, se llama **paso de integración** del método y se mantiene constante en métodos elementales, pero se hace variar de forma automática en métodos avanzados, para mantener el nivel de error deseado con el mínimo esfuerzo de cálculo.

Nótese que si $f(x, y) = F(x)$ no depende de y , tenemos un problema de cuadratura numérica

$$y' = F(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad \iff \quad y(x) = \int_{x_0}^x F(u) du \quad (7.59)$$

que puede, por tanto, resolverse usando uno de los métodos discutidos en este capítulo, aunque también hay métodos diseñados expresamente para este tipo de problema más restringido, que no serán vistos aquí.

7.5.1. Método de Euler

El más simple de los métodos, llamado también **método del polígono**, consiste en invertir la aproximación de orden más bajo para la derivada

$$f(x_n, y_n) = y'_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h) \quad (7.60)$$

para obtener

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + O(h^2). \quad (7.61)$$

Como se ve en la figura 7.3, el método consiste en aproximar la solución entre x_n y x_{n+1} por

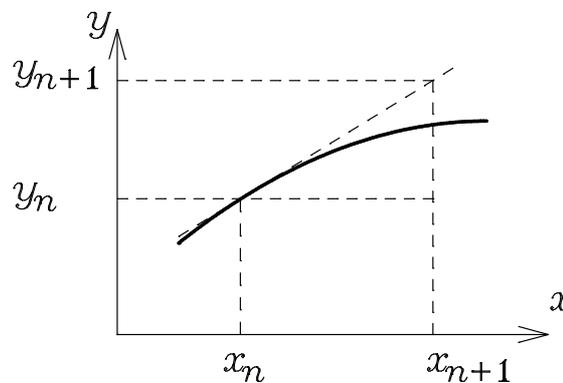


FIGURA 7.3 Método de Euler.

el segmento tangente a la solución que pasa por (x_n, y_n) .

También podemos entender el método como el uso de un desarrollo en serie de Taylor truncado al orden lineal. El error cometido en la aproximación —que se suele llamar **error de aproximación**, **error de truncamiento** o **error de discretización**— es, por tanto, de segundo orden en h , ya que se retienen solo términos de primer orden en el desarrollo. Se dice que el método es de primer **orden**. Nótese que hasta ahora hemos considerado el error que se cometía al avanzar un solo paso, por lo que se trataba del **error local**. Como el error se acumula paso tras paso, y para avanzar una distancia Δx predeterminada hace falta dar un número de pasos que crece con $1/h$, el **error global** será del orden de $h^2 \times 1/h = h$. Al disminuir el paso, el error de truncamiento disminuye, a costa de un mayor esfuerzo de cálculo al tener que hallarse más puntos. Además, el paso no puede hacerse arbitrariamente pequeño, ya que por debajo de cierto umbral (dependiente del método y del sistema usado) aumentan los **errores de redondeo** inducidos por la aritmética con un número finito de dígitos que utilizan en la práctica todos los ordenadores y que es responsable, por ejemplo, de las dificultades inherentes asociadas a la substracción y derivación numéricas.

En el caso de cuadratura numérica, $f(x, y) = F(x)$, el método consiste en sustituir el área bajo la curva por la del rectángulo que se muestra en la figura 7.4:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx = y_{n+1} - y_n \approx h F(x_n). \quad (7.62)$$

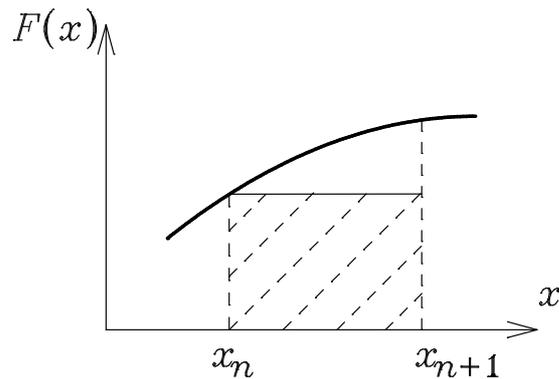


FIGURA 7.4 Método de Euler para cuadratura numérica.

7.5.2. Método de Heun

Para mejorar el método de Euler —y obtener así un método llamado también de **Euler mejorado**— puede utilizarse un paso de tipo Euler para calcular un valor auxiliar

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (7.63)$$

calcular la tangente a la solución que pasa por ese punto y aproximar la solución por el segmento que pasa por (x_n, y_n) y tiene como pendiente el promedio de las correspondientes a las tangentes en los puntos (x_n, y_n) y (x_{n+1}, y_{n+1}^*) :

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2}, \quad (7.64)$$

como se ve la figura 7.5. En resumen:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))] + O(h^3). \quad (7.65)$$

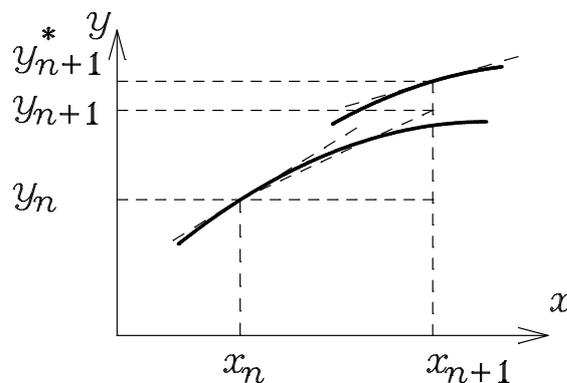


FIGURA 7.5 Método de Heun.

EJERCICIO 7.17 Use un desarrollo en serie de Taylor para comprobar que el error de truncamiento del método de Heun es proporcional a h^3 y se trata, por tanto, de un método de segundo orden.

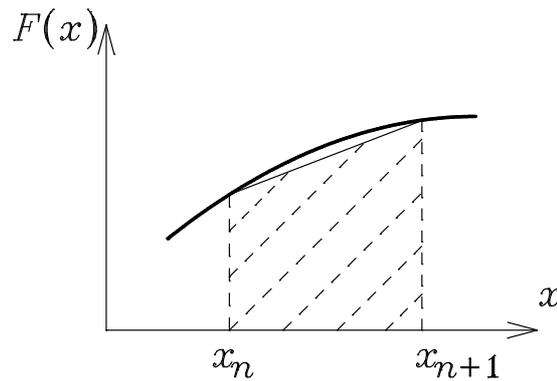


FIGURA 7.6 Método de los trapecios.

En el caso de cuadratura numérica, se recupera el **método de los trapecios**, como se muestra en la figura 7.5:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx = y_{n+1} - y_n \approx \frac{h}{2} [F(x_n) + F(x_{n+1})]. \quad (7.66)$$

7.5.3. Método del punto medio

Este método, también llamado de **Euler modificado** o **método mejorado del polígono**, es una variante del anterior: en vez de avanzar un paso entero y usar el promedio de las pendientes en los dos extremos, se avanza solo medio paso,

$$y_{n+1/2}^* = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \quad (7.67)$$

y se aproxima la solución por el segmento que pasa por (x_n, y_n) y tiene como pendiente la de la tangente en ese punto intermedio:

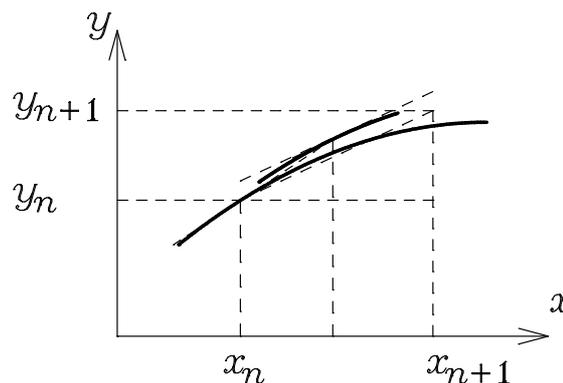


FIGURA 7.7 Método del punto medio.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1/2}^*), \quad (7.68)$$

es decir,

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) + O(h^3). \quad (7.69)$$

En el caso de cuadratura numérica, se recupera el método que se muestra a la derecha la figura 7.7:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx = y_{n+1} - y_n \approx hF\left(x_n + \frac{h}{2}\right). \quad (7.70)$$

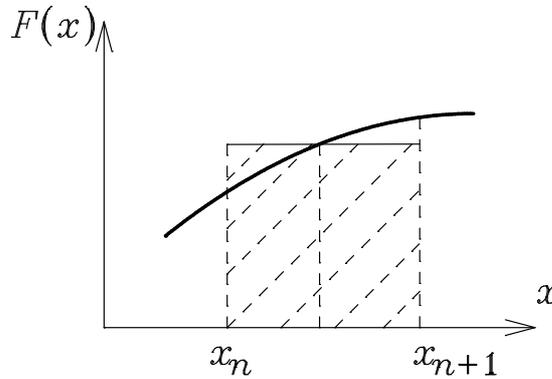


FIGURA 7.8 Método del punto medio en cuadratura numérica.

7.6. Métodos de Runge-Kutta

Se trata de una extensa familia de métodos de todos los órdenes y que incluye, en particular, los métodos de segundo orden vistos hasta ahora. La idea general del método consiste en evaluar pendientes en varios puntos (extremos e intermedios) y en avanzar con un paso de tipo Euler con una pendiente promediada adecuadamente. Por ejemplo, la familia general de segundo orden evalúa dos pendientes,

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (7.71)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2a}, y_n + \frac{h}{2a}k_1\right), \quad (7.72)$$

y usa el siguiente promedio:

$$y_{n+1} = y_n + h[(1-a)k_1 + ak_2] + O(h^3). \quad (7.73)$$

EJERCICIO 7.18 Compruebe que todos estos métodos son de segundo orden.

Si $a = 1/2$ se recupera el método de Heun, con $a = 1$ el del punto medio y $a = 2/3$ proporciona el método con la mínima cota para el coeficiente de los términos de orden h^3 despreciados.

El método de Runge⁶-Kutta⁷ por antonomasia es el método de cuarto orden en que se calculan las pendientes

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (7.74)$$



⁶ **Carle David Tolmé Runge** (30-08-1856, Bremen, Alemania; 3-01-1927, Gotinga, Alemania). Además de sus contribuciones a la teoría de aproximaciones, la geometría diferencial, las ecuaciones diofánticas y otras ramas de la matemática, realizó abundante trabajo experimental en espectroscopia, en especial sobre el efecto Zeeman.

⁷ **Martin Wilhelm Kutta** (3-11-1867, Pitschen, Silesia —hoy se llama Byczyna y está en Polonia—; 25-12-1944, Fürstfeldbruck, Alemania). Además de su método para resolver ecuaciones diferenciales, que fue dado a conocer por Runge, es recordado por sus contribuciones a la aerodinámica.

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (7.75)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (7.76)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3), \quad (7.77)$$

y se usa la siguiente aproximación (véase el apartado B.4.6):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5). \quad (7.78)$$

En el caso de cuadratura, se recupera la clásica **fórmula de las parábolas de Simpson**⁸:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx = y_{n+1} - y_n \approx \frac{1}{3} \frac{h}{2} \left[F(x_n) + 4F\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + F(x_n + h) \right]. \quad (7.79)$$

Es éste un método estable y muy fiable, pero lento. No es raro verlo citado incluso en trabajos de investigación. Hoy día, sin embargo, no hay demasiada excusa para usarlo en perjuicio de métodos de Runge-Kutta más potentes, como son los sofisticados métodos embebidos de Dormand y Prince que, con órdenes 5 y 8, proporcionan control automático del paso en función del error estimado, así como salida continua, ya que con un esfuerzo adicional mínimo dan también los coeficientes de un polinomio que interpola la solución entre los extremos de cada paso. Puede verse una buena descripción y algoritmos listos para ser usados en [32].

7.7. Métodos de varios pasos

Todos los métodos discutidos hasta este momento son métodos de un paso, porque cada paso es completamente independiente de los demás y se realiza utilizando información correspondiente exclusivamente a ese paso. Esto significa que no se aprovecha la información que sobre la solución se ha obtenido en pasos previos, que como vamos a ver a continuación puede ser utilizada para ahorrar esfuerzo de cálculo.

Supongamos que los pasos están todos igualmente espaciados ($x_{n\pm 1} = x_n \pm h$), usemos la notación abreviada $y'_n = f(x_n, y_n)$ y veamos cómo podemos construir un método de segundo orden que proporcione alrededor de x_n una aproximación del tipo

$$y(x) = y_n + a(x - x_n) + b(x - x_n)^2 + O\left[(x - x_n)^3\right], \quad (7.80)$$

que, si evitamos escribir la magnitud del error, conduce a

$$y'_n = a, \quad (7.81)$$

$$y'_{n-1} = a - 2bh, \quad (7.82)$$

$$y_{n+1} = y_n + ah + bh^2. \quad (7.83)$$

Si multiplicamos por $-3h/2$ la primera ecuación, por $h/2$ la segunda y las sumamos a la tercera, obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1}) + O(h^3). \quad (7.84)$$



⁸ **Thomas Simpson** (20-08-1710, Market Bosworth, Inglaterra; 14-05-1761, Market Bosworth). Estudió teoría de probabilidades basándose en trabajos debidos a de Moivre y publicó en 1740 *The Nature and Laws of Chance*. Es, sin embargo, más recordado por sus fórmulas de interpolación y cuadratura numérica y publicó en 1750 *The Doctrine and Application of Fluxions*.

EJERCICIO 7.19 Demuestre que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_n + y'_{n+1}) + O(h^3). \quad (7.85)$$

Un método de varios pasos de segundo orden que puede construirse con estos resultados es el prototipo de los métodos del tipo **pronosticador-corrector**, en los que se procede como sigue:

1. En un paso pronosticador se usa extrapolación polinómica para evaluar una primera aproximación al siguiente punto:

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{2} (3y'_n - y'_{n-1}). \quad (7.86)$$

2. Se evalúa una aproximación a la derivada en el punto siguiente

$$y'_{n+1}^* = f(x_{n+1}, y_{n+1}^*). \quad (7.87)$$

3. Se usa un corrector polinómico para hallar una segunda aproximación:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_n + y'_{n+1}^*). \quad (7.88)$$

4. Se evalúa la derivada en el punto siguiente

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (7.89)$$

En métodos sofisticados pueden utilizarse varios correctores en serie o aplicar uno repetidas veces. Si, como en el ejemplo que acabamos de describir, los pronosticadores y correctores son polinomios en las derivadas se dice que se usa un **método de Adams**⁹ y el correspondiente pronosticador recibe el nombre de **Adams-Bashforth** mientras que el corrector es el de **Adams-Moulton**.

El método de Adams-Bashforth-Moulton clásico es de cuarto orden y usa las siguientes expresiones:

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{24} (55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}), \quad (7.90)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9y'_{n+1}^* + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}). \quad (7.91)$$

Una de las ventajas de este tipo de método es que, en general, requiere menos cálculo que uno de Runge-Kutta del mismo orden. Por ejemplo, en el método de Adams de cuarto orden solo se evalúan dos derivadas por paso, mientras que en el Runge-Kutta correspondiente se necesitan cuatro. Por ello, estos métodos suelen ser más eficaces. Otra ventaja es que, al ofrecer más de una aproximación para el nuevo valor y_{n+1} , comparando dichas aproximaciones puede estimarse con poco esfuerzo el error cometido. Las dos principales desventajas de este tipo de método están relacionadas entre sí:



⁹ **John Couch Adams** (5-06-1819, Laneast, Inglaterra; 21-01-1892, Cambridge, Inglaterra). Dedicó un gran esfuerzo al problema del movimiento de la Luna, del que dio una descripción más detallada que la de Laplace, pero su nombre es especialmente recordado como codescubridor de Neptuno al estudiar las irregularidades del movimiento de Urano. La información detallada de la posición de Neptuno que dio en septiembre de 1845 fue ignorada por el observatorio de Cambridge, y la posterior predicción de Urbain Le Verrier fue publicada antes y guió el descubrimiento del nuevo planeta realizado por Galle en el observatorio de Berlín el 23-09-1846.

- los métodos no pueden empezar por sí solos, ya que la información a un paso que dan las condiciones iniciales no es suficiente,
- cuando se cambia la longitud del paso como consecuencia del control de errores, la información necesaria para el siguiente paso no está, en general, disponible.

Estos problemas pueden superarse (usando un Runge-Kutta con paso pequeño para comenzar, dividiendo el paso por 2 o multiplicándolo por 2 y usando interpolación, etc.), pero hacen que la programación de uno de estos métodos sea más complicada que la de los Runge-Kutta. Por otro lado, tienden a ser bastantes más rápidos, mientras que los Runge-Kutta son más estables. De hecho, se han desarrollado métodos de tipo pronosticador-corrector muy eficaces y sofisticados, aunque parece que van siendo sustituidos progresivamente por los llamados métodos de extrapolación, que describimos a continuación.

7.8. Métodos de extrapolación

Estos métodos suelen ser muy rápidos y precisos (en un cierto sentido son de orden infinito), aunque exigen soluciones muy regulares y fallan, por ello, más a menudo que los de tipo de Runge-Kutta. El más conocido de todos se basa en el **método de Gragg**, también llamado del **punto medio modificado**, en el que para avanzar una distancia H no necesariamente pequeña entre x e $x + H$ se usan n pasos de longitud $h = H/n$ y se calculan los siguientes valores intermedios:

$$y_0 = y(x), \quad (7.92)$$

$$y_1 = y_0 + hf(x, y_0), \quad (7.93)$$

$$y_2 = y_0 + 2hf(x + h, y_1), \quad (7.94)$$

$$\vdots$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(x + kh, y_k), \quad (k = 1, \dots, n - 1), \quad (7.95)$$

y se define la aproximación para $y(x + H)$ como

$$y(x + H, n) = \frac{1}{2} [y_n + y_{n-1} + hf(x + H, y_n)]. \quad (7.96)$$

El método por sí mismo es, por tanto, de orden bajo, pero Gragg demostró que en la expresión del error de truncamiento cometido en este método solo aparecen potencias pares de la magnitud del paso:

$$y(x + H) - y(x + H, n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k h^{2k}. \quad (7.97)$$

Ahora bien, cuando faltan las potencias impares del error, una potente idea —conocida, según autores y contextos, con los nombres de **aproximación diferida al límite**, **extrapolación de Richardson**¹⁰, **racional** o de **Neville**— permite mejorar eficazmente la calidad de la aproximación repitiendo el cálculo con otro (u otros) valor de h .



¹⁰ **Lewis Fry Richardson** (11-10-1881, Newcastle upon Tyne, Inglaterra; 30-09-1953, Kilmun, Escocia). Su trabajo como físico, químico y meteorólogo, incluye contribuciones al cálculo y a la teoría de la difusión y aplicó la matemática al estudio de las causas de la guerra, pero es más recordado por haber sido el primero en usar la matemática —el método de diferencias finitas— para la predicción del tiempo en *Weather Prediction by Numerical Process* (1922).

EJERCICIO 7.20 Demuestre que el error comienza por h^4 si se usa la aproximación $\frac{4}{3}y(x+H, n) - \frac{1}{3}y(x+H, n/2)$.

Este resultado puede extenderse sin dificultad para obtener una aproximación de orden tan grande como se quiera. En la práctica suelen elegirse $n = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, \dots$ (en el conocido método de Bulirsch-Stoer por ejemplo) o $n = 2, 4, 6, 8, \dots$. Para más detalles sobre la programación práctica de este tipo de métodos remitimos al lector a los textos [34], [32] y [33]. (En los dos últimos pueden hallarse algoritmos listos para usar). La extrapolación de Richardson es también muy útil para calcular derivadas numéricas y en cuadratura numérica, donde da lugar al método de Romberg.

7.9. Métodos implícitos

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = -501x + 499y, \quad (7.98)$$

$$\dot{y} = 499x - 501y, \quad (7.99)$$

cuya solución general es

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-1000t}, \quad (7.100)$$

$$y = Ae^{-2t} - Be^{-1000t}, \quad (7.101)$$

que obviamente tiende a $x = y = 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Veamos si este comportamiento asintótico puede observarse si lo resolvemos por el método de Euler.

EJERCICIO 7.21 Demuestre que las aproximaciones obtenidas por el método de Euler son

$$x_n = A(1 - 2h)^n + B(1 - 1000h)^n, \quad (7.102)$$

$$y_n = A(1 - 2h)^n - B(1 - 1000h)^n. \quad (7.103)$$

Por consiguiente, el método hallará que todas las soluciones convergen al origen si y solo si $|1 - 2h| < 1$ y $|1 - 1000h| < 1$. Por tanto, aunque el término e^{-1000t} prácticamente no va a contribuir a la solución, su mera presencia impone un severo límite al paso de integración ($h < 0,002$), ya que en caso contrario ese término, que debería ser despreciable, dominaría la solución numérica y haría que la misma fuera al infinito en vez de converger a cero. Este tipo de comportamiento (y otros relacionados que aparecen en las llamadas ecuaciones **rígidas**, con las que, no solo el método de Euler, sino todos los métodos que hemos visto antes, incluso los más sofisticados, resultan inadecuados) puede ser tratado adecuadamente por medio de los **métodos implícitos**, de los que no veremos sino el más elemental, pudiendo encontrarse otros realmente prácticos en [32], [33] y [31].

En el **método de Euler implícito** se usa la pendiente en el punto final del intervalo, en vez de usar la correspondiente al punto inicial:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_{n+1}) + O(h^2). \quad (7.104)$$

Ésta es una ecuación de la que hay que obtener y_{n+1} , lo que puede hacerse numéricamente por un método iterativo, que no nos interesa en este momento.

EJERCICIO 7.22 Demuestre que las aproximaciones obtenidas por el método de Euler implícito son

$$x_n = A(1 + 2h)^{-n} + B(1 + 1000h)^{-n}, \quad (7.105)$$

$$y_n = A(1 + 2h)^{-n} - B(1 + 1000h)^{-n}. \quad (7.106)$$

Vemos que el método implícito predice la convergencia hacia el origen para todo $h > 0$.

Antes de terminar, queremos hacer notar que la práctica del cálculo numérico es, como tantas otras, una disciplina que tiene algo de arte y que hace falta mucha experiencia antes de estar seguro de dominarla, ya que está llena de trampas y sutilezas.

EJERCICIO 7.23 ¿Qué cree que pasaría al resolver numéricamente el problema de condiciones iniciales

$$y'' = 10000y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -100, \quad (7.107)$$

cuya solución es $y = e^{-100x}$?

7.10. Problemas

7.1 Use la regla de l'Hôpital¹¹ para demostrar que e^{-x} decrece más rápidamente que toda potencia negativa de x , es decir, que $e^{-x} = O(x^{-n})$ cuando $x \rightarrow \infty$ para n arbitrariamente grande.

7.2 Demuestre que para $x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) el logaritmo diverge más lentamente que cualquier potencia negativa (positiva) de x , es decir, que $\ln x = O(x^{-\epsilon})$ ($\ln x = O(x^\epsilon)$) para ϵ tan pequeño como se quiera.

7.3 Halle los valores de α para los que sea cierto que $f = O(x^\alpha)$ cuando $x \rightarrow 0$ si (a) $f = (1 - e^x)^{-2}$, (b) $f = \ln(1 - x)$ y (c) $f = x \ln x$.

7.4 Ecuación de Riccati. De acuerdo con el problema 3.27, la ecuación de Riccati $y' = x^2 + y^2$ es equivalente a la ecuación lineal homogénea $u'' + x^2u = 0$, si $y = -u'/u$. Calcule la solución aproximada de esta última ecuación que corresponde a $y(0) = 1$ y compruebe que se recupera la solución del ejercicio 7.4.

7.5 Halle aproximaciones a la solución de

$$y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 0,$$

por medio de una serie de potencias y del método de Picard. Compare los resultados.

7.6 Compare las sucesivas aproximaciones obtenidas por el método de Picard aplicado al problema de valores iniciales

$$y' = 1 + x^2 - y^2, \quad y(0) = 0,$$

partiendo de $y^{[0]}(x) = 0$ y de $y^{[0]}(x) = -x$. Comente el resultado.

7.7 En la obra *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* de 1671, Newton probó que la solución del problema

$$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy, \quad y(0) = 0$$

es

$$y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \dots$$

Obtenga el resultado mediante dos métodos distintos.

7.8 Oscilador amortiguado. Resuelva el problema

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = A_0,$$

(a) hallando la solución analítica, (b) usando perturbación regular, (c) por medio del método de los dos tiempos. Compare y comente los resultados.



¹¹ **Guillaume François Antoine Marqués de l'Hôpital** (1661, París; 2-02-1704, París). Este discípulo de Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz escribió en 1692 el primer texto de cálculo, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, que contiene su famosa regla. Resolvió, al mismo tiempo que Newton, Leibniz y Jacob Bernoulli, el problema de la braquistocrona.

7.9 Oscilador cuasiarmónico. Considere la ecuación

$$\ddot{x} + \omega^2 (x + \epsilon x^3) = 0,$$

donde ϵ es un parámetro pequeño y ω la frecuencia natural del oscilador en ausencia del término perturbativo. Intente resolver esta ecuación por el método del parámetro pequeño. ¿Aparecen términos seculares? Sustituya la expresión aproximada de la solución perturbativa a primer orden en la expresión de la energía mecánica y estudie su comportamiento. Utilice el método de Poincaré-Lindstedt para hallar una solución aproximada. ¿Por qué otro método podría calcularse aproximadamente el período?

7.10 Resuelva por el método WKB $\epsilon^2 y'' = (1 + x^2)^2 y$.

7.11 Precesión del perihelio de Mercurio. Al estudiar el problema de Kepler¹² en relatividad general usando coordenadas polares (r, φ) , la ecuación de la órbita puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \epsilon p u^2,$$

siendo $u = 1/r$. Cuando $\epsilon = 0$ se recupera (2.124). Por otro lado, la órbita de Mercurio alrededor del Sol es descrita por esta ecuación con $\epsilon = 3MG/pc^2 \approx 8 \times 10^{-8}$. Utilice teoría de perturbaciones a primer orden para calcular la órbita de Mercurio. (Asegúrese de eliminar los términos seculares). Calcule el ángulo que separa dos perihelios sucesivos (es decir, dos máximos consecutivos de u) y compruebe que no es exactamente 2π , por lo que el perihelio está precesando. Demuestre que, puesto que Mercurio efectúa 415 revoluciones alrededor del Sol en un siglo, la relatividad general predice una precesión de su perihelio igual a $43,03''$ por siglo, en buen acuerdo con el valor observado de $43,11 \pm 0,45''$ por siglo.

7.12 Resuelva mediante perturbaciones

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x}^3 + x = 0$$

y use el resultado para discutir la estabilidad del punto de equilibrio, para pequeños valores positivos y negativos de ϵ .

Problemas numéricos¹³

7.13 Dibuje el espacio (x, y) de las soluciones de la ecuación $(1 - x^2) y' = 1 - y^2$ del problema 2.6.



¹² **Johannes Kepler** (27-12-1571, Weil der Stadt, Sacro Imperio Romano; 15-11-1630, Regensburg en la actual Alemania). Introducido por su maestro Maestlin a la astronomía heliocéntrica de Copérnico, publicó una supuesta explicación matemática de la misma en términos de poliedros regulares. Fue ayudante de Tycho Brahe durante el año que precedió a la muerte de éste y usó sus observaciones para establecer las famosas tres leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Trabajó sobre logaritmos y óptica, donde demostró que la visión se debe a la recepción de rayos de luz por el ojo y perfeccionó el telescopio. También escribió sobre la supernova de 1604, que ahora lleva su nombre.

¹³En los restantes problemas debe usarse alguno de los métodos vistos en este capítulo para realizar la integración numérica. Las ecuaciones de segundo orden que aparecen son autónomas, por lo que puede hallarse la ecuación de primer orden equivalente mediante el método del apartado 3.4.2. Análogamente, los sistemas compuestos por dos ecuaciones serán autónomos y no será necesario resolver más que la ecuación de las trayectorias de fases del apartado 4.1.1. La solución numérica de la mayor parte de los siguientes problemas será utilizada en el capítulo 8, donde pueden verse los dibujos correspondientes.

7.14 Analice la ecuación de Newton del problema 7.7: $y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy$. ¿Cómo debe elegirse $y(0) = y_0$ para que la solución vaya a $\pm\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$?

7.15 Las soluciones de la ecuación $\dot{x} = t - x^2$ se convierten en $x \simeq \sqrt{t}$ al crecer t . ¿Qué sucede al emplear los distintos métodos de integración en el intervalo $0 \leq t \leq 10000$?

7.16 ¿Qué pasa al usar distintos métodos numéricos para resolver el sistema (7.98)–(7.99)?

7.17 Utilice diferentes métodos numéricos para tratar de obtener una buena aproximación a la solución exacta del problema del ejercicio 7.23.

7.18 Dibuje el espacio de fases del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y - \epsilon xy, \\ \dot{y} &= (1 + r + d)x + (1 + r)y + \epsilon (y^2 - x^2)\end{aligned}$$

cuando $\epsilon = 0$ y $\epsilon = 1$, para los siguientes valores de los otros parámetros:

d	1	-1	3	1	1
r	-5/2	-1	-1	0	-2

7.19 Dibuje el espacio de fases (x, y) del siguiente sistema para $n = 2, 3$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x - y^n.\end{aligned}$$

7.20 Halle el espacio de fases del siguiente sistema en los casos $\epsilon = 0, 1$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - \epsilon xy, \\ \dot{y} &= -y + \epsilon (y^2 - x^2)?\end{aligned}$$

7.21 Dibuje el espacio de fases (x, \dot{x}) de la ecuación $\ddot{x} = x^2(x - 1)(x - 2) - \gamma\dot{x}$ cuando $\gamma = 0$ y $\gamma = 0, 1$.

7.22 Dibuje el espacio de fases del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2xy, \\ \dot{y} &= x^2 - y^3.\end{aligned}$$

Capítulo 8

Teoría de la estabilidad

*Prediction is very difficult,
especially of the future.*
Niels Bohr

La dificultad de resolver las ecuaciones no lineales¹ hace que en muchos casos haya que recurrir a métodos aproximados, como los discutidos en el capítulo 7. Existe otra alternativa cuando es suficiente cierta información cualitativa sobre las soluciones del sistema. Por ejemplo, a menudo basta conocer la evolución del sistema en el límite $t \rightarrow \pm\infty$, en especial si sabemos que el comportamiento asintótico se alcanza rápidamente tras un corto transitorio. Henri Poincaré² planteó hacia 1880 el programa de clasificar cualitativamente los espacios de fases de los sistemas dinámicos, pero solo pudo llevarlo a cabo en los casos de una y dos dimensiones, y fue el primero en descubrir los primeros elementos de la sorprendente variedad de comportamientos dinámicos que son posibles en cuanto la dimensión sobrepasa la del plano. El gran desarrollo que en los últimos veinte años ha experimentado lo que ha venido en llamarse **ciencia no lineal** prueba el interés y dificultad de la **dinámica cualitativa**, cuyo «padre» indiscutible es Poincaré.

En este capítulo analizaremos uno de los conceptos más simples e importantes de la teoría cualitativa: la estabilidad de soluciones especiales (en especial, de los puntos de equilibrio, que resultan muy familiares al lector con conocimientos de mecánica) frente a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales. También se ha incluido un corto —pero esperamos que estimulante— apartado sobre **caos determinista**. El lector interesado podrá encontrar en la bibliografía de la página 321 buenas referencias que le permitirán profundizar en este aspecto.

¹Como alguien ha señalado, hablar de ecuaciones no lineales puede ser tan engañoso como hablar de animales que no son elefantes. Al igual que la mayoría de los animales no son elefantes, ser lineal es la excepción. Hay que reconocer, sin embargo, que se trata de una excepción muy importante en física, donde muchas ecuaciones fundamentales, pero no todas, son lineales y donde se recurre a menudo —casi rutinariamente— a aproximaciones lineales.



² **Jules Henri Poincaré** (29-04-1854, Nancy, Francia; 17-07-1912, París). Trabajó en prácticamente todas las ramas de las matemáticas, incluyendo geometría y topología algebraicas, variable compleja, teoría de números y ecuaciones diferenciales. También se interesó por la electricidad, telegrafía, óptica, capilaridad, elasticidad, teoría del potencial y termodinámica. Publicó resultados que adelantaban algunos aspectos de la relatividad especial de Einstein. En mecánica celeste su nombre es inseparable del problema de los tres cuerpos y las órbitas planetarias, donde consideró por primera vez la posibilidad de movimiento caótico en un sistema determinista, aunque este aspecto de su trabajo no recibió el interés que merecía hasta las décadas de los sesenta y setenta, cuando resurgió el área y se inventó el nombre «caos determinista».

8.1. Concepto de estabilidad

Consideremos un sistema dinámico como los definidos en la página 79,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (8.1)$$

y una de sus soluciones $\mathbf{x}^*(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t)). \quad (8.2)$$

Entre la información cualitativa que puede interesar conocer de un sistema dinámico, se encuentra la existencia y localización de sus soluciones notables y **conjuntos invariantes**. Un conjunto es invariante, si tiene la propiedad de que cualquier solución que tenga un punto en él está completamente contenida dentro. El ejemplo más sencillo es un **punto de equilibrio** (también llamado **punto estacionario**, **fijo**, **crítico** o **de reposo**), que constituye por sí mismo una solución completa $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* = \text{constante}$:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*) = 0, \quad \left(\text{con } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(t, \mathbf{x}^*) = 0 \right). \quad (8.3)$$

Nos interesará en especial, aunque no exclusivamente, el caso de un punto fijo **aislado**, es decir, tal que no hay otros puntos fijos en un entorno del mismo. Otros ejemplos de conjuntos invariantes que consideraremos son las soluciones periódicas, en especial las aisladas (**ciclos límite**), y los **atractores caóticos**, que suelen contener un número infinito de órbitas periódicas inestables.

EJERCICIO 8.1 Halle los puntos de equilibrio de los sistemas dinámicos (a) $\dot{x} = ax$, y (b) $\dot{x} = ax - x^3$.

Puesto que las condiciones iniciales de cualquier sistema físico son siempre conocidas aproximadamente, una pregunta relevante es qué pasa si se modifican ligeramente las mismas para obtener otras soluciones que ya no coinciden exactamente con la solución notable que nos interesa. Si la nueva solución se mantiene siempre en las proximidades de la de referencia, se dice que ésta es estable y si, además, se aproxima a ella, que es asintóticamente estable. Si por el contrario, algunas o todas las soluciones perturbadas se escapan del entorno de la de referencia, por pequeño que sea, la solución especial es inestable y no suele ser físicamente realizable, excepto tal vez en circunstancias especiales. Consideremos el ejemplo del péndulo. Hay dos posiciones matemáticas de equilibrio: las verticales. Cuando se encuentra en la posición más baja, una pequeña perturbación, que cambia levemente las condiciones iniciales, no consigue que el sistema se aleje mucho de ese punto: simplemente oscila en sus proximidades y el punto (que corresponde a un mínimo de la energía potencial) es estable. Si, además, hay rozamiento, la energía mecánica disminuye monótonamente y el péndulo tiende hacia la posición de equilibrio, que es asintóticamente estable. La posición más alta, por el contrario, corresponde a un máximo de la energía potencial y cualquier perturbación, por pequeña que sea hace que el péndulo se aleje de allí: es un punto de equilibrio inestable.

De forma más precisa, se dice $\mathbf{x}^*(t)$ es **estable según Liapunov**³ (o estable, para abreviar) si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que cualquier otra solución $\mathbf{x}(t)$ cuya condición inicial



³ **Aleksandr Mikhailovich Liapunov** (16-06-1857, Yaroslavl, Rusia; 3-11-1918, Odesa). Trabajó en ecuaciones diferenciales, teoría del potencial, probabilidades y aproximaciones. Es especialmente recordado por sus estudios sobre la estabilidad del equilibrio y del movimiento en sistemas mecánicos, hidrodinámica y ecuaciones diferenciales, donde introdujo nuevos métodos y resultados, incluyendo las funciones que llevan su nombre.

satisfaga $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)| < \delta(\epsilon)$ cumple que $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)| < \epsilon$ para todo $t > t_0$. En caso contrario, es decir, si existe un $\epsilon > 0$ tal que para $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera hay al menos una solución que satisface $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)| < \delta$ y $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)| > \epsilon$ para algún $t > t_0$, se dice que la solución es **inestable**.

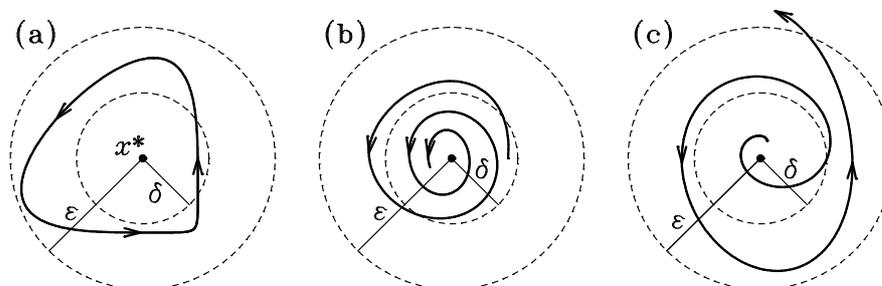


FIGURA 8.1 Punto de equilibrio (a) estable, (b) asintóticamente estable, (c) inestable.

Se dice que la solución $\mathbf{x}^*(t)$ es **asintóticamente estable** si es estable y existe un $\delta' > 0$ tal que si $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)| < \delta'$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)| = 0$. Se dice también que $\mathbf{x}^*(t)$ es un **atractor**, ya que atrae a las soluciones de su entorno. Si un punto de equilibrio es asintóticamente estable y, de hecho, todas las soluciones (y no solo las de un entorno) tienden hacia $\mathbf{x}^*(t)$, se habla de **estabilidad a gran escala**.

Por ejemplo, la solución general de $\dot{x} = ax$ es $x = x_0 e^{at}$, de forma que para $a < 0$ todas las soluciones tienden a $x = 0$, que es, por tanto, estable, asintóticamente estable y estable a gran escala. Para $a > 0$ todas las soluciones, excepto $x = 0$ claro, tienden hacia el infinito, por lo que el origen es inestable. Para $a = 0$, todos los puntos son de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable. Cuando, como en este ejemplo, al ir variando un parámetro cambia la naturaleza (o el número) de puntos de equilibrio (o de otro tipo de conjuntos invariantes), se dice que se ha producido una **bifurcación**. En este ejemplo el **parámetro de bifurcación** es a . El

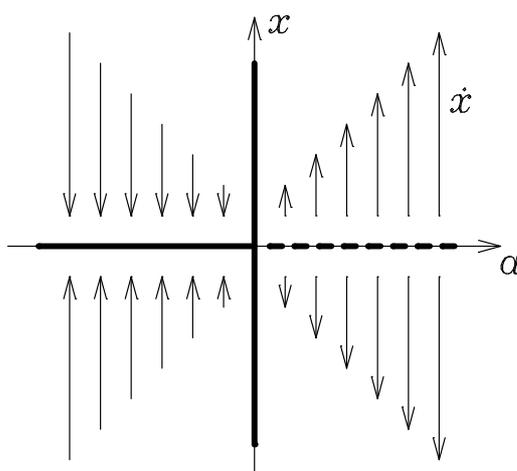


FIGURA 8.2 Diagrama de bifurcación de $\dot{x} = ax$.

diagrama de bifurcación se muestra en la figura 8.2, donde la posición (en este caso siempre el origen) del punto de equilibrio se muestra en función del parámetro de bifurcación, usándose línea continua para indicar estabilidad y línea a trazos para inestabilidad. También se indica la

magnitud y la dirección (hacia el origen o el infinito) del campo vectorial \dot{x} . Puede usarse esta última para explicar de modo gráfico la estabilidad del origen: como el sentido del movimiento de las soluciones próximas al punto de equilibrio será el indicado por el campo vectorial, se ve fácilmente si las pequeñas perturbaciones tienden a aumentar o a decrecer, es decir, si el equilibrio es estable o inestable. Nótese que la mencionada dirección se invierte precisamente en los puntos de equilibrio (en los dos ejes, en este caso), ya que el signo de la derivada cambia cuando la misma se anula, es decir, en los puntos críticos.

EJERCICIO 8.2 Utilice primero el método gráfico y luego la solución general para obtener el diagrama de bifurcación de los puntos de equilibrio de la ecuación

$$\dot{x} = ax - x^3. \quad (8.4)$$

8.2. Sistemas dinámicos autónomos bidimensionales

Durante una buena parte de este capítulo nos limitaremos a considerar un sistema dinámico bidimensional autónomo:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad (8.5)$$

$$\dot{y} = Q(x, y). \quad (8.6)$$

Como se señaló en el apartado 4.1.1, la solución general del sistema dinámico define una congruencia en el espacio (t, x, y) ; pero, como es autónomo, la proyección de aquella sobre el espacio de fases (x, y) es una nueva congruencia, de forma que la proyección $(x(t), y(t))$ de una solución es una curva paramétrica llamada **trayectoria de fases** o, a veces, **órbita de fases**.

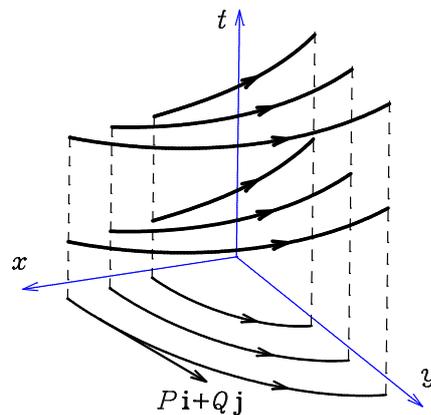


FIGURA 8.3 Solución general del sistema autónomo y su proyección sobre el espacio de fases.

Para ver que la proyección de la solución general en el espacio de fases es una congruencia, es decir, que las trayectorias de fases no se cortan, basta ver que, si no nos interesa la dependencia de t de las trayectorias de fases, sino solo su estructura geométrica, la ecuación $y(x)$ de esas curvas se obtiene sin más que eliminar el parámetro t de sus ecuaciones $(x(t), y(t))$, lo que puede hacerse también en las ecuaciones diferenciales de la familia (8.5)–(8.6) sin más que dividir las:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (8.7)$$

Como consecuencia del teorema de existencia y unicidad de esta última ecuación, también la proyección de la solución general del sistema sobre el espacio de fases es una congruencia (en un dominio donde se cumplan las condiciones de regularidad apropiadas). Si escribimos la ecuación de las trayectorias de fases (8.7) en forma canónica,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}, \quad (8.8)$$

aquéllas pueden interpretarse como las líneas de corriente del campo de velocidades $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ a ellas tangente y avala el uso del término **flujo** para describir a la aplicación que nos da la evolución del sistema en el plano de fases.

Puesto que a lo largo de una solución no cambia la trayectoria de fases, la ecuación de las trayectorias de fases es una constante del movimiento del sistema dinámico y, además, no depende de la variable independiente t . Y recíprocamente, de acuerdo con lo visto en el apartado 4.2.2, una integral primera que no dependa de la variable independiente nos proporciona la ecuación de las trayectorias de fases de sistemas autónomos con $n = 2$ ecuaciones. Por tanto, en el caso de los sistemas estudiados aquí, calcular las trayectorias de fases es equivalente a hallar una constante del movimiento independiente de t .

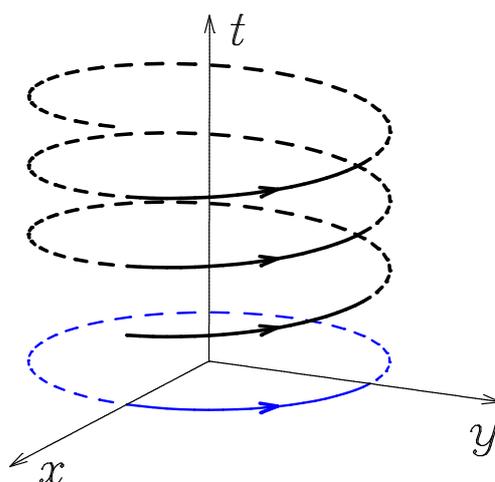


FIGURA 8.4 Una solución de (8.9) y su proyección sobre el espacio de fases.

Como ya vimos en la página 80, el sistema dinámico

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \quad (8.9)$$

tiene como solución general (que en este caso incluye todas las soluciones, por ser la ecuación lineal)

$$x = R \cos(t - t_0), \quad y = R \sin(t - t_0), \quad (8.10)$$

que es la congruencia de hélices de paso 2π y radio R en el espacio (t, x, y) que aparece representada por uno de sus elementos en la figura 8.4. Como pasa siempre con las ecuaciones autónomas, hay simetría de traslación y puede elegirse una constante de integración, t_0 en este caso, que indica únicamente el origen de la variable independiente: cambiar t_0 equivale a trasladar la hélice en la dirección t , pero no modifica la proyección sobre el espacio de fases, que sigue siendo la

circunferencia de radio R que se obtiene al eliminar t en la solución general (8.10), o resolviendo la ecuación de las trayectorias:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (8.11)$$

La congruencia de trayectorias de fases que se obtiene por ambos métodos es la familia de circunferencias descrita por la integral primera $x^2 + y^2 = R^2$, que podía haberse obtenido por inspección a partir del sistema (8.9), sin más que multiplicar la primera ecuación por x , la segunda por y , y sumar los resultados.

Un ejemplo que tendremos siempre en mente será el de un sistema mecánico unidimensional en el que la segunda ley de Newton es la ecuación del movimiento correspondiente a una fuerza resultante⁴ que depende de la posición y la velocidad,

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad (8.12)$$

y que escribiremos en la notación de este capítulo —llamando $y = \dot{x}$ a la velocidad— como

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y). \quad (8.13)$$

Así el oscilador armónico amortiguado, $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = 0$, será $\dot{x} = y, \dot{y} = -\omega^2x - \gamma y$.

EJERCICIO 8.3 Considere el oscilador armónico ($\gamma = 0$). Encuentre la ecuación de las trayectorias de fases. ¿Cuál es el significado físico de esa integral primera? Dibuje el espacio de fases.

Si el sistema es hamiltoniano, habrá una función de Hamilton⁵ $H(x, y)$ —llamando y al momento canónico— de forma que

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (8.14)$$

Un caso más particular, pero no menos importante, es el de un campo de fuerzas unidimensional

$$\ddot{x} = F(x), \quad (8.15)$$

en el que la fuerza siempre deriva de un potencial,

$$F = -\frac{dV}{dx}, \quad \text{con } V(x) = -\int F(x) dx, \quad (8.16)$$

y que se escribe como sistema dinámico en la siguiente forma:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -V'(x), \quad (8.17)$$

y admite el hamiltoniano $H = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$. Como en este capítulo seguiremos la costumbre de la teoría de sistemas dinámicos de llamar conservativo al que conserva el área (o volumen, hipervolumen, etc.) del espacio de fases, los del tipo (8.17), que en mecánica se llaman conservativos, recibirán aquí el nombre más explícito de **sistemas mecánicos conservativos**. Por supuesto, también son conservativos en el sentido que usaremos aquí y que se discute en la siguiente sección.

⁴Para simplificar la notación en todo este capítulo elegimos la unidad de masa de forma que $m = 1$ en todos los sistemas mecánicos estudiados. (O, si se prefiere, utilizamos la fuerza y energía por unidad de masa).



⁵ **William Rowan Hamilton** (4-08-1805, Dublín, Irlanda; 2-09-1865, Dublín). Aparte de sus contribuciones en óptica y astronomía, en física su nombre está asociado nada menos que a tres formulaciones de la mecánica: el principio de Hamilton, las ecuaciones canónicas y la formulación de Hamilton-Jacobi. En matemáticas es especialmente recordado por haber estudiado la primera álgebra no conmutativa: los cuaterniones, que son una extensión de los números complejos, al igual que éstos

lo son de los reales.

EJERCICIO 8.4 Escriba la ecuación del péndulo matemático,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (8.18)$$

en la notación de los sistemas dinámicos. ¿Cuál es el hamiltoniano?

EJERCICIO 8.5 ¿Es hamiltoniano el sistema (8.9)? ¿Qué sistema físico puede representar?

8.3. Sistemas dinámicos conservativos

Para estudiar la evolución del área del espacio de fases, estudiaremos cómo cambia a lo largo del flujo un dominio $D(t)$ como el que se muestra en la figura 8.5. En otro «instante» genérico t' el punto (x, y) se hallará en $(x', y') \equiv (\phi(t'), \psi(t'))$, siendo las funciones $\phi(t')$ y $\psi(t')$ las soluciones del sistema,

$$\dot{\phi}(t') = P(\phi(t'), \psi(t')), \quad \dot{\psi}(t') = Q(\phi(t'), \psi(t')), \quad (8.19)$$

que satisfacen las condiciones iniciales

$$\phi(t) = x, \quad \psi(t) = y. \quad (8.20)$$

En el instante t' los puntos del dominio $D(t)$ habrán ido a parar a los de $D(t')$, cuya área es

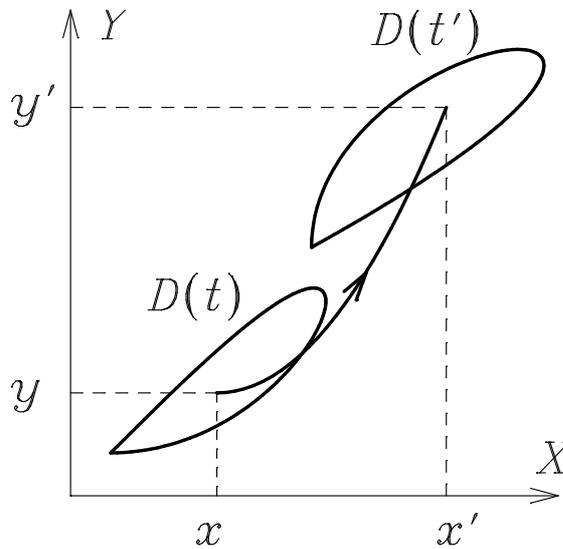


FIGURA 8.5 Evolución de un dominio del espacio de fases.

$$S(t') = \int_{D(t')} dx' dy' = \int_{D(t)} \frac{\partial(\phi(t'), \psi(t'))}{\partial(x, y)} dx dy, \quad (8.21)$$

donde hemos hecho un cambio de variables para expresar la integral en términos de las coordenadas constantes (x, y) : así la dependencia en t' pasa del dominio de integración al integrando, donde es más fácil derivar para ver cómo varía el área:

$$\frac{dS}{dt} = \left. \frac{dS(t')}{dt'} \right|_{t'=t} = \int_{D(t)} \mathcal{D}(x, y) dx dy, \quad (8.22)$$

donde el integrando $\mathcal{D}(x, y)$ es la derivada del jacobiano:

$$\mathcal{D}(x, y) = \frac{d}{dt'} \frac{\partial(\phi(t'), \psi(t'))}{\partial(x, y)} \Big|_{t'=t}, \quad (8.23)$$

que puede calcularse fácilmente usando (8.19) y (8.20):

$$\mathcal{D}(x, y) = \frac{d}{dt'} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \Big|_{t'=t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (8.24)$$

Vemos, por tanto, que el integrando es la divergencia del campo vectorial $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

Diremos que el sistema dinámico (8.5)–(8.6) es **conservativo** si mantiene invariante el área del espacio de fases, es decir, si la divergencia es nula:

$$\frac{dS}{dt} = 0 \iff \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \quad (8.25)$$

El teorema de Liouville asegura que los sistemas hamiltonianos son conservativos (en cualquier dimensión, aunque aquí consideremos solo el plano), porque, como consecuencia de las ecuaciones canónicas de Hamilton (8.14), se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (8.26)$$

Lo que en mecánica se llaman sistemas conservativos son hamiltonianos y, por tanto, conservan el área del espacio de fases.

Si la divergencia es negativa, el área del espacio de fases decrece monótonamente y el sistema se llama **disipativo**.

EJERCICIO 8.6 Calcule la divergencia del campo vectorial asociado al oscilador armónico amortiguado, $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. ¿Es conservativo?

8.4. Sistemas cuasilineales

Supondremos que el sistema dinámico (8.5)–(8.6) tiene un punto de equilibrio aislado, que sin pérdida de generalidad podemos trasladar al origen:

$$P(0, 0) = Q(0, 0) = 0. \quad (8.27)$$

Si desarrollamos en serie de Taylor alrededor de ese punto fijo y usamos la notación

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,0)}, \quad (8.28)$$

el sistema dinámico se escribe como

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + F(x, y), \quad (8.29)$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + G(x, y), \quad (8.30)$$

donde F y G representan los términos de orden superior al primero. En general, llamaremos sistema cuasilineal al que puede expresarse como (8.29)–(8.30) mediante constantes a_{ij} y funciones F y G que tienden a 0 más rápido que los términos lineales,

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad (8.31)$$

y se llama **aproximación lineal**, **primera aproximación** o **sistema linealizado** al sistema lineal con coeficientes constantes que se obtiene al despreciar los términos no lineales:

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \quad (8.32)$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \quad (8.33)$$

Usando la matriz del sistema \mathbf{A} , esta aproximación lineal se escribe como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ en la notación matricial del capítulo 4.

EJERCICIO 8.7 Halle las aproximaciones lineales alrededor de los puntos de equilibrio del péndulo matemático del ejercicio 8.4.

Supondremos que el origen es un punto fijo aislado también del sistema lineal: por tanto, la matriz del sistema es regular,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0, \quad (8.34)$$

y el origen es el único punto de equilibrio de la aproximación lineal, aunque el sistema cuasilineal puede tener otros. (Estudiaremos en el problema 8.3 el caso del sistema lineal con $\det \mathbf{A} = 0$).

EJERCICIO 8.8 Demuestre que las raíces características del origen de la aproximación lineal y, por definición, del sistema cuasilineal son

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{\Delta} \right), \quad (8.35)$$

siendo $\Delta \equiv \operatorname{tr}^2 \mathbf{A} - 4 \det \mathbf{A}$ el discriminante del sistema, y que los vectores propios se obtienen resolviendo los sistemas homogéneos

$$(a_{11} - k_i)x + a_{12}y = 0, \quad (8.36)$$

$$a_{21}x + (a_{22} - k_i)y = 0. \quad (8.37)$$

Compruebe que la divergencia del campo vectorial $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ en el origen (y la de su aproximación lineal por doquier) es precisamente $\operatorname{tr} \mathbf{A}$.

EJERCICIO 8.9 Halle las raíces características del péndulo matemático del ejercicio 8.4.

8.5. Estabilidad lineal

El **primer método de Liapunov** o **método de la estabilidad lineal** consiste en estudiar la estabilidad de la aproximación lineal del sistema no lineal considerado, ya que las conclusiones cualitativas obtenidas para aquélla siguen siendo válidas para el sistema cuasilineal suficientemente cerca del punto de equilibrio, donde los términos no lineales son despreciables, *con alguna excepción*. Iremos discutiendo los distintos casos para el sistema cuasilineal y su primera aproximación.

Consideraremos a menudo como ejemplo el sistema cuasilineal

$$\dot{x} = -x - y - \epsilon xy, \quad (8.38)$$

$$\dot{y} = (1 + r + d)x + (1 + r)y + \epsilon (y^2 - x^2), \quad (8.39)$$

y su primera aproximación, que se obtiene sin más que tomar $\epsilon = 0$.

EJERCICIO 8.10 Demuestre que para el sistema (8.38)–(8.39) tenemos $\det \mathbf{A} = d$, $\text{tr } \mathbf{A} = r$ y que el vector propio correspondiente a cada valor característico $k = (r \pm \sqrt{r^2 - 4d})/2$ es (proporcional a)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ k + 1 \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

8.5.1. Raíces características reales distintas

Si $\Delta > 0$ las dos raíces son reales y distintas, $k_1 > k_2$, por lo que si los vectores propios correspondientes a k_1 y k_2 son, respectivamente,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (8.41)$$

la solución general del sistema lineal es de la forma

$$x = C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}, \quad (8.42)$$

$$y = C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}, \quad (8.43)$$

de forma que

$$\frac{y}{x} = \frac{C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}}{C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}}. \quad (8.44)$$

Hay dos soluciones especiales de la aproximación lineal correspondientes a trayectorias de fase a lo largo de rectas paralelas a los vectores propios:

$$C_2 = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad (8.45)$$

$$C_1 = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}. \quad (8.46)$$

Raíces negativas

Si $\Delta > 0$ y $\det \mathbf{A} > 0$, las dos raíces tienen el mismo signo que $\text{tr } \mathbf{A}$. Por tanto, si $\text{tr } \mathbf{A} < 0$ tendremos $k_2 < k_1 < 0$ y cuando $t \rightarrow \infty$ todas las soluciones (8.42)–(8.43) de la ecuación lineal tienden al origen, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, por lo que el mismo es asintóticamente estable. Además, lo alcanzan con la misma pendiente, ya que de (8.44) se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad (8.47)$$

excepto, claro está, la trayectoria (8.46). Por ello, la forma de las trayectorias cerca del origen es la que puede verse en la figura 8.6 en un caso particular. Cuando las trayectorias cerca de un punto de equilibrio tienen esta estructura geométrica (casi todas las soluciones alcanzan el origen con la misma pendiente) se dice que el punto fijo es un **nodo**. En este caso, el origen es un nodo asintóticamente estable.

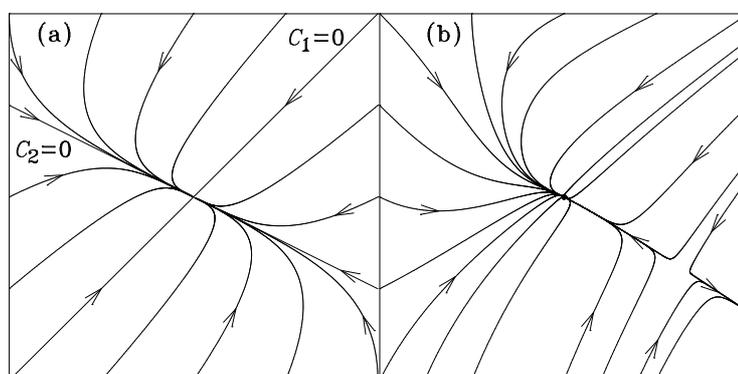


FIGURA 8.6 Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 1$, $r = -5/2$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$.

En la parte derecha de la figura 8.6 puede comprobarse en un ejemplo lo que se demuestra con carácter general: en el caso cuasilineal no hay cambios cualitativos *suficientemente cerca del origen*, que sigue siendo un nodo asintóticamente estable. Esto va a ser característico: las conclusiones para la aproximación lineal se mantienen —al menos en la mayor parte de los casos— cualitativamente idénticas para el sistema no lineal muy cerca del punto crítico, aunque a mayores distancias los términos no lineales se hacen sentir y deforman las trayectorias. En este ejemplo puede incluso observarse (¿donde?) que hay otro punto de equilibrio que estaba ausente en la aproximación lineal.

Raíces positivas

Si $\Delta > 0$, $\det \mathbf{A} > 0$ y $\text{tr } \mathbf{A} > 0$ tendremos $0 < k_2 < k_1$ y cuando $t \rightarrow \infty$ todas las soluciones (8.42)–(8.43) de la aproximación lineal van hacia el infinito y se alejan del origen, que será inestable. Para ver la estructura geométrica del punto inestable, basta darse cuenta de que lo dicho en el anterior caso sigue siendo cierto, pero en el infinito pasado en vez de serlo en el futuro (e intercambiando los índices 1 y 2). Así tenemos, en virtud de (8.44),

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}, \quad \text{si } C_2 \neq 0, \quad (8.48)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad \text{si } C_2 = 0, \quad (8.49)$$

por lo que la geometría seguirá siendo la de la figura 8.6, pero con el sentido de recorrido de las trayectorias invertido e intercambiando las etiquetas $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Se puede demostrar que también será un nodo inestable para el sistema no lineal y su aspecto cualitativo el de la parte derecha de la mencionada figura, salvo por el sentido de recorrido.

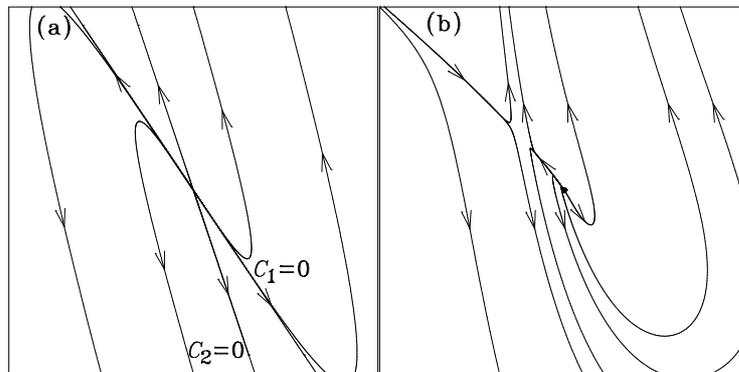


FIGURA 8.7 Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 1$, $r = 5/2$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$.

Raíces con signos opuestos

Si $\Delta > 0$ y $\det \mathbf{A} < 0$, las dos raíces tienen signos opuestos, $k_2 < 0 < k_1$, por lo que la solución particular $C_1 = 0$ tenderá hacia el origen a lo largo de la recta $y/x = y_2/x_2$, que recibe el nombre de **espacio estable**, mientras que la que corresponde a $C_2 = 0$ escapa del origen a lo largo de la recta $y/x = y_1/x_1$, que es el **espacio inestable**. El resto de las soluciones de la ecuación lineal no van hacia el origen, sino que tienden asintóticamente al espacio inestable (estable) en el infinito futuro (pasado), ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \tag{8.50}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}. \tag{8.51}$$

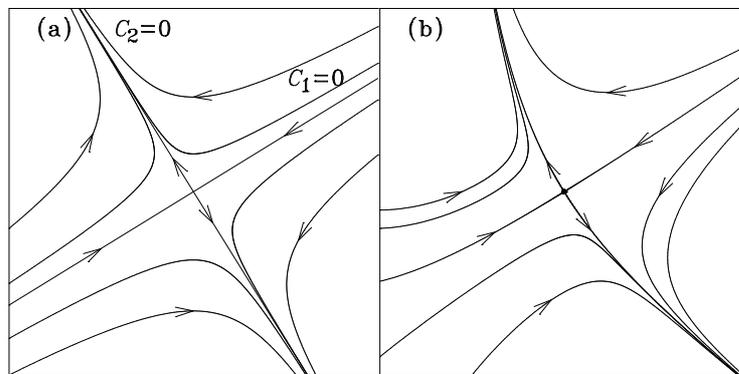


FIGURA 8.8 Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = r = -1$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$.

Como todas las soluciones (8.42)–(8.43), menos las correspondientes a $C_1 = 0$, escapan del origen se trata de un punto de equilibrio inestable, y como hay una dirección estable excepcional

se dice que se trata de un **punto de silla**⁶ o **puerto**⁷. Un ejemplo puede verse en la figura 8.8, que también muestra cómo el sistema cuasilineal sigue teniendo un puerto inestable en el origen; pero ahora las soluciones estable e inestable no son rectas que van hasta el infinito, sino solo tangentes a los correspondientes espacios (y vectores propios) en el origen. Reciben los nombres de **variedad estable** e **inestable**, respectivamente. La variedad estable no es, en general, físicamente realizable porque cualquier perturbación hace que el sistema se aleje de ella y del punto de equilibrio, en vez de tender hacia él; pero juega un papel muy importante en las propiedades cualitativas globales del espacio de fases.

8.5.2. Raíces características complejas

Si $\Delta < 0$ las raíces características forman un par complejo conjugado $k = \alpha \pm i\omega$ con $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A}$ y $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{-\Delta}$ y las soluciones serán, en la aproximación lineal,

$$x = e^{\alpha t} (C_1 x_1 e^{i\omega t} + C_2 x_2 e^{-i\omega t}), \quad (8.52)$$

$$y = e^{\alpha t} (C_1 y_1 e^{i\omega t} + C_2 y_2 e^{-i\omega t}), \quad (8.53)$$

con $C_1 x_1 = \overline{C_2 x_2}$ y $C_1 y_1 = \overline{C_2 y_2}$. Ambas coordenadas aparecen como el producto de una exponencial por un término periódico (véase, más adelante, el ejercicio 8.11). Será, en consecuencia, la exponencial —para ser más precisos el signo de $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A}$ — lo que determine la estabilidad de las soluciones.

Raíces complejas con parte real negativa

Si $\Delta < 0$ y $\operatorname{tr} \mathbf{A} < 0$, tendremos $\alpha < 0$ y, como $e^{\alpha t}$ es decreciente, todas las soluciones (8.52)–(8.53) del sistema lineal tenderán hacia el origen, que será asintóticamente estable, pero no entrarán en él con una dirección prefijada, ya que

$$\frac{y}{x} = \frac{C_1 y_1 \cos \omega t + C_2 y_2 \sin \omega t}{C_1 x_1 \cos \omega t + C_2 x_2 \sin \omega t} \quad (8.54)$$

es periódico y la pendiente cambiará constantemente. Las órbitas tienen la forma de una espiral, por lo que el punto fijo se llama **foco** o **punto espiral** y la forma de las trayectorias puede verse en la figura 8.9 en un caso particular. Una vez más, el sistema cuasilineal tiene el mismo comportamiento cualitativo: el origen es un foco asintóticamente estable, aunque la hélice se deforma al alejarse del mismo y no tiene por qué continuar hasta el infinito.

Raíces complejas con parte real positiva

Si $\Delta < 0$ y $\operatorname{tr} \mathbf{A} > 0$, como $\alpha > 0$ las soluciones (8.52)–(8.53) escapan del origen, que será inestable, y tendrá la estructura de un foco inestable ya que las soluciones tienen en este caso el mismo comportamiento para $t \rightarrow -\infty$ que tenían en el anterior para $t \rightarrow \infty$. También el sistema cuasilineal tiene un foco inestable y la apariencia de las soluciones es del tipo de las de la figura 8.9, pero con el sentido de recorrido invertido.

⁶Este nombre se refiere a una silla de montar. Imagine cómo se mueve una bolita en la misma.

⁷Recuerde la forma de un puerto de montaña.

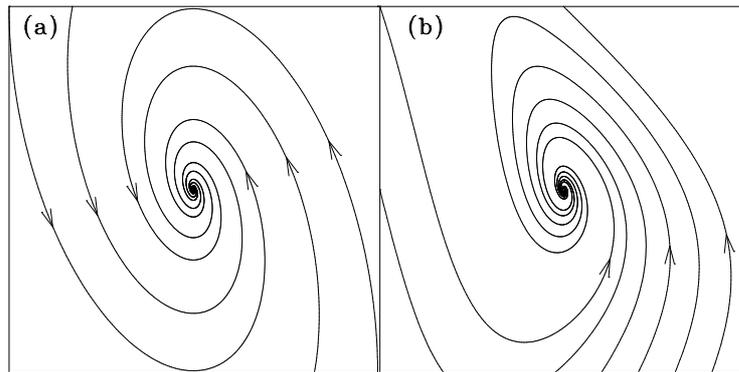


FIGURA 8.9 Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 3$, $r = -1$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$.

Raíces imaginarias puras

Si $\Delta < 0$ y $\text{tr } \mathbf{A} = \alpha = 0$, las soluciones del sistema lineal son

$$x = C_1 x_1 \cos \omega t + C_2 x_2 \sin \omega t, \quad (8.55)$$

$$y = C_1 y_1 \cos \omega t + C_2 y_2 \sin \omega t. \quad (8.56)$$

EJERCICIO 8.11 Demuestre que las ecuaciones (8.55)–(8.56) describen elipses centradas en el origen del plano de fases.

Las soluciones son, por tanto, periódicas y el origen, que es estable, pero no asintóticamente estable, recibe el nombre de **centro** o **vórtice**.

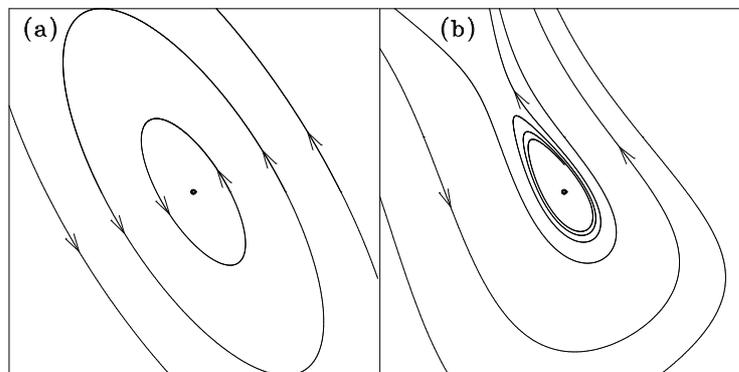


FIGURA 8.10 Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 1$, $r = 0$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$.

Sin embargo, en este caso, el análisis del sistema cuasilineal es más delicado debido a que, como el caso $\alpha = 0$ es justo la frontera entre $\alpha < 0$ y $\alpha > 0$, los términos no lineales, aun siendo pequeños, pueden tener la suficiente importancia como para cambiar su estabilidad y convertirlo bien en un foco asintóticamente estable o bien en un foco inestable, aunque también pueden dejarlo como un centro. En este caso, el análisis de la estabilidad lineal no es concluyente para el sistema cuasilineal y debe utilizarse otro método. En el caso de la figura 8.10 los términos no lineales convierten al centro en un foco inestable y para ver otro ejemplo consideraremos el sistema

$$\dot{x} = -y, \quad (8.57)$$

$$\dot{y} = x - y^n, \quad (8.58)$$

que corresponde a este mismo caso. La aproximación lineal es el sistema (8.9) y tiene como órbitas las circunferencias centradas en el origen (8.10). Como puede verse en la figura 8.11 y demostraremos en el problema 8.38, para $n = 2$ el sistema no lineal sigue teniendo un centro en el origen; pero para $n = 3$ el mismo es un foco asintóticamente estable.

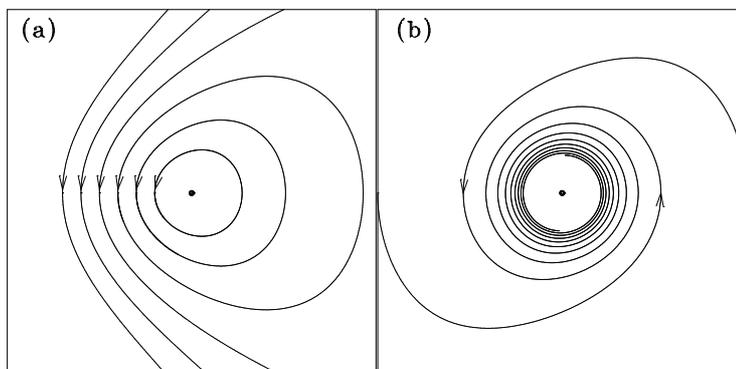


FIGURA 8.11 Espacio de fases de (8.57)–(8.58) con (a) $n = 2$, (b) $n = 3$.

La razón matemática de las dificultades de este caso estriba en el hecho de que el punto de equilibrio es **no hiperbólico**: el espacio generado por los vectores propios correspondientes a valores propios con parte real no nula tiene una dimensión inferior (nula en este caso) a la del espacio de fases. La hiperbolicidad es una condición que interviene en la demostración de muchos resultados, que no son necesariamente ciertos si aquélla no se cumple. En particular, el **teorema de Grobman-Hartman**, que implícitamente hemos estado usando hasta ahora⁸, asegura que un punto fijo hiperbólico tiene la misma estabilidad que el correspondiente a la aproximación lineal, ya que el espacio de fases en sus proximidades es **topológicamente equivalente** al de su aproximación lineal: existe entre ellos un homeomorfismo (una aplicación continua con inverso continuo). En otras palabras: uno es una versión deformada (sin rupturas) del otro. Pero esto no es necesariamente cierto alrededor de puntos no hiperbólicos: si hay algún valor propio con parte real nula, puede cambiar el tipo geométrico del punto y si, además, no hay ninguna parte real positiva, puede incluso cambiar su estabilidad.

8.5.3. Raíces características reales iguales

Si $\Delta = 0$ existe una raíz característica real doble $k_1 = k_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A}$. Además, como $\Delta = 0$ es equivalente a que $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$, hay dos casos posibles.

$$\boxed{a_{12} = a_{21} = 0}$$

En este caso, tenemos $a \equiv a_{11} = a_{22} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A}$ y las dos ecuaciones lineales están desacopladas:

$$\dot{x} = ax, \quad \dot{y} = ay. \quad (8.59)$$

Las soluciones

$$x = C_1 e^{at}, \quad y = C_2 e^{at} \quad (8.60)$$

son semirrectas que van hacia el origen o provienen del mismo: $y/x = C_2/C_1$. Por tanto si $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 2a < 0$, todas las soluciones entran en el origen, pero con distintas pendientes, por lo que

⁸Véase, por ejemplo, el texto de Walter [30].

el mismo es un punto asintóticamente estable en forma de **nodo propio** o **nodo en estrella**. Si, por el contrario, si $\text{tr } \mathbf{A} = 2a > 0$, todas las soluciones van al infinito y, de hecho, salen en el infinito pasado del origen, que es un nodo propio inestable. Un ejemplo es el sistema

$$\dot{x} = -x - \epsilon xy, \quad (8.61)$$

$$\dot{y} = -y + \epsilon (y^2 - x^2), \quad (8.62)$$

cuyo espacio de fases se ve en la figura 8.12.

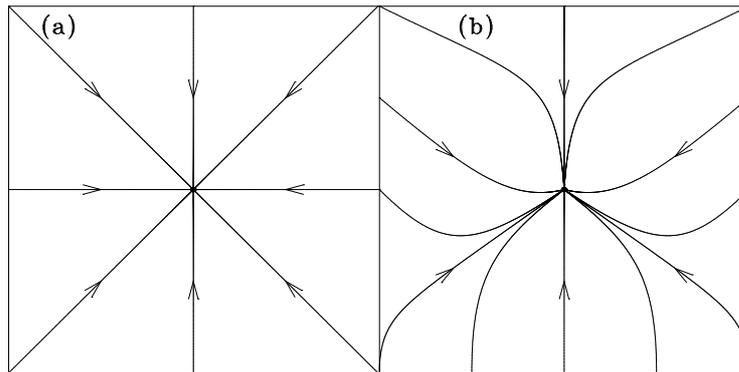


FIGURA 8.12 Espacio de fases de (8.61)–(8.62) con (a) $\epsilon = 0$ y (b) $\epsilon = 1$.

La estabilidad del sistema cuasilineal es la misma (es decir, inestabilidad para $\text{tr } \mathbf{A} > 0$ y estabilidad asintótica para $\text{tr } \mathbf{A} < 0$), pero la forma del nodo puede variar, ya que, aunque puede seguir siendo un nodo propio, como en el caso de la figura 8.12, los términos no lineales pueden convertir al mismo en un nodo impropio (en que casi todas las soluciones entran o salen del mismo en la misma dirección) o en un foco. La razón es, de nuevo, que al tratarse de un caso límite los términos no lineales pueden tener influencia, aunque en este caso como el sistema es hiperbólico la estabilidad no cambia.

$$\boxed{|a_{12}| + |a_{21}| \neq 0}$$

En este caso no hay dos vectores propios para la primera aproximación, y la otra solución debe incluir términos del tipo te^{kt} .

EJERCICIO 8.12 Demuestre que en este caso si \mathbf{x}_1 es un vector propio, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = k\mathbf{x}_1$, existe una segunda solución linealmente independiente de la forma $(t\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) e^{kt}$ y la solución general es

$$x = [C_1 x_1 + C_2 (x_1 t + x_2)] e^{kt}, \quad (8.63)$$

$$y = [C_1 y_1 + C_2 (y_1 t + y_2)] e^{kt}. \quad (8.64)$$

¿Por qué no es esto cierto si $a_{12} = a_{21} = 0$?

Está claro que si $2k = \text{tr } \mathbf{A} < 0$, todas las soluciones tienden hacia el origen, que será asintóticamente estable, y, además, todas ellas entran en el punto fijo con la misma pendiente (de hecho, en la dirección del vector propio \mathbf{x}_1 , ya que $y/x \rightarrow y_1/x_1$ cuando $t \rightarrow \infty$). Se trata, por tanto, de un **nodo degenerado** asintóticamente estable. El sistema cuasilineal tendrá un punto fijo asintóticamente estable que puede seguir siendo un nodo, o deformarse a un foco debido a la influencia de los términos no lineales.

Si $2k = \text{tr } \mathbf{A} > 0$, todas las soluciones de la aproximación lineal tienden hacia el infinito y el origen será inestable. Como, $y/x \rightarrow y_1/x_1$ cuando $t \rightarrow -\infty$, será un nodo inestable, mientras que el sistema cuasilineal tendrá un nodo inestable o un foco inestable.

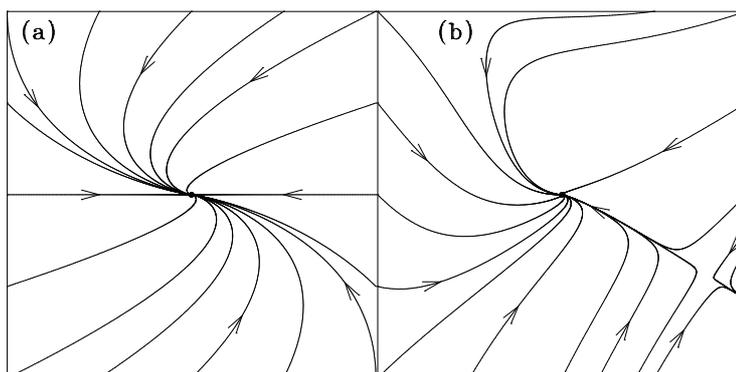


FIGURA 8.13 Espacio de fases de (8.38)–(8.39) con $d = 1, r = -2$ y (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$.

8.5.4. Resumen: Clasificación de los puntos fijos

La clasificación de los puntos fijos aislados de un sistema cuasilineal plano está resumida en la figura 8.14, donde no se han incluido los casos excepcionales $\Delta = 0$, que acabamos de analizar y que, en el caso no lineal, se reducen a veces a los casos vecinos, aunque también pueden corresponder a un nodo en estrella o a uno degenerado. Tampoco se ha considerado el caso en que $\det \mathbf{A} = 0$, que estudiaremos en la aproximación lineal en el problema 8.3 y que para el sistema no lineal es no hiperbólico. Sí aparece, por el contrario, el otro caso no hiperbólico, $k = \pm i\omega$, que es en la práctica mucho más frecuente ya que, por ejemplo, todos los sistemas mecánicos conservativos tienen tales puntos en los mínimos del potencial, como veremos más adelante en el apartado 8.7.

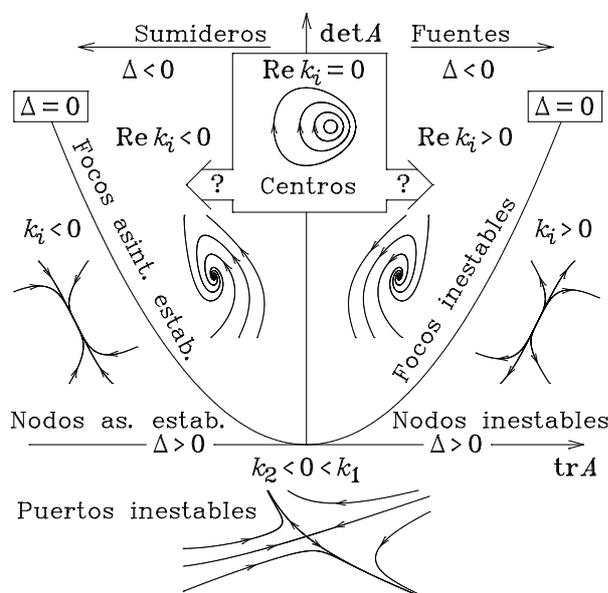


FIGURA 8.14 Clasificación de los puntos fijos.

Como resumen de la figura 8.14 digamos que

- si todas las partes reales de las raíces características son negativas, el punto fijo es un atractor, es decir, asintóticamente estable,

- basta con que haya una raíz característica con parte real positiva para que el punto de equilibrio sea inestable, y
- si la mayor de las partes reales es nula, el estudio de la aproximación lineal no es suficiente para decidir la estabilidad del sistema cuasilineal: hace falta más información sobre el mismo.

Este resumen resulta ser válido en cualquier dimensión, aunque la variedad de formas geométricas del flujo en las proximidades del punto de equilibrio aumenta con aquélla. Damos a continuación enunciado preciso del resultado, cuya demostración puede hallarse, por ejemplo, en el texto de Walter [30].

Teorema 8.1 (Liapunov) *Sea un sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.65)$$

que tiene un punto de equilibrio aislado

$$f_i(t, x_1^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.66)$$

Si el sistema es estacionario en la primera aproximación alrededor de ese punto:

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_j^*) + R_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.67)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|R_i(t, x_1, \dots, x_n)|}{r} = 0, \quad r \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^*)^2}, \quad (8.68)$$

entonces:

- *si todos los valores propios de la matriz (a_{ij}) tienen partes reales negativas, el punto de equilibrio es asintóticamente estable, y*
- *si al menos un valor propio tiene parte real positiva, el punto de equilibrio es inestable.*

Nótese que suponemos que la matriz de la aproximación lineal —que si las funciones son regulares no es sino la matriz jacobiana $(\partial f_i / \partial x_j)$ evaluada en el punto fijo— es constante. Es importante recordar que, si la raíz característica con máxima parte real es imaginaria pura, este método no es concluyente para el sistema no lineal y debe recurrirse a alguna de las técnicas discutidas en los siguientes apartados.

8.6. Trayectorias de fases

En algunos casos sencillos, a partir de la ecuación diferencial (8.7) puede calcularse con relativa facilidad la ecuación de las trayectorias de fases (es decir una integral primera que no dependa de la variable independiente) y, en tal caso, su análisis permite decidir la estabilidad de los puntos de equilibrio (u otros conjuntos invariantes).

Por ejemplo, el origen del sistema

$$\dot{x} = x^4 - 2xy^3, \quad \dot{y} = 2x^3y - y^4 \quad (8.69)$$

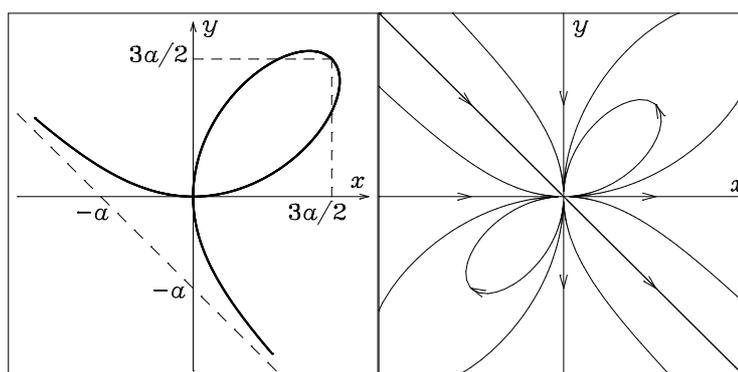


FIGURA 8.15 Hoja de Descartes y espacio de fases del sistema (8.69).

no es hiperbólico (¿por qué?), pero la ecuación de las trayectorias fue resuelta en el problema 2.8: $x^3 + y^3 = 3axy$. Cada trayectoria es una **hoja de Descartes**⁹, cuya gráfica 8.15 se obtiene tras comprobar que admite como asíntota la recta $x + y + a = 0$ y que es tangente a los ejes coordenados en el origen, o usando sus ecuaciones paramétricas: $x = 3au/(1+u^3)$, $y = 3au^2/(1+u^3)$. El espacio de fases aparece en la parte derecha de la mencionada figura.

Con la ecuación de las trayectorias no sabemos cuál es su sentido de recorrido, ya que se ha eliminado la dependencia de t . No obstante, puede a menudo determinarse aquél sin mayor dificultad estudiando el sistema original en algunos puntos especialmente simples, ya que el sentido de recorrido variará de forma continua (donde el sistema dinámico sea regular) y, por ejemplo, solo puede invertirse en los puntos de equilibrio. En este ejemplo basta analizar lo que ocurre en los ejes cartesianos y las diagonales:

Lugar geométrico	\dot{x}	\dot{y}
$x = 0$	0	$-y^4 < 0$
$y = 0$	$x^4 > 0$	0
$y = x$	$-x^4 < 0$	$x^4 > 0$
$y = -x$	$3x^4 > 0$	$-3x^4 < 0$

Esta tabla es suficiente para concluir que los sentidos son los de la figura y que, por tanto, el origen es inestable, aunque de un modo diferente al de los puntos de equilibrio inestables vistos al estudiar la estabilidad lineal.



⁹ **René Descartes** (31-03-1596, La Haye —ahora se llama Descartes—, Francia; 11-02-1650, Estocolmo, Suecia). Las noticias del arresto de Galileo le hicieron decidir no publicar su primer tratado importante: *Le Monde, ou Traité de la Lumière*. En su famoso *Discours de la méthode* defendió el uso de las matemáticas como forma de adquirir conocimientos seguros y uno de sus apéndices, *La Géométrie*, estableció la conexión entre álgebra y geometría que llamamos geometría cartesiana y supuso la introducción de los sistemas de referencia. Otros aspectos de sus teorías sobre la mecánica expuestos en distintas obras eran, sin embargo, erróneos. Además de la hoja, estudió los óvalos cartesianos, la cicloide, la espiral equiangular y el tridente de Newton.

EJERCICIO 8.13 Discuta la estabilidad del origen del sistema

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x^2 \quad (8.70)$$

que tiene un punto de equilibrio no hiperbólico en el origen (¿por qué?), resolviendo la ecuación diferencial de las trayectorias.

8.7. Sistemas mecánicos unidimensionales

Vamos a considerar un partícula que se mueve en una dimensión bajo la acción combinada de una fuerza conservativa $F(x) = -V'(x)$ y una de rozamiento proporcional a la velocidad $R = -\gamma\dot{x}$, con $\gamma \geq 0$. Si como se ha dicho antes se toma $m = 1$, la ecuación del movimiento es

$$\ddot{x} = -V'(x) - \gamma\dot{x}, \quad (8.71)$$

que puede escribirse como un sistema si utilizamos la velocidad $v = \dot{x}$

$$\dot{x} = P(x, v) \equiv v, \quad (8.72)$$

$$\dot{v} = Q(x, v) \equiv -V'(x) - \gamma v. \quad (8.73)$$

Este sistema no será lineal excepto en el caso del oscilador armónico (amortiguado) que corresponde a una energía potencial elástica $V = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$.

EJERCICIO 8.14 Compruebe que la energía mecánica

$$E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x), \quad (8.74)$$

se conserva si $\gamma = 0$ y decrece monótonamente en caso contrario, ya que

$$\dot{E} = -\gamma v^2. \quad (8.75)$$

Halle la divergencia del campo vectorial $P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ para comprobar que es conservativo (disipativo) si $\gamma = 0$ ($\gamma > 0$).

Los puntos de equilibrio vienen dados por las condiciones $v = 0$ y $V'(x^*) = 0$, es decir, por la anulación de la fuerza resultante y el reposo inicial, lo que solo sucede si la partícula está quieta en un extremo local del potencial. Veamos qué nos dice el primer método de Liapunov sobre la estabilidad del punto $(x^*, 0)$.

EJERCICIO 8.15 Compruebe que la aproximación lineal de la ecuación (8.71) alrededor del punto de equilibrio $x = x^*$, con $V(x^*) = 0$, es la siguiente:

$$\ddot{x} = -V''(x^*)(x - x^*) - \gamma\dot{x}. \quad (8.76)$$

Escriba esta ecuación como un sistema bidimensional y compruebe explícitamente que tiene como matriz la matriz jacobiana del sistema no lineal (8.72)–(8.73) evaluada en x^* . Concluya que las raíces características del punto de equilibrio son

$$k_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-V''(x^*) + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (8.77)$$

Dado que $\gamma > 0$, la estabilidad del punto de equilibrio es como sigue en función del tipo de extremo en x^* :

Máximo local Si $V''(x^*) < 0$, las raíces características tienen signos opuestos, $k_2 < 0 < k_1$, por lo que los máximos son siempre puertos inestables.

Mínimo local Si $V''(x^*) > 0$, la ecuación (8.76) es la del oscilador armónico amortiguado, y sus raíces características son

- complejas con parte real negativa, si el rozamiento es moderado ($\gamma^2 < 4V''(x^*)$), por lo que el punto de equilibrio será un foco asintóticamente estable, o
- reales y negativas, si el sistema está sobreamortiguado ($\gamma^2 > 4V''(x^*)$), por lo que el punto fijo será un nodo asintóticamente estable. (Con amortiguamiento crítico ($\gamma^2 = 4V''(x^*)$), se tiene un foco o un nodo asintóticamente estable).

Punto de inflexión o extremo de orden superior Si $V''(x^*) = 0$, las raíces características son $0, -\gamma$; el punto no es hiperbólico y el método de la aproximación lineal no permite extraer conclusiones.

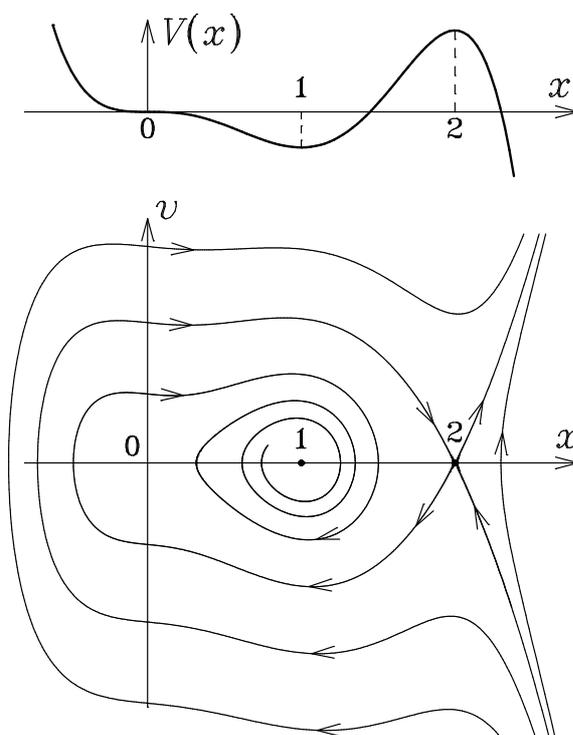


FIGURA 8.16 Energía potencial y espacio de fases del sistema (8.78) para $\gamma = 0,1$.

EJERCICIO 8.16 Compruebe que la figura 8.16 refleja correctamente la energía potencial y el espacio de fases del sistema dinámico

$$\ddot{x} = x^2(x-1)(x-2) - \gamma\dot{x}. \quad (8.78)$$

Estas conclusiones siguen inalterables para los máximos en ausencia de rozamiento: los máximos locales son siempre puertos inestables, con una variedad estable normalmente irrealizable físicamente, ya que tienen dos raíces características de signos opuestos.

Pero, si $\gamma = 0$, el caso de los mínimos (y el de los puntos de inflexión y extremos de orden superior para todos los valores de γ) corresponde a una parte real máxima nula por lo que el estudio de aproximación lineal no es concluyente, a menos claro que el sistema sea realmente lineal (un oscilador armónico), en cuyo caso el mínimo es un centro estable, pero no asintóticamente estable. Para analizar estos casos no hiperbólicos necesitamos más información, que nos viene proporcionada en este caso por la energía mecánica, cuya ley de conservación

$$\frac{1}{2}v^2 + V(x) = E, \quad (8.79)$$

se sigue de (8.75) —o de (8.7), que aplicado a (8.72)–(8.73) da $dv/dx = -V'(x)/v$ —. Esta integral primera independiente del tiempo es, en sistemas mecánicos conservativos, la ecuación de las trayectorias de fases, lo que nos permite desarrollar en este contexto preciso la idea, que habíamos introducido en el apartado 8.6, de usar dicha ecuación para discutir la estabilidad. Cerca de un extremo, $V'(x^*) = 0$, podemos aproximar el potencial por su desarrollo de Taylor truncado, $V(x) \approx V(x^*) + \frac{1}{2}V''(x^*)(x - x^*)^2 + \dots$. En consecuencia, la ecuación de la trayectoria será

$$v^2 + V''(x^*)(x - x^*)^2 = 2[E - V(x^*)] + O[(x - x^*)^3], \quad (8.80)$$

que es la ecuación de una hipérbola para máximos ($V''(x^*) < 0$), lo que corresponde al hecho de que los mismos son puertos, y la de una elipse para mínimos ($V''(x^*) > 0$), lo que hace esperar que éstos sean centros estables para todo sistema mecánico conservativo¹⁰. De hecho, muy cerca de un mínimo cuadrático la energía potencial es una parábola, que corresponde a un oscilador armónico y cuyo espacio de fases es el de la figura G.5. El mismo resultado puede comprobarse

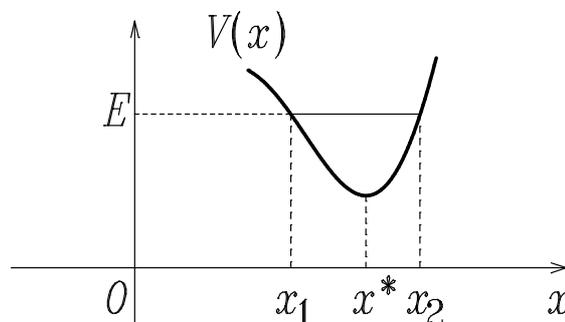


FIGURA 8.17 Diagrama de energía en las proximidades de un mínimo.

mediante el razonamiento habitual en mecánica: cerca del mínimo el diagrama de energía es como se ve en la figura 8.17, que nos dice que el sistema está oscilando alrededor del punto de equilibrio x^* entre los puntos de retroceso, $x_1 < x < x_2$, sin tender hacia el punto de equilibrio ni alejarse, en promedio, del mismo: es un centro estable, pero no asintóticamente estable.

En el caso de un punto de inflexión, $V''(x^*) = 0$, hay que ir un orden más lejos en el desarrollo para obtener

$$v^2 + \frac{1}{3}V'''(x^*)(x - x^*)^3 = 2[E - V(x^*)] + O[(x - x^*)^4], \quad (8.81)$$

¹⁰Puede encontrarse en [29] una demostración rigurosa de que, si las trayectorias son elipses en la aproximación cuadrática, también las auténticas trayectorias son cerradas en un entorno del punto de equilibrio. Además, este resultado, que se conoce con el nombre de **teorema de Lagrange** o **principio de Lagrange**, será demostrado de forma directa, en un contexto más general, en el apartado 8.8. La demostración rigurosa del mismo parece ser debida a Dirichlet. Véase la referencia [18].

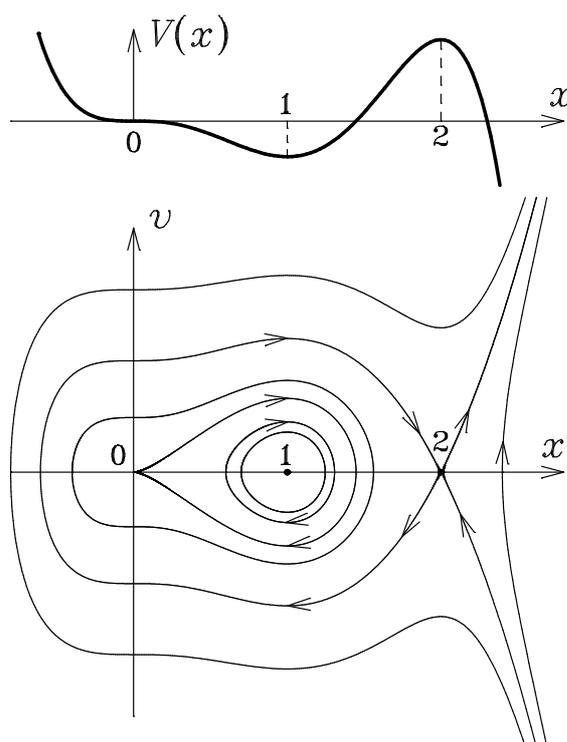


FIGURA 8.18 Energía potencial y espacio de fases del sistema (8.78) para $\gamma = 0$.

que es la ecuación de una parábola semicúbica. Este tipo de punto se llama **cúspide**, es siempre inestable y su forma se muestra en el origen de la figura 8.18, donde también puede verse el espacio de fases de (8.78) cerca de un máximo y de un mínimo.

En este caso conservativo las órbitas se mantienen siempre a energía constante y son cerradas cuando están acotadas. Hay un caso particular interesante en la figura 8.18: una de las variedades inestables del máximo es también variedad estable, es decir, una órbita que sale del puerto y vuelve a entrar en él. Se llama **conexión homoclínica** a una órbita de este tipo. (También se llama **separatriz**, porque separa órbitas cualitativamente diferentes: periódicas y no acotadas en este caso). Cuando γ deja de ser nulo la energía mecánica disminuye constantemente y tiende a la de un mínimo, o a $-\infty$, por lo que puertos y cúspides siguen siendo del mismo tipo (inestables), mientras que los centros se estabilizan más y se convierten en focos (o, incluso, en nodos) asintóticamente estables. Así se pasa de la figura 8.18 a la 8.16. En la figura 8.19, que también corresponde al último caso, vemos las variedades estable (es decir, la solución que entra en el punto de equilibrio en el límite $t = \infty$) e inestable (que sale de allí en $t = -\infty$) del punto cúspide inestable que hay en el origen, así como la gráfica de la energía mecánica decreciente.

En el caso del péndulo amortiguado la ecuación del movimiento es

$$ml^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (8.82)$$

EJERCICIO 8.17 Demuestre que si se elige como unidad de tiempo $\sqrt{l/g}$ y se introduce $\gamma \equiv (c/mg)\sqrt{l/g}$, la ecuación del péndulo en variables adimensionales es

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \sin \theta = 0. \quad (8.83)$$

La energía potencial es $V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$ y tiene un mínimo en $\theta = 0$ y un máximo en $\theta = \pm\pi$ (tomaremos siempre $-\pi \leq \theta \leq \pi$), como se muestra en la parte superior de la figura 8.20.

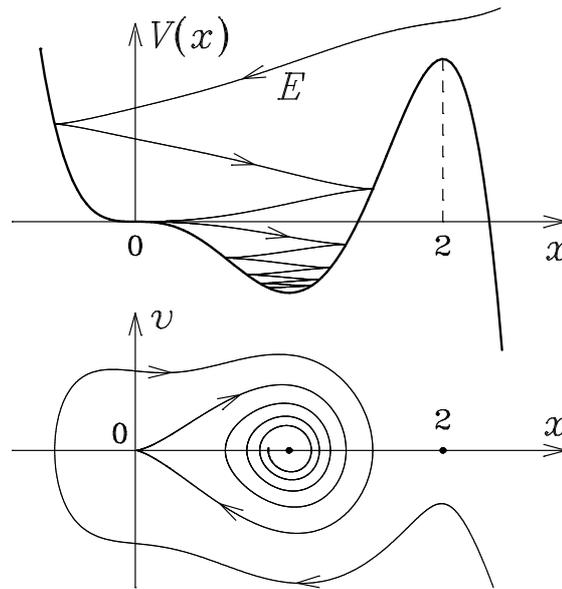


FIGURA 8.19 Variedades estable e inestable del punto cúspide.

Cuando no hay rozamiento, $\gamma = 0$, el mínimo será un centro estable, pero no asintóticamente estable, y el máximo un puerto inestable con una conexión homoclínica que es a la vez la variedad estable y la inestable. Como con todos los mínimos cuadráticos, alrededor de $\theta = 0$ recuperamos el espacio de fases del oscilador armónico G.5.

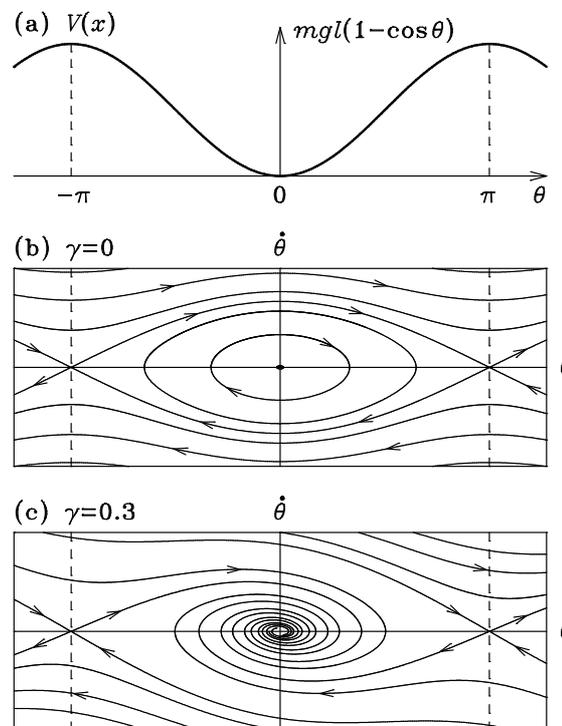


FIGURA 8.20 Energía potencial y espacio de fases del péndulo.

EJERCICIO 8.18 ¿A qué corresponde físicamente esta órbita homoclínica?

Cuando el rozamiento se tiene en cuenta¹¹, el origen $\theta = \dot{\theta} = 0$ aumenta su estabilidad y se convierte en un foco (o un nodo) asintóticamente estable que atrae casi todas las órbitas, mientras que $\theta = \pm\pi$ sigue siendo un puerto inestable.

EJERCICIO 8.19 ¿Qué órbitas no son atraídas por el atractor en $\theta = \dot{\theta} = 0$? ¿A qué corresponden desde el punto de vista físico?

En sistemas dinámicos más generales no disponemos de la utilísima información proporcionada por la energía mecánica, pero Liapunov demostró que a veces puede hallarse una función más general que nos da información suficiente para decidir la estabilidad de un punto de equilibrio, incluso cuando falla la estabilidad lineal. Esa función generaliza algunas de las propiedades de la energía mecánica.

EJERCICIO 8.20 Suponga que un punto de equilibrio aislado del sistema (8.72)–(8.73) se ha trasladado al origen, $x^* = 0$, y que se toma allí el origen de la energía potencial: $V(0) = 0$. Demuestre que la energía mecánica

$$E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x) \quad (8.84)$$

definida en el espacio de fases es definida positiva (negativa) en un entorno de un mínimo (máximo) aislado del potencial,

$$E(0, 0) = 0, \quad E(x, v) > 0, \quad \text{si } (x, v) \neq (0, 0) \quad (8.85)$$

y que su derivada es semidefinida negativa

$$\frac{dE}{dt}(x, v) \leq 0. \quad (8.86)$$

8.8. Funciones de Liapunov

El **segundo método** —o **método directo**— de Liapunov, consiste en encontrar una función $U(x, y)$ definida y regular en un entorno del punto de equilibrio con propiedades adecuadas.

Teorema 8.2 (Liapunov) *Supongamos que el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio aislado del sistema dinámico (8.5)–(8.6) y que existe una función continuamente diferenciable $U(x, y)$ definida en un entorno del origen, donde es definida positiva:*

$$U(0, 0) = 0, \quad U(x, y) > 0, \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0). \quad (8.87)$$

Entonces,

1. Si su derivada a lo largo del flujo es semidefinida negativa,

$$\frac{dU}{dt}(x, y) \equiv \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) P(x, y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) Q(x, y) \leq 0, \quad (8.88)$$

el origen es un punto de equilibrio estable (podiera resultar también asintóticamente estable, pero ello no está garantizado por esta función U).

¹¹Véase, también, el apartado 8.8.4.

2. Si la derivada es nula,

$$\frac{dU}{dt}(x, y) = 0, \quad (8.89)$$

el origen es un punto de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable.

3. Si la derivada es definida negativa,

$$\frac{dU}{dt}(0, 0) = 0, \quad \frac{dU}{dt}(x, y) < 0, \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad (8.90)$$

el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

4. Si la derivada es definida positiva,

$$\frac{dU}{dt}(0, 0) = 0, \quad \frac{dU}{dt}(x, y) > 0, \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad (8.91)$$

el origen es un punto de equilibrio inestable.

8.8.1. Observaciones

Una función que satisfaga uno de estos conjuntos de hipótesis se llama **función de Liapunov**. Nótese que cambiando U por $-U$ se obtiene un resultado idéntico intercambiando los adjetivos «positiva» y «negativa». Además, puesto que el origen es un punto de equilibrio, se cumple siempre $dU/dt(0, 0) = 0$, pero la condición $U(0, 0) = 0$ no es esencial: basta que U tenga un mínimo aislado en el punto de equilibrio para que la trasladada $U(x, y) - U(0, 0)$ sea una función de Liapunov. Por tanto, también podemos enunciar el anterior teorema como sigue.

1. Si en el punto de equilibrio la función U tiene un mínimo o un máximo aislado y la derivada dU/dt un extremo de tipo contrario, el punto de equilibrio es estable.
2. Si la función U es una integral primera y tiene un máximo o un mínimo aislado en el punto de equilibrio, el mismo es estable, pero no asintóticamente estable.
3. Si los extremos de la función y la derivada son aislados y de tipo contrario (uno máximo y otro mínimo), el equilibrio es asintótico.
4. Si la función y la derivada tienen ambos un máximo (o ambos un mínimo) aislado, el equilibrio es inestable.

El teorema se extiende de forma obvia a sistemas con más de dos grados de libertad y puede enunciarse con hipótesis menos estrictas, pero más difíciles de comprobar en la práctica. (Véase, por ejemplo, el texto de Elsgoltz [3]).

La idea fundamental del teorema es una generalización directa de lo que se hace con los diagramas de energía; pero, como ahora una de las variables dependientes no es necesariamente la derivada de la otra, habrá que considerar una dimensión adicional. Supongamos que una trayectoria de fases comienza muy cerca del mínimo de U , como se muestra en la figura 8.21. Si U no crece (porque su derivada no es positiva) la solución no se alejará del mínimo y el equilibrio será estable. Si U es una constante del movimiento, en promedio ni se acercará ni se alejará del origen: el equilibrio será estable, pero no asintóticamente estable. Si la derivada es negativa, U decrecerá monótonamente y la solución tenderá hacia el punto de equilibrio, que será asintóticamente estable. Si la derivada es positiva, la función crecerá y la solución se alejará del origen, que será inestable, aunque haya comenzado muy cerca del mismo.

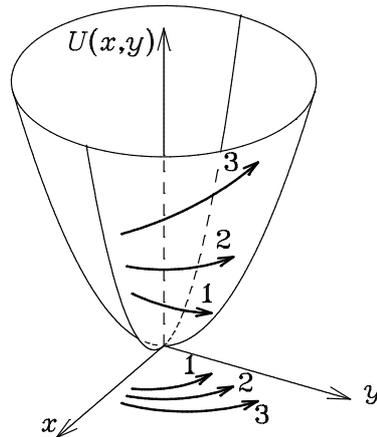


FIGURA 8.21 Trayectorias de fases y evolución de los correspondientes valores de U .

8.8.2. Demostración del teorema

La demostración rigurosa del teorema se basa en la continuidad de U y su derivada. En el primer caso, debemos probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que toda solución $(x(t), y(t))$ cuyas condiciones iniciales estén dentro del círculo de radio δ centrado en el origen, C_δ , nunca cruce la circunferencia concéntrica de radio ϵ , C_ϵ . Como U es continua y definida positiva, admitirá una cota inferior positiva $0 < M \leq U(x, y)$ a lo largo de la circunferencia C_ϵ . Como, además, es nula en el origen, habrá alrededor del mismo un círculo C_δ en cuyo interior $U(x, y) = |U(x, y) - U(0, 0)| < M$. Si elegimos la condición inicial dentro de C_δ , el valor inicial $U(x(t_0), y(t_0))$ será inferior a M y como la derivada a lo largo de la solución es negativa, U no crece y nunca podrá llegar a M ni a cualquiera de los otros valores que toma en la circunferencia C_ϵ que, por tanto, no será alcanzada. Nótese que suponemos implícitamente que C_ϵ está dentro del dominio de definición de U ; si no fuera así bastaría asignarle el δ de un ϵ suficientemente pequeño como para que esa hipótesis se cumpla.

Está claro que también en el segundo caso se aplica lo visto para el primero. Además, para cada solución que comienza en la región $0 < |(x, y)| \leq \delta$ se cumple $U(x(t_0), y(t_0)) = K$, con una constante $K > 0$ adecuada que depende de la solución. Como la función U es continua y definida positiva, puede hallarse un radio $\eta > 0$ tal que para $|(x, y)| \leq \eta$ se cumpla $U \leq K/2$. Como a lo largo de la trayectoria tenemos $U = K$, la solución no cruzará la circunferencia C_η y no tenderá, por tanto, hacia el punto de equilibrio.

Puesto que U es definida positiva, para demostrar la estabilidad asintótica del tercer caso, bastará probar que $U(t) = U(x(t), y(t)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Fuera del origen la función U es decreciente, ya que $dU/dt < 0$, y está acotada inferiormente por el valor nulo que toma en $(0, 0)$. Por tanto, tiende hacia algún límite no negativo: $U(t) \geq L = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) \geq 0$. Para demostrar el resultado, procederemos por reducción al absurdo suponiendo que $L > 0$. Como $U(0, 0) = 0$, podemos hallar un círculo de radio $\eta > 0$ centrado en el origen en cuyo interior $U(x, y) < L$. Puesto que dU/dt es continua y definida negativa está acotada superiormente por un valor negativo $dU/dt \leq -K < 0$ en el anillo $\eta \leq |(x, y)| \leq \epsilon$ donde está contenida completamente la solución para $t \geq t_0$ en virtud del resultado demostrado antes para el primer caso. Por tanto,

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dU}{dt} dt \leq U(t_0) - K(t - t_0) \rightarrow -\infty, \quad (8.92)$$

cuando $t \rightarrow \infty$, lo que contradice la hipótesis de que U es definida positiva.

En el cuarto caso debemos demostrar que, dados un $\epsilon > 0$ y un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, hay alguna solución que comienza dentro de C_δ y cruza C_ϵ . Debido a la continuidad, tendremos que hay una cota $M \geq U(x, y)$ para $|(x, y)| \leq \epsilon$. Por otro lado, puesto que la derivada es continua y definida positiva, tendremos que para $\delta/2 \leq |(x, y)| \leq \epsilon$ hay una cota positiva $0 < K \leq dU/dt$. Por tanto, si una solución comienza en el anillo $\delta/2 < |(x, y)| < \delta$, entonces U crecerá monótonamente y la solución acabará por cruzar C_ϵ .

8.8.3. Ejemplos

Analicemos el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = -2xy, \quad (8.93)$$

$$\dot{y} = x^2 - y^3. \quad (8.94)$$

El origen es un punto de equilibrio aislado, pero la aproximación lineal es nula y no nos da información. No existe ningún método general para hallar funciones de Liapunov, pero siempre puede ensayarse —sin ninguna garantía de éxito— una función con la estructura

$$U = x^{2n} + ay^{2m}, \quad (8.95)$$

que hace fácil ver si U es definida¹². En este caso particular se obtiene

$$\dot{U} = -4nx^{2n}y + 2may^{2m-1}(x^2 - y^3) \quad (8.96)$$

y podemos eliminar los dos términos con potencias impares de y (que no tienen signo definido) eligiendo $n = m = 1$ y $a = 2$. Por tanto vemos que $U = x^2 + 2y^2$ es definida positiva y su derivada $\dot{U} = -4y^4$ semidefinida negativa y, en consecuencia, el origen es un punto de equilibrio estable. Como la derivada no es definida, esta función de Liapunov no nos permite decidir si, además, es asintóticamente estable o no. Para ello haría falta otra función de Liapunov, pero como ya se ha indicado antes son excepcionales los casos en que podemos construirlas. El análisis numérico de la figura 8.22 muestra que, aunque la función de Liapunov hallada no permite demostrarlo, el origen es en este caso no solo estable sino también asintóticamente estable ya que todas las trayectorias entran en el origen paralelas al eje y .

Es fácil de entender lo que sucede en este ejemplo si hacemos uso de unos razonamientos cualitativos elementales. Si la condición inicial se elige en el eje y , tendremos $x = \dot{x} = 0$ y el punto se moverá a lo largo de dicho eje y hacia el origen, ya que $|y|$ irá decreciendo debido a que en tal caso y y su derivada $\dot{y} = -y^3$ son de signos opuestos. Fuera del eje vertical, si el sistema comienza en el semiplano $y \leq 0$, se tiene que $\dot{y} > 0$ y y irá creciendo hasta que el punto llegue al semiplano $y > 0$, de donde no volverá al inferior, ya que en el eje $y = 0$ se cumple que $\dot{y} = x^2 > 0$. Cuando el punto está en el semiplano $y > 0$, los valores x y \dot{x} tienen signo contrario y, por ello, $|x|$ irá decreciendo: el punto tiende hacia el semieje vertical positivo, y al llegar muy cerca del mismo se tendrá $\dot{y} \approx -y^3 < 0$, por lo que se moverá hacia el origen.

EJERCICIO 8.21 Use la función de Liapunov $U = 2x^2 + y^2$ para discutir la estabilidad del origen de los siguiente sistemas:

$$\dot{x} = -x^3 + xy^2, \quad \dot{y} = -2x^2y - y^3, \quad (8.97)$$

$$\dot{x} = -y + 2x^3, \quad \dot{y} = 2x + 3y^5. \quad (8.98)$$

Compruebe que el método de la estabilidad lineal no es de utilidad en estos dos casos.

¹²También puede ensayarse una función cuadrática de x e y más general y usar el resultado del problema 8.12. En algunos casos pueda usarse la física del problema para tratar de encontrar la función de Liapunov adecuada.

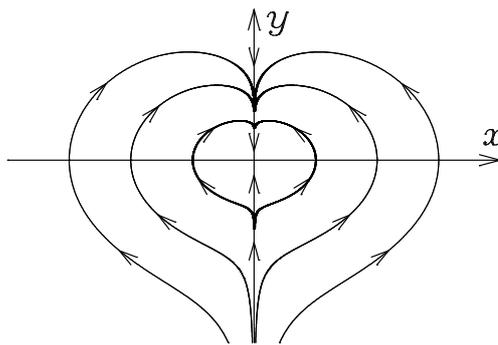


FIGURA 8.22 Espacio de fases del sistema (8.94).

8.8.4. Sistemas mecánicos unidimensionales disipativos

Debe notarse que en el caso particular de los sistemas mecánicos disipativos (8.71) los mínimos son asintóticamente estables si $\gamma > 0$ no como consecuencia del método directo de Liapunov —ya que la derivada de la función de Liapunov que es la energía mecánica es solo semidefinida negativa—, sino debido a su primer método. Supongamos que la función $V(x)$ tiene un mínimo aislado en el punto $x = x^*$ y que en el sistema mecánico algo más general

$$\ddot{x} = -V'(x) - g(x, \dot{x})\dot{x} \quad (8.99)$$

la función $g(x, \dot{x})$ es positiva y solo se anula en el punto $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$. La derivada de la energía mecánica es, por tanto, semidefinida negativa: $\dot{E} = -g(x, \dot{x})\dot{x}^2 \leq 0$. Como consecuencia del teorema de Liapunov el citado punto es estable; pero, puesto que salvo en el punto de equilibrio se tiene $\dot{E} < 0$, desde un punto de vista físico esperamos que la energía mecánica decrezca monótonamente y que la solución tienda hacia el punto de equilibrio, que será asintóticamente estable. Puede verse en [18] o en [30] la demostración de que de hecho así sucede. Este resultado es consecuencia de la ecuación de la energía mecánica de un sistema mecánico: con otras funciones de Liapunov, sin embargo, de una derivada semidefinida negativa no se sigue necesariamente la estabilidad asintótica.

EJERCICIO 8.22 Discuta la estabilidad de los osciladores no lineales

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x}^{2n+1} + \omega x = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.100)$$

cuando la constante γ es positiva. ¿Qué pasa si $\gamma < 0$?

8.8.5. Sistemas mecánicos unidimensionales conservativos

Una función de Liapunov del segundo tipo es una integral primera y, como vimos en el apartado 4.1.1, proporciona la ecuación de las trayectorias de fases. El ejemplo más importante, aunque no el único, es el de los sistemas mecánicos conservativos (8.15) que hemos analizado antes: si hay un mínimo aislado de la energía potencial en x^* , el punto $(x^*, 0)$ del espacio de fases corresponde a un mínimo de la energía mecánica y, como ésta es una constante del movimiento, el punto será un centro estable.

El análisis geométrico que para este caso particular hicimos en el apartado 8.7 puede extenderse directamente al caso general. Para simplificar la notación supondremos que la función U tiene un máximo o un mínimo en el punto $(0, 0)$ y también que en el mismo elegimos $U(0, 0) = 0$.

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio, la ecuación de la trayectoria de fases que corresponde al valor $U = K$ es

$$U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(0, 0)y^2 + \dots = K. \quad (8.101)$$

Por hipótesis, el extremo que hay en $(0, 0)$ es un mínimo o un máximo; por tanto, se cumple la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(0, 0) \end{vmatrix} > 0. \quad (8.102)$$

Ahora bien, si esto se cumple, la ecuación cuadrática

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(0, 0)y^2 = K, \quad (8.103)$$

que debe ser una buena aproximación a la de las trayectorias de fases suficientemente cerca del punto de equilibrio, es la de una elipse. Por consiguiente, esperamos que el punto de equilibrio sea un centro, que es precisamente lo que demuestra el segundo caso del teorema de Liapunov.

8.9. Centros no lineales

Los puntos de equilibrio no hiperbólicos que más a menudo aparecen en la práctica son los que corresponden a centros en la aproximación lineal. Las raíces características son imaginarias y, como vimos en el apartado 8.5.2, el punto de equilibrio del sistema no lineal puede también ser un foco asintóticamente estable o inestable; e incluso a veces —como en el caso del ejercicio 8.21— puede encontrarse una función de Liapunov apropiada que demuestra que es de tal tipo. Pero en este apartado queremos analizar los centros no lineales: ¿cómo puede probarse que lo que es un centro en la aproximación lineal es del mismo tipo en el sistema completo?

Hemos visto un caso en el anterior apartado: como consecuencia del teorema de Liapunov, si una integral primera del sistema tiene un mínimo o un máximo aislado en el punto de equilibrio, este último es un centro. Eso es lo que sucede en los mínimos de la energía potencial de sistemas mecánicos conservativos y en algunos otros casos, como muestra el siguiente ejemplo.

EJERCICIO 8.23 Halle las raíces características del origen del sistema

$$\dot{x} = -y + x^2, \quad \dot{y} = x - 2xy \quad (8.104)$$

y concluya que el mismo es un centro en la aproximación lineal. Pruebe que la función

$$U = x^2 + y^2 - 2x^2y \quad (8.105)$$

es una integral primera y tiene un mínimo en el origen. ¿Cómo serán las trayectorias de fases muy próximas al origen?

En los siguientes apartados estudiaremos otros casos habituales de centros no lineales.

8.9.1. Sistemas dinámicos conservativos

Por definición en los sistemas dinámicos conservativos se conserva el área del espacio de fases. Por tanto, en tales sistemas los focos y nodos están excluidos, porque en sus proximidades el área del espacio de fases crece cuando son inestables y disminuye cuando son asintóticamente estables. Como en la aproximación lineal de este tipo de sistemas se tiene $\text{tr } \mathbf{A} = \partial P/\partial x(0, 0) + \partial Q/\partial y(0, 0) = 0$, el punto de equilibrio solo puede pertenecer a una de las siguientes categorías, tanto en la aproximación lineal como en el sistema completo:

1. Si $\det \mathbf{A} > 0$, un centro estable.
2. Si $\det \mathbf{A} < 0$, un puerto inestable.
3. Cuando $\det \mathbf{A} = 0$, el punto de equilibrio de la aproximación lineal no es aislado (véase el problema 8.3) y hay que usar otro tipo de método para estudiar el equilibrio del sistema completo.

EJERCICIO 8.24 Demuestre que el sistema (8.104) es conservativo. Compruebe que el espacio de fases es el de la figura 8.23.

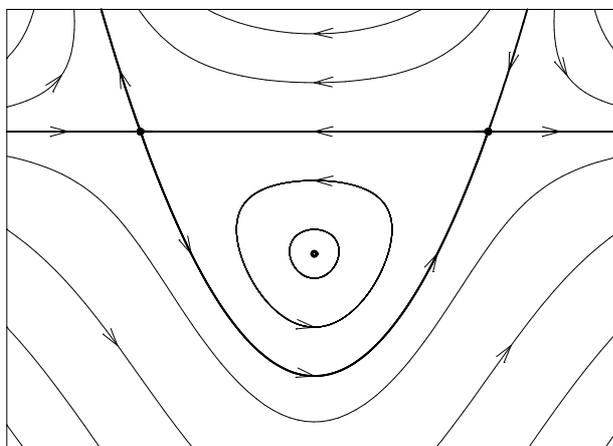


FIGURA 8.23 Espacio de fases del sistema (8.104).

8.9.2. Sistemas dinámicos hamiltonianos

Puesto que de acuerdo con el teorema de Liouville los sistemas hamiltonianos son conservativos, en los mismos los centros lineales son siempre centros del sistema completo.

EJERCICIO 8.25 Demuestre que el sistema (8.104) es hamiltoniano.

8.9.3. Sistemas dinámicos reversibles

Analicemos el siguiente sistema mecánico unidimensional cuando γ es constante:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x}^{2n} + \omega^2 x = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.106)$$

El origen de este oscilador no lineal es un centro lineal, ya que la aproximación lineal es el oscilador armónico.

EJERCICIO 8.26 Demuestre que el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x - \gamma y^{2n} \quad (8.107)$$

asociado a la ecuación (8.106) no es conservativo (ni, por tanto, tampoco hamiltoniano) y que no puede usarse la energía mecánica como función de Liapunov.

Para analizar la estabilidad de este punto de equilibrio no hiperbólico usaremos la simetría del sistema; de hecho, el sistema (8.107) es invariante frente a inversión temporal: si hacemos el cambio $(t, x, y) \rightarrow (-t, x, -y)$, el propio sistema no cambia. Por tanto, cada trayectoria de fases tiene una «gemela», que se obtiene eligiendo el sentido de recorrido contrario tras hacer la reflexión de la primera alrededor del eje x . Está claro que alrededor de un foco el espacio de fases

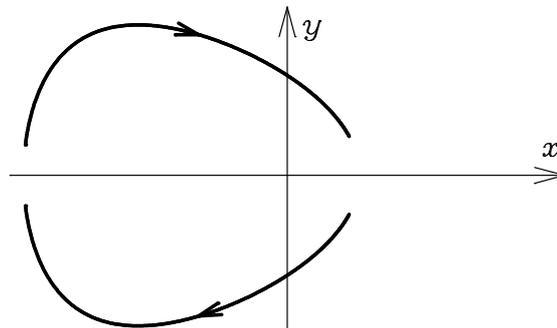


FIGURA 8.24 Una trayectoria de fases de (8.107) y su «gemela».

no puede tener este tipo de simetría; por tanto, los focos están excluidos y si en la aproximación lineal hay un centro lo mismo pasará en el sistema completo.

En un contexto general, supongamos que una transformación $\mathbf{x}' = \mathcal{R}(\mathbf{x})$ definida en el espacio de fases es tal que aplicada dos veces restituye el punto original: $\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$. Si el sistema dinámico es invariante frente a la transformación $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (-t, \mathcal{R}(\mathbf{x}))$, decimos que es **reversible** y los puntos que son centros en la aproximación lineal son del mismo tipo para el sistema completo. (Véase el texto [28]).

EJERCICIO 8.27 Demuestre que el sistema (8.104) es reversible. ¿Cuál es la simetría que presenta el espacio de fases?

Como caso particular, vemos de nuevo que los mínimos de la energía potencial del sistema mecánico conservativo $\ddot{x} = F(x)$ corresponden a centros, porque dichos sistemas, además de hamiltonianos y conservativos, son reversibles.

8.10. Ciclos límite

Las soluciones periódicas, que en el espacio de fases dan lugar a órbitas cerradas, no son extrañas. Por ejemplo, una partícula clásica atrapada en un pozo de potencial describe una órbita periódica alrededor del mínimo. En estos casos de oscilaciones alrededor del punto de equilibrio tenemos toda una familia de soluciones periódicas, pero también es posible la existencia de un **ciclo límite**, que es por definición una órbita periódica aislada, es decir, tal que ninguna condición de un entorno suficientemente pequeño de ella dé lugar a otra órbita cerrada. Veamos un ejemplo: sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = \lambda x - y - x(x^2 + y^2), \quad (8.108)$$

$$\dot{y} = x + \lambda y - y(x^2 + y^2). \quad (8.109)$$

Este sistema dinámico es un ejemplo académico y, por ello, mucho más simple de lo que aparenta.

EJERCICIO 8.28 Compruebe que el sistema (8.108)–(8.109) se escribe en coordenadas polares como sigue:

$$\dot{r} = \lambda r - r^3, \quad (8.110)$$

$$\dot{\varphi} = 1. \quad (8.111)$$

Vemos, por tanto, que el sistema se desacopla en estas coordenadas y la evolución angular es trivial, $\varphi = t - t_0$. Comencemos estudiando la estabilidad del punto de equilibrio $(x, y) = (0, 0)$, que corresponde al punto fijo $r = 0$ de (8.110).

EJERCICIO 8.29 Demuestre que los exponentes característicos del origen de (8.108)–(8.109) son $k = \lambda \pm i$, mientras que el de (8.110) es $k = \lambda$.

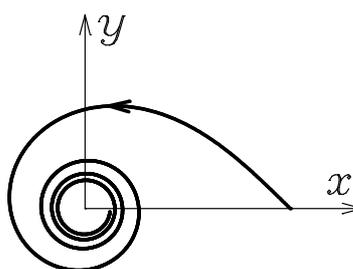


FIGURA 8.25 Espacio de fases de (8.108)–(8.109) para $\lambda = -0,01$.

Por ambos caminos encontramos que el origen es un foco asintóticamente estable para $\lambda < 0$ —como se ve en la figura 8.25— y un foco inestable para $\lambda > 0$, es decir, que tiene lugar una bifurcación —llamada **bifurcación de Hopf**¹³— para $\lambda = 0$ al cambiar la estabilidad del punto de equilibrio.



¹³ **Heinz Hopf** (19-11-1894, Breslau, Alemania —hoy se llama Wrocław y está en Polonia—; 3-06-1971, Zollikon, Suiza). Trabajó especialmente en topología algebraica. Estudió campos vectoriales y halló una fórmula para la curvatura integral. También extendió el teorema del punto fijo de Lefschetz, estudió las clases de homotopía y definió el invariante que lleva su nombre.

EJERCICIO 8.30 ¿Qué tipo de punto de equilibrio es el origen de (8.108)–(8.109) para $\lambda = 0$?

Pero en esa bifurcación ha pasado algo más ya que la ecuación radial (8.110) ha pasado de tener un punto fijo a tener dos: $r = 0$ que existe siempre y $r = \sqrt{\lambda}$ que nace justo cuando $\lambda = 0$, como se indica en su diagrama de bifurcación en la figura 8.26, donde el punto asintóticamente estable aparece en línea continua y el inestable a trazos. En $\lambda = 0$ la desestabilización de $r = 0$ coincide con el nacimiento de un nuevo punto asintóticamente estable.

EJERCICIO 8.31 Halle el exponente característico del punto de equilibrio $r = \sqrt{\lambda}$ de la ecuación (8.110) y demuestre que es asintóticamente estable. Utilice el método gráfico esbozado en el apartado 8.1 para comprobar por otra vía el diagrama de bifurcación de la figura 8.26.

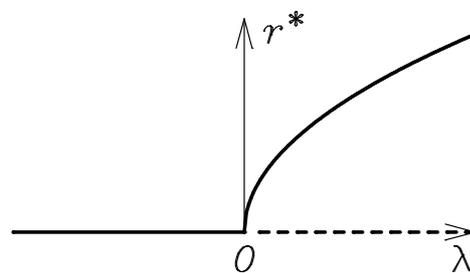


FIGURA 8.26 Diagrama de bifurcación de la ecuación (8.110).

Ahora bien, el punto fijo $r = \sqrt{\lambda}$ de la ecuación (8.110) es una órbita cerrada (circular, ya que $x^2 + y^2 = \lambda$) y, por tanto, periódica, del sistema bidimensional (8.108)–(8.109). Como, además, es aislada, se trata de un ciclo límite.

Como $r = \sqrt{\lambda}$ es asintóticamente estable, también lo será el ciclo límite $x^2 + y^2 = \lambda$ que resultará ser un atractor unidimensional, como se ve en la figura 8.27.

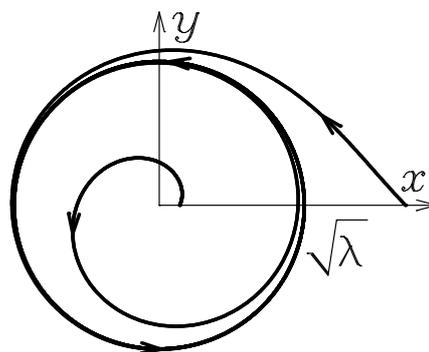


FIGURA 8.27 Espacio de fases de (8.108)–(8.109) para $\lambda = 1/2$.

EJERCICIO 8.32 Halle la solución explícita de (8.110) y demuestre que todas las soluciones menos una (¿cuál?) tienden hacia el ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$.

Como veremos en el problema 8.16, es posible tener ciclos límites inestables (que repelen trayectorias de su entorno), e incluso semiestables, es decir, que atraen a las trayectorias que están suficientemente cerca en su interior y repelen a las próximas por el exterior, o al revés.

Existe una teoría análoga a la de la aproximación lineal de Liapunov para ciclos límite llamada **teoría de Floquet**, pero el cálculo de los exponentes de Floquet, que son el análogo de los exponentes característicos, es mucho más difícil en la práctica, salvo por el hecho de que uno siempre es nulo: el que corresponde a la dirección tangente al ciclo. En el sistema trivial (8.108)–(8.109) este exponente nulo corresponde a la ecuación $\dot{\varphi} = 1$ que describe, también, la evolución a lo largo del ciclo mientras que el otro es -2λ (¿por qué?) y corresponde a la dirección radial.

Mencionaremos un justamente famoso teorema que, esencialmente, asegura que en sistemas autónomos bidimensionales no puede ocurrir más que lo ya visto: la solución puede tender hacia un punto fijo (que puede ser el infinito), o ser periódica, o tender hacia una solución periódica.

Teorema 8.3 (Poincaré-Bendixson) *Sea una región compacta (cerrada y acotada) \mathcal{R} del plano que no contiene ningún punto crítico del sistema dinámico (8.5)–(8.6). Si una trayectoria permanece en \mathcal{R} para todo $t \geq t_0$, o bien es cerrada (periódica) o bien tiende hacia una trayectoria cerrada. En cualquier caso hay en \mathcal{R} una trayectoria periódica.*

Una demostración de este resultado puede encontrarse en el libro de Hirsch y Smale [19], por ejemplo.

Para terminar este apartado, consideraremos la **ecuación generalizada de Liénard** que es un modelo general de oscilador que incluye los osciladores lineales y el de van der Pol y que tiene la siguiente estructura:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (8.112)$$

Si definimos

$$F(x) = \int_0^x f(u) du, \quad G(x) = \int_0^x g(u) du, \quad (8.113)$$

el **teorema de Levinson-Smith** —que también se conoce con el nombre de **teorema de Liénard** y cuya demostración puede encontrar el lector interesado en el texto de Simmons [8]— asegura que si

- f es par y con derivada continua,
- existe una constante $a > 0$ tal que
 - para $0 < x < a$, $F(x) < 0$,
 - para $x > a$, $F(x)$ es positiva, monótona creciente y $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$,
- g es impar, $g(x) > 0$ para $x > 0$ y tiene derivada continua, y
- $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \infty$,

entonces la ecuación generalizada de Liénard (8.112) tiene una única solución periódica, que encierra al origen, y todas las demás soluciones, con excepción del punto fijo $x = \dot{x} = 0$ claro, tienden en espiral hacia ella.

Un ejemplo menos trivial de ciclo límite lo vimos en el capítulo 7 al estudiar el oscilador de van der Pol (7.35). Lo podemos observar, junto con algunas órbitas que a él tienden, en la figura 8.28 para un valor de ϵ demasiado grande como para que el estudio perturbativo de la sección 7.4.2 sea directamente aplicable: su existencia se demuestra usando el teorema que acabamos de ver.

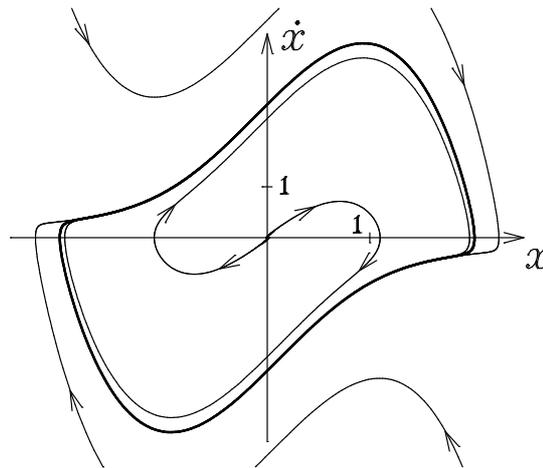


FIGURA 8.28 El ciclo límite del oscilador de van der Pol para $\epsilon = 2$.

EJERCICIO 8.33 Compruebe que la ecuación de van der Pol (7.35) satisface, para $\epsilon > 0$, las hipótesis del teorema de Levinson-Smith, por lo que tiene un ciclo límite asintóticamente estable.

8.11. Más dimensiones...

El teorema de Poincaré y Bendixson acaba esencialmente el programa de clasificación cualitativa de espacios de fases bidimensionales debido al primero de dichos autores; pero ¿qué pasa en sistemas dinámicos con tres (o más) dimensiones? Es fácil de imaginar que pueden aparecer soluciones (aisladas o no, atractores o inestables) con dos o más períodos; pero, como mostraron el trabajo pionero de Poincaré y, sobre todo, los desarrollos de los últimos treinta años, la variedad dinámica es infinitamente superior a partir de tres dimensiones y el fascinante fenómeno del caos determinista puede hacer acto de presencia.

En el apartado 8.10 una bifurcación de Hopf desestabilizaba un punto de equilibrio del sistema (8.108)–(8.109) al tiempo que nacía un solución periódica asintóticamente estable (un ciclo límite), es decir, un atractor puntual era sustituido por otro unidimensional y periódico. Una segunda bifurcación de Hopf puede desestabilizar el ciclo límite y hacer aparecer un atractor bidimensional con dos períodos. En la figura 8.29 vemos un tramo de una órbita del sistema

$$\dot{x} = x(a - b + z + d(1 - z^2)) - cy, \quad (8.114)$$

$$\dot{y} = y(a - b + z + d(1 - z^2)) + cx, \quad (8.115)$$

$$\dot{z} = az - (x^2 + y^2 + z^2), \quad (8.116)$$

con $a = 2,01$, $b = 3$, $c = 0,25$ y $d = 0,2$. Las proyecciones paralelas a los ejes y , x y z se ven en las partes (a), (b) y (c) de la figura, mientras que (d) muestra una proyección a lo largo de la diagonal del primer octante. En todos esos casos la proyección permite la representación bidimensional de soluciones de un sistema dinámico tridimensional. En (e) se usa un método alternativo —llamado **sección de Poincaré**— que consiste en representar los puntos de corte de la solución con una superficie dada, que en este caso es el plano $y = 0$. Un observación

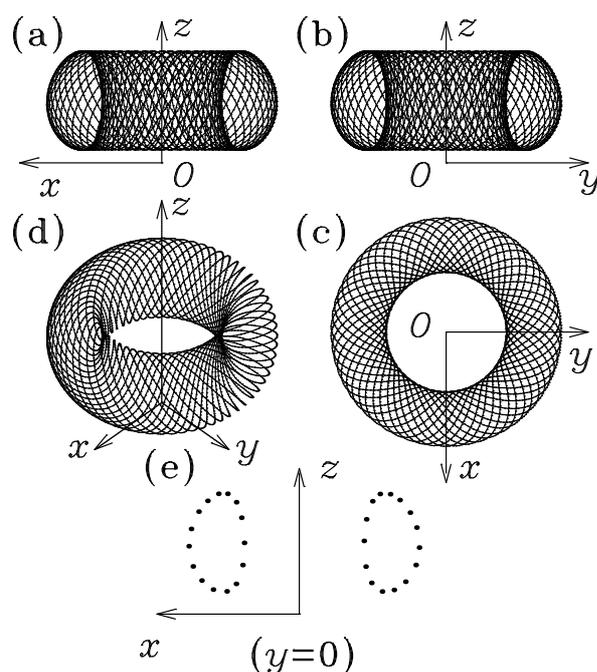


FIGURA 8.29 Proyecciones y sección de Poincaré del sistema (8.114)–(8.116).

atenta de la figura 8.29 permite convencerse de que, tras el transitorio, la órbita se enrolla en una superficie bidimensional cerrada que puede entenderse como la superficie externa de una rosquilla, es decir, lo que en topología se llama un **toro**. Los cortes de ese toro con el plano $y = 0$ son dos circunferencias (topológicas, es decir, curvas cerradas que pueden obtenerse por deformación, sin ruptura, de una circunferencia ordinaria). En la órbita dibujada en la figura 8.29 se ha omitido un transitorio inicial para permitir que el sistema haya tenido tiempo de llegar tan cerca del atractor que la parte representada esté a todos los efectos prácticos sobre el mismo. Cambiando las condiciones iniciales y esperando un tiempo para que la órbita se halle en el atractor se obtiene otra curva cualitativamente equivalente: no es igual, pero se enrolla de forma análoga en la misma superficie. El atractor es la superficie toroidal y no una única órbita, a diferencia de lo que ocurría en atractores de dimensiones 0 y 1. El propio atractor bidimensional no es una solución —las soluciones son curvas unidimensionales—, pero comparte con puntos de equilibrio y ciclos límite el carácter de **conjunto invariante**, ya que toda solución que tenga un punto en común con él está para siempre (y desde siempre) en él.

Una órbita que cae a un ciclo límite se convierte en (aproximadamente) periódica en cuanto el transitorio ha decaído. Algo parecido pasa con una órbita que va a un atractor como el de la figura 8.29, pero ahora tendrá dos períodos: el tiempo que necesita el sistema para dar una vuelta alrededor de cada una de las secciones principales del toro. Se dice que el movimiento es **biperiódico**. Si los dos períodos son conmensurables, es decir, si su cociente es un número racional $T_1/T_2 = p/q$, la órbita será periódica y cerrada ya que tiene al menos el período $qT_1 = pT_2$. En el caso genérico, sin embargo, los dos períodos serán inconmensurables y la órbita en lugar de llegar a cerrarse exactamente recubrirá densamente el toro, es decir, pasará tan cerca como se quiera de cualquier punto del mismo. Al igual que hay ciclos límites inestables y semiestables, también existen toros bidimensionales inestables y semiestables.

Si el espacio de fases tiene dimensión cuatro, puede haber conjuntos invariantes tridimensionales. Por ejemplo puede haber toros tridimensionales que contienen órbitas triperiódicas. En un

espacio de dimensión alta (o infinita) puede haber movimientos multiperiódicos con gran número de períodos. De hecho éste era el escenario de Landau¹⁴, quien creía que en el movimiento de los fluidos —descritos por ecuaciones en derivadas parciales, que tienen espacios de fases de dimensión infinita— sucesivas bifurcaciones de Hopf iban excitando más y más modos produciendo la transición desde el régimen laminar al turbulento. Pero hoy día sabemos que todo esto no es necesario para tener evolución complicada. . .

8.12. . . y caos determinista

De hecho, basta tener dimensión tres para que un sistema dinámico autónomo no lineal pueda presentar alguno o varios de los comportamientos que se recogen con el nombre de **caos determinista**. El ejemplo más famoso es el del sistema de Lorenz:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (8.117)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz, \quad (8.118)$$

$$\dot{z} = xy - bz, \quad (8.119)$$

del que la figura 8.30 recoge las tres proyecciones cartesianas y otra a lo largo de la recta cuyos ángulos de Euler son $\theta = 60^\circ$ y $\varphi = 30^\circ$, para $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 27$.

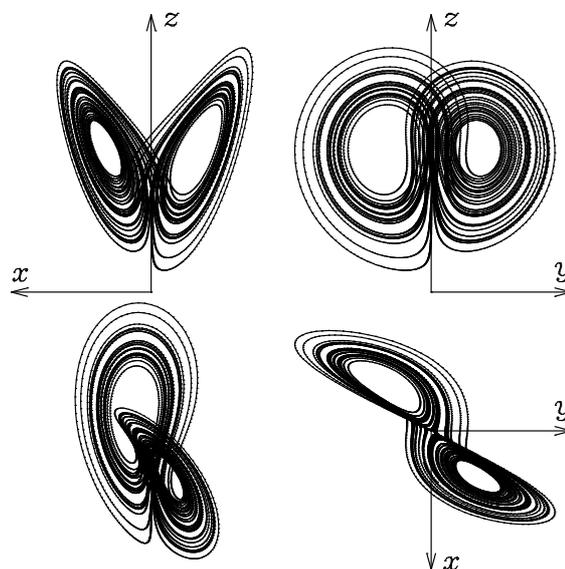


FIGURA 8.30 Proyecciones de una órbita del atractor de Lorenz.

La órbita no se repite y se halla, tras un corto transitorio, en un complicado conjunto invariante: el **atractor de Lorenz**, que no solo es **extraño** porque tiene estructura fractal —para ser



¹⁴ **Lev Davidovich Landau** (22-01-1908, Baku, Rusia; 1-04-1968, Moscú). Su trabajo, que incluye importantes contribuciones teóricas en física de bajas temperaturas, en física atómica y nuclear, y en física de plasmas, tuvo una gran influencia. Recibió el premio Nobel de Física de 1962 por su teoría sobre la superfluidad del helio líquido.

más precisos de conjunto de Cantor¹⁵ — sino que es **caótico** ya que soluciones inicialmente muy próximas se separan exponencialmente. Esto puede apreciarse en la figura 8.31 donde se muestra la evolución de la variable x para las dos órbitas correspondientes a las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (3, 97, 0)$ y $(x_0, y_0, z_0) = (3, 0001, 97, 0)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 25$. Como las condiciones iniciales son extremadamente próximas, las dos órbitas son inicialmente indistinguibles con la resolución finita de la figura, pero la diferencia entre ellas crece de forma rapidísima y cuando ha pasado un intervalo de tiempo relativamente corto ($t \approx 14$) son completamente diferentes, aunque siguen compartiendo algo: ambas se encuentran en el atractor.

8.12.1. Dependencia sensible de las condiciones iniciales

El crecimiento exponencial de la distancia entre soluciones muy próximas es la propiedad que suele tomarse como definición de caos determinista y recibe el nombre de **dependencia sensible de las condiciones iniciales**. La explosión de los errores inevitables en la determinación de las condiciones iniciales (o en la realización de cálculos numéricos) es el obstáculo práctico que la naturaleza matemática de los sistemas caóticos impone a la predicción del futuro de esos sistemas, que, no obstante, siguen siendo completamente deterministas ya que satisfacen un teorema de existencia y unicidad. Por ello, aunque en principio el futuro puede calcularse por adelantado con toda precisión, los errores son inevitables y su crecimiento exponencial arruina la predicción tras un (corto o largo) intervalo de tiempo. El propio Lorenz acuñó el pintoresco nombre de **efecto mariposa** para describir este fenómeno, al indicar que las mejores predicciones meteorológicas, incluso las que pudieran hacerse en el futuro con los mejores medios técnicos, podrían verse arruinadas en un plazo más o menos largo por la perturbación introducida por el aleteo de uno de estos simpáticos insectos.

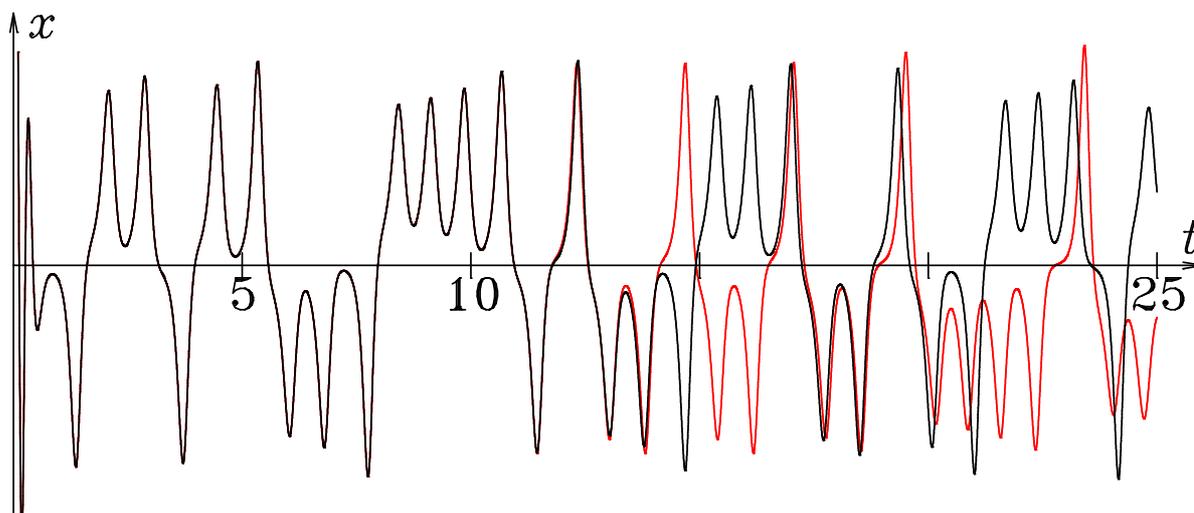


FIGURA 8.31 Evolución de dos soluciones inicialmente muy próximas.

Nótese que la separación entre trayectorias es exponencial solo cuando ambas están muy próximas, ya que todas las órbitas se mantienen, tras el transitorio, en el atractor que es un conjunto



¹⁵ **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (3-03-1845, San Petersburgo, Rusia; 6-01-1918, Halle, Alemania). Fundó la teoría de conjuntos y fundamentó rigurosamente la noción de infinito con su teoría de los números transfinitos. Demostró por primera vez que los números reales no son numerables y que casi todos los números son trascendentes. También trabajó sobre series trigonométricas.

invariante, por lo que la distancia no puede crecer más allá del diámetro del mismo.

8.12.2. Exponente de Liapunov

Si se repitiera la figura 8.30, que corresponde a las primeras de las anteriormente mencionadas condiciones iniciales, utilizando otros valores iniciales obtendríamos una figura cualitativamente idéntica, con una órbita que se mantiene en el mismo conjunto, pero los detalles —como por ejemplo el tiempo que cada vez se mantiene en uno de los dos lóbulos— serían completamente distintos. El atractor es invariante: sabemos que —a todos los efectos prácticos, aunque no exactamente— el sistema se encontrará rápidamente en él; lo difícil en la práctica es saber en cuál de sus puntos estará exactamente. Si la distancia entre órbitas infinitesimalmente próximas evoluciona en promedio como $\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| \approx ke^{\lambda t}$, el coeficiente λ es el (máximo) **exponente de Liapunov**. El sistema es caótico si λ es positivo. El exponente de Liapunov proporciona una medida cuantitativa del caos ya que $1/\lambda$ es el tiempo característico en que se pierde la memoria de las condiciones iniciales que dieron lugar a una órbita.

EJERCICIO 8.34 Hállese el máximo exponente de Liapunov del péndulo (8.83) cuando $\gamma = 0$, $0 < \gamma < 2$ y $\gamma > 2$.

8.12.3. Transformación del panadero

Aunque el sistema de Lorenz tiene una estructura matemática aparentemente sencilla, existe un ejemplo más artificial que permite comprender mejor uno de los mecanismos fundamentales del caos: el sistema de Rössler que se escribe como

$$\dot{x} = -y - z, \quad (8.120)$$

$$\dot{y} = x + by, \quad (8.121)$$

$$\dot{z} = b + (x - a)z \quad (8.122)$$

y que estudiaremos cuando $a = 4,5$ y $b = 0,2$. Una órbita típica puede verse en la figura 8.32 donde se recogen las tres proyecciones cartesianas y otra a lo largo de la dirección $(\theta, \varphi) = (59^\circ, -41^\circ)$. También en este caso vemos una órbita irregular, no periódica, que se mantiene en un subconjunto del espacio de fases tridimensional. De hecho observamos que una parte importante del tiempo está cerca del plano (x, y) donde la dinámica será aproximadamente la correspondiente a tomar $z = 0$ en las ecuaciones (8.120)–(8.121):

$$\dot{x} = -y, \quad (8.123)$$

$$\dot{y} = x + by. \quad (8.124)$$

EJERCICIO 8.35 Demuestre que la órbita de (8.123)–(8.124) es una espiral de radio creciente.

Esto explica cómo se mueve el sistema cerca del plano $z = 0$ en una espiral hacia fuera, hasta que cerca del semieje positivo x el valor de x es lo suficientemente grande como para hacer $\dot{z} > 0$ en (8.122). Entonces z empieza a aumentar hasta que, bastante antes de llegar al semieje negativo x , $\dot{z} = b + (x - a)z$ se hace negativo y z comienza a decrecer de forma que la órbita vuelve a las cercanías del plano $z = 0$. Cerca de la espiral $z \approx 0$ y durante los tramos

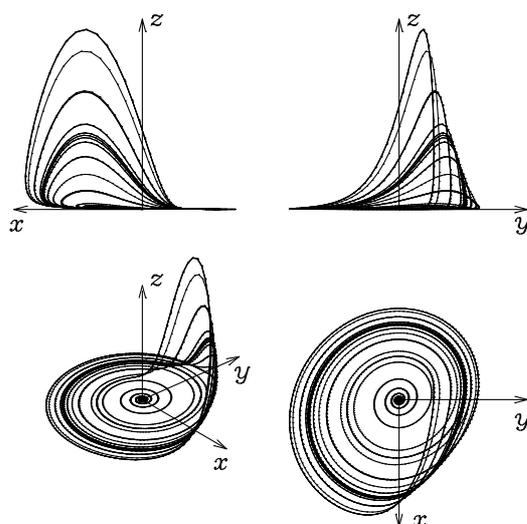


FIGURA 8.32 Proyecciones de una órbita del atractor de Rössler.

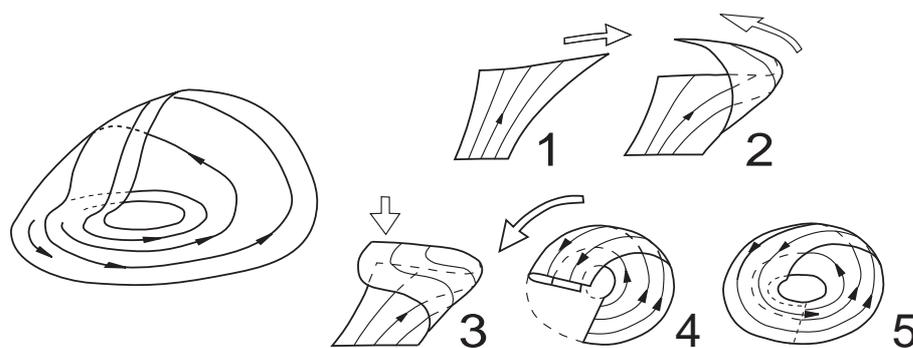


FIGURA 8.33 La transformación del panadero.

en que \dot{z} es positivo la distancia entre soluciones muy próximas crecerá exponencialmente, es decir, habrá dependencia sensible de las condiciones iniciales. Como se ve en la figura 8.33, las órbitas se separan entre sí y las que están en una cierta banda cerca de $z = 0$ se hallarán en una banda que sigue ensanchándose cuando $\dot{z} > 0$, pero que luego se repliega sobre la banda que hay cerca del plano (x, y) . Este doble proceso de «estirar» (para separar exponencialmente las órbitas) y «plegar» (para que la región visitada del espacio de fases se mantenga acotada) es uno de los mecanismos fundamentales del caos determinista y —siguiendo la tendencia de la ciencia de la sociedad de consumo a elegir, en perjuicio de las lenguas clásicas, nombres chocantes o con supuesto gancho publicitario— se llama **transformación del panadero** en evocación del proceso de homogeneización de los componentes de una masa de pastelería por medio del rodillo que estira la masa y del plegamiento de la misma sobre sí misma para que mantenga dimensiones manejables.

8.12.4. Atractores extraños

Además de generar en el proceso de estiramiento un exponente de Liapunov positivo, que hace que el atractor sea caótico, la transformación del panadero es también responsable de la

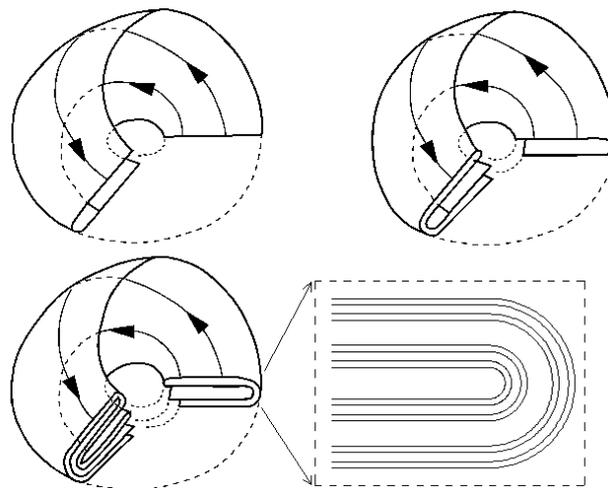


FIGURA 8.34 Estructura de conjunto de Cantor del atractor de Rössler.

estructura de conjunto de Cantor¹⁶ del atractor que hace de él un atractor extraño. En efecto, como éste es un conjunto invariante que se repliega sobre sí mismo una y otra vez, debe estar formado por un número infinito de capas de espesor nulo, ya que el atractor tiene volumen nulo porque el sistema es disipativo y pierde constantemente volumen del espacio de fases. Este conjunto infinito de capas que se esboza en la figura 8.34 le da al atractor su estructura fractal.

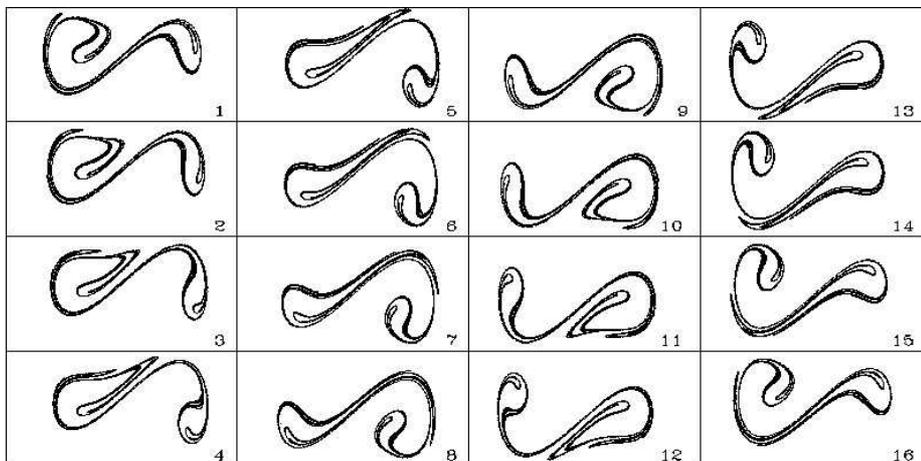


FIGURA 8.35 Secciones estroboscópicas del atractor de Duffing.

Para verlo en un ejemplo con interés físico, consideremos una partícula que se mueve en un potencial con dos pozos, $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$, que aparece en muchas aplicaciones físicas. Si incluimos el rozamiento y una fuerza externa sinusoidal, obtenemos la **ecuación de Duffing**:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = f \cos \omega t, \quad (8.125)$$

que estudiaremos aquí cuando $\gamma = 0,2$, $f = 0,3$ y $\omega = 1$ (véase el problema 8.18 para el caso en que la fuerza externa es nula). Como la ecuación no es autónoma el espacio de fases es tridimensional, pero la tercera variable, el tiempo t , solo aparece dentro del coseno que es periódico;

¹⁶Véase el problema 8.27.

la fuerza externa será, por tanto, la misma en todos los instantes $t \bmod 2\pi$. Para facilitar la comprensión del atractor de Duffing usaremos secciones estroboscópicas de Poincaré que consisten en representar no la trayectoria completa en el espacio (t, x, \dot{x}) sino la posición del punto (x, \dot{x}) cada vez que $t \bmod 2\pi = t_0$ para un valor t_0 prefijado. Es decir, usamos un estroboscopio (numérico) para sacar, siempre en el mismo negativo, una «foto» del punto que representa al sistema en el espacio de fases cada 2π «segundos». En la figura 8.35 hemos dividido el período 2π de la fuerza externa en dieciséis intervalos iguales y hemos dibujado las correspondientes secciones estroboscópicas para $t \bmod 2\pi = 0, \pi/8, \pi/4, \dots, 15\pi/8$. Los puntos que se ven en la figura están en una única órbita. Como el atractor es caótico, si utilizamos otra órbita la posición de cada punto será completamente distinta, pero el objeto geométrico en que se encuentran, el atractor, es el mismo y la figura es idéntica, si no nos fijamos en cada punto individual. Observando con cuidado las secciones estroboscópicas, vemos cómo a lo largo de un período el atractor va estirándose al tiempo que se repliega sobre sí mismo: un precioso ejemplo de la transformación del panadero en acción.

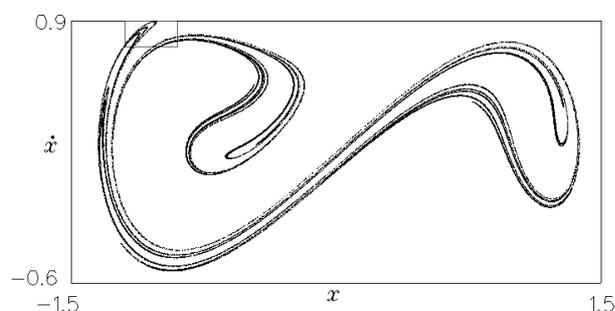


FIGURA 8.36 Sección estroboscópica del atractor de Duffing para $t \bmod 2\pi = 0$.

Puesto que en cada período el atractor se repliega sobre sí mismo una vez y es un conjunto invariante, debe estar formado por un número infinito de capas y su estructura geométrica debe ser muy complicada. Esto se ve claramente en la figura 8.36 donde se aprecia con más detalle la primera de las secciones. El rectángulo de la parte superior izquierda ha sido ampliado en la primera de las figuras 8.37 donde se ve claramente que las que en la figura 8.36 podían confundirse con bandas simples están en realidad formadas por muchas bandas, que a su vez tienen más bandas como se ve en la siguiente ampliación... Esto se repite a todas las escalas como en

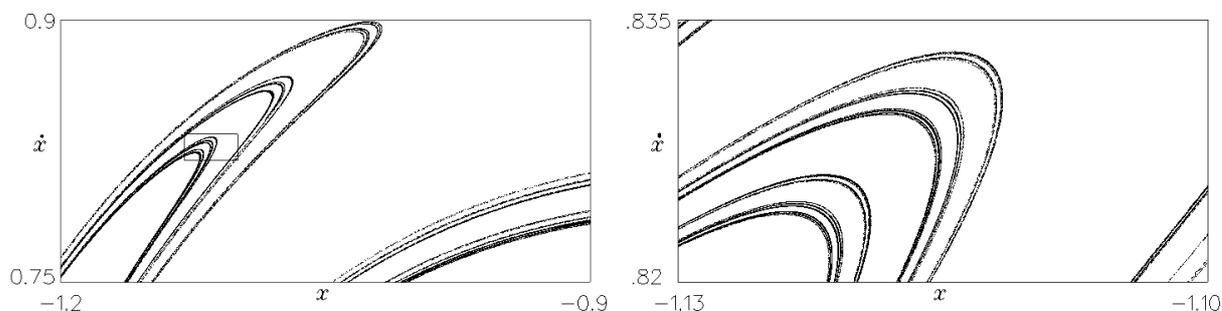


FIGURA 8.37 Ampliaciones de la sección estroboscópica del atractor de Duffing.

una muñeca rusa: estructura debajo de cada estructura hasta el infinito. La invariancia (exacta en

ejemplos académicos y normalmente aproximada en casos realistas) de escala es característica de los conjuntos de Cantor y más en general de los fractales por lo que estamos en presencia de un atractor que —además de caótico por la dependencia sensible de las condiciones iniciales— es extraño ya que tiene estructura fractal.

8.13. Problemas

8.1 Ecuación de Verhulst¹⁷. Analice la estabilidad de los puntos de equilibrio de

$$\dot{x} = \epsilon x - \sigma x^2,$$

para los distintos valores de los parámetros ϵ y σ .

8.2 Demuestre que una trayectoria que parte de un punto no crítico del sistema

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

no puede alcanzar un punto de equilibrio en un intervalo finito de tiempo.

8.3 Discuta la estabilidad del origen del sistema lineal

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \quad \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y,$$

cuando $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

8.4 Considere, para distintos valores del parámetro ϵ , la estabilidad del origen de

$$\dot{x} = \epsilon x + y, \quad \dot{y} = -x + \epsilon y.$$

8.5 Discuta la estabilidad de todos los puntos críticos de

$$\dot{x} = x - x^2 - xy, \quad \dot{y} = 3y - xy - 2y^2.$$

8.6 Puerto no lineal. Demuestre que el siguiente sistema y su aproximación lineal tienen un puerto inestable en el origen:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y + x^2.$$

Halle los espacios estable e inestable del punto de equilibrio en el caso de la aproximación lineal. Considere ahora el sistema no lineal, demuestre que la recta $x = 0$ y la parábola $y = x^2/3$ son conjuntos invariantes y concluya que son, respectivamente, las variedades estable e inestable del origen. Dibuje los espacios de fases de ambos sistemas.

8.7 Analice el carácter del origen de los siguientes sistemas no lineales:

$$(a) \quad \dot{x} = y + x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2),$$

$$(b) \quad \dot{x} = y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2).$$

8.8 Investigue la estabilidad del punto de equilibrio de

$$\dot{x} = 2y - z, \quad \dot{y} = 3x - 2z, \quad \dot{z} = 5x - 4y.$$

¹⁷**Pierre Francois Verhulst** (28-10-1804, Bruselas; 15-02-1849, Bruselas). Aunque comenzó trabajando en teoría de números, se interesó pronto por la estadística social donde hizo importantes estudios sobre la ley de crecimiento de la población, que anteriormente se creía geométrica. Propuso y estudió la ecuación no lineal que lleva su nombre y describe la evolución de una población biológica.

8.9 Analice la estabilidad de la solución trivial de

$$\dot{x} = -y - x^3, \quad \dot{y} = x - y^3.$$

8.10 Demuestre que si $a_{ij} = -a_{ji}$ para $i \neq j$, y $a_{ii} < 0$, entonces la solución trivial del sistema lineal

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

es estable, ya que $\sum_{i=1}^n x_i^2$ es una función de Liapunov.

8.11 ¿Para qué valores del parámetro α es estable el punto fijo de

$$\dot{x} = \alpha x - y, \quad \dot{y} = \alpha y - z, \quad \dot{z} = \alpha z - x?$$

8.12 Formas definidas. Demuestre que la función $U(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es definida positiva si y solo si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que sea definida negativa?

8.13 Analice la estabilidad de $(0, 0)$ en

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x^3 + 2xy^2, \quad \dot{y} = -y^3.$$

8.14 Demuestre mediante una función de Liapunov adecuada que el origen del sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = y - xf(x, y), \quad \dot{y} = -x - yf(x, y)$$

es asintóticamente estable (inestable) si $f(x, y) > 0$ ($f(x, y) < 0$) en un entorno del origen, aunque $f(0, 0)$ se anule. ¿Cuál será la geometría de las trayectorias en las proximidades del punto crítico?

8.15 Considere la información que las funciones de Liapunov

$$U_1 = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x), \quad U_2 = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

dan sobre la estabilidad del origen del sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -y - \sin x.$$

¿Cómo podía haberse establecido más fácilmente dicha estabilidad?

8.16 Demuestre que, si $r^2 \equiv x^2 + y^2$, el sistema

$$\dot{x} = -y + \frac{x}{r}f(r), \quad \dot{y} = x + \frac{y}{r}f(r)$$

tiene soluciones periódicas correspondientes a las raíces de $f(r)$. ¿Cuál es la dirección de recorrido de las trayectorias cerradas? ¿Cómo se estudiaría su estabilidad? Determine todas las soluciones periódicas del anterior sistema y discuta su estabilidad, cuando $f(r) = r(r-2)^2(r^2-4r+3)$.

8.17 Halle los puntos críticos del sistema

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = 2x^2y^2.$$

Determine la ecuación de las trayectorias y realice un gráfico del espacio de fases.

8.18 Halle la ecuación de las trayectorias y dibuje el espacio de fases de la ecuación $\ddot{x} - x + x^3 = 0$. ¿Qué pasa si se añade al primer miembro un término disipativo $\gamma\dot{x}$ con $\gamma > 0$?

8.19 Ecuación de Duffing. Considere el origen de la ecuación $\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = 0$ con $\gamma > 0$. Dibuje su variedad estable y compruebe que es la frontera entre las cuencas de atracción de los dos atractores.

Nota: Se llama **cuenca de atracción** al lugar geométrico de los puntos del espacio de fases por los que pasan las soluciones que tienden hacia un atractor.

8.20 Analice el espacio de fases de $\ddot{x} = (\cos x - 1) \sin x$.

8.21 Halle el valor crítico, $\lambda = \lambda_0$, de las bifurcaciones de $\ddot{x} = x^2 - \lambda x + 9$. Discuta el aspecto del espacio de fases de la ecuación para los valores $\lambda = 10$ y $\lambda = \lambda_0$.

8.22 Dibuje el espacio de fases del sistema

$$\dot{x} = x^2 - y^3, \quad \dot{y} = 2x(x^2 - y).$$

8.23 Dibuje el espacio de fases del siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = y - y^3, \quad \dot{y} = -x - y^2.$$

8.24 Determine el ciclo límite del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} [1 - (x^2 + y^2)], \\ \dot{y} &= -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} [1 - (x^2 + y^2)], \end{aligned}$$

y discuta su estabilidad.

8.25 Demuestre que la siguiente ecuación admite un ciclo límite:

$$\ddot{x} + (x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0.$$

8.26 Halle el máximo exponente de Liapunov del sistema del problema 8.24.

8.27 Dimensión fractal. Compruebe que para recubrir subconjuntos «normales» del espacio (un punto, una curva o superficie suave, el interior de un poliedro...) hacen falta $N(\varepsilon) \sim k\varepsilon^{-d}$ cubos de lado ε en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, donde d es la dimensión (0, 1, 2 y 3 en los ejemplos citados). Demuestre que este resultado puede escribirse como

$$d = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (8.126)$$

donde ha desaparecido la constante k , que depende del tamaño del conjunto, pero no de su dimensión. Esto permite utilizar como definición de **dimensión** la relación (8.126). Considere el **conjunto ternario de Cantor** que se define de forma recurrente como se indica en la figura 8.38:

- partiendo del segmento unidad, se elimina el tercio central;
- en cada uno de los dos tercios restantes se hace lo mismo, de forma que los respectivos tercios centrales son eliminados;
- en cada uno de los segmentos restantes se repite el proceso;
- ...

El conjunto de puntos que queda en el límite (que en el sentido preciso definido por el propio Cantor son tantos como los que había al principio, ya que puede establecerse una correspondencia biunívoca entre unos y otros) es el conjunto ternario de Cantor. Demuestre que su longitud es nula. Calcule su dimensión y compruebe que no es un entero, es decir, que estamos ante un **fractal**.

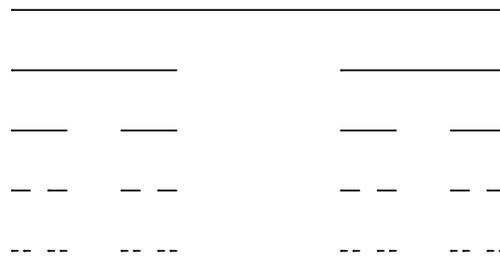


FIGURA 8.38 Construcción del conjunto ternario de Cantor.

8.28 Ecuaciones de Lotka-Volterra. Para explicar el aumento de tiburones en las aguas del Adriático en períodos de guerra, Volterra introdujo el modelo clásico de depredador y presa para describir la dinámica de poblaciones en interacción. Este modelo puede expresarse, en unidades adecuadas y con $a > 0$, como

$$\dot{x} = x(1 - y), \quad (8.127)$$

$$\dot{y} = -ay(1 - x). \quad (8.128)$$

La solución del sistema no puede escribirse en términos de funciones elementales, pero la ecuación de las trayectorias en el espacio de fases es simple. Hállela. Analice la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema y esboce el diagrama del espacio de fases.

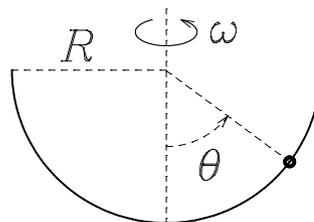


FIGURA 8.39 Cuenta ensartada en alambre liso.

8.29 Considere una cuenta enhebrada en un alambre liso, de forma semicircular, que rota con velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical, como se indica en la figura 8.39. Discuta la estabilidad de los ángulos de equilibrio relativo de la cuenta, en función del parámetro adimensional $\lambda = \omega^2 R/g$.

8.30 Ecuaciones en diferencias finitas (bis). En el problema 3.37 vimos que el método de Euler puede usarse para resolver ecuaciones lineales en diferencias finitas y estudiamos el ejemplo

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},$$

donde n es un entero. Discuta la estabilidad de los puntos de equilibrio de este sistema dinámico discreto.

8.31 El teorema de existencia y unicidad permite afirmar que las órbitas de una ecuación del tipo $\ddot{x} = -V'(x)$ no se cortan en el espacio de fases. ¿Cómo se compagina esto con el diagrama clásico de un punto silla correspondiente a un máximo del potencial, que aparece en la figura? Razone la respuesta.

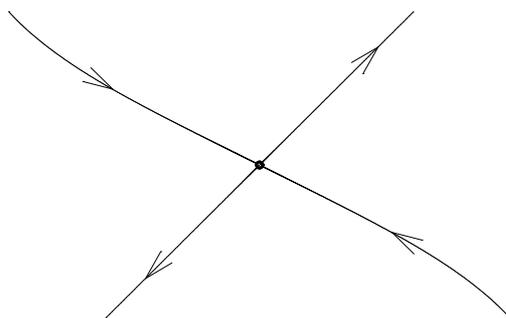


FIGURA 8.40 Espacio de fases cerca de un puerto.

8.32 Potencial central. Sea una partícula puntual de masa m que se mueve en el seno de un potencial central $V(r)$. Considere el problema unidimensional equivalente y halle la condición que determina sus puntos de equilibrio para un momento angular dado L . Discuta la estabilidad de los mismos. ¿Para qué valores de n serán estables si $V(r) = -k/r^n$? Demuestre que el último resultado es independiente de m , L y k . ¿Qué significa la estabilidad de un punto en el problema unidimensional para el movimiento tridimensional de la partícula?

8.33 Campo de fuerzas unidimensional. ¿Por qué son periódicas todas las órbitas acotadas de una partícula que se mueve en un campo de fuerza unidimensional? (En dos y tres dimensiones, por el contrario, el **teorema de Bertrand**¹⁸ asegura que esto solo sucede, si la fuerza es central, para potenciales newtonianos, $V = -k/r$, y armónicos isótopos, $V = kr^2$).



¹⁸ **Joseph Louis Francois Bertrand** (11-03-1822, París; 5-04-1900, París). Además del teorema que lleva su nombre en mecánica, se recuerdan sus aportaciones en teoría de números y geometría diferencial, pero es especialmente conocido por sus trabajos en teoría de probabilidades donde hay una paradoja de Bertrand.

8.34 Órbitas circulares en relatividad general. Como ya se ha visto en el problema 7.11, la ecuación de la órbita del problema de Kepler en relatividad general puede escribirse en coordenadas polares (r, φ) como

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \epsilon p u^2,$$

siendo $u = 1/r$. El *semilatus rectum* p es positivo y ϵ , en general, muy pequeño. Halle los puntos de equilibrio de esta ecuación y estudie su estabilidad. Demuestre que cada punto fijo corresponde a una órbita circular en el espacio físico. Compruebe que sus resultados son coherentes con lo que sabe que pasa en el caso no relativista, que corresponde a $\epsilon = 0$.

8.35 Use el análisis del problema 8.34 para calcular de modo rápido el período de precesión de Mercurio, que ya se había calculado en el problema 7.11, para el caso particular de órbitas de baja excentricidad.

8.36 ¿Qué pasa con la estabilidad del punto de equilibrio del problema 7.12 cuando ϵ no es pequeño?

8.37 ¿Cómo ayudaría a discutir la estabilidad de los puntos de equilibrio (tal vez no aislados o no hiperbólicos) del sistema

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

conocer una función no constante $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y} Q(x, y) = 0?$$

Aplique la respuesta al sistema asociado a la ecuación

$$\ddot{x} + 2x\dot{x} = 0,$$

con $F(x, y) = x^2 + y$ e $y = \dot{x}$.

8.38 Considere el sistema (8.57)–(8.58):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x - y^n. \end{aligned}$$

Halle su punto de equilibrio y demuestre es estable para $n = 0, 1, 2, 3, 5, 7, \dots$ ¿Cuándo es asintóticamente estable?

Sugerencia: Estudie separadamente los casos $n = 0, n = 1, n = 2$ y $n = 3, 5, 7, \dots$

8.39 ¿Qué pasa cuando $n = 4, 6, 8, \dots$ en el sistema del problema 8.38?

8.40 Una partícula puede moverse sin rozamiento a lo largo de un aro vertical de radio R mientras se encuentra sujeta a la cima de éste por un muelle de longitud natural R y constante recuperadora k . Demuestre que, si elegimos como coordenada generalizada el ángulo φ de la figura 8.41, la ecuación del movimiento es

$$mR^2\ddot{\varphi} + mgR \sin \varphi - kR^2 \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} - 1 \right) \sin \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Hágase el diagrama de bifurcación del equilibrio usando el parámetro adimensional $\alpha = \frac{kR}{mg} \geq 0$.

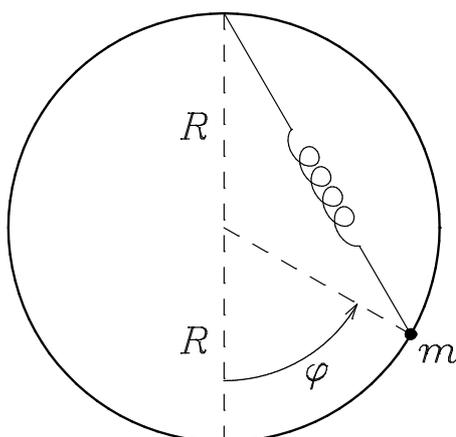
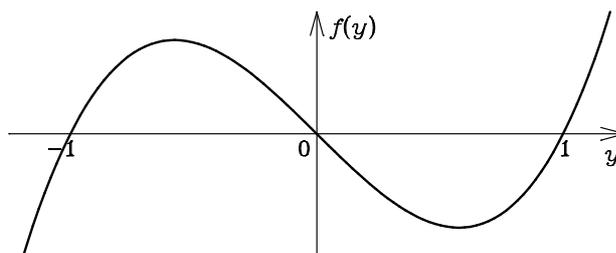


FIGURA 8.41 Sistema del problema 8.40.

8.41 Órbitas en la solución Schwarzschild¹⁹. La órbita de los fotones que se mueven en la solución de Schwarzschild (que describe el campo gravitatorio de una partícula puntual) satisface una ecuación diferencial de segundo orden que admite la siguiente integral primera:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2},$$

donde se han usado unidades geométricas en las que $G = c = 1$. Además, r es la distancia polar, λ un parámetro «afín» que sustituye al tiempo, M la masa de la estrella y b el «parámetro de impacto» (cociente entre momento angular y lineal del fotón). Estudie la existencia y estabilidad de órbitas circulares. Pruebe que un rayo de luz enviado desde el infinito con un parámetro de impacto $b < 3^{3/2}M$ será capturado, ya que r se hace inferior al valor del «horizonte» $r = 2M$.

FIGURA 8.42 Gráfica de la función $f(y)$ del problema 8.42.

8.42 Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(y),$$



¹⁹ **Karl Schwarzschild** (9-10-1873, Frankfurt am Main, Alemania; 11-05-1916, Potsdam, Alemania). Publicó su primer trabajo científico (sobre mecánica celeste) con 16 años. Trabajó en astronomía y astrofísica y, entre otras cosas, investigó los procesos radiativos en atmósferas estelares. Es uno de los pioneros de la teoría cuántica de los espectros atómicos, pero, quizá, sea más conocido porque publicó la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein. Además, dicha solución es una de las más importantes, porque describe el campo gravitatorio de la más sencilla de las estrellas.

donde la función $f(y)$ tiene la gráfica de la figura 8.42. Halle los puntos de equilibrio y discuta su estabilidad. Dibuje las gráficas de las soluciones que satisfacen $y(0) = 1/2$ e $y(0) = 2$ y halle los valores $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y$ que en tales casos se obtienen.

8.43 Analice la estabilidad de los puntos de equilibrio del siguiente sistema y esboce su espacio de fases:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^2.\end{aligned}$$

Capítulo 9

Problemas de contorno de Sturm-Liouville

*All progress is precarious,
and the solution of one problem
brings us face to face with another problem.*
Martin Luther King Jr.

Los problemas de contorno suele ser más difíciles que los de valores iniciales y resulta más delicado establecer las condiciones que garantizan la existencia (o unicidad) de soluciones. No abordaremos en este capítulo más que una clase de tales problemas que está asociada a la resolución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales.

Consideremos, a modo de introducción, el caso de una partícula cuántica en un pozo de potencial infinito

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < \ell, \\ \infty, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (9.1)$$

cuya ecuación de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \quad (9.2)$$

y condiciones de contorno,

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0, \quad (9.3)$$

pueden escribirse, con $y \equiv \psi$ y $\lambda \equiv 2mE/\hbar^2$, como

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\ell) = 0. \quad (9.4)$$

Como conocemos la solución general de esta ecuación (que es el oscilador armónico clásico)

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x, \quad (9.5)$$

vemos que las condiciones de contorno son

$$A = 0, \quad B \sin \sqrt{\lambda}\ell = 0, \quad (9.6)$$

que solo admiten soluciones no triviales si $\lambda = n^2\omega^2$, con $n = 1, 2, \dots$, y $\omega \equiv \pi/\ell$, en cuyo caso tenemos

$$y = C_n \sin n\omega x, \quad (9.7)$$

con C_n arbitrario.

EJERCICIO 9.1 ¿Qué sucede si $\lambda = 0$ o $\lambda < 0$? Comente la respuesta.

En este capítulo nos limitaremos, en general, a estudiar ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (9.8)$$

junto con condiciones de contorno lineales y homogéneas:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (9.9)$$

con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ y $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, aunque también diremos algo para casos más generales.

9.1. Producto escalar de funciones

En los espacios de funciones regulares definidas en un intervalo (a, b) consideraremos, además de la estructura lineal, un producto escalar entre funciones definido como

$$\langle f, g \rangle_\rho \equiv \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\rho(x) dx = \int_a^b \overline{f(x)}g(x) d\mu \quad (9.10)$$

donde la **medida**

$$\mu(x) = \int_a^x \rho(u) du \quad (9.11)$$

está dada por un **peso** $\rho(x) \geq 0$ y es monótona creciente.

EJERCICIO 9.2 Compruebe que (9.10) satisface las propiedades que lo caracterizan como producto escalar hermítico, ya que

1. es definido positivo

$$\langle f, f \rangle_\rho \geq 0, \quad (9.12)$$

$$\langle f, f \rangle_\rho = 0 \iff f = 0, \quad (9.13)$$

2. hermítico

$$\langle g, f \rangle_\rho = \overline{\langle f, g \rangle_\rho}, \quad (9.14)$$

3. y lineal por la derecha, puesto que si a y b son constantes

$$\langle h, af + bg \rangle_\rho = a \langle h, f \rangle_\rho + b \langle h, g \rangle_\rho. \quad (9.15)$$

¿Es lineal por la izquierda?

Como con cualquier otro producto escalar, puede definirse la norma $\|f\|_\rho$ de un vector (de una función) f como

$$\|f\|_\rho^2 = \langle f, f \rangle_\rho = \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx. \quad (9.16)$$

A su vez, una norma define una distancia, $\|f - g\|_\rho$, que proporciona una noción de convergencia (llamada **convergencia en norma**):

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{si } \|f - f_n\|_\rho^2 = \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 \rho(x) dx \rightarrow 0. \quad (9.17)$$

Si definimos el espacio $L^2(a, b; d\mu)$ como el espacio lineal completo más pequeño que contiene a las funciones regulares en (a, b) de norma finita, toda sucesión de Cauchy ($\|f_n - f_m\| < \epsilon$ para cualesquiera $n, m > N(\epsilon)$) será allí convergente. (En $L^2(a, b; d\mu)$ hay que usar la integral de Lebesgue en vez de la de Riemann.) En el caso particular de peso unidad, $\rho(x) = 1$, tenemos $d\mu = dx$ y usaremos la notación abreviada $L^2(a, b) = L^2(a, b; dx)$ y $\langle g, f \rangle = \langle g, f \rangle_1$.

Se dice que dos funciones f y g son **ortogonales** (con respecto al peso ρ) si su producto escalar es nulo, $\langle f, g \rangle_\rho = 0$. Un sistema de vectores $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ es **ortonormal** si las funciones ϕ_i son ortogonales dos a dos y tienen norma unidad:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} \phi_m(x) \rho(x) dx = \delta_{nm}, \quad (9.18)$$

donde δ_{nm} es la **delta de Kronecker**¹:

$$\delta_{nm} \equiv \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases} \quad (9.19)$$

EJERCICIO 9.3 Compruebe que el sistema de vectores $\left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin n\omega x : n = 1, 2, \dots \right\}$ es ortonormal en $L^2(a, b)$ si elegimos $\omega = 2\pi/(b-a)$.

Puede demostrarse que un espacio $L^2(a, b; d\mu)$ es un **espacio de Hilbert**², ya que es **separable**, es decir, existen **conjuntos ortonormales completos**, que son conjuntos ortonormales numerables $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ con la propiedad de que todo vector $f \in L^2(a, b; d\mu)$ puede desarrollarse como una combinación lineal infinita convergente con coeficientes f_n constantes

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n, \quad (9.20)$$

es decir, tal que cuando $N \rightarrow \infty$

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \phi_n \right\|_\rho^2 = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n \phi_n(x) \right|^2 \rho(x) dx \rightarrow 0. \quad (9.21)$$

EJERCICIO 9.4 Demuestre que el desarrollo (9.20) es único y que los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$f_n = \langle \phi_n, f \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} f(x) \rho(x) dx. \quad (9.22)$$



¹ **Leopold Kronecker** (7-12-1823, Liegnitz, Prusia —hoy día es Legnica, en Polonia—; 29-12-1891, Berlín). Sus mayores contribuciones se refieren a funciones elípticas, ecuaciones algebraicas y números algebraicos. Es recordado porque dirigió la oposición a la teoría de conjuntos de Cantor y sostuvo que la matemática debe reducirse a argumentos que usen los enteros y un número finito de pasos: *Dios creó los enteros, todo lo demás es obra del hombre*.



² **David Hilbert** (23-01-1862, Königsberg, Prusia —hoy día Kaliningrad, Rusia—; 14-02-1943, Gotinga, Alemania). Su obra magna, el *Grundlagen der Geometrie* de 1899, puso la geometría sobre bases firmes y tuvo una enorme influencia en los métodos axiomáticos que han caracterizado la matemática desde entonces. Para la física son importantes sus contribuciones al análisis funcional (que incluyen los espacios de Hilbert) y se recuerda que publicó las ecuaciones del campo gravitatorio un poco antes que Einstein, pero nunca reclamó la prioridad y muy recientes investigaciones parecen haber probado definitivamente que se las había comunicado el propio creador de la relatividad general. Los 23 problemas de Hilbert han sido un reto importante, no completamente superado, para la matemática del siglo XX. Su intento de establecer la consistencia de la matemática en los dos volúmenes del *Grundlagen der Mathematik* de 1934 y 1939 estaba condenado al fracaso como demostró Gödel en 1931.

9.2. Ecuación adjunta

Dado el operador lineal

$$L = a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x), \quad (9.23)$$

definimos su **adjunto formal de Lagrange** como

$$L^\dagger = \bar{a}_0 D^2 + (2\bar{a}'_0 - \bar{a}_1) D + \bar{a}''_0 - \bar{a}'_1 + \bar{a}_2, \quad (9.24)$$

de forma que asociamos a toda ecuación lineal homogénea de segundo orden, $Ly = 0$, su **ecuación adjunta**: $L^\dagger y = 0$.

EJERCICIO 9.5 Compruebe que la ecuación adjunta es

$$L^\dagger y = \left[\overline{a_0(x)y} \right]'' - \left[\overline{a_1(x)y} \right]' + \overline{a_2(x)y} = 0. \quad (9.25)$$

Si definimos el **concomitante bilineal** de L , como

$$\mathcal{P}(\bar{z}, y) \equiv a_0(\bar{z}y' - \bar{z}'y) + (a_1 - a'_0)\bar{z}y, \quad (9.26)$$

tenemos los siguientes resultados:

Identidad de Lagrange

$$\bar{z}Ly - \overline{L^\dagger z}y = \frac{d}{dx}\mathcal{P}(\bar{z}, y). \quad (9.27)$$

Fórmula de Green

$$\int_a^b (\bar{z}Ly - \overline{L^\dagger z}y) dx = \mathcal{P}(\bar{z}, y) \Big|_{z=a}^{z=b}. \quad (9.28)$$

EJERCICIO 9.6 Demuestre la identidad de Lagrange y compruebe que la fórmula de Green³, que es consecuencia inmediata de aquélla, puede escribirse como

$$\langle z, Ly \rangle - \langle L^\dagger z, y \rangle = \mathcal{P}(\bar{z}, y) \Big|_{z=a}^{z=b}. \quad (9.29)$$

EJERCICIO 9.7 Demuestre $L^{\dagger\dagger} = L$.

Se dice que el operador L es (**formalmente**) **autoadjunto**, si coincide con su adjunto formal $L^\dagger = L$.

Si usamos la definición del operador adjunto (9.24) es inmediato comprobar que si la ecuación es real, $\bar{a}_i = a_i$ —es decir, si el operador es real, $\bar{L} = L$ — entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

$$L = L^\dagger, \quad (9.30)$$

$$a'_0 = a_1, \quad (9.31)$$

$$Ly = (a_0y')' + a_2y. \quad (9.32)$$

³**George Green** (1793, Sneinton, Inglaterra; 31-05-1841, Sneinton). Publicó solo diez obras y la mayor parte de ellas —incluyendo la más importante: *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*— antes de ingresar como estudiante en Cambridge con 40 años. Sus contribuciones más importantes las hizo en teoría del potencial, pero también trabajo en electricidad, hidrodinámica, óptica y acústica.

EJERCICIO 9.8 Demuestre que si la ecuación real es autoadjunta se tiene

$$\mathcal{P}(\bar{z}, y) = a_0 W[\bar{z}, y], \tag{9.33}$$

$$\langle z, Ly \rangle - \langle Lz, y \rangle = a_0 W[\bar{z}, y] \Big|_{z=a}^{z=b}. \tag{9.34}$$

Claro está que no todas las ecuaciones son autoadjuntas, pero pueden reescribirse fácilmente como tales, ya que si $L = \bar{L}$ y definimos

$$\rho(x) \equiv \exp \left[\int_a^x \frac{a_1(u) - a_0'(u)}{a_0(u)} du \right], \tag{9.35}$$

es inmediato comprobar que el operador $\rho L = (\rho L)^\dagger$ es autoadjunto y, por tanto,

$$\langle z, \rho Ly \rangle - \langle \rho Lz, y \rangle = \langle z, Ly \rangle_\rho - \langle Lz, y \rangle_\rho = \rho a_0 W[\bar{z}, y] \Big|_{z=a}^{z=b}. \tag{9.36}$$

EJERCICIO 9.9 Compruebe que todo operador real L puede convertirse en autoadjunto multiplicándolo por la función no negativa $\rho \geq 0$, así como que se cumple (9.36).

En el resto del capítulo consideraremos solo operadores reales que han sido escritos como formalmente autoadjuntos y escribiremos nuestra ecuación en forma autoadjunta:

$$Ly = (a_0 y')' + a_2 y = 0. \tag{9.37}$$

EJERCICIO 9.10 Escriba en forma autoadjunta las siguientes ecuaciones:

$$\text{Legendre} : (1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \tag{9.38}$$

$$\text{Laguerre} : xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0, \tag{9.39}$$

$$\text{Hermite} : y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \tag{9.40}$$

9.3. Problemas de Sturm-Liouville

Supongamos que tenemos una ecuación real autoadjunta en el intervalo (a, b)

$$Ly = [P(x)y']' + Q(x)y = 0, \tag{9.41}$$

con $P(x) > 0$ en (a, b) , $P(a) \geq 0$ y $P(b) \geq 0$, así como una función $\rho(x) > 0$ en (a, b) , $\rho(a) \geq 0$ y $\rho(b) \geq 0$. Si construimos el operador lineal $A = -\frac{1}{\rho}L$,

$$Ay \equiv -\frac{1}{\rho} [P(x)y']' - \frac{Q(x)}{\rho} y, \tag{9.42}$$

su problema de valores propios

$$Ay = \lambda y \tag{9.43}$$

puede escribirse como

$$L_\lambda y = [P(x)y']' + [Q(x) + \lambda \rho(x)] y = 0, \tag{9.44}$$

o como

$$Ly = -\lambda \rho(x) y. \tag{9.45}$$

Nótese que, a diferencia de L el operador L_λ no es necesariamente real ni formalmente autoadjunto.

EJERCICIO 9.11 Demuestre que

$$\langle z, Ay \rangle_\rho - \langle Az, y \rangle_\rho = -P(x)W[\bar{z}, y] \Big|_{z=a}^{z=b}. \quad (9.46)$$

En un problema de Sturm⁴-Liouville se trata de imponer condiciones de contorno que garanticen que el operador A sea realmente autoadjunto:

$$\langle z, Ay \rangle_\rho = \langle Az, y \rangle_\rho, \quad (9.47)$$

ya que ésta es la condición matemática necesaria para probar el teorema fundamental que enunciaremos enseguida. Para que esta condición se satisfaga hace falta que se cumpla

$$P(b)W[\bar{z}, y](b) - P(a)W[\bar{z}, y](a) = 0, \quad (9.48)$$

lo que a su vez puede lograrse de las formas discutidas a continuación, que definen distintos tipos de problemas de Sturm-Liouville.

Regular

Consiste en imponer condiciones lineales homogéneas:

$$W(a) = 0 \iff \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0), \quad (9.49)$$

$$W(b) = 0 \iff \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0). \quad (9.50)$$

Periódico

Puede plantearse si $P(a) = P(b)$, en cuyo caso basta exigir:

$$W(a) = W(b) \iff \begin{cases} y(a) = y(b), \\ y'(a) = y'(b). \end{cases} \quad (9.51)$$

Singular

Pueden ser a su vez de distintos tipos, entre los que se hallan los siguientes:

- Si $P(a) = 0$, puede imponerse $W(b) = 0$ y exigir que y e y' estén acotados cuando $x \rightarrow a$.
- Si $P(b) = 0$, puede imponerse $W(a) = 0$ y exigir que y e y' estén acotados cuando $x \rightarrow b$.
- Si $P(a) = P(b) = 0$ basta con exigir la acotación de y e y' en los extremos.

También se llaman problemas singulares a aquellos en los que el intervalo (a, b) no es acotado.

EJERCICIO 9.12 Demuestre que los valores propios de todo problema de Sturm-Liouville son reales y que si el operador es real pueden elegirse vectores propios reales.



⁴ **Jacques Charles Francois Sturm** (22-09-1803, Ginebra, Suiza; 18-12-1855, París). Aunque es especialmente recordado por la teoría estudiada en este capítulo, trabajó también en geometría diferencial y proyectiva, ecuaciones diferenciales, óptica geométrica y difusión del calor, donde sus trabajos establecieron un importante resultado sobre el número de raíces de un polinomio en un intervalo.

EJERCICIO 9.13 Demuestre que las funciones propias ($\mathbb{L}y_n = -\lambda_n \rho y_n$) correspondientes a valores propios distintos de cualquier problema de Sturm-Liouville son ortogonales:

$$\langle y_n, y_m \rangle_\rho = \int_a^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = c_{nm} \delta_{nm}. \quad (9.52)$$

Si el problema es regular, el operador es autoadjunto y el análisis funcional permite demostrar el siguiente resultado (véase [21] o [30]).

Teorema 9.1 *Todo problema regular de Sturm-Liouville tiene un número infinito de valores propios reales que pueden ordenarse en una secuencia*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad (9.53)$$

que converge a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$. Los valores propios son simples y la función propia correspondiente a λ_n ,

$$\mathbb{L}y_n = -\lambda_n \rho y_n, \quad (9.54)$$

puede elegirse como real y tiene, precisamente, $n - 1$ ceros en (a, b) . Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales:

$$\langle y_n, y_m \rangle_\rho = \int_a^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = c_{nm} \delta_{nm}. \quad (9.55)$$

El conjunto de funciones propias normalizadas, $\phi_n = y_n / \|y_n\|_\rho$, es un sistema ortonormal completo, de forma que toda función $f \in L^2(a, b; d\mu)$ —independientemente de que satisfaga o no las condiciones de contorno— puede desarrollarse en serie convergente en norma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n, \quad f_n = \langle \phi_n, f \rangle_\rho = \int_a^b \phi_n(x) f(x) \rho(x) dx. \quad (9.56)$$

Si, además, f y f' son continuas por trozos, tenemos en el sentido de la convergencia ordinaria en cada punto $x \in (a, b)$ —pero no necesariamente en a ni en b —

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x). \quad (9.57)$$

Volvamos al ejemplo del comienzo del capítulo

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\ell) = 0, \quad (9.58)$$

cuyos valores propios son $\lambda = n^2 \omega^2$, con $\omega \equiv \pi/\ell$.

EJERCICIO 9.14 Demuestre que el conjunto ortonormal completo asociado es

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin n\omega x. \quad (9.59)$$

Por tanto, si f y f' son continuas en $[0, \ell]$, tendremos la convergencia de la **serie de Fourier**⁵ de senos para todo $x \in (a, b)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\omega x, \quad c_n \equiv \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin n\omega x \, dx. \quad (9.60)$$

Como puede observarse, en $x = 0, \ell$ la serie converge a 0 —¡éstas son las condiciones de contorno!— y, en general, no a $f(0)$ ni a $f(\ell)$. Por otro lado, puesto que la serie es periódica (con período 2ℓ) también convergerá fuera del intervalo $[0, \ell]$ a la función impar con período 2ℓ que coincide con $f(x)$ en el intervalo $(0, \ell)$.

EJERCICIO 9.15 Demuestre que si $f(x) = 1$,

$$c_{2n} = 0, \quad c_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}. \quad (9.61)$$

¿A qué convergerá en la recta real

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega x}{2n+1} ? \quad (9.62)$$

Los problemas singulares son más complicados y la teoría general está fuera del alcance de esta asignatura. Digamos que, por ejemplo, los valores propios ya no son necesariamente simples y que el espectro —el conjunto de valores propios— puede ser continuo o tener tanto zonas continuas como discretas.

Nos limitaremos a considerar a título de ejemplo la ecuación

$$xy'' + y' + \lambda xy = 0, \quad (9.63)$$

en $(0, 1)$. Como el origen es un punto singular, plantearemos un problema en el que la función esté acotada cuando $x \rightarrow 0$ y que cumpla $y(1) = 0$.

EJERCICIO 9.16 Compruebe que el cambio de variable independiente $t = \sqrt{\lambda}x$ convierte a esta ecuación en la de Bessel de orden 0.

La solución de la ecuación es, por tanto, $y = AJ_0(\sqrt{\lambda}x) + BY_0(\sqrt{\lambda}x)$. Como Y_0 tiene una divergencia logarítmica en el origen, debemos tomar $B = 0$, con lo que los valores propios serán los cuadrados de los ceros positivos de J_0 (que tiene infinitos, como se intuye en la figura D.8) ya que debe cumplirse $y(1) = AJ_0(\sqrt{\lambda}) = 0$. Estos ceros están bien estudiados y, por lo que acabamos de ver, deben satisfacer la condición

$$\langle J_0(\alpha_n x), J_0(\alpha_m x) \rangle_x = \int_0^1 x J_0(\alpha_n x) J_0(\alpha_m x) \, dx = 0, \quad (9.64)$$

si $n \neq m$ y $J_0(\alpha_n) = 0$.



⁵ **Jean Baptiste Joseph Fourier** (21-03-1768, Auxerre, Francia; 16-05-1830, París). Aparte de otras contribuciones en matemática pura y aplicada, a él es debida la teoría matemática de la conducción del calor: estableció la ecuación de difusión y la resolvió utilizando las series trigonométricas que llevan su nombre, pero que eran bien conocidas anteriormente por Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange y otros.

9.4. Series de Fourier

Si consideramos el oscilador armónico con condiciones de contorno periódicas,

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y\left(-\frac{T}{2}\right) = y\left(\frac{T}{2}\right), \quad y'\left(-\frac{T}{2}\right) = y'\left(\frac{T}{2}\right), \quad (9.65)$$

tenemos como funciones propias ortogonales los senos y cosenos.

EJERCICIO 9.17 Demuestre que los valores propios de este oscilador armónico son $n\omega$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y $\omega = 2\pi/T$, y que el sistema ortonormal correspondiente es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n\omega x : n = 1, 2, \dots \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega x : n = 1, 2, \dots \right\}. \quad (9.66)$$

Por tanto que para toda función f , puede construirse su serie de Fourier

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x \quad (9.67)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx, \quad (9.68)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega x dx, \quad (9.69)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\omega x dx. \quad (9.70)$$

La serie de Fourier converge a f en norma en $(-T/2, T/2)$ y si f y f' son continuas a trozos, a $(f(x+0) + f(x-0))/2$ para cada $x \in (-T/2, T/2)$. Fuera de ese intervalo converge a la función de período T que coincide con f en $(-T/2, T/2)$. En muchos textos se calcula a_0 mediante (9.69) y la serie se escribe en la forma equivalente

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x. \quad (9.71)$$

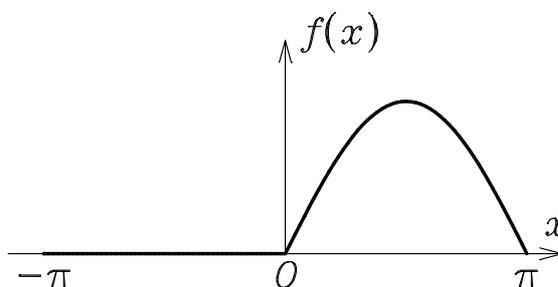


FIGURA 9.1 La función $f(x) = \theta(x) \sin x$ en $(-\pi, \pi)$.

EJERCICIO 9.18 Calcule la serie de Fourier de $\theta(x) \sin x$ en $(-\pi, \pi)$.

9.5. Problema inhomogéneo de Sturm-Liouville

Analícemos ahora un problema inhomogéneo,

$$L_\lambda y = [P(x)y']' + [Q(x) + \lambda\rho(x)]y = f(x), \quad (9.72)$$

o

$$Ly = -\lambda\rho(x)y + f, \quad (9.73)$$

con condiciones de contorno

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \quad (9.74)$$

Si consideramos un conjunto ortonormal completo del problema homogéneo

$$L\phi_n = -\lambda_n\rho\phi_n, \quad \langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho = \delta_{nm}, \quad (9.75)$$

la solución (regular) buscada podrá desarrollarse como

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad (9.76)$$

incluidos ahora los límites, porque allí lo garantizan las condiciones de contorno. Se cumplirá, en consecuencia,

$$f = \rho \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) c_n \phi_n(x). \quad (9.77)$$

EJERCICIO 9.19 Compruebe la última afirmación.

Supongamos que f/ρ está en $L^2(a, b; d\mu)$ de forma que puede desarrollarse en la base $\{\phi_n\}$,

$$f = \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n, \quad f_n = \langle \phi_n, f \rangle = \int_a^b \phi_n(x) f(x) dx, \quad (9.78)$$

con lo que se tendrá, puesto que $\rho > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda - \lambda_n) c_n - f_n] \phi_n(x) = 0, \quad (9.79)$$

que solo puede cumplirse en uno de los siguientes casos:

1. Si λ no está en el espectro ($\lambda - \lambda_n \neq 0$) y, por tanto, $c_n = f_n / (\lambda - \lambda_n)$ y el problema inhomogéneo tiene una única solución:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \phi_n}{\lambda - \lambda_n}. \quad (9.80)$$

2. Si λ está en el espectro, $\lambda = \lambda_p$, hay dos posibilidades:

a) Si $f_p = \langle \phi_p, f \rangle \neq 0$, no hay solución.

b) Si $f_p = \langle \phi_p, f \rangle = 0$, hay infinitas soluciones en la forma

$$y = \sum_{n \neq p} \frac{f_n \phi_n}{\lambda - \lambda_n} + C \phi_p, \quad (9.81)$$

con C arbitrario.

Como corolario se obtiene un caso particular del **teorema de la alternativa de Fredholm**⁶, que asegura que o bien el problema inhomogéneo tiene una única solución o bien el problema homogéneo tiene al menos una solución no trivial (que en este caso es ϕ_p). Este teorema se cumple en otros contextos, y el lector debería ser capaz de reconocer su validez para los sistemas de ecuaciones lineales algebraicas.

Consideremos como ejemplo el problema

$$y'' + \lambda y = -x, \quad y(0) = y(\ell) = 0. \quad (9.82)$$

Puesto que los valores propios son $\lambda = n^2 \omega^2$ (con $\omega \equiv \pi/\ell$ y $n = 1, 2, \dots$) y los vectores propios $\phi_n = \sqrt{2/\ell} \sin n\omega x$, basta calcular los coeficientes de Fourier de la serie de senos.

EJERCICIO 9.20 Compruebe que, si $f = -x$,

$$\langle \phi_n, f \rangle = \frac{(-1)^n \sqrt{2} \ell^{3/2}}{n\pi}. \quad (9.83)$$

Concluya que la solución es

$$y = \frac{2\ell}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\omega x}{n(\lambda - n^2 \omega^2)}. \quad (9.84)$$

EJERCICIO 9.21 Resuelva el problema de contorno utilizando la solución general de la ecuación y compruebe que, cuando $\lambda > 0$, el resultado es

$$y = \frac{\ell \sin \sqrt{\lambda} x}{\lambda \sin \sqrt{\lambda} \ell} - \frac{x}{\lambda}. \quad (9.85)$$

¿Coincide este resultado con el hallado anteriormente? ¿Qué pasa si $\lambda < 0$? ¿Qué pasa en ambos métodos cuando $\lambda = 0$?

9.6. Función de Green

Se llama **función de Green** (o **función de Green de dos puntos**) de un problema inhomogéneo

$$L_\lambda y = f(x), \quad (9.86)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (9.87)$$

a la solución $G_\lambda(x, s)$ correspondiente a un término inhomogéneo impulsivo:

$$L_\lambda G_\lambda(x, s) = \delta(x - s), \quad (9.88)$$



⁶ **Erik Ivar Fredholm** (7-04-1866, Estocolmo, Suecia; 17-08-1927, Estocolmo). Aunque escribió pocos trabajos, éstos eran de gran calidad y rigor. Además del famoso teorema de la alternativa, son muy recordadas sus contribuciones sobre ecuaciones integrales y teoría espectral.

$$\alpha_1 G_\lambda(a, s) + \alpha_2 G'_\lambda(a, s) = 0, \quad \beta_1 G_\lambda(b, s) + \beta_2 G'_\lambda(b, s) = 0. \quad (9.89)$$

Usando una base ortonormal de soluciones del problema homogéneo, la función de Green vendrá dada por (9.80) y (9.78).

EJERCICIO 9.22 Compruebe que si $f(x) = \delta(x - s)$, $f_n = \phi_n(s)$.

Por tanto, para valores de λ fuera del espectro de L_λ :

$$G_\lambda(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(s)}{\lambda - \lambda_n}. \quad (9.90)$$

Vemos en esta expresión que los valores x y s intervienen de forma simétrica

$$G_\lambda(x, s) = G_\lambda(s, x). \quad (9.91)$$

Una vez conocida la función de Green, la solución del problema inhomogéneo (9.86)–(9.87) es, para cualquier $f(x)$,

$$y(x) = \int_a^b G_\lambda(x, s)f(s) dx, \quad (9.92)$$

ya que por construcción satisface las condiciones iniciales (9.87) y por la linealidad del operador L_λ tenemos:

$$L_\lambda y(x) = \int_a^b L_\lambda G_\lambda(x, s)f(s) dx = \int_a^b \delta(x - s)f(s) dx = f(x). \quad (9.93)$$

Es, por tanto, un potente instrumento que —al igual que pasaba con el método de Cauchy del apartado 3.8.2 y la solución elemental del 3.9— permite resolver sistemáticamente problemas inhomogéneos una vez resuelto el más fundamental de todos ellos: el correspondiente al impulso unidad.

En el ejemplo que venimos usando a lo largo del capítulo, tenemos

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad y(0) = y(\ell) = 0, \quad (9.94)$$

por lo que la función de Green será la solución de

$$G''_\lambda(x, s) + \lambda G_\lambda(x, s) = \delta(x - s), \quad G_\lambda(0, s) = G_\lambda(\ell, s) = 0. \quad (9.95)$$

EJERCICIO 9.23 Demuestre que en este caso

$$G_\lambda(x, s) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega x \sin n\omega s}{\lambda - n^2\omega^2}. \quad (9.96)$$

Aun en los casos en que puede encontrarse un conjunto completo ortonormal de soluciones del problema homogéneo la serie infinita (9.90) no siempre proporciona la expresión más útil. De hecho, la función de Green puede escribirse de otro modo.

Teorema 9.2 Si se conocen dos soluciones del problema homogéneo, y_1 e y_2 , tales que cada una de ellas satisface una de las dos condiciones de contorno (pero no la otra),

$$L_\lambda y_1 = 0, \quad \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y'_1(a) = 0, \quad \beta_1 y_1(b) + \beta_2 y'_1(b) \neq 0, \quad (9.97)$$

$$L_\lambda y_2 = 0, \quad \beta_1 y_2(b) + \beta_2 y'_2(b) = 0, \quad \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y'_2(a) \neq 0, \quad (9.98)$$

para un λ que no sea valor propio del correspondiente problema homogéneo, entonces

1. y_1 e y_2 son linealmente independientes, $W(x) = W[y_1, y_2] \neq 0$.

2. $P(x)W(x)$ es constante.

3. La función de Green del problema es

$$G_\lambda(x, s) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(s)}{P(x)W(x)}, & \text{para } a \leq x \leq s, \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{P(x)W(x)}, & \text{para } s \leq x \leq b. \end{cases} \quad (9.99)$$

4. La función de Green es continua, pero su derivada tiene un salto de valor $1/P(s)$ en $x = s$:

$$G_\lambda(s+0, s) = G_\lambda(s-0, s), \quad G'_\lambda(s+0, s) - G'_\lambda(s-0, s) = \frac{1}{P(s)}. \quad (9.100)$$

De hecho, si y_1 e y_2 fueran linealmente dependientes, serían proporcionales y, por tanto, satisfarían ambas condiciones de contorno, lo que va contra las hipótesis (y, puesto que λ no es un valor propio, únicamente podría suceder si $y_1 = y_2 = 0$). Por otro lado, para ver que $P(x)W(x)$ es constante, basta calcular su derivada, teniendo en cuenta la ecuación diferencial satisfecha por las soluciones:

$$\begin{aligned} [PW]' &= [P(y_1y_2' - y_1'y_2)]' = P'(y_1y_2' - y_1'y_2) + P(y_1y_2'' - y_1''y_2) \\ &= y_1(Py_2')' - y_2(Py_1')' = -y_1(Q + \lambda\rho)y_2 + y_2(Q + \lambda\rho)y_1 = 0. \end{aligned} \quad (9.101)$$

Está claro que la función $G_\lambda(x, s)$, que también puede escribirse como

$$G_\lambda(x, s) = \frac{y_1(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y_2(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)}, \quad (9.102)$$

es continua en los puntos $x = s$:

$$G_\lambda(s+0, s) = G_\lambda(s-0, s) = \frac{y_1(s)y_2(s)}{P(s)W(s)}. \quad (9.103)$$

Si calculamos la derivada,

$$\begin{aligned} G'_\lambda(x, s) &= \frac{y_1'(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y_2'(x)\theta(x-s) + [y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)]\delta(x-s)}{P(x)W(x)} \\ &= \frac{y_1'(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y_2'(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)} + \frac{y_1(s)y_2(s) - y_1(x)y_2(s)}{P(s)W(s)}\delta(x-s) \\ &= \frac{y_1'(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y_2'(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)}, \end{aligned} \quad (9.104)$$

se obtiene

$$G'_\lambda(s+0, s) - G'_\lambda(s-0, s) = \frac{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)}{P(s)W(s)} = \frac{1}{P(s)}. \quad (9.105)$$

La segunda derivada se halla fácilmente,

$$\begin{aligned}
 G''_{\lambda}(x, s) &= \frac{y''_1(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y''_2(x)\theta(x-s) + [y_1(s)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(s)]\delta(x-s)}{P(x)W(x)} \\
 &= \frac{y''_1(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y''_2(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)} + \frac{y_1(s)y'_2(s) - y'_1(s)y_2(s)}{P(s)W(s)}\delta(x-s) \\
 &= \frac{y''_1(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y''_2(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)} + \frac{1}{P(s)}\delta(x-s), \tag{9.106}
 \end{aligned}$$

y, puesto que y_1 e y_2 son soluciones del problema homogéneo, $L_{\lambda}y_i(x) = 0$, tenemos finalmente que

$$L_{\lambda}G_{\lambda}(x, s) = \frac{[L_{\lambda}y_1(x)]y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)[L_{\lambda}y_2(x)]\theta(x-s)}{P(x)W(x)} + \delta(x-s) = \delta(x-s). \tag{9.107}$$

También está claro que, por construcción, se cumplen las condiciones de contorno (9.89): la función de Green del problema es, por tanto, $G_{\lambda}(x, s)$.

En el ejemplo (9.95) tenemos para $\lambda = 0$ que las soluciones son trivialmente $y_1 = x$ e $y_2 = x - \ell$, por lo que

$$G_{\lambda}(x, s) = \begin{cases} \frac{x(s-\ell)}{\ell}, & \text{para } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{s(x-\ell)}{\ell}, & \text{para } s \leq x \leq \ell, \end{cases} \tag{9.108}$$

que es sin duda una expresión más manejable que la equivalente que se obtiene tomando $\lambda = 0$ en (9.96).

EJERCICIO 9.24 Calcule la función de Green del mismo problema para $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$.

9.7. Problemas

9.1 Teorema de Parseval⁷. Supongamos un sistema ortonormal completo $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ en el intervalo $[a, b]$:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho \equiv \int_a^b \overline{\phi_n(x)} \phi_m(x) \rho(x) dx = \delta_{nm}$$

y los desarrollos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n, \quad f_n \equiv \langle \phi_n, f \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} f(x) \rho(x) dx,$$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \phi_n, \quad g_n \equiv \langle \phi_n, g \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} g(x) \rho(x) dx.$$

Demuestre formalmente las siguientes relaciones:

$$\langle f, g \rangle_\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f_n} g_n,$$

$$\|f\|^2 \equiv \langle f, f \rangle_\rho = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2.$$

9.2 Aproximación óptima. Sea un conjunto ortonormal finito, $\{\phi_1, \dots, \phi_p\}$,

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho \equiv \int_a^b \overline{\phi_n(x)} \phi_m(x) \rho(x) dx = \delta_{nm}.$$

Demuestre que la mejor aproximación a f en media cuadrática del tipo $\sum_{n=1}^p c_n \phi_n$, es decir, tal que la cantidad

$$\|S(c)\|_\rho^2 = \langle S(c), S(c) \rangle_\rho = \int_a^b |S(c)|^2 \rho(x) dx,$$

con $S(c) \equiv f - \sum_{n=1}^p c_n \phi_n$, sea mínima, se alcanza cuando los c_n son, precisamente, los coeficientes de Fourier:

$$c_n = f_n \equiv \langle \phi_n, f \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} f(x) \rho(x) dx.$$

Sugerencia: Escriba $S(c) = f - \sum_{n=1}^p f_n \phi_n + \sum_{n=1}^p f_n \phi_n - \sum_{n=1}^p c_n \phi_n$ y calcule $\|S(c)\|_\rho^2$.

9.3 Resuelva el problema de valores propios

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

9.4 Resuelva, por dos métodos distintos, el problema de contorno

$$y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

9.5 Discuta los **desarrollos en series de Fourier de cosenos** asociados al problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\ell) = 0.$$

9.6 Comente las propiedades de las series de Fourier ordinarias de funciones pares e impares.

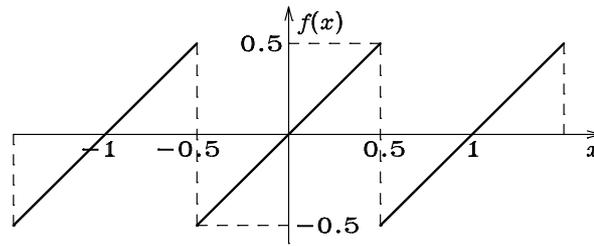


FIGURA 9.2 Función sierra.

9.7 Derivadas de las series de Fourier. A diferencia de lo que pasa con las series de potencias, las de Fourier pueden usarse con funciones discontinuas, pero la serie de la derivada no es siempre la obtenida derivando término a término. Por ejemplo, halle la serie de Fourier de la **función sierra**

$$f(x) = x - \left[x + \frac{1}{2} \right]$$

dibujada en la figura 9.2 y la de su derivada. ¿Es la última serie igual a la obtenida derivando la de la función sierra término a término? ¿Pueden integrarse término a término las series de Fourier?

9.8 Use la serie de Fourier del problema 9.7 para comprobar las siguientes sumas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

9.9 Fenómeno de Gibbs⁸. Dibuje las series truncadas de Fourier del problema 9.7 que tienen 1, 4, 16 y 64 términos, respectivamente. Comente los resultados.

9.10 Halle la serie de Fourier de $\cos ax$ en $(0, T)$.

9.11 Función de Weierstrass⁹. Use una serie de Fourier adecuada para hallar la solución periódica $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ de la ecuación funcional

$$f(2\theta) = \lambda f(\theta) + \cos \theta, \quad (0 \leq \theta < 2\pi, 1 < \lambda < 2).$$

Dibuje la solución. ¿Es continua? ¿Es diferenciable?

⁷**Marc-Antoine Parseval des Chênes** (27-04-1755, Rosières-aux-Saline, Francia; 16-08-1836, París). Solo hizo 5 publicaciones, pero la segunda contiene el teorema que lleva su nombre y que iba a ser muy utilizado en la teoría de las series de Fourier.



⁸**Josiah Willard Gibbs** (11-02-1839, New Haven, EE.UU.; 28-04-1903, New Haven). Son inolvidables sus aportaciones a la termodinámica, mientras que las hechas a las bases matemáticas de la mecánica estadística serían utilizadas luego en las teorías de Maxwell y de la mecánica cuántica. Desarrolló el análisis vectorial y le debe mucho la notación vectorial habitual hoy día en mecánica y otras ramas de la física. También trabajó en mecánica celeste y sobre la teoría electromagnética de la luz.



⁹**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (31-10-1815, Baviera; 19-02-1897, Alemania). Es el «padre» del análisis moderno. Estudió la convergencia de series y productos infinitos y proporcionó el primer ejemplo de función continua que no admite derivada en ningún punto. También estudió funciones analíticas, elípticas, abelianas y periódicas, así como el cálculo de variaciones y las formas cuadráticas.

9.12 Series de Fourier complejas. Pruebe que, si se admiten soluciones complejas del problema (9.65), el siguiente es un conjunto ortonormal:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega x} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

En consecuencia, la serie de Fourier de una función $f(x)$ real o compleja puede escribirse como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad \left(\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \right),$$

estando los coeficientes dados por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx.$$

¿Por qué aparece en la última integral $e^{-in\omega x}$, y no $e^{in\omega x}$? ¿Cuál es la relación entre esta serie y (9.67)? ¿Qué condición debe satisfacer el **espectro de Fourier** $\{c_n\}$ para que la función f sea real?

9.13 Demuestre que el valor medio de la función periódica $f(x) = f(x + T)$ es

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

9.14 El peine de Dirac. Demuestre que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega x} = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n\omega x, \quad \left(\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \right).$$

9.15 Fórmula de Poisson¹⁰. Supongamos que la transformada de Fourier de $f(x)$ es

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx.$$

Use el peine de Dirac del problema 9.14 para probar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT), \quad \left(\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \right).$$

9.16 Demuestre la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}}.$$



¹⁰ **Siméon Denis Poisson** (21-06-1781, Pithiviers, Francia; 25-04-1842, Sceaux, Francia). Entre sus numerosas aportaciones, las más recordadas en física son la ecuación de Poisson en la teoría del potencial y los corchetes de Poisson en mecánica hamiltoniana. También trabajó en astronomía, mecánica y electromagnetismo. En matemáticas se recuerdan sus trabajos sobre probabilidades, incluida la distribución de Poisson, pero los más importantes son, tal vez, los dedicados a las integrales definidas

y las series de Fourier.

9.17 Repita el problema 9.7 usando funciones generalizadas.

9.18 Halle la función de Green del siguiente problema:

$$y'' - k^2 y = f(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

9.19 Halle la función de Green de

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

9.20 Determine, si existe, la solución periódica de

$$y'' + 2y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^4}.$$

9.21 Calcule, si existe, la solución periódica de la siguiente ecuación:

$$y'' + 4y = \sin^2 x.$$

9.22 Discuta el problema de valores propios

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = 0, \quad y(1) = y'(e^\pi) = 0.$$

9.23 Halle el desarrollo trigonométrico de Fourier de la función periódica, con período π , que coincide con $\cos x$ en $[0, \pi)$. ¿Cuáles son sus correspondientes series de Fourier de senos y cosenos?

9.24 Considere la ecuación de Legendre

$$\left[(1 - x^2) y' \right]' + \lambda y = 0,$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$y(0) = 0, \quad y \text{ e } y' \text{ acotadas cuando } x \rightarrow 1.$$

Demuestre que las funciones propias de este problema singular son los polinomios de Legendre y halle los correspondientes valores propios. Calcule la expresión formal para la función de Green y la solución del problema inhomogéneo asociado.

9.25 Use el método de Cauchy para calcular la solución general de

$$y'' + \frac{x}{1+x} y' - \frac{1}{1+x} y = 1 + x.$$

Halle la ecuación de Sturm-Liouville asociada y construya su función de Green para las condiciones de contorno

$$y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

Resuelva el problema de contorno por dos métodos distintos.

9.26 Halle el mínimo valor de ℓ que hace que el siguiente problema de contorno tenga soluciones no triviales:

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0.$$

APÉNDICES

Apéndice A

Teoremas fundamentales

*Everything should be made as simple as possible,
but not simpler.*
Albert Einstein

Por conveniencia recogemos aquí las demostraciones de algunos de los teoremas fundamentales de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El lector puede recurrir a la bibliografía de la página 324 para encontrar enunciados y demostraciones alternativas y otros teoremas importantes.

A.1. El teorema de Picard

Comenzaremos enunciando y demostrando el clásico teorema de existencia y unicidad en el caso más sencillo, para poder ver las ideas esenciales que intervienen en la demostración sin necesidad de complicaciones técnicas introducidas por un orden superior al primero o la presencia de más de una ecuación.

Teorema A.1 (Existencia y unicidad) *Sea una función $f(x, y)$ continua en el rectángulo cerrado*

$$\mathcal{R} = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq A, |y - y_0| \leq B \}, \quad (\text{A.1})$$

donde, por tanto, está necesariamente acotada:

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}. \quad (\text{A.2})$$

*Supongamos que también satisface en \mathcal{R} una **condición local de Lipschitz**¹:*

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|, \quad \forall (x, y), (x, z) \in \mathcal{R}. \quad (\text{A.3})$$

Entonces el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (\text{A.4})$$



¹ **Rudolf Otto Sigismund Lipschitz** (14-05-1832, Königsberg, Prusia —hoy día es Kaliningrad, Rusia—; 7-10-1903, Bonn, Alemania). Aunque se le recuerda sobre todo por esta condición que garantiza la unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales, hizo otras importantes contribuciones en mecánica, cálculo de variaciones, teoría de formas diferenciales cuadráticas, representación de grupos, funciones de Bessel y teoría de fluidos viscosos.

tiene una solución $y(x)$ en el intervalo

$$I = [x_0 - h, x_0 + h], \quad h \equiv \min\left(A, \frac{B}{M}\right), \quad (\text{A.5})$$

donde $y'(x)$ es continua. Además, toda otra solución del mismo problema en I coincide allí con $y(x)$. La solución es continua con respecto a x_0 .

El siguiente ejercicio ayuda a comprender el alcance y significado del teorema, cuya demostración abordaremos a continuación.

EJERCICIO A.1

1. Demuestre que la condición de Lipschitz implica la continuidad respecto a y .
2. Use la función $f(x, y) = \sqrt{y}$ en $[0, 1] \times [0, 1]$ para probar que la continuidad no implica necesariamente la condición de Lipschitz.
3. Halle una función que satisfaga la condición de Lipschitz, pero no sea continua con respecto a x .
4. Pruebe que si f y su derivada $\partial f/\partial y$ son continuas en \mathcal{R} , la condición de Lipschitz se cumple.
5. Demuestre que la continuidad de f no asegura la unicidad de la solución (aunque el teorema de Peano garantiza su existencia).
6. Use el problema $y' = y^2$, $y(0) = y_0$ para ver que el intervalo de definición I de una solución puede ser más corto que la anchura A del rectángulo \mathcal{R} .

La demostración se basa en el método de aproximaciones sucesivas de Picard que vimos en el apartado 7.3 y será hecha en tres pasos.

A.1.1. Existencia de la solución

Supongamos que iniciamos la iteración de Picard con $y^{[0]}(x) = y_0$, que está en el rectángulo

$$\mathcal{R}' = \{(x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq B\} \subset \mathcal{R}. \quad (\text{A.6})$$

Demostraremos por inducción completa que todas las aproximaciones $y^{[n]}$ están en \mathcal{R}' , es decir, que para $|x - x_0| \leq h$, cumplen $|y^{[n]}(x) - y_0| \leq B$. En efecto, si $y^{[n]}$ está en \mathcal{R}' , lo mismo pasa con $y^{[n+1]}$ porque en virtud de (7.27) tenemos que, para $x \in I$,

$$|y^{[n+1]}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[u, y^{[n]}(u)] du \right| \leq M |x - x_0| \leq Mh \leq B. \quad (\text{A.7})$$

Definamos

$$S_n(x) \equiv |y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.8})$$

y usemos de nuevo inducción completa para establecer que

$$S_n(x) \leq MK^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}. \quad (\text{A.9})$$

La propiedad se satisface para $n = 1$, ya que

$$S_1(x) \leq \left| \int_{x_0}^x f(u, y_0) du \right| \leq M |x - x_0|, \quad (\text{A.10})$$

y si se cumple para S_n también es cierto que

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x) &= \left| \int_{x_0}^x [f(u, y^{[n]}(u)) - f(u, y^{[n-1]}(u))] du \right| \leq K \left| \int_{x_0}^x |y^{[n]}(u) - y^{[n-1]}(u)| du \right| \\ &= K \left| \int_{x_0}^x S_n(u) du \right| \leq K \left| \int_{x_0}^x MK^{n-1} \frac{|u - x_0|^n}{n!} du \right| = MK^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{M(Kh)^{n+1}}{K(n+1)!}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Puesto que la serie

$$\frac{M}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Kh)^n}{n!} = \frac{M}{K} (e^{Kh} - 1) \quad (\text{A.12})$$

converge y es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} [y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)]$, esta última serie converge absoluta y uniformemente, pero se trata de una serie telescópica cuya suma parcial es

$$\sum_{n=1}^N [y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)] = y^{[N]}(x) - y_0. \quad (\text{A.13})$$

En consecuencia, el límite

$$y(x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} y^{[N]}(x) \quad (\text{A.14})$$

existe y la convergencia uniforme hace que la sucesión (7.27) converja hacia (7.28). Por tanto, la función definida en (A.14) es solución del problema de condiciones iniciales. Como $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)] - y_0$ converge absoluta y uniformemente, lo mismo hace su derivada

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [y'^{[n]}(x) - y'^{[n-1]}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} y'^{[n]}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f[x, y^{[n-1]}(x)], \quad (\text{A.15})$$

que es, en consecuencia, continua.

Debe señalarse que, en realidad, la iteración puede comenzarse con cualquier función integrable $y^{[0]}(x) = \psi(x)$, ya que la misma es acotada y puede repetirse el razonamiento de arriba, reemplazando la constante M con $\max(M, \sup |\psi(x)|)$, para ver que $\sum_{n=1}^{\infty} [y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)]$ es uniformemente convergente.

A.1.2. Unicidad de la solución

Supongamos que hay dos soluciones $y(x)$ y $z(x)$ en el rectángulo \mathcal{R}' y construyamos la función no negativa

$$\psi(x) \equiv [y(x) - z(x)]^2, \quad (\text{A.16})$$

que satisface $\psi(x_0) = 0$, por cumplir ambas soluciones la misma condición inicial, y

$$\psi'(x) = 2(y - z)(y' - z') \leq 2|y - z| |f(x, y) - f(x, z)| \leq 2K|y - z|^2 = 2K\psi(x). \quad (\text{A.17})$$

En consecuencia,

$$\psi'(x) - 2K\psi(x) \leq 0, \quad (\text{A.18})$$

y el multiplicador positivo e^{-2Kx} convierte esta inecuación en

$$\frac{d}{dx} [e^{-2Kx} \psi(x)] \leq 0, \quad (\text{A.19})$$

lo que prueba que $e^{-2Kx}\psi(x)$ no es creciente, por lo que para $x > x_0$

$$e^{-2Kx}\psi(x) \leq e^{-2Kx_0}\psi(x_0) = 0. \quad (\text{A.20})$$

En consecuencia, $\psi(x) = 0$ y las dos soluciones coinciden para $x \geq x_0$. Para $x < x_0$, basta repetir el razonamiento con la cota $\psi'(x) + 2K\psi(x) \geq 0$.

A.1.3. Dependencia continua de las condiciones iniciales

Si escribimos explícitamente la dependencia de la condición inicial y definimos, para dos soluciones correspondientes a condiciones iniciales distintas, $y(x_0; y_0) = y_0$ e $y(x_0; z_0) = z_0$,

$$\psi(x) \equiv [y(x; y_0) - y(x; z_0)]^2, \quad (\text{A.21})$$

podemos repetir el argumento del anterior apartado para ver que, para $x > x_0$,

$$e^{-2Kx}\psi(x) \leq e^{-2Kx_0}\psi(x_0), \quad (\text{A.22})$$

o, extrayendo la raíz cuadrada,

$$|y(x; y_0) - y(x; z_0)| \leq e^{K(x-x_0)} |y_0 - z_0| \leq e^{Kh} |y_0 - z_0|, \quad (\text{A.23})$$

de donde la continuidad se demuestra inmediatamente ya que para cada $\epsilon > 0$ tenemos que si $|y_0 - z_0| < \delta \equiv \epsilon e^{-Kh}$ entonces

$$|y(x; y_0) - y(x; z_0)| < \epsilon. \quad (\text{A.24})$$

A.2. Comparación de soluciones

El siguiente teorema es útil a menudo para establecer resultados cualitativos.

Teorema A.2 Sean dos funciones continuas $f(x, y)$ y $g(x, y)$ que satisfacen la condición de Lipschitz en el rectángulo \mathcal{R} , donde, además, se cumple $f(x, y) \leq g(x, y)$. Dadas dos soluciones $y(x)$ y $z(x)$ correspondientes a la misma condición inicial,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (\text{A.25})$$

$$z' = g(x, z), \quad z(x_0) = y_0, \quad (\text{A.26})$$

y $x_1 > x_0$ (dentro del intervalo en que ambas soluciones están definidas), entonces

1. $y(x_1) < z(x_1)$, o, en caso contrario,
2. $y(x) = z(x)$ para todo $x_0 \leq x \leq x_1$.

Procediendo por reducción al absurdo, supondremos que hay un punto $x_3 > x_0$ en que $y(x_3) > z(x_3)$. Como ambas soluciones son continuas y coinciden en x_0 debe haber un punto máximo x_2 tal que $y(x) \leq z(x)$ para $x_0 \leq x \leq x_2$ e $y(x) > z(x)$ para $x_2 < x \leq x_3$. Si definimos $\psi(x) \equiv y(x) - z(x)$, tenemos para $x_2 < x \leq x_3$

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= f(x, y) - g(x, z) \leq g(x, y) - g(x, z) \leq |g(x, y) - g(x, z)| \\ &\leq K|y - z| = K(y - z) = K\psi(x), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

donde K es la constante de Lipschitz de g . Multiplicando la desigualdad por e^{-Kx} se tiene que $e^{-Kx}\psi(x)$ no puede crecer en $x_2 < x \leq x_3$, por lo que

$$e^{-Kx_3}\psi(x_3) \leq e^{-Kx_2}\psi(x_2) = 0, \quad (\text{A.28})$$

lo que contradice la hipótesis de que $y(x_3) > z(x_3)$. Por tanto, para $x > x_0$ en el intervalo común de definición $y(x) \leq z(x)$.

Supongamos que hay un punto x_2 en que $y(x_2) < z(x_2)$. Entonces $\psi(x_2) < 0$ y

$$\psi'(x) \leq K|y - z| = K(z - y) = -K\psi(x), \quad (\text{A.29})$$

que con el multiplicador e^{Kx} muestra que $e^{Kx}\psi(x)$ no crece, por lo que para $x > x_2$

$$e^{Kx}\psi(x) \leq e^{Kx_2}\psi(x_2) < 0. \quad (\text{A.30})$$

Por tanto, $\psi(x) < 0$ e $y(x) < z(x)$ para $x > x_2$. En consecuencia, si $y(x_1) = z(x_1)$ en algún punto, necesariamente se cumple que $y(x) = z(x)$ para $x_0 \leq x \leq x_1$.

A.3. Existencia global de la solución

Como ya se ha señalado, en general el intervalo de definición de la solución puede ser más corto que aquél en que se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad: el teorema del apartado A.1 establece la existencia *local* de la solución en un intervalo cuya longitud, h , puede ser mucho menor que A . El siguiente teorema prueba que en ciertos casos —que incluyen las importantes ecuaciones lineales— puede garantizarse que la solución se extiende a todo el intervalo. (Puede verse la referencia [4] para ver que también se extiende a ecuaciones mayoradas por una ecuación lineal).

Teorema A.3 *Sea una función $f(x, y)$ continua que satisface la condición de Lipschitz*

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z| \quad (\text{A.31})$$

en una banda $\mathcal{B} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$. Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in \mathcal{B}$, el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (\text{A.32})$$

tiene una y solo una solución definida en todo el intervalo $a \leq x \leq b$.

En particular, la solución de una ecuación lineal

$$y' + A(x)y = B(x) \quad (\text{A.33})$$

está definida a lo largo de todo intervalo en que A y B sean continuas.

El razonamiento del apartado A.1.1 puede repetirse casi palabra por palabra para demostrar que, si $M \equiv |y_0| + \sup |y^{[1]}|$,

$$|y^{[n+1]}(x) - y^{[n]}(x)| \leq M \frac{K^n |x - x_0|^n}{n!} \leq M \frac{K^n (b - a)^n}{n!}, \quad (\text{A.34})$$

lo que garantiza la convergencia uniforme de las aproximaciones de Picard para todo el intervalo $a \leq x \leq b$.

Para probar la unicidad supongamos que exista otra solución, $z(x)$:

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[u, z(u)] du. \quad (\text{A.35})$$

Entonces, como z es continua hay una cota $C \geq |z(x) - y_0|$ en todo el intervalo y, por tanto,

$$\begin{aligned} |z(x) - y^{[1]}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f[u, z(u)] - f[u, y_0]| du \right| \\ &\leq K \left| \int_{x_0}^x |z(u) - y_0| du \right| \leq CK |x - x_0|, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} |z(x) - y^{[2]}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f[u, z(u)] - f[u, y^{[1]}(u)]| du \right| \\ &\leq K \left| \int_{x_0}^x |z(u) - y^{[1]}(u)| du \right| \\ &\leq CK^2 \left| \int_{x_0}^x |u - x_0| du \right| \leq CK^2 \frac{|x - x_0|^2}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

y, en general,

$$|z(x) - y^{[n]}(x)| \leq CK^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq CK^n \frac{(b - a)^n}{n!}. \quad (\text{A.38})$$

Tomando el límite $n \rightarrow \infty$ el lado derecho de la última ecuación se anula, con lo que queda demostrado que $z(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^{[n]}(x) = y(x)$.

Para la ecuación lineal basta ver que, si A y B son continuas en $a \leq x \leq b$, también se cumple

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq |-A(x)(y - z)| \leq K|y - z| \quad (\text{A.39})$$

en toda la banda \mathcal{B} .

Apéndice B

Métodos simbólicos

*One machine may do the work of fifty ordinary men.
No machine can do the work of one extraordinary man.*
Elbert Hubbard

No creemos que éste sea el lugar idóneo para iniciar al alumno en el uso de los sistemas de cálculo simbólico¹, ya que, como hemos defendido en otra ocasión [40], hay que dedicar bastante tiempo y esfuerzo para aprender a hacer un uso correcto de tan potente, pero delicado, instrumento. Nos limitaremos en este apéndice a indicar someramente las posibilidades relacionadas con la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. El sistema elegido aquí es Mathematica, pero algo parecido podría decirse sobre cualquier otro programa. Usamos la última versión disponible al escribir estas líneas:

```
In[1]:= {$Version, $ReleaseNumber}
Out[1]= {4.0 for Microsoft Windows (July 21, 1999), 1}
```

Algunas dificultades y fallos que aquí encontraremos podrían desaparecer en la próxima versión del programa, pero otros ocuparán su lugar, sin lugar a dudas. De hecho, cuando escribimos por primera vez este capítulo usábamos otra versión, pero los ejemplos de repuesto que hubo que buscar para mostrar los problemas de la versión actual se encontraron sin mayor esfuerzo.

B.1. Métodos exactos

Hoy día los sistemas de cálculo simbólico son ya muy útiles para la resolución exacta de ecuaciones diferenciales ya que, además de muchos métodos clásicos, incorporan algunos potentes algoritmos que solo resultan prácticos cuando los tediosos y a menudo interminables cálculos intermedios son realizados por ese *idiot savant* que es el ordenador.

En Mathematica la función que permite resolver una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales se llama `DSolve` y tiene tres argumentos que, como de costumbre, aparecen entre corchetes separados por comas:

¹Puesto que el tema de este texto son las ecuaciones diferenciales y no Mathematica, supondremos que el lector conoce los rudimentos del uso de este programa. Una anticuada introducción al mismo, que tiene las (únicas) ventajas de ser gratuita y corta, puede hallarse en [39].

1. La ecuación a resolver o el sistema de ecuaciones entre llaves. El signo de igualdad de una ecuación debe escribirse como == (para distinguirlo del = de una asignación) y la dependencia con respecto a la variable independiente debe indicarse explícitamente (como $y[x]$ e $y'[x]$, por ejemplo).
2. La variable dependiente (o las variables dependientes entre llaves).
3. La variable independiente.

Por ejemplo, la ecuación del problema 2.17 se resuelve (usando la forma normal, ya que no entiende la canónica) como sigue:

```
In[2]:= DSolve[y[x]^2 - 1 + (3 x^2 - 2 x y[x]) y'[x] == 0, y[x], x]
Out[2]= {{y[x] -> 1/2 (3 x - sqrt(4 + 9 x^2 + 4 x C[1]))},
         {y[x] -> 1/2 (3 x + sqrt(4 + 9 x^2 + 4 x C[1]))}}
```

Las dos soluciones aparecen como reglas de sustitución y la constante arbitraria se indica mediante $C[1]$. Por supuesto, la solución no siempre se expresa de la forma más «conveniente».

EJERCICIO B.1 ¿Cómo escribiría esa solución de forma más compacta y «estética»?

Junto con las ecuaciones diferenciales pueden incluirse las condiciones iniciales:

```
In[3]:= DSolve[{y[x]^2 - 1 + (3 x^2 - 2 x y[x]) y'[x] == 0, y[1] == 1},
              y[x], x]
Out[3]= {{y[x] -> 1}}
```

Claro está que, en esto y otras muchas cosas, a menudo necesita ayuda, como puede verse en el caso del problema 2.6:

```
In[4]:= DSolve[{(1 - x^2) y'[x] == 1 - y[x]^2, y[1] == 1}, y[x], x]
Power::infy: Infinite expression 1/0 encountered.
Out[4]= {}
```

Aquí no ha sido muy «listo», ya que sabe calcular la solución general,

```
In[5]:= DSolve[(1 - x^2) y'[x] == 1 - y[x]^2, y[x], x]
Out[5]= {{y[x] -> (1 + x - C[1] + x C[1]) / (1 + x + C[1] - x C[1])}}
```

donde se halla inmediatamente «por inspección» —una habilidad exclusivamente humana que asignaturas como ésta intentan potenciar— que la condición inicial se satisface para todos los valores de la constante de integración, excepto en el límite $C[1] \rightarrow \infty$, donde se recupera la solución $y = -1$.

Además, no sabe hallar la solución de todas las ecuaciones que un usuario de este texto debería ser capaz de resolver, como la siguiente ecuación de Clairaut:

```
In[6]:= DSolve[Y[x] == x Y'[x] - Y[x]^3, Y[x], x]
```

```
Out[6]= DSolve[Y[x] == x Y'[x] - Y[x]^3, Y[x], x]
```

EJERCICIO B.2 Trate de resolver la ecuación del ejercicio 2.30 con su programa de cálculo algebraico.

En cambio, puede ser sorprendentemente hábil calculando la forma cerrada de las soluciones de ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden, como la del problema 6.9:

```
In[7]:= DSolve[x Y''[x] - Y[x] == 0, Y[x], x]
```

```
Out[7]= {{Y[x] -> Sqrt[x] BesselI[1, 2 Sqrt[x]] C[1] + Sqrt[x] BesselK[1, 2 Sqrt[x]] C[2]}}
```

EJERCICIO B.3 Compruebe que esta solución coincide con la que calculó a mano.

También es capaz de resolver sistemas de ecuaciones. Los sistemas lineales con coeficientes constantes son los más fáciles, pero solo la función `FullSimplify`, que ha sido introducida en las últimas versiones del programa, es capaz de dar una expresión razonablemente simple para la solución, como en el caso del problema 4.24:

```
In[8]:= DSolve[{x'[t] == -5 x[t] - 2 y[t],
               y'[t] == x[t] - 7 y[t]}, {x[t], y[t]}, t] //
FullSimplify
```

```
Out[8]= {{x[t] -> e^-6 t (C[1] Cos[t] + (C[1] - 2 C[2]) Sin[t]),
          y[t] -> e^-6 t (C[2] Cos[t] + (C[1] - C[2]) Sin[t])}}
```

EJERCICIO B.4 Resuelva este sistema sin usar la función de simplificación.

Asimismo sabe resolver (algunos) sistemas no lineales, pero como en muchas otras ocasiones necesita ayuda para simplificar el resultado.

EJERCICIO B.5 Use Mathematica para resolver el sistema

$$\dot{x} = -xy, \quad \dot{y} = -y + x^2 - 2y^2. \quad (\text{B.1})$$

Compruebe si puede simplificar el resultado hasta expresarlo, en términos de las condiciones iniciales en $t = 0$, como sigue:

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2(t - 1 + e^{-t})x_0^2 + 2(1 - e^{-t})y_0}}, \quad y = (1 - e^{-t} + y_0 x_0^{-2} e^{-t}) x^2. \quad (\text{B.2})$$

Los resultados pueden llegar a ser abrumadores. Así, si ensayamos la ecuación del problema 2.26, obtenemos un resultado difícil de entender, como se muestra en las siguientes páginas; pero un poco de práctica permite reconocer que las soluciones son las raíces de dos ecuaciones cúbicas, que pueden recuperarse para obtener la solución general en forma implícita. Como ya se ha dicho antes, estos sistemas son un útil poderoso e imprescindible, mas no son fáciles de usar: hay que aprender a manejarlos y a interpretar los resultados.

Huge.nb

1

In[1]:= yy = DSolve[y' [x]^2 - 2 x y' [x] + y[x] == 0, y[x], x]

Out[1]= { {Y[x] → $\frac{x^2}{4} + \frac{e^{-6c[1]} (72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)}{36 (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} - \frac{1}{4} e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}$ },
 {Y[x] → $\frac{x^2}{4} - \frac{(1 + i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)}{72 (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \frac{1}{8} (1 - i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}$ },
 {Y[x] → $\frac{x^2}{4} - \frac{(1 - i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)}{72 (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \frac{1}{8} (1 + i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}$ },
 {Y[x] → $\frac{x^2}{4} + (e^{-6c[1]} (-72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)) / (36 (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}) - \frac{1}{4} e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}$ },
 , {Y[x] → $\frac{x^2}{4} - ((1 + i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (-72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)) / (72 (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}) + \frac{1}{8} (1 - i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}$ },
 , {Y[x] → $\frac{x^2}{4} - ((1 - i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (-72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)) / (72 (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}) + \frac{1}{8} (1 + i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}$ }}

Huge.nb

2

```
In[2]:= yy = Simplify[PowerExpand[Simplify[yy]]]
```

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[2]= & \left\{ \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{e^{-C[1]} x (-8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. e^{-2 C[1]} (8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{8} \left(2 x^2 + \frac{(1 + i \sqrt{3}) e^{-C[1]} x (-8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 - i \sqrt{3}) e^{-2 C[1]} (8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{8} \left(2 x^2 + \frac{(1 - i \sqrt{3}) e^{-C[1]} x (-8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 + i \sqrt{3}) e^{-2 C[1]} (8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{e^{3 C[1]} x (8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2}))^{1/3}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. e^{-6 C[1]} (e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2}))^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{8} \left(2 x^2 + \frac{(1 + i \sqrt{3}) e^{3 C[1]} x (8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2}))^{1/3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 - i \sqrt{3}) e^{-6 C[1]} (e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2}))^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{8} \left(2 x^2 + \frac{(1 - i \sqrt{3}) e^{3 C[1]} x (8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2}))^{1/3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 + i \sqrt{3}) e^{-6 C[1]} (e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2}))^{1/3} \right) \right\} \}
 \end{aligned}$$

```
In[3]:= (y - (y[x] /. yy[[1, 1]]))
(y - (y[x] /. yy[[2, 1]])) (y - (y[x] /. yy[[3, 1]])) // Simplify
```

$$\text{Out}[3]= \frac{1}{4} (e^{-6 C[1]} + y^2 (-3 x^2 + 4 y) + e^{-3 C[1]} (-4 x^3 + 6 x y))$$

```
In[4]:= (y - (y[x] /. yy[[4, 1]]))
(y - (y[x] /. yy[[5, 1]])) (y - (y[x] /. yy[[6, 1]])) // Simplify
```

$$\text{Out}[4]= \frac{1}{4} (e^{-6 C[1]} + y^2 (-3 x^2 + 4 y) + e^{-3 C[1]} (4 x^3 - 6 x y))$$

No podemos acabar este apartado sin hacer dos notas que quisiéramos que el lector tomara muy en cuenta. En primer lugar, el hecho de que un programa de cálculo simbólico dé un cierto resultado no es prueba de que el mismo sea correcto. *Todos los programas tienen errores*, como los tienen todas las tablas de integrales y todos los textos (incluido éste, claro). Por ejemplo, en el caso del problema 6.25, el programa escribe dos constantes arbitrarias para la solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden,

```
In[9]:= DSolve[ x (x - 1) Y'' [x] + 3 Y' [x] - 2 Y[x] == 0, Y[x], x]
Out[9]= {{Y[x] -> \frac{x^4 C[1]}{(-1 + x)^2} + \frac{x^4 C[2]}{(-1 + x)^2}}}
```

pero no son independientes:

```
In[10]:= Simplify[ Out [9] ]
Out[10]= {{Y[x] -> \frac{x^4 (C[1] + C[2])}{(-1 + x)^2}}}
```

Por otro lado, incluso cuando no se trata de un error de programación, la validez de un resultado puede depender de hipótesis implícitas que se mantienen completamente ocultas de la vista del usuario (véase [40]). Como con los cálculos hechos a mano, *los resultados proporcionados por un sistema de cálculo algebraico deben ser comprobados siempre*. Por fortuna, esta tarea es facilitada a menudo por el propio sistema: nada es más sencillo (a veces al menos, ya que las funciones de simplificación para ver si dos expresiones son iguales o no dejan aún mucho que desear) que usar el propio programa para comprobar que la solución que ha hallado satisface realmente la ecuación. Claro que esto no excluye la existencia de otras soluciones, incluso más importantes, ni que la hallada solo sea válida con ciertas restricciones implícitas. Por ejemplo, no debe esperarse que los sistemas actuales encuentren las soluciones singulares de ecuaciones no lineales. Consideremos el caso de la ecuación de Clairaut del ejercicio 2.29, cuya solución general sabe hallar,

```
In[11]:= eq = Y[x] == x Y' [x] - Y' [x]^2;
          DSolve[eq, Y[x], x]
Out[12]= {{Y[x] -> -\frac{1}{4} C[1] (2 x + C[1])}}
In[13]:= yy = Y[x] /. %[[1]] /. C[1] -> -2 C // Expand
Out[13]= -C^2 + C x
```

pero no la parábola envolvente de cálculo elemental:

```
In[14]:= Eliminate[{ Y == yy, D[yy, C] == 0 }, C]
Out[14]= 4 Y == x^2
```

Por otro lado, puede usarse el propio programa para comprobar que la solución general que ha hallado satisface la ecuación:

```
In[15]:= eq /. Y -> Function[x, Evaluate[yy]] // Simplify
Out[15]= True
```

EJERCICIO B.6 Compruebe que la parábola $4y = x^2$ es una solución singular de la ecuación.

En segundo lugar queremos resaltar que, incluso cuando el sistema no es capaz de hallar la solución, puede resultar, en manos de un usuario avezado con buenos conocimientos sobre ecuaciones diferenciales, un auxiliar de primera clase en la tarea de hallar la solución o, al menos, ciertas de sus propiedades, ya que muchos de los cálculos intermedios necesarios para aplicar las técnicas aprendidas en esta asignatura son realizados de forma harto eficaz mediante un programa de cálculo simbólico. Veamos qué pasa con la ecuación lineal homogénea (6.117), para la que el programa da un resultado de difícil interpretación:

```
In[16]:= eq = (x + x^2) y''[x] - x y'[x] + y[x];
          DSolve[eq == 0, y[x], x]
Out[17]= {{y[x] -> x C[1] + C[2] MeijerG[{{}, {2, 2}], {{0, 1}, {}], -x]}}
```

A veces pueden usarse `FunctionExpand` y `FullSimplify` para simplificar la función `MeijerG`, pero no en este caso:

```
In[18]:= % // FunctionExpand // FullSimplify
Out[18]= {{y[x] -> x C[1] + C[2] MeijerG[{{}, {2, 2}], {{0, 1}, {}], -x]}}
```

Como la primera solución (con $C_2 = C[2] = 0$) es simple, podemos recurrir al método de d'Alembert de la sección 3.7.5 y hacer y comprobar los cálculos con el programa:

```
In[19]:= eq1 = Expand[eq /. y -> Function[x, x Integrate[z[x] dx]]]
Out[19]= 2 x z[x] + x^2 z[x] + x^2 z'[x] + x^3 z'[x]
In[20]:= DSolve[eq1 == 0, z[x], x][[1, 1, 2]] // Simplify
Out[20]= (1 + x) C[1]
          x^2
In[21]:= x ( Integrate[% dx + C[2] ) // Simplify
Out[21]= -C[1] + x C[2] + x C[1] Log[x]
In[22]:= eq /. y -> Function[x, A x + B (x Log[x] - 1)] // Simplify
Out[22]= 0
```

EJERCICIO B.7 Use Mathematica para resolver $2y'y''' = 3(y'')^2$.

B.2. Transformaciones de Laplace y Fourier

Puede usarse Mathematica para hallar transformadas de Laplace directas e inversas. Por ejemplo, en el caso del ejercicio 5.16 obtenemos

```
In[1]:= InverseLaplaceTransform[ $\frac{2s-4}{s^2+4s+8}$ , s, t]
Out[1]=  $e^{(-2-2i)t} ((1-2i) + (1+2i)e^{4it})$ 
```

Como muchas otras veces, hace falta un poco de ayuda por parte del usuario para simplificar el resultado:

```
In[2]:= % // ExpToTrig // Simplify
Out[2]= 2 (Cos[2 t] - 2 Sin[2 t]) (Cosh[2 t] - Sinh[2 t])
```

Vemos que el último factor es una simple exponencial, y podemos valernos del mismo programa para comprobar el resultado:

```
In[3]:= LaplaceTransform[2 e-2t (Cos[2 t] - 2 Sin[2 t]), t, s] //
Simplify
Out[3]=  $\frac{2(-2+s)}{8+4s+s^2}$ 
```

Conoce algunas transformadas que no aparecen en todas las tablas,

```
In[4]:= LaplaceTransform[ $\frac{1}{1+t^2}$ , t, s]
Out[4]= CosIntegral[s] Sin[s] +  $\frac{1}{2}$  Cos[s] ( $\pi - 2$  SinIntegral[s])
```

pero no es capaz de calcular la inversa de la transformada que acaba de hallar,

```
In[5]:= InverseLaplaceTransform[%, s, t]
Out[5]= InverseLaplaceTransform[
CosIntegral[s] Sin[s] +  $\frac{1}{2}$  Cos[s] ( $\pi - 2$  SinIntegral[s]), s, t]
```

ni tampoco la transformada del problema 5.19, que el lector debería saber encontrar:

```
In[6]:= LaplaceTransform[ $\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ , t, s]
Out[6]= -LaplaceTransform[ $\frac{e^{-2t}}{t}$ , t, s] + LaplaceTransform[ $\frac{e^{-t}}{t}$ , t, s]
```

Asimismo, puede calcular la transformada de funciones generalizadas. En el siguiente ejemplo proporciona una muy precisa respuesta, por medio de la función UnitStep que usa para representar la de Heaviside: $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \theta(a)e^{-as}$ (esto vale incluso cuando $a = 0$, ya que Mathematica usa en convenio $\text{UnitStep}[0]=1$).

```
In[7]:= LaplaceTransform[DiracDelta[t-a], t, s]
Out[7]=  $e^{-as}$  UnitStep[a]
```

Por desgracia, parece que al calcular la inversa de esta transformada aplica ciegamente el teorema del desplazamiento:

```
In[8]:= InverseLaplaceTransform[e-as UnitStep[a], s, t]
InverseLaplaceTransform[e-as, s, t]

Out[8]= DiracDelta[a - t] UnitStep[a] UnitStep[-a + t]

Out[9]= DiracDelta[a - t] UnitStep[-a + t]
```

EJERCICIO B.8 ¿Por qué no es correcto el término `UnitStep[t-a]` que introduce?

El programa sabe reducir a algebraicas las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, pero no merece la pena usar esto para resolver ese tipo de problemas, ya que el uso de `DSolve` es más fácil y rápido. Por el contrario, puede usarse la transformación de Laplace para resolver algunas ecuaciones integrales de Volterra, que el programa no conoce directamente. Por ejemplo, en el caso del problema 5.13, se halla fácilmente la transformada de la incógnita,

```
In[10]:= equ = x[t] == Cos[t] + Integrate[e-(t-u) x[u] du,
LaplaceTransform[equ, t, s]
Solve[%, LaplaceTransform[x[t], t, s]] // Simplify

Out[11]= LaplaceTransform[x[t], t, s] ==
s / (1 + s2) + LaplaceTransform[x[t], t, s] / (1 + s)

Out[12]= {{LaplaceTransform[x[t], t, s] -> (1 + s) / (1 + s2)}}
```

y, luego, la solución. Además, se comprueba sin dificultad que el resultado es realmente solución (como se ha señalado antes, *esta comprobación debería realizarse siempre*):

```
In[13]:= InverseLaplaceTransform[(1 + s) / (1 + s2), s, t]
equ /. x -> Function[t, Evaluate[%]] // Simplify

Out[13]= Cos[t] + Sin[t]

Out[14]= True
```

EJERCICIO B.9 Resuelva el problema 5.20 con Mathematica.

Por otro lado, el programa conoce todas las variantes usadas al definir la transformación de Fourier y debe usarse la opción `FourierParameters` para indicarle la que se desea. Con objeto de aligerar la notación en los siguientes ejemplos, definiremos las transformadas directa e inversa de Fourier mediante las siguientes funciones:

```
In[15]:= DF[f_] := FourierTransform[f, x, p, FourierParameters -> {1, -1}]
IF[f_] := InverseFourierTransform[f, p, x,
FourierParameters -> {1, -1}]
```

De esta forma pueden calcularse las transformadas de funciones ordinarias,

```
In[17]:= DF [ e-x2/a2 ]
          IF [%]
Out[17]=  $\sqrt{a^2} e^{-\frac{1}{4} a^2 p^2} \sqrt{\pi}$ 
Out[18]=  $e^{-\frac{x^2}{a^2}}$ 
```

así como las de las generalizadas,

```
In[19]:= DF [1]
          IF [DiracDelta[p]]
Out[19]= 2 π DiracDelta[p]
Out[20]=  $\frac{1}{2 \pi}$ 
```

pero, como de costumbre, hay que ser cuidadoso: calcula mal una de las transformadas más conocidas, a pesar de hallar sin dificultad su inversa.

```
In[21]:= IF [  $\frac{\text{Sin}[a p]}{p}$  ]
          DF [%] // Expand // FullSimplify
Out[21]=  $\frac{1}{4} (\text{Sign}[a - x] + \text{Sign}[a + x])$ 
Out[22]=  $-2 \pi \text{DiracDelta}[p] + \frac{\text{Sin}[a p]}{p}$ 
```

B.3. Métodos aproximados analíticos

Puesto que los cálculos intermedios en los métodos aproximados suelen ser fatigosos, no es de extrañar que los sistemas de cálculo algebraico también aquí resulten de gran utilidad. Veremos algunos ejemplos en los siguientes apartados.

B.3.1. Método de la serie de Taylor

Para ver un ejemplo de este método, que estudiamos en el apartado 7.2, haremos ahora el ejercicio 7.5. En primer lugar, escribimos la ecuación, la condición inicial y el último orden del desarrollo que queremos calcular:

```
In[1]:= equ = Y' [x] == x2 + Y[x]2;
          x0 = 0;
          Y0 = 0;
          solorder = 36;
```

El cálculo puede hacerse directamente mediante el método de coeficientes indeterminados del apartado 7.2.2:

$$\begin{aligned} \text{In[5]:= } & \text{sol} = \mathbf{y}_0 + \sum_{n=1}^{\text{solorder}} c_n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n; \\ & \text{equ} = \text{equ} /. \mathbf{y} \rightarrow \text{Function}[\mathbf{x}, \text{Evaluate}[\text{sol}]]; \\ & \text{equ} = \text{Map}[\text{Normal}[\# + \mathbf{0}[\mathbf{x}]^{\text{solorder}}] \&, \text{equ}]; \\ & \text{sol} /. \text{SolveAlways}[\text{equ}, \mathbf{x}] \\ \text{Out[8]= } & \left\{ \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} + \frac{46x^{19}}{12442815} + \frac{15178x^{23}}{66108676095} + \right. \\ & \left. \frac{404x^{27}}{28332289755} + \frac{190571x^{31}}{215183740689225} + \frac{5858822x^{35}}{106515951641166375} \right\} \end{aligned}$$

EJERCICIO B.10 Use algún sistema de cálculo algebraico para resolver el ejercicio 7.6.

B.3.2. Método de Picard

El método de aproximaciones sucesivas fue analizado en el apartado 7.3. Aquí resolveremos de nuevo el ejemplo que allí vimos. Tras escribir la ecuación en forma normal, $y' = f(x, y)$, se introducen la función $f(x, y)$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$ que definen el problema:

$$\begin{aligned} \text{In[1]:= } & \mathbf{f}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2; \\ & \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}; \\ & \mathbf{y}_0 = \mathbf{1}; \end{aligned}$$

El método se escribe directamente en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{In[4]:= } & \text{Clear}[\mathbf{y}]; \\ & \mathbf{y}[0] = \mathbf{y}_0; \\ & \mathbf{y}[\mathbf{n}_-] := \mathbf{y}[\mathbf{n}] = \mathbf{y}_0 + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{y}[\mathbf{n} - 1]] \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Ahora calculamos sin esfuerzo las aproximaciones deseadas:

$$\begin{aligned} \text{In[7]:= } & \mathbf{y}[1] \\ & \mathbf{y}[2] \\ & \mathbf{y}[3] \\ \text{Out[7]= } & 1 + x + \frac{x^3}{3} \\ \text{Out[8]= } & 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63} \\ \text{Out[9]= } & 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^4}{6} + \frac{8x^5}{15} + \frac{29x^6}{90} + \frac{47x^7}{315} + \frac{41x^8}{630} + \\ & \frac{299x^9}{11340} + \frac{4x^{10}}{525} + \frac{184x^{11}}{51975} + \frac{x^{12}}{2268} + \frac{4x^{13}}{12285} + \frac{x^{15}}{59535} \end{aligned}$$

EJERCICIO B.11 Calcule la siguiente aproximación en este ejemplo.

B.3.3. Métodos perturbativos

Veamos ahora cómo puede usarse Mathematica para realizar todos los cálculos sobre el oscilador de van der Pol que eran necesarios para el estudio perturbativo que hicimos en el apartado 7.4.2. Las páginas siguientes son una transcripción literal de una sesión en ese sistema de cálculo algebraico.

EJERCICIO B.12 Tras estudiar dicha sesión, use métodos simbólicos para repetir el cálculo de perturbaciones regulares que hicimos en el apartado 7.4.1.

Oscilador de van der Pol

```
In[1]:= ec = x''[t] + ε x'[t] (x[t]^2 - 1) + x[t];
```

- Comprobamos que no sabe resolverla:

```
In[2]:= DSolve[ec == 0, x[t], t]
```

```
Out[2]= DSolve[x[t] + ε (-1 + x[t]^2) x'[t] + x''[t] == 0, x[t], t]
```

- Solución aproximada:

```
In[3]:= ec1 = ec /. x -> Function[t, (A Cos[t + φ] + ε x1[t] + O[ε]^2)]
```

```
Out[3]= (-A (-1 + A^2 Cos[t + φ]^2) Sin[t + φ] + x1[t] + x1''[t]) ε + O[ε]^2
```

- Eliminamos productos y potencias de funciones trigonométricas:

```
In[4]:= ec1 = ec1 // Normal // TrigReduce // Expand
```

```
Out[4]= A ε Sin[t + φ] - 1/4 A^3 ε Sin[t + φ] - 1/4 A^3 ε Sin[3 t + 3 φ] + ε x1[t] + ε x1''[t]
```

- Aunque no es necesario, resolvemos esta ecuación para ver explícitamente los términos seculares:

```
In[5]:= Simplify[x1[t] /. DSolve[ec1 == 0, x1[t], t][[1]]]
```

```
Out[5]= 1/32 (32 C[2] Cos[t] - 4 A (-4 + A^2) t Cos[t + φ] - 32 C[1] Sin[t] - 8 A Sin[t + φ] + 2 A^3 Sin[t + φ] - A^3 Sin[3 (t + φ)])
```

- Ensayamos una amplitud dependiente del tiempo lento ϵt ($A(\epsilon t) = A(0) + \epsilon t A'(0) + \dots$):

```
In[6]:= ec1 = Expand[TrigReduce[Normal[ec /. x -> Function[t, ((A[0] + ε t A'[0]) Cos[t + φ] + ε x1[t] + O[ε]^2)]]]]
```

```
Out[6]= ε A[0] Sin[t + φ] - 1/4 ε A[0]^3 Sin[t + φ] - 1/4 ε A[0]^3 Sin[3 t + 3 φ] + ε x1[t] - 2 ε Sin[t + φ] A'[0] + ε x1''[t]
```

- Eliminamos los términos resonantes con una elección de $A'(0)$:

```
In[7]:= ec1 = Simplify[ec1 /. A'[0] -> A[0]/2 (1 - A[0]^2/4)]
```

```
Out[7]= -1/4 ε A[0]^3 Sin[3 (t + φ)] + ε x1[t] + ε x1''[t]
```

- Resolvemos la ecuación para x_1 :

van der Pol.nb

2

```
In[8]:= Simplify[TrigReduce[x1[t] /.
  DSolve[ec1 == 0, x1[t], t][[1]]]
```

```
Out[8]= C[2] Cos[t] - C[1] Sin[t] -  $\frac{1}{32} A[0]^3 \text{Sin}[3 (t + \phi)]$ 
```

- Extendemos la condición para la amplitud en $\epsilon t = 0$ para todos los valores del tiempo lento:

```
In[9]:= DSolve[{A'[u] ==  $\frac{A[u]}{2} \left(1 - \frac{A[u]^2}{4}\right)$ , A[0] == A}, A[u], u] // Simplify
```

```
Out[9]= {{A[u] ->  $-\frac{2 e^{u/2}}{\sqrt{-1 + \frac{4}{A^2} + e^u}}$ }, {A[u] ->  $\frac{2 e^{u/2}}{\sqrt{-1 + \frac{4}{A^2} + e^u}}$ }}
```

- Como obviamente hay que elegir la segunda solución, construimos la aproximación como

```
In[10]:= xx =  $\frac{2}{\sqrt{1 + (\frac{4}{A^2} - 1) E^{-\epsilon t}}}$  Cos[t + \phi] -  $\frac{\epsilon}{32} A^3 \text{Sin}[3 (t + \phi)]$ ;
```

- La comprobamos:

```
In[11]:= D[xx, {t, 2}] + \epsilon D[xx, t] (xx^2 - 1) + xx + O[\epsilon]^2 // PowerExpand // Simplify
```

```
Out[11]= O[\epsilon]^2
```

- Otra posible expresión es

```
In[12]:= y =  $\frac{2}{\sqrt{1 + (\frac{4}{A^2} - 1) E^{-\epsilon t}}}$  (Cos[t + \phi] -  $\frac{\epsilon}{32} A^2 \text{Sin}[3 (t + \phi)]$ );
```

- que coincide hasta el mismo orden, claro está,

```
In[13]:= y - xx + O[\epsilon]^2 // PowerExpand // Simplify
```

```
Out[13]= O[\epsilon]^2
```

- y satisface la ecuación:

```
In[14]:= D[y, {t, 2}] + \epsilon D[y, t] (y^2 - 1) + y + O[\epsilon]^2 // PowerExpand // Simplify
```

```
Out[14]= O[\epsilon]^2
```

B.3.4. Métodos numéricos

Cuando los métodos analíticos fallan o no son del todo convenientes, los buenos sistemas (como Mathematica, Maple, Macsyma, etc.) permiten hacer un análisis numérico que puede aportar algo de luz sobre el problema, aunque útiles dedicados a la solución numérica de ecuaciones diferenciales, como los indicados en la bibliografía de la página 324, resultan mucho más apropiados, potentes y versátiles para estos menesteres.

La función que hay que utilizar en Mathematica para la integración numérica de ecuaciones diferenciales es `NDSolve`. En el primer argumento deben especificarse las ecuaciones y condiciones iniciales entre llaves, en el segundo la incógnita (o las incógnitas entre llaves), y en el tercero la variable independiente y sus valores inicial y final entre llaves. Además, es posible incluir varias opciones que controlan distintos aspectos del algoritmo numérico.

Como ejemplo, vemos en la página siguiente la forma de utilizar la función `NDSolve` para hallar la solución del sistema de Lorenz, que ya vimos en el apartado 8.12,

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{y} = rx - y - xz, \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{z} = xy - bz, \quad (\text{B.5})$$

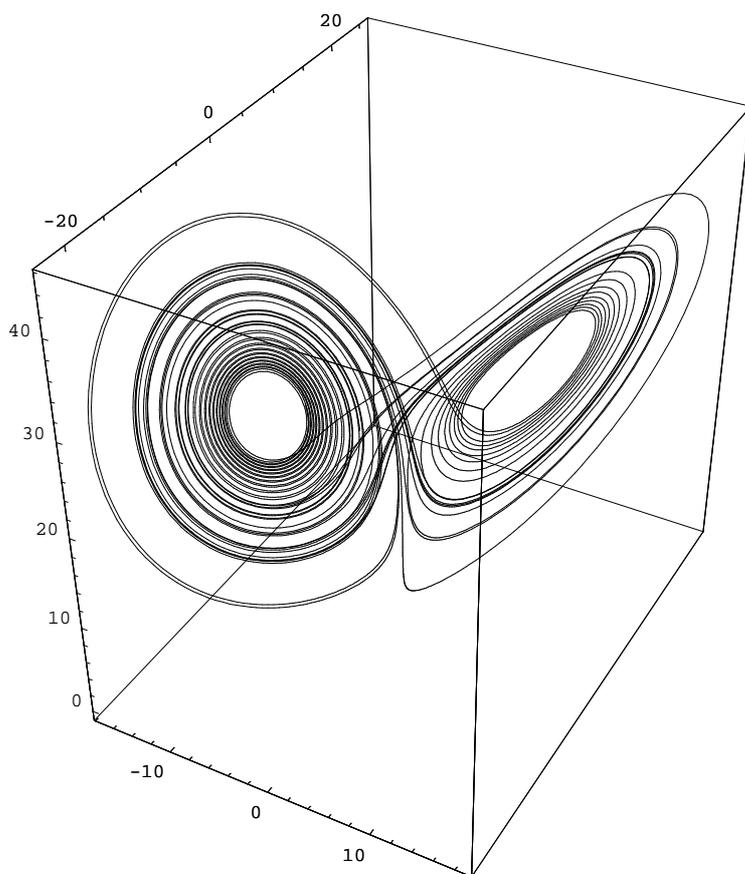
con $\sigma = 10$, $r = 27$ y $b = 8/3$, en el intervalo $0 \leq t \leq 50$. Si proyectamos la solución para $5 \leq t \leq 50$ —tras ignorar un corto transitorio— obtenemos una trayectoria que se mantiene en un complicado objeto: el más famoso de los atractores caóticos.

EJERCICIO B.13 Tras estudiar el cálculo de la siguiente hoja, resuelva el sistema de Rössler de la figura 8.32.

Lorenz.nb

1

```
In[1]:= NDSolve[{ x'[t] == 10 (y[t] - x[t]),  
y'[t] == 27 x[t] - y[t] - x[t] z[t],  
z'[t] == x[t] y[t] - 8/3 z[t],  
x[0] == y[0] == 1, z[0] == 1},  
{x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 50},  
MaxSteps->10000 ];  
  
In[2]:= ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. %],  
{t, 5, 50}, PlotPoints -> 10000];
```



B.4. Otros cálculos

El álgebra por ordenador también será muy útil en otros muchos tipos de cálculo que deben hacerse al estudiar este texto, como veremos a continuación en algunos ejemplos.

B.4.1. Ecuaciones algebraicas

Los programas de cálculo simbólico suelen ser muy buenos resolviendo ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, las raíces de la ecuación cúbica del ejercicio 1.6 se calculan fácilmente,

$$\begin{aligned} \text{In[1]} &:= \text{Solve}[Y^3 - 3XY == 2C, Y] // \text{Simplify} \\ \text{Out[1]} &= \left\{ \left\{ Y \rightarrow \frac{x + (C + \sqrt{C^2 - x^3})^{2/3}}{(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{1/3}} \right\}, \right. \\ &\quad \left\{ Y \rightarrow \frac{(-1 - i\sqrt{3})x + i(1 + \sqrt{3})(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{2/3}}{2(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{1/3}} \right\}, \\ &\quad \left. \left\{ Y \rightarrow \frac{i(1 + \sqrt{3})x + (-1 - i\sqrt{3})(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{2/3}}{2(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{1/3}} \right\} \right\} \end{aligned}$$

y la forma reducida que salta a la vista se comprueba directamente:

$$\begin{aligned} \text{In[2]} &:= \alpha = (C + \sqrt{C^2 - x^3})^{1/3}; \\ Y_1 &= \frac{x + \alpha^2}{\alpha}; \\ Y_2 &= -\frac{(1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})\alpha^2}{2\alpha}; \\ Y_3 &= -\frac{(1 - i\sqrt{3})x + (1 + i\sqrt{3})\alpha^2}{2\alpha}; \\ & (Y - Y_1)(Y - Y_2)(Y - Y_3) // \text{Simplify} \\ \text{Out[6]} &= -2C - 3XY + Y^3 \end{aligned}$$

Igualmente, puede usarse Mathematica para eliminar el parámetro de la solución paramétrica del ejercicio 2.30 —y, por tanto, para encontrar la solución implícita—:

$$\begin{aligned} \text{In[7]} &:= \text{Eliminate}\left[\left\{x == \frac{3}{4}u^2 + \frac{C}{u^2}, Y == \frac{1}{2}u^3 + 2\frac{C}{u}\right\}, u\right] // \text{FullSimplify} \\ \text{Out[7]} &= 64C(C + x^2)^2 + 27Y^4 == 16x(9C + x^2)Y^2 \end{aligned}$$

EJERCICIO B.14 Halle la solución explícita.

B.4.2. Exponencial de matrices

También sabe calcular la exponencial de una matriz,

```
In[1]:=  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$ 
MatrixExp[A t] // Simplify
```

$$\text{Out[2]} = \left\{ \left\{ \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2} t} \left(2 - \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2}) e^{2\sqrt{2} t} \right), \frac{e^{-\sqrt{2} t} (-1 + e^{2\sqrt{2} t})}{2\sqrt{2}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{e^{-\sqrt{2} t} (-1 + e^{2\sqrt{2} t})}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2} t} \left(2 + \sqrt{2} - (-2 + \sqrt{2}) e^{2\sqrt{2} t} \right) \right\} \right\}$$

pero para recuperar la compacta forma que hallamos en el ejercicio 4.20 hay que hacer

```
In[3]:= % // ExpToTrig // Simplify
```

$$\text{Out[3]} = \left\{ \left\{ \text{Cosh}[\sqrt{2} t] + \frac{\text{Sinh}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}}, \frac{\text{Sinh}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\text{Sinh}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}}, \text{Cosh}[\sqrt{2} t] - \frac{\text{Sinh}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}} \right\} \right\}$$

EJERCICIO B.15 Use la exponencial de la matriz del sistema para resolver el ejercicio 4.22.

B.4.3. Valores y vectores propios

Éste es otro problema algebraico que sabe cómo resolver. Así, si quisiéramos resolver el ejercicio 4.22 por el método de Euler, podríamos hacer lo siguiente:

```
In[1]:= Eigensystem[{{-2, 1, 1}, {1, -2, 1}, {1, 1, -2}}]
Out[1]= {{-3, -3, 0}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}
```

Está claro, sin embargo, que para esos menesteres es más cómodo usar `DSolve`. Por el contrario, para estudiar la estabilidad lineal esta habilidad puede ser de gran ayuda, como en el caso del ejercicio 8.10:

```
In[2]:=  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1+r+d & 1+r \end{pmatrix};$ 
Det[A]
Tr[A]
Eigensystem[A]
```

$$\text{Out[3]} = d$$

$$\text{Out[4]} = r$$

$$\text{Out[5]} = \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \left(r - \sqrt{-4d+r^2} \right), \frac{1}{2} \left(r + \sqrt{-4d+r^2} \right) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \left\{ -\frac{2+r+\sqrt{-4d+r^2}}{2(1+d+r)}, 1 \right\}, \left\{ -\frac{2+r-\sqrt{-4d+r^2}}{2(1+d+r)}, 1 \right\} \right\} \right\}$$

EJERCICIO B.16 Compruebe que la solución dada por Mathematica es la que allí encontramos.

B.4.4. Funciones especiales

Mathematica conoce muchas funciones especiales, así como sus valores numéricos y principales propiedades, que pueden usarse mediante las funciones `FunctionExpand` y `FullSimplify`. Por ejemplo, en los casos de los problemas 6.4 y 6.5 y la figura D.4 obtenemos

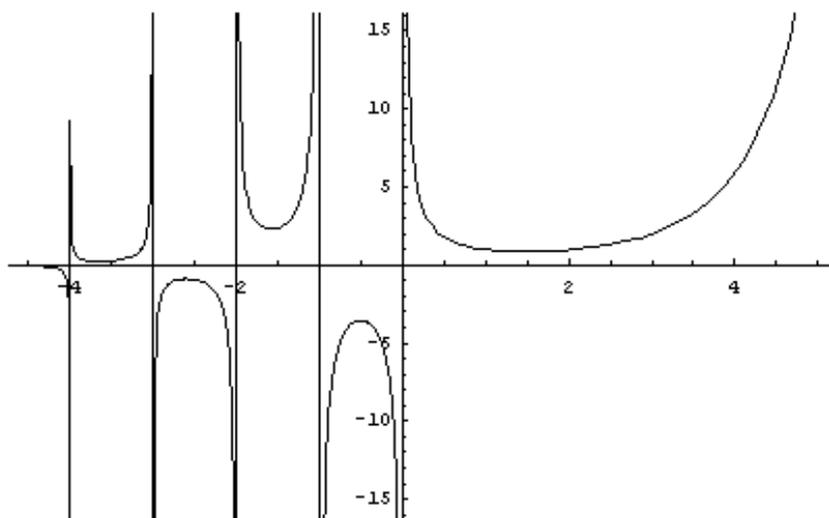
```
In[1]:= D[x^y BesselJ[v, k x], x] // FullSimplify
```

```
Out[1]= k x^y BesselJ[-1 + v, k x]
```

```
In[2]:= BesselJ[1/2, x]
```

```
Out[2]=  $\frac{\sqrt{\frac{x}{\pi}} \text{Sin}[x]}{\sqrt{x}}$ 
```

```
In[3]:= Plot[Gamma[x], {x, -4.5, 5}]:
```



EJERCICIO B.17 ¿Conoce Mathematica la propiedad (D.93)?

B.4.5. Suma de series y resolución de integrales

También es muy hábil haciendo este tipo de cálculo, aun cuando, como sucede en la ecuación (6.5.3), haya funciones especiales por medio:

```
In[1]:= 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{HarmonicNumber}[n] x^n}{n!}$$

```

```
Out[1]= e^{-x} Gamma[0, -x] + e^{-x} (EulerGamma + Log[-x])
```

Para recobrar el resultado del ejercicio 6.14, puede usarse `FunctionExpand`:

```
In[2]:= % // FunctionExpand // Simplify
```

$$\text{Out[2]} = \frac{1}{2} e^{-x} \left(2 \text{EulerGamma} - 2 \text{ExpIntegralEi}[x] - \text{Log}\left[\frac{1}{x}\right] + \text{Log}[x] \right)$$

EJERCICIO B.18 Use Mathematica para sumar la serie del ejercicio 6.20.

De la misma forma, la integral indefinida del problema 2.13,

$$\text{In[1]} := \int y e^{-1/y} dy$$

$$\text{Out[1]} = e^{-1/y} \left(-\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \text{ExpIntegralEi}\left[-\frac{1}{y}\right]$$

y la definida del ejercicio 1.13 se calculan sin dificultad:

$$\text{In[2]} := \int_0^{\theta} \frac{1}{2 \sqrt{\text{Sin}\left[\frac{\alpha}{2}\right]^2 - \text{Sin}\left[\frac{\theta}{2}\right]^2}} d\phi$$

$$\text{Out[2]} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{-\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta]}{1 - \text{Cos}[\alpha]}} \text{EllipticF}\left[\frac{\theta}{2}, \frac{2}{1 - \text{Cos}[\alpha]}\right]}{\sqrt{-\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta]}}$$

EJERCICIO B.19 Compruebe que este resultado coincide con el allí dado.

B.4.6. Desarrollos en serie

Como ya vimos en el apartado B.3.1, el programa es capaz de hallar desarrollos en serie de Taylor (y de Laurent). Aquí probaremos que el método clásico de Runge-Kutta es de cuarto orden. En primer lugar, enseñaremos al programa que la solución satisface la ecuación —es decir, que se cumple $y' = f(x, y)$ —:

```
In[1]:= Y(n) := Function[x, D[f[x, Y[x]], {x, n - 1}]];
```

```
In[2]:= Y'[x]
```

```
Y''[x]
```

```
Out[2]= f[x, Y[x]]
```

```
Out[3]= f[x, Y[x]] f(0,1)[x, Y[x]] + f(1,0)[x, Y[x]]
```

Ahora puede hacerse directamente el desarrollo en serie de Taylor para comprobar el orden del método:

```
In[4]:= k1 = f[x, Y[x]];
```

$$k_2 = f\left[x + \frac{h}{2}, Y[x] + \frac{h}{2} k_1\right];$$

$$k_3 = f\left[x + \frac{h}{2}, Y[x] + \frac{h}{2} k_2\right];$$

$$k_4 = f[x + h, Y[x] + h k_3];$$

$$Y[x + h] - \left(Y[x] + \frac{h}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) \right) + 0[h]^5 // \text{Simplify}$$

```
Out[8]= 0[h]^5
```

EJERCICIO B.20 Demuestre que también el método clásico de Adams-Bashforth-Moulton del apartado 7.7 es de cuarto orden.

B.4.7. Series de Fourier

A menudo, las series de Fourier pueden calcularse directamente. Por ejemplo, la que aparece en el ejercicio 9.18 es

$$\begin{aligned} \text{In}[1] := & \mathbf{f = UnitStep[x] Sin[x];} \\ & \mathbf{T = 2 \pi;} \\ \mathbf{a_0} = & \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f dx} \\ \mathbf{a_n} = & \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f Cos[n \frac{2 \pi}{T} x] dx} \\ \mathbf{b_n} = & \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f Sin[n \frac{2 \pi}{T} x] dx} \\ \text{Out}[3] = & \frac{1}{\pi} \\ \text{Out}[4] = & \frac{-1 - \text{Cos}[n \pi]}{(-1 + n^2) \pi} \\ \text{Out}[5] = & -\frac{\text{Sin}[n \pi]}{(-1 + n^2) \pi} \end{aligned}$$

Puesto que el programa no entiende que el índice n es entero, hay que decírselo explícitamente:

$$\begin{aligned} \text{In}[6] := & \mathbf{Simplify[a_n, n \in Integers]} \\ \text{Out}[6] = & -\frac{1 + (-1)^n}{(-1 + n^2) \pi} \\ \text{In}[7] := & \mathbf{Simplify[b_n, n \in Integers]} \\ \text{Out}[7] = & 0 \end{aligned}$$

Desafortunadamente, no está claro cómo aplicar el primer resultado para a_1 y el segundo no es correcto en el caso de b_1 , como puede verse calculando los coeficientes para $n = 1$ como límite,

$$\begin{aligned} \text{In}[8] := & \mathbf{Limit[a_n, n \rightarrow 1]} \\ \text{Out}[8] = & 0 \\ \text{In}[9] := & \mathbf{Limit[b_n, n \rightarrow 1]} \\ \text{Out}[9] = & \frac{1}{2} \end{aligned}$$

o directamente:

$$\text{In}[10]:= \mathbf{a_1} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{T} x\right] dx$$

$$\mathbf{b_1} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{T} x\right] dx$$

Out[10]= 0

Out[11]= $\frac{1}{2}$

Para comprobar el resultado le pedimos al programa que sume la serie resultante:

$$\text{In}[12]:= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \text{Sin}[x] - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Cos}[2n x]}{4n^2 - 1} // \text{PowerExpand} // \text{FullSimplify}$$

$$\text{Out}[12]= \frac{(\pi + 2 \operatorname{ArcTanh}[e^{-i x}] - 2 \operatorname{ArcTanh}[e^{i x}]) \text{Sin}[x]}{2\pi}$$

EJERCICIO B.21 Dibuje la gráfica de este resultado para comprobar que se trata de la función de período 2π que coincide con $\theta(x) \sin x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

El programa sabe calcular directamente series de Fourier truncadas, como puede verse al estudiar el fenómeno de Gibbs en el caso del problema 9.9:

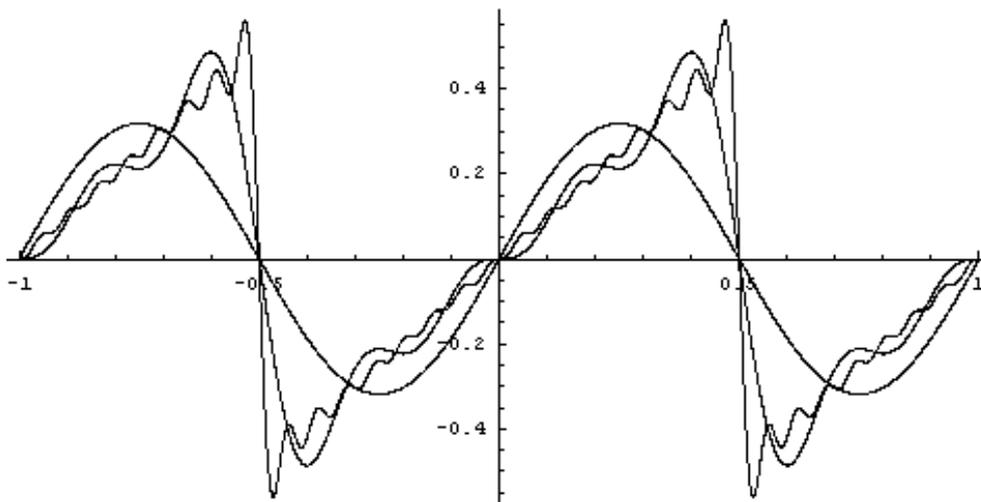
In[1]:= << Calculus`FourierTransform`

In[2]:= **fst = Table[FourierTrigSeries[x, x, 4ⁿ], {n, 0, 2}];**

fst[[2]]

$$\text{Out}[3]= \frac{\text{Sin}[2\pi x]}{\pi} - \frac{\text{Sin}[4\pi x]}{2\pi} + \frac{\text{Sin}[6\pi x]}{3\pi} - \frac{\text{Sin}[8\pi x]}{4\pi}$$

In[4]:= **Plot[Evaluate[fst], {x, -1, 1}, AspectRatio → 1/2,
PlotPoints → 5000];**



EJERCICIO B.22 Dibuje, en el mismo caso, la serie truncada con 64 términos.

B.4.8. Ecuaciones en diferencias finitas

Este tipo de ecuaciones nos apareció al definir la sucesión de Fibonacci en el problema 3.37:

```
In[1]:= << DiscreteMath`RSolve`
In[2]:= fib = RSolve[{x[n] == x[n - 1] + x[n - 2], x[0] == 0, x[1] == 1}, x[n], n]
Out[2]= {{x[n] -> -\frac{\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)^n - \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)^n}{\sqrt{5}}}}
```

Podemos comprobar que la solución coincide con los números de Fibonacci, que el programa conoce,

```
In[3]:= Table[Fibonacci[n] - x[n] /. fib[[1]] // Simplify, {n, 10}]
Out[3]= {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

así como que su cociente tiende a la razón áurea:

```
In[4]:= Limit[Evaluate[\frac{x[n] /. fib[[1]]}{x[n] /. fib[[1]]}, n -> n + 1], n -> \infty]
Out[4]= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})
In[5]:= % - GoldenRatio // FullSimplify
Out[5]= 0
```

EJERCICIO B.23 Resuelva con Mathematica el problema 8.30.

Por otro lado, también las relaciones de recurrencia que en el capítulo 6 permitían calcular los coeficientes de las series de Taylor y Frobenius son ecuaciones en diferencias finitas; pero, por desgracia, el programa da a menudo resultados erróneos, como en el caso de las ecuaciones (6.108) y (6.120):

```
In[1]:= << DiscreteMath`RSolve`
RSolve[{(\lambda + n)^2 a[n] + (\lambda + n) a[n - 1] == 0, a[0] == 1}, a[n], n]
RSolve[{(\lambda + n) (\lambda + n - 1) a[n] + (\lambda + n - 2)^2 a[n - 1] == 0, a[0] == 1},
a[n], n]
Out[2]= {{a[n] -> \frac{(-1)^n}{n!}}
Power::infy : Infinite expression \frac{1}{0} encountered.
Out[3]= {}
```

Tras investigar un poco el problema, puede verse que si se usa la opción `Method->MethodEGF` proporciona los resultados correctos,

```

In[4]:= RSolve[{(λ + n)2 a[n] + (λ + n) a[n - 1] == 0, a[0] == 1}, a[n], n,
           Method → MethodEGF]
RSolve[{(λ + n) (λ + n - 1) a[n] + (λ + n - 2)2 a[n - 1] == 0, a[0] == 1},
       a[n], n, Method → MethodEGF]

Out[4]= {{a[n] →  $\frac{(-1)^n}{\text{Pochhammer}[1 + \lambda, n]}$ }}

Out[5]= {{a[n] →  $\frac{(-1)^n \text{Pochhammer}[-1 + \lambda, n]^2}{\text{Pochhammer}[\lambda, n] \text{Pochhammer}[1 + \lambda, n]}$ }}

```

así como que podemos recuperar (6.121):

```

In[6]:= % // FunctionExpand // FullSimplify

Out[6]= {{a[n] →  $\frac{(-1)^n (-1 + \lambda)^2 \lambda}{(-1 + n + \lambda)^2 (n + \lambda)}$ }}

```

EJERCICIO B.24 Use Mathematica para deshacer la recurrencia (6.132).

Apéndice C

Resumen de métodos analíticos exactos

Les conseils faciles à pratiquer son les plus utiles.
Luc de Clapiers Vauvenargues

Cuando hay disponible un programa de cálculo simbólico, o el mismo es incapaz de resolver la ecuación diferencial que nos interesa, o si queremos hacerlo a mano —por ejemplo, para asegurarnos de que no hay más soluciones que las que el programa nos ha proporcionado— podemos intentar seguir los pasos que describimos a continuación a modo de recetario o guía del usuario. Si también esto falla, podríamos recurrir a manuales avanzados (como los de Zwillinger [38] y Kamke [37] citados en la bibliografía de la página 323) o a un colega competente.

Antes de hacer nada, recuerde que pensar antes de empezar a calcular, un poco de vista (que se desarrolla con la práctica), y el conocimiento de la física del problema pueden ayudar mucho. Luego, puede recurrir a los métodos sistemáticos descritos a continuación.

1. Si se trata de un problema de condiciones iniciales para una o varias ecuaciones lineales con coeficientes constantes, use la **transformación de Laplace** del capítulo 5.
2. Si hay una sola ecuación:
 - a) Si la misma es de primer orden y la derivada de la incógnita está despejada, $y' = f(x, y)$, o puede despejarse trivialmente,
$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad \text{ó} \quad Q(x, y) y' + P(x, y) = 0,$$
vaya al apartado C.1 de la página 270.
 - b) Si la ecuación es de primer orden, pero no es fácil despejar la derivada, acuda al apartado C.2 de la página 271.
 - c) Si la ecuación (de orden superior al primero) es lineal, pase al apartado C.3 de la página 272.
 - d) Si la ecuación no es lineal, vaya al apartado C.4 de la página 275.
3. Si se trata de un sistema, asegúrese de que todas las ecuaciones son de primer orden, introduciendo si es necesario incógnitas adicionales como se indica en el apartado 3.3 de la página 40. Luego:
 - a) Si el sistema es lineal, use el apartado C.5 de la página 276.
 - b) Si no es lineal, consulte el apartado C.6 de la página 277.

C.1. Ecuaciones de primer orden resueltas en la derivada

Sea una ecuación de primer orden con la derivada de la incógnita (prácticamente) despejada:

$$Q(x, y) y' + P(x, y) = 0. \quad (\text{C.1})$$

1. Si tiene sus **variables separadas**,

$$Q(y) y' + P(x) = 0,$$

se integra directamente: $\int Q(y) dy + \int P(x) dx = C$. (Apartado 2.3 de la página 19.)

2. Si la ecuación es **separable**,

$$U(x)V(y)y' + R(x)S(y) = 0,$$

se separan variables y se integra. Note que $S(y) = 0$ (o, si consideramos que x es la incógnita, $U(x) = 0$) puede proporcionar soluciones singulares. (Apartado 2.5 de la página 21.)

3. Si la ecuación (C.1) es **exacta**,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

la solución $u(x, y) = C$ viene dada por la función u que cumple $\partial u / \partial x = P$ y $\partial u / \partial y = Q$. (Apartado 2.3 de la página 17.)

4. Si la ecuación es **lineal**,

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x),$$

admite un factor integrante que depende solo de x : $\mu(x) = \frac{1}{a_0} \exp\left(-\int \frac{a_1}{a_0} dx\right)$. (Apartado 2.7 de la página 24.)

5. Si es de **Bernoulli**,

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)y^n,$$

el cambio $y = u^{\frac{1}{1-n}}$ la convierte en una lineal. (Apartado 2.12 de la página 27.)

6. Cuando es de **Riccati**:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y + a_2(x)y^2 = b(x).$$

a) Si se conoce una solución particular y_1 , el cambio $y = y_1 + 1/u$ la convierte en una lineal. (Apartado 2.13 de la página 27.)

b) En caso contrario, puede hacerse el cambio $y = \frac{a_0 u'}{a_2 u}$ que la convierte en una lineal homogénea de segundo orden en u . (Problema 3.27 de la página 73.)

7. Si la ecuación (C.1) es invariante frente al cambio de escala $(x, y) \rightarrow (ax, ay)$, es decir, **homogénea** o se cumple para todo a que

$$\frac{P(ax, ay)}{Q(ax, ay)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

el cambio $y = xu$ la convierte en una separable en (x, u) . (Apartado 2.9 de la página 25.)

8. Si la ecuación (C.1) es invariante frente al cambio de escala $(x, y) \rightarrow (ax, a^\lambda y)$ para algún λ apropiado, es decir, **isobárica** o se cumple para todo a y un cierto λ

$$\frac{P(ax, a^\lambda y)}{Q(ax, a^\lambda y)} = a^{\lambda-1} \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

el cambio $y = x^\lambda u$ la convierte en una separable en (x, u) . (Problema 2.16 de la página 36.)

9. La ecuación

$$y' = f(ax + by + c)$$

es separable en $(x, u \equiv ax + by)$ y en $(x, u \equiv ax + by + c)$. (Apartado 2.10 de la página 26.)

10. Si en la ecuación

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

- a) $a/\alpha = b/\beta$, la misma es separable en $(x, u \equiv ax + by)$;
 b) en caso contrario, la ecuación es homogénea cuando se traslada el origen al punto de corte de la rectas $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

(Apartado 2.11 de la página 26.)

11. Si todo lo anterior falla:

- a) Pruebe a considerar x como la variable dependiente e y como la independiente y compruebe los puntos 4, 5 y 6.
 b) Pruebe una transformación de las variables (x, y) —que puede ser un cambio de coordenadas (polares, etc.) o una transformación sin interpretación geométrica directa— si la estructura del problema lo sugiere.
 c) Ensaye un factor integrante que dependa solo de la variable independiente. (Apartado 2.6.1 de la página 22.)
 d) Ensaye un factor integrante que dependa solo de la variable dependiente. (Apartado 2.6.2 de la página 23.)
 e) Ensaye un factor integrante que dependa solo de alguna función $h(x, y)$ adecuada sugerida por su conocimiento del problema: $x + y, xy, \dots$ (Apartado 2.6.3 de la página 23.)

Recuerde que al transformar una ecuación puede estar añadiendo o quitando soluciones.

C.2. Ecuaciones de primer orden no resueltas en la derivada

Si la derivada no se despeja fácilmente,

$$F(x, y, y') = 0, \tag{C.2}$$

ensaye lo siguiente.

1. La solución de la ecuación

$$F(y') = 0$$

es $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$. (Apartado 2.15.1 de la página 31.)

2. La solución paramétrica de la ecuación

$$x = g(y')$$

es $x = g(u)$, $y = \int ug'(u) du + C$. (Apartado 2.15.2 de la página 32.)

3. La solución paramétrica de la ecuación

$$y = g(y')$$

es $x = \int \frac{g'(u)}{u} du + C$, $y = g(u)$. (Apartado 2.15.3 de la página 32.)

4. La solución general de la ecuación de **Clairaut**

$$y = xy' + g(y')$$

es el haz de rectas $y = Cx + g(C)$. Si hay una o varias envolventes, serán soluciones singulares. (Apartado 2.15.4 de la página 32.)

5. La ecuación de **Lagrange**

$$y = xf(y') + g(y')$$

se resuelve haciendo el cambio $y' = u$ en la ecuación, derivándola, y usando un factor integrante que solo depende de u en la ecuación que se obtiene. Puede haber soluciones singulares. (Apartado 2.15.5 de la página 33.)

6. Si puede hallar una solución paramétrica de la ecuación (C.2):

$$F[\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)] = 0,$$

trate de resolver la ecuación en (u, v) dada por $d\beta = \gamma d\alpha$. (Apartado 2.15 de la página 29.)

7. Derive la ecuación para ver si se halla algo sencillo, como hicimos en algunos ejemplos en el apartado 2.15.6 de la página 34.

C.3. Ecuaciones lineales de orden superior al primero

Dada la ecuación lineal de orden n

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \quad (\text{C.3})$$

1. resuelva primero la ecuación homogénea asociada —que se obtiene tomando $b = 0$ — como se describe en el apartado C.3.1;
2. halle una solución particular de la completa por los métodos recogidos en el apartado C.3.2.
3. La solución general de la ecuación (C.3) es la suma de la solución general de la homogénea asociada y una solución particular cualquiera de la completa. (Apartado 3.8 de la página 53.)

C.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas

La solución general de la ecuación lineal homogénea

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (\text{C.4})$$

es una combinación lineal con coeficientes constantes arbitrarios de n soluciones con wronskiano nulo. (Apartado 3.7.2 de la página 48.)

1. Si los coeficientes a_k son constantes, el **método de Euler** descrito en el apartado 3.10 de la página 63 proporciona un procedimiento algebraico para buscar la solución general.
2. Si los coeficientes a_k son tales que la ecuación puede escribirse como

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = 0,$$

se trata de una ecuación de **Cauchy-Euler**, que se reduce a una con coeficientes constantes con el cambio $x \rightarrow t \equiv \ln(ax + b)$ o se resuelve con una variante obvia del método de Euler en la que se substituye sistemáticamente x por $\ln(ax + b)$. (Apartado 3.12 de la página 71.)

3. Intente hallar una solución particular y_1 que permite reducir el orden de la ecuación (sin alterar su linealidad y homogeneidad) con el cambio $y \rightarrow u$ dado por $y = y_1 \int u dx$. (Apartado 3.7.5 de la página 51.) Intente repetir el procedimiento hasta llegar a una ecuación lineal homogénea de primer orden que se integra tras separar variables, o en su defecto a una de segundo orden discutida más abajo. Un ejemplo en que la solución particular es evidente ($y_1 = x$) es cuando $a_{n-1}(x) = -xa_n(x)$. (Ejercicio 3.16 de la página 52.) Otro caso aun más sencillo es cuando falta la y , es decir, cuando $a_n(x) = 0$, ya que le corresponde $y_1 = 1$. Además, si $\sum_{k=0}^n a_k = 0$, entonces $y_1 = e^x$ es solución, y cuando $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = 0$ lo es $y_1 = e^{-x}$.
4. Si se tiene una ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (\text{C.5})$$

- a) Si $\frac{2a_1a_2 + a_0a_2' - a_0'a_2}{a_0^{1/2}a_2^{3/2}}$ resulta ser una constante, el cambio de variable independiente $t = \int \sqrt{a_2/a_0} dx$ lleva a una ecuación lineal homogénea en (t, y) con coeficientes constantes. (Ejercicio 3.21 de las páginas 52 y 310.)
- b) Si $\frac{4a_0a_2 - a_1^2 - 2a_0a_1' + 2a_0'a_1}{a_0^2}$ es una constante, el cambio $y \rightarrow u \equiv y e^{\frac{1}{2} \int \frac{a_1}{a_0} dx}$ conduce a una ecuación lineal con coeficientes constantes en (x, u) . (Ejercicio 3.22 de las páginas 53 y 310.) Por otro lado, si la mencionada expresión resulta ser de la forma $c/(ax + b)^2$, con constantes a, b y c , la ecuación para (x, u) es de Cauchy-Euler.
- c) Vea si la ecuación es (o puede reescribirse como) alguna de las ecuaciones más habi-

tuales en física y que se han estudiado en el capítulo 6:

$$\text{Bessel}^1 \quad : \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

$$\text{Bessel (variantes)}^2 \quad : \quad x^2 y'' + (2c + 1)xy' + [a^2 b^2 x^{2b} + (c^2 - \nu^2 b^2)] y = 0.$$

$$\text{Chébichev}^3 \quad : \quad (1 - x^2) y'' - xy' + \nu^2 y = 0.$$

$$\text{Gauss}^4 \quad : \quad x(1 - x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x] y' - \alpha\beta y = 0.$$

$$\text{Hermite}^5 \quad : \quad y'' - 2xy' + \mu y = 0.$$

$$\text{Kummer}^6 \quad : \quad xy'' + (\nu - x)y' - \alpha y = 0.$$

$$\text{Laguerre}^7 \quad : \quad xy'' + (1 - x)y' + \nu y = 0.$$

$$\text{Legendre}^8 \quad : \quad (1 - x^2) y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0.$$

d) Busque la solución en forma de serie (de potencias o de Frobenius) con los métodos discutidos en el capítulo 6. Intente sumar las series con la sugerencias del apartado 6.5.6 de la página 138.

e) Si se conoce una solución particular y_1 (tal que $a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$), la solución general es, como vimos en el apartado 3.7.5 de la página 52,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx. \quad (\text{C.6})$$

C.3.2. Ecuaciones lineales completas

Tras resolver la ecuación homogénea asociada a la lineal completa

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

la solución particular de ésta que necesitamos para escribir su solución general puede buscarse como sigue.

1. Si los coeficientes a_k son constantes y el término inhomogéneo b es un cuasipolinomio o una suma de cuasipolinomios, use el **método de coeficientes indeterminados** del apartado 3.11.1 de la página 66 o, alternativamente, el **método del operador inverso** del apartado 3.11.2 de la página 68.

¹Apartado 6.4 de la página 126.

²Problema 6.15 de la página 141.

³Problema 6.2 de la página 140.

⁴Problema 6.20 de la página 142.

⁵Apartado 6.3.1 de la página 123.

⁶Problema 6.22 de la página 142.

⁷Problema 6.14 de la página 141.

⁸Problema 6.1 de la página 140.

2. Si los coeficientes a_k son tales que la ecuación puede escribirse como

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = B(x)$$

y el término inhomogéneo $B(x)$ es una suma de productos de polinomios en $\ln(ax + b)$ y potencias de $(ax + b)$, se trata de una ecuación de **Cauchy-Euler** que se reduce a una con coeficientes constantes y término inhomogéneo cuasipolinómico mediante el cambio $x \rightarrow t \equiv \ln(ax + b)$. (Apartado 3.12 de la página 71.) También puede buscarse la solución particular es una variante obvia del de coeficientes indeterminados del apartado 3.11.1 de la página 66.

3. Utilice el **método de variación de constantes** del apartado 3.8.1 de la página 54. Si debe resolver la ecuación para más de un término inhomogéneo, puede resultar ventajoso utilizar el **método de Cauchy** del apartado 3.8.2 de la página 56.

C.4. Ecuaciones no lineales de orden superior al primero

Si la ecuación

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{C.7})$$

no es lineal, puede tratar de reducir su orden mediante algunos de los procedimientos listados a continuación, para deshacer, finalmente, los cambios hechos e intentar resolver las ecuaciones diferenciales restantes.

1. Si falta la variable dependiente de la ecuación (C.7),

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

su orden se rebaja con el cambio de variables $(x, y) \rightarrow (x, u \equiv y')$. Si faltan y, y', \dots e $y^{(m)}$, puede rebajarse el orden en $m + 1$ unidades usando como nuevas variables $(x, u \equiv y^{(m+1)})$. (Apartado 3.4.1 de la página 41.)

2. Si falta la variable independiente de la ecuación (C.7), es decir, si la ecuación es invariante frente a traslaciones $x \rightarrow x + a$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

se trata de una ecuación **autónoma** cuyo orden se rebaja con el cambio de variables $(x, y) \rightarrow (y, u \equiv y')$. (Apartado 3.4.2 de la página 41.)

3. Si la ecuación (C.7) es invariante frente a cambios de escala de la x ,

$$(x, y) \rightarrow (ax, y),$$

se trata de una ecuación **equidimensional en x** , cuyo orden se rebaja con el cambio de variables $(x, y) \rightarrow (y, u \equiv xy')$. (Apartado 3.4.3 de la página 42.)

4. Si la ecuación (C.7) es invariante frente a cambios de escala de la y ,

$$(x, y) \rightarrow (x, ay),$$

es una ecuación **equidimensional en y** , cuyo orden se rebaja con el cambio de variables $(x, y) \rightarrow (x, u \equiv y'/y)$. (Apartado 3.4.4 de la página 43.)

5. Si la ecuación (C.7) puede escribirse como una derivada,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0,$$

se trata de una ecuación **exacta** cuyo orden se rebaja usando la integral primera inmediata $G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$. (Apartado 3.4.5 de la página 44.)

C.5. Sistemas de ecuaciones lineales

Dado un sistema lineal con n ecuaciones

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t), \quad (\text{C.8})$$

1. resuelva primero el sistema homogéneo asociado —que se obtiene tomando $b_i = 0$ — como se describe en el apartado C.5.1;
2. halle una solución particular del sistema completo por los métodos recogidos en el apartado C.5.2.
3. La solución general del sistema (C.8) es la suma de la solución general del homogéneo asociado y una solución particular cualquiera del completo. (Apartado 4.5 de la página 88.)

C.5.1. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas

La solución general de un sistema con n ecuaciones lineales homogéneas

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j, \quad (\text{C.9})$$

es el producto de una **matriz fundamental** por un vector columna constante arbitrario. (Apartado 4.4.2 de la página 86.)

1. Si los coeficientes a_{ij} son constantes, el **método de Euler** descrito en el apartado 4.6.2 de la página 91 proporciona un procedimiento algebraico para calcular la solución general.
2. Si puede escribirse como un **sistema de Cauchy-Euler**

$$t \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

con coeficientes a_{ij} constantes, el cambio de variable independiente $t = e^u$ lo convierte en un sistema con coeficientes constantes como los del anterior apartado. También puede aplicarse la variante inmediata del método de Euler que se obtiene substituyendo sistemáticamente t por $\ln t$. (Problema 4.29 de la página 98.)

3. En otros casos, como se mencionó en el apartado 4.2.1 de la página 81, por derivación y sustitución se puede reducir el sistema a una única ecuación lineal de orden n y aplicar los métodos del apartado C.3.1.

C.5.2. Sistemas completos de ecuaciones lineales

Tras resolver el sistema homogéneo asociado al completo

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t),$$

la solución particular de éste que necesitamos para escribir su solución general puede buscarse como sigue:

1. Si los coeficientes a_{ij} son constantes —tal vez tras hacer el cambio $t = e^u$ en un sistema de Cauchy-Euler— y los términos inhomogéneos b_i cuasipolinomios, use el **método de coeficientes indeterminados** del apartado 4.6.3 de la página 94.
2. En otros casos, utilice el **método de variación de constantes** del apartado 4.5 de la página 88.

C.6. Sistemas de ecuaciones no lineales

1. Intente hallar **integrales primeras** del sistema como se discute en el apartado 4.2.2 de la página 81.
2. Por otro lado, como se mencionó en el apartado 4.2.1 de la página 81, por derivación y sustitución se puede reducir el sistema a una única ecuación de orden n y aplicar los métodos del apartado C.4.

Apéndice D

Definición y propiedades de algunas funciones

*Mathematics possesses not only truth, but supreme beauty
—a beauty cold and austere, like that of sculpture.*
Bertrand Russell

Este apéndice recoge las definiciones y algunas propiedades de las funciones especiales que aparecen en los otros capítulos. El objetivo no es un estudio sistemático de dichas funciones — que puede hallarse, por ejemplo, en el texto de Arfken y Weber [15]—, sino ayudar al lector a entender la teoría y resolver los problemas. Más propiedades pueden encontrarse en tablas como las de Abramowitz y Stegun [35]. Tras recordar las propiedades fundamentales de los números complejos y definir el valor principal de Cauchy, empezaremos con una función definida implícitamente en una ecuación trascendente, para ver luego otras cuya definición es una integral o una serie y acabar mencionando las propiedades de los polinomios ortogonales más importantes.

D.1. Números complejos

Los números complejos se escriben en **forma cartesiana** como $z = x + iy$, mientras que la **forma polar** es $z = re^{i\theta}$, siendo $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria. La **parte real** $\operatorname{Re} z = x = r \cos \theta$ y la **parte imaginaria** $\operatorname{Im} z = y = r \sin \theta$ son números reales, al igual que el **módulo** $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el **argumento** $\arg z = \theta = \arctan y/x$. Éste no es único y todos los ángulos $\theta + 2k\pi$ (con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) corresponden al mismo número complejo en forma polar. El **valor principal** del argumento es el que satisface $-\pi < \theta \leq \pi$.

La suma, diferencia, producto y cociente de los números complejos $z_k = x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}$ ($k = 1, 2$) son:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2), \quad (\text{D.1})$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) \pm i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) \pm i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (\text{D.3})$$

El complejo conjugado de z es $\bar{z} = x - iy = r e^{-i\theta}$ y se cumplen las siguientes propiedades:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad (\text{D.4})$$

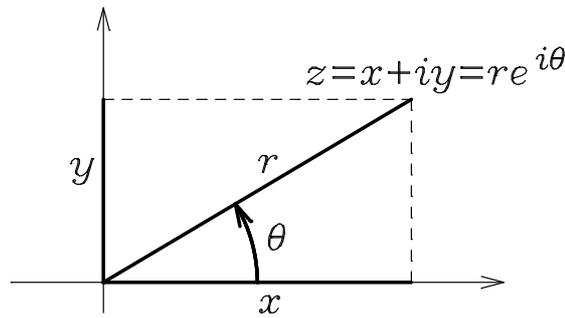


FIGURA D.1 Formas cartesiana y polar de un número complejo.

$$\arg \bar{z} = -\arg z, \quad (\text{D.5})$$

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad (\text{D.6})$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad (\text{D.7})$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad (\text{D.8})$$

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad (\text{D.9})$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad (\text{D.10})$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad (\text{D.11})$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \quad (\text{D.12})$$

EJERCICIO D.1 Use series de potencias adecuadas para comprobar la **fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{D.13})$$

y el **teorema de de Moivre**¹

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (\text{D.14})$$

Las exponenciales y potencias se calculan como sigue:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (\text{D.15})$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (\text{D.16})$$

Puesto que el argumento no es único, las raíces n -simas de $z = r e^{i(\theta+2k\pi)} \neq 0$ son n :

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (\text{D.17})$$

La **raíz principal** es la que se obtiene con $k = 0$ (si se ha elegido $-\pi < \theta \leq \pi$).

EJERCICIO D.2 Resuelva la ecuación $z^3 - 1 = 0$.



¹ **Abraham de Moivre** (26-05-1667, Vitry, Francia; 27-11-1754, Londres, Inglaterra). Tras la expulsión de los hugonotes se trasladó a Inglaterra; pero, como allí era extranjero, no consiguió nunca una cátedra. Fue un pionero de la geometría analítica y la teoría de probabilidades. Al parecer, encontró antes que su amigo Stirling la famosa fórmula que asociamos con el último nombre. Gracias a la expresión que halló para $(\cos x + i \sin x)^n$, el análisis es de gran utilidad en trigonometría.

D.2. Valor principal de Cauchy

Supongamos que la función f es singular en el punto $c \in (a, b)$, pero integrable en cualquier subintervalo que no contenga ese punto. Por ejemplo, a pesar de singulares en $x = c = 0$, $f = 1/\sqrt{x}$ y $f = 1/x$ son integrables en todos los intervalos finitos que no contienen el origen. Cuando la integral (impropia) ordinaria existe (como en el caso de $f = 1/\sqrt{x}$), se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{c+\eta}^b f(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

(En este apartado las variables bajo el signo de límite son positivas, aunque para aligerar la notación no se indique explícitamente). No obstante, puede suceder que aunque los dos límites independientes del segundo miembro no sean convergentes, sí lo sea el límite único del tercero. Cuando pasa esto, la integral es divergente, pero puede usarse el último límite para definir su valor principal:

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (\text{D.19})$$

Por ejemplo, si elegimos $a < 0 < b$ para $f = 1/x$, la integral ordinaria es divergente,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon}{|a|} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \ln \frac{b}{\eta} = -\infty + \infty, \quad (\text{D.20})$$

pero si se calculan simultáneamente ambos límites se obtiene un valor finito:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^b \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \frac{\varepsilon}{|a|} + \ln \frac{b}{\varepsilon} \right] = \ln \frac{b}{|a|}. \quad (\text{D.21})$$

EJERCICIO D.3 Supongamos que $f(x)$ es regular e integrable. Demuestre el siguiente resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x-y} = \int_0^{\infty} \frac{f(y+x) - f(y-x)}{x} dx. \quad (\text{D.22})$$

Análogamente, cuando la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existe, puede escribirse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \right]. \quad (\text{D.23})$$

Cuando, a pesar de ser divergente el doble límite, el del último miembro converge, éste define el valor principal de Cauchy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \equiv \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx. \quad (\text{D.24})$$

EJERCICIO D.4 Compruebe el siguiente valor principal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = 0. \quad (\text{D.25})$$

D.3. Función de Lambert

Como sabemos, la solución de la ecuación $e^y = x$ es $y = \ln x$. Para generalizar el logaritmo podemos usar la ecuación $y e^y = x$, que define implícitamente la función de Lambert: $y = \mathcal{W}(x)$. Como en el caso del logaritmo, esta ecuación admite infinitas soluciones, pero la única de entre ellas que es analítica alrededor de $x = 0$ es la rama principal \mathcal{W}_0 de la función de Lambert. Como aquí no estudiaremos las otras ramas, usaremos la notación simplificada \mathcal{W} para la rama principal.

EJERCICIO D.5 Use la definición de la función de Lambert para demostrar las siguientes propiedades:

$$\mathcal{W}(x) e^{\mathcal{W}(x)} = x, \quad (\text{D.26})$$

$$\mathcal{W}(x) + \ln \mathcal{W}(x) = \ln x. \quad (\text{D.27})$$

Para calcular la derivada de esta función basta derivar (D.26):

$$\frac{d\mathcal{W}}{dx}(x) = \frac{e^{-\mathcal{W}(x)}}{1 + \mathcal{W}(x)} = \begin{cases} \frac{\mathcal{W}(x)}{x(1 + \mathcal{W}(x))}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad (\text{D.28})$$

EJERCICIO D.6 Use las propiedades (D.26) y (D.27) para dibujar la figura D.2 y calcular los siguientes valores:

$$\mathcal{W}(-e^{-1}) = -1, \quad (\text{D.29})$$

$$\mathcal{W}(0) = 0, \quad (\text{D.30})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) = +\infty, \quad (\text{D.31})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{W}(x)}{\ln x} = 1. \quad (\text{D.32})$$

Concluya que la función de Lambert es real y monótona creciente en el intervalo real $[-e^{-1}, \infty)$.

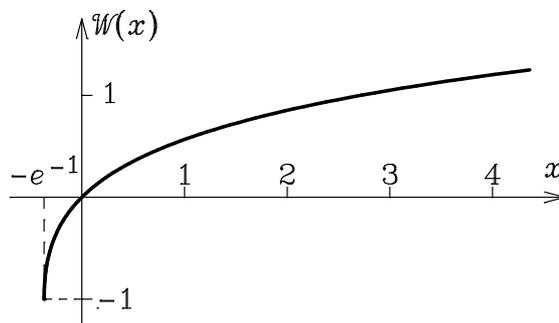


FIGURA D.2 La rama principal de la función de Lambert en la recta real.

Desarrollando la definición se obtiene la siguiente serie de Taylor:

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{n-1} \frac{x^n}{n!}. \quad (\text{D.33})$$

EJERCICIO D.7 Pruebe que el radio de convergencia de la anterior serie es $\rho = e^{-1}$.

Puesto que la función de Lambert es la inversa de $f(y) = ye^y$, cuando en una integral aparece $\mathcal{W}(x)$, a menudo puede utilizarse el cambio $x = ye^y$, $y = \mathcal{W}(x)$ para calcular la misma.

EJERCICIO D.8 Use el mencionado cambio para calcular las siguientes integrales:

$$\int \mathcal{W}(x) dx, \quad \int x \mathcal{W}(x) dx. \quad (\text{D.34})$$

La función de Lambert es de gran utilidad para resolver algunas ecuaciones trascendentes que contienen la exponencial o el logaritmo (de hecho, la hemos definido mediante una ecuación de ese tipo). Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$e^x + x = 0, \quad (\text{D.35})$$

la escribimos en la forma equivalente $-xe^{-x} = 1$ y comparándola con la expresión (D.26) vemos que $-x = \mathcal{W}(1)$: por tanto, una solución de dicha ecuación es $x = -\mathcal{W}(1) \approx -0,567143$.

EJERCICIO D.9 Resuelva las siguientes ecuaciones, donde a , b y c son constantes:

$$\begin{aligned} \ln x + x &= 0, \\ e^{ax} &= bx^c, \\ \ln x + ax^b &= c, \\ xe^x &= e^x + 1. \end{aligned}$$

Un estudio más detallado y algunas aplicaciones de la función de Lambert pueden hallarse en el artículo [41].

D.4. Función error

La función error se define como la integral indefinida de la gaussiana:

$$\text{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (\text{D.36})$$

EJERCICIO D.10 Demuestre las siguientes propiedades:

$$\text{erf}(0) = 0, \quad (\text{D.37})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{erf}(x) = 1, \quad (\text{D.38})$$

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (\text{D.39})$$

¿Qué relación existe entre $\text{erf}(x)$ y $\text{erf}(-x)$?

También son útiles la **función error complementaria**

$$\text{erfc}(x) \equiv 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad (\text{D.40})$$

y la **función error imaginaria**

$$\text{erfi}(x) \equiv \frac{\text{erf}(ix)}{i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{u^2} du. \quad (\text{D.41})$$

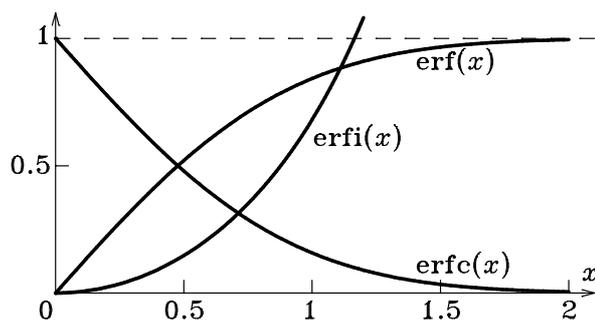


FIGURA D.3 Las funciones de error.

D.5. Función gamma de Euler

Esta útil función especial, que extiende el factorial de los números naturales a (casi) todo el plano complejo, puede definirse para $x > 0$ (o para $\text{Re } x > 0$) como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (\text{D.42})$$

EJERCICIO D.11 Use integración por partes y la elección $x = 1$ para demostrar las propiedades que más nos interesan:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (\text{D.43})$$

$$\Gamma(1) = 1. \quad (\text{D.44})$$

Concluya que para valores naturales del argumento la función gamma se reduce al factorial:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{D.45})$$

Usando (D.43) como definición y los valores de $\Gamma(x)$ para $0 < x < 1$, puede extenderse Γ para valores negativos del argumento

$$\Gamma(x-n) = \frac{\Gamma(x)}{(x-1) \cdots (x-n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{D.46})$$

con lo que la función queda definida en toda la recta real (o todo el plano complejo) excepto en $x = 0, -1, -2, \dots$, donde tiene asíntotas verticales como se ve en la figura D.4 (en el plano complejo son polos simples con residuo $(-1)^n/n!$).

Entre las numerosas propiedades de esta función la más conocida es, quizás, la aproximación de Stirling²

$$\ln \Gamma(x) \sim \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} + \dots \quad (|x| \gg 1). \quad (\text{D.47})$$

Aparte de reducirse al factorial sobre los enteros no negativos, también puede evaluarse exactamente la función gamma para ciertos valores especiales de su argumento.

²James Stirling (1692, Garden, cerca de Stirling, Escocia; 5-12-1770, Edimburgo). Su obra más importante, el *Methodus Differentialis* (1730), es un tratado sobre series, sumación, interpolación e integración y contiene la fórmula asintótica para $n!$

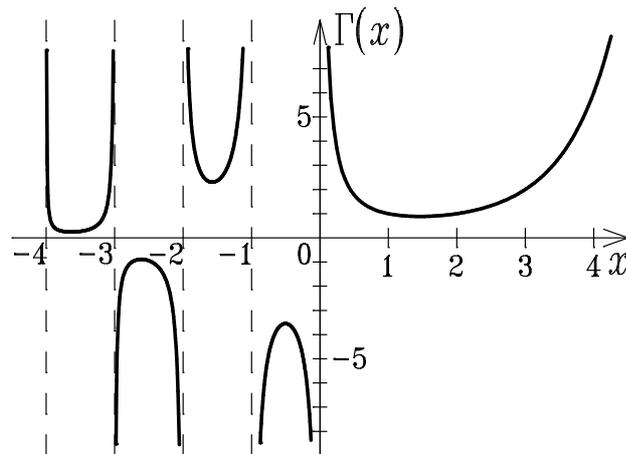


FIGURA D.4 La función gamma de Euler en el eje real.

EJERCICIO D.12 Use un cambio de variables en la integral que define Γ para demostrar que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2k)! \sqrt{\pi}}{k! 2^{2k}}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{D.48})$$

También es útil esta función para deshacer recurrencias como las que aparecen en el capítulo 6, ya que permite escribir en forma compacta el producto de los elementos de distintas sucesiones.

EJERCICIO D.13 Considere los **símbolos de Pochhammer**

$$(z)_0 \equiv 1, \quad (\text{D.49})$$

$$(z)_1 \equiv z, \quad (\text{D.50})$$

$$(z)_2 \equiv z(z+1), \quad (\text{D.51})$$

\vdots

$$(z)_n \equiv z(z+1) \cdots (z+n-1). \quad (\text{D.52})$$

Demuestre que

$$(z)_n = z(z+1) \cdots (z+n-1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \quad (\text{D.53})$$

EJERCICIO D.14 Utilice los símbolos de Pochhammer del ejercicio D.13 para escribir la **serie binómica**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1), \quad (\text{D.54})$$

en forma más compacta:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)} x^n. \quad (\text{D.55})$$

D.6. Función subfactorial

Si el factorial $n!$ se define como el producto de los n primeros números naturales,

$$n! \equiv (1)_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1, \quad (0! \equiv 1), \quad (\text{D.56})$$

en el subfactorial $n!!$ se multiplican números alternos, en vez de consecutivos:

$$(2n)!! \equiv 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2, \quad (\text{D.57})$$

$$(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1. \quad (\text{D.58})$$

Nótese que cada uno de los anteriores productos tiene exactamente n factores y que

$$n! = n!!(n-1)!!, \quad n > 1. \quad (\text{D.59})$$

EJERCICIO D.15 Demuestre que los subfactoriales pueden expresarse en términos de factoriales como sigue:

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (\text{D.60})$$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (\text{D.61})$$

D.7. Integral exponencial

La integral exponencial Ei se define para valores reales $x < 0$ como

$$\text{Ei}(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du, \quad (\text{D.62})$$

y para $x > 0$ hay que salvar la divergencia logarítmica en el origen calculando la integral en valor principal de Cauchy:

$$\text{Ei}(x) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^u}{u} du + \int_{\varepsilon}^x \frac{e^u}{u} du \right]. \quad (\text{D.63})$$

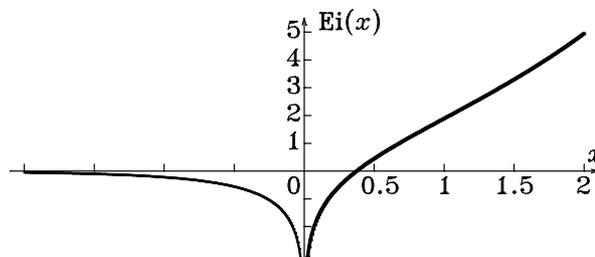


FIGURA D.5 Integral exponencial.

Tanto para valores positivos como negativos, es válido el siguiente desarrollo en serie:

$$\text{Ei}(x) = \gamma + \ln|x| + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \cdots, \quad (\text{D.64})$$

donde la **constante de Euler-Mascheroni**, que también se suele denotar con la letra C y llamar **constante de Euler**, es

$$\begin{aligned}\gamma &\equiv -\Gamma'(1) \\ &= -\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\Omega_N - \ln N) \\ &= 0,577215664901532860606512090082402431042 \dots\end{aligned}\quad (\text{D.65})$$

Hemos utilizado aquí las sumas parciales de la serie armónica, que reciben el nombre de **números armónicos**:

$$\Omega_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k}.\quad (\text{D.66})$$

(Véase el resultado 0.155.4 de [36]).

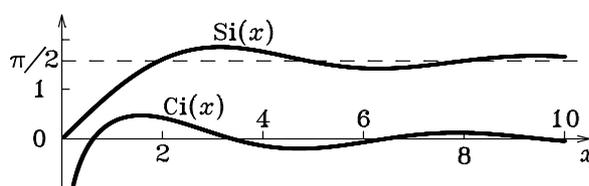


FIGURA D.6 Integrales seno y coseno.

Funciones relacionadas con Ei son la **integral seno** Si y la **integral coseno** Ci que se definen para $x > 0$ como sigue:

$$\begin{aligned}Si(x) &= \int_0^x \frac{\sin u}{u} \, du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \\ Ci(x) &= -\int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} \, du = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos u - 1}{u} \, du \\ &= \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}.\end{aligned}\quad (\text{D.67})$$

D.8. Integrales elípticas

Por definición, se llama integral elíptica a la que tiene la forma

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx,\quad (\text{D.68})$$

siendo $R(x, y)$ una función racional y $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ un polinomio de grado tres o cuatro ($|a_0| + |a_1| > 0$) con raíces simples. Mediante fórmulas de transformación adecuadas, toda integral elíptica puede calcularse en términos de las **integrales elípticas de Legendre-Jacobi de primera, segunda y tercera especie** que se definen a continuación:

$$F(\varphi|\alpha) = F(\varphi|m) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2}},\quad (\text{D.69})$$

$$E(\varphi|\alpha) = E(\varphi|m) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt, \quad (\text{D.70})$$

$$\begin{aligned} \Pi(n; \varphi|\alpha) = \Pi(n; \varphi|m) &= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{(1 - nt^2) \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2}}. \end{aligned} \quad (\text{D.71})$$

Hemos considerado aquí el intervalo $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ y usado las definiciones $x \equiv \sin \varphi$ y $0 \leq m \equiv \sin^2 \alpha \leq 1$. Al tomar $\varphi = \pi/2$ (es decir, $x = 1$) en las integrales elípticas de primera y segunda especie, se obtienen las **integrales elípticas completas de primera y segunda especie**:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \quad (\text{D.72})$$

$$E(m) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta. \quad (\text{D.73})$$

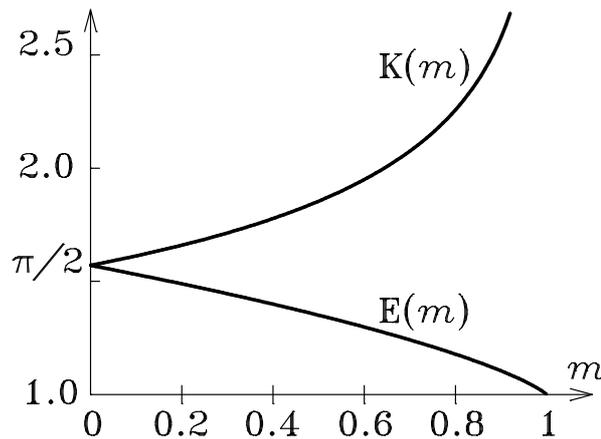


FIGURA D.7 Integrales elípticas completas.

EJERCICIO D.16 Compruebe los siguientes desarrollos en serie de Taylor:

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 m^n \right\}, \quad (\text{D.74})$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{m^n}{2n-1} \right\}. \quad (\text{D.75})$$

Las integrales elípticas definen implícitamente las **funciones elípticas de Jacobi**. Por ejemplo, si $u = F(\varphi|m)$, la función inversa, $\varphi = \text{am } u = \text{am}(u|m)$, es la **amplitud jacobiana**, y otras funciones elípticas se definen como sigue:

$$\text{sn } u = \text{sn}(u|m) = \sin \varphi, \quad (\text{D.76})$$

$$\text{cn } u = \text{cn}(u|m) = \cos \varphi, \quad (\text{D.77})$$

$$\text{dn } u = \text{dn}(u|m) = \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}. \quad (\text{D.78})$$

EJERCICIO D.17 Demuestre las siguientes propiedades:

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad (\text{D.79})$$

$$\operatorname{dn}^2 u + m \operatorname{sn}^2 u = 1, \quad (\text{D.80})$$

$$\operatorname{dn}^2 u - m \operatorname{cn}^2 u = 1 - m. \quad (\text{D.81})$$

D.9. Funciones de Bessel

Como vimos en el apartado 6.4, la **función de Bessel de primera especie** de orden ν se define como

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}. \quad (\text{D.82})$$

Entre sus propiedades se encuentran las siguientes expresiones para la derivada (véase el problema 6.4):

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \quad (\text{D.83})$$

$$= -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \quad (\text{D.84})$$

$$= \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)]. \quad (\text{D.85})$$

También es útil la relación de recurrencia

$$J_\nu(x) = \frac{x}{2\nu} [J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)]. \quad (\text{D.86})$$

La **función de Bessel de segunda especie**, **función de Neumann** o **función de Weber** de orden ν —que se denota a veces como N_ν — se define como

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (\text{D.87})$$

excepto cuando ν es un entero n , en cuyo caso $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ y debe usarse un límite:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (\text{D.88})$$

La **función de Bessel modificada de primera especie** se define, para valores reales de x , como

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad (\text{D.89})$$

y la **función de Bessel modificada de segunda especie** es

$$K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \sin(\nu\pi)}, \quad (\text{D.90})$$

excepto cuando ν es un entero n , en cuyo caso se define como $K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x)$, ya que $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

La solución general de la **ecuación de Bessel modificada**

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0,$$

es $y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$.

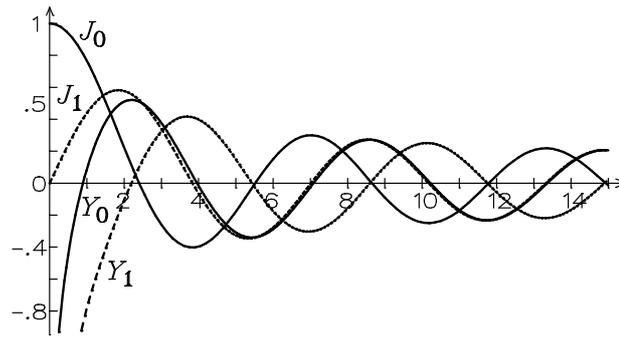


FIGURA D.8 Algunas funciones de Bessel de orden entero.

D.10. Función hipergeométrica confluyente de Kummer

Esta función se denota como $M(\alpha, \beta, x)$ ó ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ y se define como

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)x^n}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n x^n}{(\beta)_n n!} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)x^n}{\Gamma(\beta+n)n!}, \end{aligned} \quad (\text{D.91})$$

que es convergente para todo α, β y x , excepto cuando $\beta = 0, -1, -2, \dots$ y α no es un entero m tal que $\beta < m \leq 0$. Cuando $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ la última expresión de (D.91) no es directamente aplicable y la función se reduce a un polinomio.

Estas funciones incluyen como casos particulares

$$e^x = M(\alpha, \alpha, x), \quad (\text{D.92})$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right), \quad (\text{D.93})$$

las funciones de Bessel,

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2ix\right), \quad (\text{D.94})$$

los polinomios de Laguerre,

$$L_n(x) = M(-n, 1, x), \quad (\text{D.95})$$

y Hermite,

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (\text{D.96})$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x M\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right), \quad (\text{D.97})$$

entre otros (véase la página 509 de las tablas de Abramowitz y Stegun [35]).

EJERCICIO D.18 Compruebe las expresiones (D.92) y (D.93).

D.11. Función hipergeométrica de Gauss

Esta función se denota como $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ ó ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ y se define, para $|x| < 1$, como

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned} \quad (\text{D.98})$$

donde la última expresión no es directamente válida cuando α (o β) es $0, -1, -2, \dots$, en cuyo caso la función es un polinomio. La serie no está definida si $\gamma = 0, -1, -2, \dots$, a menos que α (o β) sea un entero m tal que $\gamma < m \leq 0$. Estas funciones, que son simétricas con respecto a los dos primeros argumentos,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\beta, \alpha; \gamma; x), \quad (\text{D.99})$$

incluyen como casos particulares las series geométricas y binómicas,

$$(1+x)^\alpha = F(-\alpha, \beta; \beta; -x), \quad (\text{D.100})$$

los polinomios de Chébichev,

$$T_n(x) = F\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (\text{D.101})$$

los polinomios de Legendre,

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (\text{D.102})$$

y diversas funciones elementales, que incluyen entre otras

$$\ln x = (x-1)F(1, 1; 2; 1-x), \quad (\text{D.103})$$

$$\arcsin x = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) = x\sqrt{1-x^2} F\left(1, 1; \frac{3}{2}; x^2\right), \quad (\text{D.104})$$

$$\operatorname{arcsinh} x = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right), \quad (\text{D.105})$$

$$\arctan x = xF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right), \quad (\text{D.106})$$

$$\operatorname{arctanh} x = xF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; x^2\right). \quad (\text{D.107})$$

También contiene las integrales elípticas completas:

$$K(m) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right), \quad (\text{D.108})$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right). \quad (\text{D.109})$$

EJERCICIO D.19 Compruebe las expresiones (D.100) y (D.103)–(D.109).

D.12. Polinomios ortogonales

Recogemos aquí las propiedades de los polinomios ortogonales que aparecen en este texto. Como los polinomios de cada familia son solución de un problema de Sturm-Liouville, pertenecen a un espacio de funciones definidas en un intervalo adecuado (a, b) , donde se usa un peso $\rho(x)$ para definir el producto escalar y la norma, como vimos en el apartado 9.1. Los polinomios de cada familia, $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$, son reales y ortogonales:

$$\langle f_i, f_j \rangle_\rho \equiv \int_a^b f_i(x) f_j(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|f_i\|_\rho^2, & i = j. \end{cases} \quad (\text{D.110})$$

D.12.1. Polinomios de Chébichev

Ecuación diferencial	$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0$
Intervalo	$[-1, 1]$
Peso	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Norma	$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} [T_n(x)]^2 dx = \begin{cases} \pi, & n = 0, \\ \pi/2, & n > 0. \end{cases}$
Expresión explícita ³	$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$
Fórmula de Rodrigues	$T_n(x) = \frac{\sqrt{\pi(1-x^2)}}{(-2)^n \Gamma(n+1/2)} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2}$
Relación de recurrencia	$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
$T_0(x)$	1
$T_1(x)$	x
$T_2(x)$	$2x^2 - 1$
$T_3(x)$	$4x^3 - 3x$
$T_4(x)$	$8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x)$	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

³ $\lfloor x \rfloor$ es la **parte entera** del número x , es decir, el mayor número entero que no es mayor que x .

D.12.2. Polinomios de Hermite

Ecuación diferencial	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
Intervalo	$(-\infty, \infty)$
Peso	e^{-x^2}
Norma	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$
Expresión explícita	$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$
Fórmula de Rodrigues	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$
Relación de recurrencia	$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$
$H_0(x)$	1
$H_1(x)$	$2x$
$H_2(x)$	$4x^2 - 2$
$H_3(x)$	$8x^3 - 12x$
$H_4(x)$	$16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_5(x)$	$32x^5 - 160x^3 + 120x$

D.12.3. Polinomios generalizados de Laguerre

Los polinomios de Laguerre son $L_n(x) = L_n^{(0)}(x)$.

Ecuación diferencial	$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$
Intervalo	$[0, \infty)$
Peso	$x^\alpha e^{-x}$
Norma	$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$
Expresión explícita	$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n + \alpha}{n - m} x^m$
Fórmula de Rodrigues	$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x}{n! x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x})$
Relación de recurrencia	$(n + 1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$
$L_0(x)$	1
$L_1(x)$	$1 - x$
$L_2(x)$	$\frac{2 - 4x + x^2}{2}$
$L_3(x)$	$\frac{6 - 18x + 9x^2 - x^3}{6}$
$L_4(x)$	$\frac{24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4}{24}$
$L_5(x)$	$\frac{120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5}{120}$

D.12.4. Polinomios de Legendre

Ecuación diferencial	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$
Intervalo	$[-1, 1]$
Peso	1
Norma	$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n + 1}$
Expresión explícita	$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n - 2m}{n} x^{n-2m}$
Fórmula de Rodrigues	$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$
Relación de recurrencia	$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$
$P_0(x)$	1
$P_1(x)$	x
$P_2(x)$	$\frac{3x^2 - 1}{2}$
$P_3(x)$	$\frac{5x^3 - 3x}{2}$
$P_4(x)$	$\frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$
$P_5(x)$	$\frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}$

Apéndice E

Tablas de transformadas de Laplace

Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.
Pierre Simon de Laplace

Por conveniencia recogemos en las páginas siguientes las principales propiedades de la transformación de Laplace, que vimos en el capítulo 5, así como un par de tablas de transformadas. Tablas más completas pueden hallarse en las obras de referencia de la página 323.

E.1. Propiedades de la transformación de Laplace

$f(t) = \theta(t)f(t)$ ¹	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	para
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$	$s > \alpha$
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$	$s > \alpha + a$
$\theta(t - a)f(t - a)$	$e^{-as} F(s)$	$s > \alpha, a > 0$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$s > a\alpha, a > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$s > \alpha$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	$s > \alpha$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	$s > \alpha$
$\int_a^t f(u) du$	$\frac{1}{s} \left[F(s) - \int_0^a f(u) du \right]$	$s > \alpha$
$tf(t)$	$-F'(s)$	$s > \alpha$
$t^2 f(t)$	$F''(s)$	$s > \alpha$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$s > \alpha$
$\frac{f(t)}{t} \left(\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \right)$	$\int_s^{\infty} F(u) du$	$s > \alpha$
$f * g$	$F(s)G(s)$	$s > \alpha$
$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$	$s > 0$
$f(t + T) = -f(t)$	$\frac{1}{1 + e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$	$s > 0$

¹Se supone también que f —así como g, f', f'', \dots , cuando aparecen en la columna de la izquierda— pertenece a $F(\alpha)$, es decir, es continua por trozos y de orden exponencial finito α , así como que la función (o la derivada anterior) que aparece en las propiedades de las derivadas es continua.

E.2. Valores en los límites

Se cumple	cuando
$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$	$f(t)$ es una función (y no una distribución)
$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	existe $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$
$\lim_{s \rightarrow 0^+} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) dt$	existe $\int_0^{\infty} f(t) dt$
$\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	existe $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ y $sF(s)$ es analítica para $\operatorname{Re} s \geq 0$

E.3. Transformadas de funciones elementales

$f(t) = \theta(t)f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	para
$1 = \theta(t)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$\delta(t)$	1	$s > 0$
$\theta(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0, a \geq 0$
$\delta(t - a)$	e^{-as}	$s > 0, a \geq 0$
$\ln t$	$-\frac{\ln s + \gamma}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$s > a$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > a $
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a $
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$	$s > a$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$s > a$
$t^x e^{at}$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{(s - a)^{x+1}}$	$s > a, x > -1$

E.4. Transformadas de funciones especiales

$f(t) = \theta(t)f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	para
$\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	$\frac{a}{s\sqrt{s+a^2}}$	$s > 0$
$\operatorname{Si}(at)$	$\frac{1}{s} \operatorname{arccot} \frac{s}{a}$	$s > 0$
$\operatorname{Ci}(at)$	$-\frac{1}{2s} \ln \left(1 + \frac{s^2}{a^2} \right)$	$s > 0$
$-\operatorname{Ei}(-at)$	$\frac{1}{s} \ln \left(1 + \frac{s}{a} \right)$	$s > 0, a > 0$
$J_{\nu}(at)$	$\frac{a^{\nu}}{\sqrt{s^2+a^2} (\sqrt{s^2+a^2}+s)^{\nu}}$	$s > 0, \nu > -1$
$L_n(at)$	$\frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}$	$s > 0$

Apéndice F

Tablas de transformadas de Fourier

*“Live in the layers,
not on the litter”
No doubt the next chapter
in my book of transformations
is already written.
I am not done with my changes.
Stanley Kunitz*

Recogemos en las páginas siguientes las principales propiedades de la transformación de Fourier, así como una tabla de transformadas. Tablas más completas pueden hallarse en las obras de referencia de la página 323.

Hemos elegido el convenio

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \quad (\text{F.1})$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp, \quad (\text{F.2})$$

que es, quizás, el más habitual en mecánica cuántica, pero otros convenios corrientes son

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \quad (\text{F.3})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp, \quad (\text{F.4})$$

y

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ipx} dx, \quad (\text{F.5})$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{2\pi ipx} dp. \quad (\text{F.6})$$

También es corriente elegir signos opuestos para la unidad imaginaria en la exponencial y intercambiar el factor constante que aparece fuera de la integral entre las transformadas directa e inversa.

E.1. Propiedades de la transformación de Fourier

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp$	$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$
$af(x) + bg(x)$	$aF(p) + bG(p)$
$f(x - a)$	$e^{-iap} F(p)$
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{p}{a}\right)$
$f'(x)$	$ipF(p)$
$f''(x)$	$-p^2 F(p)$
$f^{(n)}(x)$	$(ip)^n F(p)$
$xf(x)$	$iF'(p)$
$x^2 f(x)$	$-F''(p)$
$x^n f(x)$	$i^n F^{(n)}(p)$
$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u)g(u) du$	$F(p)G(p)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi} F * G$
$f(-x) = f(x)$	$F(-p) = F(p)$
$f(-x) = -f(x)$	$F(-p) = -F(p)$
$F(x)$	$2\pi f(-p)$
$\overline{f}(x)$	$\overline{F}(-p)$

F.2. Transformadas de Fourier

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp$	$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$
1	$2\pi\delta(p)$
$\delta(x)$	1
$\delta(x - a)$	e^{-iap}
$\theta(x)$	$\pi\delta(p) - \frac{i}{p}$
$\text{sign}(x)$	$-\frac{2i}{p}$
$\theta(a - x)$	$2\frac{\sin ap}{p}$
$\theta(x - a)$	$2\left[\pi\delta(p) - \frac{\sin ap}{p}\right]$
$\cos ax$	$\pi[\delta(p + a) + \delta(p - a)]$
$\sin ax$	$i\pi[\delta(p + a) - \delta(p - a)]$
e^{iax}	$2\pi\delta(p - a)$
e^{-x^2/a^2}	$a\sqrt{\pi}e^{-a^2p^2/4}$
$e^{-a x }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{p^2 + a^2}$

Apéndice G

Soluciones y sugerencias para algunos ejercicios

The answer, my friend, is blowin' in the wind...

Bob Dylan

Capítulo 1

1.1 $-1 \leq x \leq 1$ si solo admitimos soluciones reales.

1.6 Con la definición $\alpha = (C + \sqrt{C^2 - x^3})$:

$$y = \frac{x + \alpha^2}{\alpha}, \quad y = -\frac{(1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})\alpha^2}{2\alpha}, \quad y = -\frac{(1 - i\sqrt{3})x + (1 + i\sqrt{3})\alpha^2}{2\alpha}.$$

1.7 Particular, particular, singular.

1.8 $y = 0$ e $y = x^2/4$. Tomando $x = 0$ e $y = 1$ la ecuación diferencial se reduce a $(y')^2 + 1 = 0$, que carece de soluciones reales.

1.9 La derivada de $y^{1/3}$ tiene una singularidad en el origen.

1.10 $y = 2 \sin x + \cos x$. $B = 1 = -2$ es imposible. $y = A \sin x$.

1.11 $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \alpha$.

Capítulo 2

2.2 $y^2 (y'^2 + 1) = 1$. $y = \pm 1$.

$$2.5 \frac{1}{2}x^2 + xy + x - \frac{1}{3}y^3 + 3y = C.$$

$$2.6 y = x (\ln |x| - 1) + C. \text{ Sí.}$$

$$2.7 ye^y = x^2 + C, \text{ o, usando la función de Lambert del apartado D.3, } y = W(x^2 + C).$$

$$2.9 \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = C. \text{ ¿Qué pasa con } y = 0?$$

$$2.10 x^2y^2 + 2x^3y = C.$$

2.11 No.

$$2.12 x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 = C.$$

$$2.13 e^{2x} - 2xe^xy = C.$$

$$2.16 y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$$

$$2.17 y = \tan(x + C) - x - 1.$$

$$2.18 y^2 + 2(1 - x)y + x^2 = C.$$

$$2.19 y^2 + 2xy - 6y - x(x + 2) = C.$$

$$2.20 \left(\frac{1}{y} + \sin x - 1 \right) e^{\sin x} = C.$$

$$2.21 y = \frac{C + 2x^3}{Cx - x^4}.$$

2.22 Las dos rectas $y = \pm 1$.

2.23 $\sqrt{1 - y^2} = C \pm x$. Teniendo en cuenta que C es arbitrario, se puede reescribir como $(x - C)^2 + y^2 = 1$. Como ya vimos en el ejercicio 2.2, también existen las soluciones singulares $y = \pm 1$, que son precisamente las envolventes de la general.

2.24 $x = \sin v + C, y = \cos v$. O, eliminando el parámetro: $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

$$2.25 y = C \pm \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right).$$

2.26 No, ya que todo polinomio de grado impar tiene al menos una solución real.

$$2.27 x = u^2 - 1, y = \frac{2}{3}u^3 + C, \text{ o tras eliminar el parámetro } 9(y + C)^2 = 4(x + 1)^3.$$

$$2.28 x = \frac{5}{4}u^4 + \frac{3}{2}u^2 + \ln u + C, y = u^5 + u^3 + u + 5.$$

2.29 $y = Cx - C^2$ y la parábola envolvente $y = x^2/4$.

2.30 $x = \frac{3}{4}u^2 + \frac{C}{u^2}$, $y = \frac{1}{2}u^3 + 2\frac{C}{u}$, o eliminando el parámetro:

$$27y^4 - 16x(x^2 + 9C)y^2 + 64C(x^2 + C)^2 = 0.$$

La solución $y = 0$ se obtiene en esta última expresión con $C = 0$.

2.31 $\mu(u) = \exp \int \frac{du}{f(u) - u}$.

2.32 Las parábolas $y = \frac{1 - (x - A)^2}{2}$ y su envolvente $y = \frac{1}{2}$.

Capítulo 3

3.1 $y''^2 = (1 + y'^2)^3$.

3.3 Si la fuerza de rozamiento es $-k\dot{z}^2$ y el eje z se elige hacia abajo la velocidad viene dada por $v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \sqrt{\frac{kg}{m}}(t - C)$. Por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ y $z = A + \frac{m}{k} \ln \cosh \sqrt{\frac{kg}{m}}(t - C)$.

3.4 $y = A \tan [A(x - x_0)] - \frac{1}{2}$, $y = -A \tanh [A(x - x_0)] - \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{x - x_0} - \frac{1}{2}$ e $y = C$.

3.5 $y = 2A \tan(A \ln x + B) - 1$, $y = -2A \tanh(A \ln x + B) - 1$, $y = -\frac{2}{\ln x + C} - 1$ e $y = C$.

3.6 $y = C_1 e^{C_2 x}$.

3.7 $y^2 = C_1 x + C_2$.

3.8 Véase el ejercicio 3.6.

3.11 Como se ve en la figura G.1, en cada punto al menos una de ellas es nula, por lo que el wronskiano es nulo. Como hay puntos en que una es nula y la otra no, son linealmente independientes.

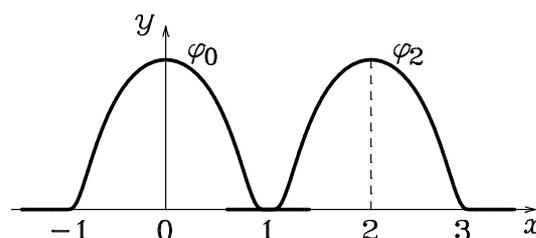


FIGURA G.1 Las funciones φ_0 y φ_2 .

3.12 El wronskiano es $e^{(k_1+\dots+k_n)x}$ por el **determinante de Vandermonde**¹

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i).$$

3.14 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$. Para $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ o cualquier otro intervalo que no incluya a $x = 1$.

3.15 ¡El cálculo se hace en el intervalo $(-\infty, 1)$!

3.16 $C_1x + C_2[x \operatorname{Ei}(x) - e^x]$. Debe faltar la y : $a_n = 0$. $a_0 \pm a_1 \pm \dots + (\pm 1)^n a_n = 0$.

3.17 $y = C_1(x^2 - 1) + C_2x$.

3.21 $y = A \cos x^2 + B \sin x^2$. Cuando $\frac{2PQ + Q'}{2Q^{3/2}}$ sea una constante.

3.22 $y = \frac{A \cos x + B \sin x}{x}$.

3.23 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$.

3.24 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + (\ln \cos x) \cos x$.

3.25 Es un sistema algebraico lineal para las $C_k(s)$ cuyo determinante es el wronskiano del sistema fundamental de soluciones en el punto s .

3.26 $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t f(s) \sin \omega(t-s) ds$.

3.31 Aunque $E, E', \dots, E^{(n-2)}$ son continuas, $E^{(n-1)}$ tiene un salto de valor 1.

3.34 Use inducción completa.

3.37 $(1 - t - 2t^2) e^{-t} + A \cos t + B \sin t$.

3.38 $\left(C_1 + \frac{x}{6}\right) e^{2x} + \frac{1}{8} e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

3.39 $y = \left(A + \frac{x}{4}\right) \cos x + \left(B + \frac{x^2}{4}\right) \sin x$, donde A y B son constantes arbitrarias.

3.43 $\frac{A + B \ln(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} + x - 4$.

¹**Alexandre Théophile Vandermonde** (28-02-1735, París; 1-01-1796, París). Tras su interés por la música, comenzó a dedicarse a las matemáticas a los 35 años y trabajó en teoría de ecuaciones y determinantes. Sin embargo, el determinante al que Lebesgue dio su nombre no aparece en sus obras publicadas.

Capítulo 4

4.1 $x + yy' + zz' = 0, 1 + y' + z' = 0$. En forma simétrica: $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$.

4.3 $x = (C_1 + C_2 t) e^t, y = \left[\left(C_1 - \frac{1}{2} C_2 \right) + C_2 t \right] e^t$.

4.4 Integrando $\ddot{x} = x\dot{x}$ se obtiene

$$x = -\frac{2}{t-t_0}, \quad y = \frac{2}{(t-t_0)^2};$$

$$x = 2C \tan [C(t-t_0)], \quad y = 2C^2 \sec^2 [C(t-t_0)];$$

$$x = -2C \tanh [C(t-t_0)], \quad y = -2C^2 \operatorname{sech}^2 [C(t-t_0)].$$

Tomando los límites $t_0 \rightarrow \pm\infty$ en la última solución se recupera la línea de puntos de equilibrio $x = C, y = 0$.

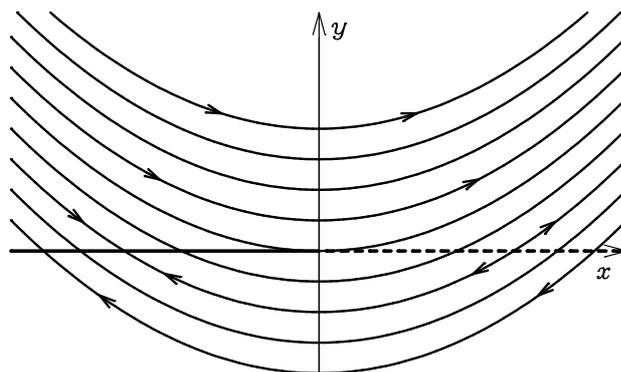


FIGURA G.2 Espacio de fases del ejercicio 4.4.

4.8 $y = \frac{1}{2}x^2 + A$.

4.9 $x^2 + y^2 = A, x + y - t = B$.

4.11 La matriz de rotación $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

4.13 Use la matriz de 4.12.

4.16

$$\begin{aligned} x &= (\ln \cos t + C_1) \cos t + (t + C_2) \sin t, \\ y &= -(\ln \cos t + C_1) \sin t + (t + C_2) \cos t. \end{aligned}$$

4.18 Agrupe términos $\mathbf{A}^k \mathbf{B}^l$ con el mismo valor para $k+l$ y recuerde el binomio de Newton:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \mathbf{A}^m \mathbf{B}^{n-m},$$

que también es válido para matrices, con tal de que éstas conmuten.

4.22 $x = A + Be^{-3t}$, $y = A + Ce^{-3t}$, $z = A - (B + C)e^{-3t}$. Nótese que como la matriz es simétrica, hay tres vectores propios, aunque solo dos valores propios.

4.23 $x = (A + Bt)e^{2t}$, $y = -(A + B + Bt)e^{2t}$. Solo hay un vector propio.

4.24 $x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t$, $y = (C_1 - 3C_2) \cos 3t + (3C_1 + C_2) \sin 3t$.

4.26 $x = [(A + t) \cos t - B \sin t] e^t$, $y = [(A + t) \sin t + B \cos t] e^t$.

Capítulo 5

5.3 Usando el desarrollo en serie de Taylor, vemos que $t^n \in \mathcal{F}(\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$:

$$e^{\epsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k t^k}{k!} > \frac{\epsilon^n t^n}{n!} \implies t^n < \frac{n!}{\epsilon^n} e^{\epsilon t}.$$

5.14 El residuo $\lim_{s \rightarrow a} (s - a)^2 P(s)/Q(s)$ da el coeficiente A del término $A/(s - a)^2$, mientras que el de $B/(s - a)$ es

$$B = \lim_{s \rightarrow a} \frac{d}{ds} \left[\frac{(s - a)^2 P(s)}{Q(s)} \right].$$

5.15 $\frac{1}{4} [(1 + 2t)e^t - e^{-t}]$, $2 \cos t$.

5.16 $2e^{-2t}(\cos 2t - 2 \sin 2t)$.

5.19 $\int_a^b \delta(x - a)f(x) dx$ no está definido sin ambigüedad.

5.20 $\frac{1}{8} (e^{-2t} - 1) \cos t + \frac{1}{8} (e^{-2t} + 1) \sin t$.

5.21 $x = -2e^t + e^{4t}$, $y = -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}$.

5.23 $x = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq 0, \\ 1 - \cos t, & \text{para } 0 \leq t \leq \pi, \\ -2 \cos t, & \text{para } t \geq \pi. \end{cases}$

Sí. Véanse la figura G.3 y la discusión de un caso más general en la página 111.

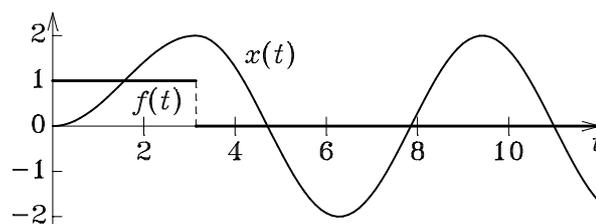


FIGURA G.3 La fuerza y la solución del ejercicio 5.23.

Capítulo 6

$$6.1 \rho(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}}.$$

6.2

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad (|x| < 1),$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \cos \sqrt{x}, \quad (|x| < \infty),$$

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (|x| < 1),$$

$$f_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^{2n} = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{-2}, \quad (|x| < \sqrt{2}).$$

6.3 $x = 0, -1$ regulares y $x = 1$ irregular.

$$6.4 y = \frac{c_0 + c_1 x}{1 - x^2}. \quad u'' = 0.$$

$$6.7 y \sim \frac{e^{x^2} - 1}{x} \sim x e^{x^2} \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

$$6.8 E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega.$$

6.9 Recuerde que $|\Gamma(0)| = |\Gamma(-1)| = |\Gamma(-2)| = \dots = \infty$.

$$6.15 y = \frac{x}{1+x}(A + B \ln x).$$

$$6.17 y = Ax + B \left[e^{-x} + x \operatorname{Ei}(x) \right] = C_1 x + C_2 \left[x \ln x + 1 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n-1)} x^n \right].$$

$$6.21 y = A \cos x^2 + B \sin x^2.$$

Capítulo 7

$$7.4 y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{37}{30}x^6 + \frac{404}{315}x^7 + \frac{369}{280}x^8 + \frac{428}{315}x^9 + \frac{1961}{1400}x^{10} + \dots$$

$$7.6 y = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \frac{11}{2}x^4 + \frac{21}{2}x^5 + \frac{81}{4}x^6 + \frac{1109}{28}x^7 + O(x^8).$$

$$7.10 x = \sin t + \epsilon \frac{1 + \cos 2t}{4} + O(\epsilon^2).$$

$$7.11 x = \sin t + \epsilon \frac{1 + \cos 2t}{4} + \epsilon^2 \frac{7 \sin t - \sin 3t}{28} + O(\epsilon^3).$$

$$7.16 y = x^{-1/4} \left(A \cos \omega x^{3/2} + B \sin \omega x^{3/2} \right), \quad \text{con } \omega = \frac{2}{3\epsilon}.$$

Capítulo 8

8.2 En la figura G.4 puede verse el diagrama de bifurcación que corresponde a la solución general

$$x = x_0 \sqrt{\frac{a}{x_0^2 + (a - x_0^2) e^{-2at}}}.$$

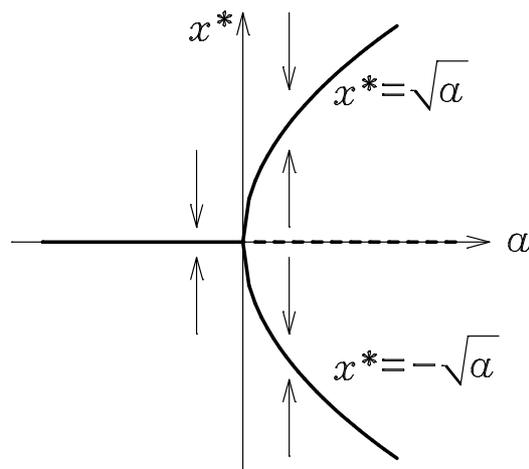


FIGURA G.4 Diagrama de bifurcación de la ecuación (8.4).

8.3 La ecuación de las trayectorias de fases, $y' = -\omega^2 x/y$, es separable y su solución $E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ expresa la conservación de la energía mecánica y nos dice que las trayectorias de fases son elipses. El sentido de las trayectorias de fases se halla recordando que y es la velocidad: si $y = \dot{x}$ es positivo (negativo), x crece (disminuye) y el sistema se mueve hacia la derecha (izquierda) en el espacio de fases.

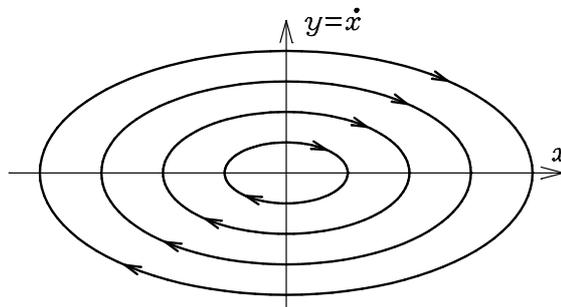


FIGURA G.5 Espacio de fases del oscilador armónico.

8.4 $\dot{\theta} = \omega, \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta. H = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{g}{l} \cos \theta.$

8.7 $\dot{\theta} = \omega, \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \theta. \dot{\varphi} = \omega, \dot{\omega} = +\frac{g}{l} \varphi, (\varphi \equiv \theta - \pi).$

8.9 $k = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$. $k = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$.

8.11 Recuerde las figuras de Lissajous² o elimine t y use las propiedades de las curvas de segundo grado (las secciones cónicas).

8.12 Ensayando la solución en la ecuación se tiene $(\mathbf{A} - k\mathbf{1}) \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$, que tiene soluciones excepto cuando $\mathbf{A} - k\mathbf{1}$ es idénticamente nulo, es decir, si no se cumple $a_{12} = a_{21} = 0$.

8.13 La ecuación de las trayectorias de fases es $y^2 dy = x^2 dx$. Estudiando la asíntota, puntos de inflexión y el valor de la derivada de la solución $y = (x^3 + y_0^3)^{1/3}$, se obtiene la figura G.6. (Para hallar el sentido de recorrido basta usar que $\dot{x}, \dot{y} \geq 0$). Es claro que el punto de equilibrio es inestable.

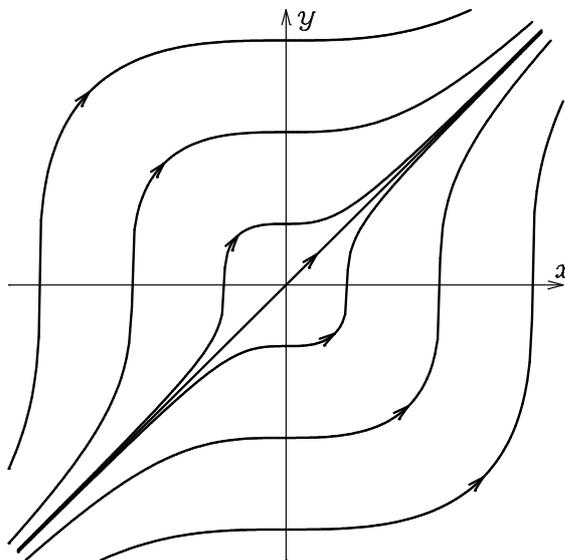


FIGURA G.6 Espacio de fases del sistema (8.70).

8.21 Asintóticamente estable en el primer caso e inestable en el segundo.

8.23 Circunferencias.

8.25 $H = x^2y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

8.26 $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y = -2n\gamma y^{2n-1}$.

La derivada de la energía mecánica $E = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ no es definida: $\dot{E} = -\gamma y^{2n+1}$.

8.27 Es invariante frente a la transformación $(t, x, y) \rightarrow (-t, -x, y)$.

8.30 $r = (2t + C)^{-1/2} \rightarrow 0$. (La solución está definida para $t > -C/2$ y estaba en $r = -\infty$ para $t = -C/2$).

²Jules Antoine Lissajous (4-03-1822, Versailles, Francia; 24-06-1880, Plombières, Francia). Desarrolló un método óptico para estudiar vibraciones y trabajó sobre diversos aspectos del movimiento ondulatorio y las vibraciones, incluyendo el fenómeno de los batidos.

8.31 -2λ .

8.32 $r = \sqrt{\frac{\lambda}{1 + Ce^{-2\lambda t}}}$. (Recuerde el ejercicio 8.2).

8.34 $\lambda = 0, -\frac{\gamma}{2}, -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - 1}$.

Capítulo 9

9.1 No hay solución distinta de la trivial.

9.10

$$\text{Legendre} : \left[(1-x^2)y' \right]' + n(n+1)y = 0,$$

$$\text{Laguerre} : \left[xe^{-x}y' \right]' + \lambda e^{-x}y = 0,$$

$$\text{Hermite} : \left[e^{-x^2}y' \right]' + \lambda e^{-x^2}y = 0.$$

9.12 $Ay = \lambda y \implies (\lambda - \bar{\lambda}) \|y\|_\rho^2 = \langle y, Ay \rangle_\rho - \langle Ay, y \rangle_\rho = 0 \implies \lambda = \bar{\lambda}$.

9.13 $Ay_n = \lambda y_n \implies (\lambda_m - \lambda_n) \langle y_n, y_m \rangle_\rho = \langle y_n, Ay_m \rangle_\rho - \langle Ay_n, y_m \rangle_\rho = 0 \implies \langle y_n, y_m \rangle_\rho = 0$.

9.18 $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

9.21 Sí, $\sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell \left(\frac{\ell \sin \sqrt{\lambda} x}{\lambda \sin \sqrt{\lambda} \ell} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin n\omega x \, dx = \frac{\sqrt{2\ell^3}}{\pi} \frac{(-1)^n}{n(\lambda - n^2\omega^2)}$. El mismo resultado vale cuando $\lambda < 0$, pero si se prefiere uno manifiestamente real basta usar $\sin(ix) = i \sinh x$:

$$y = \frac{\ell \sinh \sqrt{-\lambda} x}{\lambda \sinh \sqrt{-\lambda} \ell} - \frac{x}{\lambda}.$$

Cuando $\lambda = 0$, puede calcularse el límite $\lambda \rightarrow 0$ o usarse el cálculo directo para hallar

$$y = \frac{x}{6} (\ell^2 - x^2) = -\frac{2\ell}{\pi\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\omega x}{n^3}.$$

9.24 Para $\lambda > 0$ estamos en el caso del problema 3.11,

$$G_\lambda(x, s) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} (s - \ell)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \ell}, & \text{si } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} s \sin \sqrt{\lambda} (x - \ell)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \ell}, & \text{si } s \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

y para $\lambda < 0$

$$G_\lambda(x, s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{-\lambda} x \sinh \sqrt{-\lambda} (s - \ell)}{\sqrt{-\lambda} \sinh \sqrt{-\lambda} \ell}, & \text{si } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{\sinh \sqrt{-\lambda} s \sinh \sqrt{-\lambda} (x - \ell)}{\sqrt{-\lambda} \sinh \sqrt{-\lambda} \ell}, & \text{si } s \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Apéndice A

A.1

1. Tome el límite $z \rightarrow y$ en (A.3). (O, si lo prefiere, utilice allí la clásica notación con δ y ϵ).
2. $|f(x, y) - f(x, 0)| = \frac{1}{\sqrt{y}}|y - 0|$.
3. $y + \ln x$ en $[0, 1] \times [0, 1]$.
4. Por el teorema del valor medio. $f(x, y) - f(x, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y - z)$, para algún valor intermedio $y < \xi < z$ (o $z < \xi < y$). Por tanto, como la derivada es continua, está acotada en \mathcal{R} , $|\partial f / \partial y| < K$, de forma que

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) \right| |y - z| \leq K|y - z|.$$

5. Recuerde el ejercicio 1.9.
6. Si $x_0 = 0$ la solución máxima es $y(x) = y_0 / (1 - xy_0)$, por lo que, aunque $A = \infty$ (es decir, tan grande como se quiera), la solución solo está definida en $(-\infty, 1/y_0)$ (o, si y_0 es negativo, en $(1/y_0, \infty)$).

Apéndice B

B.1 Su apariencia denota que son la solución de una ecuación de segundo grado para la y que puede construirse fácilmente.

B.3 Use las funciones modificadas de Bessel del apartado D.9.

B.7 No sabe resolver la ecuación,

```
In[1]:= DSolve[2 Y'[x] Y''[x] == 3 Y''[x]^2, Y[x], x] // Simplify
```

```
Out[1]= DSolve[2 Y'[x] Y''[x] == 3 Y''[x]^2, Y[x], x]
```

aunque su orden puede rebajarse a mano con $z = y'$ para dar una ecuación equivalente que sí sabe resolver:

```
In[2]:= DSolve[2 z[x] z'[x] == 3 z'[x]^2, z[x], x] // Simplify
```

```
Out[2]= {{z[x] -> \frac{4}{C[1]^2 (x - C[2])^2}}}
```

B.8 $\theta(x - a)\delta(x - a)$ no está bien definida (ni con el convenio $\theta(0) = 1$), ya que la delta se calcula en el punto de discontinuidad de la función de Heaviside.

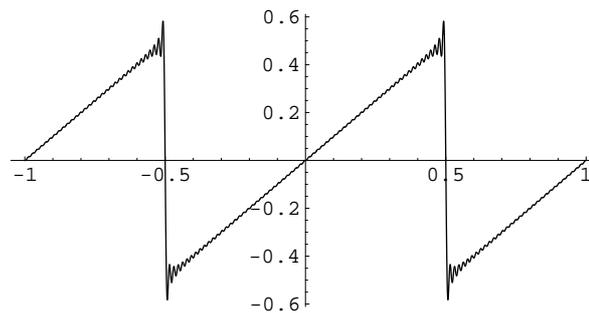


FIGURA G.7 Serie de Fourier de la función de la figura 9.2: se han usado 64 términos.

B.22 Véase la figura G.7

B.24 Use la opción `Method -> MethodEGF`:

```
In[1]:= << DiscreteMath`RSolve`
In[2]:= II[λ_] := λ2 - 2 λ - 5/4;
In[3]:= RSolve[{II[λ + 2 k] a2[k] - a2[k - 1] == 0, a2[0] == 1}, a2[k],
  k, Method -> MethodEGF]
Out[3]= {{a2[k] ->  $\frac{4^{-k}}{\text{Pochhammer}[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2}, k] \text{Pochhammer}[\frac{5}{4} + \frac{\lambda}{2}, k]}$ }}
In[4]:= % /. λ -> 5/2 // FunctionExpand // FullSimplify
Out[4]= {{a2[k] ->  $\frac{3}{(3 + 2 k) \text{Gamma}[2 + 2 k]}$ }}
```

Apéndice D

D.2 $z = 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n-1} = e^{-1}$.

D.8

$$\int \mathcal{W}(x) dx = x \frac{\mathcal{W}^2(x) - \mathcal{W}(x) + 1}{\mathcal{W}(x)},$$

$$\int x \mathcal{W}(x) dx = \frac{1}{8} x^2 \frac{[2\mathcal{W}^2(x) + 1][2\mathcal{W}(x) - 1]}{\mathcal{W}^2(x)}.$$

D.9 $x = \mathcal{W}(1) \approx 0,567143$.

$$x = -\frac{c}{a} \mathcal{W} \left[-\frac{a}{b^{1/c} c} \right].$$

$$x = \left[\frac{\mathcal{W}(abe^{bc})}{ab} \right]^{\frac{1}{b}}.$$

$x = 1 + \mathcal{W}(e^{-1}) \approx 1,27846$.

D.10 Use la integral de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

y un desarrollo en serie de potencias del integrando. Por otro lado, $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$.

D.12 Usando de nuevo la integral de Gauss,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \stackrel{t=u^2}{=} 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

e inducción completa para el resto.

Bibliografía

*Some books are to be tasted,
others to be swallowed,
and some few to be chewed and digested.*
Francis Bacon

El objetivo de esta sección no es intentar una recopilación exhaustiva de la abundantísima bibliografía que existe sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. En lugar de abordar ese ejercicio de erudición, hemos preferido recoger, primero, una lista relativamente corta de las últimas ediciones que conocemos de textos de introducción a las ecuaciones diferenciales que urgimos al lector a manejar, ya que corresponden al nivel de esta asignatura. Aunque los libros de texto suelen contener colecciones de ejercicios, también hemos incluido algunos libros de problemas que pueden ayudar al estudiante a preparar concienzudamente la asignatura. Además, se recomienda al alumno obtener una tabla de fórmulas matemáticas, que le resultará útil en diversas asignaturas, e incluso en un futuro ejercicio profesional. Al final proponemos algunos reputados textos complementarios y varios manuales de referencia para lectores avanzados, así como algunos útiles informáticos.

Textos elementales

- [1] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 4.^a ed., Limusa (1998).
- [2] W. R. Derrick and S. I. Grossman, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, 4th ed., Addison-Wesley (1997).
- [3] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, 4.^a ed., URSS (1994).
- [4] A. Gray, M. Mezzino and M. A. Pinsky, *Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica*, Springer (1997).
- [5] F. Marcellán, L. Casasús y A. Zarzo, *Ecuaciones diferenciales*, McGraw-Hill (1990).
- [6] S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill (1995).
- [7] S. L. Ross, *Ecuaciones diferenciales*, Reverté (1992).
- [8] G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales*, 2.^a ed., McGraw-Hill (1993).

Colecciones de problemas

- [9] F. Ayres, *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales*, Schaum, McGraw-Hill (1991).
- [10] A. I. Kiseliiov, M. L. Krasnov y G. I. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Mir-Rubiños 1860 (1992).
- [11] M. L. Krasnov, A. I. Kiselev y G. I. Makarenko, *Funciones de variable compleja. Cálculo operacional. Teoría de la estabilidad*, Mir-Rubiños 1860 (1992).

Tablas

- [12] M. R. Spiegel y L. Abellanas, *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, Schaum McGraw-Hill (1999).
- [13] I. Bronshtein y K. Semendiaev, *Manual de Matemáticas*, 9.^a ed., Mir-Rubiños 1860 (1992).
- [14] I. Bronshtein and K. Semendyayev, *Handbook of Mathematics*, Springer (1997).

Textos complementarios y avanzados

- [15] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th ed., Academic Press (1995).
- [16] V. I. Arnold, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Rubiños-1860 (1995).
- [17] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, (2 Vols.), Wiley (1962).
- [18] F. R. Gantmájér, *Mecánica Analítica*, Editorial URSS (1996).
- [19] M. W. Hirsch y S. Smale *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza-Universidad (1983).
- [20] M. H. Holmes *Introduction to perturbation Methods*, Springer (1995).
- [21] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover (1956).
- [22] D. S. Jones, *Funciones Generalizadas*, Urmo (1972).
- [23] L. M. Jones, *An Introduction to Mathematical Methods of Physics*, Benjamin (1979).
- [24] A. M. Krall, *Linear Methods of Applied Analysis*, Addison-Wesley (1973).
- [25] J. Mathews and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, Benjamin (1970).
- [26] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (2 Vols.), McGraw-Hill (1953).
- [27] L. Schwartz, *Métodos matemáticos para las ciencias físicas*, Selecciones Científicas (1969).

- [28] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley (1994).
- [29] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, 2nd ed., Springer (1996).
- [30] W. Walter, *Ordinary Differential Equations*, Springer (1998).

Textos de cálculo numérico³

- [31] G. Engeln-Müllges and F. Uhlig, *Numerical Algorithms with C*, Springer (1996).
- [32] E. Hairer, S. P. Norsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations*, 2 Vols., 2nd ed., Springer (1993,1996). Programas gratuitos en <ftp://ftp.unige.ch/pub/doc/math>
- [33] W. H. Press, S. A. Flannery, B. P. Teukolsky and V. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Programming*, 2nd ed., Cambridge University Press, (1992).
- [34] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer (1993).

Obras de referencia

- [35] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1972).
- [36] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, 5th ed., Academic Press (1994).
- [37] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea Publishing Company (1947-48).
- [38] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*, 2nd ed., Academic Press (1992).

Otras referencias

- [39] J. M. Aguirregabiria, "Getting started with Mathematica". Fichero Postscript disponible como <http://tp.lc.ehu.es/anonym/mathemat/mathematica.ps>
- [40] J. M. Aguirregabiria, A. Hernández and M. Rivas, "Are we careful enough when using computer algebra systems?", *Computers in Physics*, **8**, No. 1, 56 (1994).
- [41] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey and D.E. Knuth, "On the Lambert W Function", Technical Report CS-93-03, Dept. Comp. Sci., University of Waterloo (1993). <ftp://cs-archive.uwaterloo.ca/cs-archive/CS-93-03/W.ps.Z>

³Una excelente fuente de rutinas numéricas gratuitas de todo tipo en FORTRAN, C y C++ es el archivo <http://www.netlib.no>

Programas integrados de cálculo matemático

Contienen, entre otras muchas posibilidades, métodos simbólicos y numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales. Existen versiones para la mayor parte de los sistemas operativos.

- [42] Macsyma es distribuido por Macsyma Inc., 20 Academy Street, Arlington, MA 02174, USA.
- [43] Maple V es distribuido por Waterloo Maple Software, 160 Columbia Street, Unit 2, Waterloo, Ontario N2L 3L3, Canadá.
- [44] *Mathematica* es distribuido por Wolfram Research, Inc., 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, USA.

Programas de resolución numérica de ecuaciones diferenciales

Para MS-DOS

- [45] J. M. Aguirregabiria, *ODE Workbench*, Physics Academic Software, American Institute of Physics (1994).
- [46] H. Koçak, *Differential and Difference Equations through Computer Experiments*, 2nd ed., Springer(1989).

Para Windows

- [47] J. M. Aguirregabiria, *Dynamics Solver*.
(Véase en <http://tp.lc.ehu.es/JMA/ds/ds.html>)

Para X-Windows

- [48] A. Back, J. Guckenheimer, M. R. Myers, F. J. Wicklin and P. A. Worfolk, *DsTool*.
(Véase en <http://www.geom.umn.edu/software/dstool/>)

Historia de las ecuaciones diferenciales

El lector interesado puede acudir al excelente *MacTutor History of Mathematics archive* que mantienen John J. O'Connor y Edmund F. Robertson de la School of Mathematical and Computational Sciences, University of St Andrews, Escocia, en la siguiente dirección:

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>

Allí podrá encontrar resúmenes biográficos y bibliografía detallada.

Índice alfabético

- !, véase función factorial
- !!, véase función subfactorial
- ' (derivada con respecto a x), 1
- $\dot{}$ (derivada con respecto a t), 2
- $[x]$, véase parte entera
- f , véase valor principal de Cauchy
- $\mathbf{0}$, véase matriz nula
- $\mathbf{1}$, véase matriz identidad
- Γ , véase función gamma de Euler
- Ω , véase número armónico
- γ , véase constante de Euler-Mascheroni
- δ , véase delta de Dirac (y delta de Kronecker)
- θ , véase función de Heaviside

- A, véase operador lineal
- Abel, 50
 - fórmula de, véase fórmula de Liouville
- Abraham, 38
- Abraham-Lorentz
 - ecuación diferencial de, 38
- Adams, 159
 - método de, 159
- Adams-Bashforth
 - método de, 159
- Adams-Bashforth-Moulton
 - método de, 159, 265
- Adams-Moulton
 - método de, 159
- apocentro, 30
- aproximaciones sucesivas
 - método de, 146, 240, 255
- aproximación
 - diferida al límite, 160
 - error de, 154
 - lineal, 175
 - primera, 175
 - óptima, 233
- argumento
 - de un número complejo, 279
 - valor principal, 279
- atractor, 169, 203
 - caótico, 168, 205, 207, 209, 259
 - de Duffing, 209
 - de Lorenz, 204, 259
 - de Rössler, 208
 - extraño, 204, 208, 210

- Bachmann-Landau
 - símbolo de, 144
- Baker-Campbell-Hausdorff
 - fórmula de, 97
- base, 48
- Bernoulli, 27
 - ecuación diferencial de, 27, 270
- Bertrand, 215
 - teorema de, 215
- Bessel, 126
 - ecuación diferencial de, 73, 114, 126–129, 137, 141, 226, 274
 - ecuación diferencial modificada de, 289
 - función de, 114, 128, 139, 140, 289
 - de primera especie, 128, 289
 - de segunda especie, 128, 289
 - función modificada de, 317
 - de primera especie, 289
 - de segunda especie, 289
- bifurcación, 169, 199
 - de Hopf, 199, 202
 - diagrama de, 169, 216, 314
 - parámetro de, 169
- Binet
 - ecuación diferencial de, 34
- binomio
 - de Newton, 285, 291, 311
- biperiodicidad, 203
- Bulirsch-Stoer
 - método de, 161
- Burgers
 - ecuación diferencial de, 76

- cambio
 - de escala, 25, 105
 - de variables, 9, 25–27, 33, 41–44, 51–53, 71, 73, 108, 121, 124, 141, 142, 152, 173, 198, 226, 270–273, 275, 276, 283
- campo
 - conservativo, 18
 - de direcciones, 15
 - de fuerzas, 215
 - de velocidades, 80, 171
 - escalar, 18
 - integrable, 21
 - vectorial, 18, 21, 170, 174, 175, 186
- Cantor, 205
 - conjunto de, 205, 208

- ternario, 213
- caos determinista, 167, 202, 204–210
- Cardano, 143
- Carson-Heaviside
 - transformación de, 101
- Cauchy, 56
 - ecuación diferencial de, *véase* ecuación diferencial de Cauchy-Euler
 - método de, 56, 89, 230, 236, 275
 - problema de, 6
 - valor principal de, 101, 286
- Cauchy-Euler
 - ecuación diferencial de, 71, 121, 134, 273, 275
 - sistema de, 98, 276
- Cayley, 91
- Cayley-Hamilton
 - teorema de, 91
- centro, 180
 - no lineal, 196–198
- Chérbichev, 140
 - ecuación diferencial de, 274, 293
 - polinomio de, 140, 291, 293
- Ci, *véase* función integral coseno
- ciclo
 - límite, 151, 168, 199–202, 213
 - inestable, 201
 - semiestable, 201
- ciencia no lineal, 167
- circuito
 - RL, 36
 - RLC, 62, 97, 110
- Clairaut, 32
 - ecuación diferencial de, 32–33, 250, 272
- coeficientes indeterminados
 - método de, 66, 94, 146, 255, 274, 275, 277
- concomitante bilineal, 222
- condiciones iniciales
 - dependencia sensible de las, 205
 - problema de, 6, 109
- condición
 - de contorno, 7
 - de Lipschitz, 239, 243
 - en el infinito, 37
 - inicial, 6, 16
- conexión
 - homoclínica, 189, 190
- congruencia
 - ecuación diferencial de una, 77
- conjunto
 - completo, 221
 - de Cantor, 205, 208
 - ternario, 213
 - invariante, 168, 203, 204
 - ortonormal, 221
- conmutador, 97
- conservación
 - ley de, 8, 29, 42, 44, 82, 115, 188, 314
- constante
 - de Euler, *véase* constante de Euler-Mascheroni
 - de Euler-Mascheroni, 287
 - del movimiento, *véase* integral primera
 - método de variación de constantes, 54, 88, 275, 277
- continuidad
 - por trozos, 102
- contorno
 - condición de, 7
 - problema de, 7, 72, 219
- convergencia, 220
 - en norma, 90, 220
 - radio de, 119
- convolución, 107–108
 - de Laplace, 107
- corriente
 - línea de, 80, 171
- crecimiento
 - exponencial, 103
- cuadratura, 8, 19, 25, 37, 44, 51, 52, 57, 72, 73, 119, 147
 - numérica, 153
- cuasipolinomio, 64, 274, 277
- cuenca de atracción, 213
- curva
 - congruencia de curvas, 14, 77
 - cónica, 315
 - de segundo grado, 315
 - estrofoide, 37
 - familia de curvas, 13, 39
 - uniparamétrica, 13
 - gaussiana, 60
 - integral, 14, 40, 78
 - isoclina, 143
 - tautocrona, 115
- cálculo simbólico, 8
 - de Heaviside, 68
 - sistema de, 91, 93
- cónica, *véase* sección cónica
- cúspide, 37
- D, *véase* operador de derivación
- d'Alembert, 51
 - método de, 51, 251
- de Moivre, 280
 - teorema de, 280
- definición
 - intervalo de, 10
- delta
 - de Dirac, 59, 62, 72, 74, 89, 106, 108, 109, 111, 114–116, 230–232, 235, 252, 312, 317
 - de Kronecker, 221
- dependencia lineal, 45, 85
- dependencia sensible de las condiciones iniciales, 205
- depredador y presa

- modelo de, 214
- derivación
 - método de, 34, 72
 - operador de, 47, 63
 - polinomio de, 63
- derivada
 - generalizada, 58
 - logarítmica, 135
- derivadas cruzadas, 17
- Descartes, 185
 - hoja de, 185
- descomposición
 - en fracciones simples, 106
- desintegración radiactiva, 98
- desplazamiento
 - teorema del, 104
- determinante
 - de Vandermonde, 310
 - de Wronski, *véase* wronskiano
- diagrama
 - de bifurcación, 169, 216, 314
- diferencial
 - exacta, 83
- dimensión, 213
 - fractal, 213
- dinámica
 - cualitativa, 167
- Dirac, 59
 - delta de, 59–61, 62, 72, 74, 89, 106, 108, 109, 111, 114–116, 230–232, 235, 252, 312, 317
 - peine de, 235
- discretización, 153
 - error de, 154
- discriminante, 175
- distancia, 220
- distribución, *véase* función generalizada
- divergencia, 174, 175
- Duffing
 - atractor de, 209
 - ecuación diferencial de, 208, 213
- ecuaciones
 - canónicas de Hamilton, 174
 - de Einstein, 3
 - de Lotka-Volterra, 214
 - de Maxwell, 3
- ecuación
 - característica, 92
 - de Newton, 3
 - de Schrödinger, 2, 123, 152, 219
 - de Volterra, 114
 - diferencial, *véase* ecuación diferencial
 - en diferencias finitas, 75, 215, 267
 - finita, 1
 - funcional, 3, 234
 - indicial, 127, 131
 - integral, 114
 - de Volterra, 114
- ecuación diferencial, 1–3
 - $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, 41, 275
 - $F(y') = 0$, 31, 272
 - $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, 41, 275
 - $x = g(y')$, 32, 272
 - $y' = f(ax + by + c)$, 26, 271
 - $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$, 26, 271
 - $y = g(y')$, 32, 272
 - adjunta, 222
 - autónoma, 41–42, 79, 171, 275
 - con retraso, 3, 116
 - de Abraham-Lorentz, 38
 - de Bernoulli, 27, 270
 - de Bessel, 73, 114, 126, 137, 141, 226, 274
 - de Bessel modificada, 289
 - de Binet, 34
 - de Burgers, 76
 - de Cauchy, *véase* ecuación diferencial de Cauchy-Euler
 - de Cauchy-Euler, 71, 121, 134, 273, 275
 - de Chébichev, 274, 293
 - de Clairaut, 32, 250, 272
 - de Duffing, 208, 213
 - de Euler, *véase* ecuación diferencial de Cauchy-Euler
 - de Friedmann, 37
 - de Gauss, 274
 - de Hermite, 123, 223, 274, 294, 316
 - de Kummer, 274
 - de la congruencia, 77
 - de Lagrange, 33, 272
 - de Laguerre, 223, 274, 295, 316
 - de Legendre, 223, 236, 274, 296, 316
 - de Liénard, 201
 - de Riccati, 27, 163, 270
 - de una familia de curvas, 14, 40
 - de van der Pol, 148, 201, 202
 - de variables separadas, 19, 270
 - de Verhulst, 211
 - en derivadas parciales, 2
 - equidimensional en x , 42–43, 71, 275
 - equidimensional en y , 43–44, 275
 - equivalente a un sistema, 40
 - exacta, 17–19, 44, 270, 276
 - lineal, 75
 - forma canónica de una, 78, 83, 246
 - forma normal de una, 6, 15, 40, 53, 78, 246
 - forma simétrica de una, 15
 - hipergeométrica, 142, 274
 - confluente, 142
 - homogénea, 25, 36, 44, 270
 - isobárica, 25, 36, 271
 - lineal, 3, 8, 24, 46, 270, 272
 - completa, 24, 47, 53–57, 272, 274
 - completa con coeficientes constantes, 65–70

- completa de segundo orden, 73, 119
- exacta, 75
- homogénea, 24, 46–53, 272, 273
- homogénea con coeficientes constantes, 63–65, 273
- homogénea de segundo orden, 52, 73, 119, 273
- incompleta, *véase* ecuación diferencial lineal homogénea
- inhomogénea, 47
- no resuelta en la derivada, 29–34, 271, 272
- orden de una, 3
- ordinaria, 1
- rígida, 161
- separable, 21, 270
- significado geométrico de una, 13, 39, 77
- sin la variable dependiente, 19, 41
- singular, 152
- sistema de ecuaciones diferenciales, 2
- solución de una, 3–4
- efecto mariposa, 205
- Ei, *véase* función integral exponencial
- Einstein, 3
 - ecuaciones de, 3
- energía mecánica, 8, 9, 29, 42, 44, 115, 188, 314
 - ley de conservación
 - de la energía mecánica, 8, 42, 44, 188
- enlace
 - fórmula de, 153
- envolvente, 28–29, 30, 33, 37, 250, 272, 308, 309
- equilibrio
 - punto de, 168
- equipotencial
 - curva, 18, 21
- equivalencia
 - topológica, 181
- erf, *véase* función error
- erfc, *véase* función error complementaria
- erfi, *véase* función error imaginaria
- error
 - de aproximación, 154
 - de discretización, 154
 - de redondeo, 154
 - de truncamiento, 154, 160
 - global, 154
 - local, 154
- escala
 - cambio de, 25, 105
 - invariancia de, 25, 36, 42, 43, 210
- escenario
 - de Landau, 204
- espacio
 - $L^2(a, b)$, 221
 - $L^2(a, b; d\mu)$, 221
 - $F(\alpha)$, 102
 - de fases, 79, 170
 - de Hilbert, 221
 - de soluciones de la ecuación homogénea, 48, 86
 - estable, 178
 - inestable, 178
 - separable, 221
- espectro, 226
 - de Fourier, 235
- estabilidad, 168
 - a gran escala, 169
 - asintótica, 96, 169
 - lineal, 91, 176–184
- Euler, 64
 - constante de, *véase* constante de Euler-Mascheroni
 - ecuación diferencial de, *véase* ecuación diferencial de Cauchy-Euler
 - función gamma de, 113, 139, 284–285
 - fórmula de, 280
 - método de, 64, 75, 91, 154, 273, 276
 - método implícito de, 161
 - método mejorado de, 155
 - método modificado de, 156
 - ángulo de, 204
- Euler-Mascheroni
 - constante de, 287
- excentricidad, 29
- existencia
 - global de la solución, 243
- existencia y unicidad
 - teorema de, 7, 11, 16, 28, 40, 47, 78, 147, 205, 215, 239
- exponencial
 - de una matriz, 90, 262
- exponente
 - característico, 64, 92
 - de Floquet, 201
 - de Liapunov, 206, 213
- extrapolación
 - de Neville, 160
 - de Richardson, 160
 - método de, 160
 - racional, 160
- \mathcal{F} , *véase* transformación de Fourier
- $F(\alpha)$, *véase* espacio $F(\alpha)$
- $f(t + 0)$, *véase* límite por la derecha
- $f(t - 0)$, *véase* límite por la izquierda
- factor
 - integrante, 20–23, 44, 75
 - especial, 22, 271
- factorial, *véase* función factorial
- familia
 - de curvas, 13, 39
 - ecuación diferencial de una, 14, 40
- fenómeno
 - de Gibbs, 234, 266
- Ferrari, 143
- Fibonacci, 75

- número de, 75
- sucesión de, 75, 267
- figuras
 - de Lissajous, 315
- Floquet
 - exponente de, 201
 - teoría de, 201
- fluido, 10
- flujo, 80, 171
- foco, 179
- forma
 - cartesiana de un número complejo, 279
 - definida, 212
 - negativa, 212
 - positiva, 212
 - polar de un número complejo, 279
- formula
 - de Poisson, 235
 - de Rodrigues, 293–296
- Fourier, 226
 - espectro de, 235
 - fórmula de inversión, 116
 - serie compleja de, 235
 - serie de, 227, 265
 - serie de cosenos de, 233
 - serie de senos de, 226
 - serie truncada de, 234, 266
 - tablas de transformadas de, 303–305
 - transformación de, 101, 115, 235, 251, 303–305
 - transformación inversa de, 115, 116
- fractal, 204, 208, 210, 214
- Fredholm, 229
 - teorema de la alternativa de, 229
- Friedmann
 - ecuación diferencial de, 37
- Frobenius, 121
 - método de, 130
 - serie de, 121
- frontera
 - entre cuencas de atracción, 213
- función
 - analítica, 120
 - Ci, véase función integral coseno
 - complementaria, 53
 - continua por trozos, 111
 - de Bessel, 114, 128, 139, 140, 289
 - de primera especie, 128, 289
 - de Bessel modificada, 317
 - de primera especie, 289
 - de segunda especie, 289
 - de Green, 63, 72, 229
 - de dos puntos, 72, 229
 - de Hamilton, véase hamiltoniano
 - de Heaviside, 57, 59–62, 89, 102, 104, 108, 111, 115, 227, 231, 252, 266, 317
 - de Kummer, 125, 139, 142
 - de Lambert, 21, 282–283
 - de Liapunov, 191, 192, 212
 - de Newmann, 128, 289
 - de transferencia, 110
 - de Weber, 128, 289
 - de Weierstrass, 234
 - del sistema, 110
 - delta de Dirac, 59
 - Ei, véase función integral exponencial
 - elemental, 8, 119
 - elíptica, 288
 - erf, véase función error
 - erfc, véase función error complementaria
 - erfi, véase función error imaginaria
 - error, 35, 113, 139, 283
 - complementaria, 283
 - imaginaria, 283
 - escalón unidad, 57
 - especial, 8, 9, 119, 263, 279
 - factorial, 138, 284, 286
 - gamma de Euler, 113, 139, 284–285
 - generalizada, 57–63, 72, 74, 89, 106, 108, 109, 111, 114–116, 230–232, 235, 236, 252, 312, 317
 - hipergeométrica confluyente de Kummer, 125, 139, 142, 290
 - hipergeométrica de Gauss, 139, 142, 291
 - homogénea, 25
 - impulso unidad, 59
 - indicial, 131
 - integral coseno, 113, 287
 - integral elíptica, 9, 287
 - completa, 288
 - integral exponencial, 113, 286–287
 - integral seno, 113, 287
 - puerta, 61
 - regular, 17
 - Si, véase función integral seno
 - sierra, 234
 - signo, 74
 - subfactorial, 114, 286
 - sumable, 59
- fórmula
 - de Abel, véase fórmula de Liouville
 - de Baker-Campbell-Hausdorff, 97
 - de desarrollo de Heaviside, 106
 - de enlace, 153
 - de Euler, 280
 - de Glauber, 97
 - de Green, 222
 - de inversión de Fourier, 116
 - de Liouville, 50, 96
 - de Ostrogradski, véase fórmula de Liouville
 - de Rodrigues, 125
 - de Stirling, 284
- Gauss, 139

- ecuación diferencial hipergeométrica de, 142, 274
 función hipergeométrica de, 139, 142, 291
 integral de, 319
- Gibbs, 234
- fenómeno de, 234, 266
- Glauber
- fórmula de, 97
- grados de libertad
- número de, 79
- Gragg
- método de, 160
- Green, 222
- función de, 63, 72, 229–232
- función de Green de dos puntos, 72, 229
- fórmula de, 222
- Grobman-Hartman
- teorema de, 181
- H_n , véase polinomio de Hermite
- Hamilton, 172
- ecuaciones canónicas, 174
- hamiltoniano, 172
- Hankel
- transformación de, 101
- Heaviside, 57
- cálculo simbólico de, 68
- función de, 57, 59–62, 89, 102, 104, 108, 111, 115, 227, 231, 252, 266, 317
- fórmula de desarrollo, 106
- Hermite, 124
- ecuación diferencial de, 123, 223, 274, 294, 316
- polinomio de, 125, 290, 294
- Heun
- método de, 155–156
- Hilbert, 221
- espacio de, 221
- transformación de, 101
- hoja
- de Descartes, 185
- Hopf, 199
- bifurcación de, 199, 202
- \mathcal{I} , véase función indicial
- I_ν , véase función de Bessel modificada de primera especie
- identidad
- de Lagrange, 222
- matriz, 88
- Im, véase parte imaginaria
- inestabilidad, 169
- infinito, 121, 124
- inspección
- método de, 10, 27, 54, 136, 246
- integral
- curvilínea, 18
- de Gauss, 319
- de Lebesgue, 58, 221
- de Riemann, 58, 221
- elíptica, 9, 287–289
- completa, 291
- exponencial, 35, 286–287
- primera, 9, 44, 81–83, 195, 276, 277
- valor principal de Cauchy, 281
- interpolación, 153
- intervalo
- de definición, 10
- invariancia
- de escala, 25, 36, 42, 43, 210
- de traslación, 41, 275
- isoclina, 143
- J_ν , véase función de Bessel de primera especie
- Jacobi, 108
- acobiano, 108, 174
- K_ν , véase función de Bessel modificada de segunda especie
- Kepler, 164, 216
- problema de, 29, 31, 34, 164, 216
- Kronecker, 221
- delta de, 221
- Kummer, 142
- ecuación diferencial de, 274
- función de, 125, 139, 142
- función hipergeométrica confluyente de, 290
- Kutta, 157
- \mathcal{L} , véase transformación de Laplace
- L, véase operador lineal
- L_n , véase polinomio de Laguerre
- l'Hôpital, 163
- regla de, 163
- Lagrange, 33
- ecuación diferencial de, 33–34, 272
- identidad de, 222
- operador adjunto formal de, 222
- principio de, 188
- teorema de, 188
- Laguerre, 141
- ecuación diferencial de, 223, 274, 295, 316
- polinomio de, 141, 290, 295
- polinomio generalizado de, 141, 295
- Lambert
- función de, 21
- Landau, 204
- escenario de, 204
- símbolo de, véase símbolo de Bachmann-Landau
- Laplace, 102
- convolución de, 107
- tablas de transformadas de, 297–301
- transformación de, 39, 101, 103, 251, 269, 297
- propiedades de la, 104
- Lebesgue, 58
- integral de, 58, 221

- Legendre, 140
 ecuación diferencial de, 223, 236, 274, 296, 316
 polinomio de, 140, 236, 291, 296
- Leibniz, 88
 regla de, 88
- Lerch, 106
 teorema de, 106
- Levinson-Smith
 teorema de, 201
- ley
 de conservación, 8, 29, 42, 44, 82, 115, 188, 314
 de la energía mecánica, 29, 115, 188, 314
 del momento angular, 29
 de Torricelli, 11
 segunda ley de Newton, 172
- Liapunov, 168
 exponente de, 206, 213
 función de, 191–196, 212
 primer método de, 176
 segundo método de, 191
- Liouville, 53
 fórmula de, 50, 96
 teorema de, 174, 197
 transformación de, 53, 123
- Lipschitz, 239
 condición de, 239, 243
- Lissajous, 315
 figuras de, 315
- Liénard
 ecuación diferencial de, 201
 teorema de, 201
- Lorentz, 38
- Lorenz
 atractor de, 204–206, 259
 sistema de, 204, 259
- Lotka-Volterra
 ecuaciones de, 214
- límite
 generalizado, 60
 por la derecha, 111
 por la izquierda, 111
- línea
 de corriente, 80, 171
- masa
 relativista, 36
 variable, 36
- Mathematica, 245
- matriz
 del sistema, 175
 exponencial de una, 90, 262
 fundamental, 86–88, 276
 canónica, 88
 identidad, 88
 jacobiana, 184, 186
 nula, 87
- Maxwell, 3
 ecuaciones de, 3
 medida, 220
- Mellin
 transformación de, 101
- modelo
 cosmológico estándar, 37
 de depredador y presa, 214
 de Volterra, 214
- momento angular, 29
- movimiento
 constante del movimiento, *véase* integral primera
- multiplicador, 20
- método
 analítico exacto, 269
 aproximado, 8
 analítico, 8, 254
 cualitativo, 8, 167, 194
 cuantitativo, 8
 de Adams, 159
 de Adams-Bashforth, 159
 de Adams-Bashforth-Moulton, 159, 265
 de Adams-Moulton, 159
 de aproximaciones sucesivas, 146, 240, 255
 de Bulirsch-Stoer, 161
 de Cauchy, 56, 89, 230, 236, 275
 de coeficientes indeterminados, 66–68, 94, 146, 255, 274, 275, 277
 de d'Alembert, 51, 251
 de derivación, 34, 72
 de Euler, 64, 75, 91, 154, 273, 276
 de extrapolación, 160–161
 de Frobenius, 130
 de Gragg, 160
 de Heun, 155
 de inspección, 10, 27, 54, 136, 246
 de la estabilidad lineal, 176
 de la serie de Taylor, 145, 254
 de las múltiples escalas, 150
 de las parábolas, 158
 de los dos tiempos, 150, 163
 de los trapecios, 156
 de Picard, 146, 240, 255
 de Poincaré-Lindstedt, 151, 164
 de reducción a una ecuación, 81
 de reducción de orden, 40–44, 136, 273, 275
 de resolución, 7–9, 80, 91, 94, 269
 de Romberg, 161
 de Runge-Kutta, 157, 264
 de separación de variables, 9
 de Simpson, 158
 de transformación, 25
 de un paso, 158
 de variación de constantes, 54, 76, 88, 142, 275, 277
 de varios pasos, 158

- del operador de anulación, 66
- del operador inverso, 68–70, 274
- del polígono, 154
- del punto medio, 156–157
 - modificado, 160
- directo de Liapunov, 191
- exacto, 7, 245, 269
- gráfico, 8, 143, 170, 200
- implícito, 161
- implícito de Euler, 161
- mejorado de Euler, 155
- mejorado del polígono, 156
- modificado de Euler, 156
- numérico, 8, 153–162, 259
- orden de un, 154
- perturbativo, 148–153, 256
- primero de Liapunov, 176
- pronosticador-corrector, 159–160
- segundo de Liapunov, 191
- simbólico, 102
- WKB, 152–153, 164
- módulo
 - de un número complejo, 279
- Neville
 - extrapolación de, 160
- Newmann
 - función de, 128, 289
- Newton, 2
 - binomio de, 285, 291, 311
 - ecuación de, 3
 - segunda ley de, 172
- nodo, 177
 - degenerado, 182
 - en estrella, 182
 - propio, 182
- norma, 220
- notación, 78
 - matricial, 84
- núcleo, 101
- número
 - armónico, 135, 287
 - complejo, 279–280
 - argumento, 279
 - conjugado, 279
 - forma cartesiana, 279
 - forma polar, 279
 - módulo, 279
 - parte imaginaria, 279
 - parte real, 279
 - de Fibonacci, 75
 - de grados de libertad, 79
- onda sinusoidal rectificadas, 115
- operador
 - adjunto formal de Lagrange, 222
 - autoadjunto, 222
 - de anulación, 66
 - de derivación, 47, 63
 - formalmente autoadjunto, 222
 - inverso, 68, 274
 - método del, 274
 - lineal, 49, 63, 84, 89, 133, 222, 223
- orden
 - de magnitud, 144, 163
 - de un método, 154
 - exponencial, 103
 - reducción de, 40, 136, 273, 275
- ortogonalidad, 221
- oscilador, 201
 - amortiguado, 74, 163, 172, 186, 187
 - armónico, 3, 10, 34, 49, 72, 123, 172, 186, 188, 190, 314
 - cuántico, 123
 - forzado, 57, 62, 74, 110
 - cuasiarmónico, 164
 - de van der Pol, 148, 201, 202, 256
 - no lineal, 195, 198
- Ostrogradski, 50
 - fórmula de, véase fórmula de Liouville
- $P(D)$, véase polinomio de derivación
- \mathcal{P} , véase concomitante bilineal
- P_n , véase polinomio de Legendre
- panadero
 - transformación del, 206
- Parseval, 234
 - teorema de, 116, 233
- parte
 - imaginaria de un número complejo, 279
 - real de un número complejo, 279
- parte entera, 293
- parámetro
 - de bifurcación, 169
 - pequeño, 148, 152, 164
- paso
 - de integración, 153
- Peano, 7
 - teorema de, 240
- peine
 - de Dirac, 235
- pericentro, 30
- perturbación, 148
 - regular, 148, 163, 256
- peso, 220, 292–296
- Picard, 146
 - método de, 146–147, 255
 - teorema de, 239
- Pochhammer
 - símbolo de, 285
- Poincaré, 167
 - sección de, 202
 - sección estroboscópica de, 209
- Poincaré-Bendixson

- teorema de, 201
- Poincaré-Lindstedt
 - método de, 151, 164
- Poisson, 235
 - formula de, 235
- polinomio
 - característico, 63
 - de Chébichev, 140, 291, 293
 - de derivación, 63
 - de Hermite, 125, 290, 294
 - de Laguerre, 141, 290, 295
 - de Legendre, 140, 236, 291, 296
 - generalizado
 - de Laguerre, 141, 295
- polinomio ortogonal, 292–296
- polo, 121
- polígono
 - método del, 154
- potencial, 18
 - armónico, 215
 - central, 215
 - newtoniano, 215
- principio
 - de Lagrange, 188
 - de superposición, 47, 53, 85
- problema
 - de Cauchy, 6
 - de condiciones iniciales, 6, 16, 109
 - de contorno, 7, 72, 219
 - de Kepler, 29, 31, 34, 164, 216
 - de Sturm-Liouville, 223
 - elemental, 62, 72
 - inhomogéneo
 - de Sturm-Liouville, 228
 - periódico de Sturm-Liouville, 224
 - regular de Sturm-Liouville, 224
 - singular de Sturm-Liouville, 224
- producto escalar, 220
- proyección, 202
- puerto, 179
 - no lineal, 211
- pulso gaussiano, 60
- punto
 - acnodal, 29
 - crítico, *véase* punto de equilibrio
 - cúspide, 189
 - de equilibrio, 168
 - aislado, 168
 - no hiperbólico, 181, 183, 185–188, 196, 198, 216
 - de reposo, *véase* punto de equilibrio
 - de retroceso, 152
 - de silla, 179
 - del infinito, 121, 124
 - espiral, 179
 - estacionario, *véase* punto de equilibrio
 - fijo, *véase* punto de equilibrio
 - múltiple, 29, 37
 - ordinario, 121, 122, 137
 - singular, 17, 121
 - irregular, 121
 - regular, 121, 130
- péndulo, 1, 8, 11, 168, 173, 175, 189, 206
- radio
 - de convergencia, 119
- razón áurea, 76, 267
- raíz
 - característica, 64, 92
 - principal, 280
- Re, *véase* parte real
- recurrencia, 138, 285
 - de tres puntos, 124
 - relación de, 123, 125, 127, 129, 135–137, 267, 289, 293–296
- reducción
 - a cuadraturas, 8, 19, 21, 25, 37, 51, 52, 57, 72, 73, 119
 - a una ecuación, 81
 - de orden, 40, 136, 273, 275
- regla
 - de l'Hôpital, 163
 - de Leibniz, 88
- relación
 - de recurrencia, 123, 125, 127, 129, 135–137, 267, 289, 293–296
- relatividad
 - especial, 36, 74
 - general, 74, 216
- residuo, 107
- resonancia, 67, 149
- retroceso
 - punto de, 152
- Riccati, 27
 - ecuación diferencial de, 27, 73, 163, 270
- Richardson, 160
 - extrapolación de, 160
- Riemann, 58
 - integral de, 58, 221
- Robertson-Walker
 - universo de, 37
- Rodrigues, 125
 - formula de, 293–296
 - fórmula de, 125
- Romberg
 - método de, 161
- rozamiento, 10
- Runge, 157
- Runge-Kutta
 - método de, 157–158, 264
- Rössler
 - atractor de, 208
 - sistema de, 206, 259

- Schrödinger, 2
 ecuación de, 2, 123, 152, 219
- Schwarz
 teorema de, 17
- Schwarzschild, 217
- sección
 cónica, 315
 de Poincaré, 202
 estroboscópica de Poincaré, 209
- secular
 término, 149
- semilatus rectum, 29, 216
- separación de variables, 21
 método de, 9
- separatriz, 189
- serie
 armónica, 287
 binómica, 114, 139, 285, 291
 de Fourier, 227, 265
 compleja, 235
 de cosenos, 233
 de senos, 226
 derivada de, 234
 truncada, 234, 266
 de Frobenius, 121
 de potencias, 119–120, 144
 de Taylor, 145, 254
 geométrica, 291
 suma de series, 138, 263
- Si, véase función integral seno
- sign, véase función signo
- simetría, 8, 44, 82, 198
- Simpson, 158
 método de, 158
- sistema
 de Cauchy-Euler, 98, 276
 de cálculo simbólico, 91, 93
 de Lorenz, 204, 259
 de Lotka-Volterra, 214
 de Rössler, 206, 259
 dinámico, 79
 autónomo, 79–80, 82, 170
 conservativo, 172–174, 197
 cuasilineal, 174
 discreto, 215
 disipativo, 174
 hamiltoniano, 174, 197
 linealizado, 175
 reversible, 198
- lineal
 completo, 84, 88–89
 con coeficientes constantes, 89–95, 109
 de primer orden, 83–85
 homogéneo, 84–88
- mecánico
 conservativo, 172, 174, 183, 188, 195
 unidimensional, 172, 186, 195, 198
- solución
 comparación de soluciones, 242
 condición en el infinito, 37
 de la ecuación lineal homogénea, 48, 51, 86
 elemental, 61–63, 89, 230
 existencia de la, 5, 7
 explícita, 4, 261
 familia paramétrica de soluciones, 5, 14
 formal, 4, 31
 general, 5, 10, 14, 40, 78
 implícita, 4, 10, 261
 intervalo de definición de una, 4
 paramétrica, 4, 261
 particular, 5, 53, 142, 272
 periódica, 168, 199
 singular, 5, 10, 20, 28, 33, 49, 250
 sistema fundamental de soluciones, 48, 49, 86
 tipo de, 3
 unicidad de la, 6–7
- Stirling, 284
 fórmula de, 284
- Sturm, 224
- Sturm-Liouville
 problema
 inhomogéneo de, 228
 problema de, 223
 problema periódico de, 224
 problema regular de, 224
 problema singular de, 224
- subfactorial, véase función subfactorial
- sucesión
 de Fibonacci, 75, 267
- suma
 de series, 138, 263
- superficie
 ortogonal, 21
- superposición
 principio de, 47, 53, 85
- símbolo
 de Bachmann-Landau, 144
 de orden de magnitud, 144
 de Pochhammer, 285
- T_n , véase polinomio de Chébichev
- tautocrona, 115
- Taylor, 145
 serie de, 145, 254
- teorema
 de Bertrand, 215
 de Cayley-Hamilton, 91
 de de Moivre, 280
 de existencia global, 243–244
 de existencia y unicidad, 7, 11, 16, 28, 40, 47, 78, 147, 205, 215, 239
 de Grobman-Hartman, 181
 de la alternativa de Fredholm, 229

- de Lagrange, 188
- de Lerch, 106
- de Levinson-Smith, 201
- de Liouville, 174, 197
- de Liénard, 201
- de Parseval, 116, 233
- de Peano, 240
- de Picard, 239
- de Poincaré-Bendixson, 201
- de Schwarz, 17
- del desplazamiento, 104
- fundamental del álgebra, 63
- teoría
 - de Floquet, 201
- tiempo
 - lento, 150, 151
 - rápido, 151
 - superlento, 151
- toro, 203
- Torricelli, 11
 - ley de, 11
- tr, *véase* traza
- transferencia
 - función de, 110
- transformación
 - de Carson-Heaviside, 101
 - de Fourier, 101, 115, 235, 251, 303
 - de Hankel, 101
 - de Hilbert, 101
 - de Laplace, 39, 101, 103, 251, 269, 297
 - de Liouville, 53, 123
 - de Mellin, 101
 - del panadero, 206
 - integral, 101
 - inversa de Fourier, 116
 - método de, 25
- traslación
 - invariancia de, 41, 275
- trayectoria, 214
 - de fases, 79, 170, 184, 188, 195
 - ortogonal, 21, 36
- traza, 96, 175
- truncamiento
 - error de, 154, 160
- unicidad
 - de la solución, 10
- unidad
 - geométrica, 217
 - imaginaria, 279
- universo
 - de Robertson-Walker, 37
- valor
 - principal de Cauchy, 101, 281, 286
 - principal del argumento, 279
 - propio, 92, 262
- van der Pol
 - ecuación diferencial de, 148, 201, 202
 - oscilador de, 148–151, 201, 202, 256
- Vandermonde, 310
 - determinante de, 310
- variable
 - adimensional, 7, 123, 189
 - cambio de variables, 9, 25–27, 33, 41–44, 51–53, 71, 73, 108, 121, 124, 141, 142, 152, 173, 198, 226, 270–273, 275, 276, 283
 - dependiente, 1
 - independiente, 1
- variación de constantes
 - método de, 54, 76, 88, 142, 275, 277
- variedad
 - estable, 179, 187, 189, 190, 211, 213
 - inestable, 179, 189, 190, 211
- vector
 - nulo, 84
 - propio, 92, 262
- velocidad, 10
 - límite, 41
- Verhulst, 211
 - ecuación diferencial de, 211
- Volterra, 114
 - ecuación de, 114
 - modelo de, 214
- vórtice, 180
- \mathcal{W} , *véase* función de Lambert
- Weber
 - función de, 128, 289
- Weierstrass, 234
 - función de, 234
- WKB, *véase* método WKB
- Wronski, 45
 - determinante de, *véase* wronskiano
- wronskiano, 45, 47, 85
- Y_ν , *véase* función de Bessel de segunda especie
- ábside, 30, 34
- ángulo
 - de Euler, 204
- índice, 121, 127, 131
 - doble, 134
- órbita, 29, 215
 - acotada, 215
 - cerrada, 199
 - circular, 216, 217
 - de fases, 170
 - homoclínica, 189, 190
 - periódica, 151, 168, 199, 215