Ejercicios resueltos de investigación operativa

Exámenes propuestos en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Belén Castro Íñigo
Henar Diez Sánchez
Ana Marta Urrutia Careaga

EKONOMIA ETA ENPRESA
ZIENTZIEN FAKULTATEA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Y EMPRESARIALES

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ISBN: 978-84-694-5889-1

ISBN: 978-84-694-5889-1

Bilbao, julio 2011

www.argitalpenak.ehu.es

Índice

Introducción

La asignatura Investigación Operativa es una asignatura cuatrimestral dedicada fundamentalmente a la introducción de los modelos deterministas más elementales dentro de la investigación de operaciones. Esta asignatura se ha impartido en los últimos años en el tercer curso de la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas (L.A.D.E.) en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la U.P.V.

Esta publicación recoge los problemas resueltos propuestos en los exámenes de las distintas convocatorias entre los años 2005 y 2010.

El temario oficial de la asignatura desglosado por temas es el siguiente:

1. Programación lineal entera

1.1 Formulación de problemas de Programación Lineal Entera.
1.2 Método de ramificación y acotación (Branch and Bound).
1.3 Otros métodos de resolución.

2. Programación multiobjetivo y por metas

2.1 Introducción a la Programación Multiobjetivo.
2.2 Programación por metas.
2.3 Programación por prioridades.

3. Modelos en redes

3.1 Conceptos básicos.
3.2 Problema del árbol de expansión minimal.
3.3 Problema del camino más corto.
3.4 Problema del camino más largo.
3.5 Problema del flujo máximo.
3.6 Problema de asignación.
3.7 Planificación de Proyectos: Métodos C.P.M. y P.E.R.T.

Referencias Bibliográficas:

EPPEN, G.D. ; GOULD, F. J. ; SCHMIDT, C. P.; MOORE, J. H.; WEATHERFORD, L.R. (2000): “Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa”. Ed. Pearson Educación. México.

HILLIER, F.; LIEBERMAN, G.J. (2008): "Introducción a la Investigación de Operaciones", 8ª edición. Ed. McGraw-Hill. México.

MATHUR, K. ; SOLOW, D. (1998): "Investigación de Operaciones. El arte de la toma de decisiones". Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México.

RIOS, S. (1988): "Investigación Operativa. Optimización". Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.

TAHA, H.A. (2004): "Investigación de Operaciones, una Introducción", 7ª edición. Ed. Prentice Hall. México.

WINSTON, W.L. (2004): "Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos", 4ª edición. Ed. Thompson. Madrid.

YIH-LONG CHANG. (2003): "WinQSB Versión 2.0". Ed. John Wiley & Sons, Inc.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Extraordinario Febrero 2005

1. (10 puntos) Una inmobiliaria desea promocionar una nueva urbanización mediante una campaña publicitaria. Para ello dispone de 5 tipos de anuncios: anuncios en televisión local al mediodía (tvm), anuncios en televisión local a la noche (tvn), anuncios en periódico local (per), anuncios en suplemento dominical local (sup) y anuncios en radio local por la mañana (rad). La empresa ha reunido datos sobre la cantidad de clientes potenciales a los que se destina cada tipo de anuncio y el coste de cada anuncio en euros. Además, se ha llevado a cabo una valoración de la calidad que tiene cada anuncio de acuerdo al medio en el que se expone, en una escala de 0 a 100 (0 nula, 100 excelente). Los datos se recogen en la siguiente tabla:

Anuncios	**Clientes Potenciales**	**Coste (euros)**	**Calidad exposición**
tvm	1000	1500	65
tvn	2000	3000	90
per	1500	400	40
sup	2500	1000	60
rad	300	100	20

El número máximo de anuncios que se pueden emitir es 15, 10, 25, 4 y 30 de tvm, tvn, per, sup y rad, respectivamente. La inmobiliaria, aconsejada por una agencia de publicidad, decide utilizar al menos 10 anuncios en la televisión, alcanzar por lo menos 50000 clientes potenciales, no gastar más de 18000 euros en anuncios en televisión y si se hacen anuncios en el periódico entonces no hacer anuncios en la televisión por la noche. El presupuesto máximo para la campaña publicitaria es de 30000 euros. Modelizar, sin resolver, mediante programación lineal entera el problema de cómo debe planificar la campaña si se desea maximizar la calidad de la exposición de todos los anuncios de la campaña publicitaria.

Solución:

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = número de anuncios a emitir en tvm

x_2 = número de anuncios a emitir en tvn

x_3 = número de anuncios a emitir en per

x_4 = número de anuncios a emitir en sup

x_5 = número de anuncios a emitir en rad

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si se hacen anuncios per} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left(65x_1 + 90x_2 + 40x_3 + 60x_4 + 20x_5\right)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 \leq 15 \\ x_4 \leq 4 \\ x_5 \leq 30 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ 1000x_1 + 2000x_2 + 1500x_3 + 2500x_4 + 300x_5 \geq 50000 \\ 1500x_1 + 3000x_2 \leq 18000 \\ 1500x_1 + 3000x_2 + 400x_3 + 1000x_4 + 100x_5 \leq 30000 \\ x_3 \leq 25y \\ x_2 \leq 10(1 - y) \\ x_i \geq 0 \ \text{ y enteras } \ i = 1, \ldots, 5 \\ y = \ 0 \ , 1 \end{cases}$$

2. (10 Puntos) Resolver el problema siguiente.

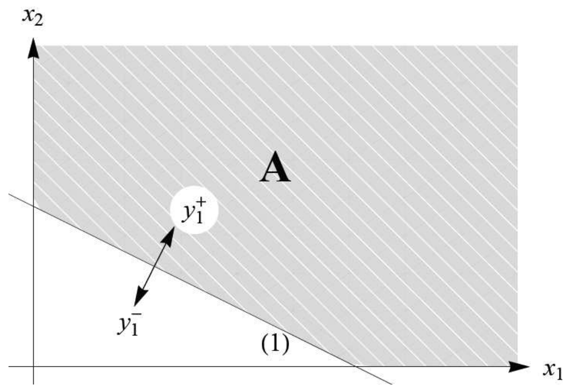
$$\text{Min} \quad L(y_1^-, y_2^+, y_4^+, y_3^+)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (1) \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = -1 & (2) \\ x_1 + x_2 - y_3^+ + y_3^- = 4 & (3) \\ x_2 - y_4^+ + y_4^- = 2 & (4) \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1, \cdots, 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

$$P_1 \equiv \text{ Min } (y_1^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ \geq 0 \end{cases}$$

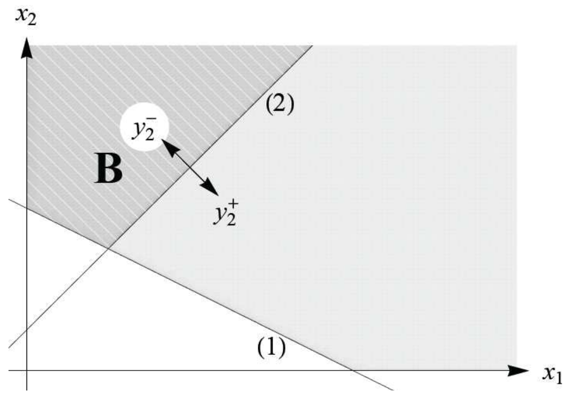


Soluciones óptimas: $\bar{x} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{ Min } (y_2^+)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = -1 & (2) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ \geq 0 \end{cases}$$

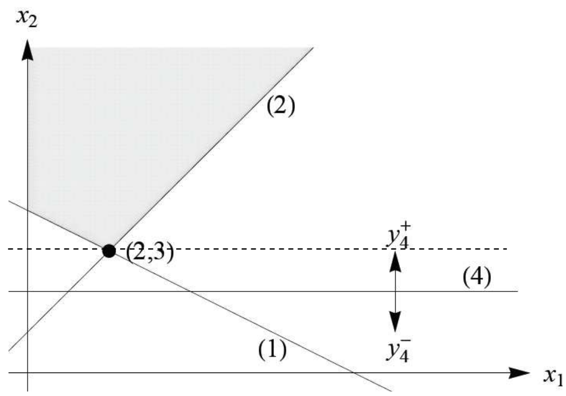


Soluciones óptimas: $\bar{x} \in B$

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{ Min } (y_4^+)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = -1 & (2) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ = 0 \\ x_2 - y_4^+ + y_4^- = 2 & (4) \\ y_4^- \geq 0, \quad y_4^+ \geq 0 \end{cases}$$

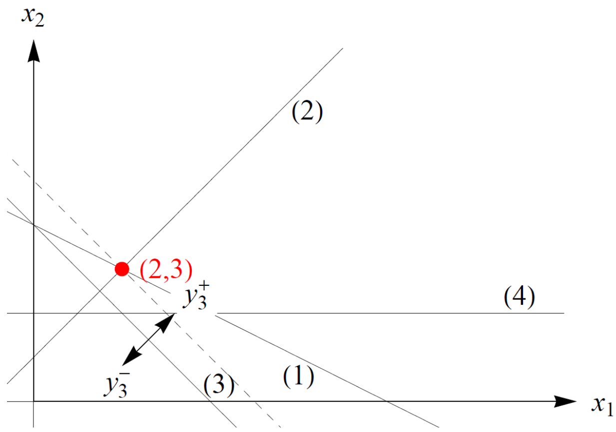


Solución óptima: (2,3)

Valor óptimo: 1

$$P_4 \equiv \text{Min } (y_3^+)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 & \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = -1 & (2) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ = 0 & \\ x_2 - y_4^+ + y_4^- = 2 & (4) \\ y_4^- \geq 0, \quad y_4^+ = 1 & \\ x_1 + x_2 - y_3^+ + y_3^- = 4 & (3) \\ y_3^- \geq 0, \quad y_3^+ \geq 0 & \end{cases}$$



Solución óptima: (2,3)

Valor óptimo: 1

Conclusión: la solución óptima es (2,3). En las metas 1ª y 2ª no hay ni exceso ni defecto $(\bar{y}_1^+ = 0, \bar{y}_1^- = 0, \bar{y}_2^+ = 0, \bar{y}_2^- = 0)$. En la meta 3ª y en la 4ª hay un exceso de 1 $(\bar{y}_3^+ = 1, \bar{y}_3^- = 0, \bar{y}_4^+ = 1, \bar{y}_4^- = 0)$.

3. La directora de un centro educativo debe asignar la docencia de 5 asignaturas, A1, A2, A3, A4 y A5 a 4 profesores, P1, P2, P3 y P4 teniendo en cuenta las valoraciones de las encuestas hechas por los alumnos y unas restricciones impuestas por un nuevo reglamento. En base a las encuestas de años anteriores, se tienen las siguientes valoraciones promedios (escala: 0 mala, 5 excelente):

	A1	A2	A3	A4	A5
P1	2.7	2.2	3.4	2.8	3.6
P2	2	3.6	3.4	2.8	3.6
P3	3.2	3.8	2.3	1.9	2.6
P4	2.6	2.5	1.8	4.2	3.5

El nuevo reglamento dice que el profesor P3 no puede impartir las asignaturas A1 y A2. Las asignaturas no se pueden compartir y se han de impartir todas. Ningún profesor puede quedar sin asignaturas. Al profesor P1 solamente se le debe asignar una asignatura.

a) (5 puntos) Modelizar como un problema de programación lineal entera con el objetivo de obtener la asignación que maximice la valoración media total.

b) (5 puntos) Indicar a qué tabla habría que aplicar el método húngaro para determinar la asignación óptima.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si al profesor } i \text{ se le asigna la asignatura } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad \text{con } i=1,\ldots,4 \text{ y } j=1,\ldots,5$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } \left(2.7x_{11} + 2.2x_{12} + \ldots + 3.6x_{15} + 2x_{21} + 3.6x_{22} + \ldots + 3.6x_{25} + \ldots + 3.5x_{45}\right)$$

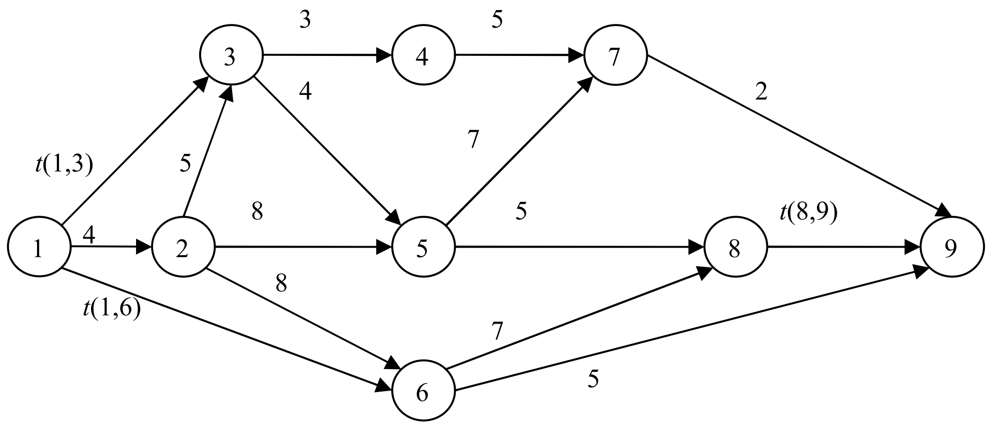
$$\text{s.a} \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ 1 \leq x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} \leq 2 \; i = 2, 3, 4 \\ x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} = 1 \qquad j = 1,\ldots,5 \\ x_{31} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{ij} = 0, 1 \;\; i = 1,\ldots,4 \;\; j = 1,\ldots,5 \end{cases}$$

b) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	A1	A2	A3	A4	A5	F	F
P1	-2.7	-2.2	-3.4	-2.8	-3.6	M	M
P2	-2	-3.6	-3.4	-2.8	-3.6	M	M
P2	-2	-3.6	-3.4	-2.8	-3.6	0	0
P3	M	M	-2.3	-1.9	-2.6	M	M
P3	M	M	-2.3	-1.9	-2.6	0	0
P4	-2.6	-2.5	-1.8	-4.2	-3.5	M	M
P4	-2.6	-2.5	-1.8	-4.2	-3.5	0	0

Con M positivo suficientemente grande.

4. La siguiente red representa un proyecto donde el valor de cada arco indica la duración de cada actividad en días:



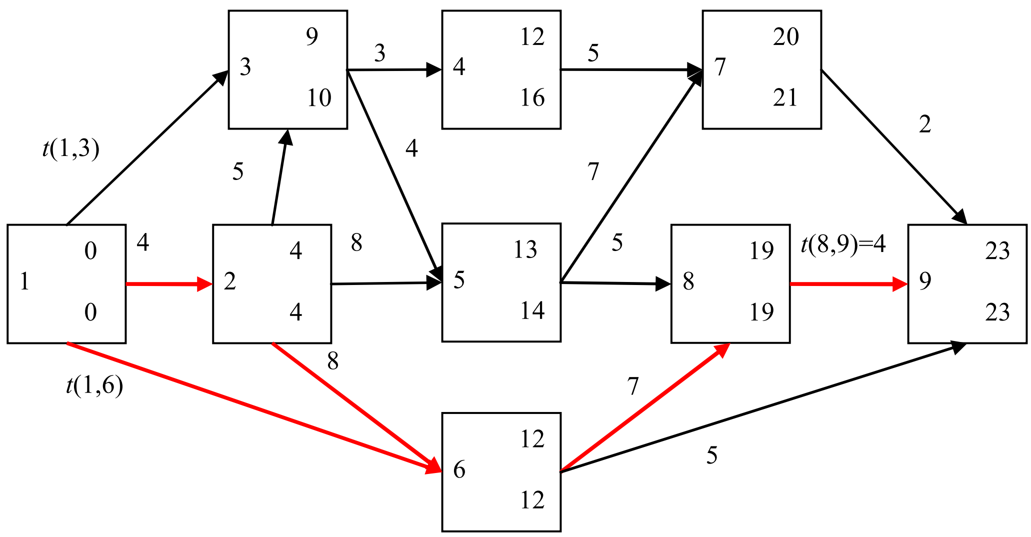
a) (4 puntos) Determinar para qué valores de t(1,3), t(1,6) y t(8,9) se cumplen las tres condiciones siguientes:
   - La duración prevista del proyecto es de 23 días.
   - La actividad (2,6) es crítica.
   - El margen de la actividad (3,4) es 4.

b) (6 puntos) Hallar el (los) camino(s) crítico(s) del proyecto y la tabla de actividades para los valores obtenidos en a)

Solución:

a)

- ✓ Dado que la actividad (2,6) es crítica y $P(6) = \text{Max}\{12, t(1,6)\}$, se tiene que $P(6) = 12$ y en consecuencia $t(1,6) \le 12$.
- ✓ Como la duración prevista del proyecto (d.p.p.) es de 23 días y la actividad (2,6) es crítica, se sabe que: $23 = 12 + 7 + t(8,9)$. Luego $t(8,9) = 4$.
- ✓ Dado que el margen de la actividad (3,4) es $M(3,4) = Q(4) - P(3) - t(3,4)$, se tiene que $4 = 16 - P(3) - 3$ y por tanto $P(3) = 9$. Como $P(3) = \text{Max}\{9, t(1,3)\} = 9$ entonces $t(1,3) \le 9$.



b) Si $t(1,6) < 12$, el camino crítico es (1,2,6,8,9).

Si $t(1,6) = 12$ los caminos críticos son (1,2,6,8,9) y (1,6,8,9).

La tabla de actividades correspondiente a este proyecto es:

(i,j)	t(i,j)	CMT(i,j)	FMT*(i,j)	M(i,j)
(1,2)	4	0	4	**0***
(1,3)	$t(1,3)$	0	10	10- $t(1,3)$
(1,6)	$t(1,6)$	0	12	12- $t(1,6)$
(2,3)	5	4	10	1
(2,5)	8	4	14	2
(2,6)	8	4	12	**0***
(3,4)	3	9	16	4
(3,5)	4	9	14	1
(4,7)	5	12	21	4
(5,7)	7	13	21	1
(5,8)	5	13	19	1
(6,8)	7	12	19	**0***
(6,9)	5	12	23	6
(7,9)	2	20	23	1
(8,9)	4	19	23	**0***

Donde:

$t(i,j)$ es la duración de la actividad (i,j)

$CMT(i,j)$ es el comienzo más temprano de la actividad (i,j)

$FMT^*(i,j)$ es el final más tardío de la actividad (i,j)

$M(i,j)$ es el margen de la actividad (i,j)

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Junio 2005

1. Una empresa de juguetes está considerando la puesta en marcha de tres nuevos modelos de juguetes (1, 2 y 3) para su posible inclusión en la próxima campaña de Navidad. La preparación de instalaciones para la fabricación de estos modelos costaría 25000 €, 35000 € y 30000 € respectivamente, y la ganancia unitaria sería de 10 €, 15 € y 13 € respectivamente. La empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo en una de ellas se producirían los juguetes, dependiendo la elección de la maximización de las ganancias.

   El número de horas que se precisa para producir cada juguete en cada planta es:

	juguete 1	**juguete 2**	**juguete 3**
planta 1	5	4	6
planta 2	4	2	2
planta 3	3	3	2

   Las plantas disponen al día 500, 600 y 630 horas de producción respectivamente.

   La gerencia ha decidido desarrollar al menos uno de los tres juguetes.

   a) (8 puntos) Modelizar el problema utilizando programación lineal entera para maximizar el beneficio total.

   b) (2 puntos) La empresa decide producir únicamente el juguete tipo 3, pero debe tener en cuenta que si produce más de 50 unidades de este tipo de juguete entonces:

      - el coste de preparación de instalaciones del juguete tipo 3 es de 40000 €
      - debe producir en la planta 3

   Modelizar el problema, añadiendo esta información, utilizando programación lineal entera.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_i = número de juguetes producidos diariamente del tipo i $\quad i$=1,2,3

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se pone en marcha el juguete tipo } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se produce en la planta } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}(10x_1 - 25000y_1 + 15x_2 - 35000y_2 + 13x_3 - 30000y_3)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ x_i \leq My_i \qquad i = 1, 2, 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 500 + M(1 - z_1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 + M(1 - z_2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 630 + M(1 - z_3) \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \text{ y enteras } i{=}1, 2, 3 \\ y_i = 0, 1 \qquad i{=}1, 2, 3 \\ z_j = 0, 1 \qquad j{=}1, 2, 3 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos la variable de decisión siguiente: $p = \begin{cases} 1 & \text{si } x_3 \geq 51 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left(13x_3 - 30000(1-p) - 40000p\right)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 51p \leq x_3 \leq 50\left(1-p\right) + Mp \\ p \leq z_3 \\ 6x_3 \leq 500 + M(1 - z_1) \\ 2x_3 \leq 600 + M(1 - z_2) \\ 2x_3 \leq 630 + M(1 - z_3) \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ x_3 \geq 0 \text{ y entera} \\ p = 0, 1 \\ z_i = 0, 1 \quad i{=}1,2,3 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. En una industria panadera se quiere introducir la elaboración de dos nuevos tipos de pan: integral y de centeno, ya que se tiene asegurada la venta de su producción. Estos panes se elaboran principalmente a base de tres ingredientes: salvado integral, harina de trigo y harina de centeno. Para elaborar 1 kg de pan integral se necesitan 350 g de salvado integral y 150 g de harina de trigo y para la elaboración de 1 kg de pan de centeno se necesitan se necesitan 250 g de harina de trigo y 250 g de harina de centeno. La disponibilidad diaria de salvado integral es de 210 kg, 115 kg de harina de trigo y 100 kg de harina de centeno. El beneficio que deja cada kg de pan integral es de 0.40 € y 0.60 € cada kg de pan de centeno.

   Calcular la elaboración diaria de pan integral y de centeno, si se han puesto las siguientes metas por orden de prioridad:

   - Prioridad 1. Se desea obtener un beneficio de al menos 240 € diarios.
   - Prioridad 2. Se desea que la cantidad elaborada diariamente de pan integral sea al menos el doble que la de centeno.
   - Prioridad 3. Se desea que la cantidad elaborada diariamente de pan de centeno no sea inferior a 300 kg.

   ¿Qué metas de las propuestas se han cumplido?

<u>Solución:</u>

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = kg de pan integral elaborado diariamente

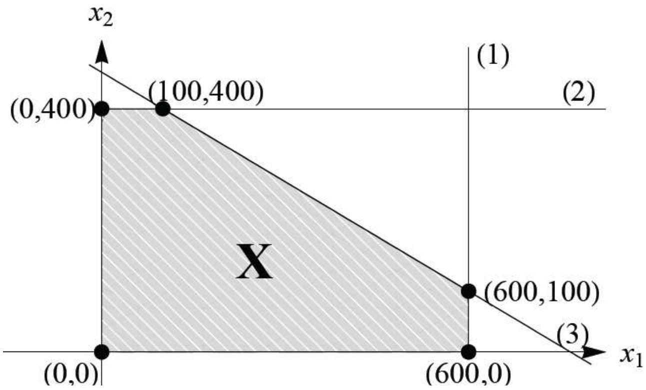
x_2 = kg de pan de centeno elaborado diariamente

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } L(y_1^-, y_2^-, y_3^-)$$

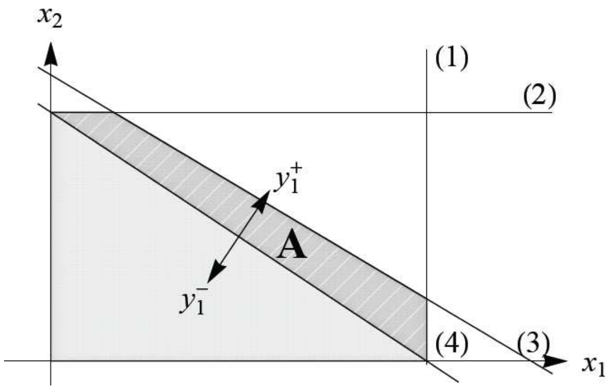
$$\text{s.a}\begin{cases} 0.35x_1 \le 210 & (1) \\ 0.25x_2 \le 100 & (2) \\ 0.15x_1 + 0.25x_2 \le 115 & (3) \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 - y_1^+ + y_1^- = 240 & (4) \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (5) \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 300 & (6) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_i^- \ge 0, \quad y_i^+ \ge 0 \quad i = 1,2,3 & \end{cases}$$

El conjunto X de soluciones factibles del problema es:



$$P_1 \equiv \text{ Min } (y_1^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 0.35x_1 \leq 210 & (1) \\ 0.25x_2 \leq 100 & (2) \\ 0.15x_1 + 0.25x_2 \leq 115 & (3) \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 - y_1^+ + y_1^- = 240 & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ \geq 0 & \end{cases}$$

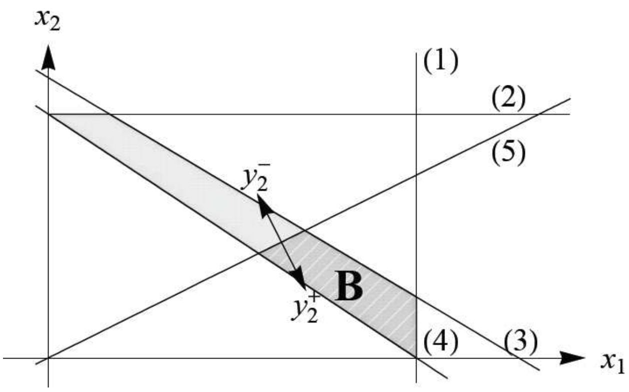


Soluciones óptimas: $\bar{\mathbf{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{ Min } (y_2^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 0.35x_1 \leq 210 & (1) \\ 0.25x_2 \leq 100 & (2) \\ 0.15x_1 + 0.25x_2 \leq 115 & (3) \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 - y_1^+ + y_1^- = 240 & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 & \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (5) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ \geq 0 & \end{cases}$$

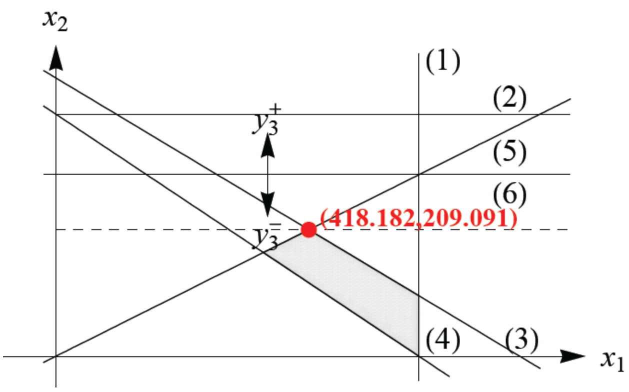


Soluciones óptimas: $\bar{\mathrm{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{Min } (y_3^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 0.35x_1 \leq 210 & (1) \\ 0.25x_2 \leq 100 & (2) \\ 0.15x_1 + 0.25x_2 \leq 115 & (3) \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 - y_1^+ + y_1^- = 240 & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 & \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (5) \\ y_2^- = 0, \quad y_2^+ \geq 0 & \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 300 & (6) \\ y_3^- \geq 0, \quad y_3^+ \geq 0 & \end{cases}$$



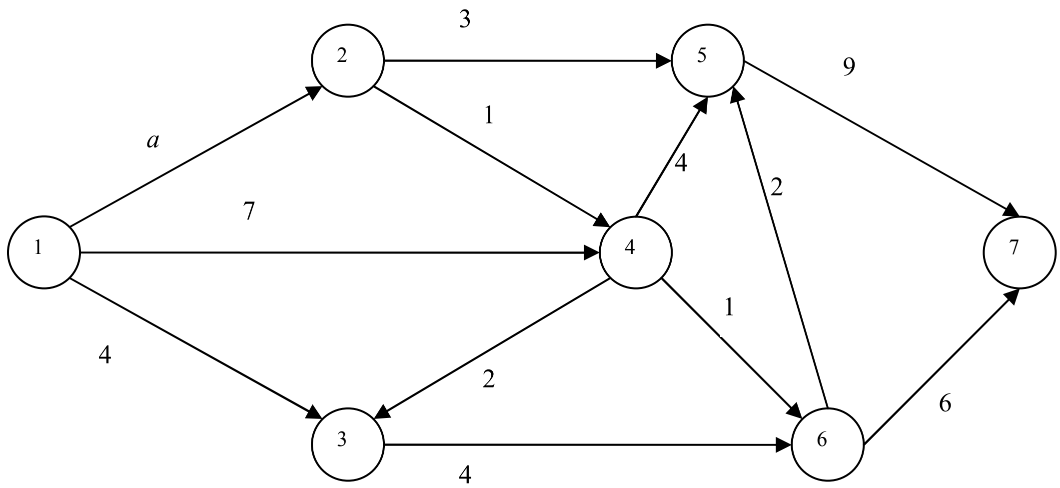
Solución óptima:

(418.182, 209.091)

Valor óptimo: 90.909

La solución óptima consiste en elaborar diariamente 418.182 kg de pan integral y 209.091 kg de pan de centeno. El beneficio diario es 292.73€ $(\bar{y}_1^+ = 52.7274, \bar{y}_1^- = 0)$, la producción de pan integral es exactamente el doble que la producción de pan de centeno $(\bar{y}_2^+ = 0, \bar{y}_2^- = 0)$, y la producción de este último es aproximadamente 209kg diarios $(\bar{y}_3^- = 90.909, \bar{y}_3^+ = 0)$. Se cumplen, por lo tanto, la 1ª y la 2ª meta y no la 3ª.

3. Se considera el siguiente grafo:



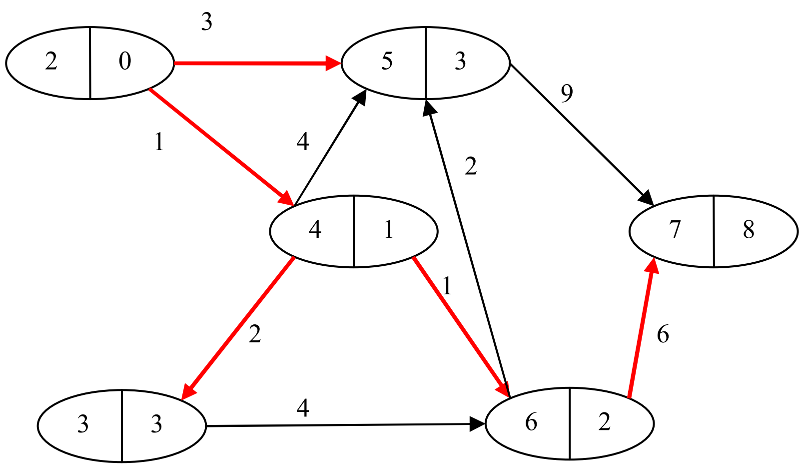
a) (5 puntos) Si los valores de cada arco representan distancias, hallar razonadamente cómo debe ser a para que la ruta más corta del nodo 1 al 7 pase obligatoriamente por el nodo 2. Indicar esta ruta más corta.

b) (5 puntos) Si $a = 5$ y los valores de los arcos representan capacidades de flujo, calcular el valor del flujo máximo del nodo 1 al 7.

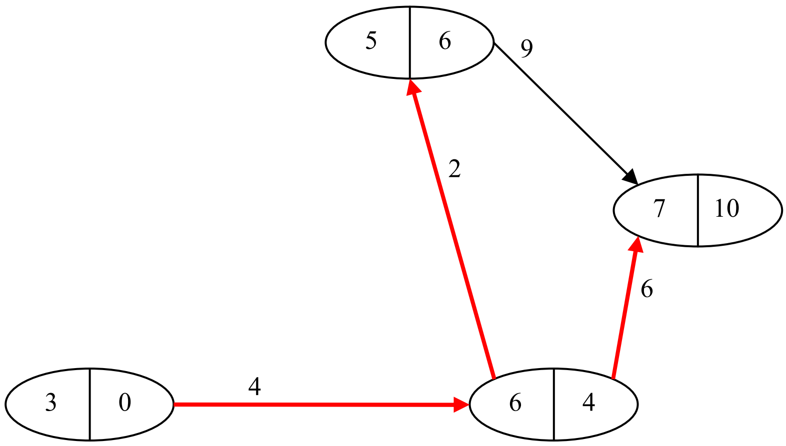
Solución:

a) Los caminos del nodo 1 al nodo 7 pasan bien por el nodo 2, por el 3 o por el 4. Aplicando el método de la ruta más corta, calculamos los caminos más cortos desde cada uno de estos nodos al nodo 7.

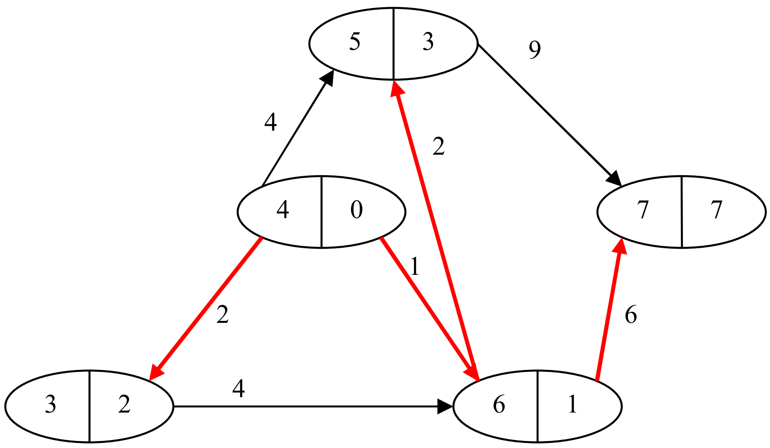
En el siguiente grafo se observa que el camino más corto del nodo 2 al nodo 7 es (2,4,6,7) cuyo valor es 8.



En el siguiente grafo se observa que el camino más corto del nodo 3 al nodo 7 es (3,6,7) cuyo valor es 10.



En el siguiente grafo se observa que el camino más corto del nodo 4 al nodo 7 es (4,6,7) cuyo valor es 7.



Luego necesariamente la ruta más corta del nodo 1 al nodo 7 debe ser alguna de las siguientes:

(1,2,4,6,7) cuyo valor es a+8.

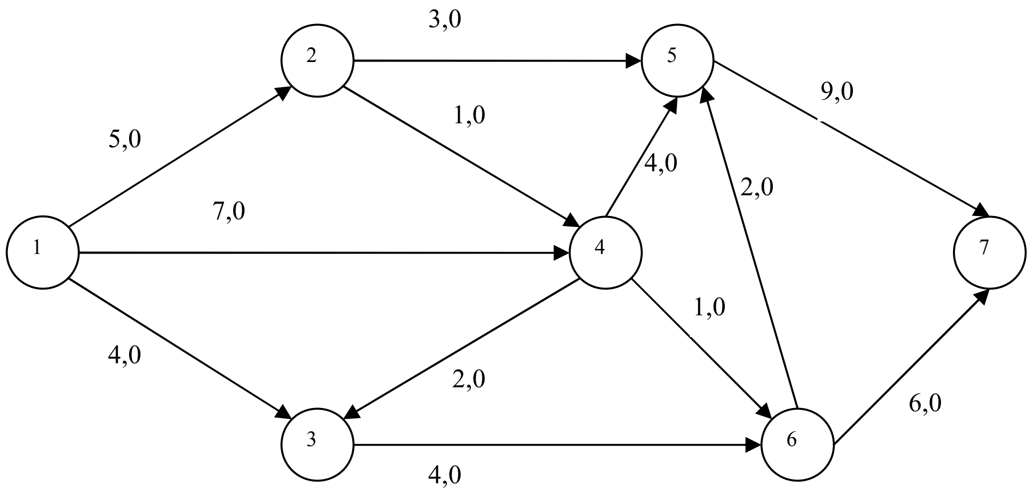
(1,3,6,7) cuyo valor es 14.

(1,4,6,7) cuyo valor es 14.

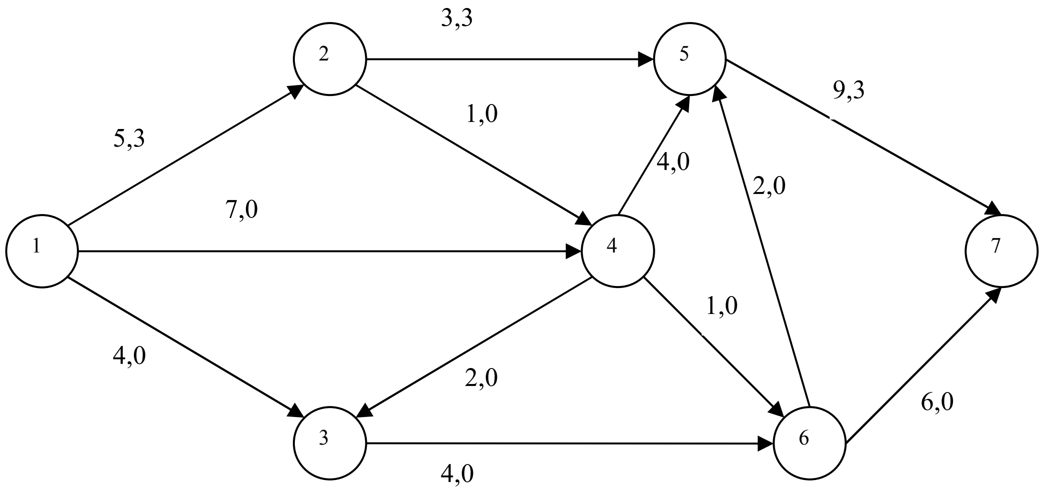
Para que la ruta más corta pase obligatoriamente por el nodo 2 se debe cumplir que $a+8<14$. Luego $a<6$, y la ruta más corta es (1,2,4,6,7).

Si a = 6 las 3 rutas anteriores tienen el mismo valor.

b) Partimos del flujo nulo:

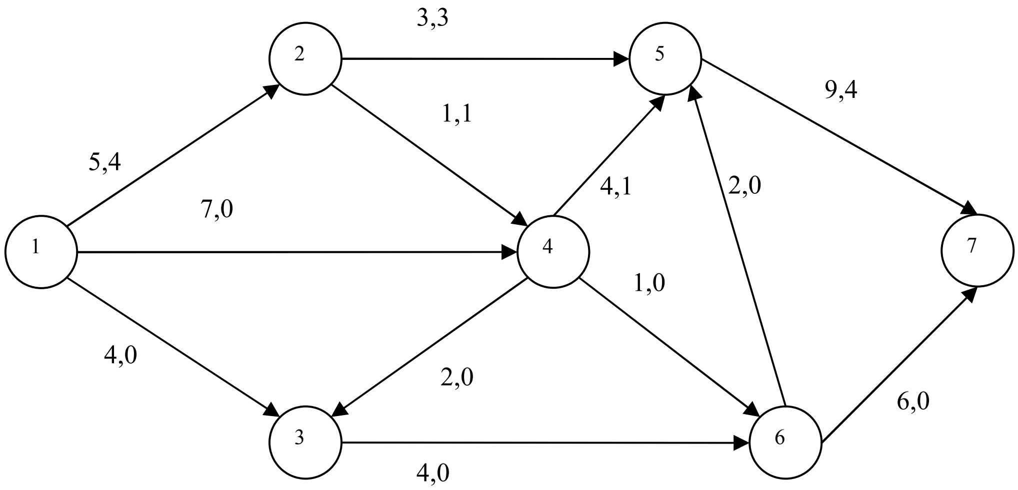


Consideramos la cadena de crecimiento del origen al destino (1,2,5,7). $\Delta_f\left(1,2,5,7\right)=\min\left\{5,3,9\right\}=3$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es 3.



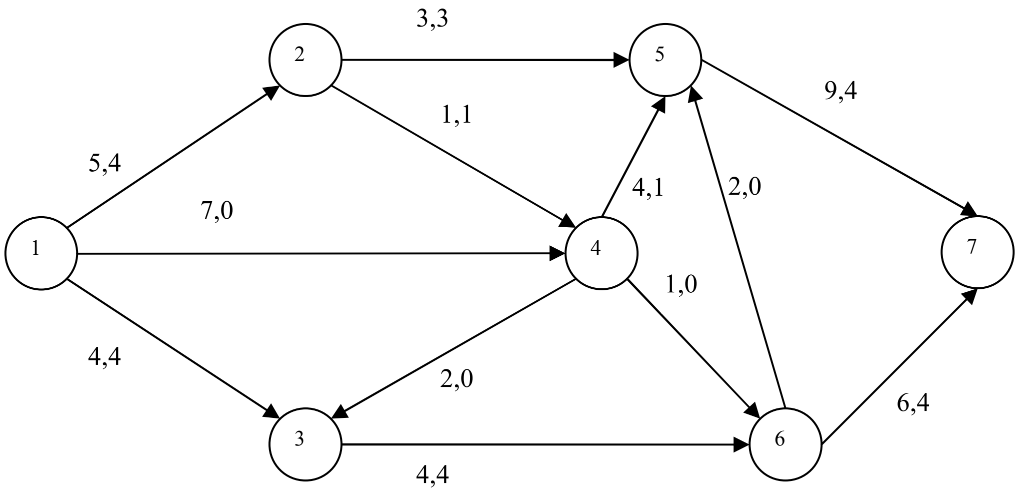
Consideramos la cadena de crecimiento (1,2,4,5,7).

$\Delta_f\left(1,2,4,5,7\right)=\min\left\{5-3,1,4,9-3\right\}=1$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es 4.



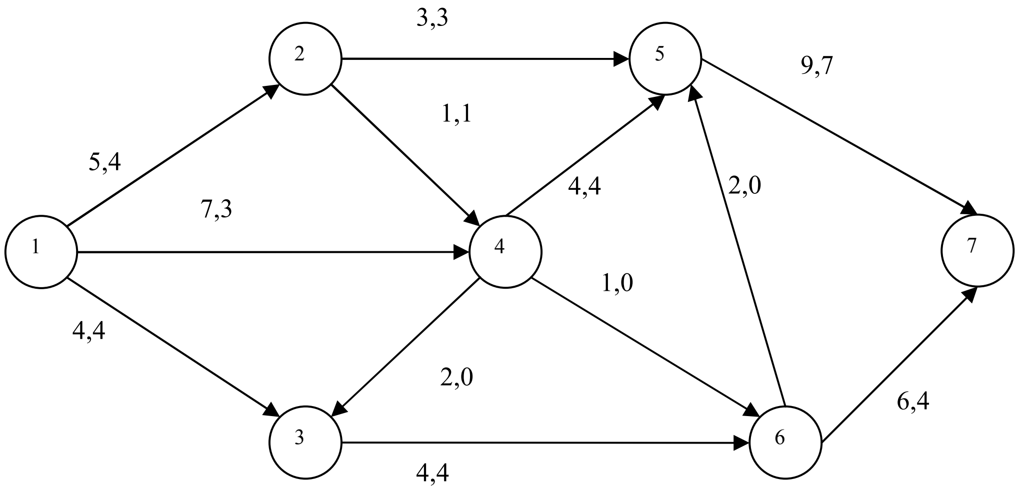
Consideramos la cadena de crecimiento (1,3,6,7).

$\Delta_f\left(1,3,6,7\right)=\min\left\{4,4,6\right\}=4$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es 8.



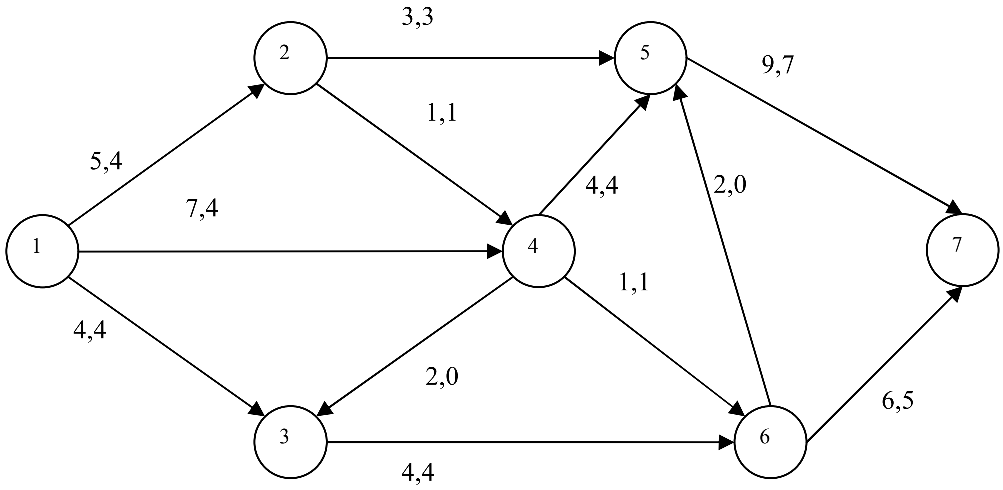
Consideramos la cadena de crecimiento (1,4,5,7).

$\Delta_f\left(1,4,5,7\right)=\min\left\{7,4-1,9-4\right\}=3$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es 11.



Consideramos la cadena de crecimiento (1,4,6,7).

$\Delta_f\left(1,4,6,7\right)=\min\left\{7-3,1,6-4\right\}=1$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es 12.



No existe ninguna cadena de crecimiento del nodo 1 al nodo 7. Luego este flujo es un flujo máximo, cuyo valor es $V_f=12$.

4. Se considera un proyecto formado por 11 actividades. La tabla siguiente recoge dichas actividades, su duración en días y las relaciones de precedencia entre las mismas:

Actividad	Duración	Precedentes Inmediatas
A	2	--
B	2	--
C	6	A
D	T_D	A
E	1	B
F	2	B
G	4	D, E
H	T_H	D, E
I	2	F, H
J	2	G, I, C
K	3	F, H

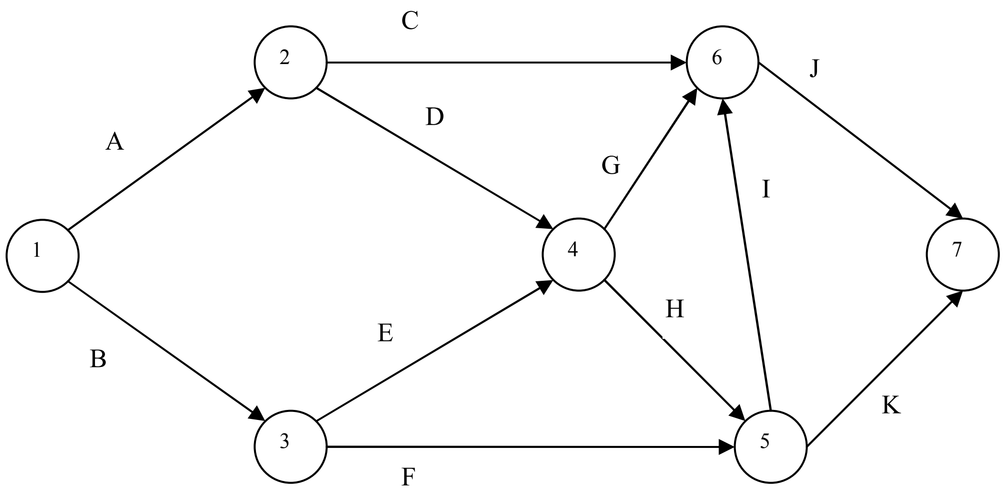
a) (3 puntos) Elaborar un grafo que represente a dicho proyecto.

b) (5 puntos) Sabiendo que las actividades críticas del proyecto son A, C, D, G, H, I y J calcular la duración prevista del proyecto, los caminos críticos y las duraciones de las actividades D y H.

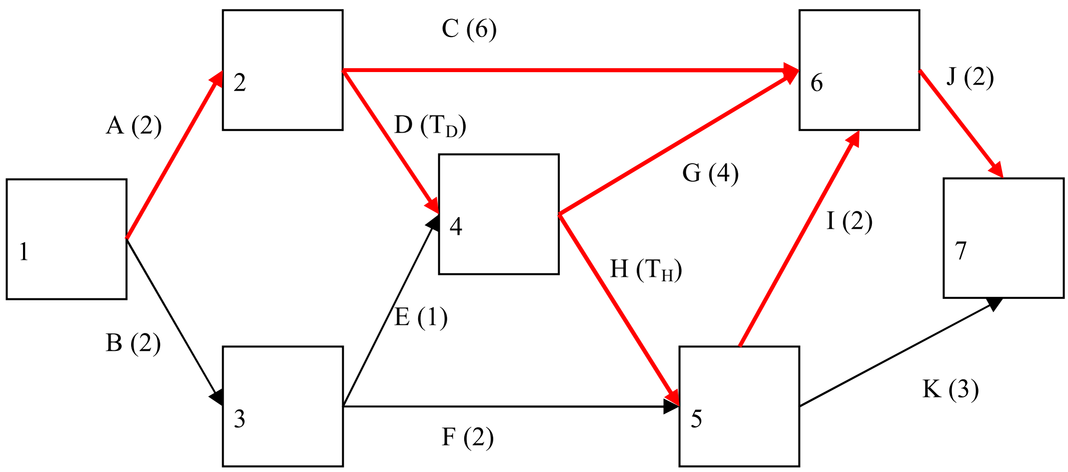
c) (2 puntos) Calcular el margen de las actividades no críticas.

Solución:

a) La siguiente red representa a este proyecto:



b)



Si A, C, D, G, H, I, y J son críticas entonces:

Caminos críticos: (1,2,6,7), (1,2,4,6,7) y (1,2,4,5,6,7)

✓ Duración prevista del proyecto (d.p.p.):

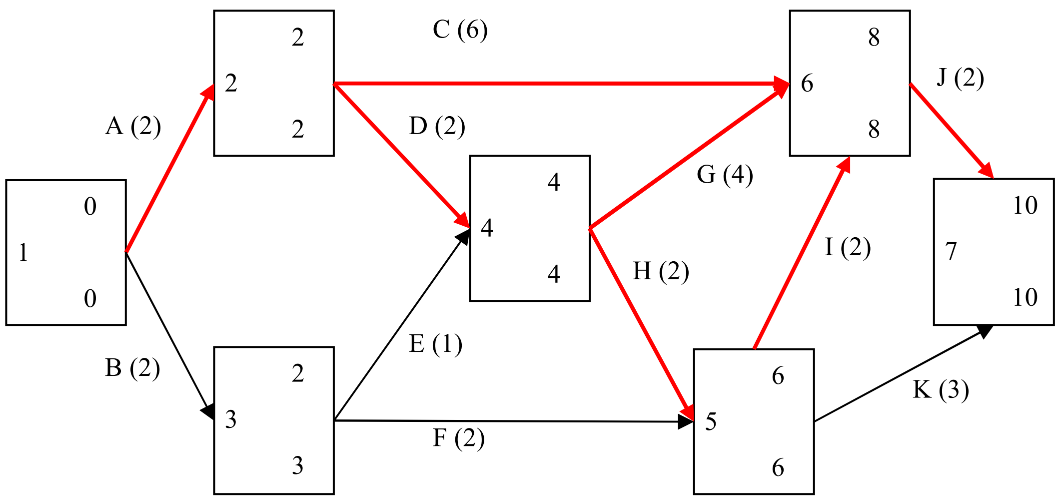
✓ Valor del camino $(1,2,6,7) = 2 + 6 + 2 = 10$ días.

✓ Duración de la actividad D: $2 + T_D + 4 + 2 = 10 \Rightarrow T_D = 2$ días.

✓ Duración de la actividad H: $2 + T_D + T_H + 2 + 2 = 2 + 2 + T_H + 2 + 2 = 10$

$\Rightarrow T_H = 2$ días

c)



$M(i,j)=FMT^*(i,j)-CMT(i,j)-t(i,j)=Q(j)-P(i)-t(i,j)$

$M(1,3)=3-0-2=1$ día

$M(3,4)=4-2-1=1$ día

$M(3,5)=6-2-2=2$ días

$M(5,7)=10-6-3=1$ día

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Septiembre 2005

1. (10 puntos) Una universidad se encuentra en un proceso de formar una comisión. Diez personas han sido nominadas: A, B, C, D, E, F, G, H, I y J. El reglamento obliga a que sean incluidos en dicha comisión al menos una mujer, un hombre, un estudiante, un administrativo y un profesor. Además, el número de mujeres debe ser igual que el de hombres y el número de profesores no debe de ser inferior al de administrativos. La mezcla de los nominados en las siguientes categorías es como sigue:

Categoría	**Personas**
Mujeres	A, B, C, D, E
Hombres	F, G, H, I, J
Estudiantes	A, B, C, J
Administrativos	E, F
Profesores	D, G, H, I

Modelizar sin resolver como un problema de programación lineal entera, si se trata de que la comisión sea lo más reducida posible.

Solución:

Definimos las variables de decisión siguientes:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se incluye la persona } i \text{ en la comisión} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad i = \text{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min}(x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G + x_H + x_I + x_J)$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \geq 1 \\ x_F + x_G + x_H + x_I + x_J \geq 1 \\ x_A + x_B + x_C + x_J \geq 1 \\ x_E + x_F \geq 1 \\ x_D + x_G + x_H + x_I \geq 1 \\ x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = x_F + x_G + x_H + x_I + x_J \\ x_D + x_G + x_H + x_I \geq x_E + x_F \\ x_i = 0,1 \quad i\text{=}A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \end{cases}$$

2. El director de personal de una empresa debe asignar 5 tareas (T1, T2, T3, T4 y T5) a 4 empleados (E1, E2, E3 y E4) teniendo en cuenta las valoraciones hechas en base a experiencias anteriores que muestran la siguiente tabla (puntuación: 0 mala, 10 excelente, "--" imposibilidad):

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**
E1	6	8	9	3	7
E2	2	3	--	4	--
E3	5	6	8	9	6
E4	2	3	7	8	6

Además, hay que tener en cuenta las siguientes restricciones: los empleados no pueden quedarse sin tarea, al empleado E2 sólo se le puede asignar una tarea, y las tareas no se pueden compartir.

a) (5 puntos) Modelizar como un problema de programación lineal entera.

b) (5 puntos) Encontrar una solución óptima aplicando el Método Húngaro.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna al empleado } \mathrm{E}_i \text{ la tarea } \mathrm{T}_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5;\ j\text{=}1, 2, 3, 4$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\,(6x_{11}+8x_{12}+9x_{13}+3x_{14}+7x_{15}+2x_{21}+3x_{22}+4x_{24}+$$
$$+5x_{31}+6x_{32}+8x_{33}+9x_{34}+6x_{35}+2x_{41}+3x_{42}+7x_{43}+8x_{44}+6x_{45})$$

$$\text{s.a}\begin{cases} 1\le x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}+x_{i5}\le 2 \quad i=1,3,4 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1 \\ x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}=1 \qquad j=1,\dots,5 \\ x_{23}=x_{25}=0 \\ x_{ij}=0,1 \qquad i=1,2,3,4 \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$$

b) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	T1	T2	T3	T4	T5	F_1	F_2
E1	-6	-8	-9	-3	-7	M	M
E1	-6	-8	-9	-3	-7	0	0
E2	-2	-3	M	-4	M	M	M
E3	-5	-6	-8	-9	-6	M	M
E3	-5	-6	-8	-9	-6	0	0
E4	-2	-3	-7	-8	-6	M	M
E4	-2	-3	-7	-8	-6	0	0
	↑+6	↑+8	↑+9	↑+9	↑+7		

Con M positivo suficientemente grande.

	T1	T2	T3	T4	T5	F_1	F_2	
E1	0	0	0	6	0	M	M	
E1	0	0	0	6	0	0	0	
E2	4	5	M	5	M	M	M	←-4
E3	1	2	1	0	1	M	M	
E3	1	2	1	0	1	0	0	
E4	4	5	2	1	1	M	M	←-1
E4	4	5	2	1	1	0	0	

Con M positivo suficientemente grande.

	T1	T2	T3	T4	T5	F_1	F_2
E1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0	6	$\cancel{0}$	M	M
E1	$\cancel{0}$	0	$\cancel{0}$	6	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
E2	0	1	M	1	M	M	M
E3	1	2	1	0	1	M	M
E3	1	2	1	$\cancel{0}$	1	0	$\cancel{0}$
E4	3	4	1	$\cancel{0}$	0	M	M
E4	4	5	2	1	1	$\cancel{0}$	0

Con M positivo suficientemente grande.

Asignación óptima: E1 $\rightarrow$ T2 y T3, E2 $\rightarrow$ T1, E3$\rightarrow$ T4, E4 $\rightarrow$ T5.

Valor óptimo: 8+9+2+9+6 = 34 puntos.

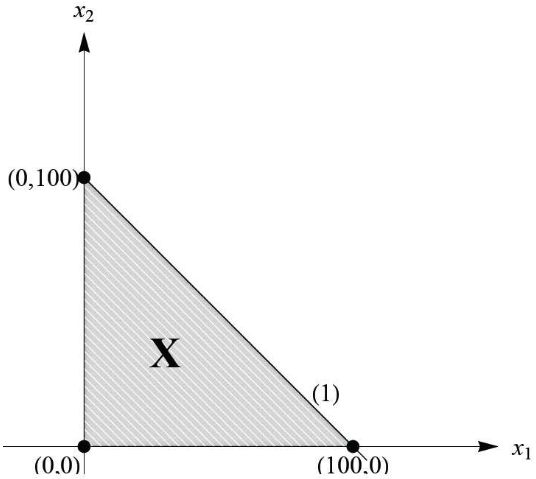
3. (10 puntos) Resuelve:

$$\text{Min } L(y_1^+, y_2^-, y_3^-, y_4^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 & (1) \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 & (2) \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (3) \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 45 & (4) \\ y_3^+ - y_4^+ + y_4^- = 15 & (5) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4 & \end{cases}$$

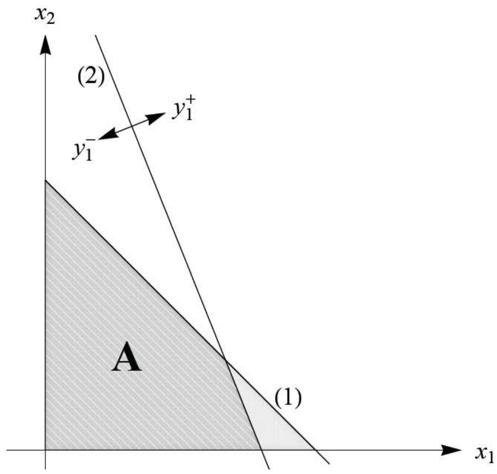
Solución:

El conjunto X de soluciones factibles del problema es:



$$P_1 \equiv \quad \text{Min } (y_1^+)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 & (1) \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 & (2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ \geq 0 & \end{cases}$$

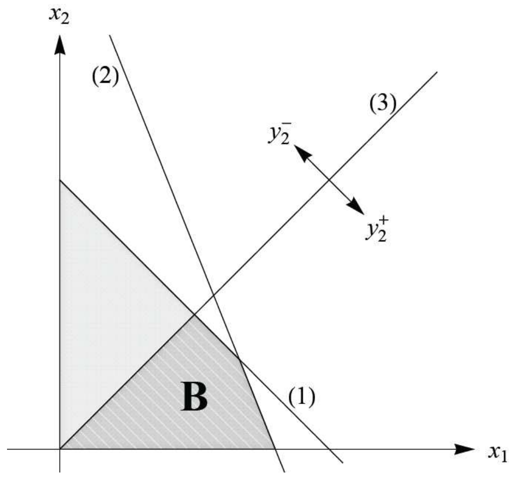


Soluciones óptimas: $\overline{\mathrm{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \quad \text{Min } (y_2^-)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 & (1) \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 & (2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, \; y_1^+ = 0 & \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (3) \\ y_2^- \geq 0, \; y_2^+ \geq 0 & \end{cases}$$

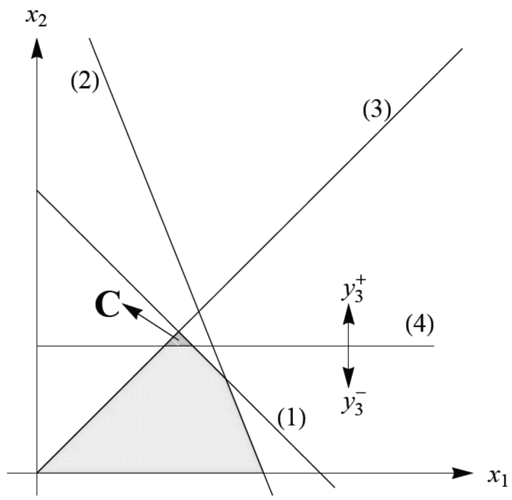


Soluciones óptimas: $\overline{\mathrm{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

$$
P_3 \equiv \text{Min } (y_3^-)
$$

$$
\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 100 & (1) \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_1^- \ge 0, \; y_1^+ = 0 & \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (3) \\ y_2^- = 0, \; y_2^+ \ge 0 & \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 45 & (4) \\ y_3^- \ge 0, \; y_3^+ \ge 0 & \end{cases}
$$

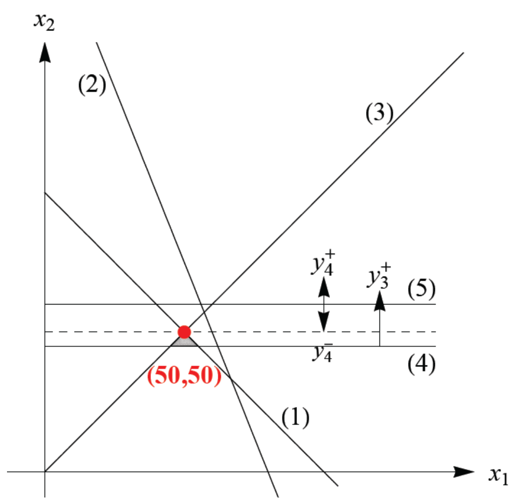


Soluciones óptimas: $\bar{\mathbf{x}} \in C$

Valor óptimo: 0

$$
P_4 \equiv \text{Min } (y_4^-)
$$

$$
\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 100 & (1) \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_1^- \ge 0, \; y_1^+ = 0 & \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (3) \\ y_2^- = 0, \; y_2^+ \ge 0 & \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 45 & (4) \\ y_3^- = 0, \; y_3^+ \ge 0 & \\ y_3^+ - y_4^+ + y_4^- = 15 & (5) \\ y_4^- \ge 0, \; y_4^+ \ge 0 & \end{cases}
$$



Solución óptima: (50, 50)

Valor óptimo: 10

Solución óptima:

$$
\bar{x}_1 = 50, \; \bar{x}_2 = 50, \; \bar{y}_1^+ = 0, \; \bar{y}_1^- = 200, \; \bar{y}_2^+ = 0, \; \bar{y}_2^- = 0,
$$

$$
\bar{y}_3^+ = 5, \; \bar{y}_3^- = 0, \; \bar{y}_4^+ = 0, \; \bar{y}_4^- = 10
$$

4. (10 puntos) En la siguiente tabla se muestran el conjunto de actividades que componen un proyecto, así como su duración en días y las relaciones de precedencia entre las mismas.

Actividad	**Duración**	**Precedentes Inmediatas**
A	3	-
B	2	A
C	6	A
D	2	C
E	3	A
F	3	B
G	5	C
H	1	C
I	1.5	F, H
J	2	I

a) Construir un grafo asociado al proyecto y hallar la duración prevista del proyecto.

b) Elaborar la tabla de actividades del proyecto.

c) Responder a las siguientes preguntas.

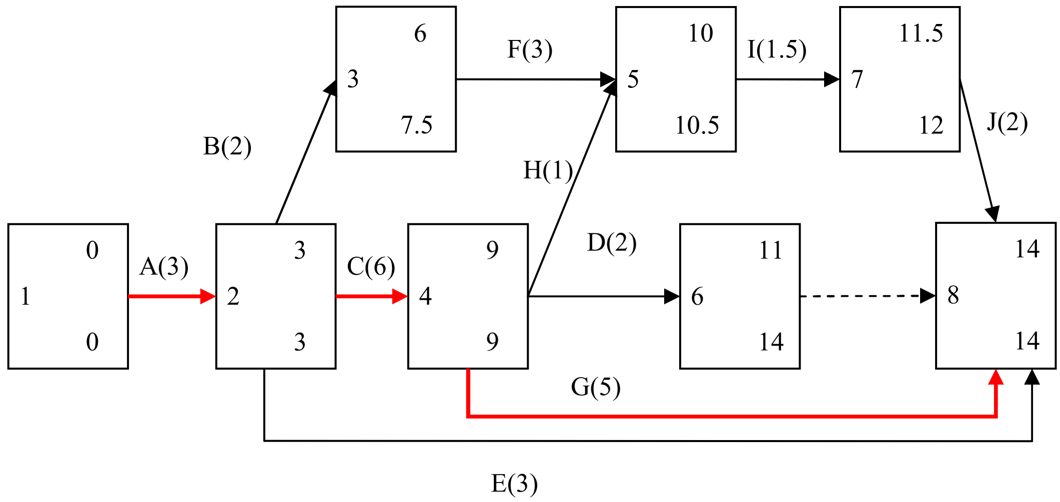
   i) ¿Qué ocurre con la duración del proyecto si la actividad I se retrasa 2 días?

   ii) ¿Cuántos días se puede retrasar la actividad D sin que afecte a la duración prevista del proyecto?

   iii) ¿Qué duración debería tener la actividad B para que fuese una actividad crítica, si la duración de las demás actividades se mantiene fija?

Solución:

a) El siguiente grafo representa a este proyecto:



Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 14 días.

Camino crítico: (1,2,4,8)

b) La tabla de actividades correspondiente a este proyecto es:

(i,j)	t(i,j)	CMT(i,j)	FMT*(i,j)	M(i,j)
A (1,2)	3	0	3	**0***
B (2,3)	2	3	7.5	2.5
C (2,4)	6	3	9	**0***
E (2,8)	3	3	14	8
F (3,5)	3	5	10.5	2.5
H (4,5)	1	9	10.5	0.5
D (4,6)	2	9	14	3
G (4,8)	5	9	14	**0***
I (5,7)	1.5	10	12	0.5
Fic(6,8)	0	11	14	3
J (7,8)	2	11.5	14	0.5

c)

i) Si la actividad I se retrasa 2 días, dado que su margen es de 0.5 días, la duración prevista del proyecto se retrasa 1.5 días.

ii) El margen de la actividad D es de 3 días. Luego esta actividad se puede retrasar hasta 3 días sin que la duración prevista del proyecto se vea afectada.

iii) Para que una actividad sea crítica, debe formar parte de un camino crítico. Dado que la duración de la actividad B es de 2 días y su margen de 2.5 días, su duración debería ser mayor o igual que 4.5 días para que fuese crítica.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Extraordinario Febrero 2006

1. Una empresa que fabrica electrodomésticos está pensando abrir una nueva factoría para producir 3 modelos de lavadora: modelo de gama alta, media y baja. Tiene dos posibles ubicaciones: 1 y 2. La inversión necesaria para construir la fábrica en la ubicación 1 es de 2000000 unidades monetarias y de 1750000 unidades monetarias en la ubicación 2. Los costes unitarios de producción son 15, 13 y 10 unidades monetarias, respectivamente para gama alta, media y baja, en la ubicación 1 y 16, 12 y 9 unidades monetarias, respectivamente, en la ubicación 2.

   De la gama alta se han de producir al menos 75000 unidades anuales, 100000 de la media y 200000 de la baja.

   a) (7 puntos) Si sólo se va a construir una factoría, modelizar el problema con el objetivo de minimizar costes.

   b) (3 puntos) Si se incluye la posibilidad de construir las dos factorías (ubicación 1 y 2), modelizar el problema con el objetivo de minimizar costes considerando, además, las siguientes restricciones:

      ❖ En caso de producirse lavadoras de gama baja en la ubicación 1 se recibirá una subvención de 1000000 unidades monetarias.

      ❖ La gama alta se producirá únicamente en una de las dos ubicaciones.

<u>Solución:</u>

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

   x_{ij} = número de lavadoras de la gama j producidas en la ubicación i al año

   con $i=1,2;\ j=a,m,b$ $\left(\text{siendo } a=\text{alta},\ m=\text{media y } b=\text{baja}\right)$

   $$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se produce en la ubicación } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{con } i=1,2$$

   La modelización queda como sigue:

$$\text{Min}\left(15x_{1a}+13x_{1m}+10x_{1b}+16x_{2a}+12x_{2m}+9x_{2b}+2000000y_1+1750000y_2\right)$$

$$\text{s.a}\quad\begin{cases} x_{1a}+x_{2a}\ge 75000\\ x_{1m}+x_{2m}\ge 100000\\ x_{1b}+x_{2b}\ge 200000\\ y_1+y_2=1\\ x_{1a}\le My_1\\ x_{2a}\le My_2\\ x_{1m}\le My_1\\ x_{2m}\le My_2\\ x_{1b}\le My_1\\ x_{2b}\le My_2\\ x_{ij}\ge 0 \text{ y enteras } i=1,\ 2;\ j=a,\ m,\ b\\ y_i=0,1 \qquad\qquad i=1,\ 2\end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos las variables de decisión siguientes

$x_{ij}=$ número de lavadoras de la gama j producidas en la ubicación i al año $(i=1,2;\ j=a,m,b)$

$$y_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si se produce en la ubicación } i \text{ lavadoras de la gama } j\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

$(\ i=1,2;\ j=a,m,b)$

$$z_i=\begin{cases}1 & \text{si se construye la factoria de la ubicación } i\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}\quad \text{con } i\text{=1,2}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min}\left(15x_{1a}+13x_{1m}+10x_{1b}+16x_{2a}+12x_{2m}+9x_{2b}+\right.$$
$$\left.+2000000z_1+1750000z_2-1000000y_{1b}\right)$$

$$\text{s.a}\quad\begin{cases} x_{1a}+x_{2a}\geq 75000 \\ x_{1m}+x_{2m}\geq 100000 \\ x_{1b}+x_{2b}\geq 200000 \\ y_{1a}+y_{2a}=1 \\ z_1+z_2\geq 1 \\ y_{1a}\leq z_1 \\ y_{2a}\leq z_2 \\ y_{1m}\leq z_1 \\ y_{2m}\leq z_2 \\ y_{1b}\leq z_1 \\ y_{2b}\leq z_2 \\ x_{1a}\leq My_{1a} \\ x_{2a}\leq My_{2a} \\ x_{1m}\leq My_{1m} \\ x_{2m}\leq My_{2m} \\ x_{1b}\leq My_{1b} \\ x_{2b}\leq My_{2b} \\ x_{ij}\geq 0 \text{ y enteras} \quad i=1,\ 2; j=a,\ m,\ b \\ y_{ij}=0,\ 1 \quad i=1,\ 2; j=a,\ m,\ b \\ z_i=0,\ 1 \quad i=1,\ 2 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. (10 puntos) Una empresa dispone de dos tipos de máquinas A y B. Por cada hora de trabajo en la máquina A se obtienen 20 piezas y 30 piezas por cada hora en la máquina B. Por motivos de capacidad de la empresa no se pueden fabricar al día más de 600 piezas ni menos de 250. Además debido a las características de las dos máquinas el coste por unidad producida por la máquina A es de 4 € y 3 € por unidad producida por B. Determinar las horas diarias óptimas para las dos máquinas con las siguientes metas y prioridades:
   - Prioridad 1. El coste total diario no supere los 2000 €.
   - Prioridad 2. Las horas de trabajo diarias en las máquinas A y B sean iguales.
   - Prioridad 3. Maximizar el número de piezas diarias.

Solución:

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = número de horas diarias de trabajo de la máquina A

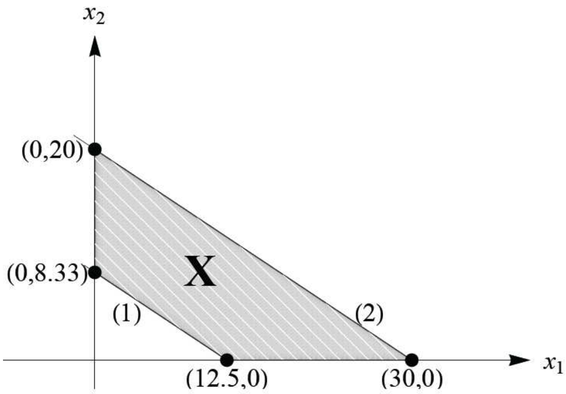
x_2 = número de horas diarias de trabajo de la máquina B

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } L(y_1^+, y_2^+ + y_2^-, -20x_1 - 30x_2)$$

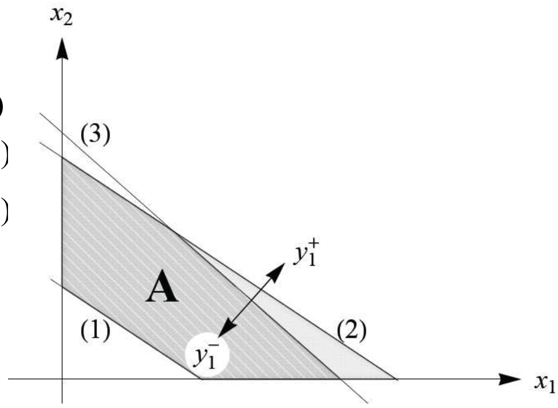
$$\text{s.a} \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \geq 250 & (1) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 600 & (2) \\ 80x_1 + 90x_2 - y_1^+ + y_1^- = 2000 & (3) \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1,\ 2 & \end{cases}$$

El conjunto X de soluciones factibles del problema es:



$$P_1 \equiv \text{ Min } (y_1^+)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \geq 250 & (1) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 600 & (2) \\ 80x_1 + 90x_2 - y_1^+ + y_1^- = 2000 & (3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ \geq 0 & \end{cases}$$

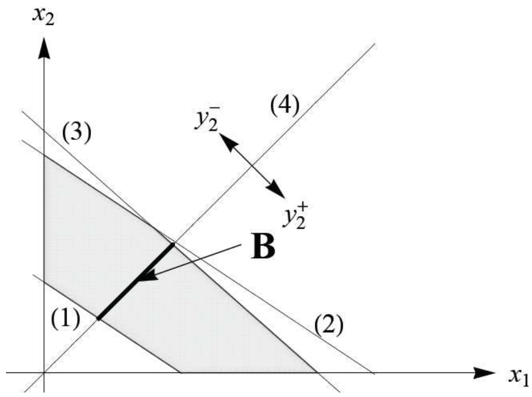


Soluciones óptimas: $\bar{\mathbf{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{Min } (y_2^+ + y_2^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \geq 250 & (1) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 600 & (2) \\ 80x_1 + 90x_2 - y_1^+ + y_1^- = 2000 & (3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ = 0 & \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (4) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ \geq 0 & \end{cases}$$

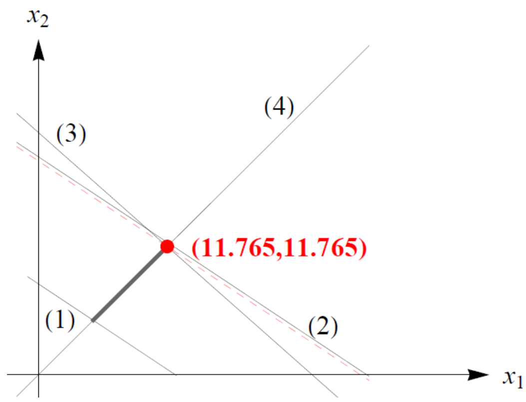


Soluciones óptimas: $\overline{\mathrm{x}} \in B = \overline{(5,5)(11.765,11.765)}$

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{Max } (20x_1 + 30x_2)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \geq 250 & (1) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 600 & (2) \\ 80x_1 + 90x_2 - y_1^+ + y_1^- = 2000 & (3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ = 0 & \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (4) \\ y_2^- = 0, \quad y_2^+ = 0 & \end{cases}$$



Solución óptima: (11.765,11.765)

Valor óptimo: 588.25

Las horas óptimas de trabajo diarias de la máquina A son 11.765 y de la máquina B también 11.765. Se produce un equilibrio en las horas de trabajo al día de cada tipo de pieza, ($\overline{y}_2^+ = 0, \overline{y}_2^- = 0$). Se producirán 235.3 piezas de A y 352.95 piezas de B (total 588.25) con un coste de 2000€ ($\overline{y}_1^+ = 0, \overline{y}_1^- = 0$).

3. Una empresa va a determinar su política de reemplazamiento de equipo para los próximos 4 años. El coste de adquisición del equipo para cada uno de los 4 años es de 7000 unidades monetarias. Los costes de mantenimiento y el valor recuperado

cuando se reemplaza el equipo dependen de la edad del equipo y son los que se recogen en la siguiente tabla:

Edad	Coste anual de mantenimiento	Valor recuperado
1	1000	4000
2	1000	2500
3	2000	2000
4	3000	0

a) (7 puntos) Elaborar una red para representar las políticas de reemplazamiento posibles. Calcular la política de reemplazamiento para el periodo que minimice el coste total neto (coste de adquisición + coste de mantenimiento - valor recuperado), teniendo en cuenta que al inicio del año 1 se debe comprar un equipo nuevo y que al final del periodo no se desea tener ningún equipo.

b) (3 puntos) Parece que va a entrar en vigor una nueva legislación que va a exigir la revisión de un equipo cada dos años, siempre que no se reemplace, con un coste de 2000 unidades monetarias por revisión. ¿Cómo debe incluirse esta información en la red anterior? ¿Cambiaría la política de reemplazamiento de coste mínimo obtenida en el apartado anterior?

<u>Solución:</u>

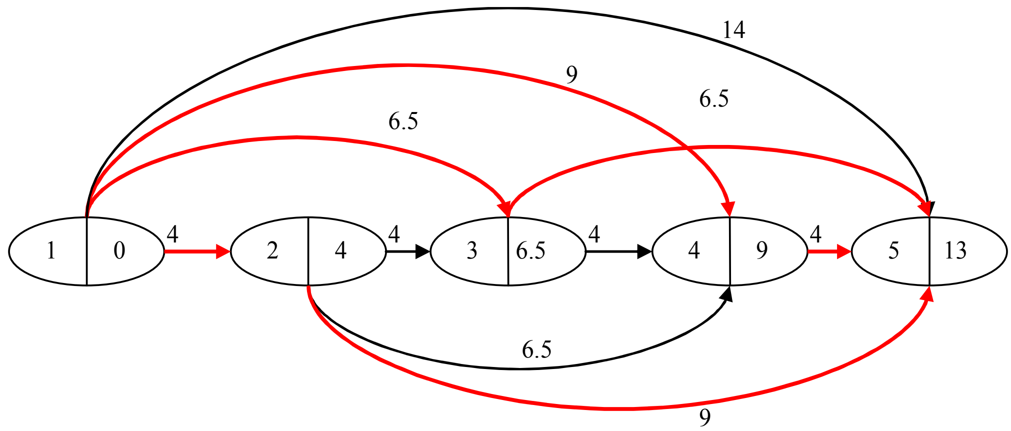
a) Se trata de un problema de reemplazamiento de equipo que tiene como objetivo minimizar el coste total a lo largo del periodo de planificación. Puede representarse por la siguiente red en la que el valor de cada arco (i,j), $d(i,j)$, representa el coste, en miles de unidades monetarias, de mantener un equipo desde el comienzo del año *i* hasta el comienzo del año *j*. Así se tiene que:

$d(1,2)=d(2,3)=d(3,4)=d(4,5)=7+1-4=4$

$d(1,3)=d(2,4)=d(3,5)=7+1+1-2.5=6.5$

$d(1,4)=d(2,5)=7+1+1+2-2=9$

$d(1,5)=7+1+1+2+3=14$



Utilizando el método de la ruta más corta se tiene que las políticas óptimas de reemplazamiento vienen dadas por los caminos:

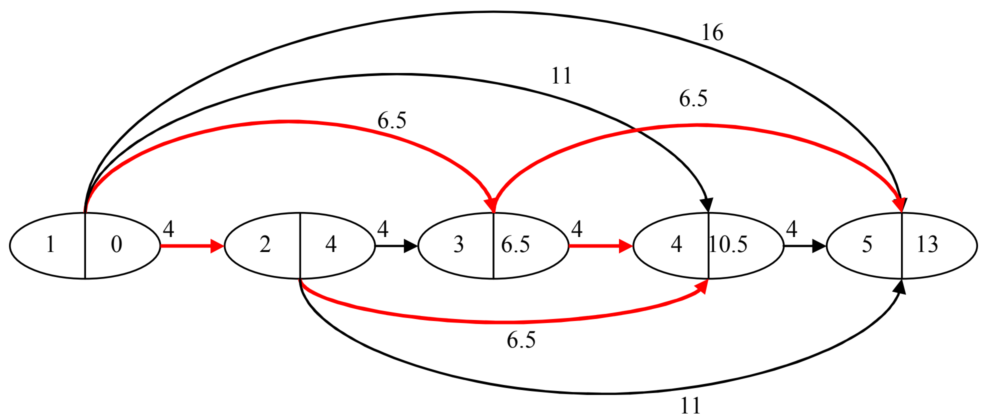
- (1,2,5) que significa que el equipo que compramos inicialmente lo cambiamos al año siguiente y éste último lo mantenemos hasta el final.
- (1,3,5) el equipo que compramos inicialmente lo cambiamos por uno nuevo transcurridos dos años y éste último lo mantenemos hasta el final.
- (1,4,5) el equipo que compramos inicialmente lo cambiamos por uno nuevo transcurridos tres años y éste último lo mantenemos hasta el final.

Coste mínimo: 13000 unidades monetarias.

b) Solo cambian los valores de los arcos que representan tres a más años, es decir

$d(1,4) = d(2,5) = 7+1+1+2-2+2 = 11$;

$d(1,5) = 7+1+1+2+3+2 = 16$



Ahora la estrategia óptima es única y viene dada por el camino (1,3,5) de la red. Consiste en transcurridos dos años cambiar el equipo comprado inicialmente por uno nuevo y mantener este último hasta el final.
Coste mínimo: 13000 u.m.

4. Una empresa de transporte dispone de 4 camiones y 4 rutas. Cada camión debe hacer una ruta y cada ruta debe realizarse exclusivamente por un camión. Los beneficios de cada transportista para las distintas rutas dependen de las características del camión y de la ruta escogida y se presentan en la siguiente tabla:

	Ruta 1	**Ruta 2**	**Ruta 3**	**Ruta 4**
Camión 1	150	200	300	100
Camión 2	100	220	300	250
Camión 3	250	140	240	240
Camión 4	300	250	100	300

a) (4 puntos) Decidir la ruta que debe realizar cada camión para que el beneficio total obtenido sea máximo.

b) El comercial de la empresa ha conseguido dos nuevas rutas y desea probarlas durante este año. Los beneficios obtenidos por cada camión son:

	Camión 1	**Camión 2**	**Camión 3**	**Camión 4**
Ruta 5	200	300	250	250
Ruta 6	260	280	250	320

i) (3 puntos) Construir la tabla a la que aplicaríamos el Método Húngaro sabiendo que cada camión únicamente puede realizar una ruta y las nuevas rutas deben realizarse obligatoriamente.

ii) (3 puntos) Construir la tabla a la que aplicaríamos el Método Húngaro sabiendo que se tienen que realizar todas las rutas, cada camión puede realizar más de una ruta y tienen que utilizarse obligatoriamente todos los camiones. Además, el camión 1 podrá realizar, como mucho, 450 km diarios, los camiones 2 y 3 podrán realizar, como mucho, 300 km diarios y el camión 4, 160 km y las rutas 1, 2, 3, 4, 5, 6 son de 110, 150, 130, 150, 120 y 90 km respectivamente.

Solución:

a) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	R1	R2	R3	R4
C1	-150	-200	-300	-100
C2	-100	-220	-300	-250
C3	-250	-140	-240	-240
C4	-300	-250	-100	-300
	↑+300	↑+250	↑+300	↑+300

	R1	R2	R3	R4	
C1	150	50	0	200	
C2	200	30	0	50	
C3	50	110	60	60	←-50
C4	0	0	200	0	

	R1	R2	R3	R4	
C1	150	50	0	200	←-30
C2	200	$\boxed{30}$	$\cancel{0}$	50	←-30
C3	0	60	10	10	
C4	$\cancel{0}$	0	200	$\cancel{0}$	
				↑+30	

	R1	R2	R3	R4
C1	120	20	0	170
C2	170	0	$\cancel{0}$	20
C3	0	60	40	10
C4	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	230	0

Asignación óptima: Camión 1 → Ruta 3, Camión 2 → Ruta 2, Camión 3→ Ruta 1, Camión 4 → Ruta 4.

Beneficio máximo 1070.

b)

i) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
C1	-150	-200	-300	-100	-200	-260
C2	-100	-220	-300	-250	-300	-280
C3	-250	-140	-240	-240	-250	-250
C4	-300	-250	-100	-300	-250	-320
F_1	0	0	0	0	M	M
F_2	0	0	0	0	M	M

Con M positivo suficientemente grande.

ii) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	F_1	F_2
C1	-150	-200	-300	-100	-200	-260	M	M
C1	-150	-200	-300	-100	-200	-260	0	0
C1	-150	-200	-300	-100	-200	-260	0	0
C2	-100	-220	-300	-250	-300	-280	M	M
C2	-100	-220	-300	-250	-300	-280	0	0
C3	-250	-140	-240	-240	-250	-250	M	M
C3	-250	-140	-240	-240	-250	-250	0	0
C4	-300	-250	-100	-300	-250	-320	M	M

Con M positivo suficientemente grande.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Junio 2006

1. (10 puntos) Una fábrica produce 4 tipos de jabones, para lo cual son necesarios 6 componentes. En la siguiente tabla se muestran las cantidades necesarias para realizar una pastilla de jabón de cada tipo.

	aceite	**agua**	**sosa cáustica**	**glicerina**	**esencia de limón**	**esencia de fresa**
J1	250 ml	240 ml	42 g	1 g	1 ml	3 ml
J2	200 ml	210 ml	2 g	40 g	2 ml	1 ml
J3	230 ml	240 ml	20 g	25 g	3 ml	1 ml
J4	180 ml	200 ml	10g	35 g	1 ml	3 ml

La fábrica dispone de 150000 ml de aceite, 160000 ml de agua, 12 kg de sosa cáustica, 3 kg de glicerina, 2000 ml de esencia de limón y 3000 ml de esencia de fresa por día.

Se tiene que producir al menos un tipo de jabón al día y como mucho tres. Además si se producen jabones del tipo 1 no se podrán producir del tipo 4.

El beneficio por cada pastilla de jabón es de 10, 13, 15 y 11 euros respectivamente para cada tipo de pastilla de jabón.

La fábrica se está planteando ampliar la planta de producción con un coste de 200000 euros, de forma que si se realiza la ampliación las disponibilidades de los componentes aumentarán en 50000 ml de aceite, 70000 ml de agua, 4 kg de sosa cáustica, 4 kg de glicerina, 1000 ml de esencia de limón y 500 ml de esencia de fresa. Además, en el caso de realizar esta ampliación, si se producen pastillas del tipo 3, se tendrán que realizar también del tipo 1.

Modelizar el problema de programación lineal entera que maximice el beneficio.

Solución:

Definimos las variables de decisión siguientes

$x_i =$ número de pastillas de jabón tipo Ji producidas diariamente; $\quad i = 1,\dots,4$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se produce jabón del tipo J}i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad \text{con } i = 1,\dots,4$$

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si se hace la ampliación} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left(10x_1 + 13x_2 + 15x_3 + 11x_4 - 200000z\right)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 250x_1 + 200x_2 + 230x_3 + 180x_4 \leq 150000 + 50000z \\ 240x_1 + 210x_2 + 240x_3 + 200x_4 \leq 160000 + 70000z \\ 42x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 10x_4 \leq 12000 + 4000z \\ x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 3000 + 4000z \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2000 + 1000z \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 3000 + 500z \\ 1 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 3 \\ y_4 \leq 1 - y_1 \\ y_1 \geq y_3 + z - 1 \\ x_i \leq My_i \qquad i = 1,\dots,4 \\ x_i \geq 0 \text{ y enteras } i = 1,\dots,4 \\ y_i = 0,\ 1 \qquad i = 1,\dots,4 \\ z = 0,\ 1 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. Una fábrica de caramelos produce dos tipos de caramelos C1 y C2. Cada kg de caramelo C1 se vende a 200 euros y contiene 100 g de azúcar y 200 g de frutas. Cada kg de caramelo C2 se vende a 300 euros, contiene 400 g de azúcar y 400 g de frutas. La diferencia entre la producción semanal de C1 y C2 no sea inferior a 5 kg. Además, el contenido de fruta semanal debe ser al menos de 1600 g.
   a) (5 puntos) Buscar las soluciones eficientes que maximicen el ingreso y minimicen el contenido de azúcar de la producción semanal.
   b) (2 puntos) Se sabe que la reducción de 1 kg de azúcar equivale a un aumento de 2 euros en los ingresos. Modelizar sin resolver el problema ponderado.

c) (3 puntos) Si el coste de embalaje de los caramelos es de 0.1 euros por kg para los caramelos de tipo C1 y 0.2 euros por kg para C2. Obtener una solución eficiente que maximice el ingreso semanal, minimice el azúcar utilizado a la semana y minimice el coste semanal de embalaje.

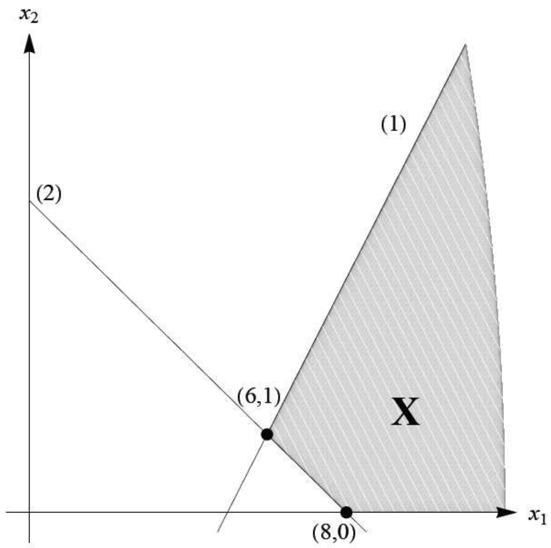
<u>Solución:</u>

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

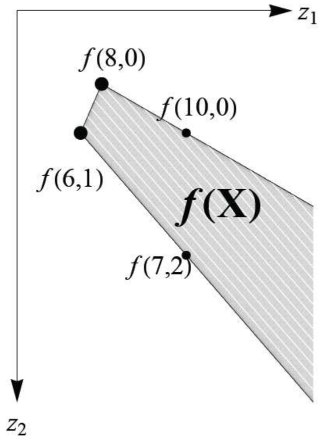
x_i = kg de caramelos producidos a la semana del tipo $\mathrm{C_i}$ $\quad i = 1, 2$.

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left(200x_1 + 300x_2, -100x_1 - 400x_2\right)$$
$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 5 & (1) \\ 200x_1 + 400x_2 \geq 1600 & (2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$\bar{x} \in X$	$f(\bar{x}) \in f(X)$
(6,1)	(1500,−1000)
(8,0)	(1600,−800)
(7,2)	(2000,−1500)
(10,0)	(2000,−1000)



Soluciones eficientes: $\{(x_1, 0) \text{ donde } x_1 \geq 8\}$ es decir, producir 8 kg o más de C1 y nada de C2.

b) Max $\left[1(200x_1 + 300x_2) + 2(-0.1x_1 - 0.4x_2)\right]$
s.a $\mathbf{x} \in X$

c) Por el teorema de Zadeh si damos pesos positivos a las funciones objetivo, la solución óptima del problema ponderado será una solución eficiente del problema multiobjetivo.

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1000$

$$\text{Max}\left[1(200x_1 + 300x_2) + 2(\text{-}100x_1 - 400x_2) + 100(-0.1x_1 - 0.2x_2)\right]$$
$$\text{s.a} \quad \mathbf{x} \in X$$

El problema lineal queda:

$$\text{Max } (\text{-}100x_1\text{-}700x_2)$$
$$\text{s.a} \quad \mathbf{x} \in X$$

La solución óptima del problema ponderado es (8,0). Por lo tanto producir semanalmente 8 kg de C1 y nada de C2 es una solución eficiente del problema multiobjetivo.

3. Con motivo del 5º centenario del nacimiento de un célebre pintor, un importante museo ha decidido restaurar cinco de sus obras, para lo cual ha contratado tres equipos de restauración. Cada equipo ha presentado el presupuesto de restauración para cada una de las obras, como se recoge en el siguiente cuadro, en miles de euros.

	O_1	**O_2**	**O_3**	**O_4**	**O_5**
R_1	60	--	90	--	120
R_2	70	90	80	100	80
R_3	--	70	120	90	100

(Donde "--" significa que dicho equipo no restaurará en ningún caso la obra correspondiente).

El primer equipo restaurador está compuesto por seis personas, el segundo por cuatro y el tercero por tres. En la restauración de cada una de las obras son necesarias dos personas. Cada persona de un equipo sólo restaura una obra.

a) (3 puntos) ¿A qué tabla se debe aplicar el Método Húngaro para realizar las cinco restauraciones, con el menor coste posible, teniendo en cuenta que cada una de ellas debe ser realizada por un único equipo restaurador, y que los tres equipos deben participar en dichas restauraciones?

b) (6 puntos) Dado que el coste de restauración de las cinco obras es muy elevado, la directiva del museo decide restaurar únicamente tres, asignando una única obra a cada equipo. Determinar, aplicando el Método Húngaro, todas las posibles asignaciones que minimicen el coste total.

<u>Solución:</u>

a) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	O1	O2	O3	O4	O5	F
R1	60	M	90	M	120	0
R1	60	M	90	M	120	0
R1	60	M	90	M	120	0
R2	70	90	80	100	80	0
R2	70	90	80	100	80	0
R3	M	70	120	90	100	M

Con M positivo suficientemente grande.

b) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	O1	O2	O3	O4	O5
R1	60	M	90	M	120
R2	70	90	80	100	80
R3	M	70	120	90	100
F_1	0	0	0	0	0
F_2	0	0	0	0	0

Con M positivo suficientemente grande.

	O1	O2	O3	O4	O5	
R1	60	M	90	M	120	←-60
R2	70	90	80	100	80	←-70
R3	M	70	120	90	100	←-70
F_1	0	0	0	0	0	0
F_2	0	0	0	0	0	0

Con M positivo suficientemente grande.

	O1	O2	O3	O4	O5	
R1	0	M	30	M	60	←-10
R2	0	20	$\boxed{10}$	30	10	←-10
R3	M	0	50	20	30	←-10
F_1	0	0	0	0	0	
F_2	0	0	0	0	0	
	↑+10	↑+10				

Con M positivo suficientemente grande.

	O1	O2	O3	O4	O5
R1	0	M	20	M	50
R2	0	20	0	20	0
R3	M	0	40	10	20
F_1	10	10	0	0	0
F_2	10	10	0	0	0

Con M positivo suficientemente grande.

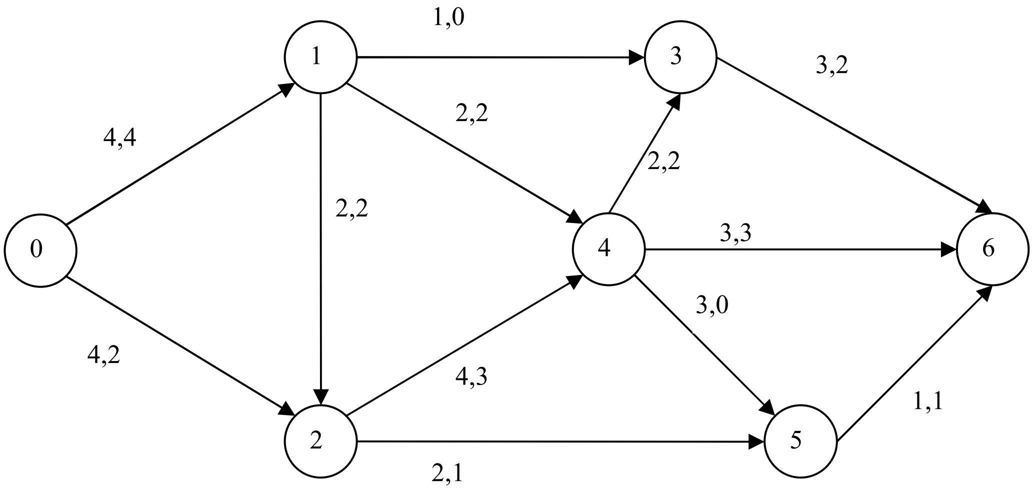
Las asignaciones óptimas son:

Asignación óptima 1: R1 → O1, R2 → O3, R3→ O2.

Asignación óptima 2: R1 → O1, R2 → O5, R3→ O2.

Coste mínino 210000 €

4. Dada la siguiente red:



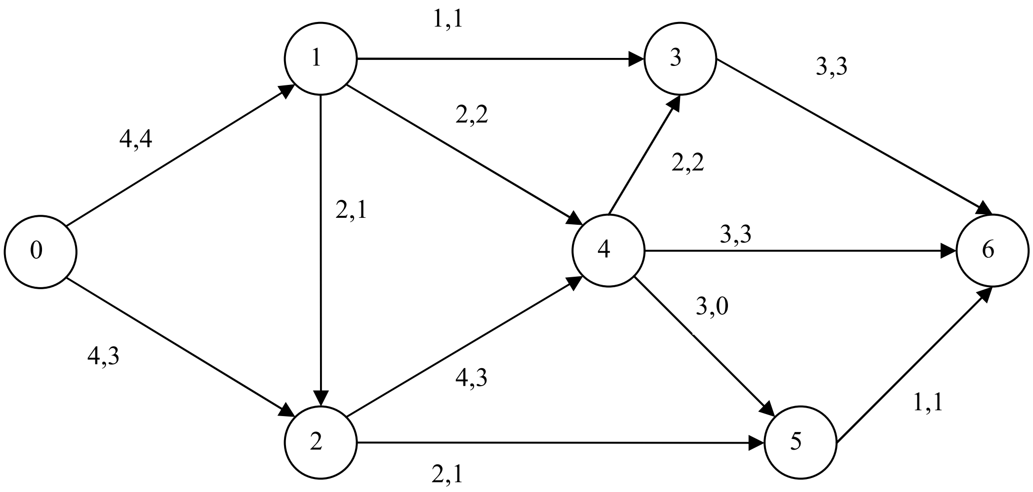
a) (2 puntos) Indicar una cadena de origen a destino que no sea un camino y que pase por el nodo 5.
b) (4 puntos) Si los valores de los arcos representan la capacidad del arco (izda) y el valor del flujo del arco (dcha), calcular, si es posible, una cadena de crecimiento (no saturada) asociada a este flujo.
c) (3 puntos) Partiendo del flujo dado, obtener el valor del flujo máximo.

Solución:

a) La cadena (0,2,5,4,6) es una cadena que sin ser camino pasa por el nodo 5.
b) La cadena (0,2,1,3,6) no está saturada, es decir sus arcos directos no están saturados y el inverso no tiene flujo nulo.
c) Considerando el flujo dado, cuyo valor es 6, y la cadena de crecimiento dada en el apartado b), el valor del flujo puede aumentar en:

   $$\Delta_f\left(0,2,1,3,6\right)=\min\left\{4-2,2,1-0,3-2\right\}=1$$

   Saturamos la cadena añadiendo esta cantidad a los arcos directos y restándosela a los inversos. El resultado es el siguiente flujo cuyo valor es 7:



En esta nueva situación todas las cadenas de origen a destino están saturadas, por tanto el flujo que atraviesa la red es máximo y de valor $V_f = 7$.

5. (2 puntos) Explicar el significado de comienzo más temprano y final más tardío de una actividad en la planificación de un proyecto.

Solución:

El comienzo más temprano de una actividad del proyecto es el periodo de tiempo mínimo que debe transcurrir desde iniciado el proyecto para que sean realizadas todas sus actividades precedentes y poder empezar dicha actividad.

El final más tardío de una actividad del proyecto es el periodo de tiempo máximo que debe transcurrir desde iniciado el proyecto para que sea realizada dicha actividad sin alterar la duración prevista del proyecto.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Septiembre 2006

1. (10 puntos) Una empresa está considerando cinco proyectos. Cada proyecto aprobado será ejecutado sobre un periodo de tres años. Los rendimientos esperados y los gastos anuales para cada proyecto, junto con los fondos anuales disponibles en miles de euros, se recogen en la siguiente tabla:

Proyecto	**Gastos en**			**Rendimientos**
	Año 1	**Año 2**	**Año 3**	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondos disponibles	25	25	25	

La empresa, teniendo en cuenta su capital disponible, debe elegir los proyectos con el objetivo de maximizar los rendimientos totales. Además se dispone de la siguiente información:

❖ El proyecto 3 no se hace si se hace el 5.

❖ Los proyectos 1 y 2 se hacen de forma conjunta solo si no se hacen ni el 4 ni el proyecto 5.

❖ La empresa debe reducir en uno de los tres años sus fondos disponibles en 5 mil euros y debe decidir en qué año hacerlo.

Modelizar sin resolver el problema usando la programación lineal entera.

<u>Solución:</u>

Definimos las variables de decisión siguientes

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se lleva a cabo el proyecto } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad \text{con } i = 1, \dots, 5$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se reducen los fondos en el año } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{con } j = 1,2,3$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left(20y_1 + 40y_2 + 20y_3 + 15y_4 + 30y_5\right)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 7y_4 + 8y_5 \leq 25 - 5z_1 \\ y_1 + 7y_2 + 9y_3 + 4y_4 + 6y_5 \leq 25 - 5z_2 \\ 8y_1 + 10y_2 + 2y_3 + y_4 + 10y_5 \leq 25 - 5z_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ y_3 \leq 1 - y_5 \\ y_4 + y_5 \leq 4 - 2\left(y_1 + y_2\right) \\ y_i = 0,\ 1 \ \ i = 1,\ldots,5 \\ z_j = 0,\ 1 \ \ j = 1,2,3 \end{cases}$$

2. (10 puntos) Una empresa posee dos cadenas de producción para un mismo artículo. La cadena 1 produce 2 unidades por minuto con un beneficio unitario de 3000 €, mientras que la cadena 2 produce 3 unidades por minuto con un beneficio de 5000 € por unidad. El coste de almacenamiento por unidad asciende a 10 €.

   Calcular el tiempo de producción semanal que debe asignarse a cada una de las cadenas, si la empresa se ha planteado las siguientes metas y objetivos con el siguiente orden de prioridades.

   - Prioridad 1. Producir al menos 30000 unidades semanales.
   - Prioridad 2. Los gastos de almacenamiento no superen los 450000 € semanales.
   - Prioridad 3. El tiempo de producción semanal en la cadena 1 sea al menos tanto como en la 2, pero no más del triple de la 2.
   - Prioridad 4. Maximizar el beneficio semanal.

   Solución:

   Definimos las variables de decisión siguientes:

   x_1 = minutos de producción de la cadena 1 a la semana

   x_2 = minutos de producción de la cadena 2 a la semana

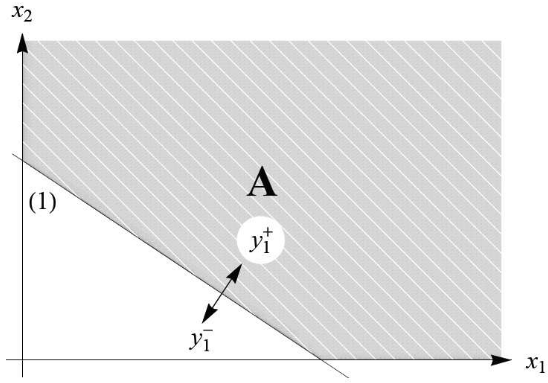
   La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } L(y_1^-, y_2^+, y_3^- + y_4^+, -6000x_1 - 15000x_2)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 & (1) \\ 10(2x_1 + 3x_2) - y_2^+ + y_2^- = 450000 & (2) \\ x_1 - x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (3) \\ x_1 - 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 0 & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1,...,4 & \end{cases}$$

$$P_1 \equiv \text{Min } (y_1^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 \quad (1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ \geq 0 \end{cases}$$

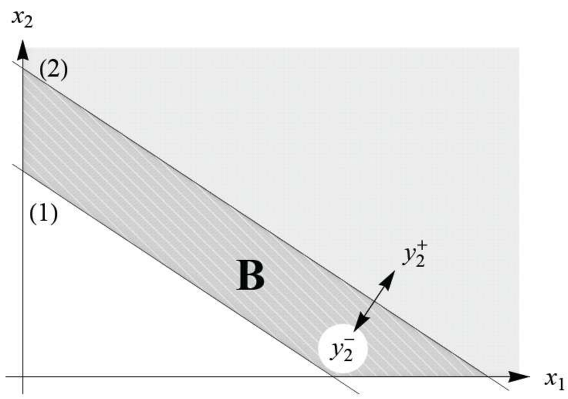


Soluciones óptimas: $\overline{\mathrm{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{Min } (y_2^+)$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 \quad (1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 \\ 20x_1 + 30x_2 - y_2^+ + y_2^- = 450000 \quad (2) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ \geq 0 \end{cases}$$

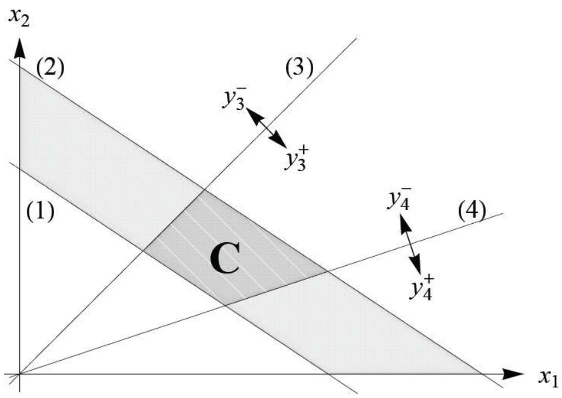


Soluciones óptimas: $\overline{\mathrm{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{Min } (y_3^- + y_4^+)$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 & (1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 \\ 20x_1 + 30x_2 - y_2^+ + y_2^- = 450000 & (2) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ = 0 \\ x_1 - x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (3) \\ x_1 - 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 0 & (4) \\ y_3^- \geq 0, \; y_3^+ \geq 0, \quad y_4^- \geq 0, \; y_4^+ \geq 0 \end{cases}$$

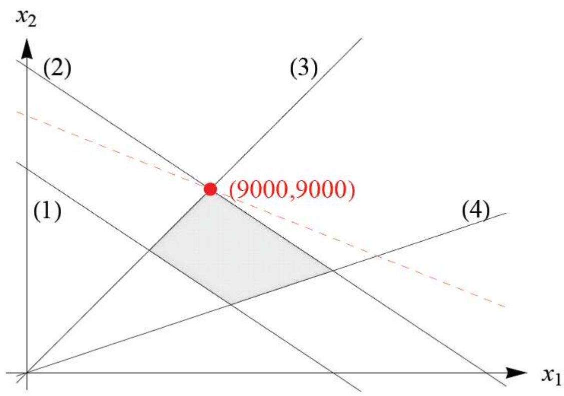


Soluciones óptimas: $\overline{\mathbf{x}} \in C$

Valor óptimo: 0

$$P_4 \equiv \text{Max } (6000x_1 + 15000x_2)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 & (1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 \\ 20x_1 + 30x_2 - y_2^+ + y_2^- = 450000 & (2) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ = 0 \\ x_1 - x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (3) \\ x_1 - 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 0 & (4) \\ y_3^- = 0, \quad y_3^+ \geq 0, \\ y_4^- \geq 0, \quad y_4^+ = 0 \end{cases}$$



Solución óptima: (9000,9000)

Valor óptimo: 189000000

Los tiempos óptimos de producción son de 9000 minutos semanales en cada una de las cadenas. Se realizan, a la semana, 45000 productos (no existe ni exceso ni defecto en la primera meta) con un gasto de almacenamiento de 450000 € (no hay ni exceso ni defecto en la segunda meta) y un beneficio de 189 millones de euros.

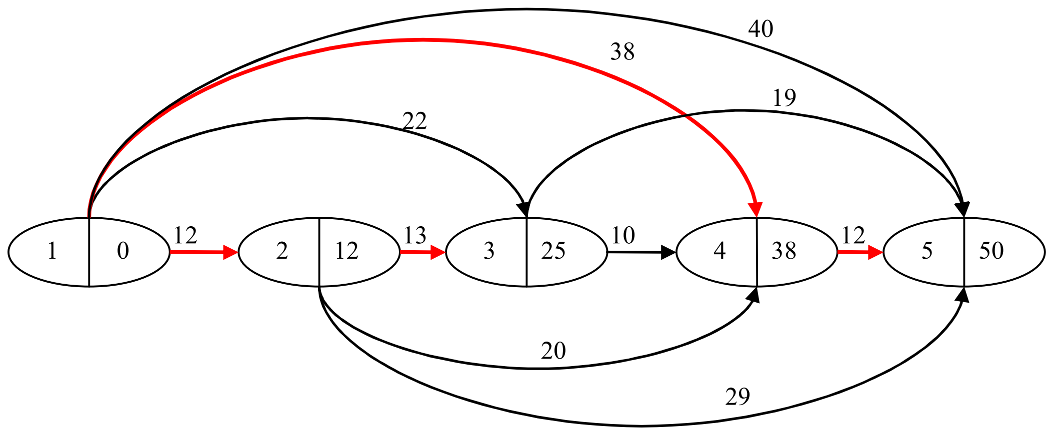
3. (10 puntos) El dueño de un local se está planteando la duración de los contratos de arrendamiento de dicho local. La tabla siguiente recoge los cálculos de la utilidad esperada, en cientos de euros, si se arrienda desde el inicio del año i hasta el inicio del año j.

i \ j	**2**	**3**	**4**	**5**
1	12	22	38	40
2	--	13	20	29
3	--	--	10	19
4	--	--	--	12

El dueño quiere conocer cuándo arrendar y por cuánto tiempo para maximizar la utilidad esperada durante los próximos 4 años.

Solución:

Este es un problema de reemplazamiento de contratos para maximizar la utilidad esperada y puede ser representado por la siguiente red, en la que el valor de cada arco (i, j) indica la utilidad esperada de un contrato de arrendamiento desde el inicio del año *i* hasta el inicio del año *j*.



Utilizando el método de la ruta más larga a la red anterior se tiene que el camino más largo es el (1, 4, 5) de valor 50.

La solución óptima es arrendar con un contrato desde el inicio del primer año hasta el inicio del cuarto año (por tres años), y luego realizar otro contrato desde el inicio del cuarto año hasta el inicio del quinto (por un año). La utilidad esperada óptima es de 5000 euros.

4. (10 puntos) En la siguiente tabla quedan recogidas las duraciones en días y las relaciones de precedencia de las actividades que forman un proyecto:

Actividad	**Duración**	**Precedentes Inmediatas**
A	4	--
B	6	--
C	7	--
D	*t*	A
E	5	B,D
F	1	A
G	2	B,D
H	3	C, E

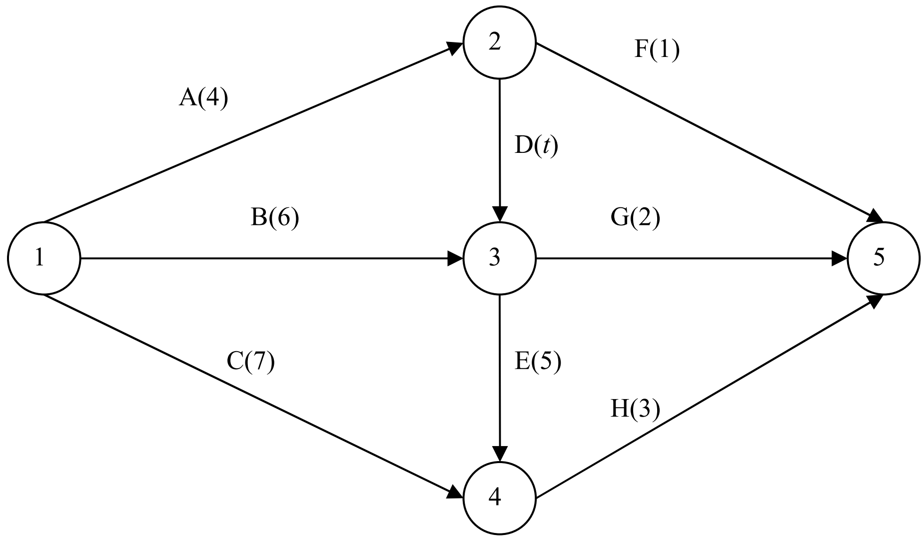
a) Elaborar una red que represente el proyecto.

b) ¿Cuál es la duración del proyecto si la duración de la actividad D es menor de dos días? Elaborar la tabla de actividades del proyecto, señalando las actividades críticas.

c) La actividad D puede retrasarse hasta ½ día sin alterar la duración del proyecto. ¿Cuál es la duración de la activad D?

Solución:

a)



b) Para $t < 2$:

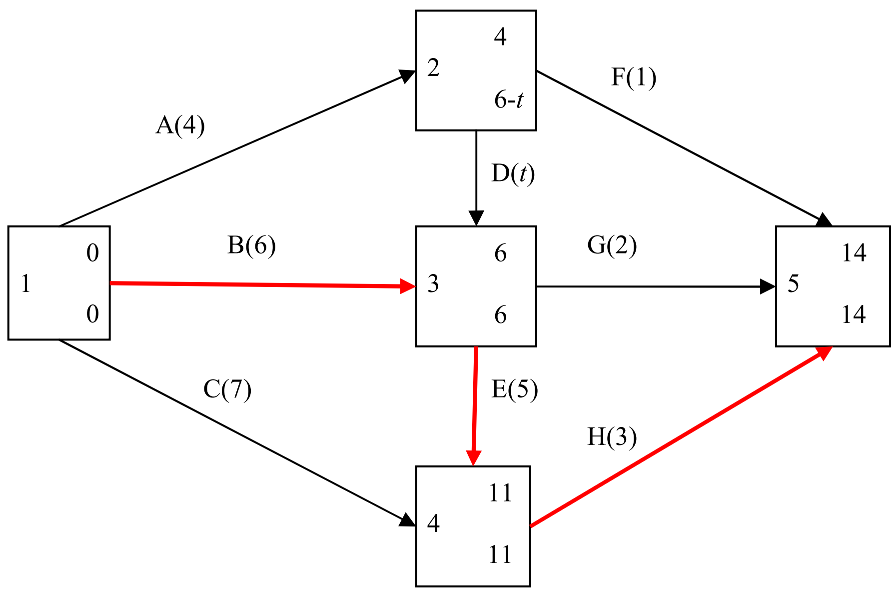


Tabla de actividades:

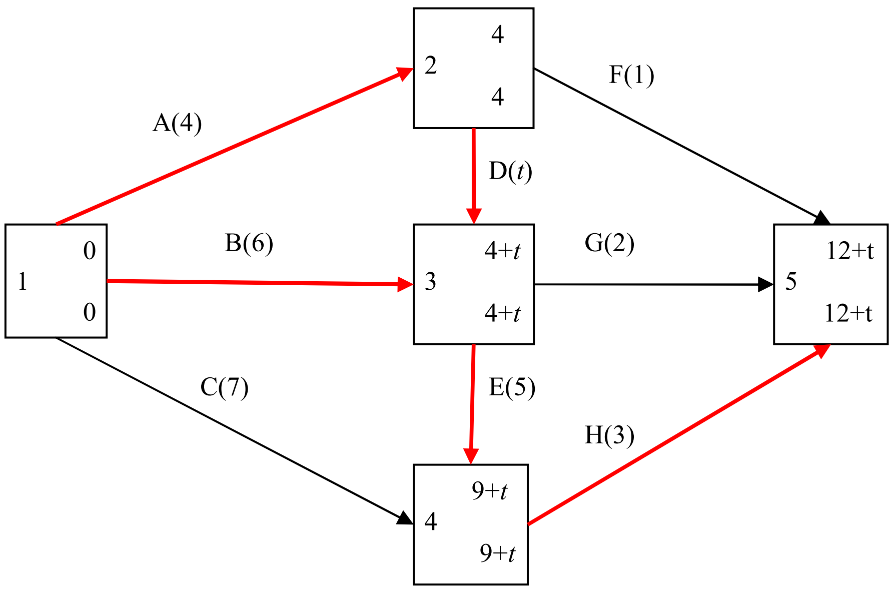
(i,j)	t(i,j)	CMT(i,j)	FMT*(i,j)	M(i,j)
A (1,2)	4	0	6-t	2-t
B (1,3)	6	0	6	**0***
C (1,4)	7	0	11	4
D (2,3)	$t\ (t<2)$	4	6	2-t
F (2,5)	1	4	14	9
E (3,4)	5	6	11	**0***
G (3,5)	2	6	14	6
H (4,5)	3	11	14	**0***

Actividades críticas: B, E, H.

Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 14 días.

c) Del enunciado se sabe que el margen de la actividad D es 0.5 días y por tanto no es una actividad crítica.

Comprobamos en primer lugar que en esta situación se cumple que $t<2$. Ya que para $t\geq 2$ se tendría que:



Por tanto para $t = 2$, los caminos críticos serían: (1,2,3,4,5) y (1,3,4,5), y para $t > 2$, el camino crítico sería: (1,2,3,4,5). En ambos casos, D sería una actividad crítica y por tanto su margen sería nulo.

Luego si el margen de la actividad D es 0.5 días se sabe que $t < 2$ y en consecuencia se cumple que:

$M(2,3) = 2 - t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad t = 1.5$ días.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Extraordinario Febrero 2007

1. (10 puntos) Una empresa estudia producir sus tres productos P1, P2 y P3 en una sola de las ubicaciones U1, U2 y U3. La producción de cada producto genera un volumen de contaminación de 0.5, 2 y 1 cm^3 respectivamente por unidad producida, independientemente de la ubicación.

   La siguiente tabla recoge para cada una de las ubicaciones: los ingresos unitarios (euros) de cada producto, la capacidad de producción diaria (unidades), los volúmenes máximos de contaminación permitidos (cm^3) y la penalización por volumen de contaminación excedente $(€/cm^3)$:

	U1	U2	U3
Ingreso Unitario P1	2	4	3
Ingreso Unitario P2	5	3	6
Ingreso Unitario P3	3	4	2
Capacidad producción diaria	200	400	300
Volumen máximo contaminación diaria	150	250	200
Penalización de contaminación excedente	20	15	10

   La empresa, concienciada con los problemas del medio ambiente, propone unos objetivos y metas, con un orden de prioridades dado por:

   - Prioridad 1. Maximizar ingresos diarios.
   - Prioridad 2. No superar el nivel máximo de contaminación de la ubicación
   - Prioridad 3. Se desea no gastar más de 9000 € al día por exceso de contaminación.

   Formular un modelo de programación lineal que permita determinar cuántas unidades diarias de cada producto deben producirse y en qué ubicación.

Solución:

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_{ij} = unidades producidas al día de Pj en Ui $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$

$$u_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elige la ubicación } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3$$

La modelización del problema queda como sigue:

$$\text{Min } L(-(2x_{11}+5x_{21}+3x_{31}+4x_{12}+3x_{22}+4x_{32}+3x_{13}+6x_{23}+2x_{33}),$$
$$,y_1^+ + y_2^+ + y_3^+, y_4^+)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31} \le 200u_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} \le 400u_2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} \le 300u_3 \\ u_1+u_2+u_3 = 1 \\ 0.5x_{11}+2x_{21}+x_{31}-y_1^+ + y_1^- = 150+M(1-u_1) \\ 0.5x_{12}+2x_{22}+x_{32}-y_2^+ + y_2^- = 250+M(1-u_2) \\ 0.5x_{13}+2x_{23}+x_{33}-y_3^+ + y_3^- = 200+M(1-u_3) \\ 20y_1^+ + 15y_2^+ + 10y_3^+ - y_4^+ + y_4^- = 9000 \\ x_{ij} \ge 0, \quad \text{y enteras } i = 1,\ 2, 3 \quad j = 1,\ 2, 3 \\ u_j = 0,\ 1 \qquad j = 1,\ 2, 3 \\ y_i^- \ge 0, \quad y_i^+ \ge 0 \quad i = 1,\ 2, 3, 4 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. (10 puntos) Un artista de prestigio ha concluido 4 obras de arte. Las galerías A, B y C están interesadas en adquirirlas y están dispuestas a pagar por cada obra las cantidades (en millones de unidades monetarias) que se recogen en la siguiente tabla:

	Obra 1	**Obra 2**	**Obra 3**	**Obra 4**
Galería A	12	10	8	10
Galería B	14	11	6	7
Galería C	15	13	8	9

El artista va a vender todas las obras de arte y cada galería va a adquirir por lo menos una obra de arte. Se da la circunstancia de que la galería A ha decidido que sólo va a comprar una obra de arte.

a) (6 puntos) Determinar cómo asignará el artista las obras de arte entre las distintas galerías si lo que persigue es maximizar sus ingresos.

b) (4 puntos) Modelizar empleando la programación lineal entera el anterior problema si, además, el artista añade la siguiente restricción: las obras de arte 2 y 4 han de venderse a la misma galería.

<u>Solución:</u>

a) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	O1	O2	O3	O4	F_1
Galeria A	-12	-10	-8	-10	M
Galeria B	-14	-11	-6	-7	0
Galeria B	-14	-11	-6	-7	0
Galeria C	-15	-13	-8	-9	0
Galeria C	-15	-13	-8	-9	0
	↑+15	↑+13	↑+8	↑+10	

Con M positivo suficientemente grande.

	O1	O2	O3	O4	F_1
Galería A	3	3	0	0	M
Galería B	1	2	2	3	0
Galería B	1	2	2	3	0
Galería C	0	0	0	1	0
Galería C	0	0	0	1	0

Con M positivo suficientemente grande.

	O1	O2	O3	O4	F_1	
Galería A	3	3	$\cancel{0}$	0	M	
Galería B	1	2	2	3	0	←- 1
Galería B	$\boxed{1}$	2	2	3	$\cancel{0}$	←- 1
Galería C	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0	1	$\cancel{0}$	
Galería C	0	0	$\cancel{0}$	1	$\cancel{0}$	
					↑+1	

Con M positivo suficientemente grande.

	O1	O2	O3	O4	F_1
Galería A	3	3	$\cancel{0}$	0	M
Galería B	$\cancel{0}$	1	1	2	0
Galería B	0	1	1	2	$\cancel{0}$
Galería C	$\cancel{0}$	0	$\cancel{0}$	1	1
Galería C	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0	1	1

Con M positivo suficientemente grande.

Asignación óptima: Galería A $\to$ Obra 4, Galería B $\to$ Obra 1, Galería C $\to$ Obra 2 y Obra 3.

Ingreso máximo: 45 millones de unidades monetarias.

b) Definimos las variables de decisión siguientes

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna a la galería } i \text{ la obra } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}, \; i\text{=A,B,C. } j\text{=1,…,4}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left(12x_{A1}+10x_{A2}+8x_{A3}+10x_{A4}+14x_{B1}+11x_{B2}+6x_{B3}+7x_{B4}+15x_{C1}+13x_{C2}+8x_{C3}+9x_{C4}\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}=1 \\ x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}=1 \\ x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}=1 \\ x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}=1 \\ x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}=1 \\ 1\le x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}\le 2 \\ 1\le x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}\le 2 \\ x_{B2}=x_{B4} \\ x_{C2}=x_{C4} \\ x_{ij}=0,1 \;\; i=\text{A,B,C}; \; j=1,\dots,4 \end{cases}$$

3. (10 puntos) Una empresa emplea dos procesos de producción diferentes para producir un producto. En cada uno de los procesos se precisa utilizar tres máquinas M1, M2 y M3. Para fabricar una unidad de producto según el proceso productivo

elegido se necesita usar en cada una de las máquinas las horas indicadas en la siguiente tabla:

	Proceso 1	**Proceso 2**
M1	1	3
M2	4	2
M3	3	4

Por una unidad de producto fabricado con el proceso 1 se obtienen 55 euros y con el proceso 2 se obtienen 75 euros. El coste de una hora de máquina es de 5 euros. Cada máquina está disponible 60 horas.

La empresa propone las siguientes metas por orden de prioridad:

- Prioridad 1. Obtener un beneficio de al menos 300 euros.
- Prioridad 2. El número de horas trabajadas en las máquinas M1 y M2 coincidan.
- Prioridad 3. El número de horas trabajadas en la máquina M3 no sea superior a 2 veces el número de horas trabajadas en la máquina M1.

Modelizar, utilizando programación lineal, el problema de calcular las unidades óptimas que deben asignarse a cada proceso productivo. Resolver el problema relajado asociado.

<u>Solución:</u>

Definimos las variables de decisión siguientes:

$x_1 =$ unidades producidas con el proceso 1 a la hora

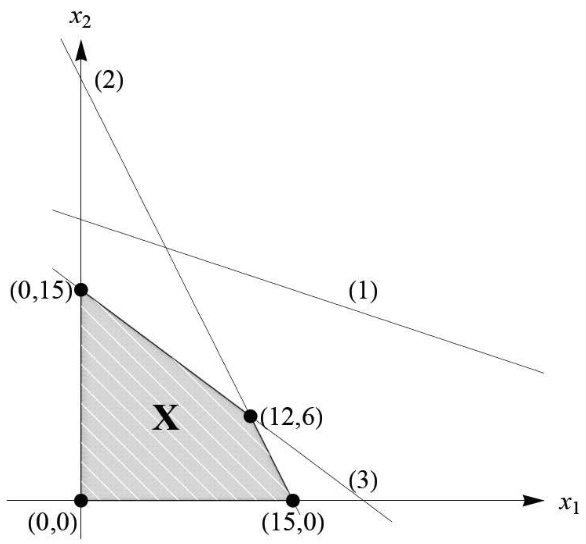
$x_2 =$ unidades producidas con el proceso 2 a la hora

La modelización del problema relajado queda como sigue:

$$\text{Min } L(y_1^-, y_2^+ + y_2^-, y_3^+)$$

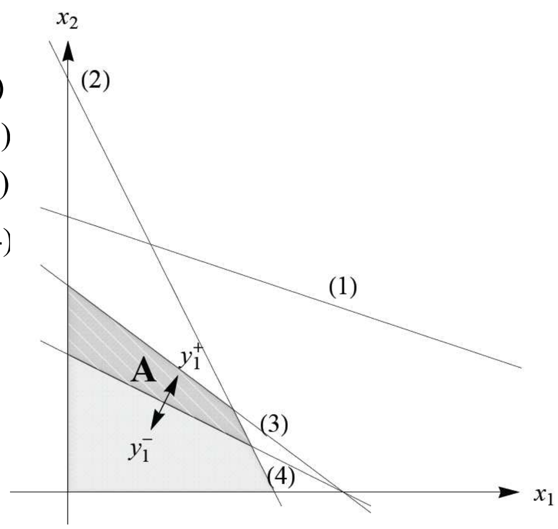
$$\text{s.a}\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 60 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 \le 60 & (2) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 60 & (3) \\ 15x_1 + 30x_2 - y_1^+ + y_1^- = 300 & (4) \\ x_1 + 3x_2 - (4x_1 + 2x_2) - y_2^+ + y_2^- = 0 & (5) \\ 3x_1 + 4x_2 - 2(x_1 + 3x_2) - y_3^+ + y_3^- = 0 & (6) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_i^- \ge 0, \quad y_i^+ \ge 0 \quad i = 1,\ 2, 3 \end{cases}$$

El conjunto X de soluciones factibles del problema es:



$$P_1 \equiv \text{Min } (y_1^-)$$

$$\text{s.a}\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 60 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 \le 60 & (2) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 60 & (3) \\ 15x_1 + 30x_2 - y_1^+ + y_1^- = 300 & (4) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^- \ge 0, \quad y_1^+ \ge 0 \end{cases}$$

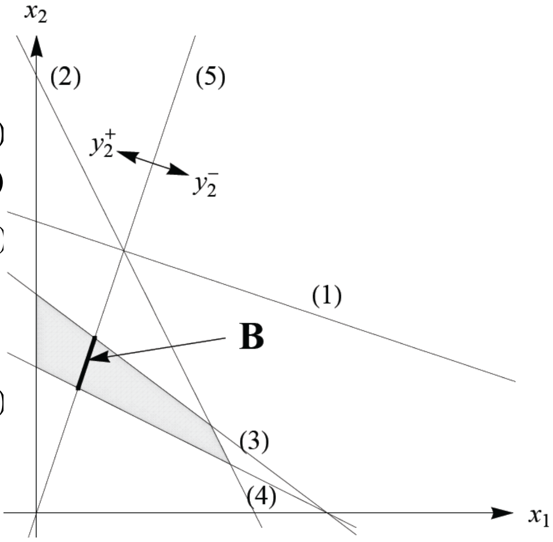


Soluciones óptimas: $\overline{x} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{Min } (y_2^+ + y_2^-)$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 60 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 \le 60 & (2) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 60 & (3) \\ 15x_1 + 30x_2 - y_1^+ + y_1^- = 300 & (4) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \ge 0 & \\ -3x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (5) \\ y_2^- \ge 0, \quad y_2^+ \ge 0 & \end{cases}$$



Soluciones óptimas: $\bar{\mathbf{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{Min } (y_3^+)$$

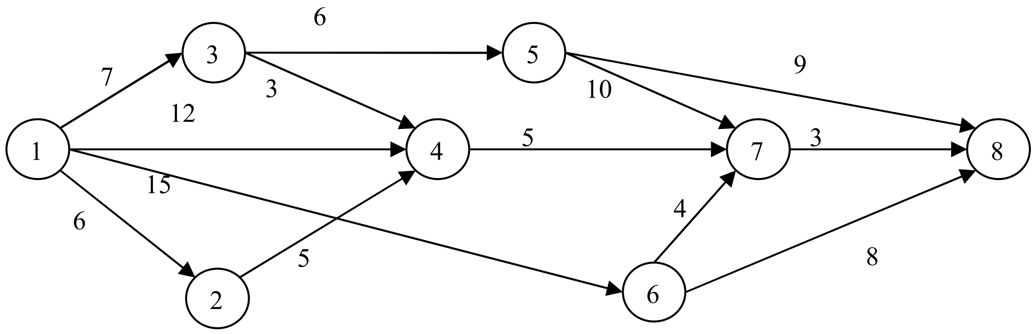
$$\text{s.a}\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 60 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 \le 60 & (2) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 60 & (3) \\ 15x_1 + 30x_2 - y_1^+ + y_1^- = 300 & (4) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \ge 0 & \\ -3x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (5) \\ y_2^- = 0, \quad y_2^+ = 0 & \\ x_1 - 2x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (6) \\ y_3^- \ge 0, \quad y_3^+ \ge 0 & \end{cases}$$

Soluciones óptimas: $\bar{\mathbf{x}} \in \overline{(2.857, 8.571)(4,12)}$

Valor óptimo: 0

La solución óptima (x_1, x_2) del problema relajado, es decir el número óptimo de unidades producida con los procesos 1 y 2, se encuentra en cualquier combinación lineal de las siguientes soluciones factibles: $(2.857, 8.571)$, $(4,12)$.

4. (10 puntos) La siguiente red representa un proyecto y los valores asignados a cada arco las duraciones de las actividades en él recogidas en días.



a) (2 puntos) Determinar la duración prevista del proyecto y el camino crítico.

b) (3 puntos) Calcular todos los tiempos (CMT, CMT*, FMT y FMT*) y el margen de las actividades (2,4), (4,7), (6,7) y (6,8).

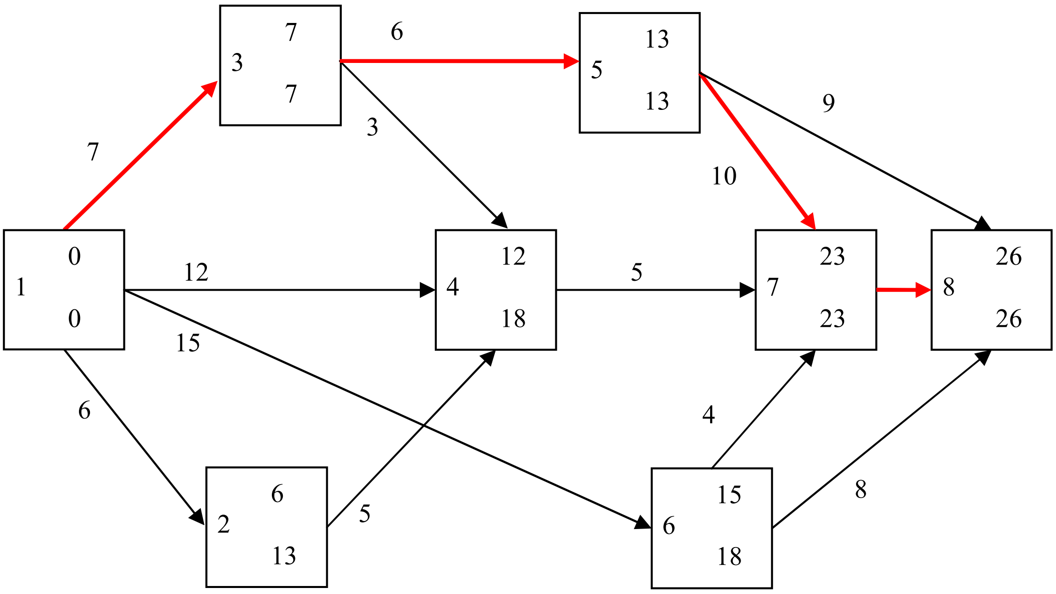
c) (5 puntos) Se ha de incorporar en el proyecto la nueva actividad (2,6) con duración $t(2,6)$.

   i) Si $t(2,6)=11$, ¿variará la duración prevista del proyecto?, ¿se modificará el margen de las actividades (6,7) y (6,8)?, ¿en cuánto?

   ii) ¿Para qué valores de $t(2,6)$ es la actividad (2,6) crítica? Calcular para estos valores, la duración prevista del proyecto y el(los) camino(s) crítico(s).

Solución:

a)



Camino crítico: (1,3,5,7,8)

Duración prevista del proyecto(d.p.p): 26 días.

b) La siguiente tabla recoge los tiempos (CMT y FMT*) de todas las actividades que conforman el proyecto:

(i,j)	t(i,j)	CMT(i,j)	FMT*(i,j)	M(i,j)
(1,2)	6	0	13	7
(1,3)	7	0	7	**0***
(1,4)	12	0	18	6
(1,6)	15	0	18	3
(2,4)	5	6	18	7
(3,4)	3	7	18	8
(3,5)	6	7	13	**0***
(4,7)	5	12	23	6
(5,7)	10	13	23	**0***
(5,8)	9	13	26	4
(6,7)	4	15	23	4
(6,8)	8	15	26	3
(7,8)	3	23	26	**0***

Como $FMT(i,j)=CMT(i,j)+t(i,j)$, $CMT^*(i,j)=FMT^*(i,j)-t(i,j)$, y $M(i,j)=FMT^*(i,j)-CMT(i,j)-t(i,j)$ se tiene que:

$FMT(2,4)=6+5=11$, $CMT^*(2,4)=18-5=13$, $M(2,4)=18-6-5=7$

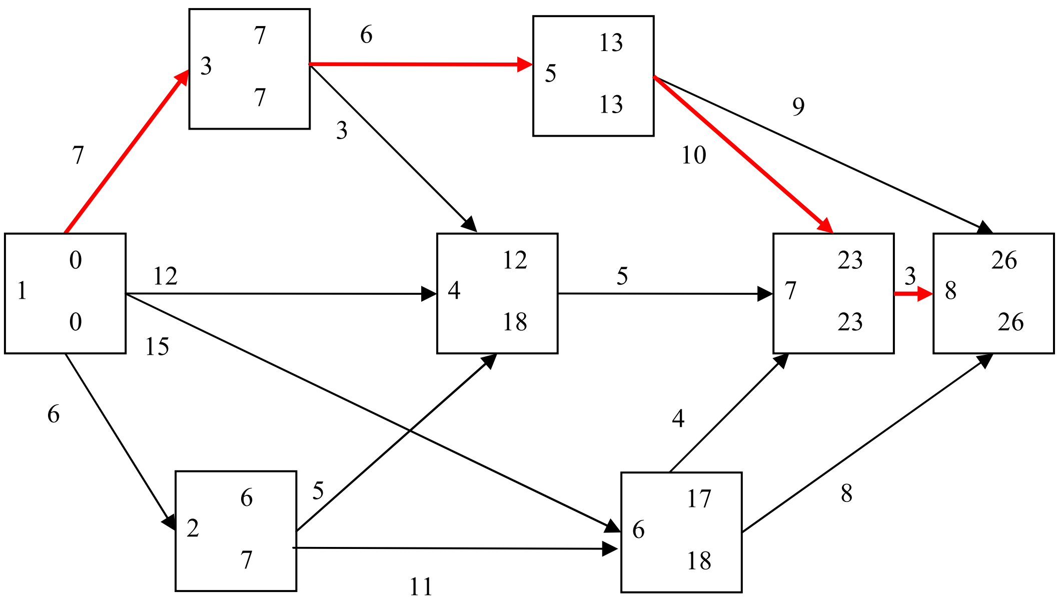
$FMT(4,7)=12+5=17$, $CMT^*(4,7)=23-5=18$, $M(4,7)=23-12-5=6$

$FMT(6,7)=15+4=19$, $CMT^*(6,7)=23-4=19$, $M(6,7)=23-15-4=4$

$FMT(6,8)=15+8=23$, $CMT^*(6,8)=26-8=18$, $M(6,8)=26-15-8=3$

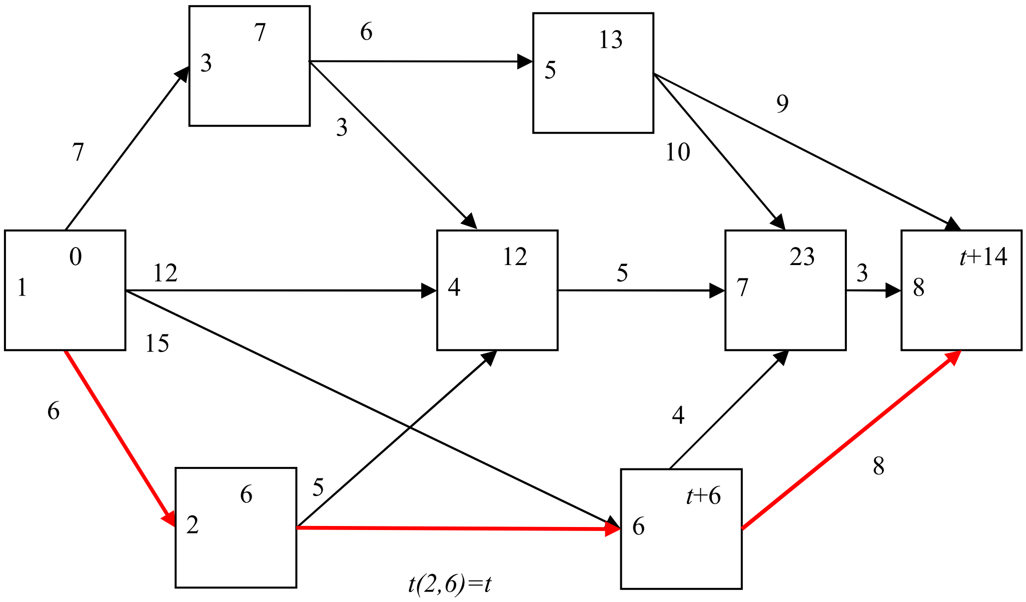
c)

i) Si incorporamos una nueva actividad (2,6) de duración $t(2,6)=11$, se tiene que:



$P(6)=17$ (en vez de 15), $Q(7)$ y $Q(8)$ mantienen su valor y por tanto los márgenes $M(6,7)=Q(7)-P(6)-t(6,7)$ y $M(6,8)=Q(8)-P(6)-t(6,8)$ disminuyen en 2 días.

ii) Si la actividad (2,6) con tiempo $t(2,6)=t$ es crítica se tiene que:



el camino crítico que pasa por el nodo 2 es (1,2,6,8) y la duración prevista del proyecto es $t+14$. (Se descarta el camino (1,2,6,7,8) cuya duración es $t+13$). Consecuentemente $P(6)=t+6$ y $P(8)=t+14$, con t satisfaciendo:

- ❖ $P(6)=\text{Max}\{t+6,15\}=t+6$
- ❖ $P(7)=\text{Max}\{t+10,17,23\}$
- ❖ $P(8)=\text{Max}\{t+14,22,P(7)+3\}=t+14$

Luego se deduce que $t \geq 12$.

Si $t=12$; los caminos críticos son (1,3,5,7,8) y (1,2,6,8).

Si $t>12$; el único camino crítico es (1,2,6,8).

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Junio 2007

1. Un empresario que fabrica tres artículos P1, P2, P3, desea encontrar la producción diaria que le permita maximizar sus beneficios. Los artículos son procesados en dos de las cuatro máquinas de las que dispone, bien en la A y B, o bien en la C y D, siendo el coste diario fijo de la puesta en marcha de cada una de estas máquinas 20, 25, 35 y 15 unidades monetarias respectivamente. El ingreso de estos artículos es de 5 unidades monetarias por unidad de P1, 5 unidades monetarias por unidad de P2, y 10 unidades monetarias por unidad de P3. Las horas que se necesitan por máquina y unidad de articulo son:

	Máquina A	**Máquina B**	**Máquina C**	**Máquina D**
P1	1	1	2	1
P2	1	1	1	2
P3	2	1	1	1

Siendo el número de horas disponibles en cada máquina 190, 210, 170 y 200 respectivamente.

a) (7 puntos) Modelizar el problema utilizando programación lineal entera para maximizar el beneficio total diario.

b) (3 puntos) Modelizar el problema utilizando la programación lineal entera si además se debe tener en cuenta que si se fabrica el artículo P1, se debe producir al menos 10 unidades y no más de 20 de P2 y al menos 5 de P1.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes

x_i = unidades de Pi , i=1, 2, 3

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{si se utilizan las máquinas A y B} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{si se utilizan las máquinas C y D} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left(5x_1+5x_2+10x_3-\left[\left(20+25\right)y_1+\left(35+15\right)y_2\right]\right)$$

$$\text{s.a}\quad\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\le 190+M\left(1-y_1\right)\\ x_1+x_2+x_3\le 210+M\left(1-y_1\right)\\ 2x_1+x_2+x_3\le 170+M\left(1-y_2\right)\\ x_1+2x_2+x_3\le 200+M\left(1-y_2\right)\\ y_1+y_2=1\\ x_i\ge 0 \text{ y enteras } i=1,2,3\\ y_1=1,0\\ y_2=1,0 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos la variable de decisión siguiente

$$z=\begin{cases} 1 & \text{si se fabrica } P_1\\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En la modelización anterior deberíamos añadir las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} &10z\le x_2\le 20+M(1-z)\\ &5z\le\ x_1\le Mz\\ &z=0,1 \end{aligned}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. Una agencia de viajes está planificando un paquete de vacaciones a un destino turístico C. Los aeropuertos de salida son dos: A1 y A2. No hay vuelos directos. Posibles aeropuertos en donde se pueden hacer conexiones son B1, B2, B3, B4, y B5. Las plazas en clase turista disponibles en vuelos entre aeropuertos en los que hay tiempo suficiente para hacer las conexiones se recogen en la siguiente tabla:

	B1	B2	B3	B4	B5	C
A1	45	40	30	--	--	--
A2	--	--	30	--	--	--
B1	--	--	--	20	30	--
B2	--	--	--	25	--	--
B3	--	--	--	--	35	20
B4	--	--	--	--	--	40
B5	--	--	--	--	--	65

a) (1 punto) Construir una red asociada al problema de planificar cómo enviar los turistas a C.

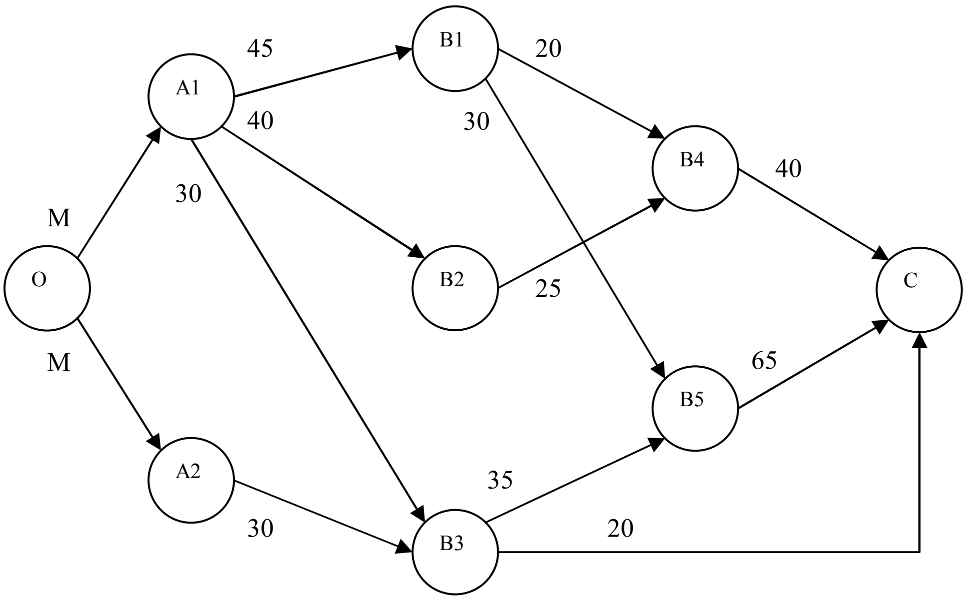
b) (9 puntos) La siguiente tabla nos indica una planificación para enviar turistas al destino C. ¿Cuántos turistas viajarían al destino C?

	B1	B2	B3	B4	B5	C
A1	45	20	25	--	--	--
A2	--	--	30	--	--	--
B1	--	--	--	20	25	--
B2	--	--	--	20	--	--
B3	--	--	--	--	35	20
B4	--	--	--	--	--	40
B5	--	--	--	--	--	60

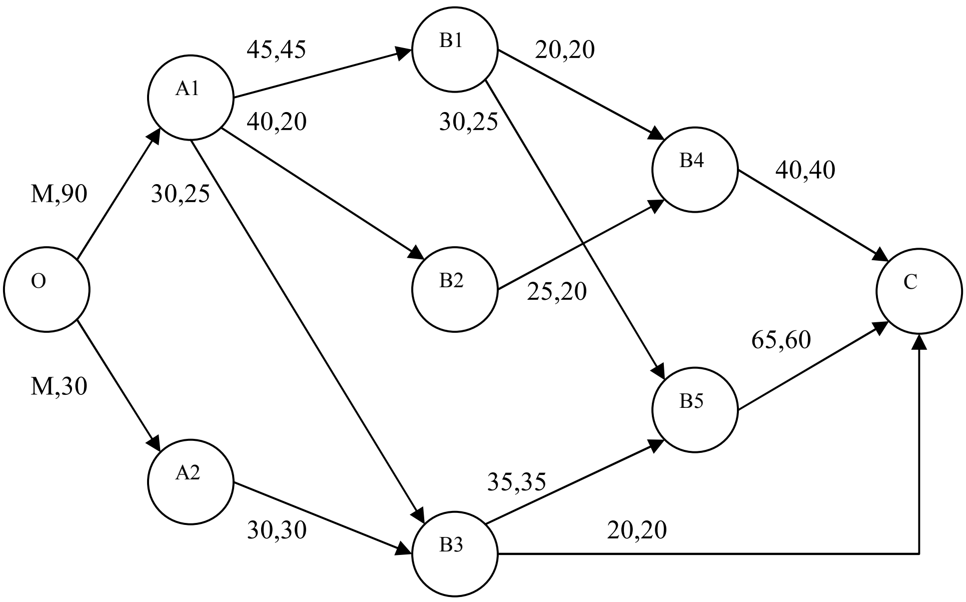
¿Cuántos turistas más se pueden enviar?

Solución:

a) Problema de flujo máximo cuya red asociada es:



b) La red que representa esta planificación es:

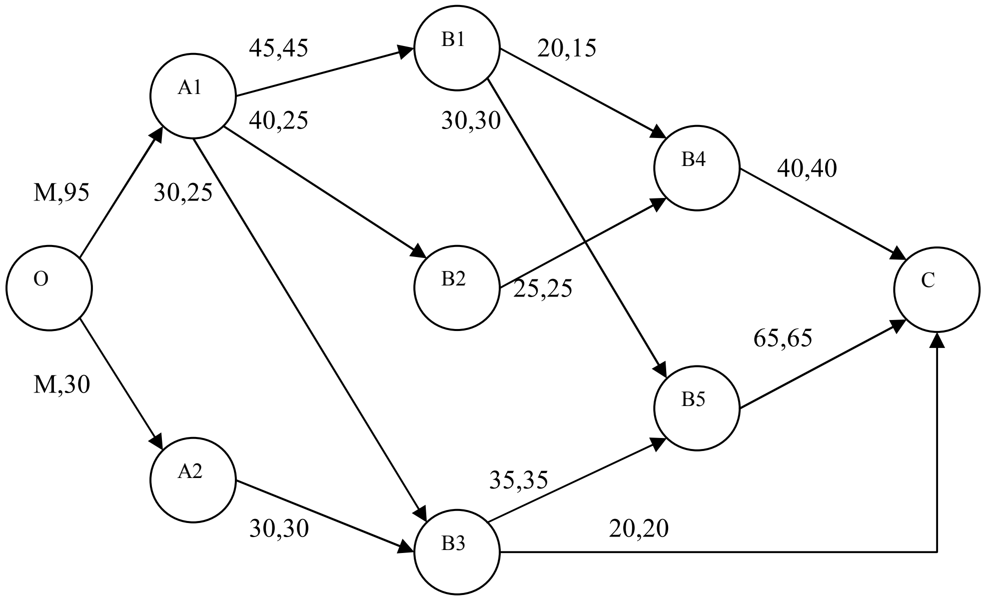


Con esta planificación se pueden enviar hasta 120 turistas desde el origen hasta el destino C ($V_f = 120$).

Una cadena de crecimiento (no saturada) asociada a este flujo es (O, A1, B2, B4, B1, B5, C), dado que sus arcos directos no están saturados y su arco inverso no tiene flujo nulo. El incremento de flujo que permite esta cadena es:

$\Delta_f(\mathrm{O,A1,B2,B4,B1,B5,C}) = \min\{\mathrm{M}, 40-20, 25-20, 20, 30-25, 65-60\} = 5$

Saturamos la cadena añadiendo esta cantidad a los arcos directos y restándosela a los inversos. El resultado es el siguiente flujo en el que todas las cadenas de origen a destino están saturadas, por tanto el flujo que atraviesa la red es máximo y de valor $V_f = 125$ turistas.



3. El Director de personal de una empresa quiere repartir las vacaciones de verano de las tres personas que componen su departamento. Con el fin de realizar la asignación lo mejor posible ha decidido confeccionar un listado de preferencias para los meses de Junio, Julio, Agosto y Septiembre, como recoge la siguiente tabla:

	Junio	**Julio**	**Agosto**	**Septiembre**
P1	5	4	9	--
P2	--	3	6	7
P3	7	5	5	6

Este año el Director de Personal ha decidido traer a su departamento una cuarta persona de otro departamento para los meses estivales, con el fin de cubrir las necesidades mínimas de su departamento.

a) (7 puntos) Calcular la asignación que optimice el nivel de preferencias, si las preferencias de la cuarta persona fuesen las recogidas en la siguiente tabla:

	Junio	**Julio**	**Agosto**
P4	6	--	9

Teniendo en cuenta que las cuatro personas han de disfrutar sus vacaciones en los meses de Junio, Julio, Agosto (cada uno un mes completo) y que en cada uno de estos tres meses debe haber al menos una persona de vacaciones.

b) (3 puntos) Habiendo encontrado otra cuarta persona, P*4, cuya única preferencia es trabajar en el departamento de forma continua tres de los cuatro meses, al Director de Personal no le parece mala idea incluir en su planificación también el mes de Septiembre. Plantear la tabla a la que se le aplicaría el Método Húngaro, para calcular la asignación que optimice el nivel de preferencias de las cuatro personas, (P1, P2, P3, P*4), si las cuatro han de disfrutar sus vacaciones en los cuatro meses y cada una en un mes diferente.

<u>Solución:</u>

a) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	Junio	Junio	Julio	Julio	Agosto	Agosto	
P1	-5	-5	-4	-4	-9	-9	←+9
P2	M	M	-3	-3	-6	-6	←+6
P3	-7	-7	-5	-5	-5	-5	←+7
P4	-6	-6	M	M	-9	-9	←+9
F_1	M	0	M	0	M	0	
F_2	M	0	M	0	M	0	

Con M positivo suficientemente grande.

	Junio	Junio	Julio	Julio	Agosto	Agosto
P1	4	4	5	5	0	0
P2	M	M	3	3	0	0
P3	0	0	2	2	2	2
P4	3	3	M	M	0	0
F_1	M	0	M	0	M	0
F_2	M	0	M	0	M	0
			↑ -2			

Con M positivo suficientemente grande.

	Junio	Junio	Julio	Julio	Agosto	Agosto	
P1	4	4	3	5	0	$\cancel{0}$	←-1
P2	M	M	$\boxed{1}$	3	$\cancel{0}$	0	←-1
P3	0	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	2	2	2	
P4	3	3	M	M	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	←-1
F_1	M	0	M	0	M	$\cancel{0}$	
F_2	M	0	M	$\cancel{0}$	M	$\cancel{0}$	
					↑+1	↑+1	

Con M positivo suficientemente grande.

	Junio	Junio	Julio	Julio	Agosto	Agosto
P1	3	3	2	4	$\cancel{0}$	0
P2	M	M	0	2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
P3	0	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	2	3	3
P4	2	2	M	M	0	$\cancel{0}$
F_1	M	$\cancel{0}$	M	0	M	1
F_2	M	0	M	$\cancel{0}$	M	1

Con M positivo suficientemente grande.

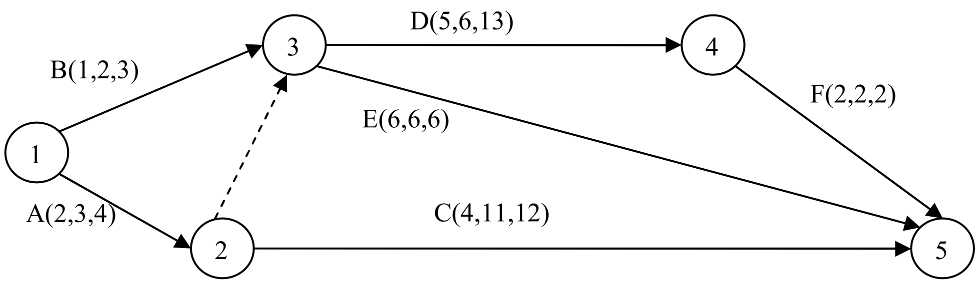
Asignación óptima: P1 → Agosto, P2 → Julio, P3→ Junio, P4 → Agosto.

b) Se aplica el Método Húngaro a la tabla:

	Junio	Julio	Agosto	Septiembre
P1	-5	-4	-9	M
P2	M	-3	-6	-7
P3	-7	-5	-5	-6
P*4	0	M	M	0

Con M positivo suficientemente grande.

4. En el siguiente grafo están representadas las actividades de un proyecto con los tiempos optimista, modal y pesimista en días:



a) (5 puntos) Determinar la duración media estimada del proyecto, varianza de la duración del proyecto y actividades críticas. Elaborar la tabla de actividades.

b) Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

   i) (1 punto) ¿En cuántos días se puede reducir la duración media de la actividad C para que la duración media estimada del proyecto se reduzca en la misma cantidad?

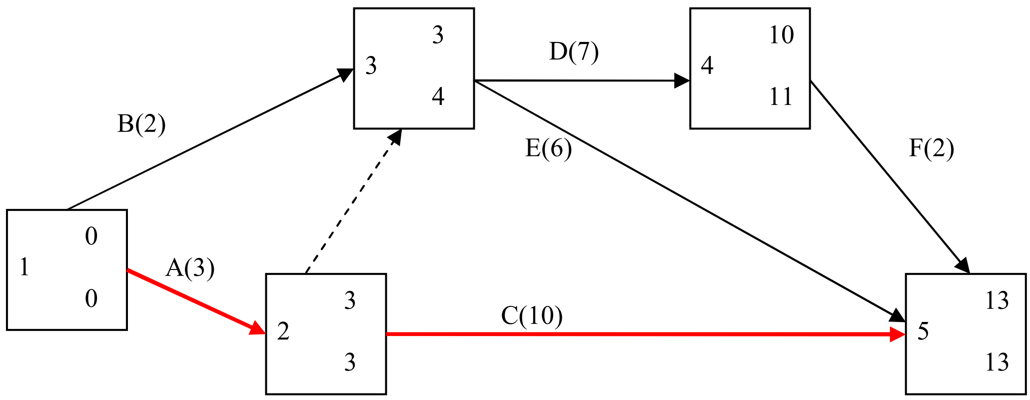
   ii) (2 puntos) Si se añade al proyecto inicial una nueva actividad G cuyo precedente inmediato es E, ¿cuántos días como mucho debe durar (en media) para que no varíe la duración media estimada del proyecto calculada en el apartado a?

   iii) (2 puntos) Si la actividad nueva G tiene como precedentes inmediatos a E y a D, ¿cuántos días como mucho debe durar (en media) para que no varíe la duración media estimada del proyecto calculada en el apartado a)? Construir una red asociada a este nuevo proyecto.

__**Solución:**__

a) Bajo los supuestos del PERT se estima la duración media de cada actividad como $\overline{t}(i,j)=\dfrac{t_o(i,j)+4t_m(i,j)+t_p(i,j)}{6}$ donde t_o representa la duración optimista, t_m la modal y t_p la pesimista. Y la varianza de la duración de cada actividad se estima como $\sigma^2_{(i,j)}=\left(\dfrac{t_p(i,j)-t_o(i,j)}{6}\right)^2$.

Un grafo que representa este proyecto es el siguiente, donde el valor de cada arco es la duración media estimada de cada actividad



Duración media estimada del proyecto: 13 días

Camino Crítico: (1,2,5)

Varianza estimada de la duración del proyecto:

$$\sigma_T^2 = \sigma_{t(A)}^2 + \sigma_{t(C)}^2 = \left(\frac{4-2}{6}\right)^2 + \left(\frac{12-4}{6}\right)^2 = \frac{17}{9}$$

Tabla de actividades:

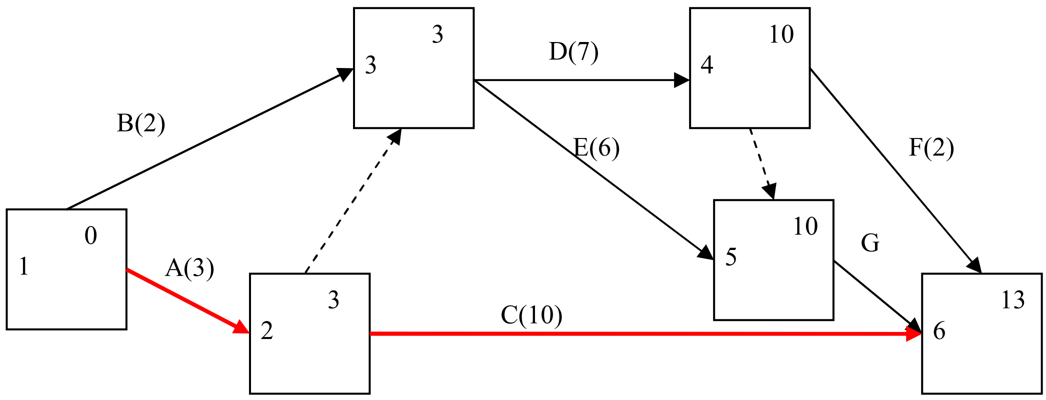
(i,j)	$\overline{t}(i,j)$	**CMT(i,j)**	**FMT*(i,j)**	**M(i,j)**
A (1,2)	3	0	3	**0***
B (1,3)	2	0	4	2
Fict (2,3)	0	3	4	1
C (2,5)	10	3	13	**0***
D (3,4)	7	3	11	1
E (3,5)	6	3	13	4
F (4,5)	2	10	13	1

b)

i) Se puede reducir C hasta 1 día. A partir de aquí el proyecto durará, en media, 12 días ya que aparece un nuevo camino crítico

ii) Como mucho debe durar en media 4 días, ya que este es el margen de la actividad E.

iii) Como mucho 3 días, ya que su comienzo más temprano es el día 10 (un día más tarde que en el apartado ii)) y queremos que su final más tardío sea el día 13



INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Septiembre 2007

1. Dado el siguiente problema de programación lineal entera:

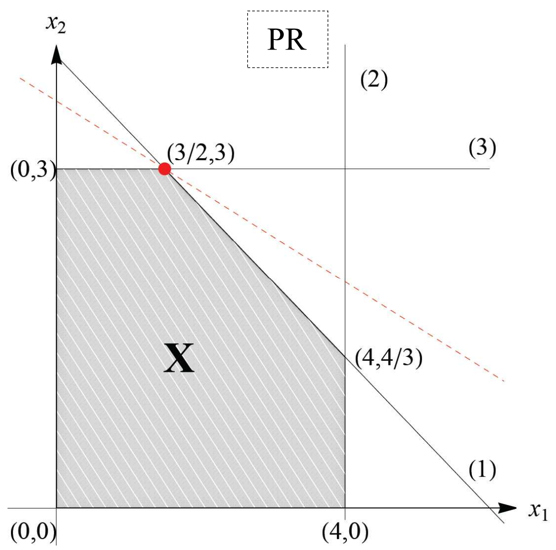
$$\text{Max}\,(2x_1 + 5x_2)$$
$$\text{s.a}\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 & (1) \\ x_1 \le 4 & (2) \\ x_2 \le 3 & (3) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \text{ y enteras} \end{cases}$$

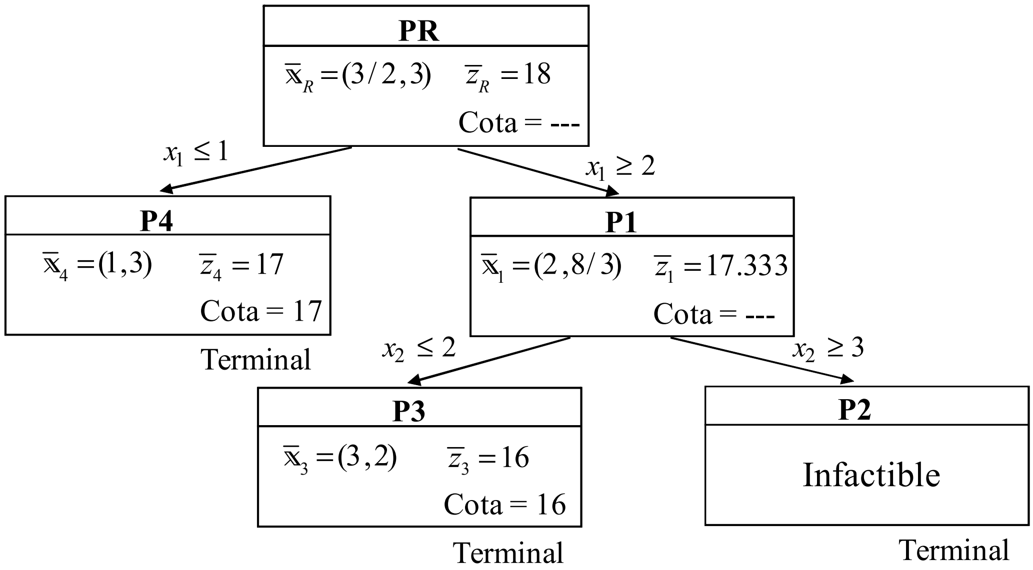
   a) (7 puntos) Resolver el problema mediante el método de Ramificación y Acotación.

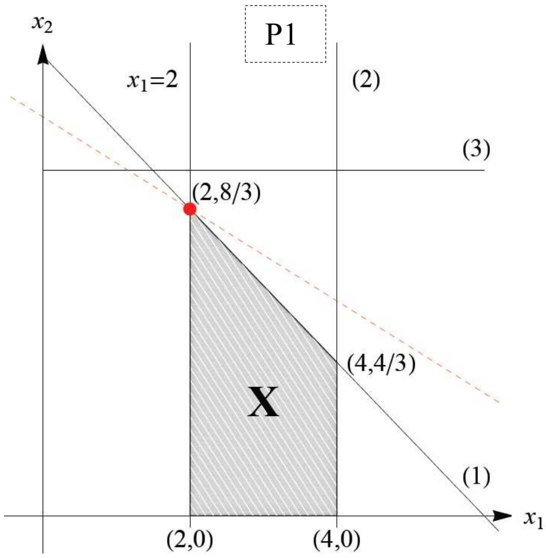
   b) (3 puntos) Calcular cuál es la nueva solución al problema si el coeficiente de la variable x_1 de la función objetivo pasa de ser 2 a ser 10/3.

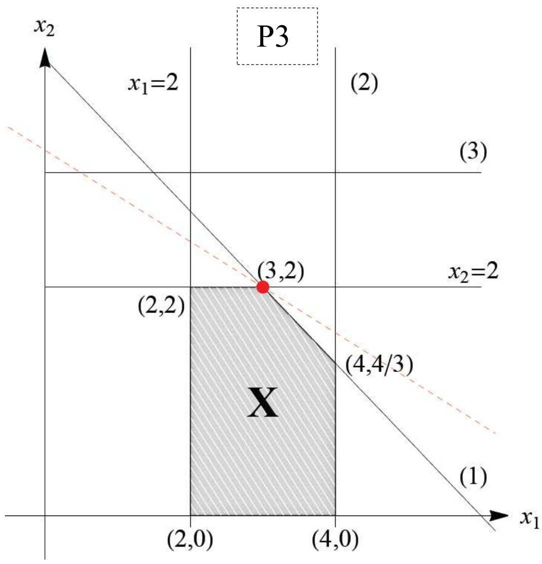
Solución:

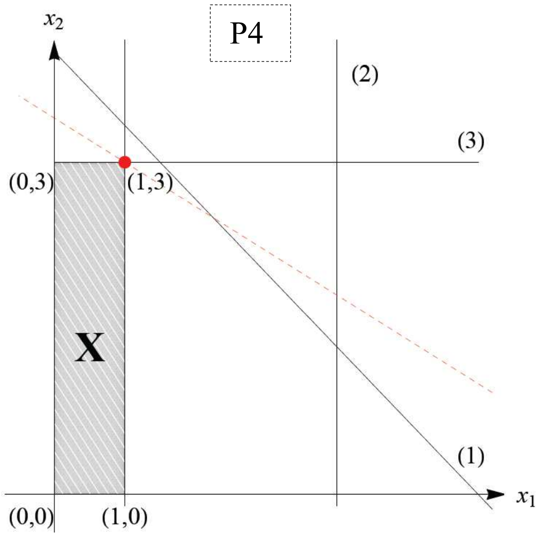
a) Resolución del problema relajado:




PR
$\bar{x}_R = (3/2, 3)$ $\bar{z}_R = 18$
Cota = ---
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
P4
$\bar{x}_4 = (1, 3)$ $\bar{z}_4 = 17$
Cota = 17
Terminal
P1
$\bar{x}_1 = (2, 8/3)$ $\bar{z}_1 = 17.333$
Cota = ---
$x_2 \leq 2$
$x_2 \geq 3$
P3
$\bar{x}_3 = (3, 2)$ $\bar{z}_3 = 16$
Cota = 16
Terminal
P2
Infactible
Terminal


P1
x_2
x_1=2
(2)
(3)
(2,8/3)
(4,4/3)
X
(1)
x_1
(2,0)
(4,0)


P3
x_2
x_1=2
(2)
(3)
(3,2)
x_2=2
(2,2)
(4,4/3)
X
(1)
x_1
(2,0)
(4,0)



Solución óptima: $\overline{\mathrm{x}} = (1,3)$

Valor óptimo: 17

2. Una empresa de automoción produce un artículo dirigido al mercado de "primer equipo", cuyo beneficio unitario es de K unidades monetarias. Dicha empresa se está planteando introducir su artículo en el mercado de "piezas de recambio", ya que el beneficio unitario de su producto se duplica en dicho mercado. La Dirección de la Empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción que asciende a un máximo de 800 piezas diarias.

   a) (5 puntos) Para un primer acercamiento a dicho mercado y por temor a perder la clientela actual, la Gerencia de la Empresa ha decidido destinar diariamente a "primer equipo" al menos el 75% de la producción total y al menos 160 unidades al mercado "piezas de recambio".

      Modelizar y determinar, resolviendo el problema relajado, la cantidad diaria que se debería destinar a cada uno de los dos mercados con los objetivos de maximizar los beneficios y destinar la mayor cantidad posible de artículos al mercado de "primer equipo".

   b) (5 puntos) Un posible cliente del mercado de "piezas de recambio" ha remitido a la Dirección de la Empresa un pedido de 180 unidades diarias de modo que la

Gerencia de la Empresa ha decidido replantearse la situación con las siguientes metas y objetivos, con el siguiente orden de prioridades:

- Prioridad 1. La cantidad de artículos destinados diariamente a "primer equipo" no sea inferior al 75% de la producción total.
- Prioridad 2. La cantidad de artículos destinados diariamente a "piezas de recambio" permita satisfacer las necesidades del nuevo cliente.
- Prioridad 3. La cantidad de artículos destinados diariamente a "piezas de recambio" no sea superior al 20% de la producción total.
- Prioridad 4. Máximo Beneficio.

Calcular, resolviendo el problema relajado correspondiente, la cantidad diaria que se debería destinar a cada uno de los dos mercados y realizar un análisis detallado de la solución obtenida.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = unidades diarias destinadas a "primer equipo"

x_2 = unidades diarias destinadas a "piezas de reemplazamiento"

La modelización queda como sigue:

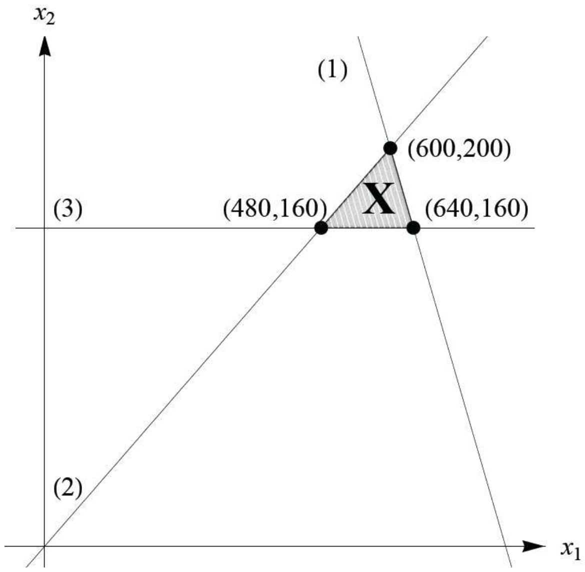
$$\text{Max} \quad \left(Kx_1 + 2Kx_2, x_1\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1 \geq 0.75\left(x_1 + x_2\right) \\ x_2 \geq 160 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{cases}$$

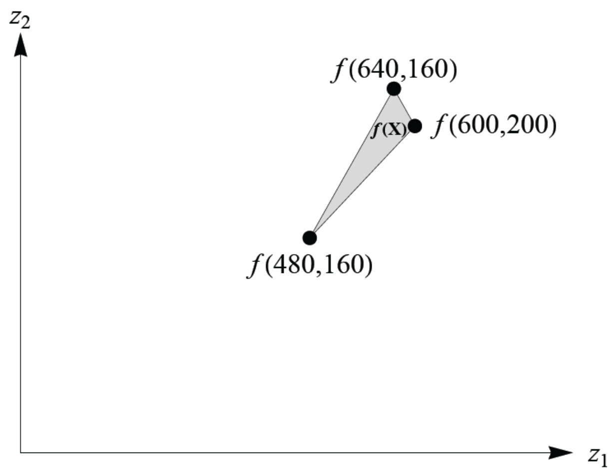
Resolveremos el problema relajado:

$$\text{Max}\left(Kx_1 + 2Kx_2, x_1\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 & (1) \\ x_1 \geq 0.75\left(x_1 + x_2\right) & (2) \\ x_2 \geq 160 & (3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Vértices X	Vértices $f(X)$
(480,160)	$(800K,480)$
(600,200)	$(1000K,600)$
(640,160)	$(960K,640)$



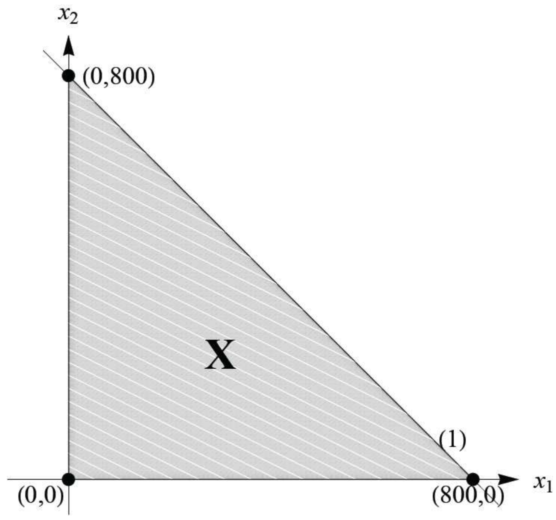
Soluciones eficientes: $\overline{(600{,}200)(640{,}160)}$

b) La modelización del problema relajado queda como sigue:

$$\text{Min } \; L(y_1^-, y_2^-, y_3^+, -Kx_1 - 2Kx_2)$$

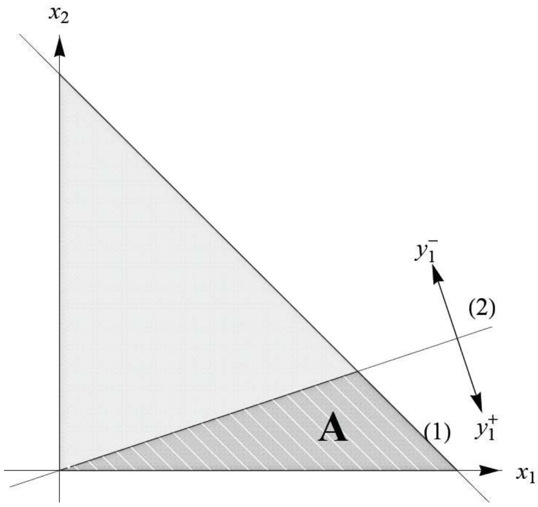
$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 800 & (1) \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (2) \\ x_2 - y_2^+ + y_2^- = 180 & (3) \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (4) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_i^- \ge 0, \;\; y_i^+ \ge 0 \quad i = 1,2,3 & \end{cases}$$

El conjunto X de soluciones factibles del problema es:



$$P_1 \equiv \text{Min } (y_1^-)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 & (1) \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ \geq 0 \end{cases}$$

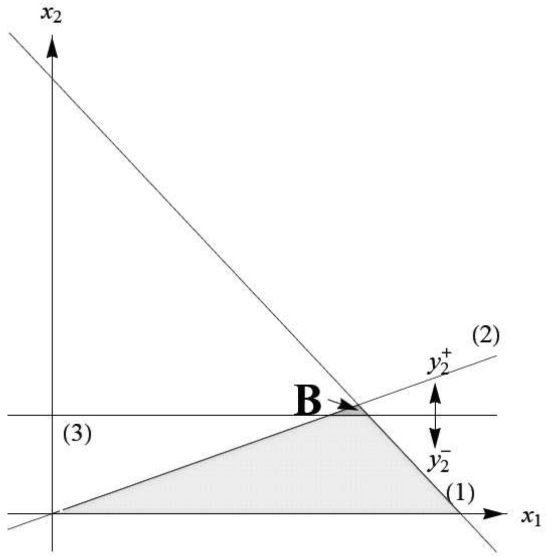


Soluciones óptimas: $\overline{\mathbf{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{Min } (y_2^-)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 & (1) \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 \\ x_2 - y_2^+ + y_2^- = 180 & (3) \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ \geq 0 \end{cases}$$

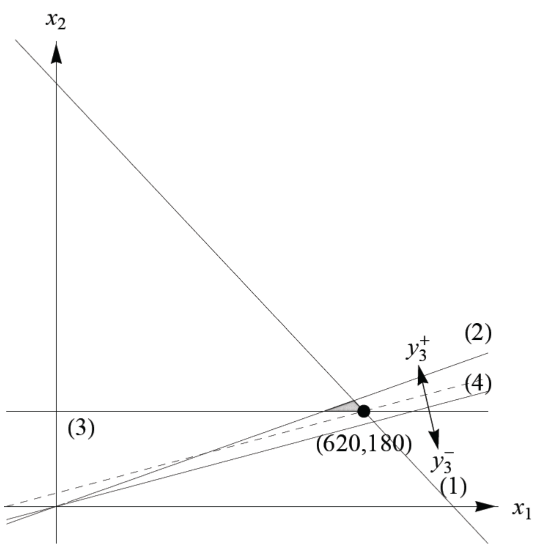


Soluciones óptimas: $\overline{\mathbf{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{Min } (y_3^+)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 800 & (1) \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \ge 0 & \\ x_2 - y_2^+ + y_2^- = 180 & (3) \\ y_2^- = 0, \quad y_2^+ \ge 0 & \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (4) \\ y_3^- \ge 0, \quad y_3^+ \ge 0 & \end{cases}$$

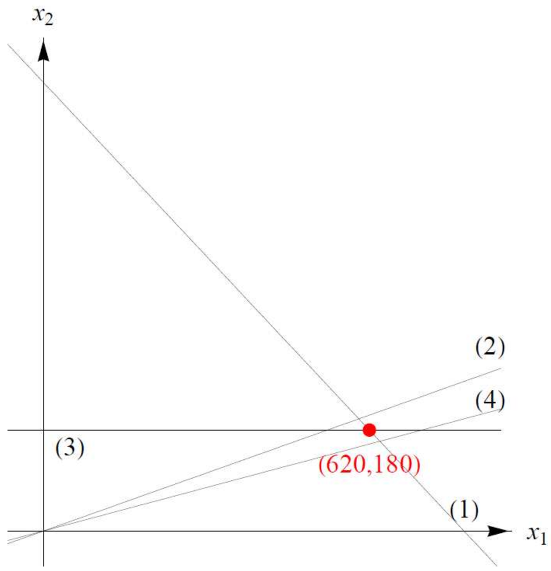


Solución óptima: (620,180)

Valor óptimo: 20

$$
\text{P}_4 \equiv \text{Min }(-Kx_1 - 2Kx_2)
$$

$$
\text{s.a}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 & (1) \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 & \\ x_2 - y_2^+ + y_2^- = 180 & (3) \\ y_2^- = 0, \quad y_2^+ \geq 0 & \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (4) \\ y_3^- \geq 0, \quad y_3^+ = 20 & \end{cases}
$$



Solución óptima: (620,180)

Valor óptimo: -980K

La solución óptima consiste en destinar 620 unidades diarias a "primer equipo" y 180 a "piezas de recambio". Los artículos destinados diariamente al "primer equipo" son el 77.5% del total producidos $(\overline{y}_1^+ = 20, \;\; \overline{y}_1^- = 0)$. Se satisfacen las necesidades del nuevo cliente, 180 unidades diarias de "piezas de recambio" $(\overline{y}_2^+ = 0, \;\; \overline{y}_2^- = 0)$. La cantidad de artículos destinados diariamente a " piezas de recambio" es el 22.5% de la producción total, luego la meta asociada a la 3ª prioridad no se cumple $(\overline{y}_3^+ = 20, \;\; \overline{y}_3^- = 0)$. El beneficio máximo es de 980K unidades monetarias.

3. Un ayuntamiento quiere diseñar el modo de llevar el agua desde el depósito municipal D a 7 casas rurales, no necesariamente de forma directa, con el menor coste posible. Las posibles conducciones entre los depósitos y las casa con sus costes correspondientes, en unidades monetarias, vienen recogidas en la siguiente tabla:

	D	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**
D	--	10	12	14	--	--	--	--
C1		--	--	--	3	--	--	--
C2			--	--	2	4	--	--
C3				--	--	3	--	--
C4					--	3	5	6
C5						--	7	5
C6							--	4
C7								--

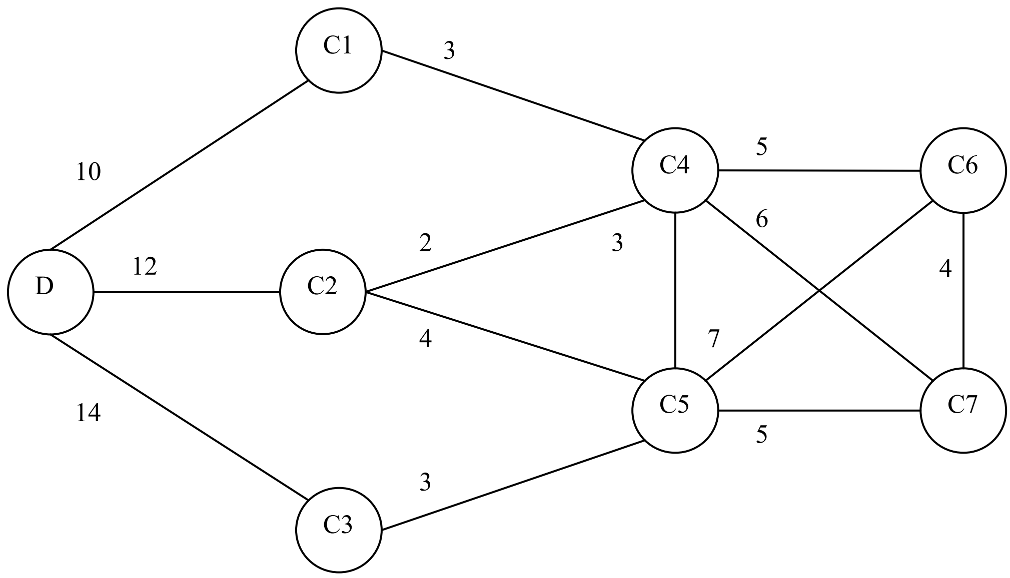
Por ejemplo, realizar una conducción entre la casa 2 y la casa 5 tiene un coste de 4 unidades monetarias.

a) (9 puntos) Calcular todas las formas posibles de establecer las conexiones para que el coste total sea mínimo.

b) (1 punto) Si en lugar de 7 casas tenemos 8 casas, ¿cuántas conducciones se necesitarían? Razonar la respuesta.

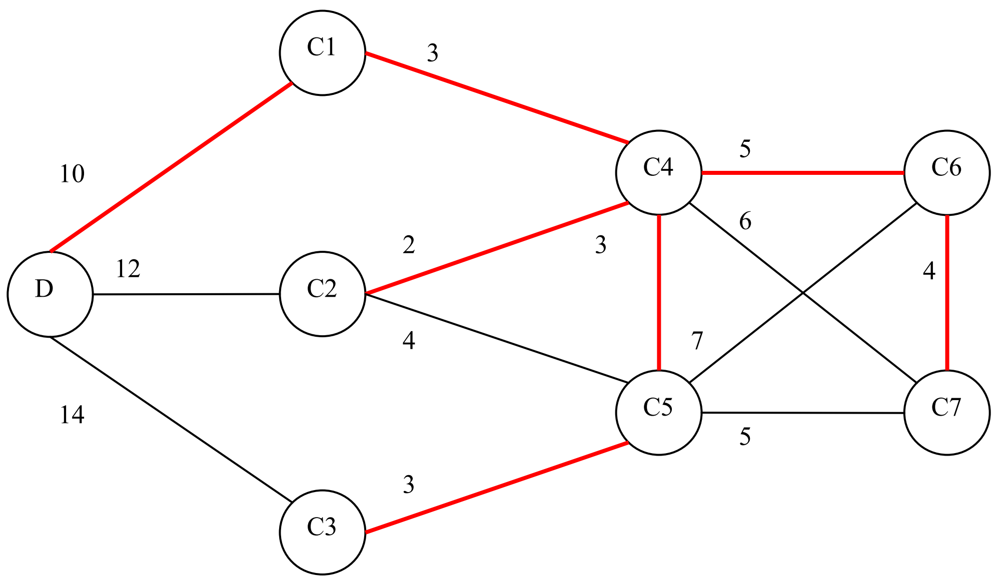
Solución:

a) Problema del árbol de expansión minimal cuya red asociada es:

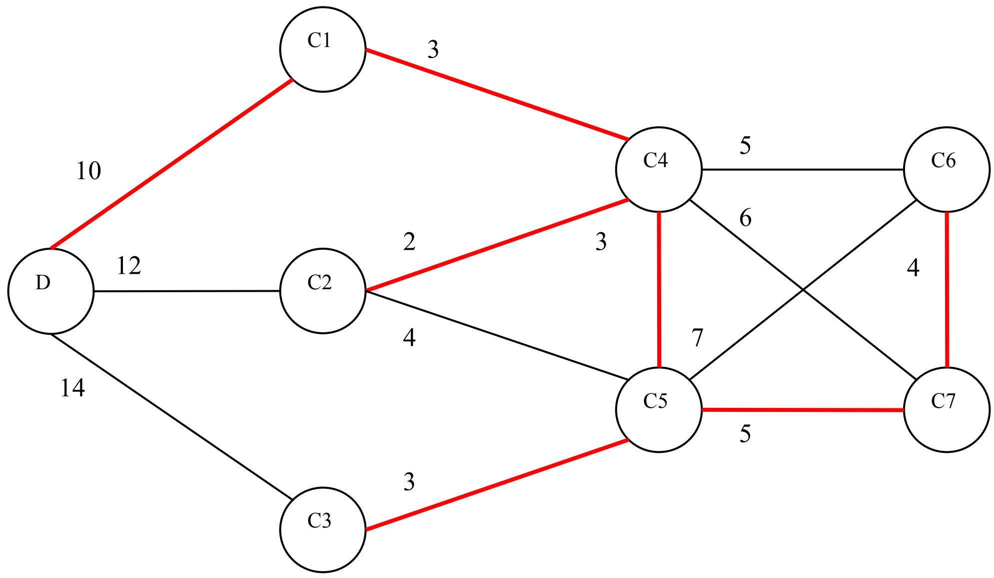


Ordenamos en orden creciente las aristas según el coste y aplicamos el algoritmo de Kruskal. Se tienen dos soluciones óptimas cuyo coste total mínimo es de 30 unidades monetarias.

Solución óptima A:



Solución óptima B:



b) Se sabe que, dado un subgrafo G' de un grafo no dirigido G de n nodos, si G' es un árbol de expansión entonces G' tiene n-1 aristas.

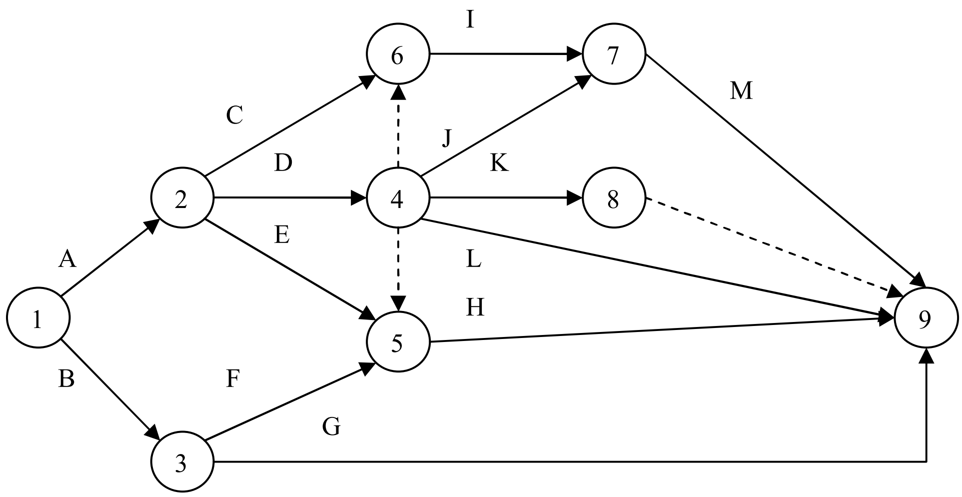
Vemos que en el apartado anterior las soluciones óptimas tienen 7 conexiones, una menos que el número de nodos. Si en lugar de 7 casas tenemos 8, entonces todas las soluciones óptimas tienen 8 conexiones.

4. (4 puntos) En la siguiente tabla se encuentran representadas las diferentes actividades que componen un proyecto y las relaciones de precedencia entre las mismas.

Actividades	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
Precedentes Inmediatas	-	-	A	A	A	B	B	D, E, F	C, D	D	D	D	I, J

Elaborar una red que represente a este proyecto.

Solución:



5. (6 puntos) Sean tres actividades que vienen representadas en una red por los arcos (3, 8), (4, 8) y (4, 9). Sabiendo que:
   - las tres tienen una duración de dos semanas,
   - la actividad (4,8) debe estar finalizada al de 20 semanas de iniciado el proyecto si se desea cumplir con la duración prevista del proyecto,
   - la actividad (4,8) puede retrasarse hasta 3 semanas sin que se retrase la duración prevista del proyecto.

   Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

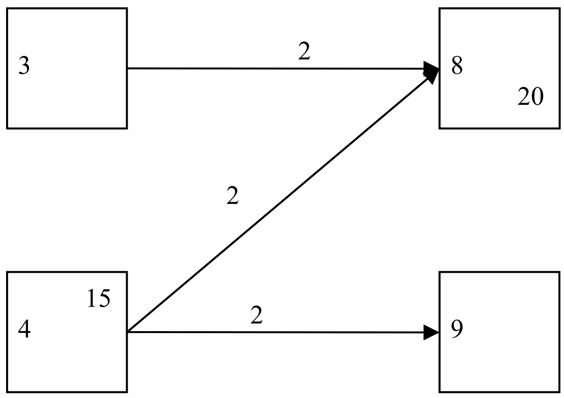
   a) ¿Cuál es el comienzo y el final más temprano de la actividad (4,9)?

   b) ¿Cuál es el comienzo y el final más tardío de la (3,8)?

Solución:

Se sabe que:

- $t(3,8)=t(4,8)=t(4,9)=2$
- $FMT^*(4,8)=Q(8)=20$
- $M(4,8)=Q(8)-P(4)-t(4,8)=20-P(4)-2=3 \quad \Rightarrow \quad P(4)=15$



a) $CMT(4,9) = P(4) = 15$ y $FMT(4,9) = CMT(4,9) + t(4,9) = P(4) + 2 = 17.$

b) $FMT^*(3,8) = Q(8) = 20$ y $CMT^*(3,8) = FMT^*(3,8) - t(3,8) = 20 - 2 = 18.$

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Extraordinario Febrero 2008

1. Tres servicios médicos constan de 10, 6 y 4 médicos respectivamente; cada médico atiende como máximo a 10 pacientes. El coste de cada paciente es en el Servicio1 de 10 €/día, en el Servicio2 de 20 €/día y en el Servicio3 de 25 €/día, y el presupuesto total diario de los tres servicios de 2400 €. Además, entre los dos primeros servicios deben tratar como mínimo el doble de pacientes que el Servicio3.

   Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   a) (6 puntos) Plantear el problema, como un problema de programación lineal entera, para encontrar cuántos pacientes deben ser atendidos diariamente en cada servicio, con el objetivo de maximizar el número total de personas atendidas.

   b) (4 puntos) Se ha aumentado el presupuesto diario a 3200 €. El hospital tiene que decidir entre abrir un cuarto servicio médico con 5 nuevos médicos y con un coste por paciente de 22 €/día, o aumentar en dos médicos cada uno de los servicios ya existentes. Plantear el problema, como un problema de programación lineal entera, para encontrar cuántos pacientes deben ser atendidos diariamente en cada servicio, con el objetivo de maximizar el número total de personas atendidas.

<u>Solución:</u>

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

   x_i = número de pacientes diarios atendidos por el Servicio i , i=1,2,3

   La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } \left(x_1 + x_2 + x_3\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 \leq 100 \\ x_2 \leq 60 \\ x_3 \leq 40 \\ 10x_1 + 20x_2 + 25x_3 \leq 2400 \\ x_1 + x_2 \geq 2x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ y enteras} \end{cases}$$

b) Definimos las variables de decisión siguientes

$x_4 =$ número de pacientes diarios atendidos por el Servicio 4,

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si se abre el Servicio 4} \\ 0 & \text{no se abre el Servicio 4} \end{cases}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } \left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 \leq 100 + 20(1 - z) \\ x_2 \leq 60 + 20(1 - z) \\ x_3 \leq 40 + 20(1 - z) \\ x_4 \leq 50z \\ 10x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 22x_4 \leq 3200 \\ x_1 + x_2 \geq 2x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \text{ y enteras} \\ z = 0, 1 \end{cases}$$

2. Una empresa desea cubrir un puesto de trabajo con personal eventual durante los próximos 4 meses. Para ello utiliza una empresa de trabajo temporal que cobra 200 euros por cada persona contratada. El primer mes, la empresa contrata una persona y a principios de los siguientes meses decide si contrata una nueva persona o sigue con la contratada anteriormente. Se conoce que el sueldo del primer mes trabajado es de 900 euros y la ganancia proporcionada a la empresa es de 2000. El segundo mes trabajado el empleado tendrá un sueldo de 1000 euros proporcionando una ganancia de 2100. Si el empleado trabaja tres meses o más tendrá un sueldo de 1100 el tercer mes y de 1200 el cuarto mes, proporcionando una ganancia de 2200 y 2300 para el tercer y cuarto mes, respectivamente.

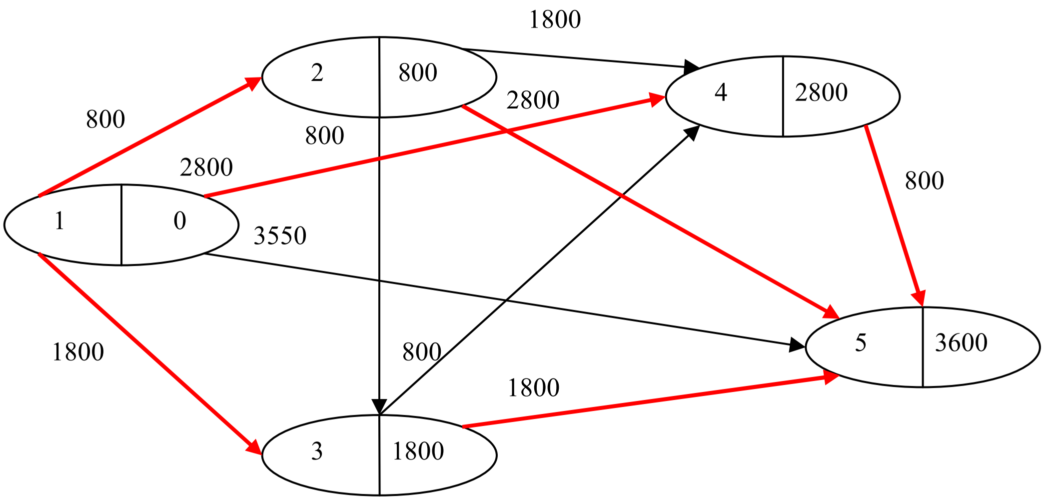
Además, se sabe que la empresa de trabajo temporal al finalizar el contrato de un trabajador que ha trabajado durante 1, 2, 3 ó 4 meses debe abonarle 100, 200, 300 ó 650 euros respectivamente.

a) (8 puntos) Calcular la política de contratación de trabajadores para los próximos 4 meses que proporcione un mayor beneficio a la empresa.

b) (2 puntos) Si la empresa deseara cubrir el puesto de trabajo durante los próximos 3 meses, ¿cuál sería la mejor política de contratación? ¿Y su beneficio máximo?

<u>Solución:</u>

a) Este es un problema de reemplazamiento de contratos para maximizar beneficios, cuya red asociada es:



Donde el valor de cada arco, $d(i,j)$, indica el beneficio de contratar un nuevo trabajador al comienzo del año *i* y mantenerlo hasta el comienzo del año *j*. Así:

$d(1,2) = 2000 - 900 - 100 - 200 = 800 = d(2,3) = d(3,4) = d(4,5)$

$d(1,3) = 2000 + 2100 - 900 - 1000 - 200 - 200 = 1800 = d(2,4) = d(3,5)$

$d(1,4) = 2000 + 2100 + 2200 - 900 - 1000 - 1100 - 300 - 200 = 2800 = d(2,5)$

$d(1,5) = 2000 + 2100 + 2200 + 2300 - 900 - 1000 - 1100 - 1200 - 650 - 200 = 3550$

Las políticas de contratación óptimas se corresponden con los caminos más largos del origen al destino. Aplicando el método de la ruta más larga se tiene que las políticas de contratación óptimas son:

(1,2,5) $\rightarrow$ Contratar un empleado durante un mes y después otro empleado durante tres meses.

(1,3,5) $\rightarrow$ Contratar un empleado durante dos meses y después otro empleado durante dos meses.

(1,4,5) $\rightarrow$ Contratar un empleado durante tres meses y después otro empleado durante un mes.

El beneficio máximo es de 3600 euros.

b) La política de contratación óptima es el camino:

(1,4) $\rightarrow$ Contratar un empleado durante los tres meses.

El beneficio máximo es de 2800 euros.

3. (10 puntos) Una fábrica de quesos produce tres tipos de quesos: queso curado, queso semicurado y queso fresco. Para ello se utilizan dos tipos de leche, leche de oveja y leche de cabra. La fábrica está dotada de dos tipos de máquinas. La máquina 1, utiliza en cada hora 70 litros de leche de oveja y 200 litros de leche de cabra para producir 9 kilogramos de queso curado, 2 kilogramos de queso semicurado y 5 kilogramos de queso fresco. Con la máquina 2, se obtienen cada hora 10, 5 y 4 kilogramos de cada queso respectivamente con un gasto de 100 litros de leche de oveja y 80 litros de leche de cabra.

Teniendo en cuenta los estudios de demanda de los tres productos la compañía estima que debe producir al día al menos 900 y 300 kilogramos de queso curado y semicurado, respectivamente, y no más de 800 kilogramos de queso fresco. Los beneficios por kilogramo producido de cada tipo de queso son de 4, 6, y 7 euros respectivamente.

La gerencia de la empresa se ha planteado las siguientes metas y objetivos con el siguiente orden de prioridades:

- Prioridad 1. La cantidad de leche utilizada para la producción de los quesos no supere 14000 litros diarios para la leche de oveja y 20000 litros diarios para la leche de cabra.

- Prioridad 2. La cantidad de leche de cabra no sea superior a la de oveja.
- Prioridad 3. Maximizar beneficios.

Modelizar y resolver el problema para calcular el número de horas al día que deben operar las máquinas.

<u>Solución:</u>

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = horas al día que debe operar la máquina 1

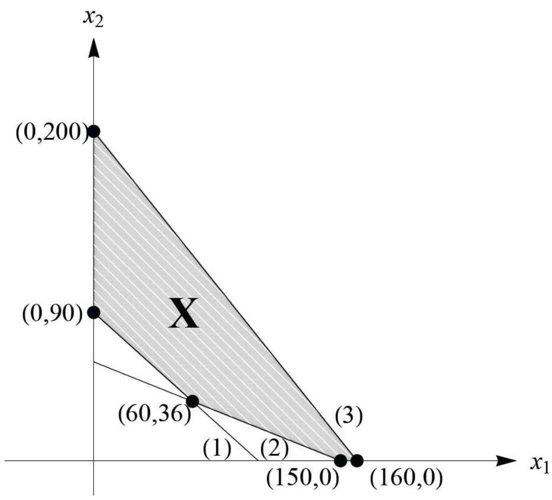
x_2 = horas al día que debe operar la máquina 2

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } L\left(y_1^+ + y_2^+,\ y_3^-,\ -\left(4\ (9x_1 + 10x_2)\ +\ 6\ (2x_1 + 5x_2)\ +\ 7\ (5x_1 + 4x_2)\right)\right)$$

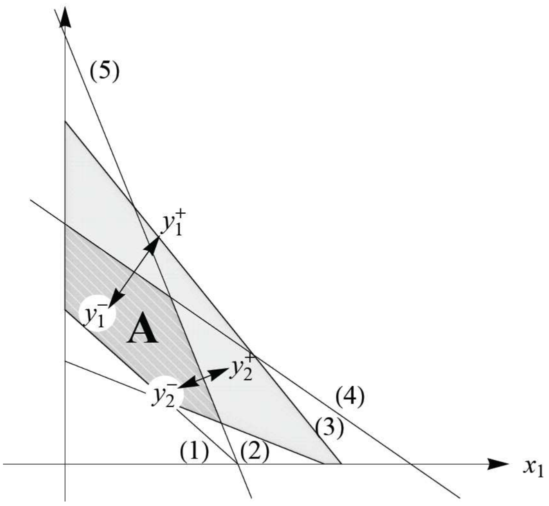
$$\text{s.a} \begin{cases} 9x_1 + 10x_2 \geq 900 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 300 & (2) \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 800 & (3) \\ 70x_1 + 100x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14000 & (4) \\ 200x_1 + 80x_2 - y_2^+ + y_2^- = 20000 & (5) \\ 70x_1 + 100x_2 - 200x_1 - 80x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (6) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1,\ 2, 3 & \end{cases}$$

El conjunto X de soluciones factibles del problema es:



$$\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{Min}\ \left(y_1^+ + y_2^+\right)$$

$$\text{s.a}\ \begin{cases} 9x_1 + 10x_2 \geq 900 & (1)\\ 2x_1 + 5x_2 \geq 300 & (2)\\ 5x_1 + 4x_2 \leq 800 & (3)\\ 70x_1 + 100x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14000 & (4)\\ 200x_1 + 80x_2 - y_2^+ + y_2^- = 20000 & (5)\\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, y_1^+ \geq 0, y_2^- \geq 0, y_2^+ \geq 0 & \end{cases}$$

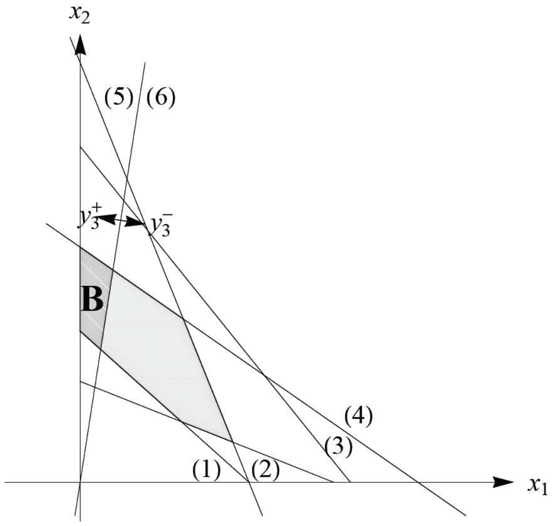


Soluciones óptimas: $\overline{\mathrm{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$\mathrm{P}_2 \equiv \mathrm{Min}\ \left(y_3^-\right)$$

$$\text{s.a}\ \begin{cases} 9x_1 + 10x_2 \geq 900 & (1)\\ 2x_1 + 5x_2 \geq 300 & (2)\\ 5x_1 + 4x_2 \leq 800 & (3)\\ 70x_1 + 100x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14000 & (4)\\ 200x_1 + 80x_2 - y_2^+ + y_2^- = 20000 & (5)\\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, \quad y_1^+ = 0 & \\ y_2^- \geq 0, \quad y_2^+ = 0 & \\ -130x_1 + 20x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (6)\\ y_3^- \geq 0, \quad y_3^+ \geq 0 & \end{cases}$$

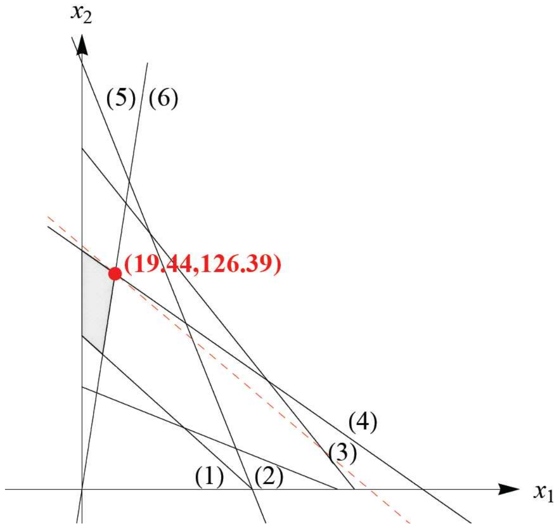


Soluciones óptimas: $\overline{\mathbf{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{Min } \left(-83x_1 - 98x_2\right)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 9x_1 + 10x_2 \geq 900 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 300 & (2) \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 800 & (3) \\ 70x_1 + 100x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14000 & (4) \\ 200x_1 + 80x_2 - y_2^+ + y_2^- = 20000 & (5) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- \geq 0, \ y_1^+ = 0 & \\ y_2^- \geq 0, \ y_2^+ = 0 & \\ -130x_1 + 20x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (6) \\ y_3^- = 0, \ y_3^+ \geq 0 & \end{cases}$$



Solución óptima: (19.44,126.39)

Valor óptimo: 14000

La solución del problema consiste en operar 19.44 horas al día con la máquina 1, 126.39 horas al día con la máquina 2. Se utilizan 14000 litros de leche de oveja $(\overline{y}_1^+ = 0,\ \ \overline{y}_1^- = 0)$ y 14000 litros de leche de cabra $(\overline{y}_2^+ = 0,\ \ \overline{y}_2^- = 6000)$. Se usan, por lo tanto, la misma cantidad de leche de oveja y de cabra $(\overline{y}_3^+ = 0,\ \ \overline{y}_3^- = 0)$. El beneficio máximo obtenido es de 14000 euros.

4. En la tabla siguiente quedan recogidas las actividades en las que se divide el proyecto de rodar una película, su duración en días así como sus relaciones de precedencia.

Actividad	**Descripción**	**Precedentes Inmediatas**	**Duración**
a	Hacer el guión	--	30
b	Localizar exteriores	a	10
c	Permisos para rodar en exteriores	b	4
d	Localizar interiores	a	8
e	Contratar actores	a	10
f	Contratar personal técnico	a	8
g	Alojamiento actores y personal técnico	e, f	1
h	Vestuario	e	5
i	Rodar escenas exteriores sin actores	c, f	1
j	Rodar con actores	i, h, g, d	20

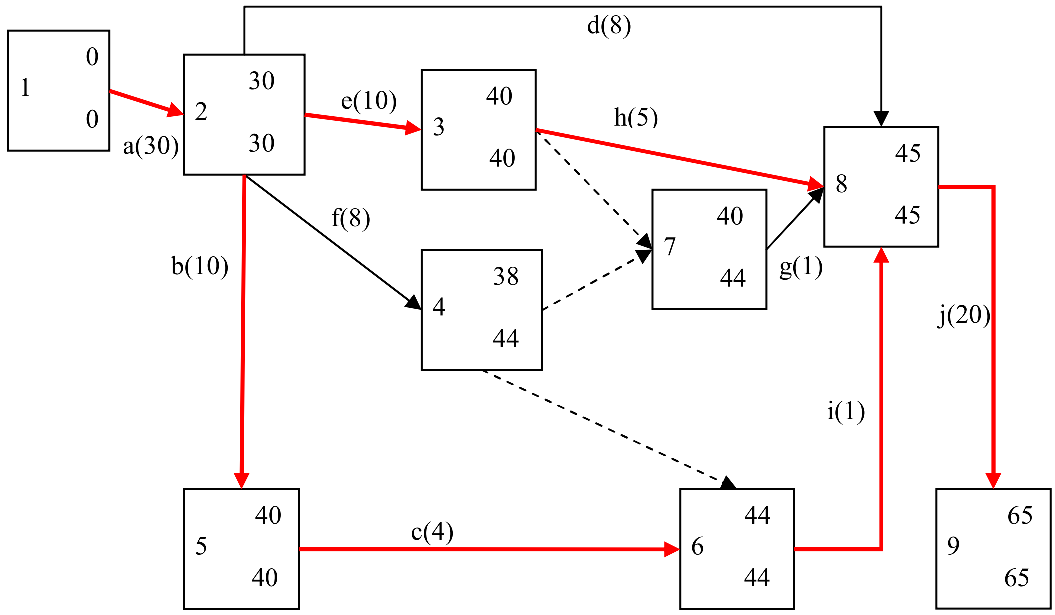
a) (6 puntos) Elaborar una red que represente el proyecto. Indicar el o los caminos críticos y la duración prevista del proyecto.

b) (2 puntos) Si la localización de interiores se retrasa en 2 días, ¿afecta este retraso a la duración prevista del proyecto? ¿Por qué?

c) (2 puntos) Si por problemas de producción el objetivo fuese reducir el tiempo de rodaje ¿sería una política adecuada eliminar el rodaje en exteriores (eliminar actividades b, c, i)? ¿Por qué?

Solución:

a) La siguiente red representa a este proyecto:



Caminos críticos: (1,2,3,8,9) y (1,2,5,6,8,9)

Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 65 días

b) El margen u holgura de la actividad d (Localizar interiores) es de 7 días, por lo que un retraso de 2 días en esa actividad no afecta a la d.p.p.

c) No. La d.p.p. sería la misma, ya que estas actividades no forman parte de uno de los caminos críticos, el camino (1,2,3,8,9).

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Junio 2008

1. (10 puntos) Una empresa fabrica dos productos A y B que se procesan en tres máquinas M_1, M_2 y M_3. Los tiempos de procesamiento en horas de cada unidad de producto en cada máquina, los ingresos unitarios de cada producto y las disponibilidades semanales de cada máquina están recogidos en la siguiente tabla:

	A	**B**	**Disponibilidad semanal (horas)**
M_1	3	5	30
M_2	1	10	35
M_3	2	8	40
Ingresos unitarios (euros)	1000	2000	

La empresa está considerando la posibilidad de aumentar semanalmente la capacidad de la máquina M_1 en 10 horas y/o de la máquina M_2 en 15 horas y/o de la máquina M_3 en 20 horas con unos costes de 400 €, 600 € y 500 €, respectivamente, no pudiendo ser el coste total más de 1200 €. La capacidad de la máquina M_2 sólo se puede ampliar si se amplia la de la máquina M_1. Modelizar el problema de cómo planificar la producción como un problema de programación lineal entera si se desea maximizar los beneficios.

<u>Solución:</u>

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_i = número de unidades del producto i que se producen a la semana i = A, B

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se aumenta la capacidad de la máquina } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{con } j=1,2,3$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left(1000x_A + 2000x_B - 400z_1 - 600z_2 - 500z_3\right)$$

$$\text{s.a}\begin{cases} 3x_A + 5x_B \leq 30 + 10z_1 \\ x_A + 10x_B \leq 35 + 15z_2 \\ 2x_A + 8x_B \leq 40 + 20z_3 \\ z_2 \leq z_1 \\ 400z_1 + 600z_2 + 500z_3 \leq 1200 \ (*) \\ x_i \geq 0 \text{ y enteras } i = \text{A, B} \\ z_j = 0,\ 1\, j = 1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

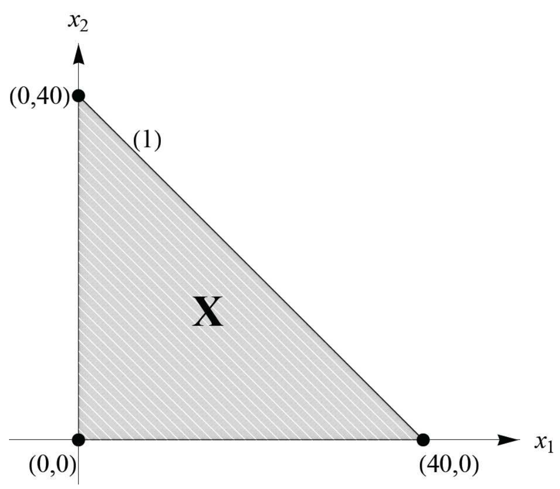
2. (10 puntos) Resolver el siguiente problema de programación por metas:

$$\text{Min } L(y_1^+,\ y_2^- + y_3^+,\ y_4^-)$$

$$\text{s.a}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 & (1) \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 & (2) \\ 3x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (3) \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (4) \\ 4x_1 + 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 180 & (5) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

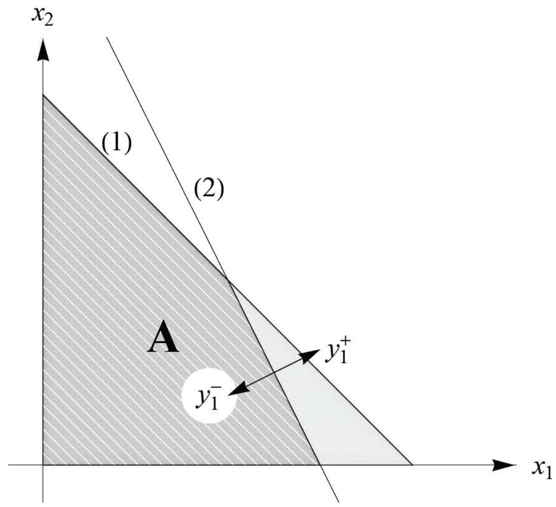
Solución:

El conjunto X de soluciones factibles del problema es:



$$P_1 \equiv \text{Min } (y_1^+)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 40 & (1) \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^- \ge 0, \quad y_1^+ \ge 0 \end{cases}$$

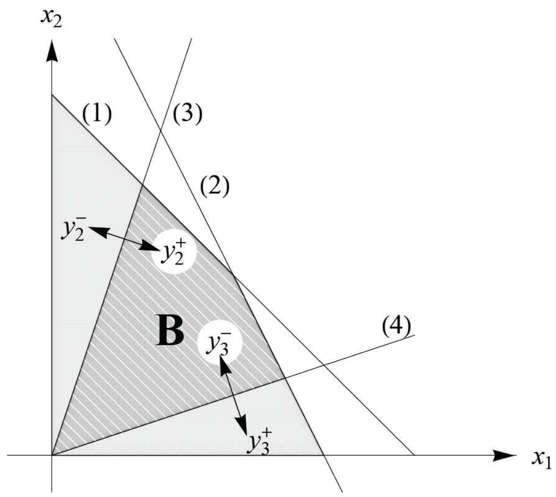


Soluciones óptimas: $\overline{\mathbf{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{Min } (y_2^- + y_3^+)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 40 & (1) \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^- \ge 0, \quad y_1^+ = 0 \\ 3x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (3) \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (4) \\ y_2^- \ge 0, y_2^+ \ge 0, y_3^- \ge 0, y_3^+ \ge 0 \end{cases}$$

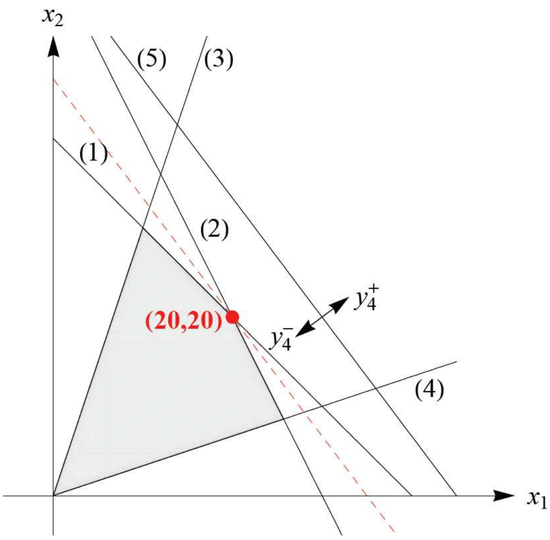


Soluciones óptimas: $\overline{\mathbf{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

$P_3 \equiv \text{Min } (y_4^-)$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 40 & (1) \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^- \ge 0, \quad y_1^+ = 0 \\ 3x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 & (3) \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (4) \\ y_2^- = 0, \quad y_2^+ \ge 0 \\ y_3^- \ge 0, \quad y_3^+ = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 180 & (5) \\ y_4^- \ge 0, \quad y_4^+ \ge 0, \end{cases}$$



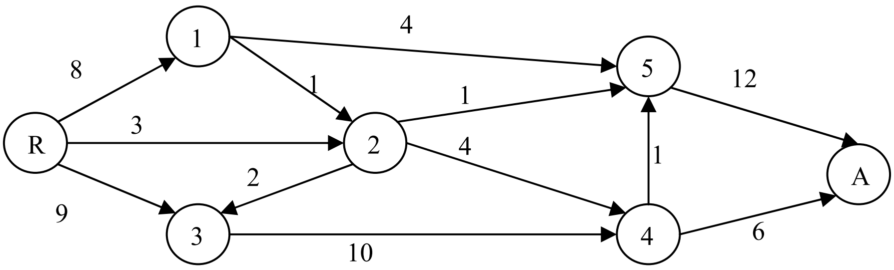
Solución óptima: $(20, 20)$

Valor óptimo: 40

Solución óptima: $\bar{x}_1 = 20$, $\bar{x}_2 = 20$

$\bar{y}_1^+ = \bar{y}_1^- = 0$, $\bar{y}_2^+ = 40$, $\bar{y}_2^- = 0$, $\bar{y}_3^+ = 0$, $\bar{y}_3^- = 40$, $\bar{y}_4^+ = 0$, $\bar{y}_4^- = 40$

3. Una compañía estatal de petróleo cuenta con una red de oleoductos que utiliza para transportar petróleo desde su refinería R hasta su centro de almacenamiento A, como se muestra en el grafo siguiente. Cada arco viene valorado por la capacidad máxima diaria que se puede enviar, en miles de litros.

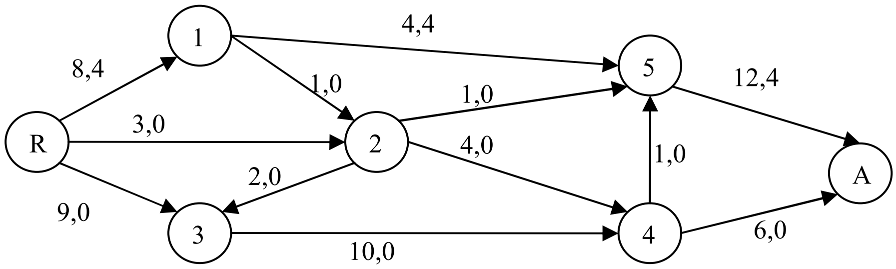


a) (5 puntos) Determinar el tiempo que se necesita para transportar 60000 litros desde la refinería al centro de almacenamiento si cada día se envía la cantidad máxima posible.

b) (5 puntos) Si la capacidad del arco (2,5) aumenta de 1 a 4, teniendo en cuenta la distribución de envío obtenido en el apartado a), ¿en cuánto se reducirá el tiempo obtenido?

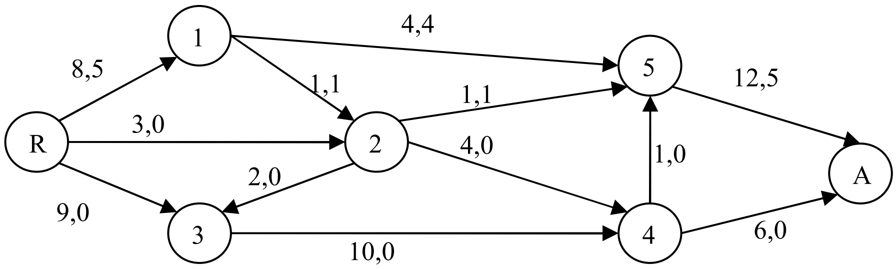
Solución:

a) Partimos del flujo nulo y consideramos la cadena de crecimiento del origen al destino (R,1,5,A). El incremento de flujo que permite esta cadena viene dado por $\Delta_f\left(\mathrm{R},1,5,\mathrm{A}\right)=\min\left\{8,4,12\right\}=4$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es $V_f=4$ miles de litros diarios:



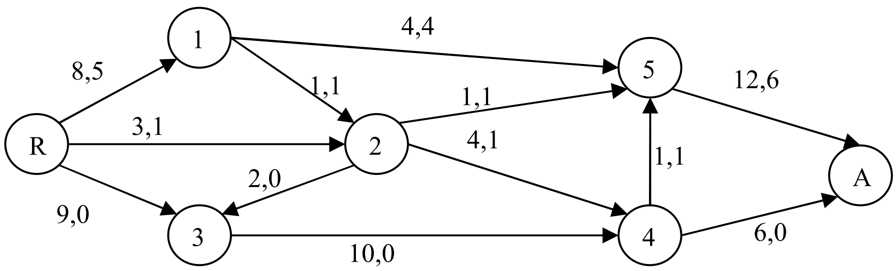
Consideramos la cadena de crecimiento (R,1,2,5,A).

$\Delta_f\left(\mathrm{R},1,2,5,\mathrm{A}\right)=\min\left\{8-4,1-0,1-0,12-4\right\}=1$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es $V_f=5$ miles de litros:



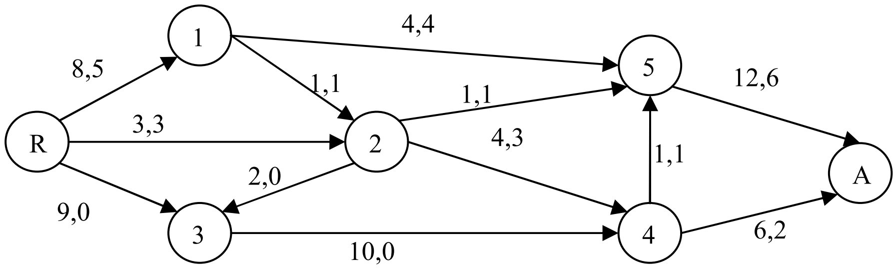
Consideramos la cadena de crecimiento (R,2,4,5,A).

$\Delta_f\left(\mathrm{R},2,4,5,\mathrm{A}\right)=\min\left\{3-0,4-0,1-0,12-5\right\}=1$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es $V_f=6$ miles de litros:



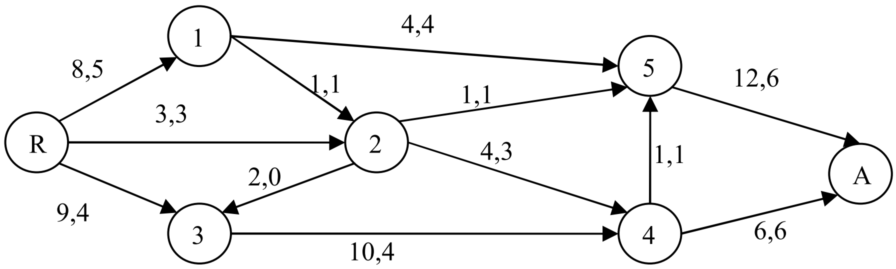
Consideramos la cadena de crecimiento (R,2,4,A).

$\Delta_f\left(\mathrm{R},2,4,\mathrm{A}\right)=\min\left\{3-1,4-1,6-0\right\}=2$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es $V_f=8$ miles de litros:



Consideramos la cadena de crecimiento (R,3,4,A).

$\Delta_f\left(\mathrm{R},3,4,\mathrm{A}\right)=\min\left\{9-0,10-0,6-2\right\}=4$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es $V_f=12$ miles de litros:

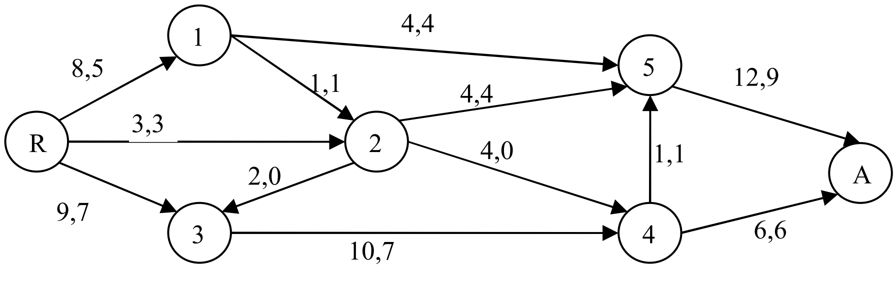


No existe ninguna cadena de crecimiento del nodo R al nodo A. Luego este flujo es un flujo máximo y su valor es 12000 litros diarios.

Si queremos mandar 60000 litros, necesitamos $\dfrac{60000}{12000}=5$ días.

b) Consideramos la cadena de crecimiento (R,3,4,2,5,A).

$\Delta_f\left(\mathrm{R},3,4,2,5,\mathrm{A}\right)=\min\left\{9-4,10-4,3,4-1,12-6\right\}=3$ y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es $V_f=15$ miles de litros:



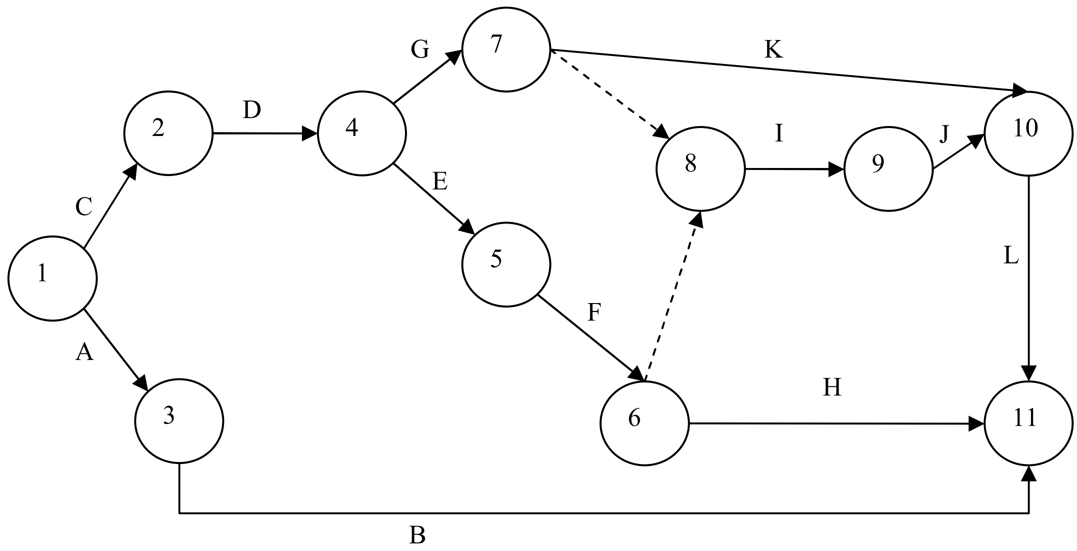
No existe ninguna cadena de crecimiento del nodo R al nodo A. Luego este flujo es un flujo máximo y su valor es 15000 litros diarios. Si queremos mandar 60000 litros, ahora se necesitan 4 días, luego se reduciría en un día.

4. (4 puntos) En la siguiente tabla se presentan el listado de las actividades para realizar la formulación de las cuentas anuales de una empresa (con sus duraciones en días y sus relaciones de precedencia):

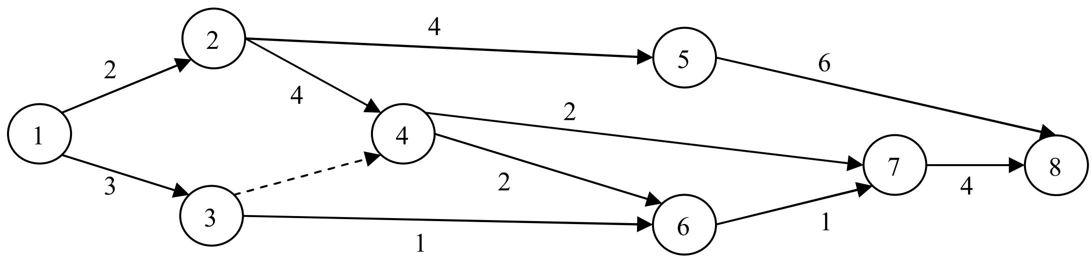
Actividades	**Descripción**	**Duración**	**Precedentes Inmediatas**
A	Inventario (Recuento físico)	2	--
B	Valoración inventario (conversión moneda funcional)	1/4	A
C	Comprobantes (identificación facturas)	2	--
D	Registro contable	1	C
E	Auditoria I (verificación saldos)	1	D
F	Auditoria II (revisión del proceso de registro)	1/2	E
G	Circulación de cuentas corrientes deudoras	7	D
H	Circulación de cuentas corrientes activas	5	F
I	Verificación final de saldos patrimoniales	3	F y G
J	Balance de comprobación de sumas y saldos	1/2	I
K	Regularización (traspaso de gastos e ingresos y determinación de resultado contable)	1/2	G
L	Balance final	1/2	J y K

Construir un grafo asociado a este proyecto.

Solución:



5. (6 puntos) En el grafo siguiente se representa un proyecto. En los arcos se indica la duración de las diferentes actividades en días.



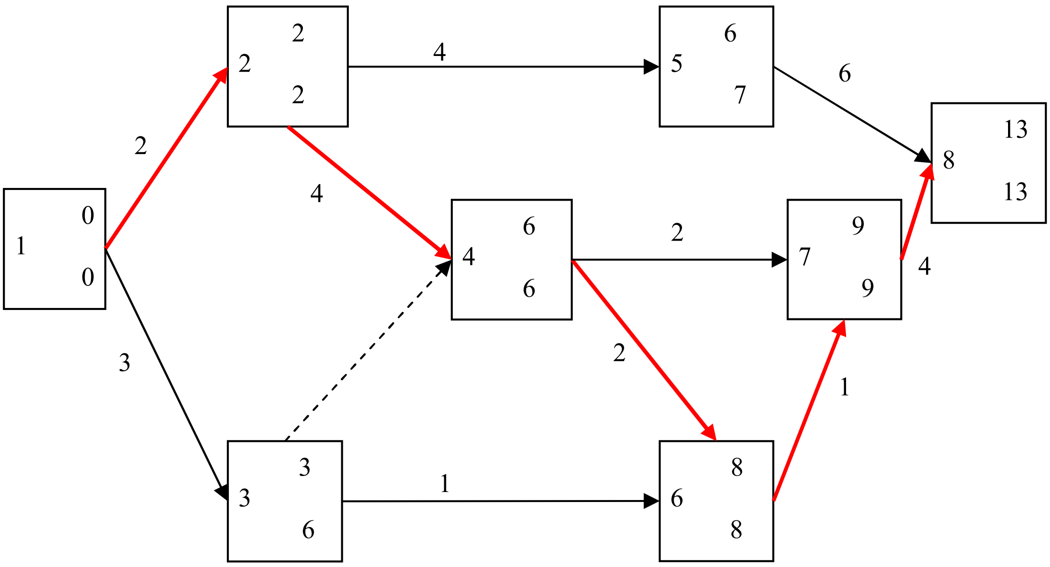
a) Calcular la duración prevista del proyecto y el camino crítico. Calcular las holguras (márgenes) de las actividades (4,7) y (2,4).

b) Si la duración de la actividad (2,4) se redujera en 1 día, ¿cómo afectaría a la duración prevista del proyecto? ¿Y al camino critico?

c) Si la actividad (6,7) sufriera una modificación y su duración fuera de 4 días, ¿cuál sería la duración prevista del proyecto? ¿Cuáles serían las actividades críticas?

Solución:

a)



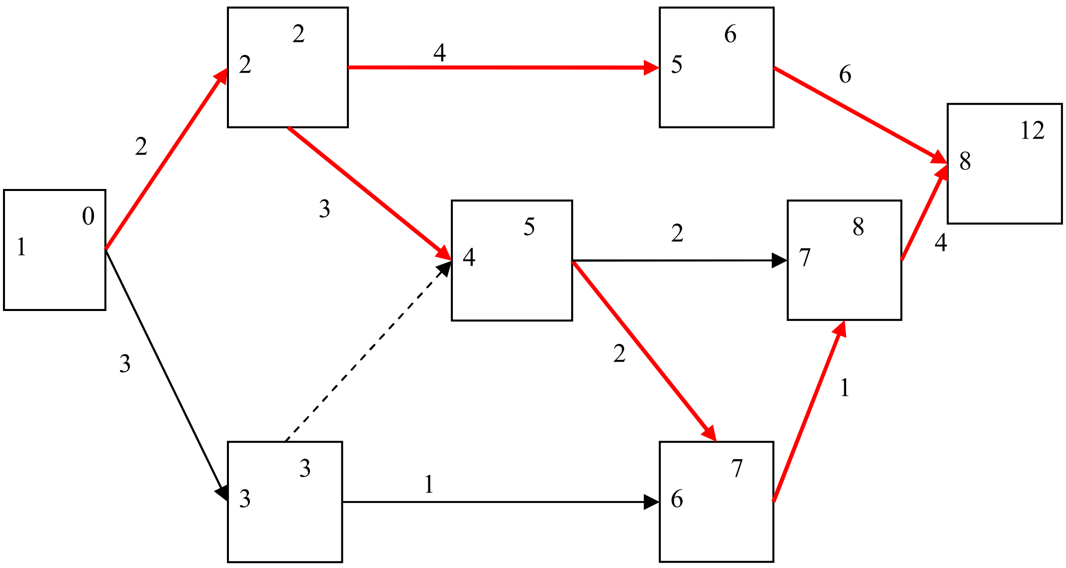
Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 13 días

Camino crítico: (1,2,4,6,7,8)

$M(4,7) = FMT^*(4,7) - CMT(4,7) - t(4,7) = Q(7) - P(4) - t(4,7) = 9 - 6 - 2 = 1$

$M(2,4) = 0$, ya que la actividad (2,4) es crítica.

b)



Si la duración de la actividad (2,4) se redujera en un día, la duración prevista del proyecto se reduciría en un día, es decir duraría 12 días. Los caminos críticos serían: (1,2,4,6,7,8) y (1,2,5,8).

c) La actividad (6,7) es crítica. Si su duración fuera de 4 días en lugar de un día, el proyecto se retrasaría 3 días, es decir duraría 16 días. El camino crítico seguiría siendo el mismo y, por tanto, las actividades críticas serían: (1,2), (2,4), (4,6), (6,7) y (7,8).

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Septiembre 2008

1. (10 puntos) El Consejo de Administración de inversiones de una empresa dispone de 1000000 € para invertir en 7 fondos. El rendimiento de la inversión de 1 € en el fondo i es R_i. El Consejo desea maximizar el rendimiento total teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

   - La inversión en el fondo 2 sólo se realizará si se lleva a cabo la inversión en el fondo 1.
   - La inversión en el fondo 4 debe hacerse obligatoriamente si se hacen las inversiones en los fondos 1 y 3.
   - Si se realizan inversiones en los fondos 1 o 4 no se realizará la inversión en el fondo 6.
   - Si no se realizan ni la inversión en el fondo 2 ni la inversión en el fondo 5, entonces no se realizará la inversión en el fondo 7.
   - Si se invierte en algún fondo la cantidad invertida en dicho fondo debe ser al menos de 600 €.

   a) Modelizar este problema como un problema de programación lineal entera.

   b) El Consejo de Administración dispone de otros 200000 € adicionales. Debe decidir si invierte esa cantidad íntegramente en Letras del Tesoro, lo cual le reportaría un rendimiento total de R, o bien agregarla a la cantidad inicial para redistribuirla entre los fondos de inversión anteriores. Formular un problema de programación lineal entera que maximice el rendimiento total en esta nueva situación.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

$x_i =$ euros invertidos en el fondo i $\quad i = 1,...,7$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se invierte en el fondo } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{con } i=1,\ldots,7$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } (\mathrm{R}_1x_1+\mathrm{R}_2x_2+...+\mathrm{R}_7x_7)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1+...+x_7 \le 1000000 \\ y_2 \le y_1 \\ y_4 \ge y_1+y_3-1 \\ y_6 \le 1-y_1 \\ y_6 \le 1-y_4 \\ y_2+y_5 \ge y_7 \\ 600y_i \le x_i \le My_i \quad i=1,...,7 \\ x_i \ge 0 \qquad\qquad i=1,...,7 \\ y_i = 0,\ 1 \qquad\qquad i=1,...,7 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos las variable de decisión siguiente:

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si se invierten los 200000 € en Letras del Tesoro} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } (\mathrm{R}_1x_1+\mathrm{R}_2x_2+...+\mathrm{R}_7x_7+Rz)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1+...+x_7 \le 1000000+200000(1-z) \\ y_2 \le y_1 \\ y_4 \ge y_1+y_3-1 \\ y_6 \le 1-y_1 \\ y_6 \le 1-y_4 \\ y_2+y_5 \ge y_7 \\ 600y_i \le x_i \le My_i \quad i=1,...,7 \\ x_i \ge 0 \qquad\qquad i=1,...,7 \\ y_i = 0,1 \qquad\qquad i=1,...,7 \\ z=0,\ 1 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. (10 puntos) El ayuntamiento de un municipio va a construir una residencia para estudiantes con dos tipos de habitaciones, pequeñas y grandes, con capacidad para 2 y 4 estudiantes respectivamente.

Dadas las necesidades existentes, para que el proyecto resulte factible y apropiado, el número total de habitaciones debe ser como mucho 400, y las habitaciones pequeñas deben ser al menos el 40% del total de habitaciones

El coste de construcción de cada habitación pequeña es de 40000 € y de cada habitación grande 60000 €. La corporación pretende minimizar el coste de construcción y maximizar la capacidad de estudiantes de la residencia.

a) Modelizar el problema multiobjetivo y encontrar todas las soluciones eficientes del problema relajado.

b) Sabiendo que cada habitación pequeña requiere 22 m^2 y cada habitación grande 28 m^2, si además de los dos objetivos anteriores se pretende también minimizar el espacio construido, obtener 2 soluciones eficientes del nuevo problema multiobjetivo.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

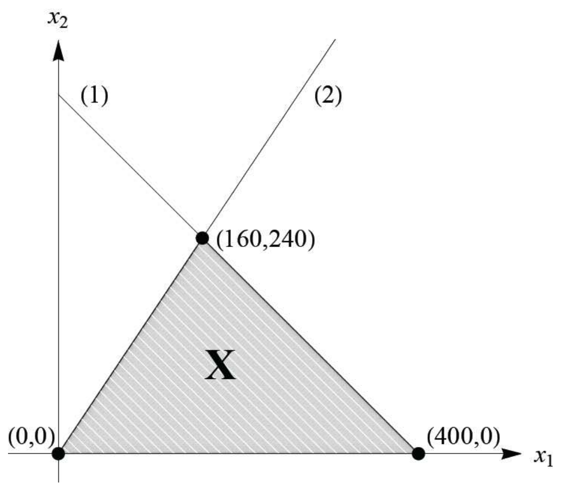
x_1 = número de habitaciones pequeñas

x_2 = número de habitaciones grandes

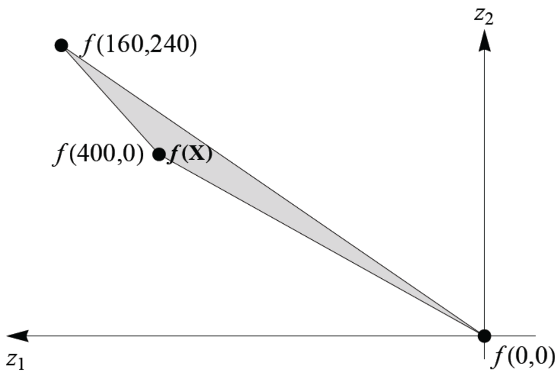
La modelización del modelo multiobjetivo relajado queda como sigue:

$$\text{Max}\left(-40000x_1 - 60000x_2,\ 2x_1 + 4x_2\right)$$

$$\text{s.a}\ \begin{cases} x_1 + x_2 \le 400 & (1) \\ x_1 \ge 0.4\left(x_1 + x_2\right) & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Vértices X	Vértices $f(X)$
$(0,0)$	$(0,0)$
$(400,0)$	$(-16000000,800)$
$(160,240)$	$(-20800000,1280)$



Soluciones eficientes: $\overline{\mathbf{x}} \in \overline{(0,0)(160,240)}$

b) La modelización del modelo multiobjetivo relajado queda como sigue:

$$\text{Max } \left(-40000x_1 - 60000x_2, 2x_1 + 4x_2, -22x_1 - 28x_2\right)$$

$$\text{s.a } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0.4\left(x_1 + x_2\right) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolución 1: el conjunto de soluciones factibles X es compacto y vemos por el gráfico *f*(X) ó por la tabla de los vértices que (0,0) es la única solución óptima que minimiza el coste, luego es una solución eficiente del problema multiobjetivo a) y b) (no podemos pasar a otra solución factible sin empeorar el coste).

Análogamente, (160,240) es otra solución eficiente del problema multiobjetivo a) y b) dado que es la única solución óptima de la función capacidad de estudiantes.

Resolución 2: aplicando el teorema de Zadeh

Con pesos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ tenemos el siguiente modelo ponderado:

$$\begin{aligned} &\text{Max } \left(-40020x_1 - 60024x_2\right) \\ &\text{s.a } \quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

La solución óptima es (0,0), luego (0,0) es solución eficiente del modelo multiobjetivo.

Con pesos $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 100000,\ \lambda_3 = 1$ tenemos el siguiente modelo ponderado:

$$\begin{aligned} &\text{Max } \left(159978x_1 + 339972x_2\right) \\ &\text{s.a } \quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

La solución óptima es (160,240), luego (160,240) es solución eficiente del modelo multiobjetivo.

3. (10 puntos) Una empresa dispone de dos camiones frigoríficos C1 y C2 con una capacidad de 100 y 60 toneladas respectivamente. La empresa desea realizar un sólo viaje y hay 4 cargas para transportar, A y B de 40 toneladas cada una y C y D de 50 toneladas cada una. El beneficio de transporte por carga en miles de euros se indica en la tabla

	A	**B**	**C**	**D**
C1	10	10	8	8
C2	6	6	4	4

a) Determinar mediante el Método Húngaro qué cargas de las 4 deben ser transportadas utilizando los dos camiones para maximizar el beneficio total.

b) Se dispone de un tercer camión C3 de 150 toneladas y con un beneficio de transporte por carga de 7000 euros. Teniendo en cuenta que C3 no es camión frigorífico y únicamente las cargas A y B necesitan camión frigorífico para su transporte, ¿a qué tabla (sin resolver) se aplicaría el Método Húngaro si se desea asignar las 4 cargas a los camiones con el máximo beneficio? ¿Y a qué tabla , si además se impone la condición de que se utilicen los tres camiones?

Solución:

a) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

b)

	A	B	C	D	
C1	-10	-10	-8	-8	←+10
C1	-10	-10	-8	-8	←+10
C2	-6	-6	-4	-4	←+6
F_1	0	0	0	0	

	A	B	C	D	
C1	0	$\cancel{0}$	2	2	←-2
C1	$\cancel{0}$	0	2	2	←-2
C2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{2}$	2	←-2
F_1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0	$\cancel{0}$	
	↑+2	↑+2			

	A	B	C	D
C1	0	0	0	0
C1	0	0	0	0
C2	0	0	0	0
F_1	2	2	0	0

Existen varias soluciones óptimas. En ellas las cargas C o D no se transportan y el resto de la carga A, B, C (ó D) se pueden transportar en cualquier camión. C1 lleva dos cargas y C2 una.

b) El camión C3 puede transportar hasta150 toneladas por lo que puede llevar hasta 3 cargas, pero al no ser frigorífico solo puede transportar las cargas C o D

i) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	A	B	C	D	F_1	F_2
C1	-10	-18	-8	-8	0	0
C1	-10	-10	-8	-8	0	0
C2	-6	-6	-4	-4	0	0
C3	M	M	-7	-7	0	0
C3	M	M	-7	-7	0	0
C3	M	M	-7	-7	0	0

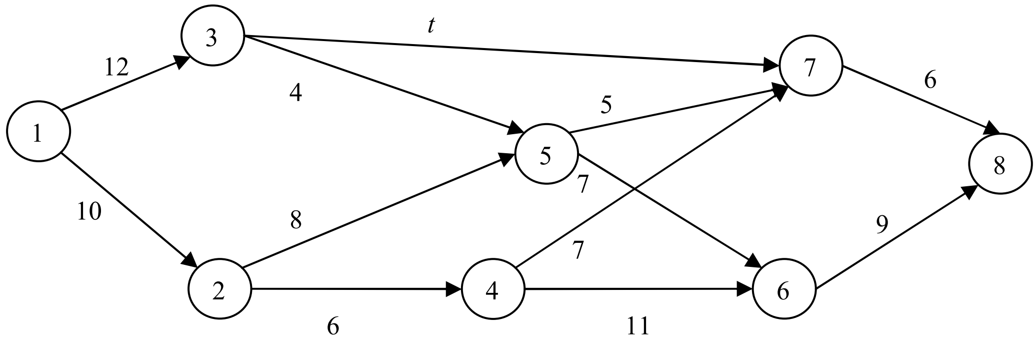
Con M positivo suficientemente grande.

ii) Si además de impone la condición de que se utilicen los tres camiones, aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	A	B	C	D	F_1	F_2
C1	-10	-18	-8	-8	0	0
C1	-10	-10	-8	-8	M	M
C2	-6	-6	-4	-4	M	M
C3	M	M	-7	-7	0	0
C3	M	M	-7	-7	0	0
C3	M	M	-7	-7	0	0

Con M positivo suficientemente grande.

4. (10 puntos) La siguiente red representa un proyecto, cada arco una actividad del mismo y su valor asociado su duración en días. La duración de la actividad (3,7) viene dada por *t*, donde $t \leq 10$.



a) Determinar la duración prevista del proyecto y el camino crítico.

b) Calcular para las actividades (3,5) y (5,6) los tiempos de comienzo más temprano (CMT), los de finalización más tardío (FMT*) y sus márgenes.

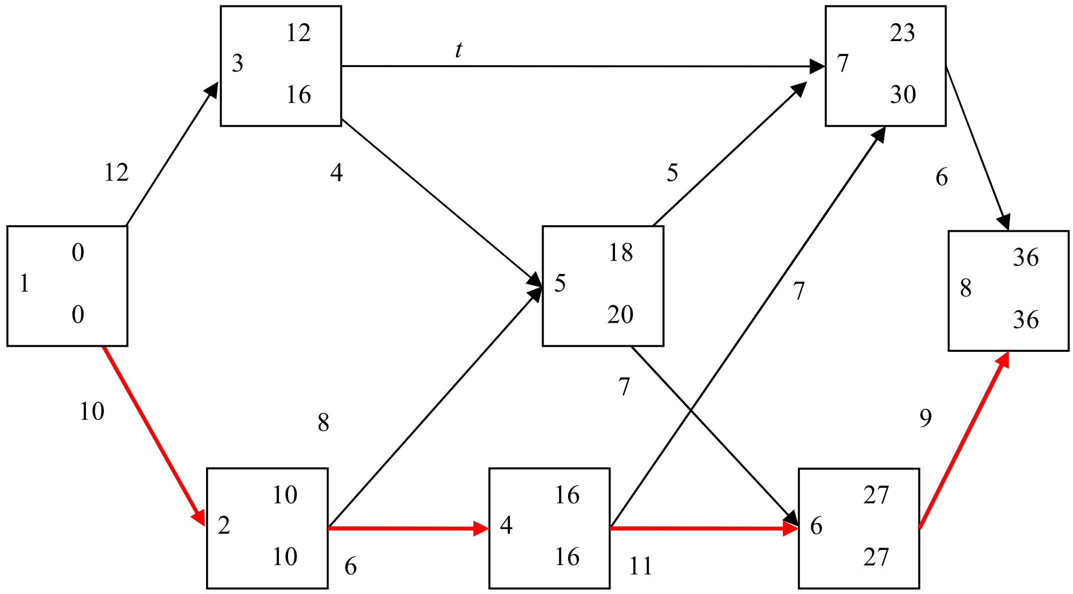
c) ¿Cuánto se reduce la duración prevista del proyecto si la duración de la actividad (4,6) se reduce en 2 días?, ¿y si se reduce en 4 días?

d) Si la actividad (5,7) se retrasa 2 días, ¿afecta este retraso al margen de alguna de las actividades del proyecto? ¿Al de cuáles y en cuánto?

e) Si se sabe que el final más temprano de la actividad (3,7) es 20, determinar la duración de la actividad (3,7).

Solución:

a)



Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 36 días

Camino crítico: (1,2,4,6,8)

b) $CMT(3,5) = P(3) = 12$

$CMT(5,6) = P(5) = 18$

$FMT^*(3,5) = Q(5) = 20$

$FMT^*(5,6) = Q(6) = 27$

$M(3,5) = FMT^*(3,5) - CMT(3,5) - t(3,5) = 20 - 12 - 4 = 4$

$M(5,6) = FMT^*(5,6) - CMT(5,6) - t(5,6) = 27 - 18 - 7 = 2$

c) Si la duración de la actividad (4,6) se reduce 2 días, la duración prevista del proyecto se reduce en 2 días, es decir pasa a ser de 34 días, y los caminos críticos son (1,2,4,6,8) y (1,2,5,6,8).

Si la duración de la actividad (4,6) se reduce 4 días, la duración prevista del proyecto se reduce en 2 días, es decir pasa a ser de 34 días, y el caminos crítico es (1,2,5,6,8).

d) Si la duración de la actividad (5,7) se retrasa 2 días, su margen se reduce en dos días. Además este retraso afecta al comienzo más temprano de la actividad (7,8), que se retrasa en 2 días, luego el margen de esta actividad también se reduce en 2 días.

e) $FMT(3,7) = CMT(3,7) + t(3,7) \Rightarrow 20 = 12 + t(3,7) \Rightarrow t(3,7) = 8$ días.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Extraordinario Febrero 2009

1. En un hospital comarcal se pueden realizar operaciones de riñón, de corazón y de vesícula. Por problemas de personal cada día se realizan operaciones como mucho de dos clases. Debido al gran número de operaciones pendientes se deben realizar al menos tantas operaciones de vesícula como de riñón. Por otra parte, no se pueden realizar más de 50 operaciones de vesícula diarias. Cada operación de riñón requiere la presencia de dos médicos y se realiza en una hora. Las operaciones de corazón requieren 3 médicos y se realizan en 5 horas. Cada operación de vesícula sólo requiere un médico y se realiza en una hora Para estos tipos de operaciones el hospital tiene asignados 20 médicos y cuenta con 60 horas diarias de quirófano.
   a) (6 puntos) Modelizar el problema como un problema de programación lineal entera para maximizar el número de operaciones diarias.
   b) (4 puntos) El hospital recibe una subvención y se plantea o bien modernizar el hospital y, así, poder realizar también operaciones de cataratas, o bien contratar dos nuevos médicos. Las operaciones de cataratas requieren un médico y una hora de quirófano, además, si se opera de cataratas se deben realizar como mínimo 5 operaciones al día y no más de 10. Modelizar el problema como un problema de programación lineal entera para maximizar el número de operaciones.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = número de operaciones de riñón al día

x_2 = número de operaciones de corazón al día

x_3 = número de operaciones de vesícula al día

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{si se realizan operaciones de riñón} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{si se realizan operaciones de corazón} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1 & \text{si se realizan operaciones de vesícula} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 60 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\ x_1 \leq x_3 \\ x_1 \leq My_1 \\ x_2 \leq My_2 \\ x_3 \leq 50y_3 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \text{ y enteras} \\ y_i = 0,1 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Sea definen además de las variables del apartado anterior:

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si se decide realizar operaciones de cataratas} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

x_4 = número de operaciones de cataratas al día

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 20 + 2(1 - z) \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \leq 60 \\ y_1 + y_2 + y_3 + z \leq 2 \\ x_1 \leq x_3 \\ x_1 \leq My_1 \\ x_2 \leq My_2 \\ x_3 \leq 50y_3 \\ 5z \leq x_4 \leq 10z \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \text{ y enteras} \\ y_i = 0,1 \quad i = 1,2,3 \\ z = 0,1 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. En la tabla siguiente quedan recogidas las actividades que componen un proyecto así como la duración en días y las relaciones de precedencia de dichas actividades:

Actividades	Duración	Precedentes Inmediatas
A_1	7	
A_2	5	
A_3	1	A_2
A_4	3	A_1,A_3
A_5	2	A_4
A_6	7	A_2
A_7	8	A_2
A_8	7	A_4
A_9	3	A_5,A_6
A_{10}	2	A_7
A_{11}	6	A_8,A_9,A_{10}

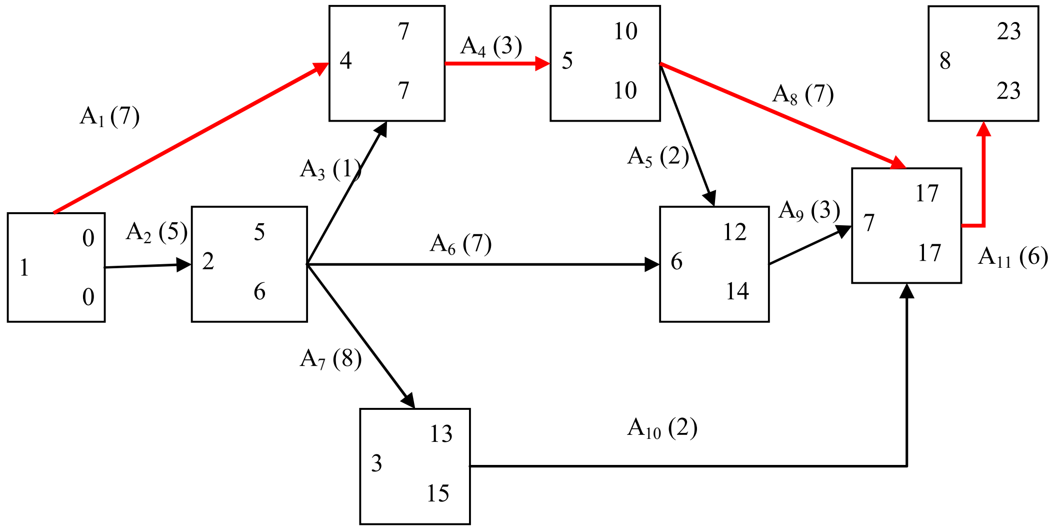
a) (6 puntos) Elaborar una red que represente el proyecto y hallar la tabla de actividades, la duración prevista del proyecto y el camino crítico.

b) (2 puntos) ¿Cuál será el efecto en la duración prevista del proyecto, si se retrasa tres días el inicio de la actividad A_6? ¿Por qué?

c) (2 puntos) ¿Cuál es el tiempo máximo que se puede esperar desde el inicio del proyecto para dar comienzo a la actividad A_6, sin variar la duración prevista del proyecto? ¿Por qué?

Solución:

a) La siguiente red representa a este proyecto:



La tabla de actividades es:

(i,j)	t(i,j)	CMT(i,j)	FMT*(i,j)	M(i,j)
A_2 (1,2)	5	0	6	1
A_1 (1,4)	7	0	7	**0***
A_7 (2,3)	8	5	15	2
A_3 (2,4)	1	5	7	1
A_6 (2,6)	7	5	14	2
A_{10} (3,7)	2	13	17	2
A_4 (4,5)	3	7	10	**0***
A_5 (5,6)	2	10	14	2
A_8 (5,7)	7	10	17	**0***
A_9 (6,7)	3	12	17	2
A_{11} (7,8)	6	17	23	**0***

Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 23 días

Camino crítico: (1,4,5,7,8)

b) Si el inicio de la actividad A_6 se retrasa 3 días, el proyecto se retrasaría 1 día, ya que el margen de esta actividad es de 2 días y el retraso en el inicio es de tres, es decir un día por encima de su margen.

c) El tiempo máximo que se puede esperar desde el inicio del proyecto para dar comienzo a la actividad A_6, sin variar la duración prevista del proyecto, es de 7 días, ya que el margen de dicha actividad es 2.

3. (10 puntos) Una empresa produce dos productos A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas de trabajo y 3 unidades de materia prima y cada unidad de B requiere 4 horas de trabajo y 3 unidades de materia prima. Para su producción, la empresa dispone al día de 12 unidades de materia prima. La empresa obtiene 200 € de beneficio por cada unidad de A y 400 € por cada unidad de B. Modelizar y resolver el problema, sabiendo que la empresa se ha fijado las siguientes prioridades para las metas:
   - Prioridad 1: Las horas de trabajo diarias no sean inferiores a 8.
   - Prioridad 2: Los beneficios alcanzados sean al menos 1600 €.
   - Prioridad 3: Por cada unidad de B no se produzcan más de tres unidades de A.

Solución:

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = unidades producidas diariamente del producto A

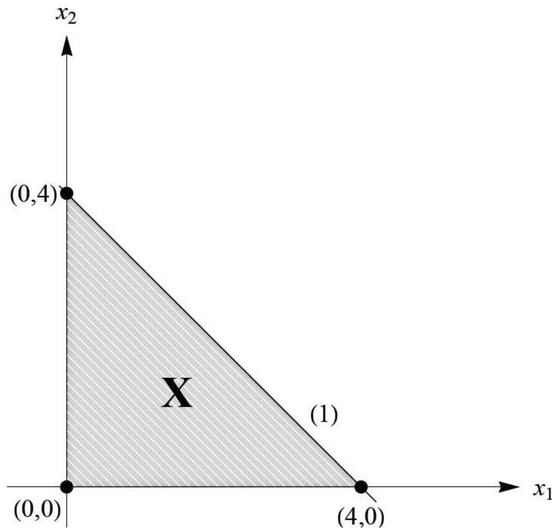
x_2 = unidades producidas diariamente del producto B

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } L(y_1^-, y_2^-, y_3^+)$$

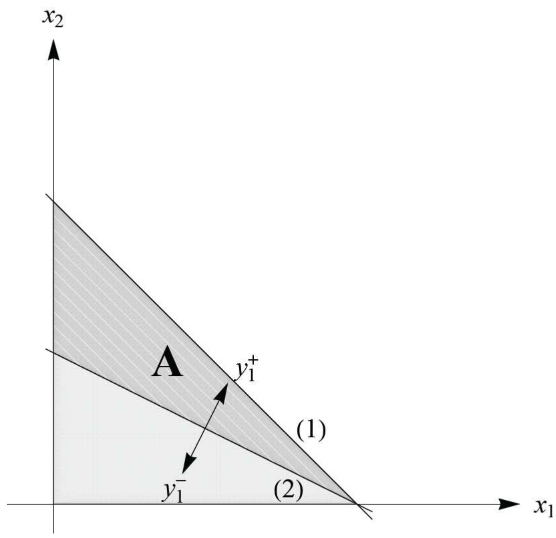
$$\text{s.a} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 12 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (2) \\ 200x_1 + 400x_2 - y_2^+ + y_2^- = 1600 & (3) \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ y enteras} & \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3 & \end{cases}$$

Resolveremos el problema relajado. El conjunto de soluciones factibles será:



$$P_1 \equiv \text{ Min } (y_1^-)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 12 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^- \ge 0, \quad y_1^+ \ge 0 \end{cases}$$

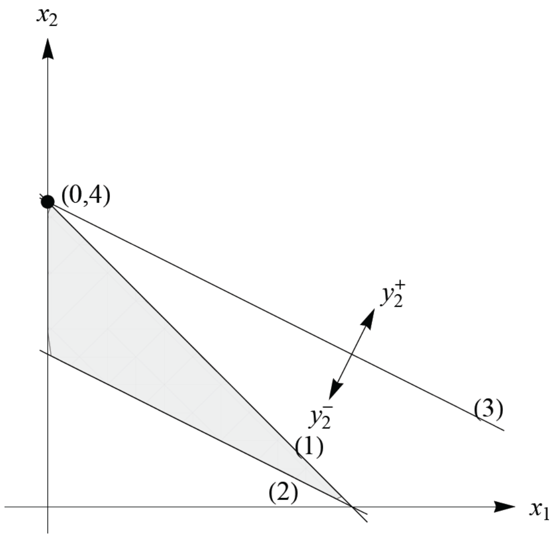


Soluciones óptimas: $\overline{\mathbf{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{ Min } (y_2^-)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 12 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (2) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \ge 0 \\ 200x_1 + 400x_2 - y_2^+ + y_2^- = 1600 & (3) \\ y_2^- \ge 0, \quad y_2^+ \ge 0 \end{cases}$$

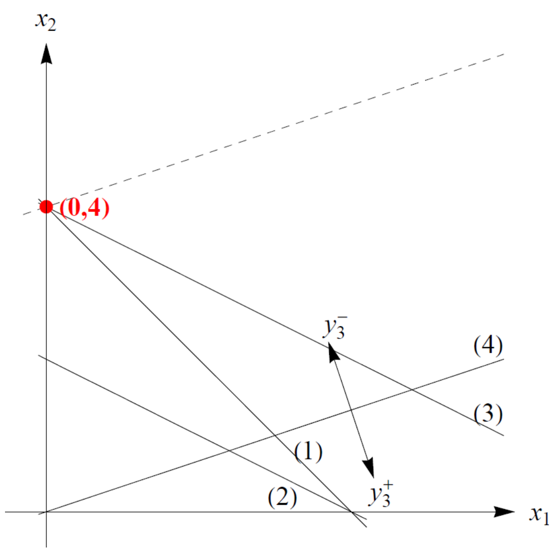


Solución óptima: (0,4)

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{Min } (y_3^+)$$

$$\text{s.a}\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 12 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 & (2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \geq 0 & \\ 200x_1 + 400x_2 - y_2^+ + y_2^- = 1600 & (3) \\ y_2^- = 0, \quad y_2^+ \geq 0 & \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (4) \\ y_3^- \geq 0, \quad y_3^+ \geq 0 & \end{cases}$$



Solución óptima: (0,4)

Valor óptimo: 0

La solución óptima consiste en producir diariamente 4 unidades del producto B y ninguna unidad del producto A.

Las horas de trabajo diarias con esta producción óptima son 16 ($\overline{y}_1^- = 0,\ \overline{y}_1^+ = 8$).

El beneficio obtenido es de 1600 € ($\overline{y}_2^- = 0,\ \overline{y}_2^+ = 0$). Se alcanza la tercera meta produciéndose un defecto de 12 unidades ($\overline{y}_3^- = 12,\ \overline{y}_3^+ = 0$).

4. (10 puntos) Un ayuntamiento tiene previsto construir cuatro instalaciones deportivas diferentes dentro del municipio. El ayuntamiento se compone de cuatro distritos A, B, C y D y quiere asegurar la construcción de un polideportivo en los distritos más grandes: A y B. Además, cabría la posibilidad de construir dos polideportivos en el distrito B. La siguiente tabla muestra el número de usuarios semanales (en centenas) que se estiman para cada tipo de instalación deportiva según en el distrito en que se construya.

Polideportivo **Distrito**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
A	12	14	17	19
B	16	19	24	17
C	10	12	18	15
D	13	9	20	17

Resolver mediante el Método Húngaro el problema de dónde se deben construir los 4 polideportivos si el ayuntamiento desea maximizar el número de usuarios semanales.

Solución:

Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	P1	P2	P3	P4	F_1
A	-12	-14	-17	-19	M
B	-16	-19	-24	-17	M
B	-16	-19	-24	-17	0
C	-10	-12	-18	-15	0
D	-13	-9	-20	-17	0

Con M positivo suficientemente grande.

	P1	P2	P3	P4	F_1
A	-12	-14	-17	-19	M
B	-16	-19	-24	-17	M
B	-16	-19	-24	-17	0
C	-10	-12	-18	-15	0
D	-13	-9	-20	-17	0
	↑+16	↑+19	↑+24	↑+19	

Con M positivo suficientemente grande.

	P1	P2	P3	P4	F_1
A	4	5	7	0	M
B	0	0	0	2	M
B	0	0	0	2	0
C	6	7	6	4	0
D	3	10	4	2	0

Con M positivo suficientemente grande.

	P1	P2	P3	P4	F_1	
A	4	5	7	0	M	←-3
B	0	~~0~~	~~0~~	2	M	
B	~~0~~	0	~~0~~	2	~~0~~	
C	6	7	6	4	0	←-3
D	$\boxed{3}$	10	4	2	~~0~~	←-3
				↑+3	↑+3	

Con M positivo suficientemente grande.

	P1	P2	P3	P4	F_1
A	1	2	4	0	M
B	$\cancel{0}$	0	$\cancel{0}$	5	M
B	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0	5	3
C	3	4	3	4	0
D	0	7	1	2	$\cancel{0}$

Con M positivo suficientemente grande.

Se obtiene la siguiente asignación óptima: A $\rightarrow$ Polideportivo 4, B$\rightarrow$ Polideportivos 2 y 3, D $\rightarrow$ Polideportivo 1.

Valor óptimo, 7500 usuarios semanales.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Junio 2009

1. Una plantación hortícola dispone de un terreno de 100 hectáreas en el que se desea cultivar tomates, pimientos, zanahorias, cebollas y lechugas. Las horas de trabajo totales disponibles para cultivar toda la plantación son 300. Las horas por hectárea necesarias para el cultivo de cada uno de los productos aparecen recogidas en la siguiente tabla:

	Tomates	**Pimientos**	**Zanahorias**	**Cebollas**	**Lechugas**
Horas/ha	5	4	5	2	3

El coste de las semillas y fertilizantes por hectárea cultivada, para cada uno de los productos, junto con el coste fijo del cultivo de cada uno de ellos vienen reflejados en la siguiente tabla:

	Tomates	**Pimientos**	**Zanahorias**	**Cebollas**	**Lechugas**
Coste semillas y fertilizantes (€)	25	15	10	8	25
Coste fijo del cultivo (€)	100	120	100	80	150

El capataz de la plantación ha determinado que:

- plantará como mínimo 3 productos y a lo sumo 4 de los 5 posibles,
- si planta tomates, entonces no plantará cebollas,
- plantará lechugas sólo si planta pimientos

a) (7 puntos) Modelizar el problema como un problema de Programación Lineal Entera para minimizar los costes.

b) (3 puntos) La empresa está considerando implantar un nuevo sistema de labranza que le permitiría reducir las horas de trabajo por hectárea necesarias para el cultivo de cada producto. Estas pasarían a ser las que se muestran en la siguiente tabla:

	Tomates	Pimientos	Zanahorias	Cebollas	Lechugas
Horas/ha	4	2	2	1	2

Implantar este nuevo sistema de labranza requiere una inversión inicial de 1000 €. Modelizar el problema incorporando las 2 alternativas: continuar con el actual sistema de labranza o implantar el nuevo.

<u>Solución:</u>

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_i = hectáreas cultivadas del producto i

i=1,…,5 (1 son tomates, 2 pimientos, 3 zanahorias, 4 cebollas y 5 lechugas)

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se cultiva el producto } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{con } i=1,\ldots,5$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min}\left(25x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 25x_5 + 100y_1 + 120y_2 + 100y_3 + 80y_4 + 150y_5\right)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \le 300 \\ 3 \le y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \le 4 \\ y_4 \le 1 - y_1 \\ y_5 \le y_2 \\ 0 \le x_i \le My_i \;\; i = 1,\ldots,5 \\ y_i = 0,1 \qquad i = 1,\ldots,5 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos las variable de decisión siguiente:

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si se implanta el nuevo sistema de labranza} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } \left(25x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 25x_5 + 100y_1 + 120y_2 + 100y_3 + 80y_4 + 150y_5 + \right.$$
$$\left. + 1000z\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 300 + Mz \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 2x_5 \leq 300 + M(1-z) \\ 3 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 4 \\ y_4 \leq 1 - y_1 \\ y_5 \leq y_2 \\ 0 \leq x_i \leq My_i \quad i = 1, \ldots, 5 \\ y_i = 0, 1 \qquad i = 1, \ldots, 5 \\ z = 0, 1 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. (10 puntos) Una empresa dedicada a la elaboración de piensos produce dos tipos de compuestos C_1 y C_2 a partir de dos materias primas A y B. Para producir 1 tonelada. de C_1 se necesitan 0.25 toneladas de materia prima A y 0.75 toneladas de B, y para producir 1 tonelada de C_2 se necesitan 0.5 toneladas de A y 0.5 toneladas de B. El beneficio por tonelada de C_1 es de 1 unidad monetaria y por tonelada de C_2 son 2 unidades monetarias.

   Las cantidades totales semanales disponibles de las materias A y B son 10 y 18 toneladas respectivamente.

   Para ajustarse al programa comunitario de elaboración de pienso, la empresa se plantea las siguientes metas y objetivos, en el siguiente orden de prioridades.

   - Prioridad 1: Desea obtener con el compuesto C_2 al menos tanto beneficio semanal como con el compuesto C_1.
   - Prioridad 2: Desea que la producción semanal de C_1 no sea inferior a 16 toneladas.
   - Prioridad 3: Minimizar la producción semanal de C_2.

   Determinar la producción óptima semanal de cada uno de los compuestos. Interpretar la solución obtenida planteando y resolviendo gráficamente cada una de las metas y objetivos.

Solución:

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = producción semanal en toneladas del compuesto C_1

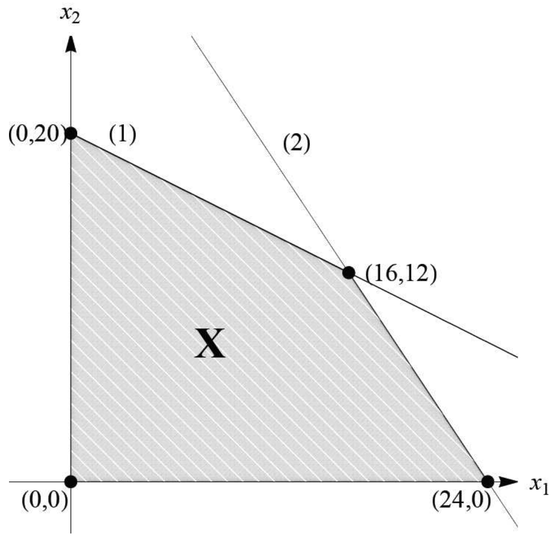
x_2 = producción semanal en toneladas del compuesto C_2

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } L(y_1^-, y_2^-, x_2)$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 10 & (1) \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 \leq 18 & (2) \\ 2x_2 - x_1 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (3) \\ x_1 - y_2^+ + y_2^- = 16 & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1,\ 2 & \end{cases}$$

El conjunto de soluciones factibles es el siguiente:

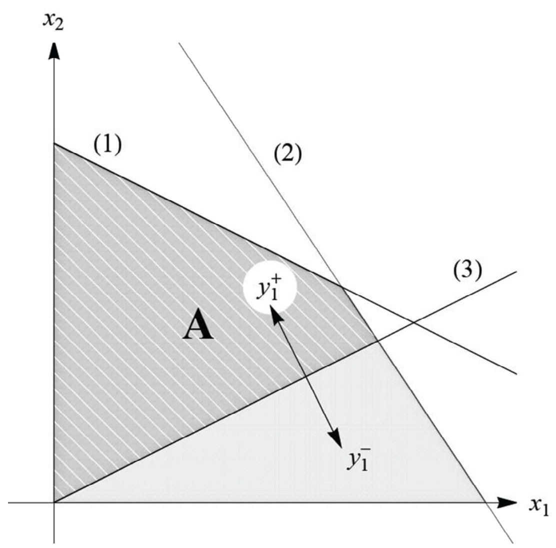


$$\text{P}_1 \equiv \text{ Min } (y_1^-)$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 10 & (1) \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 \leq 18 & (2) \\ 2x_2 - x_1 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1,2 & \end{cases}$$

Soluciones óptimas: $\overline{\mathrm{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

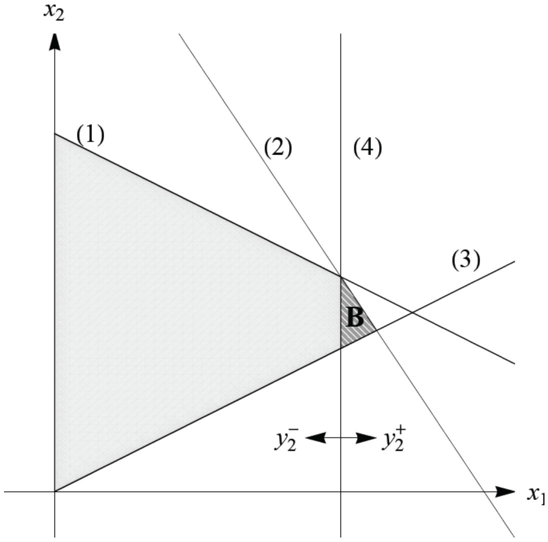


$$P_2 \equiv \text{Min}\ (y_2^-)$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \le 10 & (1) \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 \le 18 & (2) \\ 2x_2 - x_1 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (3) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \ge 0 & \\ x_1 - y_2^+ + y_2^- = 16 & (4) \\ y_2^- \ge 0, \quad y_2^+ \ge 0 & \end{cases}$$

Soluciones óptimas: $\overline{\mathrm{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

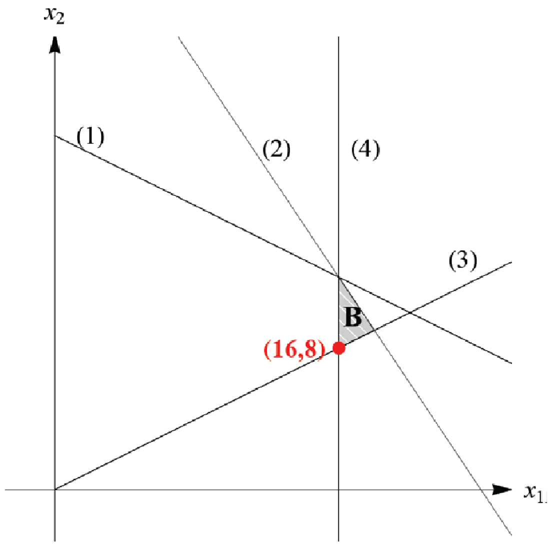


$$P_3 \equiv \text{Min}\ (x_2)$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \le 10 & (1) \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 \le 18 & (2) \\ 2x_2 - x_1 - y_1^+ + y_1^- = 0 & (3) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & \\ y_1^- = 0, \quad y_1^+ \ge 0 & \\ x_1 - y_2^+ + y_2^- = 16 & (4) \\ y_2^- = 0, \quad y_2^+ \ge 0 & \end{cases}$$

Solución óptima: (16,8)

Valor óptimo: 8



La solución óptima consiste en producir semanalmente 16 toneladas del compuesto C_1 y 8 toneladas de C_2.

Se satisface la meta 1 obteniendo exactamente el mismo beneficio semanal de 16 euros con ambos compuestos, $(\overline{y}_1^- = 0, \overline{y}_1^+ = 0)$. Además también se satisface la meta 2 $(\overline{y}_2^- = 0, \overline{y}_2^+ = 0)$.

3. El director general de una empresa de publicidad se enfrenta al problema de asignar publicistas a 4 nuevos clientes importantes: C1, C2, C3 y C4. En la tabla se presenta el coste estimado que le supondría asignar sus 3 mejores publicistas P1, P2 y P3 a cada uno de los clientes, en miles de euros:

	P1	**P2**	**P3**
C1	4	6	8
C2	2	3	4
C2	4	8	5
C4	1	2	6

a) (6 puntos) Determinar las posibles asignaciones óptimas de los 3 publicistas a 3 de los 4 clientes teniendo en cuenta que cada publicista atenderá a un único cliente.

b) (4 puntos) Plantear la tabla a la cual se aplicaría el Método Húngaro para asignar los 4 clientes si el director sabe que cualquiera de los 3 publicistas puede atender a más de un cliente y todos (los publicistas y clientes) deben estar asignados.

<u>Solución:</u>

a) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	P1	P2	P3	F_1
C1	4	6	8	0
C2	2	3	4	0
C3	4	8	5	0
C4	1	2	6	0
	↑ -1	↑ -2	↑ -4	

	P1	P2	P3	F_1
C1	3	4	4	0
C2	1	1	0	0
C3	3	6	1	0
C4	0	0	2	0

	P1	P2	P3	F_1	
C1	3	4	4	0	←-1
C2	1	1	0	$\cancel{0}$	
C3	3	6	$\boxed{1}$	$\cancel{0}$	←-1
C4	0	$\cancel{0}$	2	$\cancel{0}$	
				↑+1	

	P1	P2	P3	F_1	
C1	2	3	3	0	←-1
C2	1	$\boxed{1}$	0	1	←-1
C3	2	5	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	←-1
C4	$\cancel{0}$	0	2	1	
			↑+1	↑+1	

	P1	P2	P3	F_1
C1	1	2	3	0
C2	0	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	1
C3	1	4	0	$\cancel{0}$
C4	$\cancel{0}$	0	3	2

Y obtenemos las dos siguientes asignaciones óptimas:

Asignación óptima 1: C2 → P1, C3→ P3, C4 → P2.

Asignación óptima 2: C2 → P2, C3→ P3, C4 → P1.

Coste mínimo 9000 €

b) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	P1	P2	P3	P1	P2	P3
C1	4	6	8	4	6	8
C2	2	3	4	2	3	4
C3	4	8	5	4	8	5
C4	1	2	6	1	2	6
F_1	0	0	0	M	M	M
F_2	0	0	0	M	M	M

Con M positivo suficientemente grande.

4. Una empresa desea diversificar su oferta hacia un nuevo segmento del mercado, y para ello, encarga al departamento de marketing que realice un estudio de mercado. El departamento de marketing elabora una lista con las actividades a realizar, la duración de cada una de las actividades y las relaciones entre ellas, tal y como se muestra en la siguiente tabla:

Actividad	**Arco (i, j)**	**Descripción**	**Duración (en días)**	**Precedentes Inmediatas**
A	(1, 3)	Búsqueda y análisis de información secundaria	3	-
B	(1, 2)	Definir el marco metodológico y los objetivos	1	-
C	(2, 5)	Determinar el tamaño de la muestra y seleccionarla	2	B
D	(3, 5)	Diseñar el cuestionario	1	A y B
E	(5, 6)	Realizar encuestas y codificar información	10	C y D
F	(3, 4)	Diseñar la entrevista y seleccionar expertos para la	2	A y B
G	(4, 6)	Realización de entrevistas	*t*	F
H	(6, 7)	Análisis de la información cuantitativa y cualitativa	*k*	E y G
I	(7, 8)	Redacción del estudio	3	H

donde la duración de la actividad G y H vienen dadas por las variables t y k respectivamente.

a) (2 puntos) Elaborar el grafo asociado al proyecto añadiendo actividades ficticias si fuera necesario para mantener las relaciones de precedencia indicadas en la tabla y teniendo en cuenta la numeración de los arcos indicada.

b) (8 puntos) Si se sabe que t es menor que 9 días:

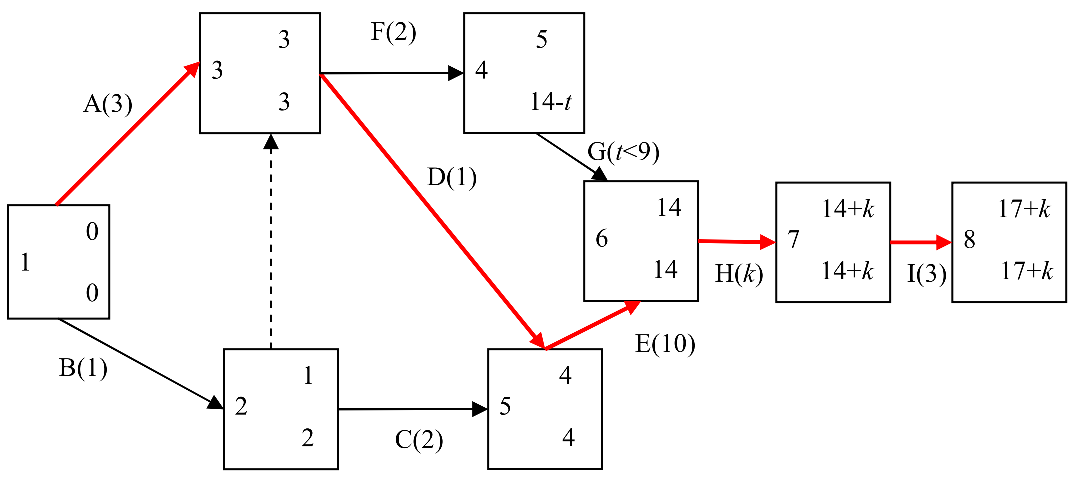
   i) ¿Es posible calcular la duración prevista del proyecto y el camino crítico independientemente de los valores que toman t y k? Calcularlos en función de t y k si fuese necesario.

   ii) ¿Qué valores puede tomar k si se desea concluir el proyecto en menos de 25 días?

   iii) Si se sabe que para no retrasar la duración prevista del proyecto la actividad F debe estar finalizada el sexto día ¿cuál es el valor de t? Teniendo en cuenta el valor obtenido ¿cuántos días se podrá retrasar la actividad G para no retrasar la duración prevista del proyecto?

Solución:

a) La siguiente red representa a este proyecto:



b)

   i) Si $t < 9$, la duración prevista del proyecto (d.p.p.) es 17+k y el camino crítico es (1,3,5,6,7,8).

   ii) Si la duración prevista del proyecto es menor de 25 días, se tiene que:

d.p.p. $< 25 \Rightarrow 17 + k < 25 \Rightarrow k < 8$. Luego la duración de la actividad H ha de ser inferior a 8 días.

iii) Si la actividad F como muy tarde puede finalizar el día 6 para que no se retrase la duración prevista del proyecto, se tiene que

$FMT^*(3,4) = 6 \Rightarrow 14 - t = 6 \Rightarrow t = 8$. Luego la duración de la actividad G ha de ser de 8 días.

Si $t = 8$, se tiene que:

$M(4,6) = FMT^*(4,6) - CMT(4,6) - t(4,6) = Q(6) - P(4) - 8 = 14 - 5 - 8 = 1$

Luego la actividad G se podrá retrasar a lo sumo 1 día para que la duración prevista del proyecto no se vea afectada.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Septiembre 2009

1. Dado el siguiente problema de Programación Lineal Entera:

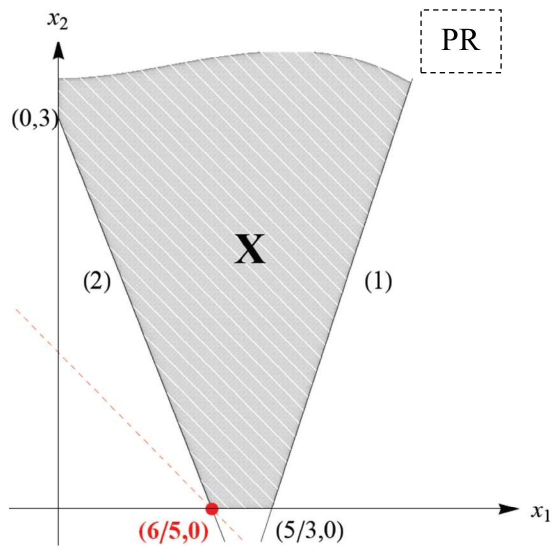
$$\text{Min } (x_1 + x_2)$$
$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 5 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 6 & (2) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \text{ y enteras} \end{cases}$$

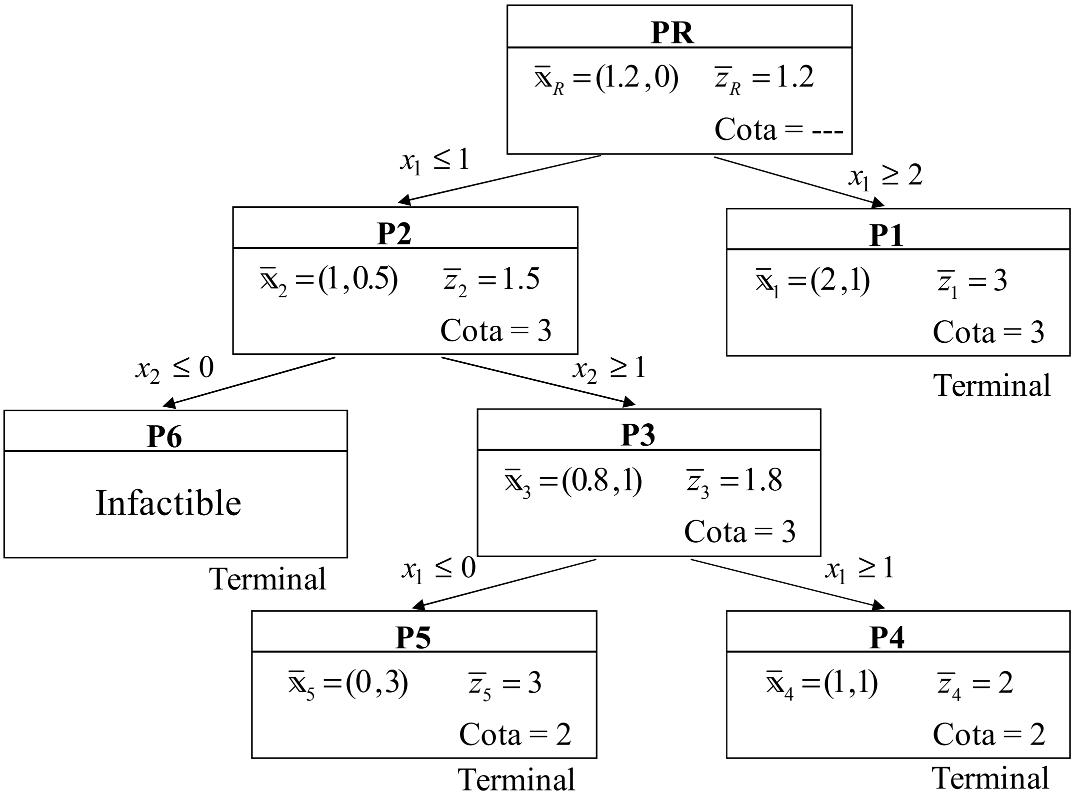
a) (8 puntos) Resolver mediante el método de Ramificación y Acotación.

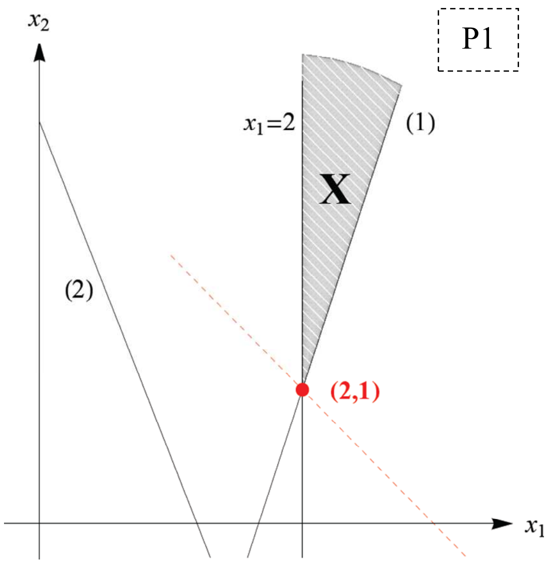
b) (2 puntos) Calcular la solución óptima del problema en el caso en el que el coeficiente de la variable x_1 en la función objetivo, en lugar de ser 1, tome cualquier valor $\lambda > 5/2$.

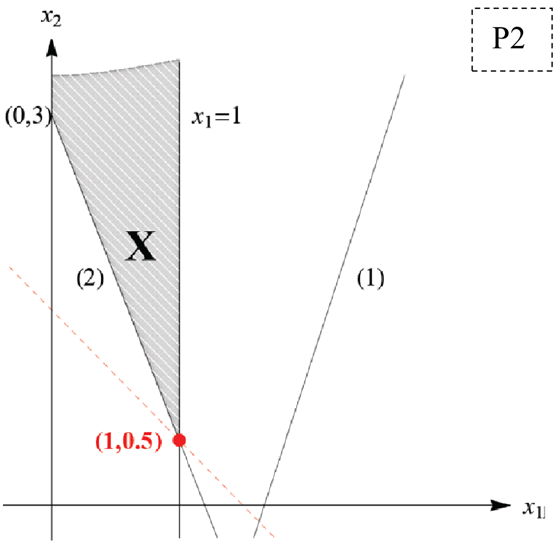
<u>Solución:</u>

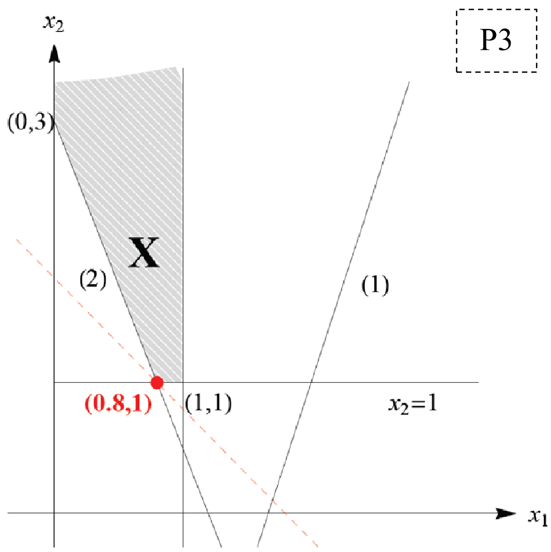
a) Resolución del problema relajado:

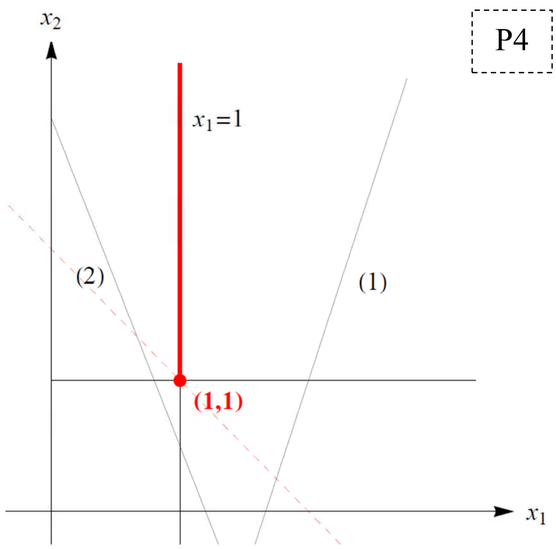


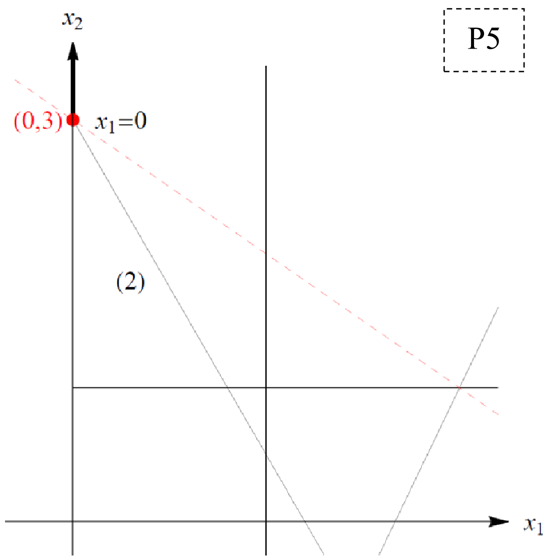

PR
$\bar{x}_R = (1.2, 0)$ $\bar{z}_R = 1.2$
Cota = ---
$x_1 \le 1$
$x_1 \ge 2$
P2
$\bar{x}_2 = (1, 0.5)$ $\bar{z}_2 = 1.5$
Cota = 3
P1
$\bar{x}_1 = (2, 1)$ $\bar{z}_1 = 3$
Cota = 3
Terminal
$x_2 \le 0$
$x_2 \ge 1$
P6
Infactible
Terminal
P3
$\bar{x}_3 = (0.8, 1)$ $\bar{z}_3 = 1.8$
Cota = 3
$x_1 \le 0$
$x_1 \ge 1$
P5
$\bar{x}_5 = (0, 3)$ $\bar{z}_5 = 3$
Cota = 2
Terminal
P4
$\bar{x}_4 = (1, 1)$ $\bar{z}_4 = 2$
Cota = 2
Terminal


x_2
P1
x_1=2
(1)
X
(2)
(2,1)
x_1


P2
x_2
(0,3)
$x_1=1$
X
(2)
(1)
(1,0.5)
x_1


P3
x_2
(0,3)
X
(2)
(1)
(0.8,1)
(1,1)
$x_2=1$
x_1


P4
x_2
$x_1=1$
(2)
(1)
(1,1)
x_1



Solución: $\overline{\mathrm{x}} = (1,1)$

$\overline{z} = 2$

b) Si: $\lambda > 5/2$ entonces la solución del Problema Relajado es:

$$\overline{\mathrm{x}}_R = (0,3)$$
$$\overline{z}_R = 3$$

Dado que la solución tiene ambas variables enteras ésta será la solución del Problema Lineal Entero.

2. El departamento de Recursos Humanos de una empresa está preparando un encuentro formativo en Madrid para trabajadores de sus delegaciones en Bilbao, Barcelona, Sevilla, Valencia y Zaragoza. Después de analizar las necesidades formativas de sus trabajadores, decide organizar 3 seminarios, S1, S2 y S3, que se desarrollarán simultáneamente. La delegación de Bilbao tiene capacidad para enviar a 7 de sus trabajadores al encuentro, la de Barcelona a 5, la de Sevilla a 7, la de Valencia a 2 y la de Zaragoza a 6. En la siguiente tabla se recoge el número de trabajadores que como mucho pueden participar en cada seminario.

	Bilbao	**Barcelona**	**Sevilla**	**Valencia**	**Zaragoza**
S1	4	2	2	--	--
S2	1	3	2	2	3
S3	--	--	3	--	1

Cada seminario se impartirá en una de las salas de reuniones de la sede central en Madrid, cada una de ellas con capacidad máxima para 8 personas.

a) (3 puntos) Si se desea maximizar el número de trabajadores que asistirán a los seminarios, dibujar el grafo que represente este problema.

b) (4 puntos) Si el departamento de Recursos Humanos ha confirmado la inscripción de los siguientes trabajadores en cada uno de los seminarios,

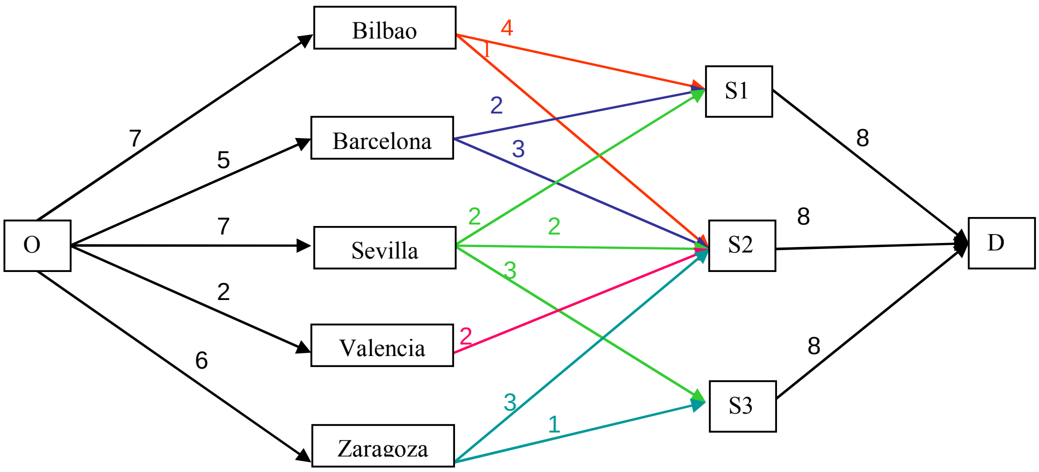
	Bilbao	**Barcelona**	**Sevilla**	**Valencia**	**Zaragoza**
S1	4	2	0	--	--
S2	1	3	2	2	0
S3	--	--	3	--	1

¿se podría inscribir algún trabajador más a alguno de los seminarios? ¿cuál sería el número máximo de trabajadores que asistirán a los seminarios? (Responder razonadamente)

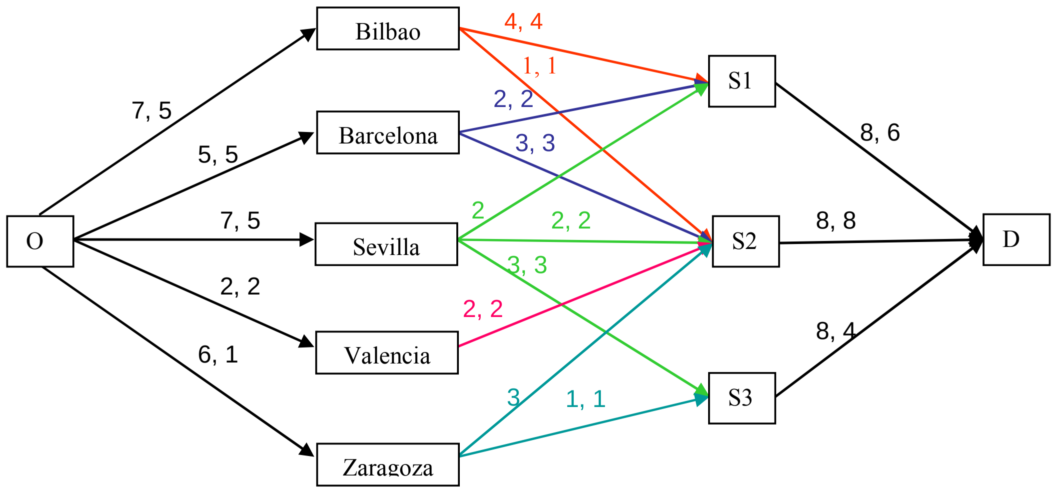
c) (3 puntos**)** ¿Cambiaría el número máximo de personas que asistirían a los seminarios, si la delegación de Valencia puede enviar a sus trabajadores también al seminario S3? (Responder razonadamente)

Solución:

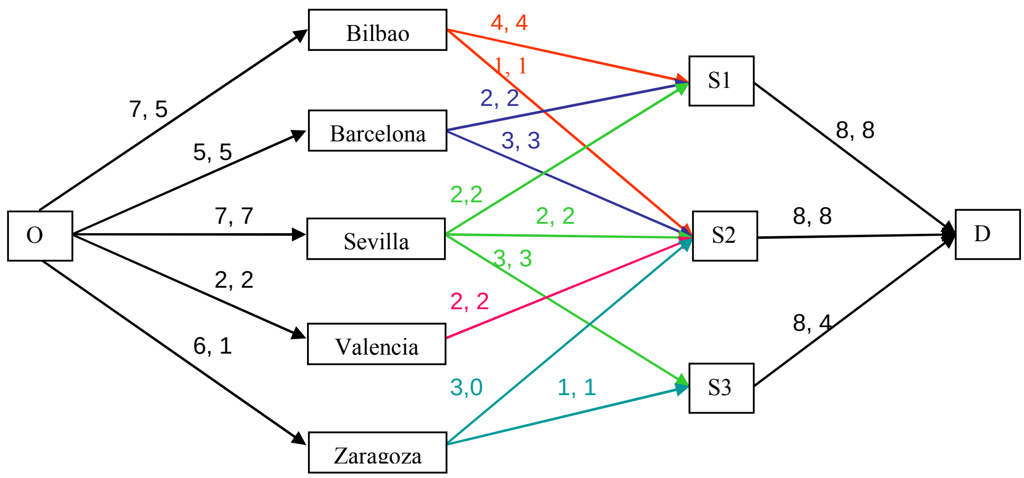
a) Este problema puede ser modelizado como un problema de flujo de trabajadores mediante el siguiente grafo.



b) Un grafo que representa esta situación es:



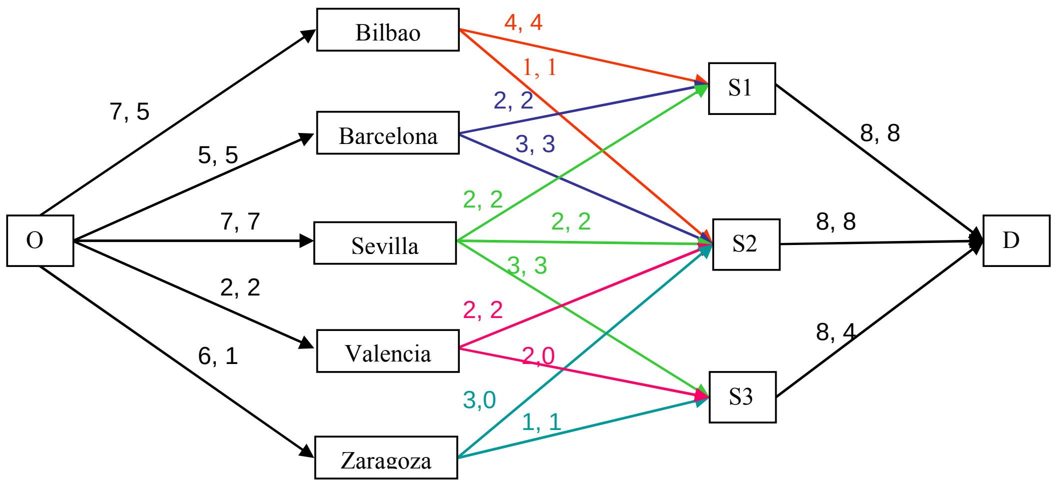
En esta situación, el flujo de trabajadores inscritos para ir desde las delegaciones al encuentro en la sede central de Madrid es un flujo cuyo valor es 18. Partimos de este flujo y consideramos la cadena de crecimiento del origen al destino (O, Sevilla, S1, D). El valor del flujo puede aumentar en $\Delta_f\left(\text{O,Sevilla,S1,D}\right) = \min\left\{7-5, 2-0, 8-6\right\} = 2$. Dado que todos sus arcos son directos, saturamos esta cadena añadiendo 2 a todos sus arcos. El resultado es el siguiente flujo cuyo valor es 20.



En esta nueva situación todas las cadenas del origen al destino están saturadas, por tanto el flujo que atraviesa la red es máximo y de valor $V_f = 20$.

Por lo tanto el número máximo de trabajadores que asistirán a los seminarios es 20.

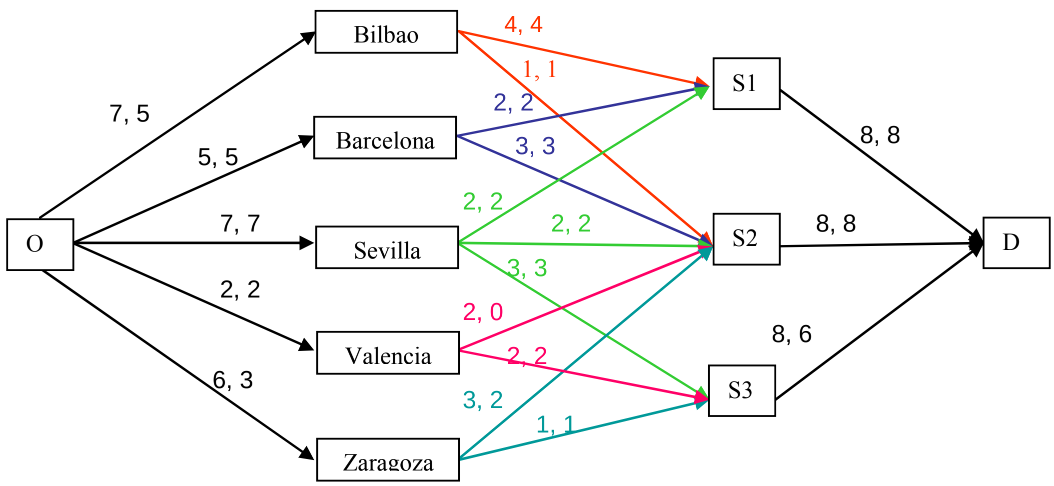
c) Se crea un nuevo arco desde Valencia al seminario S3 con una capacidad de 2.



En esta nueva situación hay una cadena de crecimiento (no saturada), la cadena (O,Zaragoza,S2,Valencia, S3,D), ya que sus arcos directos no están saturados y su inverso no tiene flujo nulo. Considerando esta cadena el valor del flujo puede aumentar en:

$$\Delta_f(\mathrm{O, Zaragoza, S2, Valencia,\ S3, D}) = \min\{6-1, 3-0, 2, 2-0, 8-4\} = 2.$$

Llegamos al siguiente flujo cuyo valor es 22.



No existe ninguna cadena de crecimiento del nodo O al nodo D. Luego este flujo es un flujo máximo, cuyo valor es $V_f = 22$.

El número máximo de trabajadores que asistirán a los seminarios es 22, 8 al seminario S1, 8 al seminario S2 y 6 al seminario S3.

3. Una empresa realiza dos tipos de bombones, de calidad excelente y de primera calidad. Para producirlos utiliza cacao y almendras, de los que dispone semanalmente de 48 kilos y 4.5 kilos respectivamente. Para realizar una caja de bombones de calidad excelente se necesita 600 gramos de cacao y 50 gramos de almendras mientras que para una caja de primera calidad se necesita 400 gramos de cacao y 50 gramos de almendras. Por cada caja de calidad excelente se obtiene un beneficio de 70 € y por cada una de primera calidad de 40 € y además se vende sin problemas todo lo que se produce.

   a) (5 puntos) Determinar, resolviendo el problema relajado, las producciones semanales eficientes de cajas de bombones de modo que la empresa maximice sus beneficios y el volumen de ventas.

   b) (2 puntos) Si la empresa considera cada venta como 10 € de beneficio, modelizar el problema relajado correspondiente.

   c) (3 puntos) Si la empresa necesita 7 horas de producción para obtener una caja de calidad excelente y 4 horas para una caja de primera calidad, determinar al menos dos producciones semanales eficientes del problema relajado de modo que la empresa maximice sus beneficios, y el volumen de ventas y minimice las horas de producción.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = cajas de bombones de calidad excelente producidas semanalmente

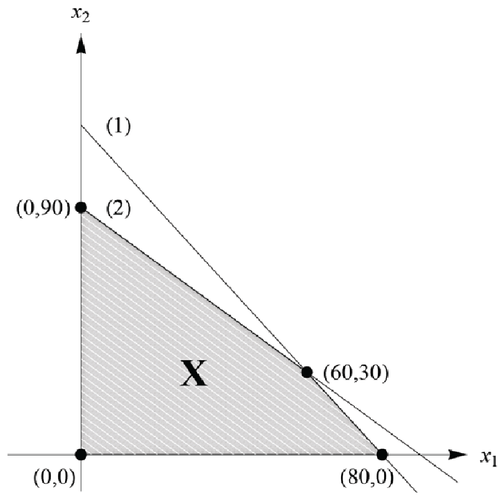
x_2 = cajas de bombones de primera calidad producidas semanalmente

La modelización queda como sigue:

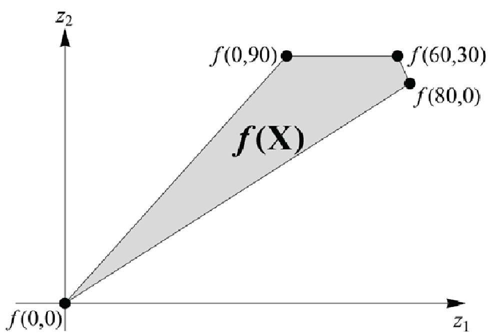
$$\text{Max } (70x_1 + 40x_2, \quad x_1 + x_2)$$
$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 600x_1 + 400x_2 \leq 48000 \\ 50x_1 + 50x_2 \leq 4500 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{cases}$$

Resolveremos el problema relajado:

$$\text{Max } (70x_1 + 40x_2, \quad x_1 + x_2)$$
$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 600x_1 + 400x_2 \leq 48000 & (1) \\ 50x_1 + 50x_2 \leq 4500 & (2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Vértices X	Vértices $f(X)$
$(0,0)$	$(0,0)$
$(80,0)$	$(5600,80)$
$(60,30)$	$(5400,90)$
$(0,90)$	$(3600,90)$



Soluciones eficientes: $\overline{(80,0)(60,30)}$

b) La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}\left[(70x_1+40x_2)+10(x_1+x_2)\right]$$
$$\text{s.a} \qquad \mathbb{x}\in X$$

c) La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } (70x_1+40x_2,\, x_1+x_2,\, -7x_1-4x_2)$$
$$\text{s.a} \quad \mathbb{x}\in X$$

Por el teorema de Zadeh si damos pesos positivos a las funciones objetivo, la solución óptima del problema ponderado será una solución eficiente del problema multiobjetivo.

Asignando: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10$ el modelo lineal ponderado tiene como soluciones óptimas $\overline{(0,90)(60,30)}$. Estas serán soluciones eficientes del modelo multiobjetivo.

4. El grupo de rock Led Seppelin está preparando su disco de despedida. El manager del grupo está definiendo el proyecto, estableciendo las duraciones (en semanas) de las actividades que lo componen, así como las relaciones de precedencia que se dan entre ellas, que aparecen recogidas en la siguiente tabla:

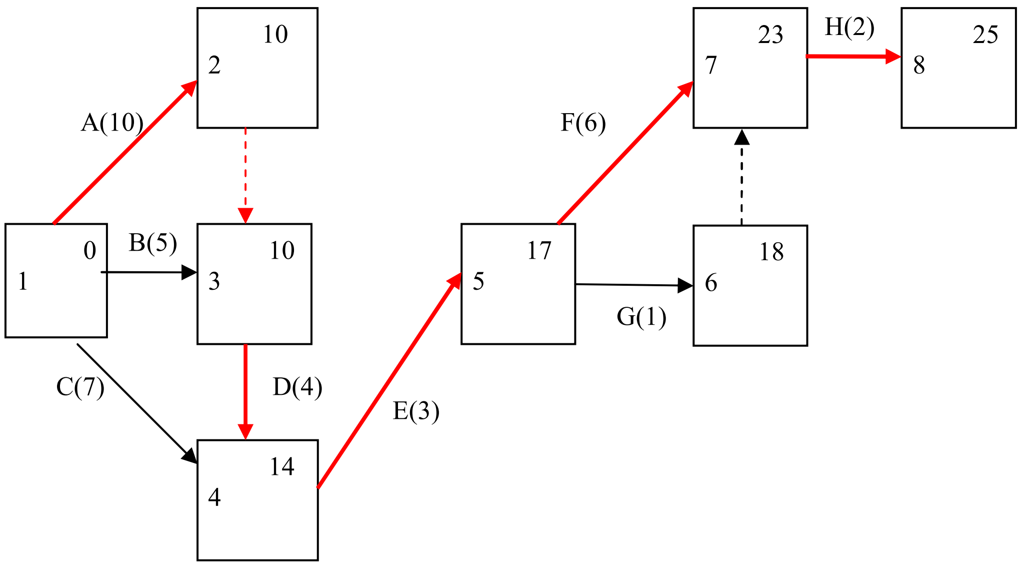
Actividad	**Descripción**	**Duración**	**Precedentes Inmediatas**
A	Composición de canciones	10	-
B	Producción	5	-
C	Diseño de portada	7	-
D	Grabación del disco	4	A y B
E	Fabricación	3	C y D
F	Promoción	6	E
G	Registro del disco	1	E
H	Distribución	2	F y G

a) (7 puntos) Elaborar un grafo asociado a este proyecto y determinar la duración prevista del proyecto y el camino crítico.

b) (3 puntos) El manager del grupo ha visto la necesidad de incorporar una nueva actividad I para garantizar el éxito del disco. Esta actividad es la grabación de un videoclip que se hará inmediatamente después de la grabación del disco e inmediatamente antes de la fase de promoción. La grabación del videoclip durará 5 semanas. Elaborar un grafo asociado al proyecto que recoja dicha actividad.

Solución:

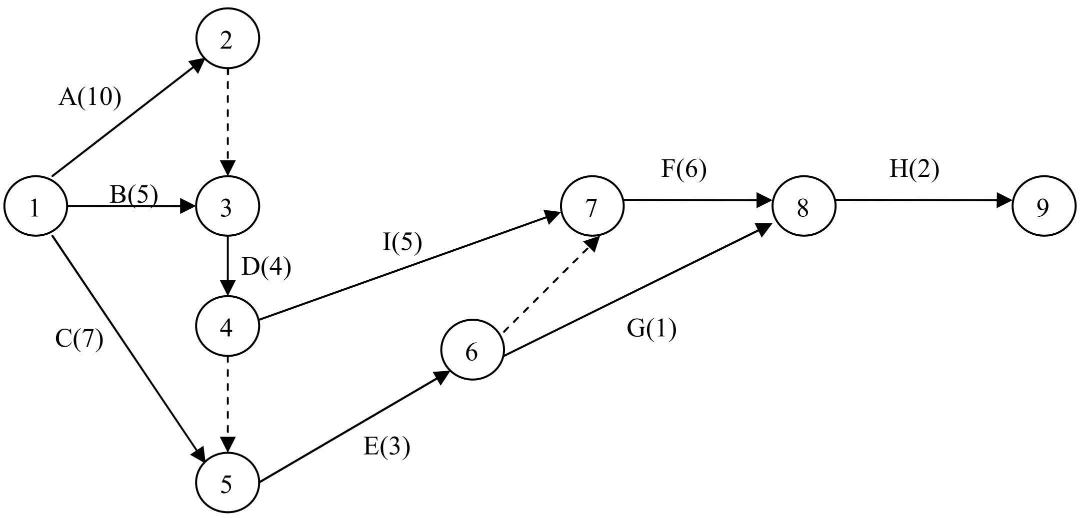
a) Un grafo que representa este proyecto es:



Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 25 semanas.

Camino crítico: (1,2,3,4,5,7,8).

b) Un grafo que representa este proyecto y que recoge la nueva actividad es:



INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Extraordinario Febrero 2010

1. La empresa de llaves JMI utiliza 3 materiales (aluminio, latón y plástico) para producir 3 tipos de llaves. La cantidad necesaria de estos materiales para fabricar una llave de cada tipo viene expresada en la siguiente tabla:

	Aluminio (g)	**Latón (g)**	**Plástico (g)**
Llave tipo 1	1.5	0	0.75
Llave tipo 2	0	2	1.25
Llave tipo 3	0.75	0.75	0.75

La empresa JMI dispone diariamente de 200 g de aluminio, 150 g de latón y 100 g de plástico en su planta principal donde lleva a cabo la producción. La producción de las llaves de tipo 1 conlleva unos costes fijos de 1500 € y un coste adicional de 1 € por unidad. Para las llaves de tipo 2, el coste fijo es de 1750 € con un coste variable de 1.5 € por unidad. Para las llaves de tipo 3, el coste fijo es de 1800 € y el variable es de 2 € por unidad. El precio de venta de cada llave es de 10 €, 15 € y 20 € para las llaves de tipo 1, 2, y 3 respectivamente.

a) (6 puntos) Plantear el problema como un problema de programación lineal entera con el objetivo de maximizar el beneficio diario.

b) (4 puntos) La empresa JMI está también considerando la posibilidad de trasladar la producción a una planta alternativa. La nueva planta dispondría de 250 g de aluminio, 140 g de latón y 150 g de plástico al día. Plantear el nuevo problema como un problema de programación lineal entera.

<u>Solución:</u>

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_i = número de llaves del tipo i producidas semanalmente $\quad i$=1,2,3

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se producen llaves del tipo } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1,2,3$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max }\left(10x_1+15x_2+20x_3-1500y_1-1750y_2-1800y_3-x_1-1.5x_2-2x_3\right)$$

$$\text{s.a}\quad\begin{cases}1.5x_1+0.75x_3\le 200\\ 2x_2+0.75x_3\le 150\\ 0.75x_1+1.25x_2+0.75x_3\le 100\\ x_i\ge 0 \text{ y enteras } i=1,2,3\\ x_i\le My_i \qquad i=1,2,3\\ y_i=0,1 \qquad i=1,2,3\end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos la variable de decisión siguiente:

$$z=\begin{cases}1 & \text{si se produce en la planta alternativa}\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max }\left(10x_1+15x_2+20x_3-1500y_1-1750y_2-1800y_3-x_1-1.5x_2-2x_3\right)$$

$$\text{s.a}\quad\begin{cases}1.5x_1+0.75x_3\le 200+Mz\\ 1.5x_1+0.75x_3\le 250+M\left(1-z\right)\\ 2x_2+0.75x_3\le 150+Mz\\ 2x_2+0.75x_3\le 140+M\left(1-z\right)\\ 0.75x_1+1.25x_2+0.75x_3\le 100+Mz\\ 0.75x_1+1.25x_2+0.75x_3\le 150+M\left(1-z\right)\\ x_i\ge 0 \text{ y enteras } i=1,2,3\\ x_i\le My_i \qquad i=1,2,3\\ y_i=0,1 \qquad i=1,2,3\\ z=0,\,1\end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. (10 puntos) La compañía Ordenata S.A. desea planificar el ensamblaje de dos nuevos modelos de ordenador el Core Duo KS500 y el Core Duo KS600. Ambos modelos precisan del mismo tipo de carcasa y lector óptico. En el modelo KS500 se ensambla la carcasa con 2 lectores ópticos. En el modelo KS600 se ensambla la carcasa con un lector óptico y además se añade un lector de tarjetas. Se dispone semanalmente de 1000 lectores ópticos, 500 lectores de tarjetas y de 600 carcasas. El ensamblaje de un KS500 lleva una 1 hora de trabajo y proporciona un beneficio

de 200 euros y el del KS600 lleva 1.5 horas de trabajo y su beneficio es de 500 euros.

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores, el director de la compañía desea alcanzar las siguientes metas en orden de prioridad:

- Prioridad 1. Producir semanalmente al menos 200 ordenadores KS500.
- Prioridad 2. Ensamblar al menos 500 ordenadores en total a la semana.
- Prioridad 3. Igualar el número de horas totales de trabajo dedicadas al ensamblaje de los dos tipos de ordenador.
- Prioridad 4. Obtener un beneficio semanal de al menos 250000 euros.

Obtener e interpretar la solución óptima del problema relajado, planteando y resolviendo gráficamente cada una de las metas.

Solución:

Definimos las variables de decisión siguientes:

x_1 = unidades ensambladas semanalmente del ordenador Core Duo KS500

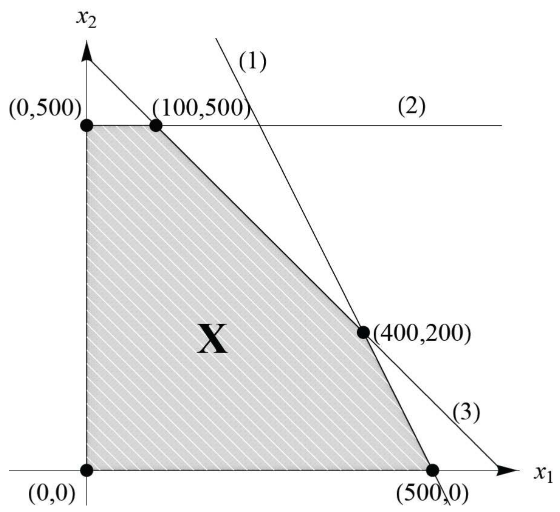
x_2 = unidades ensambladas semanalmente del ordenador Core Duo KS600

La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } L(y_1^-, y_2^-, y_3^+ + y_3^-, y_4^-)$$

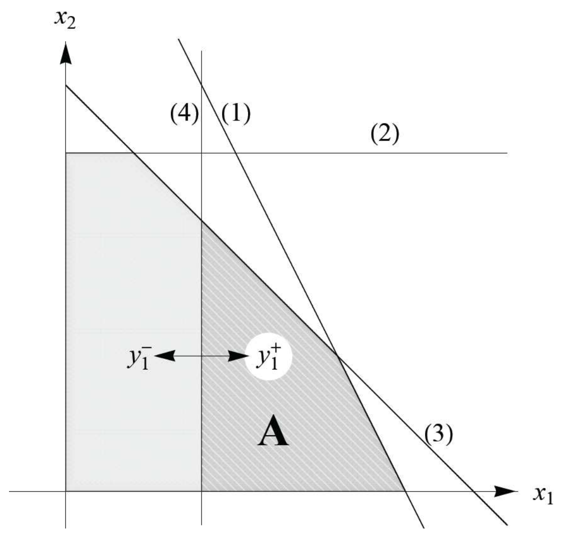
$$\text{s.a}\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1000 & (1) \\ x_2 \leq 500 & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 600 & (3) \\ x_1 - y_1^+ + y_1^- = 200 & (4) \\ x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 500 & (5) \\ x_1 - 1.5x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (6) \\ 200x_1 + 500x_2 - y_4^+ + y_4^- = 250000 & (7) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ y enteras} & \\ y_i^- \geq 0, \quad y_i^+ \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 & \end{cases}$$

Resolveremos el problema relajado. El conjunto de soluciones factibles será:



$$P_1 \equiv \text{ Min } (y_1^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 & (1) \\ x_2 \le 500 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 600 & (3) \\ x_1 - y_1^+ + y_1^- = 200 & (4) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^+ \ge 0, \quad y_1^- \ge 0 \end{cases}$$

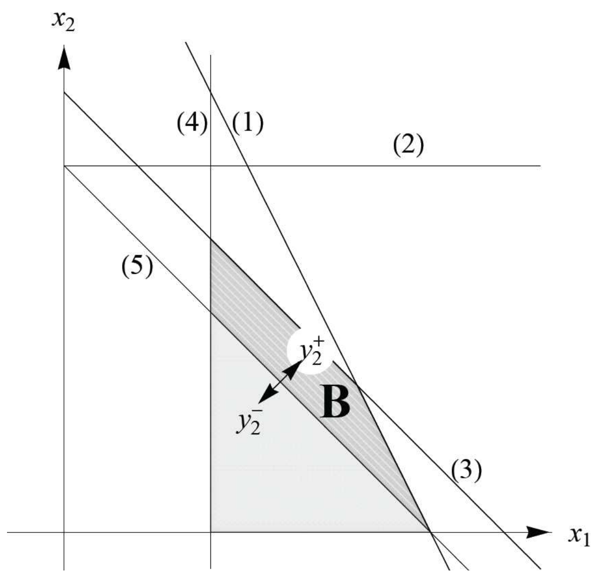


Soluciones óptimas: $\bar{\mathbf{x}} \in A$

Valor óptimo: 0

$$P_2 \equiv \text{ Min } (y_2^-)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 & (1) \\ x_2 \le 500 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 600 & (3) \\ x_1 - y_1^+ + y_1^- = 200 & (4) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^+ \ge 0, \quad y_1^- = 0 \\ x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 500 & (5) \\ y_2^+ \ge 0, \quad y_2^- \ge 0 \end{cases}$$

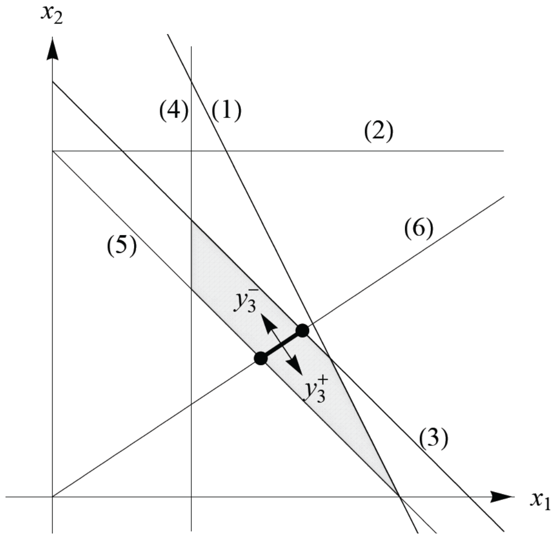


Soluciones óptimas: $\bar{\mathbf{x}} \in B$

Valor óptimo: 0

$$P_3 \equiv \text{ Min } (y_3^+ + y_3^-)$$

$$\text{s.a}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 & (1) \\ x_2 \le 500 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 600 & (3) \\ x_1 - y_1^+ + y_1^- = 200 & (4) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^+ \ge 0, \quad y_1^- = 0 \\ x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 500 & (5) \\ y_2^+ \ge 0, \quad y_2^- = 0 \\ x_1 - 1.5x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (6) \\ y_3^+ \ge 0, \quad y_3^- \ge 0 \end{cases}$$

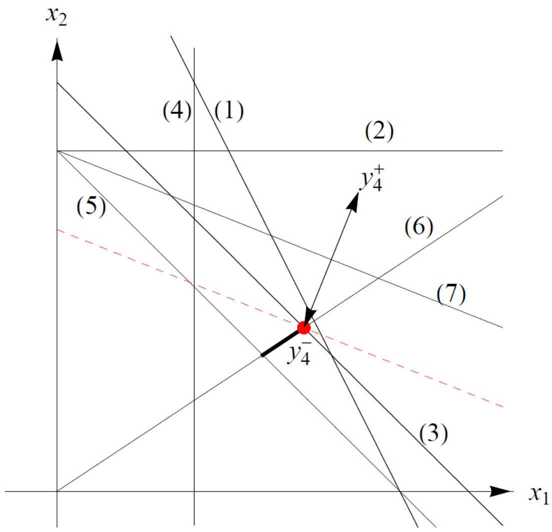


Soluciones óptimas: $\overline{\mathbf{x}} \in \overline{(300,200)(360,240)}$

Valor óptimo: 0

$$P_4 \equiv \text{ Min } (y_4^-)$$

$$\text{s.a}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 & (1) \\ x_2 \le 500 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 600 & (3) \\ x_1 - y_1^+ + y_1^- = 200 & (4) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ y_1^+ \ge 0, \quad y_1^- = 0 \\ x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 500 & (5) \\ y_2^+ \ge 0, \quad y_2^- = 0 \\ x_1 - 1.5x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 & (6) \\ y_3^+ = 0, \quad y_3^- = 0 \\ 200x_1 + 500x_2 - y_4^+ + y_4^- = 250000 & (7) \\ y_4^+ \ge 0, \quad y_4^- \ge 0 \end{cases}$$



Solución óptima: (360,240)

Valor óptimo: 58000

La solución óptima consiste en ensamblar 360 ordenadores KS500 y 240 ordenadores KS600. Con ellos se puede cubrir el pedido institucional de 200 KS500 (sobran 160 $\overline{y}_1^- = 0,\ \overline{y}_1^+ = 160$). Se ensamblan en total 500 ordenadores a la semana ($\overline{y}_2^- = 0,\ \overline{y}_2^+ = 0$). Se utilizan el mismo número de horas para ensamblar los dos tipos de ordenadores ($\overline{y}_3^- = 0,\ \overline{y}_3^+ = 0$). El beneficio semanal obtenido es de 192000 euros ($\overline{y}_4^+ = 0,\quad \overline{y}_4^- = 58000$).

3. Una empresa inmobiliaria va a realizar 4 proyectos de construcción, P1, P2, P3 y P4. Cada uno se identifica por el número de viviendas y el tipo de cada una. Así:
   - con el proyecto P1 se construirán 50 viviendas de dos habitaciones,
   - con el proyecto P2, 100 viviendas de tres habitaciones,
   - con el proyecto P3, 80 viviendas de cuatro habitaciones y
   - con el proyecto P4, 80 viviendas de cuatro habitaciones y garaje.

   La empresa dispone de suelo en tres distintas ubicaciones, Bilbao, Sevilla y Valencia. El suelo disponible en Bilbao admite hasta 200 viviendas de cualquier tipo, el de Sevilla hasta 180 y el de Valencia hasta 120. Los costes de construcción de cada vivienda varían según el tipo y la ubicación y quedan recogidos (en unidades monetarias) en la siguiente tabla.

	Bilbao	Sevilla	Valencia
2 habitaciones	20	25	30
3 habitaciones	30	30	35
4 habitaciones	40	45	45
4 habitaciones y garaje	45	50	50

La empresa necesita tomar la decisión de cómo planificar los cuatro proyectos en las distintas ubicaciones para minimizar los costes.

a) (7 puntos) Determinar cómo debe hacerlo haciendo uso del Método Húngaro si cada proyecto se realiza exclusivamente en una ciudad y las tres ciudades deben ser escogidas. Dar todas las alternativas óptimas posibles.

b) (3 puntos) Si en Valencia el suelo disponible fuera de 80 viviendas ¿a qué tabla le aplicarías el Método Húngaro para planificar los 4 proyectos en las distintas ciudades?

<u>Solución:</u>

a) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	Bilbao	Bilbao	Sevilla	Sevilla	Valencia
P1	1000	1000	1250	1250	1500
P2	3000	3000	3000	3000	3500
P3	3200	3200	3600	3600	3600
P4	3600	3600	4000	4000	4000
F_1	0	0	0	0	M

Con M positivo suficientemente grande.

	Bilbao	Bilbao	Sevilla	Sevilla	Valencia	
P1	1000	1000	1250	1250	1500	←-1000
P2	3000	3000	3000	3000	3500	←-3000
P3	3200	3200	3600	3600	3600	←-3200
P4	3600	3600	4000	4000	4000	←-3600
F_1	0	0	0	0	M	

Con M positivo suficientemente grande.

	Bilbao	Bilbao	Sevilla	Sevilla	Valencia
P1	0	0	250	250	500
P2	0	0	0	0	500
P3	0	0	400	400	400
P4	0	0	400	400	400
F_1	0	0	0	0	M
					↑-400

Con M positivo suficientemente grande.

	Bilbao	Bilbao	Sevilla	Sevilla	Valencia
P1	0	$\cancel{0}$	250	250	100
P2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0	$\cancel{0}$	100
P3	$\cancel{0}$	0	400	400	$\cancel{0}$
P4	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	400	400	0
F_1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0	M

Con M positivo suficientemente grande.

Y obtenemos las dos siguientes asignaciones óptimas:

Asignación óptima 1: P1→Bilbao, P2→Sevilla, P3→Bilbao, P4→Valencia.

Asignación óptima 2: P1→Bilbao, P2→Sevilla, P3→Valencia, P4→Bilbao.

Coste mínimo: 11200 unidades monetarias.

b) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	Bilbao	Bilbao	Sevilla	Sevilla	Valencia
P1	1000	1000	1250	1250	1500
P2	3000	3000	3000	3000	M
P3	3200	3200	3600	3600	3600
P4	3600	3600	4000	4000	4000
F_1	0	0	0	0	M

Con M positivo suficientemente grande.

4. Considerar el proyecto cuyas actividades y duraciones correspondientes (en semanas) aparecen recogidas en la siguiente tabla:

Actividades	Arcos	Duración optimista	Duración más probable	Duración pesimista
A	(1,2)	7	8	9
B	(1,3)	6	7	14
C	(2,6)	6	9	12
D	(3,4)	4	4	4
E	(3,5)	7	8	15
F	(3,6)	10	13	22
G	(4,5)	3	4	11
H	(5,6)	4	5	12
I	(5,7)	7	9	11
J	(6,7)	3	4	11

Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) (4 puntos) ¿Cuál es la duración media estimada del proyecto y el o los caminos críticos?

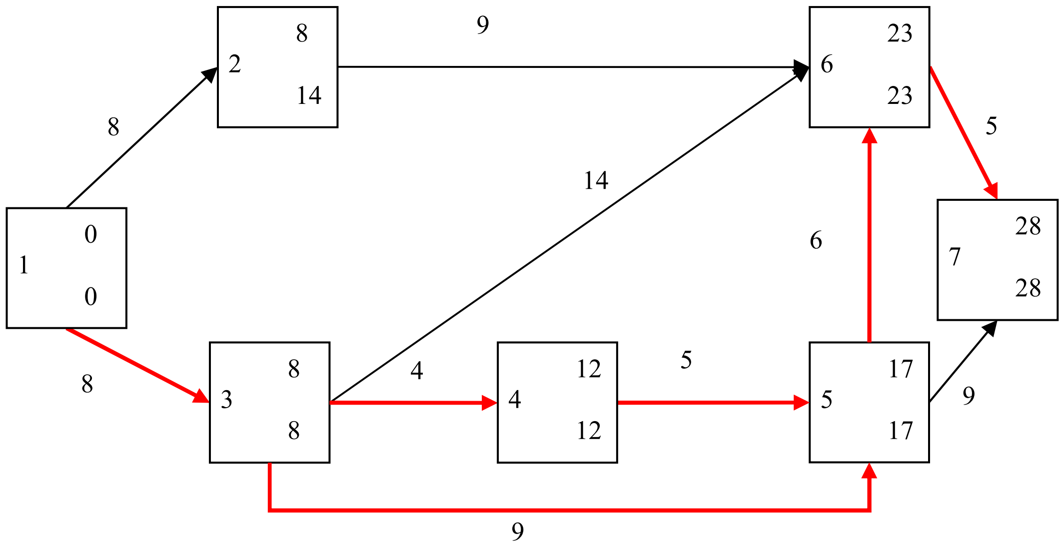
b) (2 puntos) ¿Qué efecto tendría sobre la duración media estimada del proyecto si todas las actividades críticas se retrasaran sobre su duración media estimada en una semana?

c) (4 puntos) ¿Qué efecto tendría sobre la duración media estimada del proyecto si la duración media estimada de la actividad (2,6) aumentara en 6 semanas? ¿Y sobre el final más tardío de la actividad (1,2)?

Solución:

a) Bajo los supuestos del PERT se estima la duración media de cada actividad como $\overline{t}(i,j) = \dfrac{t_o(i,j) + 4t_m(i,j) + t_p(i,j)}{6}$ donde t_o representa la duración optimista, t_m la más probable y t_p la pesimista.

Un grafo que representa a este proyecto es el siguiente, donde el valor de cada arco es la duración media estimada de cada actividad.



Duración media estimada del proyecto: 28 semanas.

Caminos críticos: (1,3,4,5,6,7) y (1,3,5,6,7).

b) Si la duración media estimada de todas las actividades críticas se retrasan una semana, como uno de los caminos críticos tiene 5 actividades y el otro cuatro, entonces la duración media estimada del proyecto aumenta en 5 semanas, y sólo hay un camino crítico, el (1,3,4,5,6,7).

c) Si la duración media estimada de la actividad (2,6) aumenta en 6 semanas, dado que su margen es

$$M(2,6) = FMT^*(2,6) - CMT(2,6) - \overline{t}(2,6) = Q(6) - P(2) - 9 = 23 - 8 - 9 = 6$$

la duración media estimada del proyecto no varía y esta actividad pasa a ser crítica.

Además el final más tardío de la actividad (1,2) pasa a ser de 8 semanas ya que en esta situación $FMT^*(1,2) = Q(2) = 23 - (9+6) = 8$.

INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Junio 2010

1. Una compañía produce cuatro productos P1, P2, P3 y P4. Cada uno de ellos pasa por tres plantas de producción: la planta A, la planta B, y la planta C. En cada planta se dispone de una capacidad de 10000 horas semanales de trabajo.

   La tabla siguiente muestra el ingreso unitario, en euros, y las horas de trabajo necesarias en cada planta para la producción de una unidad de cada uno de los productos.

	P1	P2	P3	P4
Ingreso unitario	6 €	7 €	8 €	9 €
Planta A	5 horas	3 horas	6 horas	4 horas
Planta B	4 horas	6 horas	3 horas	5 horas
Planta C	5 horas	6 horas	3 horas	2 horas

La empresa ha decidido producir como máximo tres de esos productos, sabiendo que los costes fijos de producción de cada uno de ellos son 2800, 4000, 3800 y 4100 €, respectivamente. Además ha decidido que:

- Se produce de P2 solo si se produce de P3,
- Si no se produce de P4 entonces se deben producir de P1 y P2.

a) (8 puntos) Formular un modelo de programación lineal entera, para decidir qué productos deben ser producidos y cuántas unidades de cada uno de ellos, si la empresa pretende maximizar beneficios.

b) (2 puntos) La empresa va a ampliar 1000 horas de trabajo en dos de sus plantas. Formular el nuevo modelo de programación lineal entera, para decidir en qué plantas se debe realizar esta ampliación.

<u>Solución:</u>

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

$x_i =$ unidades producidas semanalmente del producto $\mathrm{P}i$, $i = 1,...,4$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se produce el producto P}i \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad i = 1,\ldots,4$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } [6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 - (2800y_1 + 4000y_2 + 3800y_3 + 4100y_4)]$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 10000 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 10000 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 10000 \\ x_i \le M\ y_i \qquad i = 1,\ldots,4 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 3 \\ y_3 \ge y_2 \\ \left.\begin{array}{l} y_1 + y_4 \ge 1 \\ y_2 + y_4 \ge 1 \end{array}\right\rangle \Leftrightarrow y_1 + y_2 \ge 2(1 - y_4) \\ x_i \ge 0 \text{ y enteras } i = 1,\ldots,4 \\ y_i = 0,1 \qquad i = 1,\ldots,4 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos las variables de decisión siguientes

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se amplían 1000 horas en la planta } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad j = A, B, C$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } [6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 - (2800y_1 + 4000y_2 + 3800y_3 + 4100y_4)]$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 10000 + 1000\ z_A \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 10000 + 1000\ z_B \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 10000 + 1000\ z_C \\ x_i \le M\ y_i \qquad i = 1,\ldots,4 \\ z_A + z_B + z_C = 2 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 3 \\ y_3 \ge y_2 \\ y_1 + y_4 \ge 1 \\ y_2 + y_4 \ge 1 \\ x_i \ge 0 \text{ y enteras } i = 1,\ldots,4 \\ y_i = 0,1 \qquad i = 1,\ldots,4 \\ z_j = 0,1 \qquad j = A, B, C \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

2. Una empresa aceitera se está planteando la forma de dividir un terreno cultivable de 15 hectáreas para plantar olivos y girasoles.

   La inversión por hectárea dedicada a la plantación de olivos es de 10000 € y la de cada hectárea dedicada a la plantación de girasoles es de 5000 €.

   Siguiendo las recomendaciones del consejo regulador para la producción de aceite, la parte dedicada a la plantación de olivos debe estar entre 8 y 12 hectáreas (ambas inclusive) y la parte dedicada a los girasoles entre 2 y 6 hectáreas (ambas inclusive).

   a) (5 puntos) La empresa se ha planteado como objetivos, minimizar la inversión y maximizar el número de hectáreas dedicadas a la plantación de olivos.

      Hallar gráficamente el conjunto de soluciones factibles X, representar su conjunto imagen *f*(X) y hallar las soluciones eficientes.

   b) (5 puntos) La empresa por motivos fiscales ha decidido plantearse la meta de invertir al menos 140000 € y maximizar el número de hectáreas totales cultivadas, en ese orden de prioridades.

      Modelizar y resolver el nuevo problema.

<u>Solución:</u>

a) Definimos las variables de decisión siguientes

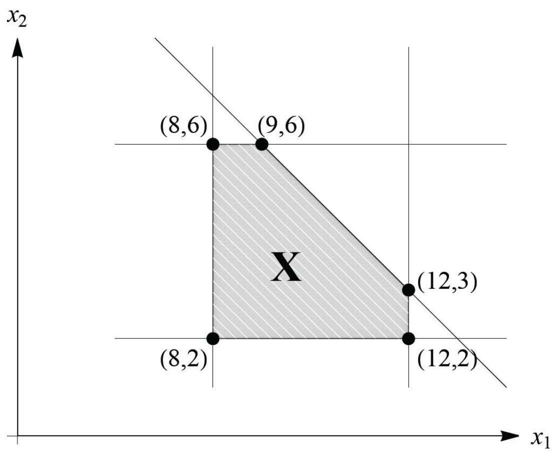
   $x_1 =$ hectáreas cultivadas de olivos

   $x_2 =$ hectáreas cultivadas de girasoles

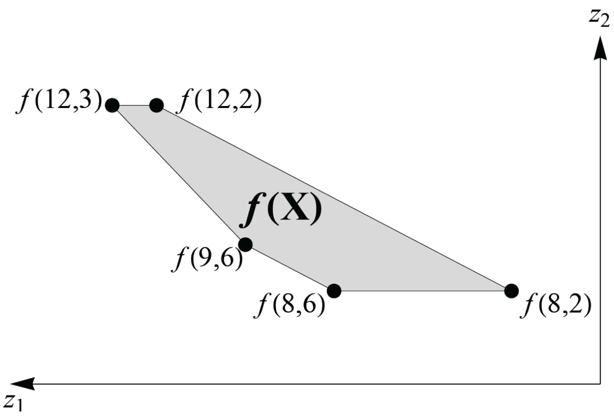
   La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } (-10000x_1 - 5000x_2, x_1)$$
$$\text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 15 \\ 8 \le x_1 \le 12 \\ 2 \le x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

   El conjunto de soluciones factibles del problema es:



Vértices X	Vértices $f(X)$
$(8,2)$	$(-90000,8)$
$(12,2)$	$(-130000,12)$
$(12,3)$	$(-135000,12)$
$(9,6)$	$(-120000,9)$
$(8,6)$	$(-110000,8)$



Soluciones eficientes: $\overline{(8,2)(12,2)}$

b) Definimos las variables de decisión siguientes

$x_1 =$ hectáreas cultivadas de olivos

$x_2 =$ hectáreas cultivadas de girasoles

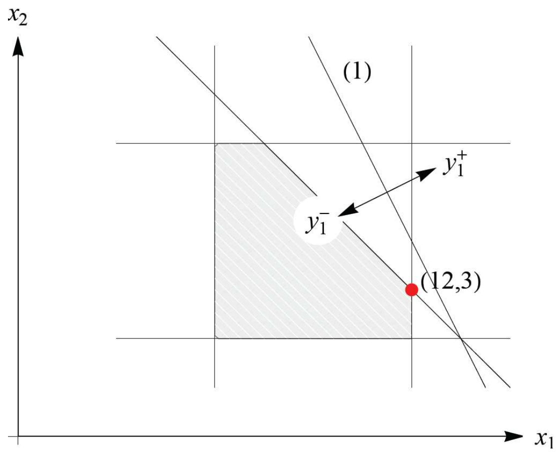
La modelización queda como sigue:

$$\text{Min } L(y_1^-, -x_1 - x_2)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15 \\ 8 \leq x_1 \leq 12 \\ 2 \leq x_2 \leq 6 \\ 10000x_1 + 5000x_2 - y_1^+ + y_1^- = 140000 \quad (1) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ y_1^+ \geq 0, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{Min}\ (y_1^-)$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15 \\ 8 \leq x_1 \leq 12 \\ 2 \leq x_2 \leq 6 \\ 10000x_1 + 5000x_2 - y_1^+ + y_1^- = 140000 \quad (1) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ y_1^+ \geq 0, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$



Solución óptima: (12,3)

Valor óptimo: 5000

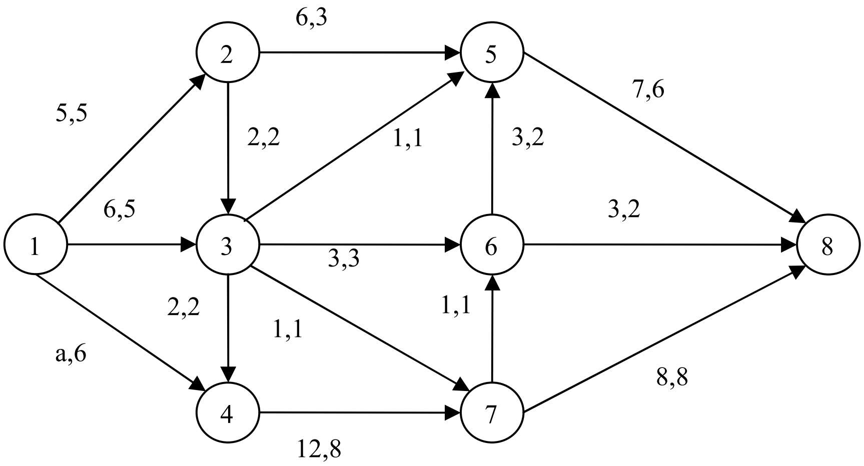
$$\mathrm{P}_2 \equiv \mathrm{Max}\ (x_1 + x_2)$$

$$\text{s.a}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15 \\ 8 \leq x_1 \leq 12 \\ 2 \leq x_2 \leq 6 \\ 10000x_1 + 5000x_2 - y_1^+ + y_1^- = 140000 \quad (1) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ y_1^+ \geq 0, y_1^- = 5000 \end{cases}$$

Dado que la solución óptima de P_1 es un único punto, ese mismo punto es también la solución óptima de P_2 y, por tanto, del problema.

Se cultivarán 12 hectáreas de olivos y 3 hectáreas de girasoles. El cultivo total es de 15 hectáreas y se hará una inversión total de 135000 € ($\overline{y}_1^- = 5000, \quad \overline{y}_1^+ = 0$).

3. Dada la siguiente red donde el primer número del par asignado representa la capacidad del arco:



donde $a \geq 6$.

a) (5 puntos) Si la capacidad del arco (1,4) es 6, ¿la asignación dada en la red es un flujo? ¿Es un flujo máximo? (Contestar razonadamente a las preguntas).

b) (5 puntos) A partir de la asignación dada en la red, calcular el valor del flujo máximo para $a = 8$.

Solución:

a) La asignación dada en la red es un flujo ya que:

❖ El valor de cada arco es un número no negativo y no excede la capacidad del arco.

❖ Para cada nodo (excepto el origen y el destino), la suma de los valores de los arcos que llegan al nodo es igual a la suma de los valores de los arcos que salen de dicho nodo:

Nodo 2: $5 = 2 + 3$

Nodo 3: $5 + 2 = 1 + 3 + 1 + 2$

Nodo 4: $6 + 2 = 8$

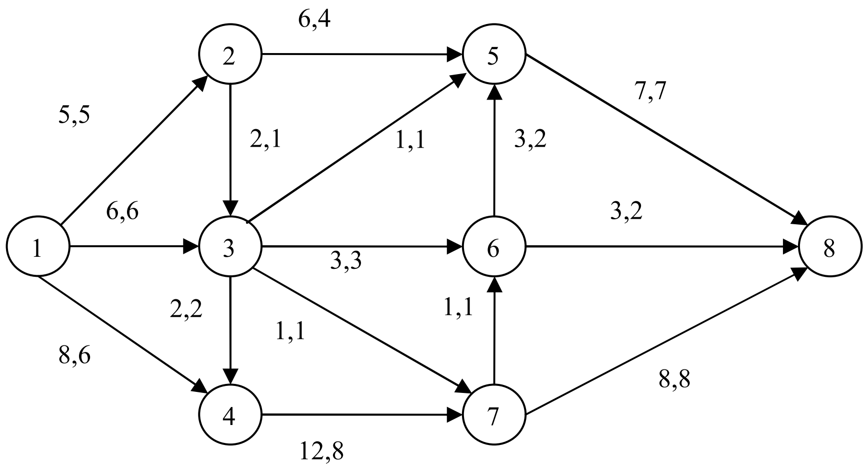
Nodo 5: $3 + 1 + 2 = 6$

Nodo 6: $3 + 1 = 2 + 2$

Nodo 7: $1 + 8 = 1 + 8$

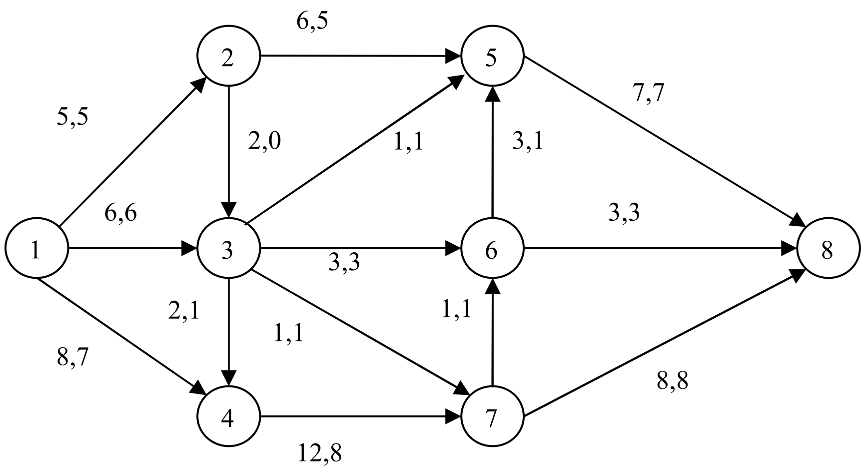
Para este flujo la cadena (1,3,2,5,8) no está saturada, ya que sus arcos directos no están saturados y el inverso no tiene flujo nulo. El valor del flujo puede aumentar en: $\Delta_f(1,3,2,5,8) = \min\{6-5, 2, 6-3, 7-6\} = 1$, luego este flujo no es máximo.

b) Consideramos la cadena (1,3,2,5,8) del apartado anterior. Saturamos la cadena aumentando en 1 el valor del flujo de sus arcos directos y disminuyendo en esa magnitud el del arco inverso. El resultado es el siguiente flujo cuyo valor es 17:



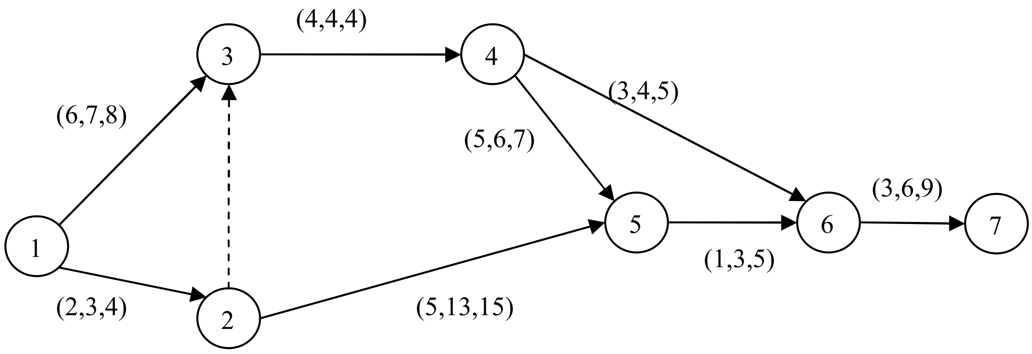
Consideramos la cadena de crecimiento (1,4,3,2,5,6,8).

$\Delta_f(1,4,3,2,5,6,8) = \min\{8-6, 2, 1, 6-4, 2, 3-2\} = 1$. Saturamos esta cadena sumando 1 al valor de sus arcos directos y restando 1 al de sus inversos y llegamos al siguiente flujo cuyo valor es 18.



No existe ninguna cadena de crecimiento del nodo 1 al nodo 8. Luego este flujo es un flujo máximo, cuyo valor es $V_f = 18$.

4. En el grafo siguiente se representa un proyecto. En los arcos se indica los tiempos optimista, modal y pesimista, en días, de las diferentes actividades.



a) (5 puntos) Calcular la duración media estimada del proyecto, el camino crítico y la varianza de la duración del proyecto. Calcular los márgenes de las actividades (1,2) y (3,4).

b) (5 puntos) Si se incorpora una nueva actividad en el arco (2,4) con un tiempo medio de duración de *t* días. Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

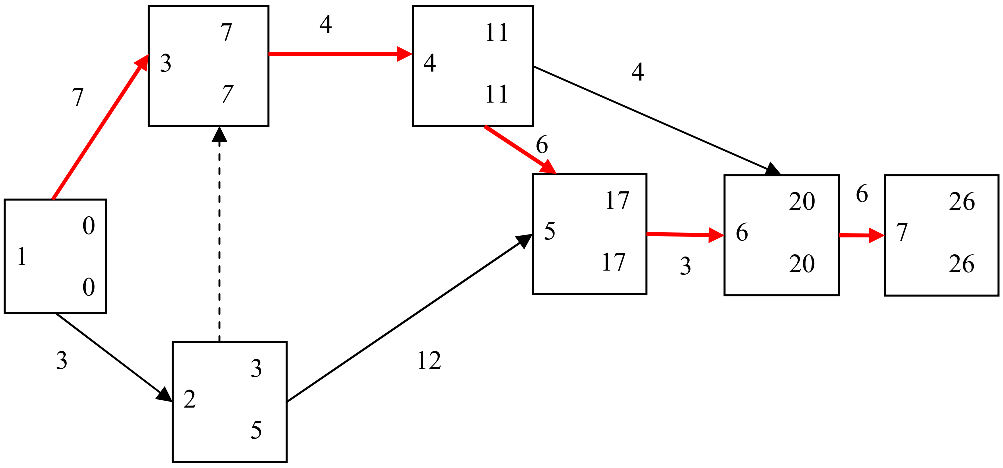
   i) ¿Para qué valores de *t* la duración media del proyecto no varía?

   ii) ¿Para qué valores de *t* la actividad (3,4) deja de ser crítica? ¿Cuál sería su margen?

Solución:

a) Bajo los supuestos del PERT se estima la duración media de cada actividad como $\bar{t}(i,j) = \dfrac{t_o(i,j) + 4t_m(i,j) + t_p(i,j)}{6}$ donde t_o representa la duración optimista, t_m la más probable y t_p la pesimista. Y la varianza de la duración de cada actividad se estima como $\sigma^2_{(i,j)} = \left(\dfrac{t_p(i,j) - t_o(i,j)}{6}\right)^2$.

Un grafo que representa a este proyecto es el siguiente, donde el valor de cada arco es la duración media estimada de cada actividad.



Duración media estimada del proyecto: 26 días.

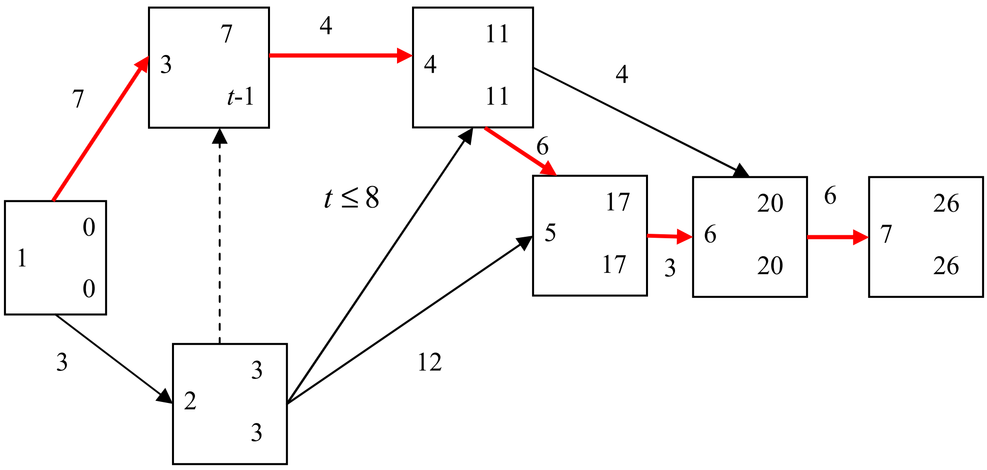
Camino crítico: (1,3,4,5,6,7).

Varianza de la duración del proyecto:

$$\sigma^2_{(1,3)} + \sigma^2_{(3,4)} + \sigma^2_{(4,5)} + \sigma^2_{(5,6)} + \sigma^2_{(6,7)} = 1.666$$

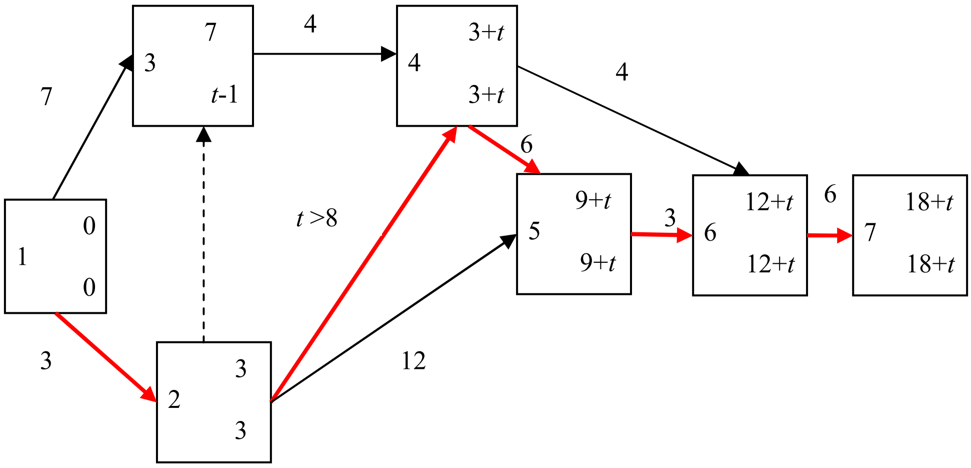
b)

i) Si $t \le 8$, un grafo que representa a este proyecto es el siguiente



Luego, si $t \le 8$, $P(4) = 11$ y la duración media estimada del proyecto no varía. El camino (1,3,4,5,6,7) sigue siendo el único camino crítico.

Si $t > 8$,



La duración media estimada del proyecto es $18+t>26$.

ii) Si $t \le 8$, el camino (1,3,4,5,6,7) sigue siendo crítico, luego la actividad (3,4) es crítica.

Si $t>8$, el camino crítico es (1,2,4,5,6,7), entonces la actividad (3,4) deja de ser crítica y su margen es:

$M(3,4)=Q(4)-P(3)-\overline{t}(3,4)=3+t-7-4=t-8$.

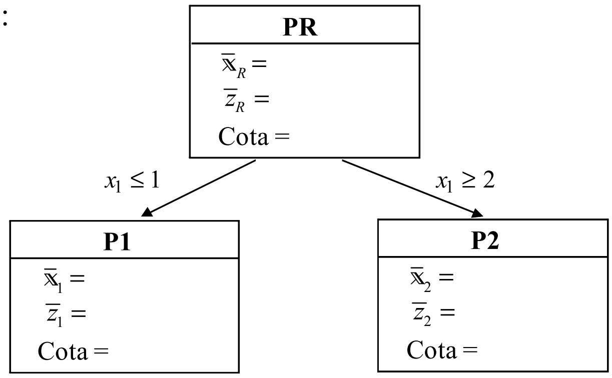
INVESTIGACION OPERATIVA (3º LADE)

Septiembre 2010

1. (10 puntos) Sea el problema de PLE:

$$\text{Max } (3x_1 + x_2)$$

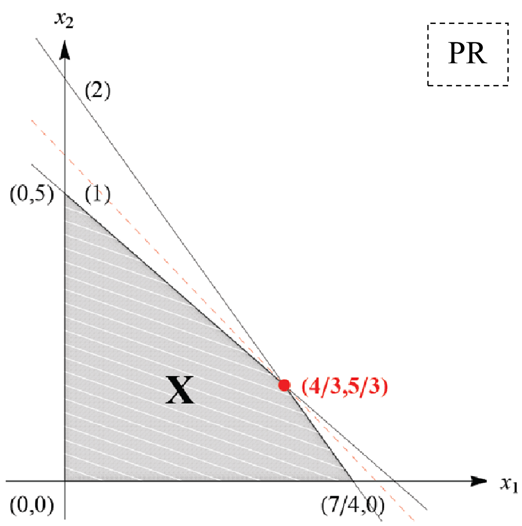
$$\text{s.a} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 10 & (1) \\ 4x_1 + x_2 \leq 7 & (2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{cases}$$

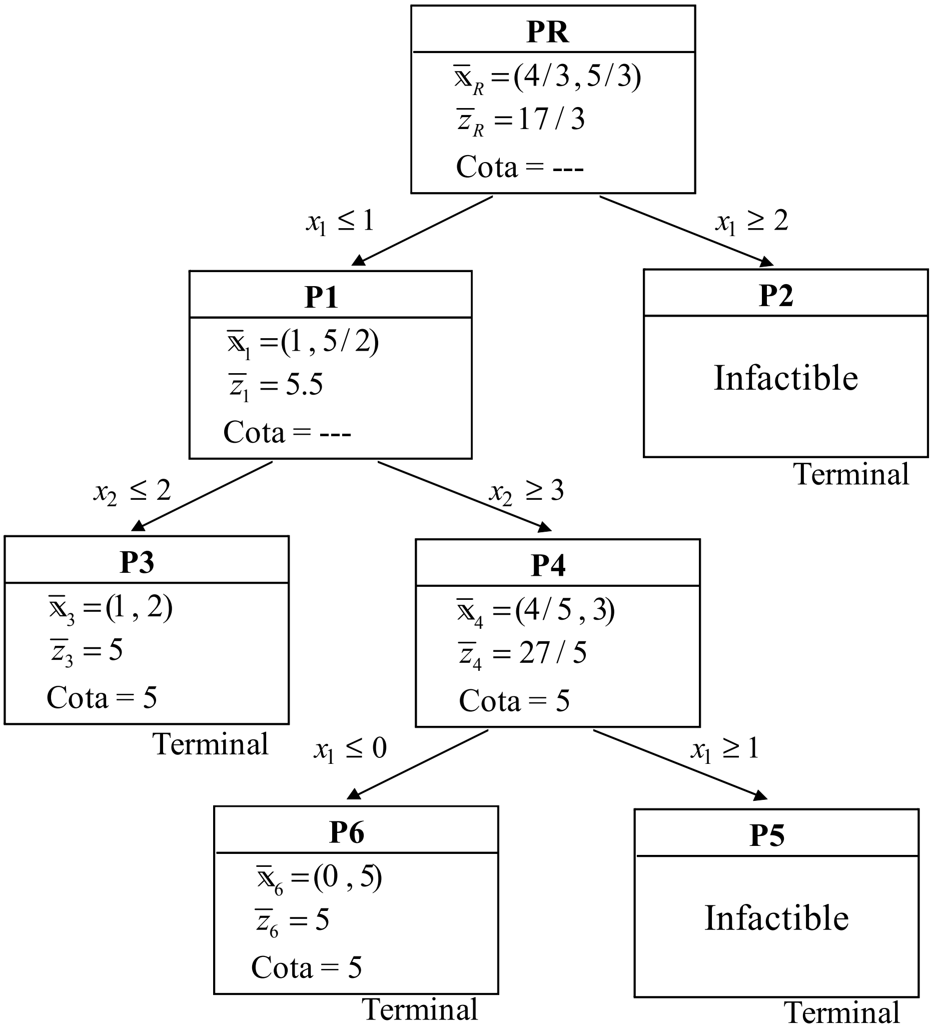


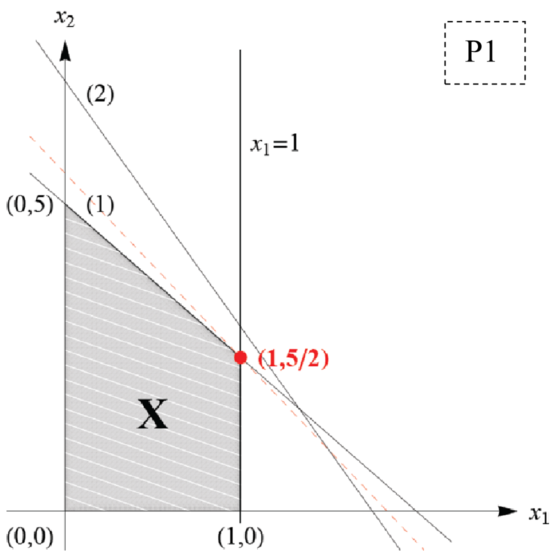
Completar los datos que faltan en el árbol anterior correspondiente al método de ramificación y acotación, y continuar el árbol en el caso de que sea necesario para obtener la solución óptima del problema.

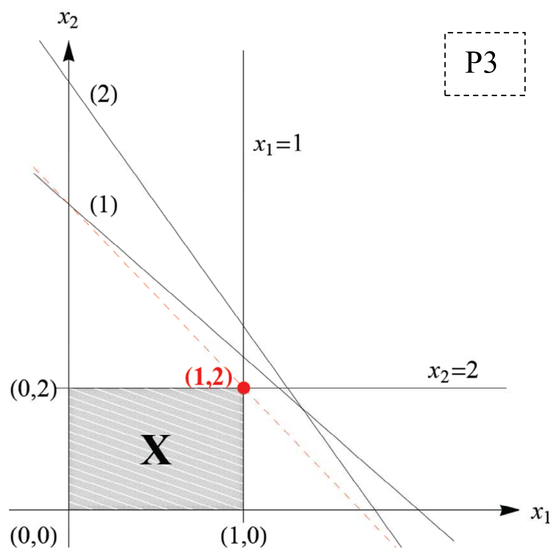
Solución:

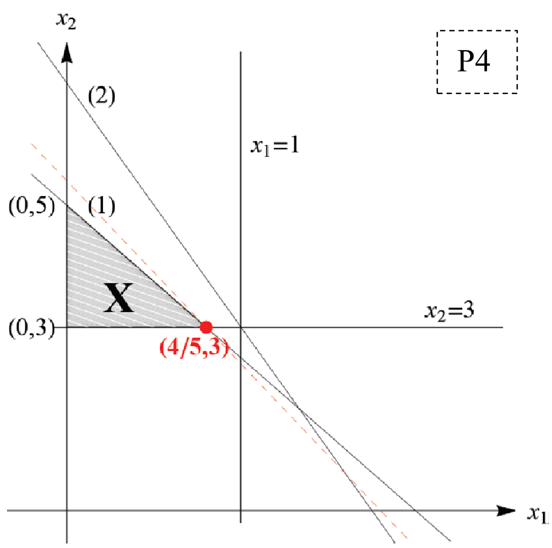
Resolución del problema relajado:

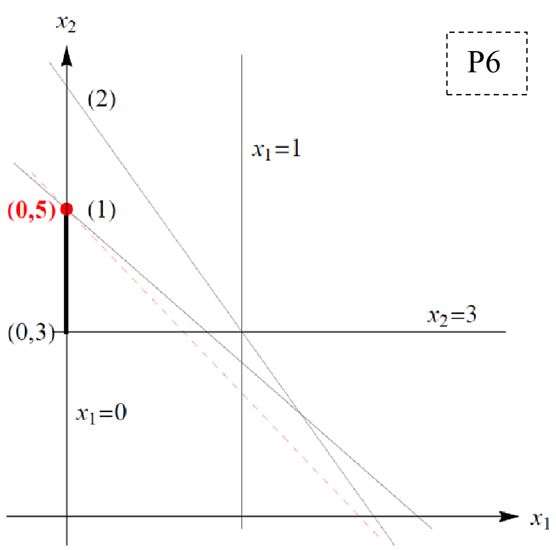



PR
$\bar{x}_R = (4/3, 5/3)$
$\bar{z}_R = 17/3$
Cota = ---
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
P1
$\bar{x}_1 = (1, 5/2)$
$\bar{z}_1 = 5.5$
Cota = ---
P2
Infactible
Terminal
$x_2 \leq 2$
$x_2 \geq 3$
P3
$\bar{x}_3 = (1, 2)$
$\bar{z}_3 = 5$
Cota = 5
Terminal
P4
$\bar{x}_4 = (4/5, 3)$
$\bar{z}_4 = 27/5$
Cota = 5
$x_1 \leq 0$
$x_1 \geq 1$
P6
$\bar{x}_6 = (0, 5)$
$\bar{z}_6 = 5$
Cota = 5
Terminal
P5
Infactible
Terminal


x_2
P1
(2)
$x_1=1$
(0,5)
(1)
(1,5/2)
X
(0,0)
(1,0)
x_1







Soluciones óptimas: (0, 5) y (1,2)

Valor óptimo: 5

2. (10 puntos) Una compañía agrícola dispone de 1000 hectáreas de terreno para el cultivo de trigo y centeno. Por cada hectárea dedicada al cultivo de trigo la compañía, con un coste de 150 unidades monetarias, obtiene 2 toneladas de este cereal, y por hectárea dedicada al centeno, con un coste de 200 unidades monetarias, obtiene 3 toneladas. La próxima temporada debe atender un pedido de 2500 toneladas de cada uno de estos dos cereales. Dado que no dispone de suficientes hectáreas para poder atender a este pedido mediante la cosecha de sus terrenos, la compañía va a recurrir al mercado para comprar las cantidades de trigo y centeno que precisa para cubrir esta demanda, con un coste de 200 unidades monetarias por cada toneladas de trigo y 180 por cada toneladas de centeno.

a) (4 puntos) Modelizar, sin resolver, para decidir cuántas hectáreas de trigo y de centeno deben ser cultivadas y cuántas toneladas de estos cereales deben ser adquiridas en el mercado, para minimizar los costes totales y maximizar las hectáreas de terreno cultivadas.

b) (6 puntos) La compañía decide flexibilizar sus objetivos. Desea que los costes totales no superen 180000 unidades monetarias y que el terreno cultivado sea al menos 800 hectáreas. Modelizar el problema, sin resolver, teniendo en cuenta estas metas y que se valora el doble la carencia de una hectárea de terreno cultivada que el exceso de una unidad monetaria en el coste total.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_T = hectáreas dedicadas al trigo.

x_C = hectáreas dedicadas al centeno.

y_T = toneladas de trigo compradas en el mercado.

y_C = toneladas de centeno compradas en el mercado.

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } \left(-\left(150x_T + 200x_C + 200y_T + 180y_C\right),\, x_T + x_C\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 2x_T + y_T = 2500 \\ 3x_C + y_C = 2500 \\ x_T + x_C \le 1000 \\ x_T \ge 0,\, x_C \ge 0,\, y_T \ge 0,\, y_C \ge 0 \end{cases}$$

b) La modelización queda como sigue:

$$\text{Min} \ \left(y_1^+ + 2y_2^-\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} 2x_T + y_T = 2500 \\ 3x_C + y_C = 2500 \\ x_T + x_C \leq 1000 \\ 150x_T + 200x_C + 200y_T + 180y_C - y_1^+ + y_1^- = 180000 \\ x_T + x_C - y_2^+ + y_2^- = 800 \\ x_T \geq 0,\ x_C \geq 0,\ y_T \geq 0,\ y_C \geq 0, y_1^+ \geq 0,\ y_1^- \geq 0,\ y_2^+ \geq 0,\ y_2^- \geq 0; \end{cases}$$

3. El departamento de control de calidad de una empresa contabiliza para sus cuatro trabajadores (T1, T2, T3, T4) sobre cuatro tipos de productos manufacturados (A,B,C,D), el número medio de defectos por producto que aparece en la tabla que se muestra a continuación.

	A	**B**	**C**	**D**
T1	4	8	9	3
T2	9	1	6	4
T3	7	3	6	8
T4	6	5	7	--

donde el guión “--“ indica que no se inspecciona.

Teniendo en cuenta que cada producto es realizado por un único trabajador y que todos los productos deben de ser realizados.

a) (5 puntos) Asignar los productos a los trabajadores, si cada trabajador sólo realiza un único producto de manera que se minimice el número total medio de defectos.

b) (5 puntos) La crisis ha afectado a la empresa, que ha decidido despedir al trabajador T4 y manufacturar un producto más, E, siendo el número medio de defectos para el mismo.

	E
T1	4
T2	9
T3	7

En las siguientes situaciones ¿a qué tabla aplicaría el Método Húngaro para hallar las asignaciones óptimas que minimicen el número total medio de defectos?

i) Cada trabajador debe realizar ahora, al menos un producto y como mucho dos.

ii) Cada trabajador debe realizar al menos un producto y como mucho dos y además los trabajadores T1 y T2 deben realizar el mismo número de productos manufacturados.

Solución:

a) Aplicamos el Método Húngaro a la siguiente tabla:

	A	B	C	D	
T1	4	8	9	3	←-3
T2	9	1	6	4	←-1
T3	7	3	6	8	←-3
T4	6	5	7	M	←-5

Con M positivo suficientemente grande.

	A	B	C	D
T1	1	5	6	0
T2	8	0	5	3
T3	4	0	3	5
T4	1	0	2	M
	↑-1		↑-2	

Con M positivo suficientemente grande

	A	B	C	D	
T1	0	5	4	0	
T2	7	0	3	3	←-1
T3	3	0	$\boxed{1}$	5	←-1
T4	0	0	0	M	
		↑+1			

Con M positivo suficientemente grande

	A	B	C	D
T1	0	6	4	0
T2	6	0	2	2
T3	2	0	0	4
T4	0	1	0	M

Con M positivo suficientemente grande

Asignación óptima: T1 → D, T2 → B, T3→ C, T4 → D.

Mínimo número total medio de defectos es16.

b)

i) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla

	A	B	C	D	E	F
T1	4	8	9	3	3	0
T1	4	8	9	3	3	0
T2	9	1	6	4	9	0
T2	9	1	6	4	9	0
T3	7	3	6	8	7	0
T3	7	3	6	80	7	0

Con M positivo suficientemente grande.

ii) Aplicaremos el Método Húngaro a la siguiente tabla

	A	B	C	D	E	F
T1	4	8	9	3	3	M
T1	4	8	9	3	3	M
T2	9	1	6	4	9	M
T2	9	1	6	4	9	M
T3	7	3	6	8	7	0
T3	7	3	6	8	7	0

Con M positivo suficientemente grande.

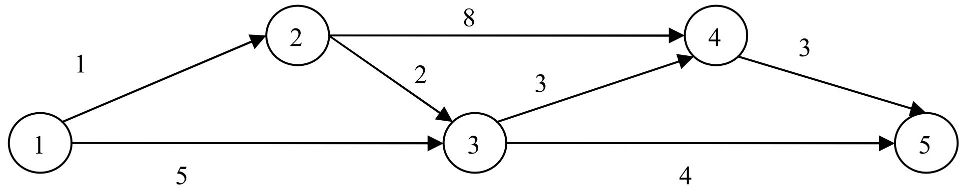
4.

a) (4 puntos) En la siguiente tabla se presentan el conjunto de actividades en las que se encuentra dividido un proyecto junto con sus relaciones de precedencia.

Actividades	**Precedentes Inmediatas**
A	--
B	--
C	A, B
D	A, B
E	D
F	B
G	F
H	E, G
I	E
J	H, I
K	H, I

Construir un grafo asociado al proyecto.

b) (6 puntos) Dado el siguiente grafo, en el cual están representadas las actividades de un proyecto, con sus duraciones en días:



i) Calcular el Comienzo más Temprano de la actividad (3,4). El Final más Tardío de la (2,3). El Margen de la actividad (3,5) y su Final más Temprano.

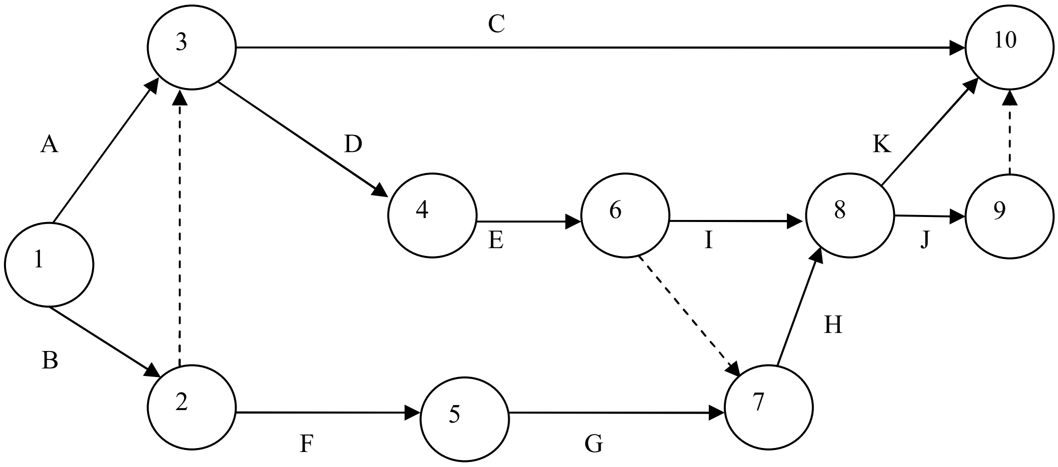
ii) Si la actividad (2,3) se retrasa en *t* días, contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

   1) ¿Cómo debe de ser *t* para que el Comienzo más Temprano de (3,4) siga siendo el obtenido en el apartado anterior.

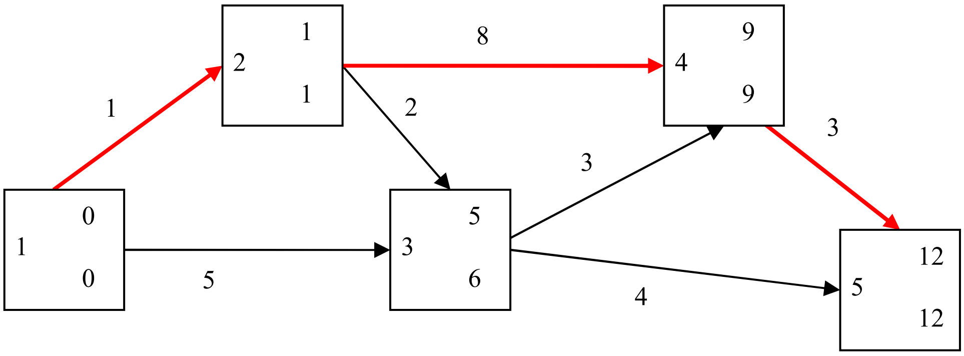
   2) ¿Cuál es el Final más Tardío de (3,4) dependiendo de los valores que puede tomar *t*?

Solución:

a) El siguiente grafo representa a este proyecto:



b)



Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 12 días.

Camino crítico: (1,2,4,5).

i) $CMT(3,4) = P(3) = 5$

$FMT^*(2,3) = Q(3) = 6$

$M(3,5) = Q(5) - P(3) - t(3,5) = 3$

$FMT(3,5) = CMT(3,5) + t(3,5) = 9$

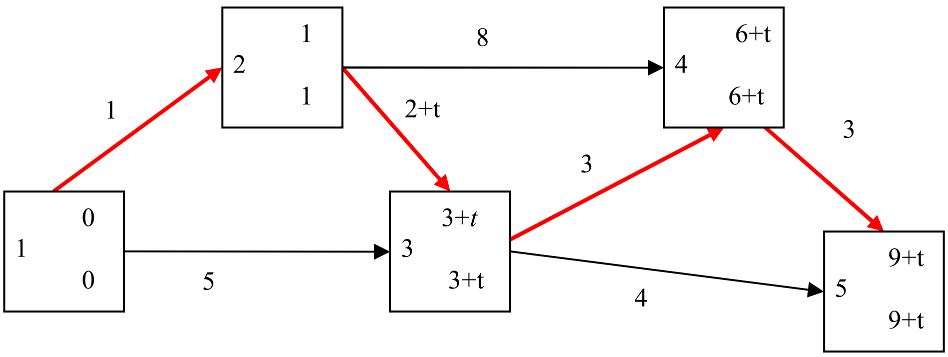
ii)

1) $CMT(3,4) = P(3) = \max\{3+t, 5\} = 5 \Leftrightarrow t \leq 2$

2) Dado que el $M(2,3)$ era 2, si $t \leq 2$: $FMT^*(3,4) = Q(4) = 9$

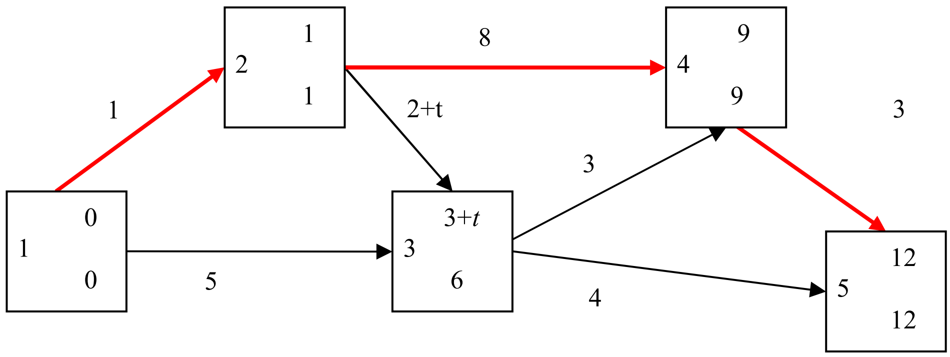
Para $t > 2$, distinguimos dos casos:

Cuando $t \geq 3$:



en el que $FMT*(3,4) = Q(4) = 6 + t$

Cuando $t < 3$:



en el que $FMT*(3,4) = Q(4) = 9$