

# EKONOMETRIAREN

# IKASKUNTZARAKO

# PRAKTIKAK

**Pilar González Casimiro**  
**Susan Orbe Mandaluniz**

*Ekonomia Aplikatua III (Ekonometria eta Estatistika) Saila*  
*Ekonomia eta Enpresa Zientzien Fakultatea*  
*UPV/EHU*

ARGITALPEN ZERBITZUA  
SERVICIO EDITORIAL

[www.argitalpenak.ehu.es](http://www.argitalpenak.ehu.es)

ISBN: 978-84-9860-873-1



Universidad del País Vasco  
Euskal Herriko Unibertsitatea

# Edukia

<b>I</b>	<b>Ekonometriarako sarrera</b>	<b>1</b>
1.	Zer da ekonometria?	3
2.	Eredu ekonometrikoa	5
3.	Lan enpiriko baten urratsak	9
3.1.	Zehaztapena . . . . .	10
3.2.	Estimazioa . . . . .	12
3.3.	Balioespena . . . . .	14
<b>II</b>	<b>Proposatutako ariketak</b>	<b>19</b>
A1	ariketa . . . . .	21
A2	ariketa . . . . .	22
A3	ariketa . . . . .	23
A4	ariketa . . . . .	25
A5	ariketa . . . . .	26
A6	ariketa . . . . .	28
A7	ariketa . . . . .	28
A8	ariketa . . . . .	29
A9	ariketa . . . . .	30
A10	ariketa . . . . .	32
A11	ariketa . . . . .	34
A12	ariketa . . . . .	35
A13	ariketa . . . . .	36
A14	ariketa . . . . .	37
A15	ariketa . . . . .	40
<b>III</b>	<b>Autoebaluaziorako praktikak</b>	<b>43</b>
P1	praktika . . . . .	45
P2	praktika . . . . .	47

P3 praktika . . . . .	51
P4 praktika . . . . .	53
P5 praktika . . . . .	58
P6 praktika . . . . .	60
P7 praktika . . . . .	64
P8 praktika . . . . .	67
P9 praktika . . . . .	71
P10 praktika . . . . .	76
P11 praktika . . . . .	80
P12 praktika . . . . .	84
P13 praktika . . . . .	89
P14 praktika . . . . .	92
P15 praktika . . . . .	94

**IV Praktiken ebazpena 97**

P1 praktika . . . . .	99
P2 praktika . . . . .	107
P3 praktika . . . . .	110
P4 praktika . . . . .	115
P5 praktika . . . . .	121
P6 praktika . . . . .	126
P7 praktika . . . . .	133
P8 praktika . . . . .	140
P9 praktika . . . . .	145
P10 praktika . . . . .	151
P11 praktika . . . . .	161
P12 praktika . . . . .	167
P13 praktika . . . . .	172
P14 praktika . . . . .	179
P15 praktika . . . . .	187

**Bibliografia 195**

# AURKEZPENA

Liburu honetan, azken urteetan UPV/EHUko Ekonomia eta Enpresa Zientziateko Fakultateko Ekonomia lizentziaturako Ekonometriarako Sarrera irakasgaiaren sortu dugun materiala bildu, txukundu eta antolatu nahi izan dugu.

UPV/EHUko Ikasketa Berrikuntzako eta Kalitateko errektoreordeak ikasketa-berrikuntzen programetan parte hartzea sustatu du, irakasgaiak Europako eremuko baldintzetara egokitzeko eta irakaskuntza-metodologia berriak praktikan jartzeko (Proiektuetan Oinarritutako Ikaskuntza eta Ariketetan Oinarrituriko Ikaskuntza), eta aitortu beharra dugu horrek bultzatu gaituela material hau sortzera. Horretaz gainera, gogoarazi nahi dugu Inmaculada Gallastegui Zulaica, Ekonometrian katredaduna, irakaslea eta kidea, aurrendaria izan dela arlo horretan, bai Sailean, eta bai Fakultatean. Aski seguru, lan hau ez zatekeen gauzatuko haren kemenik eta adorerik gabe.

Irakaskuntza-metodologia berriak ezartzeak beste irakaskuntza mota batzuk agertzea ekarri du: eskola magistrala, ikasle-talde handiei ezaguera teorikoak transmititzeko erabilia; eskola praktikoa, irakasgaiaren alderdi praktikoak lantzeko erabilia; eta mintegia, ikasle-talde txikiekin antolatua, eta irakasle eta ikasleen arteko eragin-trukea hobetzeko pentsatua. Mintegiak ohiko ikasgelan edota informatikako gelan antola daitezke, eta, azken kasu horretan, egokiak dira software ekonometrikoaren erabileraren gaitasuna edota informazioaren eta komunikazioaren teknologiak erabiltzeko gaitasuna eskuratzeko.

Irakaskuntza antolatzeko era berri horrek irakaskuntza-metodologia bakoitzaren araberrako material berria sortzeko beharra ekarri du. Argitalpen honek bi helburu ditu. Alde batetik, material erabilgarria proposatzea ekonometriarako sarrerari buruzko irakasgaiaren antolatzen diren eskola praktikoetarako eta mintegietarako. Bestetik, ikasleei beren kabuz irakasgaia ikasteko materiala eskaintzea. Izatez, aurkezten ari garen materiala Ekonomia lizentziaturako Ekonometriarako Sarrera irakasgaiaren egindako lanen zenbait idatzaldi dira, gehienbat: idatzizko probak eta praktiken probak, eta praktketan edota mintegietan egindako lanak.

Aipatutako bi helburu horiek kontuan izanik, argitalpen honen erabiltzaileak bi motatakoak izan daitezke. Alde batetik, eta, lehen helburuari lotuta, gaur egungo graduetako ikasleak (Ekonomia; Enpresen Administrazio eta Zuzendaritza; Marketina; Finantza eta Aseguruak; Zerga Sistema eta Administrazio Publikoa; ...). Bestetik, bigarren helburuan oinarrituz, eskolarik ez duten irakasgaietako ikasleak, hau da, desagertzeko bidean diren

lizentziaturetako ikasleak.

Liburu hau guztiz praktikoa denez, irakasgaiaren gaitasunak eskuratzeko, ezinbestekoa da liburu teoriko sendo bat oinarritzat hartuz ikastea, eta material hau osagarritzat erabiltzea.

Gaur egun, ekonometriako lan enpiriko bat egiteko, ezinbestekoa da software ekonometriko apropos bat erabiltzea, eta, ildo horretan, badaude Ekonometriarako Sarrera irakasgaiaren eskakizunak betetzen dituzten hainbat programa. Egileek Gretl programa aukeratu dute; batik bat, software librea delako, erabiltzen erraza delako, eta interesatzen zaizkigun hizkuntzetara (euskarara, gaztelaniara eta ingelesera) itzulita dagoelako. Programa web-orritik jaits daiteke:

<http://gretl.sourceforge.net>

Gretl programa euskaraz lortzeko, ireki Gretl eta egin aukera hauek leiho nagusian:

Herramientas -> Preferencias -> General

Beste leiho batean, hau agertuko da:

Preferencia de idioma -> Basque.

Programaz gainera, zenbait testuliburutako aplikazio enpirikoetan erabilitako datuak ere jaits daitezke (Wooldridge (2003); Gujartati (2003); Ramanathan (2002); eta abar).

Liburua lau zatitan banatuta dago. Lehenengoan, ekonometriaren ideia nagusiak azaltzen dira, hau da, Erregresio Lineal Orokorraren Ereduko (ELOE) zehaztapenaren, estimazioaren eta inferentziaren oinarritzko hastapenak. Apunte txiki hauetan agertzen diren azalpenak ez dira nahikoak ekonometriarako sarreraren gaitasunak eskuratzeko. Hori horrela izanik, apunte hauen helburua da liburuan zehar erabiliko den nomenklatura argitzea eta ezartzea.

Bigarren zatian, hamabost ariketako bilduma bat eskaintzen da, ariketa errazenetik zailenera ordenatuta. Hala, A1 eta A2 ariketak Erregresio Lineal Orokorraren Ereduko zehaztapenaz eta estimazioaz ari dira. A3tik A10ra arteko ariketak, berriz, aldagai azaltzaile kualitatiboak kontuan hartzen dituzten zehaztapen, estimazio eta inferentziei buruzkoak dira, Erregresio Lineal Orokorraren Ereduaren barruan ulerturik. Haietatik batzuek ELOE-ren alderdi berezi batzuk lantzen dituzte: A4 ariketak, esate baterako, eskala-aldaketa; A5 ariketak, hipotesien planteamendua; A8 ariketak zehaztapen-errorea, eta A10 ariketak, forma funtzionala. Bestalde, A11tik A15era arteko ariketetako erduek aldagai azaltzaile kuantitatibo eta kualitatiboak hartzen dituzte kontuan, eta haien arteko elkar-eraginak ere kontuan hartzen dituzte.

1 Taula. Proposatutako ariketak

Ariketa	Datu-fitxategia
A4	izozkiak.gdt
A7	ordenagailuak.gdt
A8	kontsumoa.gdt
A9	legatza.gdt
A10	garbigarria.gdt
A11	landetxeak.gdt
A12	leasing-autoak.gdt
A14	nihon-soldatak.gdt
A15	elektrizitatea.gdt

2 Taula. Autoebaluazioarako praktikak

Praktika	Datu-fitxategia	Egokitutako fitxategia
P1	praktikaP1.gdt	hprice.gdt [7]
P2	praktikaP2.gdt	wage2.gdt [7]
P3	praktikaP3.gdt	mroz87.gdt [1]
P4	praktikaP4.gdt	kielmc.gdt [7]
P5	praktikaP5.gdt	table_9.3.gdt [4]
P6	praktikaP6.gdt	table_7.9.gdt [4]
P7	praktikaP7.gdt	data7_5.gdt [6]
P8	praktikaP8.gdt	data7_2.gdt [6]
P9	praktikaP9.gdt	kielmc.gdt [7]
P10	praktikaP10.gdt	pizza.gdt [5]
P11	praktikaP11.gdt	data7_19.gdt [6]
P12	praktikaP12.gdt	table_21.1.gdt [4]
P13	praktikaP13.gdt	data7_2.gdt [6]
P14	praktikaP14.gdt	tuna.gdt [5]
P15	praktikaP15.gdt	data9_5.gdt [6]

Ariketak begiratzean, nabaria da batzuk zati, kasu edota egoeratan banatuta daudela eta testuinguru desberdinak lantzeko asmoa dutela. Ariketa horien egitura lagungarria da eskola praktikoetan edota mintegietan irakasgaiarekin lotutako gaitasunak lantzeko.

Taldea 3-4 ikasleko taldetan banatu eta talde bakoitzari ariketaren zati bat emanaz gero, arazo ekonometriko interesgarri bat ikuspegi batetik baino gehiagotatik azter daiteke. Gainera, eskola amaieran talde guztien emaitzak bateratzean eta eztabaidatzean, ikasitakoa sendotu egiten da, eta zeharkako gaitasunak lantzen dira.

Proposatu ditugun ariketa batzuk “eskuz” ebazteko pentsatuta daude, hau da, kalkulagailuaren laguntzaz bakarrik. Beste batzuk ebazteko, berriz, dagokien Gretl formatuko datu-fitxategia analizatu beharra dago. Datu-fitxategiren bat duten ariketak eta haiei dagozkien izenak 1. taulan laburtu ditugu. Datu-fitxategi gehienetako behaketak asmatuak dira. Beste batzuk – `ordenagailuak.gdt` eta `leasing-autoak.gdt`, hain zuzen –, aldiz, Ekonomia lizentziaturako ikasleek Ekonometriarako Sarrera irakasgaiko proiekturako bildutako datuak dira. Azkenik, `nihon.gdt` fitxategiak Koop (2002) liburuko `wagedisc.gdt` datuak ditu, eta `landetxeak.gdt` fitxategiak Ramanathan (2002) liburuko `data4_1.gdt` datuak dakartza, eraldatuta.

Liburuko hirugarren zatiak hamabost praktika biltzen ditu, eta ikasleek beren kabuz ikasteko material baliagarria dakarte, zeren liburuko laugarren zatian praktika horien emaitzak eskaintzen baitira. Praktiketan erabilitako datuak `praktikaP1`-tik `praktikaP15`-ra arteko datu-fitxategietan daude. Praktika gehienetan ez dago datu-fitxategirik erabili beharrik, nahikoa baita adierazburuak eskaintzen duen informazioa. Hala ere, datu-fitxategiak eskuragarri jarri ditugu, ikasleek bere kabuz atera eta erka dezaten adierazburuan ematen den informazioa. Datu-fitxategi horiek – hirugarren praktikari dagokiona izan ezik – Gretl softwareko Ekonometriako testuliburuetaiko datuen egokitzapenak dira (ikus 2. taula).

Liburuan zehar erabilitako datuen datu-fitxategiak, berriz, egileen webgune pertsonaletatik jaits daitezke, `.gdt` formatuan.

**I. zatia**

**Ekonometriarako sarrera:  
Erregresio Lineal Orokorraren  
Eredua**





# 1. kapitulua

## Zer da ekonometria?

Ekonometriaren zeregin nagusia aldagai ekonomikoen arteko erlazioak matematikoki adieraztean, kuantifikatzean eta lortutako emaitzak ebaluatzean datza, ondoren erabaki ekonomikoak hartzeko. Horretaz gainera, ekonometria zeregin horiek betetzeko metodo zehatzagoak proposatzen, analizatzen eta ikertzen ari da etengabe.

Ziur asko, ekonometriaren erabilerarik ezagunena aldagai makroekonomikoen (BPG, inflazioa, interes-tasa,...) aurreanak lortzea da. Baina ekonometriaren erabilera ekonomia arlotik haratago doa, gaur egun arlo askotan erabiltzen baita: negozioetan (finantzak, marketina, gerentzia, eta abar) edota ikerketetan (historia, politika-zientziak, soziologia, kriminologia, psikologia, antropologia, nekazaritza ekonomikoa, eta abar). Ildo horretatik, ekonomia giza zientzietan kokaturik dagoenez, ekonometrian lortzen diren aurrerabideak edo ikerketa-metodologia berriak giza zientzietako beste arlo batzuetara zabaldu daitezke.

Adibide honek ekonometria zer den ezagutzen lagundu dezake:

**Adibidea.** Inflazioak sorrarazitako tentsioak agertzen diren garaietan, Europako Banku Zentraleko (EBZ) zuzendariak ekonomia hozteko erabakiak hartu behar ditu, hazkunde ekonomiko egonkorrari eutsiz inflazioa jaits dadin. Teoria ekonomikoak ekonomiako zenbait aldagairen portaera azaltzen duenez, zuzendariak badaki interes-tasa igo egin behar duela bere helburua lortzeko.

Hala, interes-tasa handitzean, kontsumitzaileen eta enpresen inbertsioak atzeratu egiten dira, eskari agregatua jaitsi egiten da, eta inflazioa txikitzen. Hala ere, erabakiak hartzeko, ez da nahikoa erlazio hori ezagutzea. Zuzendariak interes-tasa zenbat igo behar duen jakin behar du, eta, zenbateko hori zein den jakiteko, enpresen eta banakoen erantzun-maila eta BPGren jaitsieraren eragin zehatza zein diren jakin behar du. Erantzuna jakiteko, aipatutako elastikotasunak estimatu behar dira, eskuragarri dauden datu ekonomikoetatik abiatuta.

Adibide horretan, teoria ekonomikoaren eta ekonometriaren arteko erlazioa nabaria da. Teoria ekonomikoak aldagai ekonomikoen arteko erlazioa zein den azaltzen du, eta

ekonometriaren zeregina, berriz, aldagai ekonomikoen arteko erlazio horiek kuantifikatzea da. Zentzu horretan, ekonometria eta teoria ekonomikoa oso lotuta daude.

Ekonomia arloan, aldagai ekonomikoen arteko erlazioak – eredu ekonomikoak deritzenak – funtzio matematikoen multzo baten bitartez adierazten dira. Ekonometriaren helburu nagusietako bat funtzio horiek kuantifikatzea da. Beraz, ekonometria eredu ekonomikoetako parametro ezezagunak (elastikotasunak, biderkatzaileak, eta abar) estimatzen saiatzen da, eskuragarri dauden datu ekonomikoetan oinarrituz. Horregatik, erlazio ekonomikoak era egokian kuantifikatzeko eta emaitzak ebaluatzeko, ezinbestekoa da datuak prozesatzeko metodoak izatea. Lan hori egiteko, ekonometriak tresna estatistikoak erabiltzen ditu.

Adibide berari helduz, EBZko zuzendariaren galderak erantzuteko, ekonometria erabil daiteke: aldagai ekonomiko interesgarrien arteko erlazioak jasotzen dituzten ereduak eraikiz, datu ekonomiko nabariak bilduz eta metodo estatistiko-ekonometrikoak erabiliz (estimazioak, inferentzia, auresanak,...) konklusioak edota erabakiak hartzeko.

Hona hemen zer proposamen egin duten zenbait egilek ekonometria definitzeko:

Frisch (1933) [2]: «La Econometría implica la mutua penetración de Teoría Económica Cuantitativa y observación estadística»

Goldberger (1964) [3]: «La Econometría puede ser definida como la Ciencia social en la cual las herramientas de la Teoría Económica, las Matemáticas y la Inferencia Estadística son aplicadas al análisis de los fenómenos económicos.»

## 2. kapitulua

# Eredu ekonometrikoa

Eredu ekonometrikoa edozein lan enpiriko edo ekonometrikoren funtsezko euskarria da. Baina zer da eredu ekonometriko bat? Zer antza du eredu ekonomikoarekin? Eta zer desberdintasun? Zer erlazio dute?

Demagun automobil-marka ezagun bateko zuzendaritzak jakin nahi duela ea esan-guratsuak izan diren automobil-modelo jakin baten salmenta bultzatzeko helburuarekin egindako publizitate-kanpainaren emaitzak.

Galdera hori erantzuteko, salmenten eta publizitatean egindako gastuaren arteko erlazioa zein den jakin behar du. Horretarako, teoria ekonomikoak zer dioen kontuan hartu behar da. Eskari-funtzio bat denez, salmentetan eragiten duten aldagaiak honako hauek dira: automobilaren prezioa ( $P$ ), beste marka batzuetako eta antzeko ezaugarriak dituzten automobilen prezioak ( $P^{leh}$ ), publizitate-gastua ( $PG$ ), eta merkatuaren egoera – oparotaldi ekonomikoan izatea edo ez – ( $MB$ ). Hori guztia kontuan izanik, eredu ekonomikoaren adierazpena hau litzateke:

$$S = f(P, P^{leh}, PG, MB) \quad \frac{dS}{dP} < 0 \quad \frac{dS}{dP^{leh}} > 0 \quad \frac{dS}{dPG} > 0 \quad \frac{dS}{dMB} > 0. \quad (A0.1)$$

Eredu ekonomiko horretan, automobil-prezioen alderantzizko funtziotzat eta beste faktore batzuen (automobil lehiakideen prezioa, publizitate-gastua eta oparotasuna) funtzio gorakortzat hartu dira salmentak. Eskari-funtzio hori baliagarria denez ondasun gehienen salmentak azaltzeko, hurrengo pausoa izango da interesatzen zaigun enpresako datuak eskuratzea; aldagai horiei dagozkienak, alegia. Demagun enpresako zuzendaritzak badituela salmentei, bi prezioei eta publizitatean egindako gastuari buruzko datuak. Baina, zer egin merkatuaren egoera neurtzen duen aldagaiarekin? Hasiere batean, aldagai hori ez da numerikoa. Numeriko bihurtzeko, irtenbide ugari daude. Esate baterako, merkatuaren egoera ziklo ekonomikoarekin erlazionatuta dagoenez eta Industri Produkzioaren Indizea ( $IPI$ ) denez ziklo ekonomikoa neurtzeko era bat posible litzateke  $MB$  aldagaiaren ordez  $IPI$  aldagaia erabiltzea, arrazoizko hurbilketa bat egiteko.

Orain arte zehaztutakoarekin, analisisian parte hartzen duten aldagai ekonomikoen zerrenda eta eraginaren noranzkoa jasotzen duen eredu ekonomikoa lortu ditugu. Hala ere,

eredu ekonomiko hori eskuragarri dauden datuen bidez analizatzeko, beste hainbat elementuri buruzko erabakiak hartu behar dira. Lehendabizi, zer forma funtzional erabiliko dugun zehaztu behar da, hau da, aldagai azalduaren eta aldagai azaltzaileen arteko erlazioa zein den aukeratu behar da. Normalean, lehen urrats batean, erlazio hori lineala balitz bezala lan egiten da:

$$S = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 P^c + \beta_3 PG + \beta_4 MB \quad (\text{A0.2})$$

non  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  eta  $\beta_4$  koefizienteek aldagai azaltzaileek salmentetan duten eragina neurtzen duten eta laginean zehar konstantetzat hartzen diren. Koefiziente ezezagun horiek estimatzen hasi baino lehen, ereduaren zehaztapenean sakondu behar da, zeren aldagai ekonomikoen arteko erlazioak ez baitira – (A0.2) eredu ekonomikoek adierazten duten bezala – zehatzak izaten. Izatez, literaturan proposatzen diren eredu ekonomikoek ez dute helburu izaten banako eta enpresa bakoitzaren portaera azaltzea edota auresatea. Ereduen helburua da banako eta enpresa multzo baten batez besteko portaera analizatzea. Hala, batez besteko portaera horretatik banako edota enpresa bakoitzak zer alderdi duen jasotzeko, ereduak termino aleatorio bat barneratu behar du. Termino aleatorio horri perturbazioa deritzogu. Hau da, (A0.2) eredu ekonomikoa zehaztasun osoz betetzen ez denez behaketa guztietan, ereduan estimaezina edota auresanezina den termino aleatorio bat txertatu beharra dago:  $u$  perturbazioa. Termino horrek, jarduera ekonomiko guztietan dagoen ziurgabetasuna edota arriskua jasotzen duten faktoreen eraginak edota banakoen lehentasunen ondoriozko eraginak biltzeaz gainera, salmentetan eragiten duten beste faktore batzuk ere biltzen ditu.

Hori guztia kontuan hartuz, eredu ekonometrikoaren zehaztapena hau da:

$$S_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_t^c + \beta_3 GP_t + \beta_4 CM_t + u_t. \quad (\text{A0.3})$$

Ondorioz, (A0.2) eredu ekonomikoaren eta (A0.3) eredu ekonometrikoaren arteko desberdintasuna perturbazio terminoa da. Eredu ekonomikoak salmentetan sortzen diren eragin nagusiak – sistematikoak – jasotzen ditu, eta perturbazioak jasotzen dituen eragin aleatorioak pisu gutxikoak izaten dira. Azkenik,  $u$  terminoa aleatorioa denez, haren probabilitatezko banaketari buruzko hipotesiak zehaztu behar dira, eredu ekonometriko osoaren zehaztapena izateko.

Laburbilduz, eredu ekonometriko guztiek bi alderdi dituzte:

$$S = \text{Alderdi sistematikoa} + \text{Alderdi aleatorioa}.$$

Alderdi sistematikoak, teoria ekonomikoan oinarrituz, aldagai azalduaren eta aldagai azaltzaileen arteko batez besteko erlazioa neurtzen du, eta erlazio horren forma funtzionala zein den erabaki beharra dago. Alderdi aleatorioak, berriz, eragin kontrolaezinak edo neurrezinak jasotzen ditu, eta beraren probabilitatezko banaketa nolakoa den erabaki beharra dago. Eredu ekonometrikoaren zehaztapena eta datu multzo bat edo lagin

bat eskuragarri izanez gero, zehaztapen horretan parte hartzen duten parametro ezezagun guztiak estima daitezke, erlazioei buruzko hipotesiak kontrasta daitezke, eta aldagai azalduaren balio ezezagunak aurrean daitezke. Hortaz, arazo ekonomiko bat eredu ekonometriko baten bitartez analizatzeko, ezinbestekoa da datu multzo bat eskuragarri izatea.

Ikerketa bat egitean, bi motatako datuak izango ditugu eskuartean:

1. *Datu experimentalak*: kontrolatutako egoeretan lortutako emaitzak dira, eta, normalean, laborategietan sortzen dira. Esperimentu horien ezaugarriak hauek dira:
  - Esperimentuaren ezaugarri guztiak ikertzaileak kontrolatzen ditu.
  - Esperimentu bera behin eta berriro errepika daiteke.
  - Esperimentua beste ezaugarri batzuen arabera egin daiteke, ezaugarri moten eraginak neurtzeko eta alderatzeko.

Esate baterako, ongarri jakin batek ondasun baten uztan zer eragin izan duen neurtzea interesatzen bazaigu, uztaren ezaugarriak kontrola daitezke: ongarri kopurua, ur kantitatea, argia eta abar. Eta, bestalde, kopuru horiek aldatzean zer emaitza lortzen diren neur daiteke. Esperimentuaren emaitza aldagai aleatorio bat da, zeren behaketen balioak ezezagunak baitira esperimentua bukatzen den arte. Gainera, nahiz eta esperimentua berriro errepikatu eta antzeko emaitzak lortu, ez dira berdindinak izango, beti badirelako eragin kontrolaezinak, neurketa-erroreak, eta abar. Desberdintasun horiei laginaren aldagarritasunak deritze.

2. *Datu ez-esperimentalak*: egoera kontrolaezinetako datuak dira.

Aldagai ekonomikoaren (BPG, interes-tasa, eta abar) balioak ez dira kontrolatutako esperimentuetatik eratortzen: momentuko egoera ekonomikoaren neurriak dira. Aldagai horiei eragiten dieten faktoreak ezin dira kontrolatu, ez daude pertsona edota lan-talde baten mende, eta batzuetan ezin dira behatu ere egin. Ondorioz, ezinezkoa da egoera bera behin baino gehiagotan errepikatzea. Aldagai horiek ere aleatorioak dira, zeren behaketen balioak ezezagunak baitira behaketa argitaratzen den arte.

Datu ez-esperimentalak (edo behatutako datuak) erabiltzen dituen ikertzaileari datu-biltzailea eta -analizatzailea deritzo. Datu mota horiek ohikoak dira giza zientzietan. Arlo horretan esperimentuak egitea ezinezkoa izaten da, edo, bestela, izugarri garestia edota moral aldetik desegokia.

Ekonometrian, datu ez-esperimentalekin lan egiten da. Ondorioz, ekonometriak estatistikan eta matematikan erabilgarriak diren tresnak baliatzen ditu, baina, datuen izaera kontuan hartuta, teknika berriak asmatu behar izan ditu.

Azkenik, datu ekonomikoak era askotan aurkez daitezke:

1. *Datu gurutzatuak edo zeharkako datuak.* Datu bidezko lagin horietan, banakoen, familien, enpresen, hirien, eta abarren datuak eskaintzen dira, momentu zehatz batekoak. Datu mota horiek, gehienetan, populazioaren laginketa aleatorio batetik eratorriak izaten dira.
2. *Denbora-serieetako datuak.* Datu bidezko lagin horietan, banakoen, familien edota enpresen behaketak eskaintzen dira, denboran zehar egindakoak. Datu mota horien ezaugarri komuna da denborak jokatzeko duen papera, zeren iraganeko behaketek etorkizuneko behaketetan eragiten baitute, gehienetan. Hori dela eta, datu horien behaketak gutxitan izaten dira independenteak, iraganarekiko mendekotasun handia erakusten baitute. Ezaugarri horrek eskaintzen duen informazioaz baliatzeko, metodo ekonometriko ugari proposatu dira literaturan.
3. *Taula-datuak.* Datu gurutzatuen eta denbora-serieetako datuen ezaugarriak dituzte: denbora-serie bat eskaintzen dute banako edo entitate bakoitzeko.

## 3. kapitulua

# Lan enpiriko baten urratsak

Ekonomia aplikatuaren arloan, metodo ekonometrikoak garrantzizkoak dira teoria ekonomiko bati edota erlazio ekonomiko bati buruzko hipotesiak kontrastatzeko, zeren lortutako emaitzak erabaki politikoak hartzeko erabiltzen baitira. Analisi enpirikoak datuak eta metodo ekonometrikoak erabiltzen ditu teoriak kontrastatzeko edota erlazio ekonomikoak estimatzeko. Edozein lan enpirikoren urratsak hauek dira:

1. Eredu ekonometrikoaren zehaztapena
  - 1.1. Aldagai azaltzaileak aukeratzea
  - 1.2. Forma funtzionala
  - 1.3. Perturbazioaren banaketa
2. Parametroen estimazioa
3. Emaitzen balioespena
  - 3.1. Inferentzia
  - 3.2. Aurrezana

Ondorengo ataletan, urrats bakoitzaren oinarrizko nozioak landuko ditugu.



### 3.1. Zehaztapena

Eredu ekonometriko baten zehaztapena egiten hasi baino lehen, interesgarri zaigun arazo ekonomikoa ondo mugatu behar da, eta, ondoren, aldagai ekonomikoen arteko erlazioa ekuazio matematikoen multzo baten bitartez adierazi. Askotan, teoria ekonomikoak berak eskaintzen du arazoa analizatzeko erabili behar den hasierako eredua. Beste batzuetan, berriz, ez du eredurik eskaintzen ikertzen ari garen arazorako. Azken kasu horretan, logika ekonomikoa eta sen ona erabili behar dira analisia egiteko (aldagai esanguratsuak aukeratzeko, haien arteko erlazioa zehazteko, eta abar).

Eredu ekonometriko baten zehaztapenean, azaltzea interesatzen zaigun aldagaiaren eta aldagai azaltzaileen arteko forma funtzionalari buruzko hipotesiak eta  $u$  perturbazioaren banaketari buruzko hipotesiak ezarri behar dira.

Erregresio Lineal Orokorren Eredua (ELOE) erabiliko dugu:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{A0.1})$$

non

$Y$  aldagai azaldua, mendeko aldagaia edo aldagai endogenoa den,  
 $X_j, j = 2, \dots, k$  aldagai azaltzaileak edo exogenoak diren,  
 $\beta = (\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_k)'$  erregresioko koefizienteen bektorea den,  
 $u$  ereduko perturbazioa den, eta  
 $N$  laginaren tamaina den.

Adibidean, zeharkako datuak ditugulako balizko ustearen arabera zehaztu da eredua. Denbora-serieetako datuak izango bagenitu,  $i$  azpiindizea aldatuko genuke, eta  $t$  erabiliko genuke haren ordez, testuliburu gehienetan egiten den bezala.

Aurreko (A0.1) eredu ekonometrikoa lagineko edozein behaketatarako betetzen denez, matrizen bidez honela idatz daiteke:

$$Y = X\beta + u$$

non matrize eta bektore hauek definitu diren:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2N} & X_{3N} & \dots & X_{kN} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

Adierazitako  $X$  ( $N \times k$ ) ordenako matrizeari datu-matrizea deritzo.

Ekonometriarako sarreraren mailan gaudenez, erregresio-analisia oinarrizko hipotesien arabera egingo dugu, hau da, hipotesi egokienak betetzen direla pentsatuko dugu. Ondoren, Erregresio Lineal Orokorren Eredua OINARRIZKO HIPOTESIAK zein diren aipatuko dugu:

OH1. Aurreko (A0.1) ereduan,  $Y$  aldagaiak laginean izan duen portaera azaltzen da. Hala bada, hipotesi hauek betetzen dira:

- Aldagai azaldua zehazten duten aldagai azaltzaile esanguratsu guztiak ereduan barneratuta daude.
- Eredua koefizienteekiko lineala da.
- Ereduko koefizienteak konstante mantentzen dira laginean zehar.

OH2. Ereduko aldagai azaltzaileak ( $X_j \quad j = 2, \dots, k$ ) ez dira estokastikoak, finkoak baizik.

OH3. Ez dago kolinealtasunik:  $h(X) = k$ . Ez dago  $X$  datu-matrizeko zutabeen arteko konbinazio linealik, hau da, ez dago aldagai azaltzaileen arteko konbinazio linealik. Gainera, haien artean ez dago balio konstante bera hartzen duen aldagairik.

OH4. Perturbazio guztien populazioaren batez bestekoa edo esperantza zero da.

$$E(u_i) = 0, \quad \forall i.$$

OH5. Homozedastizitatea: perturbazio guztiek bariantza bera dute.

$$E(u_i)^2 = \sigma_u^2, \quad \forall i.$$

OH6. Autokorrelazio eza: ez dago behaketen perturbazioen arteko korrelaziorik.

$$E(u_i u_j) = 0, \quad \forall i \neq j.$$

OH7. Perturbazioek banaketa normal independentea dute.

OH4tik OH7ra arteko oinarrizko hipotesiak bateratzean, perturbazioek zero esperantza eta bariantza konstantea dituen banaketa normal independentea jarraitzen dutela adierazten da:

$$u_i \sim NID(0, \sigma_u^2).$$

## 3.2. Estimazioa

KTA estimazio-irizpidea.

Behin koefizienteen bektorearentzako ( $\beta$ ) estimazio bat eta aldagai azaltzaileen balioak izanik, aldagai azalduaren behaketa bakoitzarentzat estimatutako balioa lor dezakegu:

$$\widehat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki}.$$

Estimazio horretan egiten den erroreari hondarra deritzo:

$$\hat{u}_i = Y_i - \widehat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}.$$

Ereduko koefizienteak KTA estimazio-irizpidearekin estimatzen badira, hondarren karra-tuen batura minimizatzen duen  $\hat{\beta}$  bektorea lortzen da:

$$\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \widehat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki})^2.$$

Minimizazioaren lehen ordenako baldintzetatik, berriz, ekuazio normal hauek lortzen dira:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N Y_i &= N \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^N X_{3i} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^N X_{ki} \\ \sum_{i=1}^N Y_i X_{2i} &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^N X_{3i} X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^N X_{ki} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^N Y_i X_{3i} &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_{3i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_{2i} X_{3i} + \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^N X_{3i}^2 + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^N X_{ki} X_{3i} \\ &\dots \quad \dots \\ \sum_{i=1}^N Y_i X_{ki} &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_{ki} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_{2i} X_{ki} + \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^N X_{3i} X_{ki} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^N X_{ki}^2 \end{aligned}$$

Ekuazio lineal horiek  $k$  ekuazio eta  $k$  ezezagun dituen sistema bat eratzen dute, matrize bidez honela adieraz daitekeena:

$$X'Y = (X'X) \hat{\beta}_{KTA}.$$

Aldagai azaltzaileen arteko konbinazio linealik ez dagoela pentsatuz gero – hau da,  $h(X) = k$  oinarrizko hipotesia betetzen dela pentsatuz gero – koefizienteen KTA estimatzailearen adierazpen bakarra eta itxia lortzen da ekuazio normalen sistema ebatztean:

$$\hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1} X'Y$$

non  $\hat{\beta}_{KTA} = (\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3 \dots \hat{\beta}_k)'_{KTA}$  bektorea den.

Ereduko koefizienteak estimatu ondoren, perturbazioen bariantza adierazpide honekin estima daiteke:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - k} = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{N - k}.$$

### KTA estimatzailearen propietateak.

Ereduko koefizienteen KTA estimatzaileak, OH1tik OH6ra arteko oinarrizko hipotesiak aintzat hartuz, propietate hauek ditu:

- Lineala da.
- Alboragabea da.
- Gauss-Markoven teorema adierazten duen bezala, estimatzaile lineal eta alboragabe guztien artean bariantza minimoa duena da.

Izatez, estimatzailearen bariantzaren adierazpena hau da:

$$\text{Bar}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

Bariantza- eta kobariantza-matrize horren estimatzailea lortzeko, perturbazioen bariantzaren ordeztu haren estimatzailea jartzen da. Gainera, estimatzaile hori alboragabea izango da, baldin eta oinarrizko hipotesiak betetzen badira.

### Laginaren erregresio-zuzena.

Laginaren erregresio-zuzena (LEZ) eta estimatutako eredua gauza bera dira:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

LEZ baten propietateak ekuazio normalen sistematik ondorioztatzen dira:

- KTA hondarren batura zero da:  $\sum \hat{u}_i = 0$ .
- KTA hondarrak eta aldagai azaltzaileak ortogonalak dira:

$$\sum X_{ji} \hat{u}_i = 0, \quad j = 2, \dots, k.$$

- Aldagarritasuna honela deskonposatzen da:

$$\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2. \quad (\text{A0.2})$$

non:

KBO =  $\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$ : aldagai azalduaren lagin-aldagarritasuna den.

KBA =  $\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ : estimatutako aldagai azalduaren lagin-aldagarritasuna den, hau da, estimatutako ereduaren bitartez lortzen dena.

HKB =  $\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2$ : hondarren karratuen batura edo hondarren lagin-aldagarritasuna, hau da, estimatutako ereduaren bitartez azaldu gabe gelditu dena.

### Doikuntzaren ontasunaren neurria.

Ereduaren azalpen-gaitasuna edo doikuntzaren ontasuna neurtzeko irizpide bat da mugatze-koefizientea:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}$$

zeina, (A0.2) bariantzaren deskonposaketa kontuan izanik, 0 eta 1 balioen artean mugitzen den. Mugatze-koefizienteak honako hau adierazten du: aldagai azalduaren aldagarritasunaren zenbateko proportzioa azaltzen den, era linealean, aldagai azaltzaileen baterako aldagarritasunaren bitartez.

### 3.3. Balioespena

Eredua estimatu ondoren, emaitzak egiaztatu behar dira, erabilitako oinarrizko hipotesiak datuekin bat ote datozen jakiteko: aukeratutako forma funtzionala egokia da? Aldagai esanguratsu guztiak kontuan hartu al dira? Galdera horiek erantzuteko, inferentzia estatistikoa erabiltzen da. Erantzuna baiezkoa bada, zehaztutako eredu ekonometrikoa egokitzat joko dugu interesgarri zaigun arazo ekonomikoa analizatzeko eta erabakiak hartzeko. Bestalde, erantzuna ezezkoa bada, egindako zehaztapen-errorea zuzendu egin behar da, beste eredu bat zehaztuz eta berriro balioetsiz.

## Hipotesi interesgarriak kontrastatzea.

Har dezagun kontuan erregresio lineal orokor hau:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A0.3})$$

### A. Koefiziente bakar bat kontrastatzea.

a. Kontrastearen planteamendua:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_i = \beta_{i0} \\ H_a &: \beta_i \neq \beta_{i0} \end{aligned}$$

b. Kontrasterako estatistikoa (banaketa hau frogatu egin daiteke):

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_{i0}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

non  $\hat{\beta}_i$  estimatzailea den,  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i} = \hat{\sigma}_u a_{ii}$  estimatzailearen desbideratze tipikoaren adierazpena den,  $a_{ii}$  balioa  $(X'X)^{-1}$  matrizeko  $(i, i)$  elementua izanik.

c. Erabakitzeko araua. Hipotesi hutsa baztertu egiten da  $\% \alpha$  esangura mailarekin, baldin eta:

$$|t| = \left| \frac{\hat{\beta}_i - \beta_{i0}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \right| > t(N - K)_{\alpha/2}$$

betetzen bada, non  $t(N - K)_{\alpha/2}$  balioa eskuinean  $\% \alpha/2$  probabilitatea uzten duen Student- $t$  banaketaren jatorria den.

### B. Murrizketa multzo bat kontrastatzea.

Murrizketa multzo bat kontrastatu nahi izanez gero:

$$\beta_2 = \beta_3 \quad \text{eta} \quad \beta_{k-1} = \beta_k \quad (\text{A0.4})$$

a. Kontrastearen planteamendua:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_2 = \beta_3 \quad \text{eta} \quad \beta_{k-1} = \beta_k \\ H_a &: \beta_2 \neq \beta_3 \quad \text{edota} \quad \beta_{k-1} \neq \beta_k \end{aligned}$$

b. Kontrasterako estatistikoa (banaketa hau frogatu egin daiteke):

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k) \quad (\text{A0.5})$$

non:

$q$  murrizketa kopurua den (adibidean, 2),

$HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko – (A0.3)-ko – hondarren karratuen batura den, eta

$HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den, hau da, (A0.3) ereduan (A0.4) murrizketa txertatzean lortzen den ereduko hondarren karratuen batura:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_{k-1} X_{(k-1)i} + \beta_k X_{ki} + u_i$$

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 (X_{2i} + X_{3i}) + \dots + \beta_{k-1} (X_{(k-1)i} + X_{ki}) + u_i$$

- c. Erabakitze araua. Hipotesi hutsa baztertu egiten da,  $\% \alpha$  esangura-maila izanik, baldin eta:

$$F > \mathcal{F}(q, N - k)_\alpha$$

betetzen bada, non  $\mathcal{F}(q, N - k)_\alpha$  balioa eskuinean  $\% \alpha$  probabilitatea uzten duen Snedecor- $\mathcal{F}$  banaketaren jatorria den.

### C. Aldagai azaltzaileen baterako esangura.

- a. Kontrastearen planteamendua:

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \dots \text{ edota } \beta_k \neq 0$$

- b. Kontrasterako estatistikoa. Aurreko (A0.5) estatistiko orokorra honela idatz daiteke:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(N-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N-k)$$

non  $R^2$  (A0.3) ereduko mugatze-koefizientea den eta  $q = k - 1$  murrizketa kopurua den (hau da, koefiziente guztien kopurua, termino konstanteari dagokion koefizientea izan ezik).

- c. Erabakitze araua. Hipotesi hutsa baztertu egiten da,  $\% \alpha$  esangura-maila izanik, baldin eta:

$$F > \mathcal{F}(q, N - k)_\alpha$$

betetzen bada, non  $\mathcal{F}(q, N - k)_\alpha$  balioa eskuinean  $\% \alpha$  probabilitatea uzten duen Snedecor- $\mathcal{F}$  banaketaren jatorria den.

## Aurresana.

Demagun laginetik kanpo dagoen  $p$ . behaketa ( $Y_p$ ), aurrean nahi dugula aldagai azalduarentzat. Estimaturako erudian oinarritu nahi badugu laginetik kanpo dagoen balio bat auresateko, ezinbestekoa da aldagai azalduaren eta aldagai azaltzaileen arteko erlazioa laginetik kanpo ere betetzen delako hipotesia egitea. Hipotesi horren arabera lan egirik eta aldagai azaltzaileen  $p$ . balioak izanik ( $X_{2p}, \dots, X_{kp}$ ), zera aurrean daiteke:

**Puntuako auresana.** Aurrean hori laginaren erregresio-zuzenean oinarritzen da:

$$\widehat{Y}_p = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 X_{2p} + \widehat{\beta}_3 X_{3p} + \dots + \widehat{\beta}_k X_{kp} = X'_p \widehat{\beta}.$$

**Tarteko auresana.** Aurrean-errorearen oinarrituz:

$$\widehat{u}_p = Y_p - \widehat{Y}_p = X'_p \beta + u_p - X'_p \widehat{\beta} = X'_p (\beta - \widehat{\beta}).$$

banaketa hau frogatu egin daiteke:

$$\widehat{u}_p \sim N(0, \sigma_p^2) \quad \text{non} \quad \sigma_p^2 = \sigma_u^2 (1 + X'_p (X'X)^{-1} X_p).$$

Hala, aurreko informazioa erabiliz,  $Y_p$ ren  $\%(1-\alpha)$  konfiantza-tartearen adierazpena hau da:

$$KT(Y_p)_{\%(1-\alpha)} = \left[ \widehat{Y}_p \pm t(N-k)_{\alpha/2} \widehat{\sigma}_u \sqrt{1 + X'_p (X'X)^{-1} X_p} \right].$$

Konfiantza-tartea  $\widehat{\beta}$  eta  $\widehat{\sigma}_u^2$  estimatzaileen arabera denez, aleatorioa da. Beraz, tartearen interpretazioa hau da: 100 laginekin 100 konfiantza-tarte ateratzen badira, haietatik  $\%(1-\alpha)$  tartek  $Y_p$ ren benetako balioa islatzen dute.





**II. zatia**

**Proposatutako ariketak**



## A1. ARIKETA Erregresio Lineal Bakunaren Eredua (ELBE).

Higiezin-agentzia bateko analistak ikertu nahi du ea zer egoera izan zuten etxebizitzaren prezioek mendearan hasieran, 2008ko finantza-krisia gertatu baino lehen. Analistak uste duenez prezioen eboluzioa interes-tasaren arabera dela, erregresio lineal bakunaren eredu bat proposatzen du:

$$P_t = \beta_1 + \beta_2 I_t + u_t \quad t = 2002, 2003, \dots, 2007, \quad (\text{A1.1})$$

non  $P$  etxebizitza librearen metro karratuko prezioa den, eurotan, eta  $I$  interes-tasa erreala den, ehunekotan. Bi aldagaiek balio hauek hartu zituzten 2002tik 2007ra arteko epean:

Urtea	2002	2003	2004	2005	2006	2007
$P_t$	12,6	13,8	16,2	18,2	19,9	20,8
$I_t$	4,3	4,3	3,8	4,0	4,5	5,0

1. Kalkula itzazu lagin estatistiko hauek: aldagai bakoitzaren batez besteko aritmetikoa eta bariantza, eta prezioaren eta interes-tasaren arteko korrelazio-koefizientea. Azaldu itzazu emaitzak.
2. Marraztu itzazu  $(P_t, I_t)$  puntu-hodeia eta  $(\bar{P}, \bar{I})$  batez bestekoen puntua.
3. Aurreko (A1.1) erregresio-eredu linealean, zein da aldagai azaldua?, zein da aldagai azaltzailea?, zein elementu dira aleatorioak?
4. Idatz ezazu populazioaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu haren koefizienteak.
5. Karratu Txikien Arrunta irizpidean, zein helburu-funtzio minimizatu behar da (A1.1) ereduko koefizienteak estimatzeko?
6. Deriba itzazu aurreko ataleko optimizazio-problemaren ekuazio normalak, eta ordezkatu itzazu lagin-balioak.
7. Estima itzazu (A1.1) ereduko koefizienteak Karratu Txikien Arrunta irizpidearen bitartez.
8. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu haren koefiziente estimatuak.
9. Benetako populazioaren erregresio-zuzena zein den jakingo bagenu, laginaren erregresio-zuzenarekin bat etorri behar luke?
10. Marraztu ezazu, 2. ataleko grafikoan, doitutako erregresio-zuzenaren eredua. Batez bestekoen puntutik – hau da,  $(\bar{P}, \bar{I})$ -tik – igarotzen da? Zergatik?

11. Kalkula itzazu KTA hondarrak, eta irudika itzazu grafikoki.
12. Kalkula ezazu mugatze-koefizientea, eta interpreta ezazu lortutako doikuntzaren ontasuna.
13. Estima ezazu ereduko perturbazioen bariantza.
14. Estima ezazu  $\hat{\beta}_2$  estimatzailearen bariantza. Benetakoa ezagutuko bazenu, estimatutakoarekin bat etorri behar luke?
15. Frogatu ezazu (A1.1) mugatze-koefizientea, prezioaren eta interes-tasaren arteko korrelazio koefizientearen karratua dela erregresio-eredu linealean.
16. Estima ezazu eredu bakun hau KTA estimatzailearen bitartez:

$$I_t = \gamma_1 + \gamma_2 P_t + u_t \quad t = 2002, \dots, 2007. \quad (\text{A1.2})$$

Interpreta itzazu ereduaren koefiziente estimatuak eta mugatze-koefizientea. Alderatu itzazu (A1.1) ereduan lortutako emaitzekin. Berdinak al dira? Zergatik?

## A2. ARIKETA ELBE zenbait egoeratan.

Perfume-salmentaren jokaera analizatu nahi dugu, publizitatean egindako gastuaren funtzioan. Horretarako, sektoreko bost enpresatako informazioa dugu eskuragarri; aldagai hauei buruzko informazioa, zehazki: salmentak ( $S$ , milioi kaxatan) eta publizitatean egindako gastua ( $PG$ , mila eurokotan).

Enpresa	1	2	3	4	5
$S_i$	4	7	3	9	17
$PG_i$	2	3	1	5	9

Izan bedi erregresio lineal bakuneko eredu hau:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 PG_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, 5, \quad (\text{A2.1})$$

eta izan bitez egoera hauek ereduko koefizienteentzat:

1. egoera:  $\beta_1 \neq 0$      $\beta_2 \neq 0$ .
2. egoera:  $\beta_1 = 0$      $\beta_2 \neq 0$ .
3. egoera:  $\beta_1 \neq 0$      $\beta_2 = 0$ .

Erantzun itzazu galdera hauek, aurreko egoerak banan-banan aztertuta:

1. Zer adierazten du, egoera bakoitzean, koefizienteen gain ezarritako balizkoak?
2. Idatz ezazu balizko horiek koefizienteen gain ezartzean lortzen den eredua.
3. Estima itzazu aurreko atalean lortutako ereduko koefizienteak.
4. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
5. Marraztu ezazu doitutako erregresio-zuzena. Batez bestekoen puntutik – hau da,  $(\bar{S}, \overline{PG})$ -tik – igarotzen da?
6. Egiazta ezazu ea berdintza hauek betetzen diren, eta azaldu ezazu lortutako emaitza.

$$\sum_{i=1}^5 \hat{u}_i = 0 \quad \text{eta} \quad \sum_{i=1}^5 \hat{u}_i PG_i = 0.$$

7. Frogatu ezazu ea karratuen deskonposizioa betetzen den:

$$KBO = KBA + HKB$$

non  $KBO$  karratuen batura osoa den,  $KBA$  karratuen batura azaldua den, eta  $HKB$  hondarren karratuen batura den. Azaldu ezazu lortutako emaitza.

8. Kalkula ezazu mugatze-koefizientea, eta interpreta ezazu lortutako doikuntzaren ontasuna.

Idatz ezazu azken txosten bat, egoera hoerietan lortutako emaitza guztiak alderatu ondoren zer konklusio atera duzun azalduta.

### A3. ARIKETA Erregresio Lineal Orokorraren Eredua (ELOE).

Autoen salmentaren jokaera analizatu nahi dugu, prezioa eta enpresak egindako publizitate-gastuaren aintzat hartuta. Horretarako, sei enpresatako datuak ditugu eskuragarri; zehazki aldagai hauei buruzko datuak: salmentak ( $S$ , milioi eurokotan), autoen prezioa ( $P$ , mila eurokotan) eta publizitatean egindako gastua ( $G$ , hamar mila eurokotan).

Enpresa	1	2	3	4	5	6
$S_i$	10	8	7	6	13	6
$P_i$	10	11	13	12	7	9
$G_i$	12	10	9	9	12	11

**LEHEN ZATIA.** Erregresio Lineal Bakunaren Eredua.

Lehendabiziko azterketan, erregresio lineal bakunaren eredu bat proposatzen da:

$$S_i = \gamma_1 + \gamma_2 P_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (\text{A3.1})$$

1. Karratu Txikien Arrunta irizpidearen arabera, zein helburu-funtzioa minimizatu behar da, (A3.1) ereduko koefizienteak estimatzeko?
2. Lor ezazu dagokion ekuazio normalen sistema, eta ordezkatu itzazu lagin-balioak.
3. Idatz itzazu  $X$ ,  $X'X$  matrizeak eta  $X'Y$  bektorea, eskuragarri dauden behaketak aintzat hartuz.
4. Estima itzazu (A3.1) ereduko koefizienteak KTA estimatzailearen bitartez. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
5. Estima ezazu ereduko perturbazioen bariantza:  $\sigma_u^2$ .
6. Estima ezazu koefizienteen KTA estimatzaileen bariantza- eta kobariantza-matrizea.
7. Kalkulatu eta interpreta ezazu mugatze-koefizientea.

**BIGARREN ZATIA.** Erregresio Lineal Orokorraren Eredua. Estimazioa.

Oraingoan, erregresio lineal orokorraren eredu bat proposatzen da:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 P_i + \beta_3 G_i + v_i \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (\text{A3.2})$$

1. Karratu Txikien Arrunta irizpidearen, zein helburu-funtzioa minimizatu behar da, (A3.2) ereduko koefizienteak estimatzeko?
2. Lor ezazu dagokion ekuazio normalen sistema, eta ordezkatu itzazu lagin-balioak.
3. Idatz itzazu  $X$ ,  $X'X$  matrizeak eta  $X'Y$  bektorea, eskuragarri dauden behaketak aintzat hartuz.
4. Estima itzazu (A3.2) ereduko koefizienteak, KTA irizpidearen bitartez. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
5. Har ezazu kontuan lagineko lehen enpresa. Zenbateko salmentak estimatu dira ereduaren arabera? Zer hondar dagokie?
6.  $\gamma_1$  eta  $\beta_1$  balio estimatuak berdinak al dira? Eta  $\gamma_2$  eta  $\beta_2$  balio estimatuak? Zergatik? Arrazoitu ezazu zure erantzuna ekuazio normaletan oinarrituz.

7. Kalkula ezazu hondarren karratuen batura, eta alderatu ezazu (A3.1) ereduan kalkulatuakoarekin. Espero zenuen emaitza lortu duzu?
8. Estima ezazu perturbazioaren bariantza:  $\sigma_v^2$ ,  $\hat{\sigma}_u^2$  eta  $\hat{\sigma}_v^2$  estimatuak berdinak al dira? Zergatik?
9. Estima ezazu (A3.2) ereduko koefizienteen KTA estimatzaileen bariantza- eta kobariantza-matrizea.
10. Kalkula ezazu mugatze-koefizientea, eta alderatu ezazu (A3.1) ereduan kalkulatuakoarekin. Espero zenuen emaitza lortu duzu?
11. Har itzazu kontuan (A3.1) eta (A3.2) ereduak. Orain arte duzun informazioan oinarrituz, bi eruedetatik zein dago hobeto, zure ustez? Zergatik?

#### A4. ARIKETA ELOE: eskala-aldaketa

Enpresa batek herri turistiko bateko hondartzako izozki-postuen kontzesioa lortu du. Salmentetan zer faktorek eragiten duten analizatzeko, azken sei urteetako uztaileko, abuztuko eta iraileko informazioa dago eskuragarri; zehazki, aldagai hauei buruzkoa: izozki-salmenta, tenperatura eta izozkiaren batez besteko prezioa.

Salmentak azaltzeko, eredu hau zehaztu da:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 T_t + \beta_3 P_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, 18. \quad (\text{A4.1})$$

##### LEHEN ZATIA. Estimazioa

1. Zer unitatetan dago neurtuta (A4.1) ereduko aldagai azaldua? Eta aldagai azaltzaileak?
2. Estima itzazu (A4.1) ereduko koefizienteak, Karratu Txikien Arrunta irizpidearen bitartez.
3. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
4. Zein da hondarren karratuen batura?
5. Interpreta ezazu doikuntzaren ontasuna.
6. Estima ezazu perturbazioen bariantza.
7. Estima ezazu koefizienteen KTA estimatzaileen bariantza- eta kobariantza-matrizea.



**BIGARREN ZATIA.** Zer gertatuko litzateke aldagaiak neurtzeko unitateak aldatzean?

Har itzazu kontuan egoera hauek:

1. **egoera.** Salmentak mila eurokotan neurtzen dira, eta gainerako aldagaiak hasierako unitateetan neurtuta mantentzen dira.
2. **egoera.** Prezioa mila eurokotan neurtzen da, eta gainerako aldagaiak hasierako unitateetan neurtuta mantentzen dira.
3. **egoera.** Salmentak eta prezioa mila eurokotan neurtzen dira, eta temperatura Fahrenheit gradutan neurtzen da.
4. **egoera.** Temperatura Celsius gradutan neurtzen da; salmentak eta prezioa, berriz, eurotan.

Erantzun itzazu galdera hauek, egoerak banan-banan aztertuta.

1. Kalkula itzazu aldagaiak neurtzeko unitatetan izandako eraldaketak.
2. Estima itzazu proposatutako ereduaren koefizienteak, eraldatutako datuak erabiliz.
3. Interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
4. Zein da hondarren karratuen batura?
5. Interpreta ezazu doikuntzaren ontasuna.
6. Estima ezazu perturbazioen bariantza.
7. Estima ezazu koefizienteen KTA estimatzaileen bariantza- eta kobariantza-matrizea.
8. Azaldu itzazu ariketaren lehen eta bigarren zatietan lortutako emaitzen arteko desberdintasunak.

## A5. ARIKETA ELOE: hipotesien planteamendua

Tokiko supermerkatu-kate batek hiru markatako zuku ontziratuak saltzen ditu: A, B eta C marketakoak, hain zuzen. A zukua produzitzen duen enpresak publizitate-kanpaina garrantzitsu bat egin du, bai kateko dendetan, eta baita tokiko telebistan eta egunkarietan ere.

Demagun erregresio lineal orokorraren eredu hau dugula salmentak zehazteko:

$$\begin{aligned}
 S_t^A &= \beta_1 + \beta_2 P_t^A + \beta_3 P_t^B + \beta_4 P_t^C + \beta_5 GP_t^b + \beta_6 GP_t^{tb} + \beta_7 GP_t^e + \\
 &+ \beta_8 GP_t^B + \beta_9 GP_t^C + u_t \quad t = 1, 2, \dots, 40
 \end{aligned}$$

non:

$S^A$ : kateko dendetan izandako A zukuaren salmentak diren (mila eurokotan).

$P^A$ : kateko dendetan saldutako A zukuaren batez besteko prezioa den (eurotan).

$P^B$ : kateko dendetan saldutako B zukuaren batez besteko prezioa den (eurotan).

$P^C$ : kateko dendetan saldutako C zukuaren batez besteko prezioa den (eurotan).

$GP^b$ : A zukuaren alde kateko dendetan egindako publizitate-gastua den (mila eurokotan).

$GP^{tb}$ : A zukuaren alde telebistan egindako publizitate-gastua den (mila eurokotan).

$GP^e$ : A zukuaren alde egunkarietan egindako publizitate-gastua den (mila eurokotan).

$GP^B$ : B zukuaren aldeko publizitatean egindako gastu totala den (mila eurokotan).

$GP^C$ : C zukuaren aldeko publizitatean egindako gastu totala den (mila eurokotan).

Ereduko aldagaien azken berrogei hilabeteetako datuak daude eskuragarri.

Proposatutako eredia estimatu du A zukuaren produzitzaileak, hipotesi hauek kontrastatzeko asmoarekin:

1. Zukuaren batez besteko prezioak salmentetan eragiten du.
2. A markaren alde egindako publizitate-gastuak salmentetan eragiten du.
3. Ereduko aldagai azaltzaileak batera esanguratsuak dira.
4. Lehiako prezioen aldaketek ez dute A zukuaren salmentetan eragin.
5. Tokiko telebistako publizitate-gastua bi mila euro handitzeak eta tokiko egunkarietako publizitate-gastua mila euro handitzeak eragin bera dute salmentetan.
6. Kateko dendetako publizitate-gastua mila euro handitzeak eta tokiko telebistako publizitate-gastuan kopuru bera gehitzeak eta tokiko egunkarietako publizitate-gastua bikoizteak eragin bera dute salmentetan.
7. B markaren batez besteko prezioa euro bat igotzeak eta A markaren prezioari kopuru bera gehitzeak eragin bera dute salmentetan, baina kontrako zeinua dute; eta, aldi berean, C markaren batez besteko prezioa euro bat igotzean salmentetan lortzea espero den eragina B markaren prezioari kopuru bera gehitzean lortzen den eraginaren erdia da.
8. B markaren aldeko publizitateari hiru mila euro gehitzeak eta C markaren aldeko publizitateari kopuru bera gehitzeak eragin bera dute salmentetan.

9. B markaren eta bai C markaren aldeko publizitateari mila euro gehitzeak eta A markaren aldeko publizitateari mila euro gehitzeak eragin bera dute salmentetan.

Hipotesi horiek banan-banan aztertuta, idatz itzazu hipotesi hutsa eta aurkakoa, eta hipotesi huts bakoitzari dagokion eredu murriztua.

## A6. ARIKETA ELOE: kontrastatzeko hipotesiak

Hotelak zer mailatan bete diren aztertu nahi da ( $BG$ , portzentajetan), aldagai hauek kontuan hartuta: eskaintako zerbitzuen kalitatea ( $K$ , 100 punturainoko indizea), logelen batez besteko prezioa ( $P$ , eurotan) eta urte horretan Hotelen gidak hotelari emandako puntuazioa ( $GH$ , 1etik 100era). Horretarako, eredu hau zehazten da:

$$BG_i = \beta_1 + \beta_2 K_i + \beta_3 P_i + \beta_4 GH_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (A6.1)$$

Eredua KTA irizpidearen bitartez estimatu da, 20 hotelez osatutako lagin bat erabiliz, eta emaitza hauek lortu dira:

$$\widehat{BG}_i = 66431,018 - 100,143 K_i - 3649,113 P_i + 0,8882 GH_i \quad R^2 = 0,9876.$$

Ondoren ematen den informazioan oinarrituz, kontrasta ezazu ereduko aldagai azaltzaileen banakako eta baterako esangura. Interpretatu itzazu lortutako emaitzak.

$$\widehat{BG}_i = 98116,978 + 4038,84 K_i + 10798,901 P_i \quad R^2 = 0,7335. \quad (A6.2)$$

$$\widehat{BG}_i = 60071,404 + 192,823 K_i + 0,8742 GH_i \quad R^2 = 0,9776. \quad (A6.3)$$

$$\widehat{BG}_i = 67310,275 - 3503,14 P_i + 0,8717 GH_i \quad R^2 = 0,9874. \quad (A6.4)$$

## A7. ARIKETA ELOE: estimazioa eta hipotesien kontrastapena

Ordenagailu eramangarrien prezioak zehaztu nahi dira, beren ezaugarriak aintzat hartuz. Horretarako, 94 ordenagailuz osatutako lagin bat bildu da, eta aldagai hauei buruzko datuak lortu dira: prezioa (eurotan), PUZaren potentzia (megahertzetan), pantailaren bereizmen horizontala (puntutan), pantailaren bereizmen bertikala (puntutan), pisua (kilogramotan) eta ram memoria (gigahertzetan).

**LEHEN ZATIA.** Estimazioa

1. Zehazta ezazu erregresio lineal orokorreko eredu bat, ordenagailu eramangarrien prezioa aipatutako ezaugarriak aintzat hartuz azaltzeko.
2. Interpreta itzazu proposatutako ereduaren koefizienteak.
3. Estima ezazu proposatutako eredua KTA irizpidearen bitartez, eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
4. Zer esan daiteke ereduko doikuntzaren ontasunari buruz?

**BIGARREN ZATIA.** Hipotesien kontrastapena

1. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen baterako esangura.
2. Eraiki itzazu pisua eta ram memoria aldagaiei dagozkien koefizienteen konfiantzartateak. Interpreta itzazu lortutako emaitzak.
3. Kontrasta ezazu pisua eta ram memoria aldagai azaltzaileen banakako esangura. Alderatu itzazu emaitzak aurreko atalean lortutako emaitzekin.
4. Ba al dago lagin-ebidentziarik, PUZaren potentziak prezioan eragin positiboa duela esateko?
5. Kontrasta ezazu pantailaren bereizmenaren (horizontala eta bertikala) banakako eta baterako esangura. Azaldu itzazu lortutako emaitzak.
6. Ba al dago lagin-ebidentziarik, bereizmen horizontalak eta bereizmen bertikalak salmentetan eragin bera dutela baina kontrako zeinukoak direla esateko?
7. Kontrasta ezazu prezioan eragin bera duela ram memoria gigahertz bat handitzeak eta ordenagailuaren pisua kilogramo erdia jaisteak.
8. Ordenagailu eramangarriak 100 gramo gutxiago pisatuko balu, 10 euro gehiago ordaintzeko prest egongo zinateke?

## A8. ARIKETA ELOE: zehaztapen-errorea

Eskuragarri dagoen lagin batean, 30 herriri dagozkien aldagai batzuei buruzko informazioa dugu: familia-kontsumoa ( $C$ , mila eurokotan), familiaren batez besteko aberastasuna ( $A$ , mila eurokotan) eta prezio-indizea ( $P$ ).

Beh.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_i$	12	17	15	19	18	13	10	16	20	22
$P_i$	150	143	127	169	138	152	129	130	147	153
$C_i$	72,4	90,2	104,6	54,4	89,9	71,0	98,9	102,2	82,3	75,5
Beh.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$A_i$	21	23	11	12	20	19	17	15	15	18
$P_i$	131	156	144	149	140	142	146	158	154	156
$C_i$	101,2	73,2	82,7	77,5	90,0	82,6	85,7	67,1	72,0	70,1
Beh.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$A_i$	18	16	24	26	23	12	14	14	16	17
$P_i$	156	151	162	149	147	155	142	145	152	147
$C_i$	70,1	76,8	65,3	86,0	85,9	70,6	89,5	83,5	73,2	78,9

1. Estima itzazu zehaztu den erregresio lineal bakunaren ereduaren koefizienteak KTA irizpidearen bitartez, eta kontrasta ezazu aldagai azaltzailearen esangura:

$$C_i = \delta_1 + \delta_2 A_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, 30. \quad (\text{A8.1})$$

2. Estima itzazu koefizienteak KTA irizpidearen bitartez, erregresio lineal orokorreko eredu honetan:

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 A_i + \beta_3 P_i + v_i \quad i = 1, 2, \dots, 30. \quad (\text{A8.2})$$

3. Zergatik ez dira berdinak (A8.1) eta (A8.2) eredueta  $\delta_2$  eta  $\beta_2$  koefizienteak?
4. (A8.2) ereduan:

- a) Aldagai azaltzaileak banaka esanguratsuak al dira? Zergatik?
- b) Kontrasta ezazu hipotesi hau:

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_a: \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0.$$

- c) Interpreta itzazu lortutako emaitzak.
5. Estimatu diren bi eredueta bat aukeratu behar bazenu, zein aukeratu zenuke? Zergatik? Arrazoitu ezazu zure erantzuna, aukeratu duzun eta baztertu duzun ereduko estimatzaileen propietateetan oinarrituz.

## A9. ARIKETA ELOE: hipotesien kontrastapena eta auresana

Ikertzaile batek legatzaren eskaria analizatu nahi du, legatzaren prezioa eta oilaskoaren prezio aintzat hartuz, eredu hau erabilita:

$$Q_i = \beta_1 + \beta_2 PL_i + \beta_3 PO_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{A9.1})$$

non  $Q$  eskatutako legatz kopurua den (ehun kilokotan),  $PL$  legatza kiloaren prezioa den (eurotan) eta  $PO$  oilasko kiloaren prezioa den (eurotan). Hogei merkatutako datuak daude eskuragarri:

Beh.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$Q_i$	3	1	8	3	5	6	9	8	7	6	8	7	4	6	7	9	8	6	5	7
$PL_i$	6	5	6	5	4	4	3	4	5	7	6	5	8	7	6	7	6	4	5	5
$PO_i$	3	1	5	2	3	2	4	3	4	5	5	4	3	4	5	6	5	6	3	3

### LEHEN ZATIA. Zehaztapena eta estimazioa

1. Erregresioko elementuen zein oinarritzko hipotesi hartu behar dira aintzat, KTA koefizienteen estimatzaileak linealak eta alboragabeak izan daitezten? Eta, bariantza txikienekoak izan daitezten?
2. Estima ezazu proposatutako eredua, aurreko atalean idatzitako hipotesiak aintzat hartuz.
3. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu koefizienteak.
4. Zein izango litzateke legatzaren salmenta estimatua, baldin eta legatz kiloak 6 euro eta oilasko kiloak 2 euro balio badute?
5. Legatzaren prezioa bi euro garestituko balitz beste aldagai guztiak konstante mantenduz, zein izango litzateke legatzaren salmenta estimatuaren aldakuntza?
6. Legatzaren prezioa bi euro garestituko balitz eta oilaskoarena euro bat jaitsiko balitz, zein izango litzateke legatzaren salmenta estimatuaren aldakuntza?
7. Proposatu eta kalkula ezazu perturbazioen bariantzaren estimatzaile alboragabe bat.
8. Estima ezazu KTA estimatzaileen bariantza- eta kobariantza-matrizea.
9. Benetako bariantza- eta kobariantza-matrizea ezagutzearen kasuan, estimatuarekin bat letorke? Zergatik?

10. Azter ezazu ereduko doikuntzaren ontasuna.

**BIGARREN ZATIA.** Hipotesien kontrastapena

1. Kontrasta ezazu legatzaren prezioa euro bat garestitzean espero den eskaria 600 kilo jaitsiko delako hipotesia.
2. Kalkula ezazu  $\beta_2$  koefizientearen konfiantza-tartea, eta interpreta ezazu emaitza. Erlaziona ezazu emaitza hori aurreko atalean lortutako emaitzarekin.
3. Kontrasta ezazu legatz- eta oilasko-prezioen eraginak legatzarentzat espero den eskariaren berdinak baina kontrako zeinukoak direlako hipotesia.
4. Aurreko atalaren erantzuna izanik, balegoke eredia estimatzeko beste erarik, estimatzaileen bariantza txikiagotzeko? Zein?

**HIRUGARREN ZATIA.** Auresana

1. Lor ezazu legatz-eskariaren puntuzko eta tartezko auresana, bi ondasunen prezioa 10 euro dela aintzat hartuta.
2. Dendari batek uste du legatz kiloaren prezioa 5 euro eta oilasko kiloaren prezioa 2 euro izango balira ez lukeela legatzik salduko. Arrazoizkoa da iritzi hori?

## A10. ARIKETA Zer aldagaik eragiten dute salmenten eboluzioan?

Garbi SA enpresak Distiratsu garbigarri likidoa produzitzen du. Enpresak garbigarriaren botilen eskaria auresateko eredu bat izan nahi du eskuragarri, produkzioa antolatzeke eta lehengaien beharrak edota gordeketa-beharrak prestatzeko asmoz. Adituak uste du Distiratsu garbigarriaren salmenta ( $S$ , mila botilakotan) aldagai hauen bitartez zehazturik dagoela:

$P$  : lantegiko salmentaren prezioa (eurotan).

$PO$  : merkatuko ordezeko garbigarrien batez besteko prezioa (eurotan).

$PG$  : publizitate-gastua (mila eurokotan).

$EHI$  : Ekonomiaren Hazkunde Indizea (ehunekotan).

**LEHEN ZATIA.** Zehaztapena eta estimazioa

Enpresako adituak erregresio-eredu hau zehazten du salmententzat:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 PO_t + \beta_4 PG_t + \beta_5 EHI_t + u_t \quad t = 2009:1, \dots, 2011:6. \quad (A10.1)$$

Eredu hori estimatzeko 2009ko urtarriletik hasi eta 2011ko ekainera arteko hileroko behaketak ditu eskuragarri.

1. Estima ezazu populazioaren erregresio-zuzena.
2. Interpreta itzazu publizitate-gastua, eta EHI aldagaiei dagozkien koefiziente estimatuak. Espero ziren zeinuak dituzte?
3. Kontrasta ezazu ea publizitatean egindako gastuak salmentetan eragiten duen.
4. Irudika itzazu ereduko hondarrak. Beren eboluzioan analizatzean perturbazioen oinarritzko hipotesiak betetzen direla uste duzu? Zergatik?

**BIGARREN ZATIA.** Ereduaren berzehaztapena

Adituak, lehen zatian estimatutako ereduko hondarren portaera ikusi ondoren, bigarren erregresio-eredu bat zehaztu du salmententzat:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 PO_t + \beta_4 PG_t + \beta_5 EHI_t + \beta_6 EHI_t^2 + u_t \quad t = 2009:1, \dots, 2011:6. \quad (A10.2)$$

1. Zertan dira desberdinak (A10.2) eta (A10.1) ereduak? Zer jaso nahi du eredu berri horrekin?
2. (A10.2) ereduak linealtasunaren oinarritzko hipotesia betetzen du? Zergatik?
3. Estima itzazu (A10.2) ereduko koefizienteak, KTA irizpidearen bitartez.
4. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak. Espero ziren zeinuak dituzte?
5. Irudika itzazu eredu horretako hondarrak, eta alderatu itzazu (A10.1) ereduko hondarrekin.
6. Ereduko aldagai azaltzaileak batera esanguratsuak dira?
7. Zer gehikuntza estimatua izango da espero diren salmentetan EHI puntu bat handitu eta gainerako aldagaiak konstante mantenduz gero? Konstantea da denboraren zehar?



8. Emaitzetan oinarrituz, EHI aldagaiak espero ziren salmentetan eragiten al du?
9. Ba al dago lagin-ebidentziarik, prezioari dagozkion aldagaiak banaka esanguratsuak direla esateko?
10. Kontrasta ezazu publizitate-gastuak eragin positiborik ba al duen espero ziren salmentetan.
11. (A10.2) ereduko estimazioan lortutako emaitzak analizatuz, zein da lehen zatian zehaztu den ereduaren arazoa? Zein dira (A10.1) ereduan erabilitako estimatzailearen propietateak? Bi eredu horietatik zein aukeratuko zenuke salmentak zehazteko? Zergatik?
12. Estima ezazu 2011. urteko uztailean izango den salmenta kopurua, aldagai azaltzaileen balio hauek kontuan harturik:

	$P$	$PO$	$PG$	EHI
2011ko uztaila	3,65 euro	4,10 euro	7000 euro	% 31

## A11. ARIKETA    Merezi al du nire landetxean igerileku bat egitea?

Haran batean kokatutako landetxeen alokatze-prezioetan zerk eragiten duen analizatu nahi da. Horretarako, 14 landetxez osatutako lagin bat dago eskuragarri, eta informazio hau dugu: landetxea asteburuetan alokatzeko prezioa ( $P$ , eurotan), azalera ( $A$ , metro karratutan), logela kopurua ( $L$ ) eta bainugela kopurua ( $K$ ).

1. Eskuragarri dagoen informazioa erabiliz, zehaztu eta estima ezazu landetxeen alokairua aipatutako ezaugarriekin erlazionatzen duen eredu bat.
2. Interpreta itzazu koefiziente estimatuak. Espero ziren zeinuak dituzte?
3. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen baterako esangura.
4. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen banakako esangura.
5. Aurreko kontrasteetako emaitzak izanik, ba al dago lagin-arazorik? Erregresio lineal orokorraren ereduaren oinarrizko hipotesiak betetzen dira?
6. Lagineko 3. , 6. , 7. , 8. eta 13. landetxeek igerilekua dutela jakinik:
  - 6.1. Azaldu ezazu nola txertatuko zenukeen ezaugarri berri hori proposatu duzun ereduan.
  - 6.2. Eraiki ezazu ezaugarri hori jasotzen duen aldagaia.

- 6.3. Estima ezazu ezaugarri berri hori kontuan hartzen duen eredu bat, eta interpreta ezazu termino berriari dagokion koefiziente estimatua.
- 6.4. Alokatzeko-prezioan igerilekua izateak eragin positiboa al du?
7. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen banakako esangura, eta alderatu ezazu lortutako emaitza aurretik lortutakoekin. Non datza desberdintasuna?
8. Haran berean kokatutako landetxe eraiki berri bat 286 eurogatik alokatzeko asmoa du jabeak. 1512 metro karratu, bi logela eta bainugela bat ditu, eta igerilekurik ez. Prezio hori arrazoizkoa dela uste duzu? Eta igerilekua izango balu?

## A12. ARIKETA Diesel motorreko autoa garestiagoa da?

Leasing enpresa batek flota guztiz berritu nahi du. Enpresak, auto berriak erosi baino lehen, autoen prezioetan zer aldagaik eragiten duten jakin nahi du. Horretarako, 209 autoz osatutako lagin bat eskuratu du, autoen ezaugarri nagusiak (pisua eta azelerazioa) agertzen dituenak.

### LEHEN ZATIA. Zehaztapena eta estimazioa. Forma funtzionala

1. Analiza ezazu grafikoki autoen prezioaren eta haren ezaugarrien arteko erlazioa. Lortutako emaitzetan oinarrituz, proposa ezazu eredu bat autoen prezioa ezaugarri horiek aintzat hartuz analizatzeko.
2. Interpreta itzazu proposatutako ereduaren koefizienteak, eta azaldu ezazu zein zeinu espero diren.
3. Estima ezazu ereduaren KTA irizpidearen bitartez, eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
4. Zein dira lagineko hirugarren autoaren ezaugarriak?
5. Zer estimazio egingo zenuke lagineko lehen autoaren prezioari buruz?, zein da auto horren benetako prezioa?, nola esaten zaio diferentzia horri?
6. Autoaren pisua 100 kilo handituko balitz azelerazioa konstante mantenduz, zer estimazio egingo zenuke autoaren prezioaren aldakuntzari buruz?
7. Pisua eta azelerazioa aldagaiak banaka esanguratsuak dira? Eta batera?

**BIGARREN ZATIA.** Aldagai azaltzaile kualitatiboak

Adituak uste du beste aldagai batzuek ere eragiten dutela autoen prezioan. Aldagai horiek kontuan izatea erabaki du: motor mota (diesela edo gasolina) eta autoaren gama (baxua, erdiko edo altua). Lagineko 209 autoei buruzko informazio hori ariketari dagokion datu-fitxategian dago.

1. Proposa ezazu autoen prezioa azaltzeko erregresio-eredu orokor bat, daukazu informazio guztia kontuan hartuz. Azaldu ezazu zehaztapena xehetasunez.
2. Aurreko atalean proposatu duzun ereduan:
  - 2.1. Zer prezio espero da gama altuko eta diesel motorreko auto batentzat?
  - 2.2. Zer prezio espero da 1200 kilo pisatzen duen eta orduko 100 km-ko azelerazioa 8 segundoan lortzen duen gama erdiko eta gasolina-motorreko auto batentzat?
  - 2.3. Zer diferentzia espero da gama baxuko eta gama altuko autoen prezioen artean, biak diesel-motorrekoak badira? Eta, gainerako ezaugarriak berdinak badira?
  - 2.4. Zer diferentzia espero da diesel- eta gasolina-motorreko autoen prezioen artean, beste ezaugarriak berdinak izanik?
3. Estima ezazu proposatu duzun eredua KTA irizpidearen bitartez, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak. Espero ziren zeinuak dituzte?
4. Aldagai azaltzaileak banaka esanguratsuak al dira?
5. Zer diferentzia estimatzen da gama baxuko eta altuko autoen prezioen artean, gainerako ezaugarriak berdinak badira? Diferentzia hori esanguratsua al da?
6. Zer diferentzia espero da gama erdiko eta altuko autoen prezioen artean, gainerako aldagaiak konstante mantentzen badira? Diferentzia hori esanguratsua al da?
7. Aurreko bi ataletako kontrasteen emaitzetan oinarrituz, zer eragin du gamak, autoentzat espero den prezioan? Zehazta ezazu erlazio hori era egokian jasotzen duen eredu bat, eta estima ezazu KTA irizpidearen bitartez.
8. Aurreko ataleko ereduan oinarrituz, estima ezazu lagineko lehen autoaren prezioa. Lehen zatiko bosgarren atalean kalkulatu duzunaren berdina da? Zergatik?
9. Kontzesionario bateko zuzendariak inkesta bat egin zion pertsona bati, eta esan zion auto baten prezioa gutxi gorabehera 3000 euro igotzen zela diesel-motorra izateagatik. Lortutako emaitzak eskuartean izanik, zer esan dezakezu zuzendari horrek esan zuenari buruz?

### A13. ARIKETA Nolako lan-txanda, holako soldata

Enpresa bateko kudeatzaileak kontratutako langileen soldata analizatu nahi du ( $S$ , eurotan), esperientzia ( $E$ , urtetan), lanpostua (teknikaria edo administrazioko langilea) eta txanda (goizekoa, arratsaldekoa edo gauekoa) aintzat hartuta.

1. Daukazun informazio guztia kontuan izanik, proposa ezazu kasu hauek kontuan har ditzakeen eredu bat.
  - 1.1. Langilearen lanpostuak eragin bat edo beste bat izan dezake espero diren salmentetan.
  - 1.2. Langileek nolako lan-txanda duten, halako soldata izan dezakete.
  - 1.3. Lanpostu guztietako langileen esperientziak ez du eragin bera espero den soldatan.
  - 1.4. Lanpostu bereko goizeko eta arratsaldeko langileek soldata bera izatea espero daiteke.
2. Idatz ezazu aurreko kasu bakoitza kontrastatzeko hipotesi huts eta aurkako egokiak.
3. Idatz ezazu kasu bakoitzari dagokion eredu murriztua.

### A14. ARIKETA Ba al dago lan-bereizkeriarik NIHON SA enpresan?

NIHON SA enpresak zenbait lanpostutako langileen soldata ( $S$ , mila eurokotan) analizatu nahi du, heziketa-maila ( $H$ , hezkuntza-urtetan) eta lan-esperientzia, ( $E$ , lanpostu horretan egindako urtetan) aintzat hartuta. Soldata zehazteko, erregresio-eredu hau proposatzen dugu:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 H_i + \beta_3 E_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, 100. \quad (\text{A14.1})$$

Hona hemen enpresako 100 langilez osatutako lagin baten datuak:

$$\begin{aligned} \sum S_i &= 2489,017 & \sum H_i &= 288 & \sum E_i &= 119 & \sum H_i^2 &= 2090 & \sum S_i^2 &= 64870,3 \\ \sum E_i^2 &= 695 & \sum H_i E_i &= 329 & \sum S_i H_i &= 7869,098 & \sum S_i E_i &= 3921,297 \end{aligned}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,019276 & -0,0023 & -0,0022 \\ -0,0023 & 0,00079 & -0,00001967 \\ -0,0022 & -0,00001967 & 0,00180753 \end{bmatrix}$$

**LEHEN ZATIA.** Estimazioa

1. Interpreta itzazu (A14.1) erregresio linealeko ereduaren koefizienteak.
2. Karratu Txikien Arrunta irizpidean oinarrituz, zer helburu-funtzio minimizatu behar da (A14.1) ereduko koefizienteak estimatzeko?
3. Lor ezazu ekuazio normalen sistema, eta ordezkatu itzazu lagin-balioak.
4. Idatz ezazu  $X'X$  matrizea, eskuragarri dauden lagin-datuak erabiliz.
5. Estima itzazu ereduko koefizienteak KTA irizpidearen bitartez, eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
6. Estimatu ereduaren oinarrituz, erantzun itzazu galdera hauek:
  - 6.1. A langileak B langileak baino bi urte gehiago daramatza lanean lanpostu berean. Zein da haien soldaten arteko diferentzia estimatua?
  - 6.2. C langileak D langileak baino hiru urte gutxiago daramatza lanean, baina 5 urte gehiago ditu heziketan. Zein da haien soldaten arteko diferentzia estimatua?
  - 6.3. Langile batek 12 urteko heziketa du, eta hiru urte daramatza enpresan lanean. Zein da langile horren soldata estimatua?
7. Kalkulatu eta interpreta ezazu ereduko doikuntzarako neurriren bat.

**BIGARREN ZATIA.** Inferentzia

Aurreko (A14.1) ereduko estimazio-emaitzetan oinarrituz:

1. Eraiki itzazu  $\beta_2$  eta  $\beta_3$  koefizienteentzako % 95eko konfiantza-tarteak.
2. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen banakako esangura. Erlaziona itzazu lortutako emaitzak aurreko atalean lortutakoekin.
3. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen baterako esangura.
4. Enpresako kudeatzailearen ustez, heziketak eta esperientziak eragin bera dute salmentetan, ceteris paribus.
  - 4.1. Zer murrizketa ezarri behar da (A14.1) erregresio linealeko ereduaren koefizienteetan?
  - 4.2. Estima ezazu aurreko murrizketa kontuan hartzen duen eredu.
  - 4.3. Nola du izena aurreko atalean erabili duzun estimatzaileak? Zer propietate ditu?

- 4.4. Kontrasta ezazu kudeatzailearen hipotesia.
- 4.5. Aurreko atalean lortutako emaitzetan oinarrituz, zer eredu proposatzen duzu soldata zehazteko? Zergatik?
5. NIHON SA enpresako langile batek dio beraren urteko soldata berrogeita bost mila eurokoa dela. Enpresan urte bat lanean daramala eta heziketan hamar urte dituela jakinik, arrazoizkoa al da langile horrek esandakoa?

### **HIRUGARREN ZATIA.** Soldata-bereizkeria: I. aukera

NIHON SA enpresako batzordeak baditu arrazoiak generoak eragindako soldata-bereizkeria badagoela pentsatzeko. Hori analizatzeko, beste aldagai azaltzaile bat gehitu dio aurretik zehaztutako ereduari: generoa. Aldagai kualitatibo hori fikziozko aldagaiaren bitartez gehitu daiteke ( $M_i$ ), zeinak 1 balioa hartzen duen langilea emakumezkoa bada, eta zero, gizonezkoa bada.

1. Kalkula itzazu lagin-balio interesgarri hauek: soldaten, emakumeen soldaten eta gizonen soldaten batez besteko aritmetikoak. Horretarako, jakin ezazu laginako lehen 31 banakoak gizonak direla.
2. Estima ezazu soldata eta  $M$  elkarrekin erlazionatzen dituen eredu lineal bat.
  - 2.1. Alderatu itzazu estimazio horren emaitzak lehen zatian lortutako emaitzekin.
  - 2.2. Generoa aldagaia esanguratsua da?
  - 2.3. Azken emaitza horretan bakarrik oinarrituz, generoak eragindako soldata-bereizkeriarik badagoela baieztatu dezakezu?
3. Idatz ezazu erregresio lineal orokorraren eredu bat, soldata, heziketa, esperientzia eta generoaren funtzioan zehazten dituenak.
4. Interpretatu itzazu proposatu duzun ereduko koefizienteak.
5. Estima ezazu ereduaren KTA irizpidearen bitartez.
  - 5.1. Zein da emakume baten soldata estimatua?
  - 5.2. Zein da bost urteko esperientzia eta 10 urteko heziketa dituen gizon baten soldata estimatua?
  - 5.3. Zein da gizon eta emakumeen soldata estimatuen arteko diferentzia?
  - 5.4. Zer eragin du esperientziak, ceteris paribus, soldatan? Eta emakume batentzat? Eta gizon batentzat?

6. Interpreta itzazu lortutako emaitzak, eta idatz ezazu txosten bat enpresako batzordearentzat, generoak eragindako soldata-bereizkeriari buruzko konklusioak azaltzeko.

**LAUGARREN ZATIA.** Soldata-bereizkeria: II. aukera

Enpresako batzordeak, aurkeztutako txostena eta aurreko emaitzak aztertu ondoren, ikerketa osatu gabe dagoela uste du, zeren lan-bereizkeria esperientzian nabarmentzen dela uste baitu. Susmo hori kontrastatzeko asmoarekin, eredu hau estimatzea proposatu du:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 F_i + \beta_3 E_i + \beta_4 M_i + \beta_5 (E_i \times M_i) + u_i \quad i = 1, 2, \dots, 100. \quad (\text{A14.2})$$

1. Azaldu ezazu (A14.2) ereduaren zehaztapena zehaztasunez: zein aldagaik eragiten dute soldatan? nola eragiten dute?, genero-bereizkeria analizatzeko posibilitatea barneraturik dago?, nola?
2. Estima ezazu (A14.2) ereduaren KTA irizpidearen bitartez, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
  - 2.1. Zein da emakume baten soldata estimatua?
  - 2.2. Zein da bost urteko esperientzia eta 10 urteko heziketa dituen gizon baten soldata estimatua?
  - 2.3. Zein da gizon eta emakumeen soldata estimatuen arteko diferentzia?
  - 2.4. Zer eragin du esperientziak, ceteris paribus, soldatan? Eta emakume batentzat? Eta gizon batentzat?
3. (A14.2) ereduko estimazioan lortutako emaitzetan oinarrituz, generoak eragindako soldata-bereizkeriarik badagoela baieztatu dezakezu?
4. Azadu iezaiozu enpresako batzordeari ea zein diren NIHON SA enpresako langileen soldatari dagokionez genero-bereizkeriari buruz ateratako konklusioak.

## **A15. ARIKETA** Elektrizitatearen kontsumoa urtaroaren arabera da?

Enpresa elektriko baten teknikariak eskualde bateko elektrizitate-eskariaren joera analizatu nahi du. Analisi horretarako, 2007tik 2010era arteko hiruhileroko datuak ditu eskuragarri.

**LEHEN ZATIA.** Zehaztapena eta estimazioa

1. Proposa ezazu eredu bat elektrizitate-eskariaren joera analizatzeko.

2. Idatz ezazu  $X$  matrizea, datu guztiak jarritz.
3. Idatz itzazu  $X'X$  eta  $X'Y$  matrizeak, elementuak batukarien bitartez adieraziz.
4. Estima ezazu eredua KTA irizpidearen bitartez, eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
5. Irudika itzazu hondarrak denboran zehar. Azaldu itzazu emaitzak.
6. Hondarren grafikoa ikusirik eta datuen maiztasuna emanik, nola zehaztuko zenuke beste eredu bat elektrizitate-eskariarentzat?
7. Estima ezazu aurreko atalean proposatu duzun eredua, eta azaldu ezazu hondarren grafikoa.
8. Aurreko atalean estimatu duzun ereduaren arabera, zein da lagineko azken behaketarentzat estimatzen den eskaria?

### **BIGARREN ZATIA.** Hipotesien kontrastapena eta auresana

1. Zenbat aldagai azaltzaile ditu lehen zatian zehaztu duzun ereduak? Kontrasta ezazu aldagaien banakako eta baterako esangura.
2. Enpresako teknikariak uste du elektrizitate-eskari bera espero dela bigarren eta hirugarren hiruhilekoetan:
  - 2.1. Idatzi eta estima ezazu eredu murriztua.
  - 2.2. Ba al duzu murrizketa betetzen delako lagin-ebidentziarik?
3. Zenbatekoa izango dela estimatzen da 2011. urteko lehen bi hiruhilekoetako elektrizitate-eskaria?





### III. zatia

## Autoebaluaziorako praktikak



## P1. PRAKTIKA

WOOHOUSE higiezin-agentziak, prezioen politika bat ezartzeko nahian, eskuragarri dituen etxebizitzaren prezioetan eragiten duten faktoreak analizatu nahi ditu. Horretarako, aldagai hauen informazioa du:

$P$ : etxebizitzaren prezioa (mila dolarrekotan).

$L$ : etxebizitzaren logela kopurua.

$A$ : etxebizitzaren azalera (oin karratutan).

Hona hemen eskuragarri dagoen laginaren zati bat:

Beh.	1	2	3	4	5	.....	11	12	13	14	15
$P_i$	219	225	255	306	230	.....	195	425	240	253	111
$L_i$	2	2	2	2	3	.....	3	3	3	3	4
$A_i$	1185	1421	1478	2205	1171	.....	1448	1502	1536	1536	1535

Lagin horrekin, informazioa hau lortu da:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N P_i &= 3600 & \sum_{i=1}^N L_i &= 42 & \sum_{i=1}^N A_i &= 21909 & \sum_{i=1}^N P_i A_i &= 5322245 & \sum_{i=1}^N A_i^2 &= 32780493 \\ \sum_{i=1}^N (A_i - \bar{A})^2 &= 780207,6 & \sum_{i=1}^N (P_i - \bar{P})^2 &= 62766,03 & \sum_{i=1}^N (A_i - \bar{A})(P_i - \bar{P}) &= 64085 \end{aligned}$$

### LEHEN ZATIA.

1. Zein da laginaren tamaina? Zenbat balio du laugarren etxebizitzak? Zenbat gela ditu?
2. Demagun erregresio linealeko eredu hau dugula:

$$P_i = \alpha + \beta A_i + u_i \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{P1.1})$$

Zein da eredu horren aldagai azaldua?, zein da ereduaren aldagai azaltzailea?, zein elementu dira aleatorioak?

3. Idatz ezazu populazioaren erregresio-zuzena.
4. Interpreta ezazu (P1.1) ereduko azalera aldagaiari dagokion koefizientea.
5. Idatz ezazu (P1.1) eredua Karratu Txikien Arrunta irizpidearen bitartez estimatzeko minimizatu behar den helburu-funtzioa. Deriba itzazu ekuazio normalak, eta jar itzazu agertzen diren lagin-momentuen ordezkari baliokak.

6. Estima ezazu (P1.1) eredua KTA irizpidearen bitartez, eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
7. Lor itzazu lagineko lehen etxebizitzari dagozkion prezio estimatua eta hondarra.
8. Lor ezazu  $\beta$  koefizientearen % 95eko konfiantza-tartea. Azalera aldagaia banaka esanguratsua dela ondoriozta daiteke?

### BIGARREN ZATIA.

Ondoren, enpresako kudeatzaileak pentsatu du logela kopurua garrantzitsua dela etxebizitzaren prezioa zehazteko. Aldagai hori barneratuz, estimazio hauek lortu dira:

$$\begin{array}{l} \hat{P}_i = 238,808 + 0,06593 A_i - 33,968 L_i \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) \quad (158,068) \quad (0,07653) \quad (32,228) \end{array} \quad \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 = 526630,2. \quad (\text{P1.2})$$

1. Zein da datu-matrizearen ordena? Idatz itzazu matrize horren lehen bost errenkadak.
2. Idatz ezazu estimatzailearen adierazpena batukarietan oinarrituz.

$$\hat{\beta}_{KTA} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]^{-1} \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

3. Interpreta itzazu koefiziente estimatuak. Espero zenituen zeinuak dituzte?
4. Estima ezazu 1250 oin koadro eta 3 logela dituen pisu baten prezioa.
5. Etxebizitza batek logela bat gehiago izanez gero, gainerako ezaugarriak aldatu gabe, zenbat garestituko da etxebizitzaren prezio estimatua?
6. Etxebizitza batek logela bat gehiago eta 120 oin karratu gehiago izanez gero, zenbat garestituko da etxebizitzaren prezio estimatua?
7. Idatz ezazu mugatze-koefizientearen adierazpena. Kalkula eta interpreta ezazu adierazpen horren balioa.
8. Proposa ezazu perturbazioen bariantzarako estimatzaile alboragabe bat, eta kalkula ezazu haren balioa.
9. Aldagai azaltzaileak batera esanguratsuak dira?
10. Aldagai azaltzaileak banaka esanguratsuak dira?

### **HIRUGARREN ZATIA.**

Prezioa aldagaia mila dolarrekotan neurtuta dago, baina dolarretan neurtu nahi da. Datu-lagindegiko **praktikaP1.gdt** fitxategia erabiliz:

1. Eralda itzazu prezioa aldagaiaren datuak mila dolarrekotatik dolarretara, eta berrestima ezazu (P1.2) ereduak datu horiek aintzat hartuz. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
2. Interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
3. Zein da hondarren karratuen batura? Estima ezazu perturbazioen bariantza.
4. Estima ezazu KTA estimatzaileen kobariantza-matrizea.
5. Kalkula ezazu doikuntza ontasunerako neurriren bat, eta interpreta ezazu emaitza.
6. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen banakako eta baterako esangura.
7. Alderatu itzazu prezioa aldagaiarekin lortutako emaitzak: kontuan hartu, batetik, mila dolarrekotan neurtutakoak, eta, bestetik, dolarretan neurtutakoak.

### **LAUGARREN ZATIA.**

Demagun prezioa aldagaia mila dolarrekotan neurtu dugula baina azalera metro karratutan neurtu nahi dugula, eta ez oin karratuetan. Datu-lagindegiko **praktikaP1.gdt** fitxategiko datuak erabiliz:

1. Eralda itzazu azalera aldagaiaren datuak oin karratuetatik metro karratuetara, eta berrestima ezazu (P1.2) ereduak datu horiek aintzat hartuz. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
2. Interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
3. Zein da hondarren karratuen batura? Estima ezazu perturbazioen bariantza.
4. Estima ezazu KTA estimatzaileen kobariantza-matrizea.
5. Kalkula ezazu doikuntza ontasunerako neurriren bat, eta interpreta ezazu emaitza.
6. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen banakako eta baterako esangura.
7. Alderatu itzazu prezioa aldagaiarekin lortutako emaitzak: kontuan hartu, batetik, oin karratutan neurtutakoak, eta, bestetik, metro karratutan neurtutakoak.

## P2. PRAKTIKA

Herrialde bateko Hezkuntza Ministerioak analizatu nahi du ea nola eragiten duen familiaren hezkuntza-mailak langileen soldatan. Horretarako, 718 langileren informazioa bildu du aldagai hauei buruz: jasotako soldata, hezkuntza-maila eta gurasoen hezkuntza-maila:

$S$  : langileak hilero jasotako batez besteko soldata (eurotan).

$ED$  : langilearen hezkuntza-urteak.

$FED$  : langilearen aitaren hezkuntza-urteak.

$MED$  : langilearen amaren hezkuntza-urteak.

Hona hemen eskuragarri dagoen laginaren lehen eta azken behaketak:

Beh.	$S_i$	$ED_i$	$FED_i$	$MED_i$
1	1350	12	12	12
2	1469	12	8	8
3	1573	12	10	10
4	1392	12	8	7
5	1800	12	12	12
6	2449	12	12	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
713	2262	17	12	13
714	1057	14	13	16
715	2239	17	8	8
716	1325	12	9	8
717	1662	10	9	12
718	2262	17	12	12

### LEHEN ZATIA.

Ikerketa egiteko kontratatu duten aditua jasotako soldata hezkuntza-mailaren menpean azaltzen duen eredu bat estimatzen hasi da:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 ED_i + u_i \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{P2.1})$$

Erantzun itzazu galderak, lagineko informazio hau erabiliz:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{718} S_i &= 1204591 & \sum_{i=1}^{718} ED_i &= 9814 & \sum_{i=1}^{718} ED_i^2 &= 137732 \\ \sum_{i=1}^{718} S_i^2 &= 2140967727 & \sum_{i=1}^{718} S_i ED_i &= 11821856074. & & \end{aligned}$$

1. Idatz ezazu proposatutako ereduko laginaren erregresio-zuzena.
2. Interpreta ezazu langilearen hezkuntza-maila aldagaiari dagokion koefiziente estimatua.
3. Perturbazioari dagokionez, oinarritzko zein hipotesi dira beharrezkoak KTA estimatzailea alboragabea eta bariantza minimokoa izan dadin? Eta inferentzia egiteko?
4. Eskuragarri dagoen informazioan oinarrituz eredu bat estimatu behar bazenu sei behaketa bakarrik kontuan hartuz, zer aukeratu zenuke: lehen sei behaketei erreparatuta estimatzea, edo azken sei behaketei erreparatuta? Arrazoitu ezazu zure erantzuna.
5. Estima ezazu laginaren erregresio-zuzena, soldata aldagaia mila eurokotan neurtu dela kontuan hartuta. Interpreta ezazu langilearen hezkuntza-maila aldagaiari dagokion koefiziente estimatua.

## BIGARREN ZATIA.

Bigarren etapa batean, eskuragarri dagoen informazio guztia erabiltzea erabaki du ikertzaile adituak. Hau da, soldata azaltzeko, hezkuntza-mailaren aldagai guztiak erduan kontuan hartzea erabaki du: langilearen hezkuntza, aitaren hezkuntza eta amaren hezkuntza. Estimazio-emaitza hauek lortu ditu:

P2.2 Eredua: KTA estimazioak 718 behaketak erabiliz  
Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	803,840	92,6237	8,6786	0,0000
$ED$	46,6073	7,22608	6,4499	0,0000
$FED$	11,1165	5,57971	1,9923	0,0467
$MED$	11,2765	6,49354	1,7366	0,0829
Hondarren karratuen batura		1,06e+08	$R^2$	0,120364

1. Idatz ezazu proposatutako erregresio lineal orokorraren eredua.
2. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
3. Interpreta itzazu langilearen aitaren eta amaren hezkuntza-maila aldagaiei dagozkien koefiziente estimatuak.
4. Idatz ezazu mugatze-koefizientearen adierazpena, eta interpreta ezazu lortutako doikuntza.



5. Zein da, P2.2 ereduaren arabera, lagineko lehen langilearen soldata estimatua? Eta, azkenarena? Zergatik dago halako diferentzia?
6. Langilearen hezkuntzari urte bat gehitzean, ceteris paribus, haren soldata berrogeita hamar euro igoko dela espero daiteke?
7. Kalkula ezazu % 95eko konfiantza-tartea  $ED$  aldagaiari dagokion koefizientearentzat. Erlaziona ezazu emaitza hori aurreko atalean lortutakoarekin.
8. Kontrasta ezazu gurasoen hezkuntza-maila aldagaien baterako eta banakako esangura. Azaldu itzazu emaitzak.
9. Kalkula itzazu % 95eko konfiantza-tarteak  $FED$  eta  $MED$  aldagaiei dagozkien koefizienteentzat. Erlaziona itzazu emaitza horiek aurreko atalean lortutako emaitzekin.

### HIRUGARREN ZATIA.

Adituak, bi gurasoen hezkuntza-mailak langilearen soldatan era berean eragiten duela pentsatzen duenez, informazio hori ereduari kontuan hartzea erabakitzen du.

1. Lor ezazu adituaren susmoa jasotzen duen murrizketa P2.2 ereduari ezartzearen ondoriozko eredu murriztua.
2. Informazio hau izanik, erantzun itzazu beheko galderak:

$$\hat{S}_i = 811,132 + 46,6197 ED_i + 10,8723 (FED_i + MED_i) \quad R^2 = 0,12 \quad (\text{P2.3})$$

$$(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) \quad (90,1217) \quad (7,1557) \quad (2,9364)$$

Zer ondorioztatzen duzu adituak duen susmoari buruz? Zergatik?

3. Aurreko ataleko erantzuna izanik, zein eredu aukeratuko zenuke langilearentzat espero den soldata zehazteko? Arrazoitu ezazu zure erantzuna erabilitako estimatzaileen propietateen oinarrituz.

## P3. PRAKTIKA

Enpresaburu batek bere kudeatzaileari agindu dio enpresako langileen soldata analizatzeko. Horretarako, 336 langileri buruzko informazioa bildu du aldagai hauei buruz:

$S$ : langilearen uneko soldata (mila eurokotan).

$A$ : langilearen adina, adin nagusia (18 urte) ez beste urteetan.

$X$ : enpresan sartu baino lehen langileak zuen esperientzia (hilabetetan).

$H$ : langilearen hezkuntza-mailarik altuena, hau da, oinarrikoa (O), erdi-mailakoa (E) eta goi-mailakoa (G).

Hona hemen eskuragarri dagoen laginaren lehen hamar behaketak:

Beh.	$S$	$A_i$	$X_i$	$H_i$
1	1000	15	7	E
2	1130	36	14	E
3	1280	12	11	E
4	1360	16	9	E
5	1360	18	3	G
6	1440	36	9	O
7	1500	29	8	G
8	1500	26	1	G
9	1650	24	14	G
10	1800	19	6	E
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

### LEHEN ZATIA.

Langileen soldata adinaren eta aurretiko esperientziaren arabera zehazten duen eredua analizatzen hasi da enpresako teknikaria, eta estimazio-erabaketa hauek lortu ditu:

P3.1 Eredua: KTA estimazioak 336 behaketak erabiliz  
Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	3943,29	337,271	11,69	1,08e-026
$A$	-26,2979	15,8930	-1,655	0,0989
$X$	61,4109	14,9234	4,115	4,88e-05
Hondarren karratuen batura		1146540000	$R^2$	0,049379

1. Idatz ezazu kudeatzaileak proposatutako erregresio lineal orokorraren eredua.
2. Deriba itzazu P3.1 eredua estimatzean KTA irizpidearen araberako optimizazioan lortzen diren ekuazio normalak.
3. Interpreta ezazu esperientzia aldagaiari dagokion koefiziente estimatua. Espero zenuen zeinua du?
4. Zenbateko soldata estimatzen duzu lagineko bosgarren langilearentzat?
5. Zenbateko soldata estimatzen duzu kontratatu berria den 21 urteko lizentziadun batentzat?
6. A langileak B langileak baino 10 urte gehiago ditu, eta aurretiko esperientzia bera izanik hasi ziren lanean biak ere. Zein da haien soldaten arteko diferentzia estimatua?
7. Idatz ezazu mugatze-koefizientearen adierazpena, eta interpreta ezazu haren balioa.
8. Kudeatzaileak zalantzak ditu, aurretiko esperientziak eta adinak soldatan duten eraginaren esangurari buruz. Ba al dago esangura horren lagin-ebidentziarik?

### BIGARREN ZATIA.

Ondoren, kudeatzaileak erabaki du, soldata hobeto zehazteko asmoarekin, hezkuntza-maila altuena erregresio-ereduan txertatzea, eta estimazio-emaizta hauek lortu ditu:

P3.2 Eredua: KTA estimazioak 336 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	3028,05	368,389	8,220	4,68e-015
$A$	-27,8645	14,3069	-1,948	0,0523
$X$	63,5817	13,4356	4,732	3,29e-06
$E$	508,577	256,450	1,983	0,0482
$G$	2106,81	276,147	7,629	2,53e-013

Hondarren karratuen batura 921708000  $R^2$  0,235795

Hezkuntza-maila altuena aldagaia hiru mailatan banatuta dago: oinarrizkoa (O), erdikoa (E) eta goikoa (G). Aldagai hori kuantifikatzeko, hiru fikzio-aldagai sortu ditu teknikariak:

$$O_i = \begin{cases} 1 & i \text{ langileak gehienez oinarrizko ikasketak baditu} \\ 0 & \text{bestelako kasuan} \end{cases}$$

$$E_i = \begin{cases} 1 & i \text{ langileak gehienez erdi-mailako ikasketak baditu} \\ 0 & \text{bestelako kasuan} \end{cases}$$

$$G_i = \begin{cases} 1 & i \text{ langileak gehienez goi-mailako ikasketak baditu} \\ 0 & \text{bestelako kasuan} \end{cases}$$

1. Idatz ezazu teknikariak proposatutako erregresio lineal orokorraren eredua.
2. Azaldu ezazu nola txertatu duen hezkuntza-maila altuena aldagaia P3.2 eremuan.
3. Interpreta itzazu proposatutako erregresio linealaren koefizienteak.
4. Idatz itzazu  $X$  datu-matrizearen lehen hamar balioak.
5. Zein dira lagineko lehen banakoaren ezaugarriak? Langile horrek gaur egun zenbateko soldata izatea estimatzen da?
6. Kontrasta ezazu ereduko aldagai azaltzaileen baterako esangura.
7. Ereduko aldagai azaltzaileak banaka esanguratsuak dira?
8. Lortutako emaitzak ikusirik, zer eredu proposatuko zenuke enpresako langileen soldata zehazteko? Arrazoitu ezazu zure erantzuna.

## P4. PRAKTIKA

Eraikuntza-enpresa bateko agente batek analizatu nahi du ea zer aldagaik eragiten duten Houstoneko etxebizitzaren salmenta-prezioetan. Horretarako, 321 etxebizitzaz osatutako lagin bat lortu du aldagai hauen datei buruz:

$P$ : etxebizitzaren salmenta-prezioa (AEBko mila dolarrekotan).

$E$ : etxebizitzaren eraikuntza-urteak.

$A$ : etxebizitzaren azalera (metro karratutan).

$B$ : bainugela kopurua.

### LEHEN ZATIA.

Hona hemen etxebizitzaren salmenta-prezioa zehazteko erabili den erregresio lineal orokorraren eredu baten estimazio-emaitzen laburpena:

P4.1 Eredua: KTA estimazioak 321 behaketak erabiliz  
Aldagai azaldua:  $P$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	8,76294	6,25635	1,4006	0,1623
$E$	-0,307546	0,0568832	-5,4066	0,0000
$A$	0,328068	0,0357940	9,1654	0,0000
$B$	12,2529	3,20741	3,8202	0,0002
Hondarren karratuen batura		281066	$R^2$	0,529875

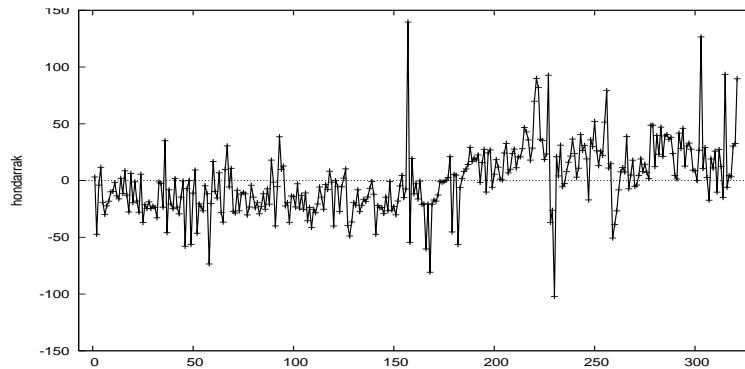
**Koefizienteen kobariantza-matrizea**

const	$E$	$A$	$B$	
39,1419	-0,135865	-0,0546263	-9,9340	const
	0,00323570	-0,000556436	0,0797150	$E$
		0,00128121	-0,0795505	$A$
			10,2875	$B$

1. Idatz ezazu agenteak proposatu duen erregresio lineal orokorraren eredua.
2. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
3. Etxebizitzak bainugela bat gehiago izanez gero, gainerako ezaugarriak konstante mantenduz, zenbat dolar balio du? Zergatik?
4. Idatz ezazu mugatze-koefizientearen adierazpena. Zein da haren balioa? Interpretatu ezazu lortutako emaitza.
5. Proposa ezazu perturbazioen bariantzaren estimatzaile alboragabe bat. Kalkula ezazu haren balioa.
6. Kontrasta ezazu aldagaien baterako esangura.
7. Kontrasta ezazu eraikuntza-urteen banakako esangura.
8. Etxebizitzak metro karratu bat gehiago izanez gero, gainerako ezaugarriak konstante mantenduz, ba al dago lagin-ebidentziarik, 500 dolar ordaintzeko prest egoteko?
9. Agenteak pentsatu du, salmenta-prezioan konpentsatu egiten direla eraikuntza-urteek duten eragin negatiboa eta azalera duen eragin positiboa. Eskuragarri dagoen informazioan oinarrituz, agenteak dioenarekin ados zaude?
10. Aurreko atalean lortutako emaitza eskuartean izanik, salmenta-prezioa zehazteko beste ereduren bat proposatuko zenuke? Zergatik?

- Erabilitako laginean, 1980. eta 1981. urteetan saldutako etxebizitzak daude. Izatez, lehen 179 behaketak 1980. urtean saldutako etxebizitzei dagozkie, eta gainerakoak, berriz, 1981. urtean saldutakoei. Gainera, 1981. urtean, zabor-errautegi bat martxan jarri zen etxeen ingurunean, eta, harekin batera, autobide bat eraiki zuten. Horrek guztiak inguruneko komunikabideen hobekuntza ekarri zuen.

Informazio hori kontuan izanik, azaldu ezazu P4.1 ereduko hondarren grafikoa. Oinarriko hipotesiren bat bete gabe gelditzen al da?



## BIGARREN ZATIA.

Agentearen teoria da 1980. urtean saldutako etxebizitzaren prezioa eta 1981. urtean saldutakoen prezioa desberdinak direla, zabor-errautegiaren eta inguruko komunikabideetako hobekuntzen eraginez.

- Zehazta ezazu erregresio-eredu lineal bat, zabor-errautegia martxan jartzeak salmenta-prezioen zehaztapenean izan dezakeen eragina kontuan hartzen duena. Ereduan aldagai berri bat txertatuko bazenu eragin hori jasotzeko asmoarekin, zer ezaugarri izango lituzke? Zein da aldagai horren lehen behaketaren balioa laginean? Eta azkenarena?
- Defini ezazu  $ERR$  aldagaia, zeinak bat balioa hartzen duen baldin eta etxebizitza 1981. urtean saldu bazen, eta, bestela, zero balioa hartzen duen. Aldagai berri horri kontuan hartzen duen ereduaren estimazio-emaitez hauek dira:

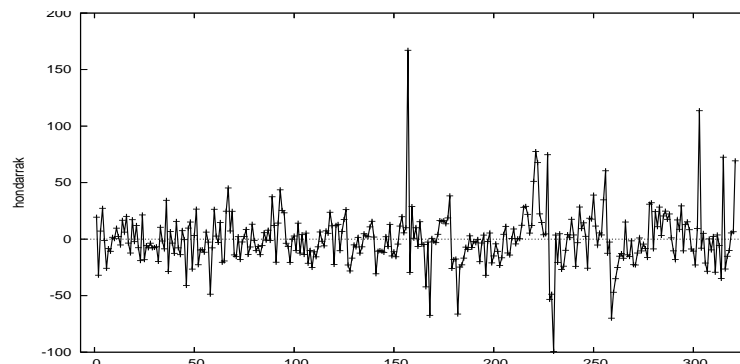
P4.2 Eredua: KTA estimazioak 321 behaketak erabiliz  
Aldagai azaldua:  $P$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-3,9605	5,19609	-0,7622	0,4465
$E$	-0,211414	0,0469707	-4,5010	0,0000
$A$	0,241691	0,0299526	8,0691	0,0000
$B$	17,4113	2,64524	6,5821	0,0000
$ERR$	35,7839	2,81746	12,7007	0,0000

Hondarren karratuen batura 186078  $R^2$  0,688756

Interpreta ezazu  $ERR$  aldagaiari dagokion koefizientea. Espero zenuen zeinua du?

- Kontrasta ezazu erraustegia martxan jartzeak etxebizitzaren salmenta-prezioan eragina izan zuelako hipotesia.
- Azaldu ezazu P4.2 ereduko hondarren grafikoa. Alderatu ezazu grafiko hori P4.1 ereduko hondarren grafikoarekin. Zure ustez, zergatik dago halako desberdintasuna?



### HIRUGARREN ZATIA.

Ondoren, agenteak zalantzan jarri du eraikuntza-urteek etxebizitzaren salmenta-prezioetan duten eragina ondo zehaztuta dagoen ala ez. Agenteak proposatu duen eredu berriaren estimazio-emaitzak hauek dira, non  $sq\_A$  terminoak eraikuntza-urteak karratura adierazten duen:

P4.3 Eredua: KTA estimazioak 321 behaketak erabiliz  
Aldagai azaldua:  $P$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	12,9328	6,82615	1,8946	0,0591
$E$	-0,698732	0,138937	-5,0291	0,0000
$sq\_E$	0,00328031	0,000882381	3,7176	0,0002
$A$	0,239566	0,0293684	8,1572	0,0000
$B$	12,0794	2,96337	4,0762	0,0001
$ERR$	36,3296	2,76589	13,1349	0,0000
Hondarren karratuen batura	178257	$R^2$	0,701838	

1. Idatz ezazu agenteak proposatutako erregresio lineal orokorraren eredua. Zer da P4.2 eta P4.3 ereduen arteko desberdintasuna? Zer jaso nahi du  $sq\_E$  termino berriak?
2. Eredu horretan erregresio lineal orokorraren ereduaren hipotesiak betetzen al dira? Zergatik?
3. Nola kontrastatuko zenuke eraikuntza-urtea aldagaiaren esangura P4.3 ereduan? Azaldu itzazu, zehaztasunez, hipotesi hutsa, aurkakoa, estatistikoa eta erabaki-araua. Egin ezazu kontrastea lagindegiko **praktikaP4.gdt** fitxategiko datuak erabiliz.
4. Etxebizitzak eraikuntza-urte bat gehiago izanez gero eta beste guztia konstante mantenduz gero, zer aldakuntza estimatuko zenuke etxebizitzarentzat espero den salmenta-prezioan? Eta, etxebizitzak 5 urte izanez gero? Eta etxebizitzak 50 urte izanez gero?
5. Eskuragarri duzun informazioa aintzat hartuz, ados al zaude etxebizitzaren salmenta-prezioaren eta etxebizitzaren urteen arteko erlazioa lineala ez delako baieztapenarekin?
6. Aurreko ataleko erantzunean oinarrituz, zer eredu aukeratuko zenuke etxebizitzen salmenta-prezioa zehazteko? Zer arazo dituzte aukeratu ez dituzun ereduak? Arrazoitu ezazu zure erantzuna, eta azaldu itzazu aukeratu ez dituzun ereduetan erabilitako estimatzaileen propietateak.
7. Zu agentea bazina eta lekuko agintariei azaldu behar bazenie zer teoria duzun inguruko etxebizitzen salmenta-prezioak zehazteko, egin duzun analisiaren zer ezaugarri azpimarratuko zenituzke, eta zergatik?



## P5. PRAKTIKA

Enpresa batek bere kudeatzaileari agindu dio azken zortzi urteetan saldutako hozkailuen salmenten jokabidea analizatzeko. Ikerketa egiteko, 2000ko lehen hiruhilekotik hasi eta 2008ko azken hiruhilekora arteko datuak daude eskuragarri, aldagai hauei buruzkoak:

$S$ : hozkailuen salmentak (mila eurokotan).

$P$ : egindako publizitate-gastua (ehun eurokotan).

Hona hemen taulan eskuragarri dauden datuen zati bat:

$t$	2000:1	2000:2	2000:3	2000:4	2001:1	...	2008:2	2008:3	2008:4
$S_t$	1317	1615	1662	1295	1271	...	1684	1764	1328
$P_t$	252,6	272,4	270,9	273,9	268,9	...	350,3	369,1	356,4

Lagineko datuetatik abiatuz, erregresio-eredu hauek estimatu dira:

$$\begin{aligned} \hat{S}_t &= 1160 + 62,125 dq1_t + 307,500 dq2_t + 409,750 dq3_t & (P5.1) \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & \quad (59,990) \quad (84,839) \quad (84,839) \quad (84,839) \end{aligned}$$

$$HKB = 806142 \quad R^2 = 0,5318$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_t &= 576,937 + 2,772 P_t & (P5.2) \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & \quad (286,424) \quad (1,011) \end{aligned}$$

$$HKB = 1377140 \quad R^2 = 0,2001$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_t &= 370,164 + 2,773 P_t + 86,080 dq1_t + 328,578 dq2_t + 411,345 dq3_t & (P5.3) \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & \quad (183,469) \quad (0,623) \quad (65,843) \quad (65,793) \quad (65,623) \end{aligned}$$

$$HKB = 465085 \quad R^2 = 0,7298$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_t &= 431,890 + 2,706 P_t + 285,319 dq2_t + 368,554 dq3_t & (P5.4) \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & \quad (179,520) \quad (0,629) \quad (57,583) \quad (57,594) \end{aligned}$$

$$HKB = 494526 \quad R^2 = 0,7128$$

non  $dq1$ ,  $dq2$ ,  $dq3$ ,  $dq4$  urtaroko fikzio-aldagaiak honela definitu diren:

$$\begin{aligned} dq1_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{lehen hiruhilekoa} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} & dq2_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{bigarren hiruhilekoa} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \\ dq3_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{hirugarren hiruhilekoa} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} & dq4_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{laugarren hiruhilekoa} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \end{aligned}$$

**LEHEN ZATIA.** P5.1 EREDUA

1. Idatz ezazu P5.1 ereduari dagokion erregresio linealeko eredia. Zenbat aldagai azaltzaile daude eredian? Interpretatu itzazu haren koefizienteak.
2. Hozkailuen salmentak urtaroen arabera jokabidea dute?
3. Zer estimazio egingo zenuke salmententzat urte batean?

**BIGARREN ZATIA.** P5.3 EREDUA

1. Idatz ezazu P5.3 ereduari dagokion erregresio linealeko eredia. Zertan dira desberdintzen P5.1, P5.2 eta P5.3 ereduak?
2. Zein da ereduaren datu-matrizearen ordena? Idatz itzazu datu-matrizearen lehen bost errenkadak eta azken errenkada.
3. Kontrasta ezazu ereduaren aldagai azaltzaileen banakako eta baterako esangura.
4. Publizitate-gastua 100 euro handitzen bada, zer gehikuntza estimatuko da salmentetan?
5. Zer estimazio egingo zenuke lehen hiruhilekoan salmententzat? Eta, publizitatean egindako gastua 1700 euro bada?
6. Kalkula ezazu % 95eko konfiantza-tartea publizitate-gastua aldagaiari dagokion koefizientearentzat.
7. Posiblea al da salmentak 50 euro igotzea espero izatea, publizitate-gastua euro bat handituta?
8. Hiruhileko jakin batean aurreko urteko hiruhileko berean baino 250 euro gehiagoko publizitate-gastua egiten bada, zer diferentzia espero da salmenta estimatuan? Eta hiruhileko jakin hori lehenengoa bada?
9. Kudeatzaileak esan du 2009ko lehen hiruhilekoan ez dela gasturik egingo publizitatean eta aholkulariak ohartarazi politika horren ondorioetako bat izan daitekeela ezer ez saltzea. Zer deritzozu?

**HIRUGARREN ZATIA.** P5.4 EREDUA

1. Zein da P5.4 eta P5.3 ereduak erlazionatzen dituen murrizketa? Zer adierazten du murrizketa horrek?
2. Kontrasta ezazu ea murrizketa betetzen den.
3. Eredu horretan oinarrituz, estima ezazu zer salmentak espero diren urteko lehen hiruhilekoan, kontuan hartuta publizitatean egindako gastua 300 euro dela. Zer estimazio egingo zenuke beste hiruhilekoetan espero diren salmentei buruz?

**LAUGARREN ZATIA.**

Estimazio-emaiza guztiak kontuan izanik, zein da eredurik egokiena enpresako hozkailuentzat espero diren salmentak azaltzeko? Arrazoitu ezazu zure erantzuna erabilitako estimatzaileen propietateetan oinarrituz.

## P6. PRAKTIKA

Galizian kokatutako Dolfo enpresak itsaskien bilketan eta txikizkako salmentan dihardu. Enpresako kudeatzaileak salmenten jokabidea analizatu nahi du, aldagai batzuen funtzioan. Helburu horretarako, 1999ko lehen hiruhilekotik hasi eta 2004ko hirugarren hiruhilekora arteko datu-base bat bildu du aldagai hauei buruz:

*I*: enpresak saldutako itsaski kantitatea (mila kilogramokotan).

*P*: enpresak eskainitako itsaskien batez besteko prezioa (kg/euro).

*L*: lehiako enpresek eskaintzen duten itsaskien batez besteko salmenta-prezioa (kg/euro).

*S*: lekuko langileen batez besteko soldata (ehun eurokotan).

**LEHEN ZATIA.** Hona hemen salmentak enpresaren prezioarekin, lehiako enpresen prezioarekin eta batez besteko soldatarekin erlazionatzen dituen erregresio lineal orokorraren eredu baten estimazio-emaizak:

P6.1 Eredua: KTA estimazioak 23 behaketak erabiliz, 1999:1–2004:3

Aldagai azaldua:  $I$

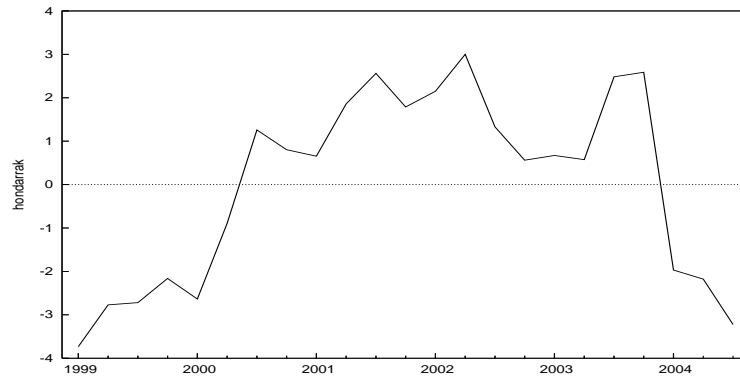
Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	33,7991	4,28653	7,8849	0,0000
$P$	-0,2223	0,12618	-1,7618	0,0942
$L$	0,0249	0,05908	0,4229	0,6771
$S$	0,0129	0,00503	2,5770	0,0185
Hondarren karratuen batura	105,657	$R^2$	0,911653	

#### Koefizienteen kobariantza-matrizea

const	$P$	$L$	$S$	
18,3744	-0,439939	-0,100117	0,0149171	const
	0,0159228	-0,00121894	-0,000166764	$P$
		0,00349152	-0,000266486	$L$
			2,53566e-05	$S$

1. Idatz ezazu kudeatzaileak proposatutako erregresio lineal orokorraren eredua.
2. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
3. Idatz ezazu mugatze-koefizientearen adierazpena. Kalkulatu eta interpreta ezazu haren balioa.
4. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen baterako esangura.
5. Kontrasta ezazu ereduko aldagai azaltzaileen banakako esangura. Lortutako emaitzak arrazoizkoak al dira?
6. Lehiako enpresek saltzen duten itsaskien batez besteko prezioa euro bat igoko balitz, posible litzateke Dolfo enpresak 175 kilo gehiago saltzea, gainerako ezaugarriak konstante mantentzen badira?
7. Gainerako ezaugarriak konstante mantendu eta lekuko langileen batez besteko soldata 100 euro gutxituko balitz, zenbat kiloko aldakuntza estimatuko zenuke enpresako itsaskien salmentan? Zergatik?
8. Kudeatzaileak uste du, lekuko langileen batez besteko errenta aldagaiak ( $R$ ) itsaskien salmentan eragiten duela. Idatz ezazu aldagai hori beste aldagaiekin batera jasotzen duen erregresio lineal orokorraren eredu bat.
9. Soldata eta errenta aldagaien arteko lagineko korrelazio-koefizientea altua dela kontuan izanik,  $-$  hau da,  $\text{korre}(R, S) = r_{R,S} = 0,98 -$ , kudeatzaileak eredua estimatzean arazoren bat izan dezakeela uste duzu? Zein? Zein dira erabilitako estimatzailearen propietateak?

10. Azaldu ezazu P6.1 ereduko hondarren grafikoa. Uste duzu oinarrizko hipotesiren bete gabe gelditu dela?



### BIGARREN ZATIA.

Hondarren grafikoa ikusirik, kudeatzaileak gogoratu du enpresak bere ondasunen aldeko publizitate-kanpaina gogorra egin zuela 2000ko hirugarren hiruhilekotik hasi eta 2003ko laugarren hiruhilekora bitartean. Publizitateak salmentan zer eragin izan zuen jasotzeko, *PUB* aldagaia sortu du, zeinak bat balioa hartzen duen baldin eta dagokion hiruhilekoan publizitatea egin bazen, eta zero balioa, berriz, gainerako kasuetan.

Aldagai berria barneratzen, honako emaitza hauek lortu ditu zehaztutako ereduaren estimazioan:

P6.2 Eredua: KTA estimazioak 23 behaketak erabiliz, 1999:1–2004:3

Aldagai azaldua: *I*

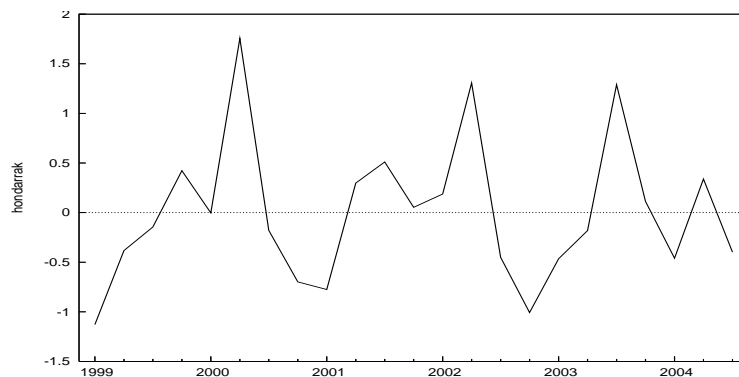
Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	<i>t</i> -estatistikoa	p-balioa
const	31,0580	1,47311	21,0834	0,0000
<i>PUB</i>	4,2235	0,34863	12,1147	0,0000
<i>P</i>	-0,2754	0,04307	-6,3954	0,0000
<i>L</i>	0,0687	0,02038	3,3720	0,0034
<i>S</i>	0,0103	0,00172	6,0018	0,0000

Hondarren karratuen batura 11,5427  $R^2$  0,990348

### Koefizienteen kobariantza-matrizea

const	<i>PUB</i>	<i>P</i>	<i>L</i>	<i>S</i>	
2,17004	-0,0788814	-0,0497389	-0,0123623	0,00176931	const
	0,121546	-0,00152991	0,00125932	-7,57169e-05	<i>PUB</i>
		0,00185540	-0,000156414	-1,82774e-05	<i>P</i>
			0,000415674	-3,15144e-05	<i>L</i>
				2,97118e-06	<i>S</i>

1. Idatz ezazu proposatutako erregresio lineal orokorraren eredua. Zein da P6.2 eta P6.1 ereduen arteko desberdintasuna?
2. Interpretatu ezazu *PUB* aldagaiaren koefiziente estimatua.
3. Eskuragarri dagoen informazioa aintzat hartuz, publizitate-kanpainak salmentetan eragin positiboa izan zuela ondorioztatu daiteke?
4. Zer esan dezakezu itsaskien batez besteko prezioa aldagaiaren banakako esangurari buruz? Alderatu ezazu emaitza hori lehen zatiko bosgarren atalean lortutakoarekin. Zein izan daiteke aldaketa horren arrazoia?
5. Konpentsatu al daiteke lehiako enpresen batez besteko prezioaren jaitsieraren eragina, enpresaren batez besteko prezioa neurri berean jaitsita?
6. Alderatu ezazu P6.2 ereduko hondarren grafikoa P6.1 ereduko hondarren grafikorekin. Zer ondorioztatzen duzu?



7. Orain arte lortutako emaitzak ikusirik, kudeatzaileak 2004ko azken hiruhilekoko publizitate-kanpaina antolatu du. Aldagai azaltzaileen balio horiek izanik, zer salmentea estimatuko zenuke?

<i>P</i>	<i>L</i>	<i>S</i>
30 euro	32 euro	25000 euro

## HIRUGARREN ZATIA.

Kudeatzaileak susmoa du urtaroaren eragina ere kontuan hartu beharko litzatekeela P6.2 ereduan, lagineko datuak hiruhilekoei baitagozkie, eta itsaskien salmenta handiagoa izaten baita azken hiruhilekoan.

1. Zehazta ezazu, xehetasunez, nola berzehaztuko zenukeen P6.2 eredua, itsaskien salmentetan urtaroaren eragina jasotzeko.
2. Idatz itzazu proposatu duzun ereduaren  $X$  datu-matrizearen lehen zortzi errenkadak, ezagunak diren balio guztiak ordezkatzuta.
3. Lagindegiko `praktikaP6.gdt` datu-fitxategia erabiliz, erantzun itzazu galdera hauek:
  - 3.1. Kontrasta ezazu itsaski-salmentan urtaroak eragina duelako hipotesia.
  - 3.2. Ba al dago lagin-ebidentziarik, azken hiruhilekoan itsaskien salmenta gainerako hiruhilekoen desberdina dela esateko?
4. Orain arte lortutako emaitzak kontuan izanik, zer eredu proposatuko zenuke itsaskien salmentak azaltzeko? Arrazoitu ezazu zure erantzuna.

## P7. PRAKTIKA

Eraikuntzarako silikona produzitzen duen enpresa bateko salmenten eragileak analizatu nahi ditugu. Horretarako, 1983ko urtarriletik hasi eta 1990eko maiatzera arteko (biak barne) hileroko datuak ditugu aldagai hauei buruz:

$Q$ : saldutako silikona kopurua hileroko (mila galoi/hil.).

$P$ : silikona galoiaaren prezioa (dolarretan).

$EE$ : urtean eraikitzen hasitako etxebizitza kopurua (milakotan).

$EPPI$ : eraikuntza publiko eta pribaturako indize konbinatua.

### LEHEN ZATIA.

Har ezazu kontuan erregresio lineal bakuneko eredu hau, zeinetan saldutako silikona kopurua prezioaren araberrako bakarrik den:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma^2) \quad t = 1983:1, 1983:2, \dots, 1990:5. \quad (\text{P7.1})$$

1. Ematen den lagin-informazioan oinarrituz, estima itzazu (P7.1) ereduko koefizienteak eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.

$$\begin{array}{lll} \sum_{t=1}^{89} Q_t = 225,3035 & \sum_{t=1}^{89} (P_t - \bar{P})^2 = 198,06658 & \sum_{t=1}^{89} P_t = 801,1691 \\ \sum_{t=1}^{89} P_t^2 = 7407,915 & \sum_{t=1}^{89} (Q_t - \bar{Q})^2 = 217,897462 & \sum_{t=1}^{89} Q_t^2 = 785,789900 \\ \sum_{t=1}^{89} Q_t P_t = 1953,550 & \sum_{t=1}^{89} (Q_t - \bar{Q})(P_t - \bar{P}) = -75,48641649 & \end{array}$$

2. Interpreta ezazu prezioa aldagaiari dagokion koefiziente estimatua. Espero zenuen zainua du?
3. Proposa ezazu perturbazioen bariantzarako estimatzaile alboragabe bat, eta kalkula ezazu haren estimazioa eskuragarri dagoen lagin-informazioa erabiliz.
4. Ba al dago lagin-ebidentziarik, prezioa aldagaiak silikonarentzat espero den salmentan negatiboki eragiten duela esateko?
5. Gauss-Markoven teorema betetzeko, erregresio lineal orokorraren ereduko zein oinarritzko hipotesi dira beharrezkoak?
6. Enpresako jabeak, salmentak igotzea helburu, prezioen jaitsieran oinarritzen den politika bat jarri du martxan. Haren ustez, 1990eko ekainean silikonaren prezioa galoiko 9,5 dolarrean finkatzen badu, hilabete horretan 3500 galoi salduko dira. Aurreko ataletako informazioan oinarrituz, jabeak arrazoi duela uste al duzu?

## BIGARREN ZATIA.

Prezioaz gainera, eraikitzen hasitako etxebizitza kopurua eta eraikuntza publiko eta pribaturako indize konbinatua aldagaiek ere silikonaren salmentan eragin dezaketela pentsatu dugu. Beste erregresio-eredu bat estimatu dugu, eta emaitza hauek lortu ditugu:

P7.2 Eredua: KTA estimazioak 89 behaketak erabiliz, 1983:01–1990:05

Aldagai azaldua:  $Q$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-1,0331	1,64879	-0,6266	0,5326
$P$	-0,326389	0,0959225	-3,4026	0,0010
$EE$	0,0228171	0,00491616	4,6412	0,0000
$EPPI$	0,223760	0,00813253	2,7514	0,0073
Hondarren karratuen batura	140,69	$R^2$	0,346945	



**Koefizienteen kobariantza-matrizea**

const	<i>P</i>	<i>EE</i>	<i>EPPI</i>	
2,71850	-0,0767027	-0,00448977	-0,00917623	const
	0,00920113	0,000104349	-0,00013221	<i>P</i>
		0,000024	0,0000019	<i>EE</i>
			0,000066138	<i>EPPI</i>

1. Idatz ezazu P7.2 ereduari dagokion erregresio linealeko erdua.
2. *EE* eta *EPPI* aldagai berriak, banaka esanguratsuak al dira? Eta batera? Ba al dago kontraesanik lortutako emaitzetan?
3. Lortutako emaitzak ikusirik, esan al daiteke P7.1 ereduko  $\beta_2$  koefizientearen KTA estimatzailea bariantza minimokoa dela? Arrazoitu ezazu erantzuna xehetasunez.
4. Prezioa dolar bat jaitsi, eraikitzen hasitako etxebizitza kopurua 500 unitate igo, eta *EPPI* indizea 20 unitate jaitsiko balitz, zenbatekoa izango litzateke silikonasalmentaren aldakuntza estimatua?

**HIRUGARREN ZATIA.**

Enpresako jabeak, silikonaren salmenta era egokian zehazteko asmoarekin, estimazio-emaitza hauek aurkeztu ditu, non *sq-P* terminoa prezioa aldagaia karratura den:

P7.3 Eredua: KTA estimazioak 89 behaketak erabiliz, 1983:01–1990:05  
Aldagai azaldua: *Q*

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	<i>t</i> -estatistikoa	p-balioa
const	-0,197276	4,17528	-0,0472	0,9624
<i>P</i>	-0,497857	0,792009	-0,6286	0,5313
<i>sq-P</i>	0,00828892	0,0380014	0,2181	0,8279
<i>EE</i>	0,0228098	0,00494405	4,6136	0,0000
<i>EPPI</i>	0,0224988	0,00819782	2,7445	0,0074
Hondarren karratuen batura	140,6150	$R^2$	0,347315	

1. Idatz ezazu P7.3 ereduari dagokion eredu teorikoa. Zertan dira desberdinak P7.3 eta P7.2 ereduak? Azaldu ezazu xehetasunez.
2. Aurreko P7.3 ereduak betetzen al ditu erregresio linealeko ereduaren oinarritzko hipotesiak?
3. Goiko P7.3 ereduan oinarrituz, zer estimazio egingo zenuke, prezioan unitate bat gehitzeak, ceteris paribus, salmentetan duen efektu marjinalari buruz? Eta, prezioa 5 dolar bada? Eta 12 dolar bada?

4. Ba al dago lagin-ebidentziarik, jabeak proposatzen duen silikonaren salmenta eta silikonaren prezioaren arteko forma funtzionalaren alde?

### LAUGARREN ZATIA.

Lagineko datuak hilekoei dagozkienez eta silikonaren salmentak urtaroaren arabera aldatzen direla uste denez, fikzio-aldagai hauek definitu ditugu:

$$dm_{it} = \begin{cases} 1 & t \in i. \text{ hilabetean} \\ 0 & \text{bestelako kasuan} \end{cases} \quad dm_i \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

Hona hemen lehendabiziko aldagai azaltzaileak eta  $dm1 \dots dm11$  fikzio-aldagaiak kontuan hartzen dituen ereduaren estimazioaren emaitzak:

P7.4 Eredua: KTA estimazioak 89 behaketak erabiliz, 1983:01–1990:05

Aldagai azaldua:  $Q$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-0,897081	2,12126	-0,4229	0,6736
$P$	-0,266946	0,101948	-2,6185	0,0107
$EE$	0,0213323	0,00919383	2,3203	0,0231
$EPPI$	0,0187688	0,00878573	2,1363	0,0360
$dm1$	-0,309257	0,655500	-0,4718	0,6385
$dm2$	0,0507874	0,657504	0,0772	0,9386
$dm3$	0,00704305	0,723664	0,0097	0,9923
$dm4$	-0,278333	0,813952	-0,3420	0,7334
$dm5$	0,678127	0,845657	0,8019	0,4252
$dm6$	-0,916889	0,909544	-1,0081	0,3167
$dm7$	-0,130321	0,835786	-0,1559	0,8765
$dm8$	1,26451	0,824631	1,5334	0,1294
$dm9$	0,566385	0,780856	0,7253	0,4705
$dm10$	0,251659	0,818026	0,3076	0,7592
$dm11$	-0,175507	0,699423	-0,2509	0,8026

Hondarren karratuen batura 117,217  $R^2$  0,455918

1. Idatz ezazu P7.4 ereduari dagokion eredu teorikoa. Zein da P7.4 eta P7.2 ereduaren arteko desberdintasuna? Azaldu ezazu xehetasunez.
2. Interpreta itzazu  $-0,897081$  eta  $0,251659$  koefiziente estimatuak.
3. Silikona-salmenten jokabidea, ceteris paribus, urtaroaren menpe dago?
4. Orain arte estimatutako eruedetatik zein iruditzen zaizu aproposena silikonaren salmenta azaltzeko? Arrazoitu ezazu erantzuna.

## P8. PRAKTIKA

New Orleansen kokatua dagoen SXF elkarteak jakin nahi du ea nola zehazten diren elkarteko langileen soldatak ezaugarri batzuen arabera. Ikerketaren helburua da sindikatuen eskaerei erantzutea, zeren generoak eragindako soldata-bereizkeria dagoela salatu baitute.

Horretarako, 49 langileri dagozkien hileroko soldata ( $S$ , dolarretan) eta ezaugarri hauei buruzko datuak daude eskuragarri:

*HEZ*: hezkuntza (derrigorrezko hezkuntzaren gaineko hezkuntza-urtetan).

*ESP*: esperientzia (enpresan lan egindako urtetan).

Generoa: gizona ala emakumea.

Soldataren eredia zehaztean, pentsatu da soldata hezkuntzaren, esperientziaren eta generoaren menpe dagoela. Eredu hori KTA irizpidearen bitartez estimatzean, honako emaitzak hauek lortu dira:

P8.1 Eredua: KTA estimazioak 49 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	434,821	258,871	1,6797	0,0999
<i>HEZ</i>	133,551	31,5081	4,2386	0,0001
<i>ESP</i>	34,4543	12,1316	2,8401	0,0067
<i>GIZ</i>	470,460	144,870	3,2475	0,0022
Hondarren karratuen batura		11089355e+07	$R^2$	0,450263

non *GIZ* fikzio-aldagaiak bat balioa hartzen duen banakoa gizona bada, eta zero balioa, emakumea bada.

### LEHEN ZATIA.

1. Idatz itzazu P8.1 ereduari dagokion erregresio-eredua eta laginaren erregresio-zuzena.
2. Interpreta itzazu 34,4543 eta 470,460 koefiziente estimatuak.
3. Idatz ezazu mugatze-koefizientearen adierazpena, eta interpreta ezazu ereduaren doikuntzaren ontasuna.
4. Kontrasta ezazu ereduko aldagai azaltzaileen baterako esangura.
5. Ba al dago generoak eragindako soldata-bereizkeriarik?

**BIGARREN ZATIA.**

Enpresako zuzendaritza ez dago ados P8.1 ereduko estimazioan lortutako ondorioekin. Haien ustez, soldata zehazteko, funtsezkoa litzateke langilearen lanpostu mota ere kontuan hartzea. Enpresa horretan, hain zuzen ere, lau lanpostu mota bereizten dira: tailerrekoak, mantentze-lanetakoak, administraziokoak eta teknikariak.

Aurreko aldagai azaltzaileez gainera lanpostu mota aldagaia barneratzean, honako estimazio-emaizta hauek lortu dira:

P8.2 Eredua: KTA estimazioak 49 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	502,034	239,845	2,0932	0,0424
$HEZ$	63,9771	26,9073	2,3777	0,0221
$ESP$	29,2516	9,57726	3,0543	0,0039
$GIZ$	528,154	151,238	3,4922	0,0011
$ADM$	248,672	212,599	1,1697	0,2487
$TAI$	382,987	164,408	2,3295	0,0247
$TEK$	1110,05	203,871	5,4449	0,0000
Hondarren karratuen batura		5620313	$R^2$	0,721382

non fikzio-aldagai hauek definitu diren:

$$ADM_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{administraziokoa bada} \\ 0 & \text{gainerako kasuetan} \end{cases}$$

$$TAI_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{tailerreko langilea bada} \\ 0 & \text{gainerako kasuetan} \end{cases}$$

$$TEK_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{teknikaria bada} \\ 0 & \text{gainerako kasuetan} \end{cases}$$

$$MAN_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{mantetze-lanetakoak bada} \\ 0 & \text{gainerako kasuetan} \end{cases}$$

1. Idatz ezazu proposatu den erregresio orokorraren eredua, eta azaldu ezazu zehaztasunez nola barneratu den lanpostu mota aldagai azaltzailea.
2. Zuzendaritzak ba al du arrazoirik, lanpostu mota aldagai azaltzailea soldatak zehazteko esanguratsua dela baieztatzean?
3. Aurreko atalean lortutako ondorioan oinarrituz, zein dira P8.1 ereduko KTA estimatzaileen propietateak? Lehen zatian egindako kontrasteak fidagarriak dira? Beneratan, ba al dago generoak eragindako soldata-bereizkeriarik?
4. P8.2 ereduko estimazio-emaiztak eskuartean izanik, bi administrazioko emakume langileen soldatak alderatu nahi dugu. Batek hiru urteko esperientzia badu eta besteak lau urtekoa badu, zer diferentzia legoke bion soldata estimatuen artean?

5. Soldaten arteko diferentziarik handiena teknikarien eta mantentze-lanetakoen artean dago, beste ezaugarri guztiak berdinak direla kontuan izanik. Iaz, enpresak konpromisoa hartu zuen diferentzia hori ez zela 1000 dolar baino handiagoa izango. P8.2 ereduko estimazio-emaitzak izanik, enpresak bete al du bere hitza?

### HIRUGARREN ZATIA.

Sindikatuetakoa aditu batek uste du, generoak eragindako soldata-bereizkeria ez dela gertatzen emakumeek ezaugarri berak izanik ere gutxiago irabazten dutelako bakarrik, baizik eta baita urte gehigarri bateko esperientziagatik gizonei gehiago ordaintzen zaielako ere. Teoria hori frogatzeko asmoarekin, adituak ereduko estimazio-emaitzak erakutsi dizkio enpresako kudeatzaileari:

P8.3 Eredua: KTA estimazioak 49 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$

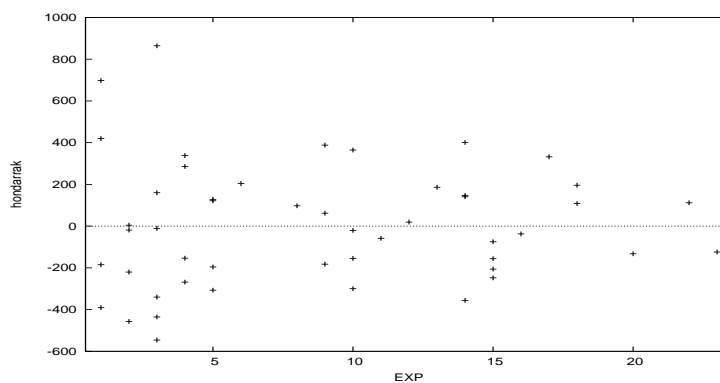
Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	739,825	240,696	3,0737	0,0038
$HEZ$	67,1281	25,1391	2,6703	0,0108
$ESP$	-8,1917	16,5544	-0,4948	0,6234
$GIZ$	52,1988	226,481	0,2305	0,8189
$ADM$	237,551	198,455	1,1970	0,2382
$TAI$	446,348	155,238	2,8752	0,0064
$TEK$	1301,35	203,149	6,4059	0,0000
$ESP \times GIZ$	53,7363	19,9972	2,6872	0,0104
Hondarren karratuen batura		4,77868e+06	$R^2$	0,763104

non termino hau definitu den:

$$ESP_i \times GIZ_i = \begin{cases} ESP_i & i \in \text{gizona bada} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

1. Idatz ezazu P8.3 ereduari dagokion erregresio-eredua. Betetzen al ditu oinarritzko hipotesi guztiak? Bereziki, betetzen al du linealtasunaren hipotesia?
2. Zein da ezaugarri berak izanik ere gizon eta emakumeen soldataren artean dagoen diferentzia estimatua?
3. Zer gehikuntza estimatua izan da soldatan, ceteris paribus, esperientzia-urte bat gehiago izatean?
4. Interpreta ezazu 53,7363 koefiziente estimatua.

5. Sindikatuaren hipotesia hau da: “urte gehigarri bateko esperientzia era desberdinean baliozkotzen da gizon batentzat eta emakume batentzat”. Ba al dago horren aldeko lagin-ebidentziarik?
6. Lagindegiko **praktikaP8.gdt** datu-fitxategia erabiliz, kontrasta ezazu ea soldatan genero-bereizkeriarik ba ote dagoen SXF enpresan.
7. Grafiko honetan, P8.3 ereduko hondarrak esperientziaren aurka irudikatu dira. Azaldu ezazu grafikoa. Ba al duzu oinarritzko hipotesiren bat betetzen ez delako susmorik?



## P9. PRAKTIKA

Eraikuntza-enpresako agente batek analizatu nahi du ea zer faktorek eragin zuten Bilboko etxebizitzaren prezioan 70.hamarkadan. Horretarako, aldagai hauen datuak bildu ditu 265 etxebizitzaz osatutako lagin batean:

$P$ : etxebizitzaren salmenta-prezioa (mila eurokotan).

$L$ : logela kopurua.

$B$ : bainugela kopurua.

$A$ : etxebizitzaren azalera (metro karratutan).

**LEHEN ZATIA.**

Hona hemen, laburbildurik, agenteak etxebizitzaren salmenta zehazteko erabili duen eredu lineal orokor baten estimazioaren emaitzak:

P9.1 Eredua: KTA estimazioak 265 behaketak erabiliz  
Aldagai azaldua:  $P$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-10,968	14,249	-0,769	0,442
$L$	0,655	2,660	0,246	0,805
$B$	17,134	3,672	4,665	0,000
$A$	0,304	0,041	7,354	0,000
Hondarren karratuen batura	234507,00	$R^2$	0,479429	

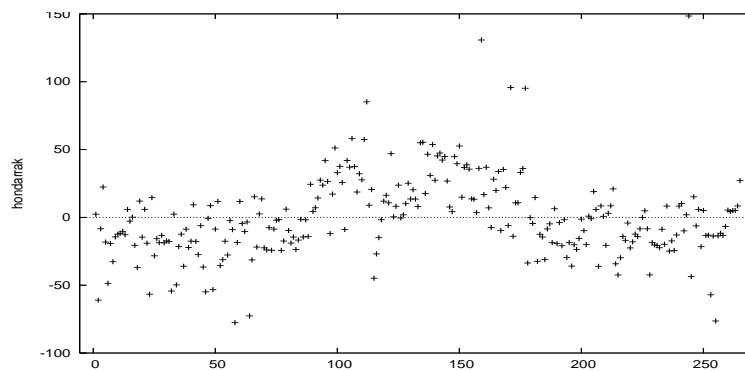
**Koefizienteen kobariantza-matrizea**

const	$L$	$B$	$A$	
203,059	-33,3136	8,66392	0,00105675	const
	7,07734	-3,84501	-0,0226378	$L$
		13,4856	-0,0777654	$B$
			0,00170926	$A$

1. Idatz itzazu agenteak proposatutako erregresio lineal orokorraren eredu eta laginaren erregresio-zuzena.
2. Gainerako ezaugarriak konstante mantenduz, zer estimazio egingo zenuke (eurotan) etxebizitzak metro karratu bat gehiago izango balu? Zergatik?
3. Idatz ezazu mugatze-koefizientearen adierazpena. Zein da haren balioa? Interpretatu ezazu.
4. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen baterako esangura.
5. Kontrasta ezazu logela kopurua aldagaiaren banakako esangura.
6. Ereduren aldagai azaltzaileak guztiak kontuan hartuz, azaldu ezazu, arrazoituz, aurreko ataleko emaitzaren zergatia.
7. Gainerako ezaugarriak konstante mantenduz, bainugela bat gehiago izateagatik, posiblea litzateke 20000 euro gehiago ordaintzeko prest egotea?
8. Laginaren erregresio-zuzenean oinarrituz, zer estimazio egin daiteke lau logela eta bi bainugela dituen 100 m<sup>2</sup>-ko etxebizitza baten prezioaren inguruan?

9. Zure lagun batek, aurreko atalean aipatutako ezaugarriak zituen etxebizitza bat erosi zuen, 75000 euroren truke. Nola sinetsaraziko zenioke ez ziotela iruzurrik egin?
10. Eskuragarri dagoen laginak Bilboko hiru gunetako etxebizitzaren datuak biltzen ditu. Lehen 90 behaketak ekialdean kokatutako etxebizitzetara dagozkie; hurrengo 87 behaketak erdigunekoak dira; eta gainerako 88 behaketak, mendebaldekoak.

Eskuragarri duzun informazio guztia kontuan izanik, azaldu ezazu P9.1 ereduko hondarren grafikoa. Zure ustez, bete gabe gelditu al da oinarritzko hipotesiren bat?



## BIGARREN ZATIA.

Lagineko behaketen ezaugarriak eta lehen zatian lortutako emaitzak ikusirik, agentearen teoria da etxebizitzaren prezioetan dauden desberdintasunak kokapenaren araberrakoak direla. Hona hemen kokapena aldagai berria kontuan hartzen duen ereduaren estimazio-emaitzak:

P9.2 Eredua: KTA estimazioak 265 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $P$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	24,510	11,522	2,127	0,034
$L$	1,919	2,086	0,919	0,358
$B$	16,414	2,902	5,654	0,000
$A$	0,227	0,032	6,894	0,000
$M$	-43,851	3,630	-12,077	0,000
$E$	-37,114	3,617	-10,259	0,000
Hondarren karratuen batura		141896,00	$R^2$	0,685011

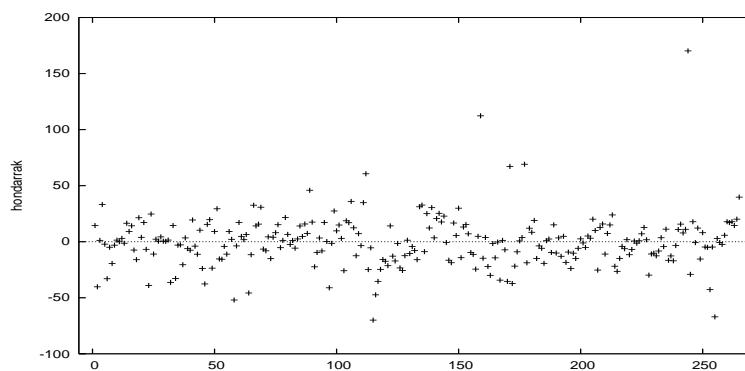


**Koefizienteen kobariantza-matrizea**

const	$L$	$B$	$A$	$M$	$E$	const
132,76	-20,25	4,58	-0,011	-10,8524	-5,063	const
	4,35	-2,27	-0,014	-0,104	-0,64	$L$
		8,42	-0,048	0,78	-0,83	$B$
			0,00108	0,015	0,024	$A$
				13,18	6,64	$M$
					13,08	$E$

non  $M$  aldagaiak bat balioa hartzen duen, baldin eta etxebizitza mendebaldekoa bada, eta zero balioa, bestela.  $E$  aldagaiak berriz, bat balioa hartzen du, baldin eta etxebizitza ekialdekoa bada, eta zero balioa, bestela.

1. Idatz ezazu agenteak proposatu duen eredua. Azaldu ezazu, xehetasunez, nola sartu duen kokapena aldagai berria eremuan.
2. Zein dira  $E$  eta  $M$  aldagai berrien balioak, lagineko lehen behaketan? Eta ehungarrenean? Eta azkenekoan?
3. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
4. Interpretatu itzazu -43,851 eta -37,114 koefiziente estimatuak.
5. Kontrasta ezazu kokapenak salmenta-prezioan eragiten duelako hipotesia.
6. Azaldu ezazu P9.2 ereduko hondarren grafikoa. Alderatu ezazu grafiko hau P9.1 ereduko hondarren grafikorekin. Zure ustez, zergatik gertatzen da desberdintasuna?



7. P9.2 ereduko estimazio-emaitzak aztertu eta P9.1 ereduko hondarren grafikoa xehetasunez begiratu ondoren, agenteak oraindik ere pentsatzen du etxebizitzaren prezioetan dagoen desberdintasuna kokapenaren arabera dela, baina susmatzen du

desberdintasun hori erdiguneko etxebizitzaren eta kanpoaldekoen artean bakarrik gertatzen dela. Eskuragarri duzun informazioan oinarrituz, agenteak arrazoia duela uste duzu?

8. Aurreko atalean lortutako ondorioa kontuan izanik, salmenta-prezioa zehazteko beste ereduren bat proposatuko zenuke? Arrazoitu ezazu zure erantzuna.

### HIRUGARREN ZATIA.

Agentearen ondorioa da kokapena aldagaiak erdiguneko eta kanpoaldeko (ekialdekoak eta mendebaldekoak) etxebizitzak bakarrik bereizten dituela. Hala ere, agenteak zalantzan jarri du kokapenak etxebizitzaren salmenta-prezioan duen eragina ondo zehaztuta dagoen ala ez.

Agenteak zehaztu duen eredu berriaren estimazio-emaitez hauek dira:

P9.3 Eredua: KTA estimazioak 265 behaketak erabiliz  
Aldagai azaldua:  $P$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	3,826	13,866	0,276	0,782
$L$	2,468	2,078	1,187	0,236
$B$	17,275	2,859	6,041	0,000
$A$	0,297	0,046	6,359	0,000
kanpoaldea	-17,029	10,960	-1,553	0,121
kanpoaldea $\times S$	-0,114	0,051	-2,230	0,026
Hondarren karratuen batura		141100,00	$R^2$	0,686779

1. Idatz ezazu proposatutako erregresio lineal orokorraren eredua. Zein da eredu horren eta bigarren zatiko azken atalean proposatu duzun ereduen arteko desberdintasuna? Zer jaso nahi du elementu berri horrek?
2. Etxebizitzaren azalera metro karratu bat handituko balitz, gainerako ezaugarri guztiak konstante mantenduz, zenbatekoa litzateke etxebizitzarentzat espero den salmenta-prezioaren aldakuntza estimatua? Eta, etxebizitza erdiguneko balitz? Eta, mendebaldekoa balitz?
3. Kontrasta ezazu, P9.3 ereduan, kokapena aldagaiaren esangura.
4. Eskuragarri duzun informazioarekin, metro karratu gehigarri batek erdialdean eta kanpoaldean balioa bera duela uste al duzu, beste guztia konstante mantenduz gero?
5. Aurreko ataleko erantzunaren arabera, zer eredu aukeratuko zenuke etxebizitzaren prezioa zehazteko? Zergatik? Zer arazo dituzte aukeratu ez dituzun ereduak? Arrazoitu ezazu zure erantzuna, eta azaldu itzazu aukeratu ez dituzun ereduaren erabiliteko estimatzaileen propietateak.

## P10. PRAKTIKA

Etxez etxeko zerbitzua eskaintzen duen italiar jatetxe baten jabeak jatetxearen eremuko auzokideen urteroko pizza-kontsumoa ( $C$ , eurotan) aztertu nahi du, aldagai hauen arabera:

$R$ : urteroko errenta (mila eurokotan).

$A$ : adina, adin nagusia (18 urte) ez beste urteetan.

Generoa: gizona ala emakumea.

Ikasketa-maila altuena: ikasketarik gabekoa, lehen mailako ikasketak dituztenak, bigarren mailakoak dituztenak eta goi-mailakoak dituztenak.

Hona hemen berrogei auzokideri egindako inkesta batetik eratorritako zenbait datu:

Beh.	$C_i$	$R_i$	$A_i$	Generoa	Ikasketa maila
1	109	15	45	Emakumea	Ikasketarik gabekoa
2	0	30	20	Emakumea	Ikasketarik gabekoa
3	0	12	28	Emakumea	Ikasketarik gabekoa
4	108	20	25	Emakumea	Ikasketarik gabekoa
5	220	15	35	Emakumea	Lehen mailako ikasketak
6	189	30	40	Emakumea	Lehen mailako ikasketak
7	64	12	22	Emakumea	Lehen mailako ikasketak
8	262	12	30	Emakumea	Lehen mailako ikasketak
9	64	28	21	Emakumea	Lehen mailako ikasketak
10	35	22	40	Emakumea	Bigarren mailako ikasketak
11	94	44	21	Emakumea	Bigarren mailako ikasketak
12	71	10	45	Emakumea	Bigarren mailako ikasketak
13	403	22	36	Emakumea	Goi-mailako ikasketak
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

### LEHEN ZATIA.

Jabeak kontratatu duen adituak, hasteko, kontsumoa errentaren arabera erlazionatzen duen erregresio lineal bakuneko eredu baten estimazioa egin du:

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + u_i \quad i = 1, \dots, 40. \quad (\text{P10.1})$$

Lagin-informazio hau erabiliz, erantzun itzazu beheko galderak:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{40} C_i &= 7662 & \sum_{i=1}^{40} R_i &= 17170 & \sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2 &= 947651,9 \\ \sum_{i=1}^{40} (R_i - \bar{R})^2 &= 6041478 & \sum_{i=1}^{40} C_i R_i &= 4169550 & \sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})(R_i - \bar{R}) &= 880636,5 \end{aligned}$$

1. Estima itzazu (P10.1) ereduko koefizienteak, eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
2. Interpreta ezazu errenta aldagaiari dagokion koefiziente estimatua.
3. Kalkula ezazu kontsumoaren eta errentaren arteko lagineko korrelazio-koefizientea. Zer erlazio du mugatze-koefizientearekin? Kalkulatu eta interpreta ezazu mugatze-koefizientea.
4. Zein oinarrizko hipotesi dira beharrezkoak, KTA estimatzailea alboragabea izan dadin?
5. Har ezazu kontuan erregresio lineal bakuneko eredu hau:

$$R_i = \alpha_1 + \alpha_2 C_i + v_i \quad i = 1, \dots, 40. \quad (\text{P10.2})$$

- 5.1. Zein da P10.1 eta P10.2 ereduen arteko diferentzia?
- 5.2.  $\alpha_2$ -ren eta  $\beta_2$ -ren estimazioak berdinak al dira? Zergatik?
- 5.3. Zein da P10.1 eta P10.2 eredu-tako mugatze-koefizienteen arteko erlazioa? Zergatik?

## BIGARREN ZATIA.

Bigarren pauso batean, kontsumoa azaltzeko eskuragarri duen informazio guztia erabiltzea erabaki duenez, eskura dituen aldagai azaltzaile guztiak sartu ditu adituak eredu-an. Eredu berriaren estimazio-emaitzak hauek dira:

P10.3 Eredua: KTA estimazioak 40 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua: $C$				
Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	439,872	56,2518	7,8197	0,0000
$R$	0,283674	0,0428834	6,6150	0,0000
$A$	-8,8409	1,49434	-5,9163	0,0000
$E$	-181,85	25,8175	-7,0438	0,0000
$LM$	73,1179	37,1903	1,9661	0,0578
$BM$	-6,4715	40,2046	-0,1610	0,8731
$GM$	-48,752	59,1766	-0,8238	0,4159
Hondarren karratuen batura		215476,	$R^2$	0,772621

non aldagai hauek definitu diren:

$E$  aldagaiak bat balioa hartzen du, baldin eta auzokidea emakumea bada, eta zero, gizona bada;

*LM* aldagaiak bat balioa hartzen du, baldin eta auzokideak lehen mailako ikasketak baditu, eta zero, bestela;

*BM* aldagaiak bat balioa hartzen du, baldin eta auzokideak bigarren mailako ikasketak baditu, eta zero, bestela; eta

*GM* aldagaiak bat balioa hartzen du, baldin eta auzokideak goi-mailako ikasketak baditu, eta zero, bestela.

1. Idatz ezazu proposatu den erredua. Azaldu ezazu nola zehaztu den (zenbat aldagai azaltzaile daude?, zein dira?,...).
2. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu koefiziente estimatuak.
3. Populazioaren benetako erregresio-zuzena ezagutuko bazenu, laginaren erregresio-zuzenarekin bat etorriko litzateke?
4. Interpreta ezazu (280, 735 – 181, 85) koefiziente estimatuen batura.
5. P10.2 erreduan oinarrituz, zein da goi-mailako ikasketak dituen emakume auzokide baten kontsumo estimatua?
6. Kontrasta ezazu generoa aldagaiaren banakako esangura.
7. Eskuragarri duzun lagina aintzat hartuz, arrazoizkoa al litzateke esatea emakumeek gizonen baino 200 euro gutxiagoko pizza-kontsumoa dutela, ceteris paribus?
8. Kontrasta ezazu hezkuntza-maila altuena aldagai azaltzailearen banakako esangura lagindegiko praktikaP10.gdt datu-fitxategia erabiliz.

### **HIRUGARREN ZATIA.**

Adituaren ustez, errenta igotzean, emakumeek kontsumorako duten propentsio marjinala gizonen dutena baino txikiagoa da.

Lan-hipotesia:

*Errenta igotzeak pizza-kontsumoan duen eragina generoaren araberako da.*

Hona hemen lan-hipotesi horrek jasotzen duen erregresio-ereduaren estimazio-emaitzak:

P10.4 Eredua: KTA estimazioak 40 behaketak erabiliz  
Aldagai azaldua:  $C$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	398,164	56,3474	7,0662	0,0000
$R$	0,395667	0,0645538	6,1293	0,0000
$A$	-8,9736	1,41315	-6,3501	0,0000
$E$	-115,72	38,4135	-3,0126	0,0050
$LM$	71,7391	35,1439	2,0413	0,0495
$BM$	-11,153	38,0446	-0,2932	0,7713
$GM$	-56,106	56,0092	-1,0017	0,3240
$R \times E$	-0,00152513	0,000684368	-2,2285	0,0330

Hondarren karratuen batura 186527,9     $R^2$  0,803168

1. Idatz ezazu proposatu den eredua. ELOEko oinarrizko hipotesiak betetzen al dira?
2. Idatz itzazu ereduari dagokion  $X$  matrizearen lehen hamar errenkadak.
3. Laginean lehen hamar behaketak bakarrik izanez gero, zer emaitza lortuko lirateke?
4. Zer eragin du errenta 1000 euro igotzeak, ceteris paribus, espero den kontsumoan? Ba al dago konstantea delako segurtasunik?
5. Zein da goi-mailako ikasketak dituen emakume baten kontsumo estimatua?
6. Kontrasta ezazu errenta aldagaiaren esangura **praktikaP10.gdt** datu-fitxategia erabiliz.

### LAUGARREN ZATIA.

Arrazoizkoa dirudi pentsatzea banakoek kontsumorako propentsio marjinala txikiagoa izango dutela urteak bete heinean. Hau da, banakoa zenbat eta zaharragoa izan, orduan eta diru gutxiago erabiliko du errenta gehigarritik pizzaren kontsumorako.

Lan-hipotesia:

*Errenta gehitzeak pizza-kontsumoan duen eragina bezeroaren adinaren araberrakoa da.*

1. Zehazta ezazu errenta eta adina aldagaien arteko elkar-eragina era egoki batean jasotzen duen eredu bat.

- 1.1. Zer igoera espero da pizza-kontsumoan, urteroko errenta 500 euro igotzen bada, gainerako ezaugarriak konstante mantenduz? Eta, errenta 1000 euro gehitzen bada?
- 1.2. Zer igoera espero da 20 urteko bezero baten pizza-kontsumoan, urteroko errenta 1000 euro igotzen bada, gainerako ezaugarriak konstante mantenduz? Eta, auzokideak 40 urte baditu?
2. Estima ezazu erdua KTA estimatzailearen bitartez, lagindegiko `praktikaP10.gdt` datu-fitxategia erabiliz, eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
  - 2.1. Zer igoera estimatzen da pizza-kontsumoan, urteroko errenta 500 euro igotzen bada, gainerako ezaugarriak konstante mantenduz? Eta, 1000 euro igotzen bada?
  - 2.2. Zer igoera estimatzen da 20 urteko bezero baten pizza-kontsumoan, urteroko errenta 1000 euro igotzen bada, gainerakoa konstante mantenduz? Eta, auzokideak 40 urte baditu?
3. Kontrasta ezazu planteatutako lan-hipotesia.
4. Kontrasta ezazu errenta aldagai azaltzailearen esangura.

### **BOSGARREN ZATIA.**

Bestalde, arrazoizkoa dirudi pentsatzea kontsumorako propentsio marjinala txikiagoa izango dela bezeroaren errenta handitzen den heinean. Hau da, banakoak zenbat eta errenta handiagoa izan, orduan eta diru gutxiago erabiliko du errenta gehigarritik piztaren kontsumorako.

Lan-hipotesia:

*Errenta gehitzeak pizza-kontsumoan duen eragina bezeroaren errentaren arabera da.*

1. Zehazta ezazu lan-hipotesia jasotzen duen erregresio-eredu bat.
2. Aurreko atalean zehaztu duzun ereduaren arabera, zer igoera espero da pizza-kontsumoan, urteroko errenta 1000 euro handitzean? Konstantea da?
3. Estima ezazu erdua KTA estimatzailearen bitartez, lagindegiko `praktikaP10.gdt` datu-fitxategia erabiliz, eta idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
4. Kontrasta ezazu aurkeztutako lan-hipotesia.
5. Kontrasta ezazu errenta aldagai azaltzailearen esangura.

## P11. PRAKTIKA

Turkiako Osasun Ministerioak helduen tabako-kontsumoaren eragileak analizatu nahi ditu. Ikerketa egiteko, 1960tik eta 1988ra arteko denboraldiko urteroko datuak ditu eskuartean, aldagai hauei buruzkoak:

$Z$ : helduen zigarro-kontsumoa (kilogramotan).

$R$ : *per capita* errenta erreala (Turkiako liran).

$P$ : zigarro-kilogramoaren prezio erreala (Turkiako liran).

### LEHEN ZATIA.

Hasieran, tabakoaren kontsumoa tabakoaren prezioaren eta errenta errealaren arabera eredu lineal giza zehazten da:

$$\log Z_t = \beta_1 + \beta_2 \log P_t + \beta_3 \log R_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1960, \dots, 1988. \quad (\text{P11.1})$$

1. (P11.1) ereduak erregresio lineal orokorraren ereduko oinarritzko hipotesi guztiak betetzen ditu?
2. Idatz ezazu populazioaren erregresio-zuzena, eta interpreta itzazu aldagai azaltzaileei dagozkien koefizienteak.
3. Idatz itzazu P11.1 ereduari dagozkion  $X$ ,  $X'X$  eta  $X'Y$  matrizeak, ereduko aldagai azaldu eta azaltzaileen funtzioan.
4. Eskuragarri dagoen lagina aintzat hartuz, P11.1 ereduaren KTA estimatzailearen bitartez estimatzen da, eta estimazio-erortza hauek lortu dira ( $l_X = \log X$ ):

P11.1 Eredua: KTA estimazioak 29 behaketak erabiliz, 1960–1988

Aldagai azaldua:  $l_Z$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-4,58987	0,724913	-6,3316	0,0000
$l_P$	-0,485683	0,101394	-4,7900	0,0001
$l_R$	0,688498	0,0947276	7,2682	0,0000

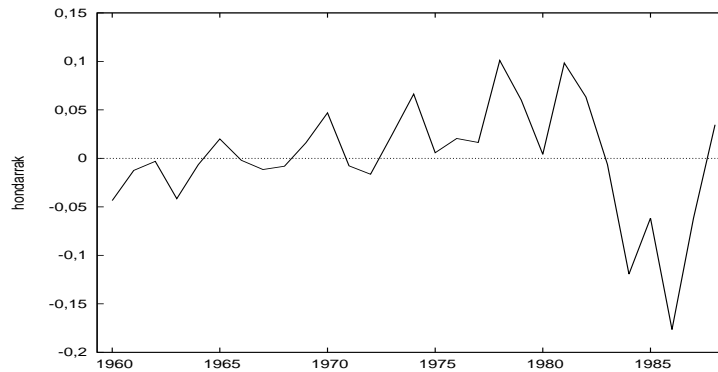
Hondarren karratuen batura    0,094911     $R^2$     0,712058

Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.

5. Ba al dago lagin-ebidentziarik, prezioak tabako-kontsumoan eragiten dutela esateko?



6. Zein oinarrizko hipotesi dira beharrezkoak, aurreko atalean egindako kontrastea baliagarria izan dadin?
7. Grafiko honek P11.2 ereduko hondarrak erakusten ditu. Azaldu itzazu lortutako emaitzak.



## BIGARREN ZATIA.

1982. urtetik aurrera, Turkiako Osasun Ministerioak iragarkiak argitaratu zituen erre-tzeak osasunerako dakarren arriskuari buruz. Gainera, 1986. urtean nazioko egunkari na-gusietako batek ere tabakoaren aurkako publizitatea argitaratu zuen. Erretzearen aurkako bi politika horiek tabako-kontsumoan zer eragin izan zuten aztertze-ko eredu hau estimatu da:

P11.2 Eredua: KTA estimazioak 29 behaketak erabiliz, 1960–1988

Aldagai azaldua:  $l_Z$

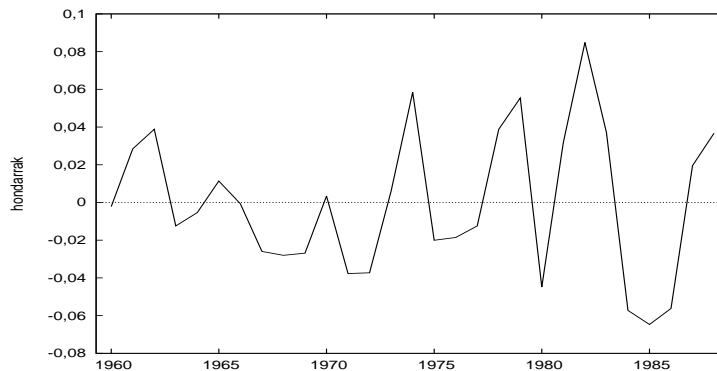
Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-4,22729	0,515213	-8,2049	0,0000
$l_P$	-0,213012	0,0863821	-2,4659	0,0212
$l_R$	0,626370	0,0678141	9,2366	0,0000
$D_{82}$	-0,101307	0,0258239	-3,9230	0,0006
$D_{86}$	-0,100729	0,0360802	-2,7918	0,0101

Hondarren karratuen batura 0,040520       $R^2$  0,877069

non  $D_{82}$  aldagaiak bat balioa hartzen duen 1982. urtetik aurrerako behaketentzat, eta zero balio, bestela; eta  $D_{86}$  aldagaiak bat balioa hartzen duen 1986. urtetik aurrerako behaketentzat, eta zero balioa, bestela.

1. Idatz ezazu estimatutako eredu hori. Zertan dira desberdinak P11.3 eta P11.2 ere-duak? Azaldu ezazu xehetasunez.

2. Zer zigarro-kontsumo espero da 1960tik 1981era bitarteko denboraldirako? Eta 1982tik 1985era bitarteko denboraldirako? Eta 1986tik 1988rako denboraldirako?
3. Interpreta itzazu *D82* eta *D86* aldagaien koefiziente estimatuak.
4. Turkian tabakoaren aurka ezarritako politika bakoitza eraginkorra izan al da?
5. Grafiko honetan, P11.3 ereduko hondarrak erakusten dira. Azaldu ezazu grafikoa, eta alderatu ezazu P11.2 ereduko hondarren grafikoarekin.



6. Orain arte lortutako emaitza guztiak ikusirik, zer eredu erabiliko zenuke zigarroen kontsumoa azaltzeko? Zergatik?

### HIRUGARREN ZATIA.

Ikertzaile batek pentsatu du tabakoarentzat espero den kontsumoan publizitate-kanpainek duten eragina P11.2 ereduaren agertzen den baino konplexuagoa dela. Izatez, egitura-aldaketa bat egon zela uste du, hau da, lagineko epe bakoitzeko errentaren eta prezioaren elastikotasuna desberdina zela:

- Kanpainarik gabe: 1960-1981.
- Osasun-kanpaina: 1982-1985.
- Osasun-kanpaina eta egunkarietako kanpaina: 1986-1988.

Hona hemen ikertzaileak aztertu nahi duen lan-hipotesia kontuan hartzen duen ereduaren estimazio-emaitzak:

P11.3 Eredua: KTA estimazioak 29 behaketak erabiliz, 1960–1988  
Aldagai azaldua:  $l_Z$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	-5,02489	0,462283	-10,8697	0,0000
$l_P$	-0,381857	0,0882174	-4,3286	0,0003
$l_R$	0,735837	0,0620130	11,8659	0,0000
$D82$	23,3924	5,23205	4,4710	0,0002
$D86$	-36,2588	12,1341	-2,9882	0,0073
$l_P \times D82$	0,416367	0,193047	2,1568	0,0434
$l_P \times D86$	-0,236248	0,243390	-0,9707	0,3433
$l_R \times D82$	-2,80248	0,623550	-4,4944	0,0002
$l_R \times D86$	4,25135	1,43051	2,9719	0,0075
Hondarren karratuen batura	0,016601	$R^2$	0,949634	

1. Idatz itzazu P11.3 ereduari dagozkion erregresio lineal orokorraren eredua eta laginaren erregresio-zuzena. Azaldu ezazu ereduaren zehaztapena xehetasunez.
2. P11.3 ereduaren arabera, zein da 1960tik 1981era bitarteko denboraldian espero den kontsumoa? Eta 1982tik 1985era bitarteko denboraldian? Eta 1986tik 1988ra bitarteko denboraldian?
3. Estima ezazu errentaren elastikotasuna, lagineko epeen arabera: kanpainarik gabeko epea, kanpaina bat izan zen epea, eta bi kanpaina izan ziren epea. Errentaren elastikotasuna konstante mantentzen al da epeetan zehar?
4. Interpreta itzazu -2,80248 eta 4,25135 koefiziente estimatuak.
5. Zure ustez, zein da tabako-salmenta zehazteko eredurik aproposena: P11.3 eredua ala P11.2 eredua? Arrazoitu ezazu erantzuna.

## P12. PRAKTIKA

Eusko Labela duen txakolina ekoizten eta saltzen duen enpresa bateko kudeatzaileak salmenten jokabidea analizatu nahi du interesgarriak diren aldagai batzuen funtzioan: prezioa eta publizitate-gastua hain zuzen. Horretarako, 1989ko lehen hiruhilekotik hasi eta 2004ko azken hiruhilekora arteko datuak bildu ditu aldagai hauei buruz:

$S$  : enpresak saldutako txakolin-botilak.

$P$ : enpresak saldutako txakolin-botilaren batez besteko prezioa (eurotan).

$L$ : lehiako enpresek saltzen duten txakolin-botilaren batez besteko prezioa (eurotan).

$PG$ : publizitate-gastua (eurotan).

## LEHEN ZATIA.

Hona hemen zer emaitza lortu den txakolinaren salmenta aipatutako hiru aldagai azaltzaileen araberrako erregresio lineal orokorraren eredu estimatzean:

P12.1 Eredua: KTA estimazioak 88 behaketak erabiliz, 1989:1–2010:4

Aldagai azaldua:  $S$

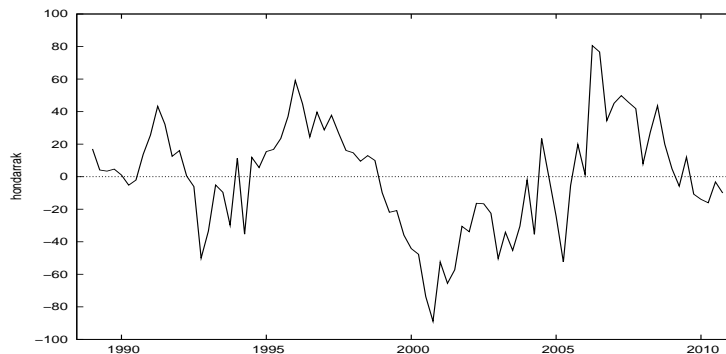
Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	304,430	173,557	1,7541	0,0831
$P$	-1,41396	0,983204	-1,4381	0,1541
$L$	2,56275	0,798534	3,2093	0,0019
$PG$	0,743241	0,0757153	9,8163	0,0000
Hondarren karratuen batura			96083,63	$R^2$ 0,994851

1. Idatz ezazu kudeatzaileak proposatu duen ereduari dagokion eredu lineala.
2. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
3. Interpreta itzazu prezioekin erlazionatuta dauden aldagaiei ( $P$  eta  $L$ ) dagozkien koefiziente estimatuak. Espero zenituen zeinuak dituzte?
4. Idatz ezazu mugatze-koefizientearen adierazpena, eta interpreta ezazu haren balioa.
5. Hona hemen eskuragarri dagoen laginaren lehen balioak:

Urtea	$S_t$	$P_t$	$L_t$	$PG_t$
1989:1	1800,5	44,7	24,5	1990,6
1989:2	1807,5	45,0	23,9	2020,1
1989:3	1824,7	44,5	23,3	2045,3
1989:4	1821,2	47,5	23,1	2045,2
1990:1	1849,9	40,9	23,8	2073,9
1990:2	1863,5	39,4	23,7	2098,0
1990:3	1876,9	36,9	23,8	2106,6
1990:4	1904,6	35,9	23,7	2121,1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Zenbat botila saldu ziren 1990. urteko bigarren hiruhilekoan? Estimatura dagoen ereduan oinarrituz, zer estimazio egin daiteke aurreko salmentari buruz? Zenbat botilatan erratu gara salmenta estimatzean? Nola deritzo diferentzia horri?

6. Hiruhileko batetik hurrengora pasatzean publizitate-gastua 200 euro handitzen bada, zer estimazio egingo zenuke horrek salmentetan duen eraginari buruz? Eta, beste aldagaiak konstante mantenduko balira?
7. Publizitate-gastua 100 euro handituko balitz gainerako aldagaien balioak konstante izanik, zer estimazio egingo zenuke horrek salmentetan duen eragin minimoari buruz? Eta maximoari buruz? Zergatik?
8. Kontrasta ezazu ereduko  $P$  eta  $L$  aldagai azaltzaileen banakako esangura. Arrazoizkoak al dira lortutako emaitzak?
9. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen baterako esangura. Lagin-arazoren bat dagoela uste al duzu?
10. Azaldu ezazu P12.1 ereduko hondarren grafikoa. Ba al duzu oinarrizko hipotesiren bat betetzen ez delako susmorik?



## BIGARREN ZATIA.

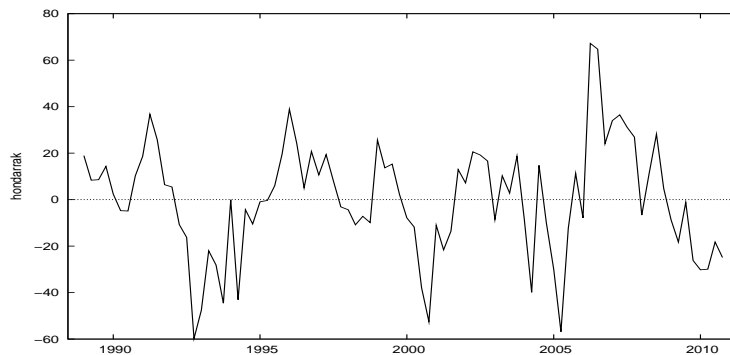
Kudeatzaileak, bat-batean, gogoratu du 1990tik 2003ra bitartean izandako euriteak kaltegarriak izan zirela txakolinaren ekoizpenarentzat. Eguraldiak izan zukeen eragina analitzatzeko, *EGU* fikzio-aldagaia sortu du, zeinak bat balioa hartzen duen, baldin eta 1999tik 2003ra arteko epeko behaketari badagokio, eta zero balioa, bestela.

Aldagai berri hori ereduan sartzean, honako estimazio-emaitza hauek lortu dira:

P12.2 Eredua: KTA estimazioak 88 behaketak erabiliz, 1989:1–2010:4  
Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	467,625	129,134	3,6213	0,0005
$P$	-2,88326	0,743793	-3,8764	0,0002
$L$	3,02811	0,590079	5,1317	0,0000
$PG$	0,687606	0,0560921	12,2585	0,0000
$EGU$	-55,9927	6,59108	-8,4952	0,0000
Hondarren karratuen batura		51395,28	$R^2$	0,997246

1. Idatz ezazu proposatu den erregresio lineal orokorraren eredua. Zein da P12.1 eta P12.2 ereduen arteko diferentzia?
2. Interpreta ezazu  $EGU$  aldagaiari dagokion koefiziente estimatua. Espero zenuen zainua du?
3. Ba al dago lagin-ebidentziarik, eguraldi txarrak salmentak jaitsi dituela esateko?
4. Azaldu ezazu P12.2 ereduko hondarren grafikoa, eta alderatu ezazu P12.1 ereduko hondarren grafikoarekin.



5. Zer esan dezakezu  $P$  eta  $L$  aldagaien banakako esangurari buruz? Alderatu itzazu lortutako emaitzak lehen zatiko zortzigarren ataleko emaitzekin. Zergatik gertatu da aldaketa? Zer ondorio ditu atal horretan erabilitako estimatzailearen propietateetan?

## HIRUGARREN ZATIA.

Eskuragarri dauden datuak hiruhilekoei dagozkienez, kudeatzaileak analizatu nahi du ea salmenten jokabidea urtaroaren araberakoa ote den. Hona hemen urtaroaren eragina kontuan hartzen duen ereduaren estimazio-emaitzak:

P12.3 Eredua: KTA estimazioak 88 behaketak erabiliz, 1989:1–2010:4

Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	458,366	131,504	3,4856	0,0008
$P$	-2,84476	0,755292	-3,7664	0,0003
$L$	2,99899	0,599282	5,0043	0,0000
$PG$	0,690514	0,0569771	12,1192	0,0000
$EGU$	-55,9285	6,68217	-8,3698	0,0000
$dq1$	1,93326	7,61884	0,2537	0,8003
$dq2$	1,40220	7,61273	0,1842	0,8543
$dq3$	6,30854	7,62133	0,8277	0,4103
Hondarren karratuen batura		50907,59	$R^2$	0,997272

non  $dqj$ ,  $j = 1, 2, 3$  bat balioa hartzen duen, baldin eta behaketa  $j$ . hiruhilekoko bada, eta zero, bestela.

1. Idatz ezazu P12.3 ereduari dagokion erregresio-eredua. Azaldu ezazu nola sartu den urtaroaren eragina.
2. Idatz ezazu laginaren erregresio-zuzena.
3. Interpreta itzazu 458,366 eta 1,4022 koefiziente estimatuak.
4. Zer estimazio egin daiteke 2003. urteko lehen hiruhilekoan espero diren salmentei buruz? Eta 2004. urteko lehen hiruhilekoan espero direnei buruz?
5. Ba al dago lagin-ebidentziarik, urtaroak salmentetan eragiten duela esateko?
6. Analisisian lortutako emaitzak aztertuz, zer eredu aukeratuko zenuke txakolinaren salmenta azaltzeko? Zergatik?

## P13. PRAKTIKA

Enpresa batek hiru lurralde historikoetan dituen sukurtsaletako langileen soldatak analizatu nahi ditu. Horretarako, 49 langilez osotutako lagin bat eratu du aldagai hauen informazioari buruz:

$S$ : langilearen soldata (eurotan).

$H$ : oinarrizko ikasketak amaitu ondoren egindako hezkuntza-urteak.

$X$ : lan-merkatuko esperientzia (urtetan).

$GIZ$ : 1, gizona bada, eta 0, emakumea bada.

$A$ : 1, langileak Araban lan egiten badu, eta 0, bestela.

$B$ : 1, langileak Bizkaian lan egiten badu, eta 0, bestela.

$G$ : 1, langileak Gipuzkoan lan egiten badu, eta 0, bestela.

Hona hemen eskuragarri dagoen laginaren zati bat:

Beh.	1	2	3	4	5	.....	49
$S_i$	1345	2435	1715	1461	1639	.....	1288
$GIZ_i$	0	1	1	1	1	.....	0
$H_i$	6	4	6	6	9	.....	6
$X_i$	2	18	4	4	3	.....	4
$A_i$	0	0	1	0	0	.....	0
$B_i$	1	1	0	1	1	.....	1

### LEHEN ZATIA.

Har ezazu kontuan erregresio lineal bakuneko eredu hau:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 H_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma^2) \quad i = 1, 2, \dots, 49. \quad (\text{P13.1})$$

1. Lagin-informazio hau erabiliz, estima itzazu (P13.1) ereduko koefizienteak, KTA estimatzailearen bitartez.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{49} S_i &= 89190 & \sum_{i=1}^{49} (S_i - \bar{S})^2 &= 20172111,96 & \sum_{i=1}^{49} (H_i - \bar{H})^2 &= 270,5306 \\ \sum_{i=1}^{49} H_i &= 305 & \sum_{i=1}^{49} S_i H_i &= 585584 & \sum_{i=1}^{49} (S_i - \bar{S})(H_i - \bar{H}) &= 30421,7551 \end{aligned}$$



2. Interpreta ezazu hezkuntza aldagaiari dagokion koefiziente estimatua.
3. Kalkulatu eta interpreta ezazu mugatze-koefizientea.
4. Hezkuntza aldagaia esanguratsua da?
5. Lagineko langile guztiek oinarritzko ikasketak bakarrik balituzte, ba ote legoke arazorik ereduaren estimazioan?

### **BIGARREN ZATIA.**

Hona hemen enpresako langileen soldata, hezkuntzaren, esperientziaren eta generoaren arabera zehazten duen ereduaren estimazio-emaitzak:

P13.2 Eredua: KTA estimazioak 49 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	434,821	258,871	1,6797	0,0999
$H$	133,551	31,5081	4,2386	0,0001
$X$	34,4543	12,1316	2,8401	0,0067
$GIZ$	470,460	144,870	3,2475	0,0022
Hondarren karratuen batura		1,10894e+07	$R^2$	0,450263

1. Idatz ezazu P13.2 ereduari dagokion erregresio-eredua. Zein da P13.2 eta P13.1 ereduaren arteko ezberdintasuna?
2. Interpreta itzazu P13.2 ereduko koefiziente estimatuak.
3. Kontrasta ezazu aldagai azaltzaileen banakako eta baterako esangura. Lagin-arazoren bat dagoelako susmorik ba al duzu?
4. Ba al dago lagin-ebidentziarik, gizonen emakumeek baino gehiago irabazten dutela esateko?
5. Zer estimazio egingo zenuke 5 urteko hezkuntza gehigarria duen eta esperientziarik ez duen emakumezko langile baten soldatari buruz? Eta oinarritzko ikasketak eta 5 urteko esperientzia dituen emakumezko langile baten soldatari buruz?
6. Emakumezko langile baten esperientzia urte bat handitzen bada, zer estimazio egingo zenuke haren soldataren gehikuntzari buruz, kontuan hartuta hezkuntza-urteak ez direla aldatu? Eta, gizonetzkoa balitz?

**HIRUGARREN ZATIA.**

Hona hemen, soldata lagineko aldagai azaltzaile guztien arabera zehazten duen eredu baten estimazio-emaitzak:

P13.3 Eredua: KTA estimazioak 49 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	1580,34	262,733	6,0150	0,0000
$H$	60,8324	26,3964	2,3046	0,0261
$X$	31,4564	9,01817	3,4881	0,0011
$GIZ$	594,659	118,738	5,0082	0,0000
$A$	-1151,2	194,498	-5,9189	0,0000
$G$	-800,65	145,565	-5,5003	0,0000
Hondarren karratuen batura		5,68903e+06	$R^2$	0,717976

1. Idatz ezazu P13.3 ereduari dagokion erregresio-eredua. Azaldu ezazu P13.3 eta P13.2 ereduaren arteko desberdintasuna.
2. Aldagai berria esanguratsua al da soldata zehazteko?
3. Zer estimazio egingo zenuke gizonen eta emakumeen soldaten arteko diferentziari buruz, beste ezaugarri guztiak berdinak mantenduz? Diferentzia hori esanguratsua al da?
4. Zer estimazio egingo zenuke oinarrizko ikasketak dituen eta esperientziarik ez duen emakume baten soldatari buruz, kontuan hartuta Bizkaian dela? Eta, Araban biziko balitz? Eta, Gipuzkoan biziko balitz?
5. Interpreta ezazu lehen eta bosgarren koefiziente estimatuen baturaren (1580,34 + 594,659) balioa.

**LAUGARREN ZATIA.**

Hona hemen azken taulak aurreko ereduan murrizketa bat barneratzean lortzen diren estimazio-emaitzak:

## P13.4 Eredua: KTA estimazioak 49 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$ 

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	1503,49	271,977	5,5280	0,0000
$H$	81,9257	25,7337	3,1836	0,0027
$X$	28,7986	9,33421	3,0853	0,0035
$GIZ$	475,994	110,845	4,2942	0,0001
$A + G$	-857,85	149,622	-5,7334	0,0000
Hondarren karratuen batura		6,34730e+06	$R^2$	0,685343

non  $A + G$  terminoak 1 balioa hartzen duen, baldin eta langilea Araban edo Gipuzkoan bizi bada, eta zero, Bizkaian bizi bada.

1. Zer murrizketa sartu da P13.3 ereduan, P13.4 eredua lortzeko? Interpreta ezazu haren esanahia, eta kontrasta ezazu bere egitasuna.
2. Zer estimazio egingo zenuke oinarritzko ikasketak dituen eta esperientziarik ez duen emakume baten soldatari buruz, kontuan hartuta Bizkaian bizi dela? Eta, Araban biziko balitz? Eta, Gipuzkoan biziko balitz?

Alderatu itzazu emaitza horiek hirugarren zatiko laugarren atalean lortutakoekin. Zergatik gertatu da diferentzia hori?

3. Orain arte lortutako emaitza guztiak kontuan izanik, nola zehaztuko zenuke enpresa horretako langileen soldata? Arrazoitu ezazu zure erantzuna, erabilitako estimatzaileen propietateetan oinarrituz.

## P14. PRAKTIKA

Produkzio-funtzioa da lortutako produktuaren eta produktu hori lortzeko erabiltzen diren faktoreen konbinazioaren arteko erlazioa. Denbora-une bateko teknologiaren egoera kontuan izanik, erabilitako ekoizpen-faktoreen  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  kopuruen funtzioan lor daitekeen produktu kopurua ( $Q$ ) adierazten du produkzio-funtzioak:

$$Q = f(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Cobb-Douglas produkzio-funtzioaren propietate teknikoak etekin-eskala kontzeptuaren inguruan ezarri dira:

- Eskala gorakorreko etekinak daude, baldin eta, erabilitako ekoizpen-faktore guztien kopuruaren proportzio bat aldatzean, lortutako produktu kopuruaren proportzio handiago bat aldatzen bada. Esate baterako, ekoizpen-faktore guztien kopurua bikoiztean lortzen den produktu kopurua bikoitza baino handiagoa denean.
- Eskala konstanteko etekinak daude, baldin eta, erabilitako ekoizpen-faktore guztien kopuruaren proportzio bat aldatzean, lortutako produktu kopurua proportzio berean aldatzen bada.
- Eskala beherakorreko etekinak daude, baldin eta, erabilitako ekoizpen-faktore guztien kopuruaren proportzio bat aldatzean, lortutako produktu kopuruaren proportzio txikiago bat aldatzen bada.

Demagun nekazari batek artogintzan lan egiten duela, baserri batean. Enpresaburu horrek ekoizpen-faktore hauek erabiltzen ditu  $Q$  tona arto ekoizteko:

$K$ : enpresaburuak erabiltzen duen ondasun iraunkorren ekipoa (makina unitatetan).

$L$ : lanaldi osoko langileen kopurua.

$E$ : erabilitako energia (mila kilowattetekotan).

$A$ : ereindako hektarea kopurua.

$O$ : erabilitako ongarri kopurua (kilotan).

$H$ : erabilitako hazi kopurua (kilotan).

### **LEHEN ZATIA.** Produkzio-funtzioaren estimazioa

Demagun produktuaren eta ekoizpen-faktoreen arteko erlazioa logaritmiko bikoitza dela baserriko produkzio-funtzioan, hau da, bai aldagai azaldua baita aldagai azaltzaileak ere logaritmotan neurtuta daudela.

1. Estima ezazu produkzio-funtzioa, 1948. urtetik 1993. urtera arteko datuak erabiliz. Azaldu ezazu, zehetasunez, aukeratutako ereduaren zehaztapena eta aldagai azaltzaileen aukeraketa, eta interpreta itzazu estimazioan lortutako emaitzak.
2. Ba al dago lagin-ebidentziarik, aukeratu duzun produkzio-funtzioak etekin konstanteko eskalak dituela esateko?

### **BIGARREN ZATIA.** Aldaketa teknologikoak

70eko hamarkadaren hasierako petrolio-krisiak aldaketa teknologikoak ekarri zituen, eta, jakina denez, aldaketa teknologiko horiek eragina dute produkzio-funtzioan. Demagun aldaketa teknologiko horiek 1976. urtetik aurrera jarri zirela martxan.

1. 1976. urtetik aurrera gertatutako teknologia-aldaketak produkzioan eragin du? Arrazoitu ezazu, xehetasunez, erabilitako ereduaren zehaztapena, eta, haren estimazio-emaitzen interpretazioan oinarrituz, erantzun ezazu egindako galdera.
2. Ba al dago lagin-ebidentziarik, produkzio-funtzioa 1976. urtea baino lehen eta ondoren desberdina izan dela esateko? Hau da, ekoizpen-faktoreen gehikuntza batek arto-ekoizpenean izan duen eragina desberdina izan da 1976. urtea baino lehen eta ondoren? Arrazoitu ezazu, xehetasunez, erabilitako ereduaren zehaztapena, eta, haren estimazio-emaitzen interpretazioan oinarrituz, erantzun ezazu egindako galdera.

### **HIRUGARREN ZATIA.** Ereduen sailkapena

1. Zein izango litzateke produkzio-funtziorako eredurik aproposena? Arrazoitu ezazu zure erantzuna.
2. Aurreko atalean aukeratu duzun ereduari oinarrituz, auresan ezazu zer balio izango lukeen nekazariak ekoiztutako arto kopuruak 1994. urtean, baldin eta nekazariak erabili izan balitu 87 hektarea lantzeko 59 makina, lanaldi osoko 79 langile, 92 kilo ongarri, 96 kilo hazi eta 92000 kw energia.

## **P15. PRAKTIKA**

Hipermerkatu batean, AL markako atun-laten salmenten datuen lagin bat eskuratu dugu, 52 asteri dagokiena. Lagin berean, AL markaren prezioa eta lehiako marken (IS eta CA) atun-laten prezioak ere badaude.

### **LEHEN ZATIA.** AL markako atun-laten salmentarako eredu

1. Estima ezazu AL atun-markaren salmentak AL markaren prezioaren eta lehiako prezioaren arabera jasotzen dituen eredu bat. Interpretatu itzazu koefiziente estimatuak eta proposatu duzun ereduaren doikuntzaren ontasuna.
2. Ba al dago lagin-ebidentziarik, lehiako bi marken prezio-politikek AL markarentzat espero diren salmentetan eraginak bera dutela esateko?
3. Orain arte lortutako emaitzak izanik, zehaztu eta estima ezazu AL atun-markaren salmentetarako eredu egoki bat. Arrazoitu ezazu zure aukera, eta interpreta itzazu lortutako emaitzak.

4. Kudeatzailearen ustez, 53. astean AL markaren prezioa konstante mantentzen bada eta lehiakideek aurreko asteko prezioak 0,15 euroan igotzen badituzte, AL markarentzat espero diren salmentak 50 unitate gehituko lirateke. Ba al dago lagin-ebidentziarik, balizko horren alde?

### **BIGARREN ZATIA.** Marketin-politikak

AL enpresako kudeatzaileak pentsatu du publizitate-kanpainak egitea, salmentak sustatzeko. Izatez, bi motatako publizitate-kanpainen eraginkortasuna probatu nahi du:

A KANPAINA: Hipermerkatuan stand bat jartzea (30. astetik 52. astera bitartean).

B KANPAINA: Egunkarian iragarki bat jartzea (1. , 7. , 10. , 11. , 12. , 13. , 17. , 22. eta 26. asteetan).

1. Estima ezazu salmentak azaltzeko eredu bat, prezioek eta bi publizitate-kanpainen balizko eraginak kontuan hartuta. Arrazoitu ezazu zure aukera, eta interpreta itzazu lortutako emaitzak.
2. Kudeatzaileak publizitate-kanpaina bat bakarrik ordaindu ahal izango balu, zein gomendatuko zenioke?

### **HIRUGARREN ZATIA.** Ereduen sailkapena

1. Lortutako emaitzak aztertuz, zein eredu aukeratuko zenuke AL markaren atun-laten salmentak zehazteko? Arrazoitu ezazu erantzuna.
2. Aukeratutako eredian oinarrituz, zer gomendio egingo zenioke enpresako kudeatzaileari, prezio-politikari eta marketin-politikari buruz?



IV. zatia

**Praktiken ebazpena**





## P1. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

- Laginaren tamaina:  $N = 15$ .  
Lagineko laugarren etxebizitzaren prezioa:  $P_4 = 306$  mila dolar.  
Lagineko laugarren etxebizitzak dituen logela kopurua:  $L_4 = 2$ .
- Ereduko aldagai azaltzailea prezioa da ( $P$ ) eta aldagai azaltzailea, berriz, etxebizitzaren azalera ( $A$ ).  
Ereduko elementu aleatorioak aldagai azaldua ( $P$ ) eta perturbazioa ( $u$ ) dira.
- Populazioaren erregresio-zuzena:  $E(P_i) = \alpha + \beta A_i$ ,  $i = 1, \dots, 15$ .
- $\beta$  = etxebizitzaren prezioan espero den gehikuntza (mila dolarrekotan) etxebizitzaren azalera oin karratu bat handitzean.
- Karratu Txikien Arrunta estimazio-irizpidea hondarren karratuen baturaren minimizazioan oinarritzen da, hau da, adierazpide honen minimizazioan:

$$\sum_{i=1}^{15} \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{15} (P_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} A_i)^2.$$

Minimizazioaren lehen ordenako baldintzak, estimatzaileekiko deribatu partzialak ateraz eta zerora berdinduz lortzen dira:

$$\begin{aligned} -2 \sum (P_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} A_i) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \sum (P_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} A_i) = 0 \\ -2 \sum (P_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} A_i) A_i &= 0 \quad \Rightarrow \quad \sum (P_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} A_i) A_i = 0 \end{aligned}$$

Ekuazio normalak:

$$\begin{aligned} \sum P_i &= N \hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum A_i \\ \sum P_i A_i &= \hat{\alpha} \sum A_i + \hat{\beta} \sum A_i^2 \end{aligned}$$

Lagin-balioak ordezkatur:

$$\begin{aligned} 3600 &= 15 + \hat{\beta} 21909 \\ 5322245 &= \hat{\alpha} 21909 + \hat{\beta} 32780493 \end{aligned}$$

6. P1.1 ereduko koefizienteen KTA estimazioak hiru eratarara lor daitezke:

a) Aurreko ataleko ekuazio normalak ebatziz:

$$\hat{\alpha} = 120,029 \quad \hat{\beta} = 0,082.$$

b) Ekuazio normaletatik eratorritako formulak erabiliz:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N (A_i - \bar{A})(P_i - \bar{P})}{\sum_{i=1}^N (A_i - \bar{A})^2} = \frac{64085}{780207,6} = 0,082$$

$$\hat{\alpha} = \bar{P} - \hat{\beta} \bar{A} = \frac{3600}{15} - 0,082 \times \frac{21909}{15} = 120,029$$

c) Matrizeen bidez:  $\hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1} X'Y$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}_{KTA} &= \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{15} A_i \\ \sum_{i=1}^{15} A_i & \sum_{i=1}^{15} A_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{15} P_i \\ \sum_{i=1}^{15} P_i A_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 21909 \\ 21909 & 32780493 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3600 \\ 5322245 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{11703114} \begin{bmatrix} 32780493 & -21909 \\ -21909 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3600 \\ 5322245 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120,029 \\ 0,082 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Laginaren erregresio-zuzena:  $\hat{P}_i = 120,029 + 0,082 A_i \quad i = 1, 2, \dots, 15.$

7. Prezio estimatua:  $\hat{P}_1 = 120,029 + 0,082 \times 1185 = 217,199$  mila dolar.

Hondarra:  $\hat{u}_1 = P_1 - \hat{P}_1 = 219 - 217,199 = 1,801$  mila dolar.

8. Konfiantza-tartea.

$$\begin{aligned} KT(\beta)_{\%95} &= \left[ \hat{\beta} \pm t(N-k)_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} \right] = \\ &= \left[ 0,082 \pm t(15-2)_{0,05/2} \sqrt{0,00566932} \right] = [-0,0806 \quad 0,2446] \end{aligned}$$

non:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum_{i=1}^{15} (A_i - \bar{A})^2} = \frac{\sum \hat{u}_i^2 / (15-2)}{\sum_{i=1}^{15} (A_i - \bar{A})^2} = \frac{57511,06 / (15-2)}{780207,6} = 0,00567019$$

eta

$$\sum \hat{u}_i^2 = \sum P_i^2 - \hat{\alpha} \sum P_i - \hat{\beta} \sum P_i A_i = 57511,06$$

diren.

$0 \in KT(\beta)_{\%95}$  betetzen denez, ondoriozta daiteke azalera aldagai azaltzailea ez dela aldagai esanguratsua, % 95eko konfiantza izanik.

## BIGARREN ZATIA.

1.  $X$  datu-matrizearen ordena ( $15 \times 3$ ) da; izan ere, laginean, 15 behaketa daude eta ereduan, termino konstanteaz gainera, bi aldagai azaltzaile daude.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1185 & 2 \\ 1 & 1421 & 2 \\ 1 & 1478 & 2 \\ 1 & 2205 & 2 \\ 1 & 1171 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

2. KTA estimatzailea:

$$\hat{\beta}_{KTA} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum A_i & \sum L_i \\ \sum A_i & \sum A_i^2 & \sum A_i L_i \\ \sum L_i & \sum A_i L_i & \sum L_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum P_i \\ \sum P_i A_i \\ \sum P_i L_i \end{bmatrix}$$

3.  $\hat{\alpha} = 238,808$ : etxebizitzaren prezio estimatua (mila dolarrekotan) azalera eta logela kopurua zero izanik.

$\hat{\beta}_1 = 0,06593$ : etxebizitzaren prezio estimatuaren aldakuntza (mila dolarrekotan) etxebizitzaren azalera oin karratu bat handitzean eta logela kopurua konstante mantenduz.

Koefiziente horrek espero izatekoa zen zeinua du; izan ere, etxebizitzaren azalaren eta prezioaren arteko erlazio zuzena adierazten du, ceteris paribus: azalera handiagoa izatean, prezioa altuagoa izango da, nahiz eta logela kopurua konstante mantendu.

$\hat{\beta}_2 = -33,968$ : etxebizitzak logela bat gehiago izatean, azalera konstante mantenduz, etxebizitzaren prezio estimatua 33,968 mila dolar jaitsiko da.

Estimazio horren zeinuak etxebizitzaren logela kopuruaren eta prezioaren arteko alderantzizko erlazioa adierazten du. Hasiera batean, emaitza horrek ez dirudi

intuiziozkoa, baina kontuan izan behar da koefizienteen interpretazioa ceteris paribus dela, hau da, logela kopurua handitzen da, baina ez da ahaztu behar azalera konstante mantentzen dela.

4.  $\hat{P}_a = 238,808 + 0,06593 \times 1250 - 33,968 \times 3 = 219,3165$  mila dolar.
5. Etxebizitzak logela bat gehiago du eta beste ezaugarriak konstante mantenduz, etxebizitzaren prezioa 33968 dolar jaitsiko dela estimatzen da.

$$\Delta \hat{P} = -33,968 \times \Delta L = -33,968 \times 1 = -33,968 \text{ mila dolar} = \hat{\beta}_2.$$

6. Etxebizitzak logela bat gehiago eta 120 oin karratu gehiago baditu, etxebizitzaren prezioa 26056 dolar jaitsiko da.

$$\begin{aligned} \Delta \hat{P} &= 0,06593 \times \Delta A - 33,968 \times \Delta L = \\ &= 0,06593 \times 120 - 33,968 \times 1 = -26,056 \text{ mila dolar.} \end{aligned}$$

$$7. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (P_i - \bar{P})^2} = 1 - \frac{52630,2}{62766,03} = 0,161486.$$

Interpretazioa: lagineko etxebizitzaren salmenta-prezioaren aldagarritasunaren %16,148 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez: azalera eta logela kopurua.

$$8. \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - k} = \frac{52630,2}{15 - 3} = 4385,85.$$

9. ELOE:  $P_i = \alpha + \beta_1 A_i + \beta_2 L_i + u_i \quad i = 1, \dots, N.$

Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_1 \neq 0 \text{ edota } \beta_2 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

$$F = \frac{0,161486/2}{(1 - 0,161486)/(15 - 3)} = 1,155513 < 3,88529 = \mathcal{F}(2, 12)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, azalera eta logela kopurua aldagai azaltzaileak ez dira batera esanguratsuak prezioa azaltzeko.

10. Banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \quad i = 1, 2.$$

$$\text{Azalera (A)} \quad |t| = \left| \frac{0,06593 - 0}{0,07653} \right| = 0,861 < 2,17881 = t(15 - 3)_{0,05/2}$$

$$\text{Logela kopurua (L)} \quad |t| = \left| \frac{-33,968 - 0}{32,228} \right| = 1,054 < 2,17881 = t(15 - 3)_{0,05/2}$$

Beraz, azalera eta logela kopurua aldagaiak ez dira banaka esanguratsuak prezioa azaltzeko, % 5eko esangura-maila izanik.

### HIRUGARREN ZATIA.

$$1. \quad \begin{matrix} \hat{P}_i & = & 238808 & + & 65,93 & A_i & - & 33968 & L_i & & \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 & = & 52630188426,9231. \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & & (158068) & & (76,53) & & (32228) & & & & & & \end{matrix}$$

2.  $\hat{\alpha} = 238808$  dolar: etxebizitzaren prezio estimatua (mila dolarrekotan), azalera eta logela kopurua zero direnean.

$\hat{\beta}_1 = 65,93$  dolar: etxebizitzaren azalera oin karratu bat handitzean, logela kopurua konstante mantenduz, etxebizitzaren prezio estimatua 65,93 dolar igoko da.

$\hat{\beta}_2 = -33968$  dolar: etxebizitzak logela bat gehiago izatean, azalera konstante mantenduz, etxebizitzaren prezio estimatua 33968 dolar jaitsiko da.

$$3. \quad \sum \hat{u}_i^2 = 52630188426,9231 \quad \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - k} = \frac{52630188426,9231}{15 - 3} = 4385850000.$$

4. Estimatzailen kobariantza-matrizea:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 24985500000 & -9943300 & -3632110000 \\ -9943300 & 5857,77 & 495514 \\ -3632110000 & 495514 & 1038700000 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (P_i - \bar{P})^2} = 0,161486.$$

Interpretazioa: lagineko etxebizitzaren salmenta-prezioaren aldagarritasunaren % 16,1486 azaltzen da eredu aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez: azalera eta logela kopurua.

6. Baterako esanguraren kontrastea.

Mugatze-koefizientearen balioa aurrekoaren berdina denez, emaitza ere berdina izango da: aldagai azaltzaileak ez dira batera esanguratsuak prezioa azaltzeko. Egiazta dezagun:

$$\begin{aligned}
 H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0 \\
 H_a : \beta_1 \neq 0 \text{ edota } \beta_2 \neq 0
 \end{aligned}
 \quad
 F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(N - k)} \stackrel{H_0}{\approx} \mathcal{F}(q, N - k)$$

$$F = \frac{0,161486/2}{(1 - 0,161486)/(15 - 3)} = 1,155513 < 3,88529 = \mathcal{F}(2, 12)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen % 5eko esangura-maila izanik; beraz, azalera eta logela kopurua aldagai azaltzaileak ez dira batera esanguratsuak prezioa azaltzeko.

Banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{aligned}
 H_0 : \beta_i = 0 \\
 H_a : \beta_i \neq 0
 \end{aligned}
 \quad
 t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\approx} t(N - k) \quad i = 1, 2.$$

$$\text{Azalera (A)} \quad |t| = \left| \frac{65,93 - 0}{76,53} \right| = 0,861 < 2,17881 = t(15 - 3)_{0,05/2}$$

$$\text{Logela kopurua (L)} \quad |t| = \left| \frac{-33968 - 0}{32228} \right| = 1,054 < 2,17881 = t(15 - 3)_{0,05/2}$$

Beraz, azalera eta logela kopurua aldagaiak ez dira banaka esanguratsuak prezioa azaltzeko, % 5eko esangura-maila izanik.

#### 7. Bigarren eta hirugarren zatiko emaitzen arteko alderaketa.

Hirugarren zatian, prezioa aldagai azaldua neurtzeko unitateak aldatu dira.

**Koefizienteak.** Koefiziente guztien estimazioak aldatu dira. Izatez, hasierako koefiziente guztien balioak 1000-z biderkatuta agertzen dira. Hala ere, informazioa bera ematen dute. Hona hemen adibide bat:

$\hat{\beta}_1 = 65,93$  dolar: etxebizitzaren azalera oin karratu bat handitzean, logela kopurua konstante mantenduz, etxebizitzaren prezio estimatua 65,93 dolar = 0,06593 mila dolar igoko da.

**Doikuntzaren ontasuna.** Ereduko hondarren karratuen batura eta perturbazioen bariantzaren estimazioak desberdinak dira; balio horiek 1000<sup>2</sup>-z biderkatuta daude, hain zuzen.

Haatik, doikuntzaren ontasuna – hau da, etxebizitzaren prezioaren aldakuntzaren proportzioa, aldagai azaltzaileen aldakuntzekin azaltzen dena – ez da aldatzen, nahiz eta prezioa aldagai azalduaren unitateak aldatu.

**Inferentzia.** Aldagai azaldua mila dolarrekotan neurtuta dagoenean:

$$\widehat{Bar}(\hat{\alpha}) = (158,068)^2 = 24985,49262$$

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}_1) = (0,07653)^2 = 0,005856841$$

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}_2) = (32,228)^2 = 1038,643984$$

Beraz, aldagai azaldua mila dolarrekotan neurtzetik dolarretan neurtzera pasatzean, bariantzak (baita kobariantzak ere)  $1000^2$ -z biderkatzen dira.

Esangura, berriz, (bai baterakoa, eta bai banakakoa), ez da aldagai azaldua neurtzeko unitateen araberakoa.

### LAUGARREN ZATIA.

$$1. \begin{array}{cccc} \hat{P}_i & = & 238,808 + 0,7097 A_i - 33,968 L_i & \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 = 52630,2 \\ (\hat{\sigma}_{\beta}) & & (158,068) \quad (0,8238) \quad (32,228) & \end{array}$$

2.  $\hat{\alpha} = 238,808$  mila dolar: etxebizitzaren prezio estimatua (mila dolarrekotan), azalera eta logela kopurua zero direnean.

$\hat{\beta}_1 = 0,7097$  mila dolar: etxebizitzaren azalera metro karratu bat handitzean, logela kopurua konstante mantenduz, etxebizitzaren prezio estimatua 709,7 dolar igoko da.

$\hat{\beta}_2 = -33,968$  mila dolar: etxebizitzak logela bat gehiago izatean, azalera konstante mantenduz, etxebizitzaren prezio estimatua 33968 dolar jaitsiko da.

$$3. \sum \hat{u}_i^2 = 52630,2 \quad \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - k} = \frac{52630,2}{15 - 3} = 4385,849.$$

4. Estimatzailen kobariantza-matrizea:

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 24985,5 & -107,029 & -3632,11 \\ -107,029 & 0,678692 & 5,33367 \\ -3632,11 & 5,33367 & 1038,7 \end{bmatrix}$$

$$5. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (P_i - \bar{P})^2} = 1 - \frac{52630,2}{62766,03} = 0,161486$$

Interpretazioa: lagineko etxebizitzaren salmenta-prezioaren aldagarritasunaren % 16,14 azaltzen da ereduko aldagai azaltzailen aldagarritasunaren bitartez: azalera eta logela kopurua.



## 6. Baterako esanguraren kontrastea.

Mugatze-koefizientearen balioa, berriz, berdina da. Ondorioz, kontrastearen emaitza ere berdina izango da: aldagai azaltzaileak ez dira batera esanguratsuak prezioa azaltzeko.

Banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \quad i = 1, 2.$$

$$\text{Azalera (A)} \quad |t| = \left| \frac{0,7097 - 0}{0,8238} \right| = 0,861 < 2,17881 = t(15 - 3)_{0,05/2}$$

$$\text{Logela kopurua (L)} \quad |t| = \left| \frac{-33,968 - 0}{32,228} \right| = 1,054 < 2,17881 = t(15 - 3)_{0,05/2}$$

Beraz, azalera eta logela kopurua aldagaiak ez dira banaka esanguratsuak prezioa azaltzeko, % 5eko esangura-maila izanik.

## 7. Bigarren eta laugarren zatietako emaitzen arteko alderaketa.

Laugarren zatian, azalera aldagai azaltzailearen neurtzeko unitateak aldatu dira.

**Koefizienteak.** Azalera aldagaiari dagokion koefizientearen estimazioa aldatzen da soilik; besteak konstante mantentzen dira. Izatez, koefiziente horren interpretazioa berdina da, baina metro karratutan; izan ere,  $1 \text{ oin}^2 = 0,09290304 \text{ m}^2$  denez, koefizientea balio horretaz zatitzen da:

$$\frac{0,06593}{0,09290304} = 0,7097.$$

**Doikuntzaren ontasuna.** Aldagai azalduaren neurtzeko unitatea aldatu ez denez, hondarren karratuen batura eta perturbazioen bariantzaren estimazioak ez dira aldatzen.

Ondorioz, doikuntzaren ontasuna – hau da, etxebizitzaren prezioaren aldakuntzaren proportzioa, aldagai azaltzaileen aldakuntzekin azaltzen dena – ez da aldatzen, nahiz eta azalera aldagai azaltzailearen unitateak aldatu.

**Inferentzia.** Estimatzailen kobariantza-matrizean aldatzen diren balio bakarrak dira azalera aldagaiari dagokion koefizientearen estimatzailearen bariantza eta estimatzaile horrek beste biek dituen kobariantzak.

Esangura, berriz, (bai baterakoa, eta bai banakakoa), ez da aldagai azaldua neurtzeko unitateen arabera.

## P2. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

$$1. \quad \hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}_{KTA} &= \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{718} ED_i \\ \sum_{i=1}^{718} ED_i & \sum_{i=1}^{718} ED_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{718} S_i \\ \sum_{i=1}^{718} S_i ED_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 718 & 9814 \\ 9814 & 137732 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1204591 \\ 11821856074 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2576980} \begin{bmatrix} 137732 & -9814 \\ -9814 & 718 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1204591 \\ 11821856074 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 873,519 \\ 58,8348 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Laginaren erregresio-zuzena:  $\hat{S}_i = 873,519 + 58,8348 ED_i \quad i = 1, 2, \dots, 718.$

2.  $\hat{\beta}_2 = 58,8348$  euro: banakoaren soldataren aldakuntza estimatua, hezkuntza urte bat handitzean.
3. KTA estimatzailea alboragabea eta bariantza minimokoa izan dadin, beharrezkoak dira perturbazioari buruzko oinarritzko hipotesi hauek:
  - Zero esperantza:  $E(u_i) = 0, \forall i.$
  - Homozedastizitatea:  $B(u_i) = \sigma_u^2, \forall i.$
  - Autokorrelazio eza:  $E(u_i u_j) = 0, \forall i \neq j.$

Inferentzia egiteko, oinarritzko hipotesi horietaz gainera, perturbazioak banaketa normala jarraitu behar du.

4. Azken sei behaketak. Lehen sei behaketak aukeratuz gero,  $ED$  hezkuntza alda-gaiaren balioak berdinak direnez, azpilagin horretan kolinealtasun zehatza egongo litzateke, hau da,  $X$  ez litzateke hein osokoa izango, eta, ondorioz, ezingo genituzke koefizienteak banaka estimatu. Azken sei behaketak aukeratuz gero, berriz, ez dago kolinealtasun zehatza izateko arazorik.
5. Laginaren erregresio-zuzena:

$$\hat{S}_i = 0,873519 + 0,0588348 ED_i \quad i = 1, 2, \dots, 718.$$

$\hat{\beta}_2 = 0,0588348$  mila euro: hezkuntza-urte bat gehiago izatean, banakoaren soldata 0,0588348 mila euro = 58,8348 euro igoko dela estimatzen da.

**BIGARREN ZATIA.**

## 1. ELOE:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 ED_i + \beta_3 FED_i + \beta_4 MED_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, 2, \dots, 718.$$

$$2. \text{ LEZ: } \begin{array}{ccccccc} \hat{S}_i & = & 803,84 & + & 46,6073 & ED_i & + & 11,1165 & FED_i & + & 11,2765 & MED_i \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & & (92,6237) & & (7,2261) & & & (5,5797) & & & (6,4935) & \end{array}$$

$$R^2 = 0,120364 \quad HKB = 106000000$$

3.  $\hat{\beta}_3 = 11,1165$  euro. Banakoaren aitak hezkuntza-urte gehigarri bat izatean, banakoaren soldata 11,1165 euro handitzen dela estimatzen da, banakoaren hezkuntza eta haren amaren hezkuntza-urteen kopurua konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_3 = 11,2765$  euro. Banakoaren amak hezkuntza-urte gehigarri bat izatean, banakoaren soldata 11,2765 euro handitzen dela estimatzen da, banakoaren hezkuntza eta haren aitaren hezkuntza-urteen kopurua konstante mantenduz.

$$4. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (S_i - \bar{S})^2} = 0,120364$$

Interpretazioa: banakoaren soldataren aldagarritasunaren % 12,0364 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez: banakoaren, eta haren aitaren eta amaren hezkuntza-urteen aldagarritasunaren bitartez.

## 5. P2.2 ereduaren arabera:

$$i = 1 \quad ED_1 = 12 \quad FED_1 = 8 \quad MED_1 = 8$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= 803,84 + 46,6073 ED_1 + 11,1165 FED_1 + 11,2765 MED_1 = \\ &= 803,84 + 46,6073 \times 12 + 11,1165 \times 8 + 11,2765 \times 8 = 1542,3 \text{ euro} \end{aligned}$$

$$i = 718 \quad ED_{718} = 13 \quad FED_{718} = 6 \quad MED_{718} = 8$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{718} &= 803,84 + 46,6073 ED_{718} + 11,1165 FED_{718} + 11,2765 MED_{718} = \\ &= 803,84 + 46,6073 \times 13 + 11,1165 \times 6 + 11,2765 \times 8 = 1566,6 \text{ euro} \end{aligned}$$

## 6. Kontrasterako hipotesia.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 50 \\ H_a : \beta_2 \neq 50 \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_2 - 50}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{46,6073 - 50}{7,2261} \right| = 0,46951 < 1,96329 = t(718 - 4)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik. Ondorioz, banakoak hezkuntza-urte gehiago bat izatean, gainerako aldagaiak konstante mantenduz, banakoaren soldata 50 euro gehitzen dela esan daiteke.

7. Konfiantza-tartea.

$$\begin{aligned} KT(\beta_2)_{\%95} &= \left[ \hat{\beta}_2 \pm t(N-k)_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} \right] = \\ &= \left[ 46,6073 \pm t(718-4)_{0,05/2} \times 7,2261 \right] = [32,4204 \quad 60,7943] \end{aligned}$$

$50 \in KT(\%95)$  betetzen denez, ondorio bera erdiesten dugu, % 95eko konfiantza izanik; banakoak hezkuntza-urte gehiago bat izatean, gainerako aldagaiak konstante mantenduz, haren soldata 50 euro igotzen da.

8. Banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_i &= 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N-k) & i &= 3, 4. \\ H_a : \beta_i &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Aitaren hezkuntza (FED)} \quad |t| = \left| \frac{11,1165 - 0}{5,57971} \right| = 1,9923 > 1,963 = t(714)_{0,05/2}$$

$$\text{Amaren hezkuntza (MED)} \quad |t| = \left| \frac{11,2765 - 0}{6,49354} \right| = 1,7366 < 1,963 = t(714)_{0,05/2}$$

Beraz, amaren hezkuntza ez da banaka esanguratsua, baina aitaren hezkuntza, berriz, esanguratsua da, % 5eko esangura-maila izanik.

Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_3 &= \beta_4 = 0 & F &= \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N-k) \\ H_a : \beta_3 &\neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \end{aligned}$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P2.2) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P2.1) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 2$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(107598000 - 106000000)/2}{106000000/(718-4)} = 6,83883 > 3,00834 = \mathcal{F}(2, 714)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, aitaren eta amaren hezkuntza aldagaiak batera esanguratsuak direla ondorioztatzen da.

9. Konfiantza-tarteak.

$$\begin{aligned} KT(\beta_3)_{95\%} &= \left[ \hat{\beta}_3 \pm t(N-k)_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3} \right] = \\ &= [11,1165 \pm t(718-4)_{0,05/2} \times 5,5797] = [0,161883 \quad 22,0711] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} KT(\beta_4)_{95\%} &= \left[ \hat{\beta}_4 \pm t(N-k)_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4} \right] = \\ &= [11,2765 \pm t(718-4)_{0,05/2} \times 6,4935] = [-1,47218 \quad 24,0252] \end{aligned}$$

$0 \in KT(\beta_4)_{95\%}$  eta  $0 \notin KT(\beta_3)_{95\%}$  betetzen direnez, aurreko ataleko ondorio bera erdiesten dugu: amaren hezkuntza ez da banaka esanguratsua, baina aitaren hezkuntza, berriz, esanguratsua da, % 95eko konfiantza izanik.

### HIRUGARREN ZATIA.

1. Adituaren susmoa  $\beta_3 = \beta_4$ , P2.2 ereduan ezarriz gero:

$$\begin{aligned} S_i &= \beta_1 + \beta_2 ED_i + \beta_3 FED_i + \beta_4 MED_i + u_i \rightarrow \\ S_i &= \beta_1 + \beta_2 ED_i + \beta_3 FED_i + \beta_3 MED_i + u_i \rightarrow \\ S_i &= \beta_1 + \beta_2 ED_i + \beta_3 (FED_i + MED_i) + u_i \end{aligned}$$

2. Kontrasterako hipotesia.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_3 &= \beta_4 & F &= \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N-k) \\ H_a : \beta_3 &\neq \beta_4 \end{aligned}$$

Estatistiko hori mugatze-koefizientearen arabera ere adierazi daiteke:

$$F = \frac{(R_{MG}^2 - R_M^2)/q}{(1 - R_{MG}^2)/(N-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N-k)$$

non  $R_{MG}^2$  murriztu gabeko ereduko (P2.2) mugatze-koefizientea den,  $R_M^2$  eredu murriztuko (P2.3) mugatze-koefizientea den, eta  $q = 1$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(0,120364 - 0,12)/1}{(1 - 0,120364)/(718 - 4)} = 0,000235316 < 3,85452 = \mathcal{F}(1, 714)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura maila izanik; beraz, aitaren eta amaren hezkuntza-urteek eragin bera dute banakoarentzat espero den soldatan.

3. P2.3 eredia; izan ere, egiazko murrizketa bat (P2.2) ereduan ezartzean lortzen den eredia da. Horregatik, baliokidea da eredu murriztu hori (P2.3) KTA irizpidearen bitartez estimatzea eta P2.2 eredia Karratu Txikien Murriztua irizpidearen bitartez estimatzea. Hortaz, erabilitako estimatzailea alboragabea da, eta P2.2 ereduan erabilitako KTA estimatzaileak baino bariantza txikiagokoa du.

## P3. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. ELOE:  $S_i = \beta_1 + \beta_2 A_i + \beta_3 X_i + u_i$   $u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2)$   $i = 1, 2, \dots, 336$ .
2. KTA irizpidearen araberako optimizazioa hondarren karratuen batura minimizatzean datza:

$$\sum \hat{u}_i^2 = \sum (S_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 A_i - \hat{\beta}_3 X_i)^2.$$

Lehen ordenako baldintzak lortzeko, hondarren karratuen baturaren deribatu partzialak ateratzen dira estimatzaile bakoitzarekiko, eta, ondoren, zerora berdintzen dira:

$$-2 \sum (S_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 A_i - \hat{\beta}_3 X_i) = 0 \Rightarrow \sum (S_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 A_i - \hat{\beta}_3 X_i) = 0$$

$$-2 \sum (S_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 A_i - \hat{\beta}_3 X_i) A_i = 0 \Rightarrow \sum (S_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 A_i - \hat{\beta}_3 X_i) A_i = 0$$

$$-2 \sum (S_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 A_i - \hat{\beta}_3 X_i) X_i = 0 \Rightarrow \sum (S_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 A_i - \hat{\beta}_3 X_i) X_i = 0$$

Ekuazio normalak:

$$\sum S_i = N \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum A_i + \hat{\beta}_3 \sum X_i$$

$$\sum S_i A_i = \hat{\beta}_1 \sum A_i + \hat{\beta}_2 \sum A_i^2 + \hat{\beta}_3 \sum X_i A_i$$

$$\sum S_i X_i = \hat{\beta}_1 \sum X_i + \hat{\beta}_2 \sum A_i X_i + \hat{\beta}_3 \sum X_i^2$$

3.  $\hat{\beta}_2 = 61,4109$ . Aurretiko esperientzia urte bat handitzean, langilearen soldata estimatua 61,4109 dolar handitzen da, ceteris paribus.

Espero izatekoa zen zeinua du; izan ere soldataren eta esperientziaren arteko erlazio positiboa adierazten du, eta, esperientzia gehiago izatean, soldata handiagoa da.

4.  $\hat{S}_5 = 3943,29 - 26,2979 \times 18 + 61,4109 \times 3 = 3654,160$  dolar.
5.  $\hat{S}(A = 3, X = 0) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \times 3 = 3943,29 - 26,2979 \times 3 = 3864,3963$  dolar.

6. Bi langileen arteko diferentzia bakarra adina denez, haien soldaten arteko diferentzia ere faktore horren araberakoa izango da; beraz,  $\hat{\beta}_2$  koefiziente estimatuaren interpretazioan oinarrituz:

$$\hat{\beta}_2 \times 10 = -26,2979 \times 10 = -262,979 \text{ dolarren diferentzia dute.}$$

$$7. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (S_i - \bar{S})^2} = 0,0493792$$

Interpretazioa: lagineko langileen uneko soldataren aldagarritasunaren % 4,93792 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez: adina eta aurretiko esperientzia.

8. Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \end{array} \quad F = \frac{R^2/q}{(1-R^2)/(N-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N-k)$$

$$F = \frac{0,0493792/2}{(1-0,0493792)/(336-3)} = 8,6487 > 3,02284 = \mathcal{F}(2, 333)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, adina eta aurretiko esperientzia aldagai azaltzaileak batera esanguratsuak dira uneko soldata azaltzeko.

Banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T-k) \quad i = 2, 3.$$

$$\text{Adina (A)} \quad |t| = \left| \frac{-26,2979 - 0}{15,8930} \right| = 1,655 < 1,96711 = t(336-3)_{0,05/2}$$

$$\text{Esperientzia (X)} \quad |t| = \left| \frac{61,4109 - 0}{14,9234} \right| = 4,115 > 1,96711 = t(336-3)_{0,05/2}$$

Ondorioz, esan dairteke adina aldagaia ez dela banaka esanguratsua baina aurretiko esperientzia aldagaia banaka esanguratsua dela, % 5eko esangura-maila izanik.

**BIGARREN ZATIA.**

## 1. ELOE:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 A_i + \beta_3 X_i + \beta_4 E_i + \beta_5 G_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, \dots, 336.$$

2. Hezkuntza-maila aldagaia kualitatiboa da, eta hiru kategoriatan banatuta dago. Horregatik, hiru fikzio-aldagai definitzen dira; bat, kategoria bakoitzerako.

Ereduan aldagai kualitatibo hori era egokian ezartzeko eta  $X$  datu-matrizean kolinealtasun-arazorik ez egoteko, P3.2 eredu zehaztu da. Eredu horretan termino konstantea dagoenez, fikzio-aldagaietatik bi soilik kontuan hartu dira: erdi-mailako ikasketak izatea ( $E$ ) eta goi-mailako ikasketak izatea ( $G$ ).

3.  $\beta_1 = E(S_i | A = 0, X = 0, E = 0, G = 0)$  : aurretiko esperientziarik ez duen eta oinarriko ikasketak dituen 18 urteko langile batentzat espero den uneko soldata.

$\beta_2$  : uneko soldatan espero den gehikuntza, langilearen adina urte bat handitzean (adin nagusitik gora); betiere, haren aurretiko esperientzia eta ikasketa-maila konstante mantenduz.

$\beta_3$  : uneko soldatan espero den gehikuntza, langilearen aurretiko esperientzia urte bat handitzean; betiere, haren adina eta ikasketa-maila konstante mantenduz.

$\beta_4$  : erdi-mailako ikasketak dituzten eta ikasketarik ez duten langileen soldaten artean espero den diferentzia, adin eta aurretiko esperientzia bera izanik.

$\beta_5$  : goi-mailako ikasketak dituzten eta ikasketarik ez duten langileen soldaten artean espero den diferentzia, adin eta aurretiko esperientzia bera izanik.

## 4.

$$X = \begin{bmatrix} & A & X & E & G \\ 1 & 15 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 36 & 14 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & 11 & 1 & 0 \\ 1 & 16 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 18 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 36 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 29 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 26 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 14 & 0 & 1 \\ 1 & 19 & 6 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$



5. Lagineko lehen langileak erdi-mailako ikasketak ditu; 33 urte ditu, eta haren aurretiko esperientzia 7 urtekoa da.

$$\begin{aligned}\widehat{S}_1 &= 3028,05 - 27,8645 \times 15 + 63,5817 \times 7 + 508,577 \times 1 + 2106,81 \times 0 = \\ &= 3563,733 \text{ dolar.}\end{aligned}$$

6. Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{aligned}H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \text{ edota } \beta_5 \neq 0\end{aligned}$$

$$F = \frac{R^2/q}{(1-R^2)/(N-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N-k)$$

$$F = \frac{0,235795/4}{(1-0,235795)/(336-5)} = 25,5325 > 2,39893 = \mathcal{F}(4, 331)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, adina, aurretiko esperientzia eta hezkuntza-maila aldagaiak batera esanguratsusak dira langilearen uneko soldata azaltzeko.

7. Banakako esanguraren kontrasteak.

**A.** Adina eta aurretiko esperientzia.

$$\begin{aligned}H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0\end{aligned} \quad t = \frac{\widehat{\beta}_i - 0}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N-k) \quad i = 2, 3.$$

$$\text{Adina (A)} \quad |t| = \left| \frac{-27,8645 - 0}{14,3069} \right| = 1,948 < 1,96716 = t(331)_{0,05/2}$$

$$\text{Esperientzia (X)} \quad |t| = \left| \frac{63,5817 - 0}{4,732} \right| = 3,4048 > 1,96716 = t(331)_{0,05/2}$$

Hortaz, ondoriozta daiteke adina aldagaia ez dela banaka esanguratsua, baina aurretiko esperientzia aldagaia esanguratsua dela, % 5eko esangura-maila izanik.

- B.** Hezkuntza-maila aldagaia ez da esanguratsua izango, baldin eta langilearen gain-erako ezaugarriak berdina izatean, eta ikasketak-maila desberdineko langileentzat espero den soldata berdina bada.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_4 = \beta_5 = 0 \\ H_a : \beta_4 \neq 0 \text{ edota } \beta_5 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P3.2) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P3.1) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 2$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(1146540000 - 921708000)/2}{921708000/(336 - 5)} = 40,3712 > 3,02301 = \mathcal{F}(2, 331)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten denez, % 5eko esangura-maila izanik, hezkuntza-maila aldagaia esanguratsua da langileentzat espero den soldata azaltzeko, behin beste aldagai azaltzaileak ereduari daudenean.

8. P3.2 ereduari, hezkuntza-maila aldagai azaltzailea esanguratsua da soldatak zehazteko. Emaitza horrek P3.1 ereduari txarto zehaztuta dagoela adierazten du, zeren ez baita kontuan hartu aldagai azaltzaile esanguratsu bat.

P3.1 ereduari erabilitako KTA estimatzaileak eta perturbazioen bariantzarako erabilitako estimatzailea alboratuak dira. Gainera, kontrasterako estatistikoek ez dituzte ohiko  $t$  eta  $F$  banaketak jarraitzen, eta, ondorioz, ez dira baliagarriak inferentzia egiteko.

## P4. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

- ELOE:  $P_i = \beta_1 + \beta_2 E_i + \beta_3 A_i + \beta_4 B_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, 2, \dots, 321.$
- LEZ: 
$$\begin{aligned} \hat{P}_i &= 8,7629 - 0,3075 E_i + 0,3280 A_i + 12,2529 B_i \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) &\quad (6,2563) \quad (0,0568) \quad (0,0357) \quad (3,2074) \\ R^2 &= 0,529875 \quad HKB = 281066. \end{aligned}$$

3.  $\beta_4$  koefizientearen interpretazioa:

$\beta_4$  : prezioan espero den aldaketa etxebizitzak bainugela bat gehiago izateagatik, azalera eta eraikuntza-urteen kopurua konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_4 = 12,25$  mila dolar denez, bainugela bat gehiago izatea 12250 dolar baliozkotzen da, gainerako ezaugarriak konstante mantenduz.

$$4. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (P_i - \bar{P})^2} = 0,529875.$$

Interpretazioa: etxebizitzaren salmenta-prezioen aldagarritasunaren % 52,99 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen (eraikuntza-urteak, azalera eta bainugela kopurua) aldagarritasunaren bitartez.

$$5. \hat{\sigma}_u^2 = \frac{HKB}{N - k} = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - k} = \frac{281066}{321 - 4} = 886,64.$$

6. Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

$$F = \frac{0,5299/3}{(1 - 0,5299)/(321 - 4)} = 119,096 > 2,64 = \mathcal{F}(3, 317)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, eraikuntza-urteak, azalera eta bainugela kopurua aldagai azaltzaileak batera esanguratsiak dira etxebizitzaren salmenta-prezioa azaltzeko.

7. Banakako esanguraren kontrastea: eraikuntza-urteak.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{-0,3075 - 0}{0,05688} \right| = 5,4066 > 1,96748 = t(321 - 4)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, eraikuntza-urtea aldagaia banaka esanguratsua da etxebizitzaren salmenta-prezioa azaltzeko.

8. Kontrasterako hipotesia (500 dolar = 0,5 mila dolar).

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_3 = 0,5 \\ H_a : \beta_3 \neq 0,5 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_3 - 0,5}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{0,3280 - 0,5}{0,0357} \right| = 4,8179 > 1,96748 = t(321 - 4)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Etxebizitzak metro karratu bat gehiago izateagatik, beste aldagaiak konstante mantenduz, ez dago lagin-ebidentziarik 500 dolar ordaintzeko.

9. Murrizketa lineal baten kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = -\beta_3 &\Rightarrow \beta_2 + \beta_3 = 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - 0}{\sqrt{\widehat{\text{bar}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \\ H_a : \beta_2 \neq -\beta_3 &\Rightarrow \beta_2 + \beta_3 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\text{bar}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) &= \widehat{\text{bar}}(\hat{\beta}_2) + \widehat{\text{bar}}(\hat{\beta}_3) + 2\widehat{\text{kob}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \\ &= 0,0032357 + 0,00128121 + 2 \times (-0,000556436) = 0,003 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{(-0,3075 + 0,3280) - 0}{\sqrt{0,003}} \right| = 0,3746 < 1,96748 = t(321 - 4)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, eraikuntza-urteek duten eragin negatiboa eta azalera duen eragin positiboa konpentsatu egiten dira. Beraz, agenteak dioenarekin ados gaude.

10. Aurreko atalean egindako kontrastearen emaitza kontuan izanik,  $\beta_2 + \beta_3 = 0$  murrizketa kontuan hartzen duen eredu proposatuko genuke. Hona hemen eredu murriztu hori:

$$\begin{aligned} P_i &= \beta_1 + \beta_2 E_i + \beta_3 A_i + \beta_4 B_i + u_i \quad \rightarrow \\ P_i &= \beta_1 + \beta_2 E_i - \beta_2 A_i + \beta_4 B_i + u_i \quad \rightarrow \\ P_i &= \beta_1 + \beta_2 (E_i - A_i) + \beta_4 B_i + u_i \end{aligned}$$

Eredu murriztu hori KTA irizpidearen bitartez estimatzea eta hasierako eredu  $\beta_2 + \beta_3 = 0$  murrizketa kontuan izanik KTM irizpidearen bitartez estimatzea baliokidea da. Murrizketa egiazkoa dela badakigunez, Karratu Txikien Murriztua estimatzailearen propietateak hauek dira: linealak dira, alboragabeak dira eta hasierako eredu KTA estimatzaileak baino bariantza txikiagoa dute.

11. Ondo zehaztuta dagoen erregresio lineal orokorreko eredu bateko hondarrek – hau da, oinarrizko hipotesiak betetzen dituen eredu baten KTA hondarrek – perturbazioen antzerako portaera dute: zeroren inguruan aleatorioki mugitzen dira, bariantza konstante batekin eta inolako joerarik gabe.

P4.1 eredu KTA hondarrek analizatzean, argi ikus daiteke ez direla uniformeki mugitzen zeroren inguruan. Izatez, laginaren lehen zatiko hondar gehienak negatiboak dira, eta bigarren zatiko gehienak, aldiz, positiboak. Ondorioz, susma dezakegu oinarrizko

hipotesiren bat ez dela betetzen. Baliteke ereduaren alde sistematikoan zehaztapen-errorearen bat izatea eta datuak bi multzotan banatzen dituen aldagai bat kontuan ez hartzea.

## BIGARREN ZATIA.

1. Zabor-errautegia martxan jartzea aldagaia bi kategoriako aldagai kualitatiboa da:

- zabor-errautegia 1981. urtetik aurrera existitzen da,
- zabor-errautegia ez zen existitzen 1981. urtea baino lehen.

Aldagai kualitatibo hori erudian kontuan hartzeko, fikzio-aldagai bat eraiki behar da aipatutako kategoria bakoitzarentzat:

$$D_i^{81} = \begin{cases} 1 & i \in \text{1981. urtean saldutako etxebizitza} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

$$D_i^{80} = \begin{cases} 1 & i \in \text{1980. urtean saldutako etxebizitza} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

Eredua zehaztean kolinealtasun zehatzaren arazorik ez izateko, bi fikzio-aldagai horietatik bakarra sartu dugu erudian, zeren ereduak bai baitu termino konstante bat jadanik:

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 E_i + \beta_3 A_i + \beta_4 B_i + \beta_5 D_i^{81} + u_i.$$

Hala,  $D^{81}$  fikzio-aldagaiak zero balioa hartzen du lagineko lehen behaketan (1980. urtean saldutako etxebizitza delako), eta bat balioa, berriz, lagineko azken behaketan (1981. urtean saldutakoa delako).

2. Definitu den  $ERR$  fikzio-aldagaia eta aurretik erabilitako  $D^{81}$  fikzio-aldagaia berdinak dira.

$\hat{\beta}_5$ : 1981. eta 1980. urteetan saldutako etxebizitzaren salmenta-prezioetan dagoen diferentzia estimatua, gainerako ezaugarriak (eraikuntza-urteak, azalera eta bainugela kopurua) konstante mantenduz.

Hasiera batean, errautegia martxan jartzeak etxebizitzaren prezioan eragin negatiboa izatea espero da. Koeffiziente estimatua, berriz, positiboa da. Beraz, ingurune komunikabidean hobekuntzaren eragin positiboa errautegiaren eragin negatiboa baino handiagoa izan da.

3. Banakako esanguraren kontrastea: errautegia martxan jartzea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_5 &= 0 \\ H_a : \beta_5 &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_5 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_5}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{35,7839 - 0}{2,8174} \right| = 12,7007 > 1,9675 = t(321 - 5)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, erraustegia martxan jartzea aldagaia banaka esanguratsua da etxebizitzaren salmenta-prezioa azaltzeko, behin erudian gainerako aldagaiak daudenean.

4. Grafiko hori P4.1 ereduko hondarren grafikoarekin alderatuz, ikus dezakegu P4.2 ereduko hondarrak zeroren inguruan aleatorioki banatuta agertzen direla. Beraz, aurreko grafikoko bi taldeak bateratuta agertzen dira. Erudian sartutako aldagai berriak bi talde horien arteko diferentzia jasotzean berzehatu den ereduko hondarren portaera uniforme da. Hala, ondoriozta dezakegu txarto zehaztuta zegoela, P4.1 erudian ez baita kontuan hartu aldagai esanguratsu bat.

### HIRUGARREN ZATIA.

1. P4.3 erudia:  $P_i = \beta_1 + \beta_2 E_i + \beta_3 E_i^2 + \beta_4 A_i + \beta_5 B_i + \beta_6 ERR_i + u_i$ .

Eredu horrek eta P4.2 ereduak dituzten aldagai azaltzaileak berdinak dira. Haien arteko diferentzia eraikuntza-urteak kontuan hartzean aukeratu den forma funtzionalean datza. P4.3 erudian, kontuan hartu dugu etxebizitzaren prezioaren eta eraikuntza-urteen arteko erlazioa koadratikoa izan daitekeela, eta horregatik hartu da kontuan  $E^2$  terminoa. Ondorioz, etxebizitzaren eraikuntza-urteak gehitzean, prezioa jaitsi egiten da, baina ez era lineal batean, zeren jaitsiera makaltzen baitoa eraikuntza-urteak bete ahala.

2. Informazio horretan oinarrituz, P4.3 ereduak oinarritzko hipotesi guztiak betetzen ditu. Ereduaren linealtasunaren hipotesiak eskatzen duenez erudia koefizienteekiko lineala izatea, hipotesi hori betetzen da, nahiz eta ez izan aldagai azaltzaileekiko lineala. Termino berriak ez die eragiten koefizienteen estimatzaileei, baina bai, ordea, koefizienteen interpretazioei. Eredu horretan,  $E$  eta  $E^2$  terminoei dagozkien koefizienteak ezin dira ohiko biderkatzaileak balira bezala interpretatu.
3. Banakako kontrastea: eraikuntza urteak.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $q = 2$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko (P4.3) ereduko hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$P_i = \beta_1 + \beta_4 A_i + \beta_5 B_i + \beta_6 ERR_i + u_i.$$

$$F = \frac{(198008 - 178257)/2}{178257/(321 - 6)} = 17,4505 > 3,0244 = \mathcal{F}(2, 315)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, eraikuntza-urteak aldagai esanguratsua da etxebizitzaren prezioa azaltzeko, behin gainerako aldagaiak ereduaren dauden.

4. Eraikuntza-urteak etxebizitzaren prezioan duen eragina etxebizitzaren urte kopuruaren arabera da:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial E_i} = \hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 E_i = -0,7 + 2 \times 0,0033 E_i = -0,7 + 0,0066 E_i$$

$$5 \text{ urte} \quad \frac{\partial \hat{P}}{\partial E_i} = -0,7 + 0,0066 \times 5 = -0,667 \text{ mila dolar}$$

$$50 \text{ urte} \quad \frac{\partial \hat{P}}{\partial E_i} = -0,7 + 0,0066 \times 50 = -0,37 \text{ mila dolar}$$

5. Eraikuntza-urteen eta etxebizitzaren prezioen arteko erlazioa ez da lineala izango, baldin eta  $E_i^2$  terminoa estatistikoki esanguratsua bada, hau da,  $\beta_3$  desberdin zero bada.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_3 &= 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_3 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \\ H_a : \beta_3 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{0,00328 - 0}{0,000882} \right| = 3,7176 > 1,96752 = t(321 - 6)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz eraikuntza-urteen eta etxebizitzaren prezioen arteko erlazioa ez da lineala.

6. P4.3 ereduaren, aldagai guztiak banaka esanguratsusak dira: hirugarren atalean, eraikuntza-urteen esangura kontrastatuta dago, eta, estimatutako ereduaren emaitzak ikusirik, balio kritikoa baino handiagoak direnez bai azalera, bai bainugela kopurua, eta bai  $ERR$  aldagaien koefizienteen t-estatistikoak, gainerako aldagaiak ere esanguratsusak dira. Aurreko atalean, kontrastatuta dagoenez eraikuntza-urteen eta etxebizitzaren prezioen arteko erlazioa ez dela lineala,  $E^2$  terminoa ereduaren sartu behar da. Hortaz, P4.3 ereduaren aukeratuko genuke, eta, besteren bat aukeratzeko badugu, arazoak izango ditugu.

P4.1 ereduan, zehaztaperen txarra egin da; alde batetik, ez delako kontuan hartu zabor-errastegia martxan jartzea aldagai kualitatiboa, eta, bestetik, erlazio lineala hartu delako kontuan, eraikuntza-urteen eta etxebizitzaren prezioen arteko erlazio koadratikoa kontuan hartu beharrean. P4.2 ereduan, berriz, azken arazo hori agertzen da bakarrik, hau da, forma funtzionala gaizki zehaztu da. Horrenbestez, bi ereduetako koefizienteen estimatzaileak alboratuak dira; perturbazioen bariantzaren estimatzailea ere alboratua da, eta kontrastetarako erabili diren estatistikoak ez dira baliagarriak, zeren ez baitituzte aipatutako banaketak jarraitzen.

Hori guztia dela, eta P4.3 eredua aukeratuko dugu.

7. Etxebizitzaren prezioa azaltzeko, garrantzizkoak dira etxebizitzaren ezaugarriak. Espero bezala, zenbat eta ezaugarri hobeak, azalera handiagoa eta bainugela gehiago izan, orduan eta garestiagoa da etxebizitza.

Bestalde, etxebizitzaren eraikuntza-urteak ere esanguratsuak dira: etxebizitza zenbat eta zaharragoa izan, orduan eta gutxiago balio du, gainerako ezaugarriak konstante mantenduz. Baina prezioen jaitsiera ez da urteekiko proportzionala, urteak igaro heinean jaitsiera hori txikitu egiten baita. Izatez, etxebizitza “zaharra” izatetik “aintzinakoa” izatera pasatzean, jaitsiera hori igoera bihur daiteke.

Azkenik, etxebizitzaren ingurunean zabor-errastegi bat eraikitzearen ondorioz, salmentak-prezioak igo egin dira. Eraitza hori dela eta, komunikabide onak izateak errastegia ondoan izateak baino eragin handiagoa izan du, eta, horregatik, prezioak jaitsi beharrean, igo egin dira.

## P5. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. P5.1 eredua:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 dq1_t + \beta_3 dq2_t + \beta_4 dq3_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 2001:1, \dots, 2008:4.$$

P5.1 ereduan, aldagai azaltzaile bakar bat dago, urtaroa, zeinak espero diren salmentak urteko urtaroen arabera aldatzen direla jasotzen duen.

Urtarora aldagai kualitatiboa, da eta lau kategoria ditu; bat hiruhileko bakoitzarentzat. Horregatik, lau fikzio-aldagai sortu dira, eta,  $X$  datu-matrizearen kolinealtasunaren arazoa saihesteko, lau horietatik hiru bakarrik sartu dira ereduan, ereduan konstante bat baitago. Izatez, azken hiruhilekoko fikzio-aldagaia kanpoan utzi da, eta, ondorioz, P5.1 ereduko koefizienteak interpretatzeko azken hiruhilekoa hori izango da oinarria.



$\beta_1 = E(S_t | dq1 = 0, dq2 = 0, dq3 = 0)$  : azken hiruhilekoan espero diren salmentak.

$\beta_2 = E(S_t | dq1 = 1) - E(S_t | dq1 = 0, dq2 = 0, dq3 = 0) = (\beta_1 + \beta_2) - \beta_1$   
= lehen eta azken hiruhilekoetan espero diren salmenten arteko diferentzia.

$\beta_3 = E(S_t | dq2 = 1) - E(S_t | dq1 = 0, dq2 = 0, dq3 = 0) = (\beta_1 + \beta_3) - \beta_1$   
= bigarren eta azken hiruhilekoetan espero diren salmenten arteko diferentzia.

$\beta_4 = E(S_t | dq3 = 1) - E(S_t | dq1 = 0, dq2 = 0, dq3 = 0) = (\beta_1 + \beta_4) - \beta_1$   
= hirugarren eta azken hiruhilekoetan espero diren salmenten arteko diferentzia.

2. Urtarora aldagaia ez da esanguratsua izango, baldin eta hiruhileko guztietan salmenta kopuru bera izatea espero bada:

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0$$

Urtarora aldagaia P5.1 ereduko aldagai azaltzaile bakarra denez, aldagai horren banakako esanguraren kontrastea egitea eta ereduaren baterako esanguraren kontrastea egitea baliokidea da. Hortaz, estatistiko hau erabili dezakegu:

$$F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

$$F = \frac{0,5318/3}{(1 - 0,5318)/(32 - 4)} = 12,1156 > 2,94669 = \mathcal{F}(3, 28)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, urtarora aldagaia esanguratsua da espero diren salmentak azaltzeko.

3.  $\widehat{S}_{urtea} = \widehat{S}_{1HH} + \widehat{S}_{2HH} + \widehat{S}_{3HH} + \widehat{S}_{4HH}$

P5.1 ereduko koefizienteen interpretazioan oinarrituz (ikus lehen atala):

$$\widehat{S}_{urtea} = (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2) + (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_3) + (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_3) + \widehat{\beta}_1 = 5419,375 \text{ mila euro}$$

## BIGARREN ZATIA.

1. P5.3 eredua:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 dq1_t + \beta_4 dq2_t + \beta_5 dq3_t + u_t \quad t = 2001:1, \dots, 2008:4.$$

P5.3 ereduak bi aldagai azaltzaile ditu: publizitatean egindako gastua eta urtarora. P5.1 ereduak aldagai azaltzaile bakarra du: urtarora. P5.2 ereduak ere bakarra du: publizitatean egindako gastua.

2.  $X$  datu-matrizearen ordena ( $32 \times 5$ ) da, zeren laginean 32 behaketa baitaude eta ereduko koefizienteak bost baitira.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 252,6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 272,4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 270,9 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 273,9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 268,9 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 356,4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Baterako esanguraren kontrastea.

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

$$H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \text{ edota } \beta_5 \neq 0$$

$$F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

$$F = \frac{0,7298/4}{(1 - 0,7298)/(32 - 5)} = 18,231495 > 2,72777 = \mathcal{F}(4, 27)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, publikitatean egindako gastua eta urtaroa aldagaiak batera esanguratsiak dira hozkailuentzat espero diren salmentak azaltzeko.

Banakako esanguraren kontrastea: publizitate-gastua.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k)$$

$$|t| = \left| \frac{2,773 - 0}{0,623} \right| = 4,451043339 > 2,05183 = t(32 - 5)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, publikitatean egindako gastua banaka esanguratsua da hozkailuentzat espero diren salmentak azaltzeko, behin ereduan urtaroa aldagaia dagoenean.

Banakako esanguraren kontrastea: urtaroa.

$$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

$$H_a : \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \text{ edota } \beta_5 \neq 0$$

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P5.3) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P5.2) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 3$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(1377140 - 465085)/3}{465085/(32 - 5)} = 17,64945 > 2,96035 = \mathcal{F}(3, 27)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, urtaroa banaka esanguratsua da hozkailuentzat espero diren salmentak azaltzeko, behin publizitatean egindako gastua aldagaia ereduan dagoenean.

4. Salmentetan estimatu den gehikuntza = 2,773 mila euro = 2773 euro. Arrazoa:  $\hat{\beta}_2 = 2,773$  publizitate-gastua unitate bat (100 euro) handitzean, salmentetan estimatzen den gehikuntza adierazten da, urteko edozein hiruhilekotan.

5.  $\hat{S}_{1HH} = 370,164 + 2,733 P_t + 86,080 = (456,224 + 2,733 P_t)$  mila euro.

$P_t = 1700$  euro denean:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1HH} &= 370,164 + 2,733 P_t + 86,080 = 456,224 + 2,733 \times 17 = \\ &= 502,685 \text{ mila euro.} \end{aligned}$$

6. Konfiantza-tartea.

$$\begin{aligned} KT(\beta_2)_{\%95} &= \left[ \hat{\beta}_2 \pm t(T - k)_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} \right] = [2,773 \pm t(32 - 5)_{0,05/2} \times 0,623] = \\ &= [2,773 \pm 1,27829009] = [1,494701 \quad 4,05129009] \text{ mila euro} \end{aligned}$$

7.  $\Delta P = 1$  euro  $\rightarrow \Delta S = 50$  euro?

$$\Delta P = 100 \text{ euro} \rightarrow \Delta S = 5000 \text{ euro} = 5 \text{ mila euro} \Rightarrow \hat{\beta}_2 = 5$$

Aurreko atalean kalkulaturako  $KT(\beta_2)_{\%95}$  konfiantza-tartean bost balioa ez dagoenez, ondoriozta daiteke espero diren salmentak ezin direla 50 euro igo, publizitatean egindako gastua euro bat handitzean, % 95eko konfiantza izanik.

8. Publizitatean egindako gastuaren gehikuntza: 250 euro.

$$\hat{S}_t = 370,164 + 2,773 \times P_t + 86,08 dq1_t + 328,578 dq2_t + 411,345 dq3_t$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{t+4} &= 370,164 + 2,773 \times P_{t+4} + 86,08 dq1_{t+4} + 328,578 dq2_{t+4} + \\ &+ 411,345 dq3_{t+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 \hat{S}_{t+4} &= \hat{S}_{t+4} - \hat{S}_t = \\ &= 2,773 \times \Delta_4 P_{t+4} + 86,08 \Delta_4 dq1_{t+4} + 328,578 \Delta dq2_{t+4} + \\ &+ 411,345 \Delta dq3_{t+4} = 2,773 \times 2,50 = 6,9325 \text{ mila euro} \end{aligned}$$

Lehen hiruhilekoa:  $\Delta_4 \widehat{S}_{t+4} = 6,9325$  mila euro.

Hiruhileko bat eta aurreko urteko hiruhileko bera alderatzean, publizitate-gastuan egin den gehikuntzaren ondorioz gehikuntza bera jasotzen da salmentetan, hau da, gehikuntza hori ez da urtaroaren araberakoa.

9. 2009ko lehen hiruhilekoko salmentaren auresan-tartea:

$$KT(S_{2009:1})_{\%95} = \left[ \widehat{S}_{2009:1} \pm t(32-5)_{0,025} \hat{\sigma}_{2009:1} \right]$$

non:

$$\widehat{S}_{2009:1} = 370,164 + 86,080 = 456,244 \text{ mila euro}$$

$$\hat{\sigma}_{2009:1}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \left[ 1 + X'_{2009:1} (X'X)^{-1} X_{2009:1} \right] =$$

$$= \frac{465085}{32-5} \left[ 1 + [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] (X'X)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 49003,79 \text{ diren.}$$

$$KT(S_{2009:1})_{\%95} = \left[ 456,244 \pm 2,052 \sqrt{49003,79} \right] = [2,03 \quad 910,25]$$

2009ko lehen hiruhilekoko salmentaren auresan-tartean zero baliorik ez dagoenez, ondoriozta daiteke aholkulariak dioena ez dela arrazoizkoa, % 95eko konfiantza izanik.

## HIRUGARREN ZATIA.

1. P5.4 erudian, bigarren eta hirugarren hiruhilekoetako fikzio-aldagaiak bakarrik sartu dira, eta kanpoan utzi dira lehen eta azkeneko hiruhilekoetakoak. Sartutako murrizketaren ( $\beta_3 = 0$ ) ondorioz, lehen eta azken hiruhilekoen tratamendua berdina da. Bi hiruhileko horietan espero diren salmentetan ez dago desberdintasunik, baldin eta beste ezaugarriak berdinak badira. Ereduaren zehaztapenak, bigarren, hirugarren eta gainerako (lehen eta azkena) hiruhilekoak bereizten ditu.

2. P5.3 erudian ezarritako murrizketa:  $\beta_3 = 0$

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_3 &= 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_3 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T-k) \\ H_a : \beta_3 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{86,08 - 0}{65,843} \right| = 1,307 < 2,05183 = t(32-5)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, lehen eta azken hiruhilekoetan, salmenta kopuru bera espero da publizitate-gastu berarentzat.

3.  $\widehat{S}_{1HH} = 431,890 + 2,706 \times 3 = 440,008$  mila euro.  
 $\widehat{S}_{2HH} = 431,890 + 2,706 \times 3 + 285,319 = 725,327$  mila euro.  
 $\widehat{S}_{3HH} = 431,890 + 2,706 \times 3 + 368,554 = 808,562$  mila euro.  
 $\widehat{S}_{4HH} = \widehat{S}_{1HH} = 431,890 + 2,706 \times 3 = 440,008$  mila euro.

### LAUGARREN ZATIA.

P5.4 eredia erabiliko dugu enpresako hozkailuentzat espero den salmenta azaltzeko.

P5.3 eredian aldagaiak esanguratsuak direla ondorioztatu dugunez (publizitate-gastua eta urtaroa aldagaien banakako eta baterako esangura egin ondoren), P5.1 eta P5.2 ereduak baztertu ditugu, bietan ere ez baita da kontuan hartu aldagai esanguratsu bat. Azken bi eredu horietan erabili diren KTA estimatzaileak alboratuak dira; perturbazioaren bariantzaren estimatzailea ere alboratua da, eta, kontrasteetan erabili diren estatistikoek jarraitzen ez dituztenez adierazitako banaketak, inferentzia ez da baliagarria.

Azkenik, P5.3 eta P5.4 alderatzean, aldagai azaltzaile berak hartzen dituzte kontuan, baina, P5.4 eredian, egiazko murrizketa bat ezarri da. Ondorioz, P5.4 eredia KTA irizpidearen bitartez estimatzea eta P5.3 eredia murrizketa kontuan izanik estimatzea – hau da, KTM irizpidearen bitartez estimatzea – baliokidea da. P5.4 eredia aukeratu dugu; izan ere, KTM estimatzailea alboragabea izanik (murrizketa egiazkoa dela kontrastatu delako), KTA estimatzailearen bariantza baino txikiagoa da.

## P6. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. ELOE:  $I_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 L_t + \beta_4 S_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1, 2, \dots, 23.$

2. LEZ:

$$\widehat{I}_t = 33,7991 - 0,2223 P_t + 0,0249 L_t + 0,0129 S_t \quad R^2 = 0,911653 \quad HKB = 105,657.$$

$$(\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}}) \quad (4,2865) \quad (0,126) \quad (0,059) \quad (0,005)$$

$\widehat{\beta}_1 = 33,7991$  : itsaskientzat espero den salmenta estimatua, enpresaren prezioa, lehiako enpresen prezioa eta lekuko langileen batez besteko soldata zero direnean.

$\hat{\beta}_2 = -0,2223$  : enpresak saldutako itsaskien batez besteko prezioa euro bat garestitzean, salmentak 0,2223 mila kilo jaisten direla estimatzen da, lehiako enpresen prezioa eta lekuko langileen batez besteko soldata konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_3 = 0,0249$  : lehiako enpresen prezioa euro bat garestitzean salmentak 0,0249 mila kilo handitzen direla estimatzen da, enpresaren prezioa eta lekuko langileen batez besteko soldata konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_4 = 0,0129$  : lekuko langileen batez besteko soldata ehun euro igotzean salmentak 0,0129 mila kilo igotzen direla estimatzen da, enpresaren eta lehiako enpresen prezioa konstante mantenduz.

$$3. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sum (I_t - \bar{I})^2} = 0,911653$$

Interpretazioa: itsaskientzat espero diren salmenten aldagarritasunaren % 91,1653 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez, hau da, enpresaren eta lehiako enpresen itsaskiaren salmenta-prezioen eta lekuko langileen batez besteko soldataren aldagarritasunaren bitartez.

4. Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \end{array} \quad F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

$$F = \frac{0,911653/3}{(1 - 0,911653)/(23 - 4)} = 65,3533 > 3,12735 = \mathcal{F}(3, 19)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, enpresaren eta lehiako enpresen salmenta-prezioak eta lekuko langileen batez besteko soldata batera esanguratsuak dira.

5. Banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k) \quad i = 2, 3, 4.$$

Enpresaren prezioa ( $P$ ):

$$|t| = \left| \frac{-0,2223 - 0}{0,12} \right| = 1,762 < 2,093 = t(23 - 4)_{0,05/2}$$

Lehiako enpresen prezioa ( $L$ ):

$$|t| = \left| \frac{0,0249 - 0}{0,059} \right| = 0,4229 < 2,093 = t(23 - 4)_{0,05/2}$$

Soldata ( $S$ ):

$$|t| = \left| \frac{0,0129 - 0}{0,00503} \right| = 2,577 > 2,093 = t(23 - 4)_{0,05/2}$$

Kontrasteen emaitzetatik ondorioztatzen da prezioaren bi aldagaiak ez direla banaka esanguratsuak baina soldata banaka esanguratsua dela, % 5eko esangura-maila izanik.

Itsaskien eskaria analizatzen ari garenez, hasiera batean espero genezake soldata eta prezioa aldagaiak esanguratsuak izatea. Soldatari dagokionez, espero genuen emaitza lortu dugu: aldagai esanguratsua da, eta zeinu positiboa du. Prezioaren bi aldagaiei dagokienez, ez dugu lortu espero genuen emaitzarik; bereziki, ondasun beraren prezioa esanguratsua ez izatea.

6. Kontrasterako hipotesia (175 kilo = 0,175 mila kilo).

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_3 &= 0,175 & t &= \frac{\hat{\beta}_3 - 0,175}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k) \\ H_a : \beta_3 &< 0,175 \end{aligned}$$

$$t = \frac{0,0249 - 0,175}{0,05908} = -2,5406 < -1,72913 = t(23 - 4)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, lekuko langileen batez besteko soldata konstante mantenduz, ez da posible lehiako enpresen prezioa euro bat garestitzean itsaskien salmenta 175 kilo igotzea.

7.  $\beta_4$  koefizientearen interpretazioa:

$\beta_4 = \frac{\partial E(I_t)}{\partial S_t}$  : lekuko langileen batez besteko soldata 100 euro igotzean espero diren salmentei dagokien gehikuntza, gainerako aldagaiak konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_4 = 0,0129$  mila kilogramo. Hortaz, lekuko langileen batez besteko soldata 100 euro jaistean, salmentetan estimatzen den jaitsiera 0,0129 mila kilogramo (12,9 kilogramo) da, beste aldagaiak konstante mantenduz.

## 8. ELOE:

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 L_t + \beta_4 S_t + \beta_5 R_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1, 2, \dots, 23.$$

Ereduko bi aldagai azaltzaileen arteko korrelazio-koefiziente bakuna horren altua izateak adierazten du kolinealtasun altua dagoela. Nahiz eta arazo hori agertu, oinarritzko hipotesiak betetzen direnez, eredua KTA irizpidearen bitartez estima daiteke; erabilitako estimatzailea lineala, alboragabea eta (lineal eta alboragabe guztietatik) bariantza txikienekoa litzateke.

Ondorio bakarra da errentaren eta soldataren artean kolinealtasun altua dagoela. Lagin-arazo hori dela eta, KTA estimatzaileen bariantzak altuak dira, eta banakako esanguraren kontrasteetako  $H_0$  ez baztertzeko joera dago.

9. P6.1 ereduko hondarrak analizatzean, ikusten da ez direla zeroren inguruan uniformeki banatzen. Izatez, portaera argi bat erakusten dute: lagineko lehen eta azken zatietako hondarrak negatiboak dira; erdikoak, berriz, positiboak. Ondorioz, susma daiteke, oinarritzko hipotesiren bat ez dela betetzen. Baliteke ereduaren zati sistematikoa zehaztean aldagai esanguratsuen bat kontuan hartu ez izana.

**BIGARREN ZATIA.**

1. P6.2 eredu:

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 PUB_t + \beta_3 P_t + \beta_4 L_t + \beta_5 S_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1, 2, \dots, 23.$$

P6.1 ereduarekin alderatuz, P6.2 ereduak publizitate-kanpaina aldagai azaltzailea barneratu du, eta besteak, berriz, ez. Aldagai azaltzaile hori bi kategoriako (kanpaina egitea eta ez egitea) aldagai kualitatiboa da. Kategoria bakoitzarentzat fikzio-aldagai bat definitu behar da, eta haietatik bakarra sartu da erudian, kolinealtasun zehatzaren arazoa saihesteko, ereduak bai baitu jadanik termino konstantea. Zehaztutako erudian,  $PUB$  fikzio-aldagaia sartu da.

2.  $\hat{\beta}_2 = 4,2235$ : publizitate-kanpaina egitean, 4,2235 mila kilo gehiago saldu da, beste aldagaien (bi prezioak eta soldata) balioak berdinak izanik. Hau da, ezaugarri berak izanik, kanpaina egitearen ondorioz 4,2235 mila kilo gehiago saldu dela estimatzen da.
3. Mutur bateko kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 &= 0 \\ H_a : \beta_2 &> 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k)$$



$$t = \frac{4,2235 - 0}{0,34863} = 12,1147 > 1,73406 = t(23 - 5)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Hortaz, publizitate-kanpainak eragin positiboa izan du salmentetan.

4. Banakako esanguraren kontrastea: itsaskiaren prezioa.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_3 = 0 \\ H_a : \beta_3 \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_3 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k)$$

$$|t| = \left| \frac{-0,2754 - 0}{0,04307} \right| = 6,3954 > 2,10092 = t(23 - 5)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, itsaskiaren batez besteko prezioa banaka esanguratsua da.

Lehen zatiko bosgarren atalean, itsaskiaren batez besteko prezioa ez zen banaka esanguratsua; orain, ordea, esanguratsua da salmentak azaltzeko. Horren arrazoia da P6.1 eredia txarto zehaztuta dagoela, ez baita kontuan hartu publizitate-kanpaina aldagai azaltzaile esanguratsua. Ondorioz, eta, frogatu daitekeenez, ELOE batean aldagai esanguratsuren bat kontuan hartzen ez bada, erabilitako KTA estimatzaileak alboratuak izango dira, perturbazioen bariantzaren estimatzailea alboratua izango da, eta, ohiko estatistikoek  $t$  edo  $F$  banaketak jarraitzen ez dituztenez, inferentzia baliogabeturik gelditzen da.

5. Murrizketa linealaren kontrastea.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_3 = -\beta_4 \quad (\beta_3 + \beta_4 = 0) \\ H_a : \beta_3 \neq -\beta_4 \quad (\beta_3 + \beta_4 \neq 0) \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 - 0}{\sqrt{\widehat{\text{bar}}(\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4)}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\text{bar}}(\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4) &= \widehat{\text{bar}}(\hat{\beta}_3) + \widehat{\text{bar}}(\hat{\beta}_4) + 2\widehat{\text{kob}}(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4) = \\ &= 0,0018554 + 0,000415674 + 2 \times (-0,000156414) = 0,001958 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{(-0,2754 + 0,0687) - 0}{\sqrt{0,001958}} \right| = |-4,67| > 2,101 = t(23 - 5)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Hala, lehiako enpresen batez besteko prezioa jaistearren eragina enpresaren batez besteko prezioa kopuru bera jaitsiz konpentsa daiteke.



### 3. P6.3 ereduaren proposatzen diren kontrasteak.

#### 3.1. Banakako esanguraren kontrastea: urtaroa.

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = 0 \\ H_a &: \beta_6 \neq 0 \text{ edota } \beta_7 \neq 0 \text{ edota } \beta_8 \neq 0 \end{aligned}$$

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P6.3) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P6.2) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 3$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(11,5427 - 8,13216)/3}{8,13216/(23 - 8)} = 2,09693 < 3,28738 = \mathcal{F}(3, 15)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik ere. Ondoriozta daiteke urtaroa aldagaia ez dela banaka esanguratsua, behin ereduaren gainerako aldagaiak daudenean.

#### 3.2. Murrizketa linealaren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 \\ H_a &: \beta_6 \neq \beta_7 \text{ edota } \beta_6 \neq \beta_8 \end{aligned} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $q = 2$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P6.3) hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko (P6.4) hondarren karratuen batura den:

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 L_t + \beta_4 S_t + \beta_5 PUB_t + \beta_6 HH1_t + \beta_6 HH2_t + \beta_6 HH3_t + u_t$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 L_t + \beta_4 S_t + \beta_5 PUB_t + \beta_6 (HH1_t + HH2_t + HH3_t) + u_t$$

$$F = \frac{(11,1822 - 8,13216)/2}{8,13216/(23 - 8)} = 2,81296 < 3,68232 = \mathcal{F}(2, 15)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, beste ezaugarriak berdinak izanik, ez dago diferentziarik hiruhilekoen arabera espero diren salmenten artean.

### 4. P6.2 ereduaren arrazoi hauengatik:

- Eredu horrek publizitatea aldagai azaltzaile esanguratsua kontuan hartzen du. Hortaz, P6.1 ereduak aldagai esanguratsua bat kanpoan utzi duenez, eta, koefizienteen KTA estimatzailea eta perturbazioen bariantzaren estimatzailea alboratuak direnez,  $t$  eta  $F$  estatistikoek ez dituzte ohiko banaketak jarraitzen, eta, ondorioz, inferentzia ez da baliagarria.

- Eredue horrek ez du kontuan hartzen urtaroa aldagai azaltzailea, ez baita esanguratsua.

## P7. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

$$1. \quad \hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}_{KTA} &= \begin{bmatrix} T & \sum P_t \\ \sum P_t & \sum P_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Q_t \\ \sum Q_t P_t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 89 & 801,1691 \\ 801,1691 & 7407,915 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 225,3035 \\ 1953,55 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,4249483 & -0,0459583 \\ -0,0459583 & 0,0051054 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 225,3035 \\ 1953,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,96205 \\ -0,381092 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Laginaren erregresio-zuzena:  $\hat{Q}_t = 5,96205 - 0,381092 P_t \quad t = 1983:1, \dots, 1990:5$ .

2.  $\hat{\beta}_2$ : silikona galoiaren prezioa dolar bat igotzen bada, salmentak 0,381 (381 galoi) mila galoi jaitsiko direla estimatzen da.

Hasiera batean koefiziente estimatuak espero izatekoa zen zeinua du; izan ere, eskari-funtzio bat estimatzen ari gara, eta salmenta eta prezioa aldagaien arteko erlazioa negatiboa izatea espero dugu. Hala, ondasunaren prezioa igotzean, salmentak murriztu egiten dira.

3. Perturbazioen bariantzaren estimatzaile alboragabea:  $\hat{\sigma}_u^2 = \sum \hat{u}_t^2 / (T - k)$ .

Estimazioa:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_u^2 &= \frac{\sum_{t=1}^{89} \hat{u}_t^2}{T-k} = \frac{Q'Q - \hat{\beta}'X'Q}{89-2} = \\ &= \frac{785,7899 - [5,96205 \quad -0,381092] \begin{bmatrix} 225,3035 \\ 1953,55 \end{bmatrix}}{87} = \\ &= \frac{186,99987}{87} = 2,1494\end{aligned}$$

4. Mutur bateko kontrastea.

$$\begin{aligned}H_0 : \beta_2 &= 0 \\ H_a : \beta_2 &< 0\end{aligned}\quad t = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T-k)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2 = \hat{\sigma}_u^2 a_{22} = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T-k} a_{22} = \frac{186,99987}{89-2} \times 0,005105404 = 0,0109759$$

$$t = \frac{-0,381092 - 0}{\sqrt{0,0109759}} = -3,6375 < -1,6625 = t(89-2)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Badago lagin-ebidentziarik prezioak silikona-salmentetan negatiboki eragiten duela esateko.

5. Gauss-Markoven teorema aplikatu ahal izateko eta, ondorioz, KTA estimatzailea, estimatzaile lineal eta alboragabe guztietatik bariantzarik txikiena duena izan dadin, oinarrizko hipotesi guztiak bete behar dira, perturbazioen normaltasuna izan ezik:

- Ereduren zehaztapen ona egitea.
- Eredua koefizienteekiko lineala izatea.
- Koefiziente konstanteak izatea laginean zehar.
- Aldagai azaltzaile finkoak izatea.
- Kolinealtasun zehatzik ez izatea, hau da,  $X$  hein osokoa izatea.
- Perturbazioen batez bestekoa zero izatea.
- Perturbazioen bariantza konstantea izatea:  $B(u_t) = \sigma_u^2 \forall t$ .
- Autokorrelazio eza:  $E(u_t u_s) = 0 \forall t \neq s$ .

6. Lehendabizi, silikonaren salmentaren aurrean-tartea atera behar da, % 95eko konfiantza izanik, prezio berria kontuan hartuz. Jabeak saltzea espero duen kantitatea aurrean-tartearen barnean badago, zehaztu den eredia eta eskuragarri dagoen lagina kontuan hartuz, jabeak arrazoi du, eta posible da prezioen jaitsieran oinarritzen den politika horren bitartez 3500 galoiko salmentak izatea. Kontrako kasuan, saltzea espero duen kantitatea aurrean-tartearen barnean ez badago, jabeak dioena ez da arrazoizkoa izango.

$$KT(Q_a)_{\%95} = \left[ \hat{Q}_a \pm t(89 - 2)_{0,025} \hat{\sigma}_a \right]$$

$$\hat{Q}_a = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 P_a = 5,96205 - 0,381092 \times 9,5 = 2,341676 \text{ mila galoi}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_a^2 &= \hat{\sigma}_u^2 [1 + X_a'(X'X)^{-1} X_a] = \\ &= 2,1494 \left[ 1 + [1 \quad 9,5] \begin{bmatrix} 0,424948 & -0,045958 \\ -0,045958 & 0,0051054 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9,5 \end{bmatrix} \right] = 2,1762 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} KT(Q_a)_{\%95} &= \left[ 2,3416 - 1,9876 \times \sqrt{2,1762} \quad 2,3416 + 1,9876 \times \sqrt{2,1762} \right] = \\ &= [-0,590 \quad 5,274] \text{ mila galoi.} \end{aligned}$$

Hortaz,  $3,5 \in KT(Q_a)_{\%95}$  betetzen denez, posible da jabeak proposatzen duen prezio-politikaren bitartez 3500 galoiko salmentak lortzea.

## BIGARREN ZATIA.

1. P7.2 eredia:

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 EE_t + \alpha_4 EPPI_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1983:1, \dots, 1990:5.$$

2. Esanguraren kontrasteak.

A. Bi aldagai azaltzaileen banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha_i &= 0 \\ H_a : \alpha_i &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\alpha}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_i}} \underset{H_0}{\sim} t(T - k) \quad i = 3, 4.$$

$$EE \quad |t| = \left| \frac{0,0228 - 0}{0,0049} \right| = 4,6412 > 1,98827 = t(89 - 4)_{0,05/2}$$

$$EPPI \quad |t| = \left| \frac{0,22376 - 0}{0,0081} \right| = 2,7514 > 1,98827 = t(89 - 4)_{0,05/2}$$

Kontrasteen emaitzetatik abiatuta, esan daiteke eraikitzen hasitako etxebizitza kopurua eta eraikuntza publiko eta pribaturako indize konbinatua aldagaiak banaka esanguratsuak direla, % 5eko esangura-maila izanik.

B. Bi aldagai azaltzaileen baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{array}{l} H_0 : \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \\ H_a : \alpha_3 \neq 0 \text{ edota } \alpha_4 \neq 0 \end{array} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P7.2) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P7.1) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 2$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(186,99987 - 140,69)/2}{140,69/(89 - 4)} = 13,9894 > 3,10384 = \mathcal{F}(2, 85)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Beraz, eraikitzen hasitako etxebizitza kopurua eta eraikuntza publiko eta pribaturako indize konbinatua aldagaiak batera esanguratsuak dira.

Banakako eta baterako kontrasteen emaitzak alderatuz, ez dago inolako lagin-arazorik. Aldagai azaltzaileak banaka eta batera esanguratsuak dira salmentak azaltzeko.

3. Aurreko atalean, P7.2 ereduak kontuan hartu diren bi aldagai azaltzaileak esanguratsuak izatea lortu dugu. Beraz, P7.1 ereduak ez ditu erregresio lineal orokorraren ereduaren oinarritzko hipotesi guztiak betetzen, zeren ereduak ez baitago ondo zehaztuta. P7.1 ereduak, aldagai esanguratsuak baztertu egin direnez,  $\hat{\beta}_2$  koefizientearen KTA estimatzailea alboratua da, eta, Gauss-Markoven teorema betetzen ez denez, ez da bariantza txikieneko estimatzailea.

4.

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{t+1} &= -1,0331 - 0,326389 P_{t+1} + 0,0228171 EE_{t+1} + 0,22376 EPPI_{t+1} \\ \widehat{Q}_t &= -1,0331 - 0,326389 P_t + 0,0228171 EE_t + 0,22376 EPPI_t \\ \Delta\widehat{Q}_{t+1} &= -0,326389 \Delta P_{t+1} + 0,0228171 \Delta EE_{t+1} + 0,22376 \Delta EPPI_{t+1} = \\ &= -0,326389 \times (-1) + 0,0228171 \times 0,5 + 0,22376 \times 20 = \\ &= 4,813 \text{ mila galoi}\end{aligned}$$

Adierazburuko balioetan oinarrituz, 481,3 silikona galoi gutxiago salduko dela aurrezaten dugu.

## HIRUGARREN ZATIA.

1. P7.3 eredu:

$$Q_t = \delta_1 + \delta_2 P_t + \delta_3 P_t^2 + \delta_4 EE_t + \delta_5 EPPI_t + u_t \quad t = 1983:1, \dots, 1990:5.$$

P7.3 eta P7.2 ereduak aldagai azaltzaile berak dituzte: prezioa ( $P$ ), eraikitzen hasitako etxebizitza kopurua ( $EE$ ), eta eraikuntza publiko eta pribaturako indize konbinatua ( $EPPI$ ). Hortaz, haien arteko desberdintasuna ez da aldagai azaltzaileen multzoa, baizik eta erabili den forma funtzionala.

P7.2 ereduan,  $Q$  aldagai azalduaren eta ( $P, EE, EPPI$ ) aldagai azaltzaileen arteko erlazioa lineala denez, aldagai azaltzaile bakoitzean unitate bat gehitzeak, ceteris paribus, aldaketa konstantea eragiten du  $Q$  aldagai azalduan da. P7.2 ereduan, prezioak aldaketa hau da eragin du:

$$\frac{\partial E(Q_t)}{\partial P_t} = \alpha_2 \quad t = 1983:1, 1983:2, \dots, 1990:5.$$

P7.3 ereduan, berriz, nahiz eta  $Q$  aldagai azalduaren eta ( $EE, EPPI$ ) aldagai azaltzaileen arteko erlazioa lineala den,  $Q$  eta  $P$  aldagai azaltzaileen arteko erlazioa ez da lineala, koadratikoa baizik. Hala, prezioaren unitate bat gehitzeak salmentetan eragiten duen aldakuntza ez da konstantea, baizik eta prezioaren mailaren arabera:

$$\frac{\partial E(Q_t)}{\partial P_t} = \delta_2 + 2 \delta_3 P_t \quad t = 1983:1, 1983:2, \dots, 1990:5.$$

Ondorioz, prezioa zenbat eta handiagoa izan, orduan eta eragin handiagoa (edo txikiagoa) izango du salmentetan,  $\delta_2$  eta  $\delta_3$  koefizienteen zeinuen arabera.



2. Bai: oinarrizko hipotesi guztiak betetzen ditu. Alde batetik, P7.3 eredua koefizienteekiko lineala da (nahiz eta ez izan lineala aldagai azaltzaileekiko); ez dago kolinealtasun zehatzik (koefiziente guztiak banaka estimatu direlako), eta, dagoen informazioan oinarrituz, eredua ondo zehaztuta dago. Bestalde, perturbazioek zero esperantza eta bariantza konstanteko ( $\sigma_u^2$ ) banaketa normal bat jarraitzen dute, eta, independentzia badagoenez, perturbazioek ez dute autokorrelaziorik.
3. Prezioan unitate bat gehitzeak, gainerako ezaugarriak konstante mantenduz, honako eragin hau du salmentetan:

$$\frac{\partial \widehat{Q}_t}{\partial P_t} = \hat{\delta}_2 + 2 \times \hat{\delta}_3 P_t = -0,497857 + 2 \times 0,0082889 P_t \quad t = 1983:1, \dots, 1990:5.$$

Prezioa = 5 dolar:

$$\frac{\partial \widehat{Q}_t}{\partial P_t} = \hat{\delta}_2 + 2 \hat{\delta}_3 P_t = -0,497857 + 2 \times 0,0082889 \times 5 = -0,415 \text{ mila galoi.}$$

Prezioa = 12 dolar:

$$\frac{\partial \widehat{Q}_t}{\partial P_t} = \hat{\delta}_2 + 2 \times \hat{\delta}_3 P_t = -0,497857 + 2 \times 0,0082889 \times 12 = -0,299 \text{ mila galoi.}$$

Ikus daitekeenez, hasierako prezioa zenbat eta handiagoa izan, prezioek orduan eta aldakuntza negatiboa txikiagoa dute salmentetan.

4. Forma funtzional egokiaren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \delta_3 &= 0 \\ H_a : \delta_3 &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\delta}_3 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\delta}_3}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k)$$

$$|t| = \left| \frac{0,00828892 - 0}{0,0380014} \right| = 0,2181 < 1,98861 = t(89 - 5)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, salmentaren eta prezioen arteko erlazioa lineala da. Hala, jabeak proposatutakoaren kontra, ez dago lagin-ebidentziarik salmentaren eta prezioaren arteko erlazio koadratikoaren alde.

**LAUGARREN ZATIA.**

1. P7.4 eredua:

$$\begin{aligned}
 Q_t &= \gamma_1 + \gamma_2 P_t + \gamma_3 EE_t + \gamma_4 EPPI_t + \gamma_5 dm1_t + \gamma_6 dm2_t + \gamma_7 dm3_t + \gamma_8 dm4_t + \\
 &+ \gamma_9 dm5_t + \gamma_{10} dm6_t + \gamma_{11} dm7_t + \gamma_{12} dm8_t + \gamma_{13} dm9_t + \gamma_{14} dm10_t + \\
 &+ \gamma_{15} dm11_t + u_t \quad t = 1983:1, 1983:2, \dots, 1990:5.
 \end{aligned}$$

Eredu horretan, aldagai azaltzaile berri bat sartu da; urtaroa aldagai kualitatiboa, hain zuzen. Aldagai horren bitartez, zera jaso nahi da:  $(P, EE, EPPI)$  aldagaiak balio bera izanik ere, hilabeteen arabera espero diren salmentak desberdinak izan daitezkeela.

Aldagai berriaren izaera kualitatiboa denez, fikzio-aldagaien bitartez sartu behar da ereduari. Lagineko datuak hilerokoak direnez, urtaroa aldagaiak hamabi kategoria ditu, eta, beraz, hamabi fikzio-aldagai definitu behar dira; bat, hilabete bakoitzarentzat:

$$\begin{aligned}
 dm1_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{urtarrila} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} & dm2_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{otsaila} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \\
 dm3_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{martxoa} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} & dm4_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{apirila} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \\
 dm5_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{maiatza} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} & dm6_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{ekaina} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \\
 dm7_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{uztaila} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} & dm8_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{abuztua} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \\
 dm9_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{iraila} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} & dm10_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{urria} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \\
 dm11_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{azaroa} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} & dm12_t &= \begin{cases} 1 & t \in \text{abendua} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Zehaztu nahi den ereduko  $X$  datu-matrizean kolinealtasun anizkoitz zehatza saihesteko, kategoria guztietako fikzio-aldagaiak sartu dira, bat izan ezik. Hain zuzen,

sartu gabe gelditu den fikzio-aldagaia azkenekoa da, abenduko hilabetea jasotzen duena, eta hori bera izango da koefizienteak interpretatzean dagoen erreferentzia.

2. Koefiziente estimatuen interpretazioa:

$\hat{\gamma}_1 = -0,897081$  : abenduan  $-0,897081$  mila galoi silikona saldu direla estimatzen da,  $P, EE$  eta  $EPPI$  aldagaien balioak zero direnean.

$\hat{\gamma}_{14} = 0,251659$  :  $P, EE$  eta  $EPPI$  aldagaiek balio bera izanik, azaroan abenduan baino  $0,251659$  mila galoi silikona gehiago saldu direla estimatzen da.

3. Banakako esanguraren kontrastea: urtaroa.

$$H_0 : \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \dots = \gamma_{15} = 0$$

$$H_a : \gamma_5 \neq 0 \text{ edota } \gamma_6 \neq 0 \text{ edota } \gamma_7 \neq 0 \dots \text{ edota } \gamma_{15} \neq 0$$

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\approx} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P7.4) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P7.2) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 11$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(140,69 - 117,217)/11}{117,217/(89 - 15)} = 1,34715 < 1,92056 = \mathcal{F}(11, 74)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, urtaroa aldagaia ez da esanguratsua. Ondorioz, salmentak ez dira urtarorearen arabekoak, eta hilabetearen arabera ere salmenta kopuru bera izatea espero da, beste aldagaien balioak berdinak izanik.

4. P7.2 eredia aukeratu dugu, arrazoi hauengatik:

- $EE$  eta  $EPPI$  aldagaiak esanguratsuak direnez, eredian barneratu behar dira, zehaztapen ona izateko. Ondorioz, P7.1 eredian aldagai azaltzaile esanguratsuak kanpoan gelditu direnez, koefizienteen KTA estimatzaileak eta perturbazioen bariantzaren estimatzailea alboratuak dira, eta inferentzia ez da baliagarria.
- Egindako kontrastearen emaitzan oinarrituz, salmentaren eta prezioaren arteko erlazioa lineala denez, hobe litzateke erlazio koadratikoa ez ezartzea. Hori dela eta, ez dugu P7.3 eredia aukeratu, ez baitu forma funtzional egokiena erabiltzen.
- Urtarora aldagai azaltzailea esanguratsua ez denez, hobe da eredian ez sartzea, aldagai ez-esanguratsu bat ez sartzearen. Horregatik ez dugu aukeratu P7.4 eredia.

## P8. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. ELOE:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 HEZ_i + \beta_3 ESP_i + \beta_4 GIZ_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, 2, \dots, 49.$$

LEZ:

$$\widehat{S}_i = 434,821 + 133,551 HEZ_i + 34,4543 ESP_i + 470,460 GIZ_i$$

$$(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) \quad (258,871) \quad (31,5081) \quad (12,1316) \quad (144,870)$$

$$R^2 = 0,450263 \quad HKB = 11089355$$

2.  $\hat{\beta}_3 = 34,4543$ : soldataren gehikuntza estimatua, esperientzia urte bat gehitzean, hezkuntza-maila eta generoa konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_4 = 470,460$ : gizon eta emakumeen soldaten arteko diferentzia estimatua, biek ere hezkuntza-maila eta esperientzia bera izanik.

$$3. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (S_i - \bar{S})^2} = 0,450263$$

Interpretazioa: lagineko soldataren aldagarritasunaren % 45,0263 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez, hau da, hezkuntza, esperientzia eta generoa aldagaien aldagarritasunaren bitartez.

4. Baterako esanguraren kontrastea.

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \quad F = \frac{R^2/q}{(1-R^2)/(N-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N-k)$$

$$F = \frac{0,450263/3}{(1-0,450263)/(49-4)} = 12,28577483 > 2,81154 = \mathcal{F}(3, 45)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, hezkuntza, esperientzia eta generoa aldagaiak batera esanguratsuak dira.

5. Generoak eragindako soldata-bereizkeria egongo da, baldin eta hezkuntza-maila eta esperientzia bera duten gizon eta emakumeentzat espero diren soldatak desberdinak badira.

$$H_0 : \beta_4 = 0$$

$$H_a : \beta_4 \neq 0 \quad t = \frac{\hat{\beta}_4 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N-k)$$

$$|t| = \left| \frac{470,46 - 0}{144,87} \right| = 3,2475 > 2,0141 = t(49 - 4)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, badago gene-roak eragindako soldata-bereizkeria.

## BIGARREN ZATIA.

1. P8.2 eredua:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 HEZ_i + \beta_3 ESP_i + \beta_4 GIZ_i + \beta_5 ADM_i + \beta_6 TAI_i + \beta_7 TEK_i + u_i.$$

Lanpostu mota aldagai azaltzailea lau kategoriako aldagai kualitatiboa da: tailerreko langileak, mantentze-lanetakoak, administraziokoak eta teknikariak. Aldagai hori eredian sartzeko, lau fikzio-aldagai sortu dira; bat, kategoria bakoitzarentzat. Zehaztutako eredian fikzio-aldagai guztiak sartuko balira,  $X$  datu-matrizeak kolinealtasun anizkoitza izango luke, eta, ondorioz, ezinezkoa litzateke ereduko koefiziente guztiak banaka estimatzea. Horregatik, mantentze-langileen fikzio-aldagaia kanpoan utzi da, eta ezaugarri hori (emakumea izatearekin batera) izango da koefizienteak interpretatzeko oinarria.

2. Lanpostu mota aldagaia ez da esanguratsua izango, baldin eta lanpostu horietako langileek espero dituzten soldatak berdinak badira beste ezaugarriak berdinak izanik.

$$H_0 : \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0$$

$$H_a : \beta_5 \neq 0 \text{ edota } \beta_6 \neq 0 \text{ edota } \beta_7 \neq 0$$

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P8.2) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P8.1) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 3$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(11089355 - 5620313)/3}{5620313/(49 - 7)} = 13,6232 > 2,82705 = \mathcal{F}(3, 42)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; hortaz, lanpostu mota aldagai azaltzailea esanguratsua da behin eredian gainerako aldagai azaltzailak daudenean.

3. Aurreko ataleko kontrastearen emaitza kontuan hartuz, P8.1 ereduak ez du kontuan hartzen lanpostu mota aldagai azaltzaile esanguratsua. Ondorioz, ereduko koefizienteen KTA estimatzaileak alboratuak dira, eta ez dira bariantza minimokoak, zeren ez baita betetzen Gauss-Markoven teorema aplikatzeko beharrezkoak diren oinarriko hipotesietatik bat; zehaztapen onarena, hain zuzen. Gainera, perturbazioen bariantzaren estimatzailea alboratua da, eta ohiko  $t$  eta  $F$  estatistikoek ez dituzte Student- $t$  eta Snedecor- $\mathcal{F}$  banaketak jarraitzen, hurrenez hurren. Hala, lehen zatian egindako kontrasteak baliagarriak ez direnez, generoak eragindako soldata-bereizkeriarik ba ote dagoen jakiteko, kontrastea berriro egin beharko litzateke, ondo zehaztuta dagoen ereduarekin (P8.2).

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_4 &= 0 \\ H_a : \beta_4 &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_4 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{528,154 - 0}{151,238} \right| = 3,4922 > 2,01808 = t(49 - 7)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, generoak eragindako soldata-bereizkeria badagoela ondorioztatzen da.

4. Estimaturako diferentzia hau da:

$$\begin{aligned} &(\widehat{S}|ESP = 3, GIZ = 0, ADM = 1) - (\widehat{S}|ESP = 4, GIZ = 0, ADM = 1) = \\ &= (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 HEZ_i + \hat{\beta}_3 \times 4 + \beta_5) - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 HEZ_i + \hat{\beta}_3 \times 3 + \beta_5) = \\ &= \hat{\beta}_3 = 29,2526 \text{ dolar.} \end{aligned}$$

5. Mutur bateko kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_7 &= 1000 \\ H_a : \beta_7 &> 1000 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_7 - 1000}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_7}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$t = \frac{1110,05 - 1000}{203,871} = 0,53980213 < 1,68195 = t(49 - 7)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik. Enpresak bere konpromisoa bete du, zeren teknikarien eta mantentze-langileen soldataren arteko diferentzia ez baita 1000 dolar baino handiagoa.

**HIRUGARREN ZATIA.**

## 1. ELOE:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 HEZ_i + \beta_3 ESP_i + \beta_4 GIZ_i + \beta_5 ADM_i + \beta_6 TAI_i + \beta_7 TEK_i + \beta_8 ESP_i \times GIZ_i + u_i.$$

Koefizienteekiko linealtasuna da erregresio lineal orokorraren ereduak eskatzen duen linealtasunaren oinarritzko hipotesia, eta ez aldagai azaltzaileekikoa; beraz, P8.3 ereduak linealtasunaren hipotesia betetzen du.

Bestalde, P8.3 ereduak ez da aldagai azaltzaileekiko lineala,  $(ESP \times GIZ)$  terminoa txertatu delako. Termino horrek adierazten du esperientzia gehigarriak ez duela eragin bera gizon eta emakumeen soldatan.

$$\begin{aligned} 2. \hat{S}_i^G &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 HEZ_i^G + \hat{\beta}_3 ESP_i^G + \hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_5 ADM_i^G + \hat{\beta}_6 TAI_i^G + \hat{\beta}_7 TEK_i^G + \hat{\beta}_8 ESP_i^G \\ \hat{S}_i^E &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 HEZ_i^E + \hat{\beta}_3 ESP_i^E + \hat{\beta}_5 ADM_i^E + \hat{\beta}_6 TAI_i^E + \hat{\beta}_7 TEK_i^E \end{aligned}$$

Ezaugarri berak izanik:

$$\hat{S}_i^G - \hat{S}_i^E = \hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_8 ESP_i^G = 52,1988 + 53,7363 \times ESP_i^G \text{ dolar}$$

Beraz, ezaugarri berak dituzten gizon eta emakumeen soldaten arteko diferentzia haien esperientziaren arabera da.

$$3. \frac{\partial \hat{S}_i}{\partial ESP_i} = \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_8 GIZ_i = -8,1917 + 53,7363 GIZ_i \text{ dolar.}$$

Esperientzia gehigarriak soldatan duen eragina generoaren arabera da.

$$4. \hat{\beta}_8 = 53,7363: \text{ esperientzia urte bat gehitzean gizon eta emakumeen soldatetan egiten diren gehikuntzen diferentzia estimatua, lanpostu mota eta hezkuntza-maila konstante mantenduz.}$$

## 5. Elkar-eraginaren esanguraren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_8 &= 0 \\ H_a : \beta_8 &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_8 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_8}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{53,6373 - 0}{19,9972} \right| = 2,6872 > 2,01954 = t(49 - 8)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Esperientzia-urte gehigarri baten balioa ez da bera gizon eta emakumeentzat.

6. Generoak eragindako soldata-bereizkeria egongo da, baldin eta hezkuntza, esperientzia eta lanpostu bereko gizon eta emakumeen arteko soldata desberdina bada.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_4 = \beta_8 = 0 \\ H_a : \beta_4 \neq 0 \text{ edota } \beta_8 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $q = 2$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P8.3) hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 HEZ_i + \beta_3 ESP_i + \beta_5 ADM_i + \beta_6 TAI_i + \beta_7 TEK_i + u_i$$

$$F = \frac{(7252280 - 4778683)/2}{4778683/(49 - 8)} = 10,6114 > 3,22568 = \mathcal{F}(2, 41)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; ondorioz, esan daiteke SXF enpresan badagoela generoak eragindako soldata-bereizkeria.

7. Grafikoan hondarrak zeroren inguruan mugitzen direla ikusten da. Hala ere, nabaria da esperientzia gutxiko langileen hondarren dispersioa esperientzia gehiago duten langileen hondarren dispersioa baino handiagoa dela. Badirudi perturbazioen bariantza ez dela konstantea laginean zehar, eta esperientzia aldagaiak heterozedastizitatea eragiten duela. Hori horrela izanik, homozedastizitatearen oinarritzko hipotesia ez da betetzen.

## P9. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. ELOE:

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 L_i + \beta_3 B_i + \beta_4 A_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, 2, \dots, 265.$$

LEZ:

$$\begin{aligned} \hat{P}_i &= -10,968 + 0,655 L_i + 17,134 B_i + 0,304 A_i & R^2 &= 0,47943 & HKB &= 234507. \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & \quad (14,249) \quad (2,66) \quad (3,672) \quad (0,041) \end{aligned}$$



2.  $\beta_4$  koefizientearen interpretazioa:

$\beta_4 = \frac{\partial E(P_i)}{\partial A_i}$  : etxebizitzaren azalera unitate bat handitzean etxebizitzaren prezioan espero den gehikuntza, gainerako aldagaiak konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_4 = 0,304$  mila euro: etxebizitzaren azalera metro karratu bat handitzean, etxebizitzaren prezioa 3040 euro garestitzen dela estimatzen da logela eta bainugela kopurua konstante mantenduz.

$$3. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (P_i - \bar{P})^2} = 0,47943$$

Interpretazioa: lagineko etxebizitzaren prezioen aldagarritasunaren % 47,943 azaltzen da ereduiko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez, hau da, logela kopurua, bainugela kopurua eta azalera aldagaien aldagarritasunaren bitartez.

4. Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

$$F = \frac{0,47943/3}{(1 - 0,47943)/(265 - 4)} = 80,1240 > 2,63919 = \mathcal{F}(3, 261)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, logela kopurua, bainugela kopurua eta azalera aldagaiak batera esanguratsuak dira.

5. Banakako esanguraren kontrastea: logela kopurua.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{0,655 - 0}{2,660} \right| = 0,246 < 1,96909 = t(265 - 4)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik. Hala, logela kopurua aldagaia ez da banaka esanguratsua etxebizitzentzat espero den prezioa azaltzeko, behin bainugela kopurua eta azalera aldagai azaltzaileak ereduak daudenean.

6. Ereduan, logela kopurua aldagai azaltzaileaz gainera, bainugela kopurua eta azalera aldagai azaltzaileak ere sartu dira. Azken bi aldagai horiek esanguratsuak dira, zeren haien lagin estatistikoak taulako balioa ( $1,96909 = t(261)_{0,025}$ ) baino handiagoak baitira. Ereduko  $\beta_2$  koefizienteak, logela bat gehiago izanik eta gainerako ezaugarriak

konstante mantenduz, etxebizitzentzat espero den salmenta-prezioaren gehikuntza adierazten du, hau da, etxebizitzaren tamaina eta bainugela kopurua aldatzen ez direnean. Lortutako emaitzetatik abiatuak, susma daiteke aldagai azaltzaileen ( $L, B, A$ ) artean kolinealtasun altua dagoela, eta, aldagai horietatik bi ( $B, A$ ) barneratu ondoren, gerta daiteke hirugarrenak ( $L$ ) informazio gehigarrik ez eskaintzea. Susmo hori analizatzeko, aldagai azaltzaileen korrelazio-matrizea aztertu beharko litzateke.

7. Kontrasterako hipotesia (20000 euro = 20 mila euro).

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_3 &= 20 & t &= \frac{\hat{\beta}_3 - 20}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \\ H_a : \beta_3 &\neq 20 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{17,134 - 20}{3,672} \right| = 0,7805 < 1,96909 = t(265 - 4)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, etxebizitzaren gainerako ezaugarriak konstante mantenduz, posible da bainugela bat gehiago izateagatik 20000 euro gehiago ordaintzeko prest egotea.

8. Laginaren erregresio-zuzenean oinarrituz eta  $j$  etxebizitzaren ezaugarriak kontuan hartuz, honako salmenta-prezio hau estimatzen da:

$$\hat{P}_j = -10,968 + 0,655 \times 4 + 17,134 \times 2 + 0,304 \times 100 = 56,32 \text{ mila euro.}$$

9. Aipatutako ezaugarriak dituen etxebizitzaren prezioaren konfiantza-tartea atera behar da, eta, ondoren, ordaindutako prezioa tartea horretako balio bat den ala ez egiaztatu behar da.

$$KT(P_j)_{1-\alpha} = \left[ \hat{P}_j \pm t(N - k)_{\alpha/2} \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X_j(X'X)^{-1}X_j} \right]$$

$$\text{non } \hat{P}_j = 56,32 \quad \hat{\sigma}_u = \frac{234507}{265 - 4} = 29,9749 \quad X_j = (1 \ 4 \ 2 \ 100)' \text{ diren}$$

PraktikaP9.gdt fitxategiko datuak erabiliz, konfiantza-tarte hau lortzen da:

$$KT(P_j)_{\%95} = [-4,152 \quad 116,812]$$

$75 \in KT(P_j)_{\%95}$  betetzen denez, lagunak ordaindutako prezioa arrazoizkoa da, eta ondoriozta daiteke ez diotela iruzurrik egin.

10. Hondarren portaera ez da uniforme edota bateratua. Izatez, laginaren lehen eta azken zatiko hondar gehienak negatiboak dira, eta erdikoak, aldiz, positiboak dira gehienbat. Badirudi erregresio lineal orokorraren ereduaren oinarritzko hipotesiren bat ez dela betetzen. Ereduaren alde sistematikoan zehaztapen-errorearen bat dagoela susmatzen da; aldagai esanguratsuren bat kontuan ez hartzea, hain zuzen.

**BIGARREN ZATIA.**

1. P9.2 eredua:  $P_i = \beta_1 + \beta_2 L_i + \beta_3 B_i + \beta_4 A_i + \beta_5 M_i + \beta_6 E_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, 265.$

Kokapena aldagai azaltzaile hiru kategoriako aldagaia da: mendebaldea ( $M$ ), ekialdea ( $E$ ) eta erdialdea ( $ER$ ). Horregatik, hiru fikzio-aldagai definitu dira; bat, kategoria bakoitzarentzat.

$$M_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{mendebaldekoa bada} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \quad E_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{ekialdekoa bada} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

$$ER_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{erdialdea bada} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

Kolinealtasun zehatzaren arazoa saihesteko, agenteak hiru fikzio-aldagaietatik bi bakarrik sartu ditu termino konstantea duen ereduan:  $M$  eta  $E$ , erdialdea aldagaia ( $ER$ ), beraz, erreferentzia gisa gelditzen da.

- 2.

	i=1	i=100	i=265
$M_i$	0	0	1
$E_i$	1	0	0

3. LEZ:  $\hat{P}_i = 24,51 + 1,919 L_i + 16,414 B_i + 0,227 A_i - 43,851 M_i - 37,114 E_i$   
 $(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}})$  (11,522) (2,086) (2,902) (0,032) (3,63) (3,617)
- $R^2 = 0,685011$   $HKB = 14189600$

4.  $\hat{\beta}_5 = -43,851$  mila euro: mendebaldeko eta erdialdeko etxebizitzaren salmenta-prezioen arteko diferentzia estimatua, etxebizitzaren ezaugarriak berdinak izanik, hau da, azalera, bainugela kopuru eta logela kopuru bera izanik.

$\hat{\beta}_6 = -37,114$  mila euro: ekialdeko eta erdialdeko etxebizitzaren salmenta-prezioen arteko diferentzia estimatua, etxebizitzaren ezaugarriak berdinak izanik, hau da, azalera, bainugela kopuru eta logela kopuru bera dituztenean.

5. Kokapena aldagai azaltzailea ez da esanguratsua izango, baldin eta kokapenaren arabera prezio bera espero badugu etxebizitzentzat, gainerako ezaugarriak berdinak izanik.

$$H_0 : \beta_5 = \beta_6 = 0 \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

$$H_a : \beta_5 \neq 0 \text{ edota } \beta_6 \neq 0$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P9.2) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P9.1) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 2$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(234507 - 141896)/2}{141896/(265 - 6)} = 84,5202 > 3,03065 = \mathcal{F}(2, 259)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, kokapena aldagaia esanguratsua da etxebizitzentzat espero den salmenta-prezioa azaltzeko, behin eredu gainerako aldagai azaltzaileak daudenean.

6. P9.2 ereduko hondarren grafikoa P9.1 ereduko hondarren grafikoarekin alderatuz, ikus daiteke hondarrak zeroren inguruan uniformeki mugitzen direla. Hasierako grafikoa bereizten ziren hiru zatiak desagertu egin dira, eta hondarren portaera berdintsua da laginaren zehar. Emaitza horretatik abiatuz, kokapena aldagai azaltzaile esanguratsua sartzearen ondorioz, ereduaren alde sistematikoa egokitu da, eta, horregatik, hondarren portaera zuzendu egin dela ondorioztatzen da. Halaber, ondoriozta daiteke P9.1 ereduak zehaztaper txarra duela, ez baita kontuan hartu kokapena aldagai esanguratsua.

7. Murrizketa linealaren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_5 &= \beta_6 & (\beta_5 - \beta_6 &= 0) \\ H_a : \beta_5 &\neq \beta_6 & (\beta_5 - \beta_6 &\neq 0) \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_5 - \hat{\beta}_6 - 0}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_5 - \hat{\beta}_6)}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_5 - \hat{\beta}_6) = \widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_5) + \widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_6) - 2\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}_5, \hat{\beta}_6) = 13,18 + 13,08 - 2 \times 6,64 = 12,98$$

$$|t| = \left| \frac{-43,851 - (-37,114) - 0}{\sqrt{12,98}} \right| = |-1,86| < 1,96917 \approx t(265 - 6)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, ezaugarri berak dituzten etxebizitzentzat espero diren salmenta-prezioak alderatuz, erdialdeko eta kanpoaldeko etxebizitzaren arteko diferentzia dago bakarrik.

8. Bai. Izan ere, aurreko ataleko kontrastearen emaitzak  $\beta_5 = \beta_6$  murrizketa ez baztertzea adierazten duenez, murrizketa hori kontuan hartzen duen eredu bat estimatzea proposatzen dugu. Eredu murriztua hau litzateke:

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 L_i + \beta_3 B_i + \beta_4 A_i + \beta_5 M_i + \beta_6 E_i + u_i \quad \rightarrow$$

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 L_i + \beta_3 B_i + \beta_4 A_i + \beta_5 M_i + \beta_5 E_i + u_i \quad \rightarrow$$

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 L_i + \beta_3 B_i + \beta_4 A_i + \beta_5 (M_i + E_i) + u_i$$

Eeredu murriztu hori estimatzea edota P9.2 eredu  $\beta_5 = \beta_6$  murrizketa kontuan hartuta estimatzea baliokidea da. Murrizketa hori egiazkoa denez, KTM estimatzailea lineala da, alboragabea, eta P9.2 ereduko KTA estimatzaileek duten baino bariantza txikiagoa du.

**HIRUGARREN ZATIA.**

1. P9.3 eredia:

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 L_i + \beta_3 B_i + \beta_4 A_i + \beta_5 \text{kanpoaldea}_i + \beta_6 (\text{kanpoaldea}_i \times A_i) + u_i.$$

Kokapena aldagai kualitatiboa hiru kategoria izatetik bi izatera igaro da: kanpoaldea (mendebaldekoak eta ekialdekoak) eta erdialdea. Horretaz gainera, termino berri hau txertatu da erudian:

$$\text{kanpoaldea}_i \times A_i = \begin{cases} A_i & i \in \text{kanpoaldea} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

Kokapena aldagaia bi eratan agertzen da P9.3 erudian: kanpoaldea fikzio-aldagaia bitartez eta  $(\text{kanpoaldea} \times A)$  terminoaren bitartez. Azken termino horrek azalaren eta kokapenaren arteko elkar-eragina jasotzen du, hau da, etxebizitzaren azalera metro karratu bat handitzean, salmenta-prezioan espero den gehikuntza kokapenaren arabera da. Bigarren zatiko zortzigarren atalean zehaztutako erudian, ez da kontuan hartu elkar-eragina, eta kokapena aldagaiaren eragina  $\beta_5$  koefizientearen bitartez neurtu da.

2. Etxebizitzaren azalera metro karratu bat handitzean, ceteris paribus, etxebizitzaren prezioan gehikuntza hau espero da da:

$$\frac{\partial E(P_i)}{\partial A_i} = \beta_4 + \beta_6 \text{kanpoaldea}_i = \begin{cases} \beta_4 & \text{kanpoaldea} = 0 \text{ bada} \\ \beta_4 + \beta_6 & \text{kanpoaldea} = 1 \text{ bada} \end{cases}$$

Ohartu zaitezte aldakuntza hori ez dela eremu guztietan berdina. Hortaz, azalera metro karratu bat handitzean, ceteris paribus, gehikuntza estimatu hau espero da etxebizitzaren prezioan:

Etxebizitza erdialdean badago  $\Rightarrow \hat{\beta}_4 = 0,297$  mila euro

Etxebizitza kanpoaldean badago  $\Rightarrow (\hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_6) = 0,297 - 0,114 = 0,183$  mila euro

3. Kokapena aldagaiaren eragina
- $\beta_5$
- eta
- $\beta_6$
- koefizienteen bitartez neurtzen da:

$$\begin{aligned} E(P_i | \text{zentroa}) &= \beta_1 + \beta_2 L_i + \beta_3 B_i + \beta_4 A_i \\ E(P_i | \text{kanpoaldea}) &= \beta_1 + \beta_2 L_i + \beta_3 B_i + \beta_4 A_i + \beta_5 + \beta_6 A_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_5 = \beta_6 = 0 \\ H_a : \beta_5 \neq 0 \text{ edota } \beta_6 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N-k)$$

Eredu murriztua P9.1 da; murriztu gabeko eredua, berriz, P9.3, eta murrizketa kopurua, azkenik,  $q = 2$ .

$$F = \frac{(234507 - 141000)/2}{141000/(265 - 6)} = 85,88 > 3,03065 = \mathcal{F}(2, 259)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, kokapena aldagaia esanguratsua da etxebizitzentzat espero den salmenta-prezioa azaltzeko.

4. P9.3 ereduan oinarrituz, metro karratu gehigarri baten balioa hau da.

$$\frac{\partial E(P_i)}{\partial A_i} = \beta_4 + \beta_6 \text{ kanpoaldea}_i$$

$\beta_6 = 0$  balitz, metro karratu gehigarri batek balio bera izango luke edozein lekutan, erdialdean izan edo ez izan.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_6 &= 0 \\ H_a : \beta_6 &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{-0,114 - 0}{0,051} \right| = |-2,230| > 1,96917 = t(265 - 6)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Hala, metro karratu gehigarri batek ez du balio bera erdialdean eta kanpoaldean, beste ezaugarriak berdinak izanik ere.

5. Aurkeztu diren eredu guztietatik bat aukeratu behar da, etxebizitzentzat espero den salmenta-prezioa hoberen zehazten duena, erabilitako estimatzaileen propietateetan oinarrituz.

- P9.1 eredua baztertzen dugu, ez baitu kontuan hartzen kokapena aldagai azaltzaile esanguratsua, eta, horrenbestez, KTA estimatzaileak ez dira alboragabeak, perturbazioen bariantzaren estimatzailea alboratua da, eta kontrasterako estatistikoek ez dituzte ohiko banaketak jarraitzen.
- P9.2 ereduan sartu den kokapena aldagai azaltzailea esanguratsua da, baina ereduaren zehaztapena ez da egokiena, kokapena aldagaiak bi eremu bakarrik bereizi behar baititu, eta ez hiru. Hala murrizketa hori kontuan hartzen duen ereduko estimatzaileek bariantza txikiagoa izango dute.
- P9.3 ereduak elkar-eragin bat hartzen du kontuan; kokapenaren eta azalaren artekoa, hain zuzen. Elkar-eragin hori esanguratsua denez, P9.2 ereduan zehaztapen-errore bat gertatu da, ez baita forma funtzional egokia erabili. Hori dela eta, P9.2 ereduko koefizienteen estimatzaileak alboratuak dira, perturbazioen bariantzaren estimatzailea alboratua da, eta, ondorioz, inferentzia ez da baliagarria.

Ondorioz, hiru ereduetatik P9.3 aukeratu beharko litzateke.

## P10. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. KTA estimazioa.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})(R_i - \bar{R})}{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2} = \frac{880636,5}{6041478} = 0,145765$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{C} - \hat{\beta}_2 \bar{R} = \frac{7662}{40} - 0,145765 \times \frac{17170}{40} = 128,98$$

Laginaren erregresio-zuzena:

$$\hat{C}_i = 128,98 + 0,145765 R_i \quad i = 1, 2, \dots, 40.$$

2.  $\hat{\beta}_2 := 0,145765$ : pizza-kontsumoaren gehikuntza estimatua, errenta mila euro igotzean.
3. Laginaren korrelazio-koefizientea:

$$r_{CR} = \frac{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})(R_i - \bar{R})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2 \sum_{i=1}^{40} (R_i - \bar{R})^2}} = \frac{880636,5}{\sqrt{947651,9 \times 6041478}} = 0,368045$$

Korrelazio-koefizientearen ( $r_{CR}$ ) eta mugatze-koefizientearen ( $R^2$ ) arteko erlazioa:

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{KBA}{KBO} = \frac{\sum_{i=1}^{40} (\hat{C}_i - \bar{C})^2}{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{40} (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 R_i - \bar{C})^2}{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{40} [(\bar{C} - \hat{\beta}_2 \bar{R}) + \hat{\beta}_2 R_i - \bar{C}]^2}{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2} = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^{40} (R_i - \bar{R})^2}{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2} = \\ &= \frac{\left( \frac{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})(R_i - \bar{R})}{\sum_{i=1}^{40} (R_i - \bar{R})^2} \right)^2 \sum_{i=1}^{40} (R_i - \bar{R})^2}{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2} = \frac{(\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})(R_i - \bar{R}))^2}{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2 \sum_{i=1}^{40} (R_i - \bar{R})^2} = \\ &= \left( \frac{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})(R_i - \bar{R})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{40} (C_i - \bar{C})^2 \sum_{i=1}^{40} (R_i - \bar{R})^2}} \right)^2 = r_{CR}^2 = (0,368045)^2 = 0,135457 \end{aligned}$$

Interpretazioa: lagineko pizza-kontsumoaren aldagarritasunaren %13,5457 azaltzen da errentaren aldagarritasunaren bitartez.

4. KTA estimatzailea alboragabea izateko, beharrezkoak dira oinarritzko hipotesi hauek:

- Ereduak zehaztapen ona izatea, hau da, aldagai azaltzaile esanguratsu guztiak izatea eta ereduan dauden aldagai azaltzaile guztiak esanguratsuak izatea.
- Eredua koefizienteekiko lineala izatea.
- Koefizienteak konstanteak izatea laginaren zehar.
- Aldagai azaltzaile finkoak izatea.
- Kolinealtasun zehatzik ez izatea, hau da,  $X$  hein osokoa izatea.
- Perturbazioen esperantza zero izatea.

5. P10.2 eredu:

5.1. Bi ereduetan pizza-kontsumoaren eta errentaren arteko erlazioa zehazten da: P10.1 ereduan, kontsumoa errentaren funtzioan azaldu nahi da eta, P10.2 ereduan, berriz, alderantzizko kausalitatea zehaztu nahi da, hau da, errenta azaldu nahi da kontsumoaren funtzioan.

5.2.  $\alpha_2$  koefizientearen KTA etimazioa:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})(R_i - \bar{R})}{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})^2} = \frac{880636,5}{947651,9} = 0,929282683$$

$\alpha_2$  eta  $\beta_2$  koefizienteen estimazioak ez dira berdinak, ez baitute eragin berdina neurtzen:

$\hat{\beta}_2$  : pizza-kontsumoaren gehikuntza estimatua (eurotan), errenta mila euro igotzean.

$\hat{\alpha}_2$  : errentaren gehikuntza estimatua (mila eurokotan), pizza-kontsumoa euro bat handitzean.

5.3. Bi ereduetako mugatze-koefizienteak berdinak dira; izan ere, hirugarren atalean frogatu den bezala, gauza bera jasotzen dute: aldagai azalduaren eta aldagai azaltzailearen arteko korrelazio-koefiziente bakuna karratura. Hortaz:

$$R_{P10.1}^2 = r_{CR}^2 \quad \text{eta} \quad R_{P10.2}^2 = r_{RC}^2 \quad \Rightarrow \quad R_{P10.1}^2 = R_{P10.2}^2$$

## BIGARREN ZATIA.

1. ELOE:

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + \beta_3 A_i + \beta_4 E_i + \beta_5 LM_i + \beta_6 BM_i + \beta_7 GM_i + u_i$$

$$u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, \dots, 40$$



Aurreko ereduan, pizza-kontsumoa lau aldagai azaltzailereren arabera zehaztu da: errenta, adina, generoa eta ikasketa-maila altuena. Haietatik bi aldagai kualitatiboak direnez (generoa eta ikasketa-maila altuena), fikzio-aldagaien bitartez txertatu behar dira ereduan.

Generoa aldagaiak bi kategoria dituzenez, bi fikzio-aldagai definitu behar dira; bat, gizonentzat, eta bestea, emakumeentzat. Bestalde, ikasketa-maila altuena aldagaiak lau kategoria dituzenez, fikzio-aldagai bat definitu behar da haietako bakoitzarentzat.

Azkenik, aldagai kualitatibo horiek konstantea duen eredu batean sartzeko, aldagai kualitatibo bakoitzarentzat definitutako fikzio-aldagai bat ezik, beste guztiak sartu behar dira,  $X$  datu-matrizea hein osokoa izan dadin. Generoa aldagaiari dagokionez, ereduan ez da kontuan hartu gizonaren kategoria, eta, ikasketa-maila altuena aldagaiari dagokionez, berriz, ez da kontuan hartu ikasketarik gabeko kategoria. Ondorioz, koefizienteak interpretatzean, ikasketarik gabeko gizonak izango dira erreferentziatzeko maila.

## 2. LEZ:

$$\begin{aligned} \hat{C}_i &= 280,735 + 0,283674 R_i - 8,8409 A_i - 181,85 E_i + 73,1179 LM_i - \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & \quad (39,0137) \quad (0,0428834) \quad (1,49434) \quad (25,8175) \quad (37,1903) \\ & - 6,4715 BM_i - 48,752 GM_i \quad R^2 = 0,772621 \quad HKB = 215476,3 \\ & \quad (40,2046) \quad (59,1766) \end{aligned}$$

$\hat{\beta}_1 = 280,735$ : errenta eta ikasketarik gabeko 18 urteko gizon batentzat espero den pizza-kontsumo estimatua (eurotan).

$\hat{\beta}_2 = 0,283674$ : errenta mila euro igotzean, 0,283674 euroko gehikuntza estimatua egiten da pizza-kontsumoan, adina, generoa eta ikasketa-maila altuena konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_3 = -8,8409$ : banakoak urte bat gehiago izatean, pizza-kontsumoa 8,8409 euro jaitziko dela estimatzen da, errenta, generoa eta ikasketa-maila altuena konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_4 = -181,85$ : emakume eta gizonen pizza-kontsumoaren diferentzia estimatua, beste ezaugarriak (errenta, adina eta ikasketa-maila altuena) berdinak izanik.

$\hat{\beta}_5 = 73,1179$ : lehen mailako ikasketak dituzten eta ikasketarik ez duten banakoen pizza-kontsumoaren diferentzia estimatua, beste ezaugarriak (errenta, adina eta generoa) berdinak izanik.

$\hat{\beta}_6 = -6,4715$ : bigarren mailako ikasketak dituzten banakoen pizza-kontsumoa, ikasketarik gabeko banakoena baino 6,4719 euro gutxiago dela estimatzen da, errenta, adina eta generoa, berdinak izanik.

$\hat{\beta}_7 = -48,752$ : unibertsitateko ikasketak dituzten banakoek pizza-kontsumoa, ikasketarik gabeko banakoena baino 48,752 euro gutxiago dela estimatzen da, errenta, adina eta generoa, berdinak izanik.

3. Ez: populazioaren erregresio-zuzena koefizienteen benetako balioen arabera, eta laginaren erregresio-zuzena, berriz, koefiziente estimatuen arabera.
4.  $280,735 - 181,85 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_4$ : errenta eta ikasketarik gabeko 18 urteko emakume baten pizza-kontsumo estimatua.
5.  $\hat{C}_i = 280,735 + 0,283674 R_i - 8,8409 A_i - 181,85 - 48,752$  euro
6. Banakako esanguraren kontrastea: generoa.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_4 &= 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_4 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \\ H_a : \beta_4 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{-181,85 - 0}{25,8175} \right| = |-7,0438| > 2,03452 = t(40 - 7)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, %5eko esangura-maila izanik; beraz, generoa aldagaia esanguratsua da espero den pizza-kontsumoa azaltzeko.

7. Hipotesiaren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_4 &= -200 & t &= \frac{\hat{\beta}_4 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \\ H_a : \beta_4 &\neq -200 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{-181,85 + 200}{25,8175} \right| = 0,703 < 2,03452 = t(40 - 7)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzeko, %5eko esangura-maila izanik, hau da, emakumeen pizza-kontsumoa gizonena baino 200 euro gutxiago da, beste ezaugarriak berdinak izanik.

8. Ikasketa-maila altuena aldagaia ez da pizza-kontsumoa azaltzeko esanguratsua, baldin eta beste ezaugarriak berdinak badira eta banako guztientzat kontsumoa bera espero bada.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_5 &= \beta_6 = \beta_7 = 0 \\ H_a : \beta_5 &\neq 0 \text{ edota } \beta_6 \neq 0 \text{ edota } \beta_7 \neq 0 \end{aligned}$$

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $q = 3$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P10.2), hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + \beta_3 A_i + \beta_4 E_i + u_i$$

$$F = \frac{(275888,8 - 215476,3)/3}{215476,3/(40 - 7)} = 3,08404 > 2,89156 = \mathcal{F}(3, 40 - 7)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; ondorioz, ikasketamaila altuena aldagaia esanguratsua da pizza-kontsumoa azaltzeko, behin gainerako aldagaiak eredian daudenean.

### HIRUGARREN ZATIA.

1. P10.3 eredia:

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + \beta_3 A_i + \beta_4 E_i + \beta_5 LM_i + \beta_6 BM_i + \beta_7 GM_i + \beta_8 (R_i \times E_i) + u_i \quad i = 1, \dots, 40.$$

Bai. Izan ere, gainerako oinarrizko hipotesiak betetzen direla pentsatuz, eredia koefizienteekiko lineala da. Bestalde, eredia ez da lineala aldagai azaltzaileekiko; izan ere, errenta eta generoa aldagaien arteko elkar-eragina sartu da, baina horrek ez du oinarrizko hipotesirik ezeztatzen.

2.

$$X = \begin{bmatrix} & R & A & E & LM & BM & GM & R \times E \\ 1 & 15 & 27 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 1 & 30 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 1 & 12 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 20 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 15 & 17 & 1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 1 & 30 & 22 & 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 1 & 12 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 12 & 12 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 28 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 28 \\ 1 & 22 & 22 & 1 & 0 & 1 & 0 & 22 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

3. Lagineko lehen hamar behaketak emakumeen datuei dagozkie. Hortaz, datu-matrizeak kolinealtasun zehatza du, beraren lehen zutabea (konstantearena) eta laugarren zutabea ( $E$  fikzio-aldagaiarena) berdina baitira. Horretaz gainera,  $R_i \times E_i = R_i$  litzatekeenez,  $X$  datu-matrizearen azken zutabea eta bigarren zutabea ere berdina lirateke, eta kolinealtasunaren arazoa agertuko litzateke berriro. Ondorioz,  $X$  datu-matrizea hein osokoa ez denez,  $(X'X)$  matrizea ez da alderantzikagarria, eta koefizienteak ezin dira banaka estimatu.

4. Errentak espero den kontsumoan duen eragina:

$$\frac{\partial E(C_i)}{\partial R_i} = \beta_2 + \beta_8 E_i = \begin{cases} \beta_2 + \beta_8 & i \in \text{Emakumea} \\ \beta_2 & i \in \text{Gizona} \end{cases}$$

Eragin hori ez da konstantea laginean zehar, generoaren arabera baita. Errenta eta generoa aldagaien elkar-eragina kontuan hartuz gero, errentak eragin desberdina du kontsumoan, banakoa emakumea edo gizona izan. Izatez, errenta mila euro igotzean emakume eta gizonen kontsumoan izaten den gehikuntzen arteko diferentzia neurtzen du  $\beta_8$  koefizienteak, adina eta ikasketak-maila altuena konstante mantenduz.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_8 &= 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_8 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_8}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \\ H_a : \beta_8 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{-0,152513 - 0}{0,0684368} \right| = |-2,2285| > 2,03693 = t(40 - 8)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, errentak kontsumoan duen eragina ez da konstantea laginean zehar, desberdina baita emakume eta gizonentzat.

5. Goi-mailako ikasketak ( $GM = 1$ ) dituen emakume baten ( $E = 1$ ) kontsumo estimatua:

$$\begin{aligned} \hat{C}_i &= 236,640 R_i - 8,9736 A_i - 115,72 - 56,106 - 0,00152513 R_i = \\ &= 236,640 + (0,395667 - 0,152513) R_i - 8,9736 A_i - 115,72 - 56,106 = \\ &= 64,814 + 0,243154 R_i - 8,9736 A_i \text{ euro} \end{aligned}$$

6. Errenta aldagaia ez da esanguratsua izango, baldin eta pizza-kontsumoan ez badu eragiten:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 &= \beta_8 = 0 & F &= \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k) \\ H_a : \beta_2 &\neq 0 \text{ edota } \beta_8 \neq 0 \end{aligned}$$

non  $q = 2$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko eredu (P10.3) hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$C_i = \beta_1 + \beta_3 A_i + \beta_4 E_i + \beta_5 EP_i + \beta_6 ES_i + \beta_7 EU_i + u_i$$

$$F = \frac{(501199,2 - 186527,9)/2}{186527,9/(40 - 8)} = 26,9919 > 3,29454 = \mathcal{F}(2, 40 - 8)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, errenta aldagaia esanguratsua da pizza-kontsumoa azaltzeko, behin gainerako aldagaiak eredu-  
duan daudenean.

## LAUGARREN ZATIA.

1. P10.4 eredu:

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + \beta_3 A_i + \beta_4 E_i + \beta_5 LM_i + \beta_6 BM_i + \beta_7 GM_i + \beta_8 (R_i \times A_i) + u_i$$

Aurkeztutako hipotesia jasotzeko, errenta ( $R$ ) eta adina ( $A$ ) aldagaien arteko elkar-  
eragina ( $R \times A$ ) terminoaren bitartez sartu da eredu-  
duan. Hala, errentak pizza-  
kontsumoan duen eragin marjinala adinaren arabera da:

$$\frac{\partial E(C_i)}{\partial R_i} = \beta_2 + \beta_8 A_i \quad i = 1, 2, \dots, 40.$$

1.1. Pizza-kontsumoan espero den gehikuntza, ceteris paribus:

$$\Delta R = 500 \text{ euro} : \quad \Delta E(C) = 0,5 \times (\beta_2 + \beta_8 A_i)$$

$$\Delta R = 1000 \text{ euro} : \quad \Delta E(C) = \beta_2 + \beta_8 A_i$$

1.2. Pizza-kontsumoan espero den gehikuntza, ceteris paribus:

$$\Delta R = 1000 \text{ euro}, A_i = (20 - 18) \text{ urte} : \quad \Delta E(C) = \beta_2 + \beta_8 \times 2 \text{ euro}$$

$$\Delta R = 1000 \text{ euro}, A_i = (40 - 18) \text{ urte} : \quad \Delta E(C) = \beta_2 + \beta_8 \times 22 \text{ euro}$$

2. Laginaren erregresio-zuzena:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_i = & 236,534 + 0,4880 R_i - 6,5534 A_i - 172,861 E_i + 60,327 LM_i - \\ & (50,006) \quad (0,1536) \quad (2,2145) \quad (26,282) \quad (37,831) \\ & - 25,778 BM_i - 69,724 GM_i - 0,008251 (R \times A)_i \quad i = 1, 2, \dots, 40 \\ & (42,039) \quad (60,306) \quad (0,005961) \end{aligned}$$

$$R^2 = 0,785465 \quad HKB = 203304,1$$

2.1. Pizza-kontsumoan espero den gehikuntza estimatua, ceteris paribus:

$$\begin{aligned}\Delta R = 500 \text{ euro:} \quad \Delta \widehat{E}(C) &= 0,5 \times (\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_8 A_i) \\ \Delta \widehat{E}(C) &= 0,5 \times (0,4880 - 0,008251 A_i) \\ \Delta \widehat{E}(C) &= 0,2440 - 0,004125 A_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta R = 1000 \text{ euro:} \quad \widehat{\Delta E}(C) &= \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_8 A_i \\ \Delta \widehat{E}(C) &= 0,4880 - 0,008251 A_i\end{aligned}$$

2.2. Pizza-kontsumoan espero den gehikuntza estimatua, ceteris paribus:

$\Delta R = 1000$  euro,  $A_i = (20 - 18)$  urte :

$$\Delta \widehat{E}(C) = \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_8 \times 2 = 0,4880 - 0,008251 \times 2 \text{ euro}$$

$\Delta R = 1000$  euro,  $A_i = (40 - 18)$  urte:

$$\Delta \widehat{E}(C) = \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_8 \times 22 = 0,4880 - 0,008251 \times 22 \text{ euro}$$

3. La-hipotesiaren kontrastea.

$$\begin{aligned}H_0 : \beta_8 &= 0 \\ H_a : \beta_8 &\neq 0\end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_8 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_8}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{-0,008251 - 0}{0,005961} \right| = 1,384 < 2,03693 = t(265 - 4)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzeko, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, ez dago lan-hipotesiaren aldeko lagin-ebidentziarik. Ondorioz, errenta gehitzeak pizza-kontsumoan duen eragina ez da adinaren arabera.

4. Errenta aldagaia ez da esanguratsua izango, baldin eta pizza-kontsumoan eragiten ez badu:

$$\begin{aligned}H_0 : \beta_2 = \beta_8 &= 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_8 &\neq 0\end{aligned} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $q = 2$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P10.4) hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$C_i = \beta_1 + \beta_3 A_i + \beta_4 E_i + \beta_5 LM_i + \beta_6 BG_i + \beta_7 GM_i + u_i$$

$$F = \frac{(501199,2 - 203304,1)/2}{203304,1/(40 - 8)} = 23,4443 > 3,29454 = \mathcal{F}(2, 40 - 8)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Ondoriozta daiteke errenta aldagai esanguratsua dela pizza-kontsumoa azaltzeko.

### BOSGARREN ZATIA.

1. P10.5 erredua:

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + \beta_3 A_i + \beta_4 E_i + \beta_5 LM_i + \beta_6 BM_i + \beta_7 GM_i + \beta_8 R_i^2 + u_i \quad i = 1, \dots, 40.$$

Errenta gehitzeak pizza-kontsumoan duen eragina banakoaren errentaren arabera da, eta horrek adierazten du errentaren eta pizza-kontsumoaren arteko erlazioa ez dela lineala. Lan-hipotesi hori jasotzeko, errentaren eta pizza-kontsumoaren arteko erlazio koadratikoa proposatu da P10.5 erreduan.

2. Pizza-kontsumoan espero den gehikuntza, ceteris paribus, ez da konstantea, banakoaren errentaren arabera baita:

$$\frac{\partial E(C_i)}{\partial R_i} = \beta_2 + 2\beta_8 R_i$$

3. Laginaren erregresio-zuzena:

$$\begin{aligned} \hat{C}_i = & 250,494 + 0,4991 R_i - 10,1336 A_i - 169,006 E_i + 65,4304 LM_i - \\ & (41,996) \quad (0,1341) \quad (1,6429) \quad (26,2457) \quad (36,4712) \\ & - 33,5246 BM_i - 104,923 GM_i - 0,000095 R_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, 40 \\ & (42,2678) \quad (66,4836) \quad (0,000056) \end{aligned}$$

$$R^2 = 0,791253 \quad HKB = 197819,8$$

4. Lan-hipotesiaren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_8 &= 0 \\ H_a : \beta_8 &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_8 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_8}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{-0,000095 - 0}{0,000056} \right| = 1,69 < 2,03693 = t(40 - 8)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzeko, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, ez dago lan-hipotesiaren aldeko lagin-ebidentziarik. Ondorioz, errenta gehitzeak pizza-kontsumoan duen eragina ez da banakoaren errentaren arabera.

5. Errenta aldagaia esanguratsua izango da, baldin eta pizza-kontsumoan eragiten badu:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = \beta_8 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_8 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $q = 2$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P10.5) hondarren karratuen batura de, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$C_i = \beta_1 + \beta_3 A_i + \beta_4 E_i + \beta_5 LM_i + \beta_6 BG_i + \beta_7 GM_i + u_i$$

$$F = \frac{(501199,2 - 197819,8)/2}{197819,8/(40 - 8)} = 24,5378 > 3,29454 = \mathcal{F}(2, 40 - 8)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, errenta aldagaia esanguratsua da pizza-kontsumoa azaltzeko, behin gainerako aldagaiak erudian daudenean.

## P11. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

- Bai. Izan ere, nahiz eta eredia ez izan aldagai azaltzaileekiko lineala, koefizienteekiko lineala da; ez dago kolinealtasun zehatzik ( $\sum_{t=1}^{29} (\log P_t - \overline{\log P})^2 \neq 0$ ), eta ondo zehaztuta dago eskuragarri dagoen informazioaren bitartez. Bestalde, perturbazioaren esperantza zero da; bariantza konstantea da; ez dago autokorrelaziorik (perturbazioak independenteak direlako), eta banaketa normala jarraitzen da.
- Populazioaren erregresio-zuzena:

$$E(\log Z_t) = \beta_1 + \beta_2 \log P_t + \beta_3 \log R_t \quad t = 1960, 1961, \dots, 1988.$$

$\beta_2$  : espero den zigarro-kontsumoaren gehikuntzaren ehunekoa, zigarroen prezio erreala % 1 igotzean eta errenta konstante mantenduz.

$\beta_3$  : espero den zigarro-kontsumoaren gehikuntzaren ehunekoa, per capita errenta erreala % 1 handitzean eta zigarroen prezioa konstante mantenduz.



Eredua logaritmiko bikoitza denez,  $\beta_1$  eta  $\beta_2$  koefizienteak prezioarentzat eta errentarentzat espero den elastikotasuna dira, hurrenez hurren.

3.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \log P_{1960} & \log R_{1960} \\ 1 & \log P_{1961} & \log R_{1961} \\ 1 & \log P_{1962} & \log R_{1962} \\ 1 & \log P_{1963} & \log R_{1963} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \log P_{1988} & \log R_{1988} \end{bmatrix} \quad X'Y = \begin{bmatrix} \sum \log Z_t \\ \sum \log Z_t \log P_t \\ \sum \log Z_t \log R_t \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} T & \sum \log P_t & \sum \log R_t \\ \sum \log P_t & \sum \log P_t^2 & \sum \log P_t \log R_t \\ \sum \log R_t & \sum \log P_t \log R_t & \sum \log R_t^2 \end{bmatrix}$$

4. Laginaren erregresio-zuzena:

$$\widehat{\log Z}_t = -4,58987 - 0,485683 \log P_t + 0,688498 \log R_t$$

(0,724913)      (0,101394)      (0,0947276)

$$R^2 = 0,712058 \quad \sum \hat{u}_t^2 = 0,094911$$

5. Banakako esanguraren kontrastea: zigarroen prezioa.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 &= 0 \\ H_a : \beta_2 &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k)$$

$$|t| = \left| \frac{-0,485683 - 0}{\sqrt{0,101394}} \right| = 4,79 > 2,05553 = t(29 - 3)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten denez, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, badago prezioak espero den zigarro-kontsumoan eragiten duela esateko lagin-ebidentziarik.

6. Inferentzia P11.1 eredian baliagarria izateko, erregresio lineal orokorraren ereduaren oinarritzko hipotesi guztiak bete behar dira:

- Eredua ondo zehaztuta egotea.
- Eredua koefizienteekiko lineala izatea.
- Koefizienteak konstanteak izatea laginean zehar.
- Aldagai azaltzaile finkoak izatea.

- Kolinealtasun zehatzik ez izatea.
  - Perturbazioen esperantza zero izatea:  $E(u_t) = 0 \forall t$ .
  - Perturbazioen bariantza konstantea izatea:  $B(u_t) = \sigma_u^2 \forall t$ .
  - Autokorrelazio eza:  $E(u_t u_s) = 0 \forall t \neq s$ .
  - Perturbazioen banaketa normala izatea.
7. Ondo zehaztuta dagoen eredu bateko hondarrek, hau da, oinarritzko hipotesi guztiak betetzen dituen erregresio linealeko eredu bateko hondarrek, perturbazioen antzeko portaera izaten dute: zeroren ingurukoa, bariantza konstantekoa eta inolako joera berezirik gabekoa.

P11.1 ereduaren KTA estimatzailearen hondarrak ez dira zeroren inguruan aleatorioki mugitzen. 1980. urtera arte, gutxi gorabehera, joera gorakorra dute, eta, ondoren, joera beherakorra ikusten da, azken hondar guztiak negatiboak izanik.

Emitza horrek adierazten du ereduaren zehaztapenean zerbait txarto dagoela. Bali-teke 1980. urtetik aurrera gertatzen den aldaketa azaltzeko aldagai esanguratsuren bat kontuan ez hartu izana.

## BIGARREN ZATIA.

1. P11.2 eredu:

$$\log Z_t = \alpha_1 + \alpha_2 \log P_t + \alpha_3 \log R_t + \alpha_4 D82_t + \alpha_5 D86_t + u_t \quad t = 1960, 1961, \dots, 1988.$$

P11.2 ereduan, aldagai azaltzaile kualitatibo berriak sartu dira, kanpainen (1982koa eta 1986koa) eragina jasotzeko. Aldagai horiek fikzio-aldagaien bitartez txertatu behar dira ereduan. Hala, 1982ko kanpaina aldagai kualitatiboak bi kategoria dituzenez, bi fikzio-aldagai sortu dira; bata, kanpainarik egon ez dela jasotzeko (1982. urtea baino lehen), eta bestea, kanpaina egon dela jasotzeko (1982. urtetik aurrera). Fikzio-aldagai horien definizioak hauek dira:

$$ED82_t = \begin{cases} 1 & t \in [1960 - 1981] \\ 0 & t \in [1982 - 1988] \end{cases} \quad D82_t = \begin{cases} 1 & t \in [1982 - 1988] \\ 0 & t \in [1960 - 1981] \end{cases}$$

Ereduko  $X$  datu-matrizean kolinealtasun zehatzaren arazoa saihesteko, termino konstanteko eredu honetan definitutako bi fikzio-aldagaietatik bakararra sartu da;  $D82$  aldagaia, hain zuzen.

Era berean, 1986ko kanpaina aldagai kualitatiboa txertatzeko, gauza bera egin behar da; kasu horretan,  $D86$  fikzio-aldagaia txertatu behar da, bigarren kanpaina egin dela jasotzen duena.

2. Espero den zigarro-kontsumoa:

$$1960 - 1981 : \quad E(\log Z_t) = \alpha_1 + \alpha_2 \log P_t + \alpha_3 \log R_t$$

$$1982 - 1985 : \quad E(\log Z_t) = \alpha_1 + \alpha_2 \log P_t + \alpha_3 \log R_t + \alpha_4$$

$$1986 - 1988 : \quad E(\log Z_t) = \alpha_1 + \alpha_2 \log P_t + \alpha_3 \log R_t + \alpha_4 + \alpha_5$$

3.  $\hat{\alpha}_4 = -0,101307$ : 1982-1985 eta 1960-1981 epeetako zigarro-kontsumoaren arteko diferentzia estimatua (logaritmotan), prezioa eta errenta berdinak izanik.

$\hat{\alpha}_5 = -0,100729$ : 1986-1988 eta 1982-1985 epeetako zigarro-kontsumoaren arteko diferentzia estimatua (logaritmotan), prezioa eta errenta berdinak izanik.

4. Kanpaina bat eraginkorra izango da baldin eta zigarroen kontsumoa jaisten badu.

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha_i &= 0 & t &= \frac{\hat{\alpha}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k) & i &= 4, 5. \\ H_a : \alpha_i &< 0 & & & & \end{aligned}$$

$$82\text{ko kanpaina (D82)} \quad t = \frac{-0,101307 - 0}{0,0258239} = -3,923 < -1,71088 = t(29 - 5)_{0,05}$$

$$86\text{ko kanpaina (D86)} \quad t = \frac{-0,100729 - 0}{0,0360802} = -2,7918 < -1,71088 = t(29 - 5)_{0,05}$$

Aurreko bi kontrasteetan, hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Orduan, bi kanpainak (Osasun Ministerioaren kanpaina eta egunkarietan egindako kanpaina) banaka eraginkorrak izan dira, zigarroen kontsumoa jaitsarazten dutelako.

5. P11.2 ereduko KTA estimatzailearen hondarrak zeroren inguruan sakabanaturik daude, eta ez dute inolako joerarik adierazten. P11.1 ereduko hondarren grafikoaren azken zatian nabaritzen zen joera beherakorra zuzendu egin da. Bi kanpainen aldagai azaltzaileak erudian barneratzean, hondarren portaera zuzendu egin da, eta, ondorioz, esan dezakegu P11.1 erudian zehaztaperen-errore bat zegoela; kanpaina aldagai azaltzaile esanguratsua kontuan hartu ez izana, hain zuzen.

Bestalde, hondarren grafikoari erreparatuz, aipatu beharra dago hondarren bariantza handitu egiten dela laginaren amaieran. Beraz, hondarren bariantza ez da konstantea laginean zehar, eta emaitza horrek adierazten du perturbazioak heterozedastikoak izan daitezkeela.

6. P11.2 eredia; izan ere, bigarren zati honetako laugarren atalean egindako kontrasteen emaitzetan, 1982 eta 1986ko kanpainak banaka esanguratsuak direla ondorioztatu da. Hala, P11.1 erudian aldagai esanguratsuak kontuan hartu ez direnez, KTA estimatzailea alboratua da, eta inferentzia ez da baliagarria.

**HIRUGARREN ZATIA.**

1. P11.3 eredu:

$$\begin{aligned} \log Z_t &= \delta_1 + \delta_2 \log P_t + \delta_3 \log R_t + \delta_4 D82_t + \delta_5 D86_t + \\ &+ \delta_6 \log P_t D82_t + \delta_7 \log P_t D86_t + \delta_8 \log R_t D82_t + \delta_9 \log R_t D86_t + u_t \end{aligned}$$

P11.3 eta P11.2 ereduak aldagai azaltzaile berak dituzte, baina forma funtzional desberdinak zehaztu dira. Prezioa eta errenta aldagaiek ( $\log P$  eta  $\log R$ ) kanpaina aldagai azaltzailearekin duten erlazioa ez da lineala. Ereduan haien arteko elkar-eraginak txertatu direnez, prezioak eta errentak kontsumoan duten eragina (elastikotasuna) ez da konstantea laginean zehar, kanpainen araberakoa baita. Izatez, egitura-aldaketa bat zehaztu da erudian, hau da, ereduko koefizienteak desberdinak dira lagineko hiru epeentzat.

2. Espero den zigarro-kontsumoa:

1960 – 1981 :

$$E(\log Z_t) = \delta_1 + \delta_2 \log P_t + \delta_3 \log R_t$$

1982 – 1985 :

$$\begin{aligned} E(\log Z_t) &= \delta_1 + \delta_2 \log P_t + \delta_3 \log R_t + \delta_4 + \delta_6 \log P_t + \delta_8 \log R_t \\ &= (\delta_1 + \delta_4) + (\delta_2 + \delta_6) \log P_t + (\delta_3 + \delta_8) \log R_t \end{aligned}$$

1986 – 1988 :

$$\begin{aligned} E(\log Z_t) &= \delta_1 + \delta_2 \log P_t + \delta_3 \log R_t + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 \log P_t + \delta_7 \log P_t + \delta_8 \log R_t \\ &= (\delta_1 + \delta_4 + \delta_5) + (\delta_2 + \delta_6 + \delta_7) \log P_t + (\delta_3 + \delta_8 + \delta_9) \log R_t \end{aligned}$$

3. Errenta-elastikotasuna =  $\frac{E(\log Z_t)}{\partial \log R_t}$ .

Errenta-elastikotasunaren estimazioa:

$$1960 - 1981 : \hat{\delta}_3 = 0,735837$$

$$1982 - 1985 : \hat{\delta}_3 + \hat{\delta}_8 = -1,346643$$

$$1986 - 1988 : \hat{\delta}_3 + \hat{\delta}_8 + \hat{\delta}_9 = 2,904707$$

Errenta-elasticotasuna ez da konstantea denboran zehar; balio desberdina hartzen du lagineko epe bakoitzaren arabera.

4.  $\hat{\delta}_8 = -2,80248$ : errenta % 1 handitzean 1982-1985 eta 1960-1981 epeetako kontsumoaren gehikuntzen ehunekoen arteko diferentzia estimatua, prezioa konstante mantenduz.  
= 1982-1985 eta 1960-1981 epeetako errenta-elasticotasunen arteko diferentzia estimatua, prezioa konstante mantenduz.

$\hat{\delta}_9 = 4,25135$ : errenta % 1 handitzean 1986-1988 eta 1982-1985 epeetako kontsumoaren gehikuntzen ehunekoen arteko diferentzia estimatua, prezioa konstante mantenduz.  
= 1986-1988 eta 1982-1985 epeetako errenta-elasticotasunen arteko diferentzia estimatua, prezioa konstante mantenduz.

5. Bi erduetatik bat aukeratzeko, egitura-aldaketa aztertu behar da, koefizienteak denboran zehar konstante mantendu diren ala ez jakiteko:

$$H_0 : \delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = \delta_9 = 0$$

$$H_a : \delta_6 \neq 0 \text{ edota } \delta_7 \neq 0 \text{ edota } \delta_8 \neq 0 \text{ edota } \delta_9 \neq 0$$

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P11.3) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P11.2) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 4$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(0,040520 - 0,016601)/4}{0,016601/(29 - 9)} = 7,20384 > 2,86608 = \mathcal{F}_{0,05}(4, 20)$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Badago lagin-ebidentziarik egitura-aldaketa bat gertatu dela esateko.

Kontrastearen emaitzan oinarrituz, P11.3 erdua aukeratuko dugu; izan ere, P11.2 erduan forma funtzionalaren zehaztapen-errore bat dagoenez, KTA estimatzaile alboratua erabili da, eta inferentzia ez da baliagarria.

## P12. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. ELOE:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 L_t + \beta_4 PG_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1989:1, \dots, 2010:4$$

2. LEZ:

$$\begin{array}{r} \hat{S}_t \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) \end{array} = \begin{array}{r} 304,430 \\ (173,557) \end{array} - \begin{array}{r} 1,41396 \\ (0,983204) \end{array} P_t + \begin{array}{r} 2,56275 \\ (0,798534) \end{array} L_t + \begin{array}{r} 0,743241 \\ (0,0757153) \end{array} PG_t$$

$$R^2 = 0,994851 \quad HKB = 96083,63$$

3.  $\hat{\beta}_2 = -1,41396$ . Txakolin-botilaren batez besteko prezioa euro bat igotzean, 1,4139 botila gutxiago saltzen direla estimatzen da, lehiakoen batez besteko prezioa eta publizitatean egindako gastua konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_3 = 2,56275$ . Lehiako enpresen batez besteko prezioa euro bat igotzean, 2,56275 botila gehiago salduko direla estimatzen da, enpresaren batez besteko prezioa eta publizitatean egindako gastua konstante mantenduz.

Bi koefizienteen zeinuak espero zirenak dira. Eskari-eredu bat estimatzen ari garenez, ondasunaren prezioarekiko erlazioa alderantzizkoa (negatiboa) da, eta lehiako ondasunen prezioekiko erlazioa, berriz, zuzena (positiboa) da.

$$4. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sum (S_t - \bar{S})^2} = 0,994851$$

Interpretazioa: lagineko txakolin-botilen salmentaren aldagarritasunaren % 99,4851 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez, hau da, bi prezioen eta publizitatean egindako gastuaren aldagarritasunaren bitartez.

5. Behatutako balioa:  $S_{90:2} = 1863,5$  botila.

Estimatutako balioa:

$$\hat{S}_{90:2} = 304,43 - 1,41396 \times 39,4 + 2,56275 \times 23,7 + 0,7432 \times 2098 = 1868,8 \text{ botila.}$$

$$\text{Diferentzia: } S_{1990:2} - \hat{S}_{1990:2} = 1863,5 - 1868,8 = -5,3 \text{ botila.}$$

Diferentzia horri hondarra deritzo.

6. Gehikuntza estimatua:

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta S}_t &= \hat{S}_t - \hat{S}_{t-1} = -1,41396 \times \Delta P_t + 2,56275 \times \Delta L_t + 0,743241 \times \Delta PG_t = \\ &= -1,41396 \times \Delta P_t + 2,56275 \times \Delta L_t + 0,743241 \times 200 = \\ &= (-1,41396 \times \Delta P_t + 2,56275 \times \Delta L_t + 148,6482) \text{ botila}\end{aligned}$$

Enpresaren eta lehiako enpresen batez besteko prezioak konstante mantentzen badira, orduan:

$$\widehat{\Delta S}_t = 0,743241 \times 200 = 148,6482 \text{ botila.}$$

7.  $\hat{\beta}_4 = 0,743241$  koefizientearen interpretazioa: publizitatean egindako gastua euro bat handitzen bada, beste aldagaiak konstante mantenduz,  $0,743241$  botila gehiago salduko direla estimatzen da.

Orduan, publizitatean egindako gastua 100 euro handitzen bada,  $100 \times 0,743241 = 74,3241$  botila gehiago salduko direla estimatzen da.

Aurreko emaitza  $\beta_4$  koefizientearen puntuzko estimazioan oinarritzen da. Informazio zehatzagoa nahi izanez gero, aipatutako koefizientearen konfiantza-tartea atera beharko litzateke, tartea horrek gehikuntza minimoa eta maximoa adierazten baititu. Kasu honetan,  $100 \beta_4$  dagokion tartea da interesgarria:

$$\begin{aligned}KT(100 \beta_4)_{\%95} &= \left[ 100 \hat{\beta}_4 \pm t(T-k)_{0,05/2} 100 \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4} \right] = \\ &= 100 \left[ \hat{\beta}_4 \pm t(T-k)_{0,05/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4} \right] = \\ &= 100 \left[ 0,743241 \pm t(88-4)_{0,05/2} 0,0757153 \right] = \\ &= 100 \left[ 0,743241 \pm 1,98861 \times 0,0757153 \right] = \\ &= 100 \left[ 0,743241 \pm 0,150568202 \right] = \\ &= 100 \left[ 0,592672797 \quad 0,893809202 \right] = \\ &= [59,2672797 \quad 89,3809202] \text{ botila}\end{aligned}$$

Hala, bada, publizitatean egindako gastua 100 euro handitzean, 60 botilako gehikuntza minimoa estimatzen da salmentetan, eta 90 botilako gehikuntza maximoa, gutxi gorabehera.

8. Prezioa aldagai azaltzaileen banakako esangura.

$$\begin{aligned}H_0 : \beta_i &= 0 \\ H_a : \beta_i &\neq 0\end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T-k) \quad i = 2, 3.$$

$$\text{Enpresaren prezioa (P)} \quad |t| = \left| \frac{-1,41396 - 0}{0,9832} \right| = 1,438 < 1,9886 = t(88 - 4)_{0,05/2}$$

$$\text{Lehiako enpresen prezioa (L)} \quad |t| = \left| \frac{2,56275 - 0}{0,79853} \right| = 3,2093 > 1,9886 = t(88 - 4)_{0,05/2}$$

Beraz, % 5eko esangura-maila izanik, ondoriozta daiteke enpresaren batez besteko prezioa ez dela banaka esanguratsua, baina lehiako enpresen batez besteko prezioa badela esanguratsua.

#### 9. Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

$$F = \frac{0,994851/3}{(1 - 0,994851)/(88 - 4)} = 5409,541 > 2,71323 = \mathcal{F}(3, 84)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, bi prezioak eta publizitatean egindako gastua batera esanguratsua dira espero diren salmentak azaltzeko.

Hasiera batean ez dirudi lagin-arazorik dagoenik, lehiako enpresen batez besteko prezioa eta publizitatean egindako gastua aldagai azaltzaileak banaka esanguratsua baitira, nahiz eta enpresaren batez besteko prezioa esanguratsua ez izan.

10. Alde batetik, hondarrak zeroren inguruan sakabanatze konstante batekin mugitzen direnez, perturbazioen bariantza konstantearen oinarrizko hipotesia betetzen da. Bestalde, hondarren bolada positiboak eta negatiboak agertzen direnez denboran zehar, baliteke autokorrelazio positiboa egotea eta denbora-une bateko perturbazioa iraganako perturbazioen arabera izatea. Hori horrela balitz, perturbazioen autokorrelazio ezaren oinarrizko hipotesia ez litzateke beteko.

## BIGARREN ZATIA.

### 1. P12.2 eredu:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 L_t + \beta_4 PG_t + \beta_5 EGU_t + u_t \quad t = 1989:1, \dots, 2004:4$$

Eredu horren eta P12.1 ereduaren arteko diferentzia da P12.2 ereduak aldagai azaltzaile berri bat duela. Eguraldia aldagai berria kualitatiboa da, eta bi kategoria ditu: eguraldi aproposa eta eguraldi txarra. Ereduan termino konstantea mantendu denez, bi kategorietatik bakarra txertatu da (EGU fikzio-aldagaia), zeinak bat balioa hartzen duen baldin eta eguraldia aproposa ez bada, eta zero, bestela.



2.  $\hat{\beta}_5 = -55,9927$ : eguraldi txarreko epean eguraldi oneko epean baino 55,9927 botila gutxiago saldu zirela estimatzen da, beste ezaugarriak berdinak izanik, hau da, enpresaren batez besteko prezioa, lehiako enpresen batez besteko prezioa eta publizitatean egindako gastua berdinak izanik. Koefiziente estimatuak espero genuen zeinua du: izan ere, espero izatekoa zen eguraldi txarraren eraginez ekoizpena jaistea eta ondorioz salmentak txikitzea.
3. Mutur bateko kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_5 &= 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_5 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_5}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k) \\ H_a : \beta_5 &< 0 \end{aligned}$$

$$t = \frac{-55,9927 - 0}{6,59108} = -8,4952 < -1,66342 = t(88 - 5)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Badago lagin-ebidentzia eguraldi txarrak salmentak jaitsi zituela esateko.

4. Grafikoko hondarrak zeroren inguruan sakabanatze konstante batekin mugitzen dira. P12.1 ereduko hondarren grafikoarekin alderatuz, hondarren portaera zerbait zuzendu dela nabaritu daiteke, bolada positibo eta negatiboak laburragoak batira. Badirudi eguraldia aldagaia barneratzeak arazoa pixka bat leundu duela.
5. Prezioa aldagai azaltzaileen banakako esangura.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_i &= 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k) & i &= 2, 3. \\ H_a : \beta_i &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Enpresaren prezioa (P)} \quad |t| = \left| \frac{-2,883 - 0}{0,743793} \right| = 3,8764 > 1,989 = t(88 - 5)_{0,05/2}$$

$$\text{Lehiako enpresen prezioa (L)} \quad |t| = \left| \frac{3,02811 - 0}{0,590079} \right| = 5,1317 > 1,989 = t(88 - 5)_{0,05/2}$$

Kontrasteen emaitzak aztertuz, enpresaren eta lehiakoen batez besteko prezioak banaka esanguratsuak direla ondorioztatzen da, % 5eko esangura-maila izanik.

Eguraldia aldagai azaltzaile kualitatiboa esanguratsua denez, P12.1 erudian ez da kontuan hartu aldagai esanguratsu bat, eta ez dira oinarrizko hipotesi guztiak betetzen; zehaztapen-errorearena, hain zuzen, ez da betetzen. Ondorioz, ereduko koefizienteen KTA estimatzaileak alboratuak dira; perturbazioen bariantzaren estimatzailea ere alboratua da, eta egindako inferentzia ez da baliagarria. Horregatik,

lehen zatiko zortzigarren atalean egindako banakako kontrasteak ez dira baliagarriak, erabilitako estatistikoez ez dutelako ohiko Studenten- $t$  banaketa jarraitzen. Atal horretako kontrasteen konklusioak ez dira fidagarriak.

## HIRUGARREN ZATIA.

### 1. ELOE:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 L_t + \beta_4 PG_t + \beta_5 EGU_t + \beta_6 dq1_t + \\ + \beta_7 dq2_t + \beta_8 dq3_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1989:1, \dots, 2010:4.$$

### 2. LEZ:

$$\begin{aligned} \widehat{S}_t &= 458,366 - 2,84476 P_t + 2,99899 L_t + 0,690514 PG_t - \\ (\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}}) & \quad (131,504) \quad (0,755292) \quad (0,599282) \quad (0,0569771) \\ & - 55,9285 EGU + 1,93326 dq1_t + 1,40220 dq2_t + 6,30854 dq3_t \\ & \quad (6,68217) \quad (7,61884) \quad (7,61273) \quad (7,62133) \end{aligned}$$

$$R^2 = 0,997272 \quad HKB = 50907,59$$

3.  $\widehat{\beta}_1 = 458,366$ : laugarren hiruhilekoko txakolin-botilen salmenta estimatua, eguraldi oneko epean, prezioak (enpresarena eta lehiakoena) eta publizitatean egindako gastua zero izanik.

$\widehat{\beta}_7 = 1,40220$ : bigarren eta laugarren hiruhilekoko txakolin-botilen salmenten diferentzia estimatua, eguraldia, prezioak (enpresarena eta lehiakoena) eta publizitatean egindako gastua berdinak izanik.

### 4. PraktikaP12.gdt fitxategiko datuetan oinarrituz:

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{03:1} &= 458,366 - 2,845 P_{03:1} + 2,999 L_{03:1} + 0,691 PG_{03:1} - 55,9285 + 1,93326 \\ &= 2712,3 \text{ botila} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{04:1} &= 458,366 - 2,845 P_{04:1} + 2,999 L_{04:1} + 0,691 PG_{04:1} + 1,93326 \\ &= 2833,4 \text{ botila} \end{aligned}$$

5. Urtaroa aldagaia ez da esanguratsua izango salmentak azaltzeko, baldin eta hiruhilekoetan espero diren salmentak berak badira, beste ezaugarriak ere berdinak izanik.

$$H_0 : \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = 0$$

$$H_a : \beta_6 \neq 0 \text{ edota } \beta_7 \neq 0 \text{ edota } \beta_8 \neq 0$$

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P12.3) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P12.2) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 3$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(51395, 28 - 50907, 59)/3}{50907, 59/(88 - 8)} = 0, 255464 < 1, 99006 = \mathcal{F}_{0,05}(3, 80)$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, urtaroa aldagaia ez da esanguratsua salmentak azaltzeko, behin beste aldagaiak ereduari daudenean.

6. P12.2 ereduaren arrazoi hauengatik:

- P12.1 ereduak kontuan hartzen ez duenez eguraldia aldagai azaltzailea, haren koefizienteen KTA estimatzaileak alboratuak dira, eta inferentzia ez da baliagarria.
- P12.3 ereduak esanguratsua ez den urtaroa aldagaia hartzen du kontuan. Hala ere, haren koefizienteen KTA estimatzaileak alboragabeak dira oraindik ere, eta egindako inferentzia baliagarria da. Baina, eredu horretan, urtaroa aldagai esanguratsua ez delako egiazko murrizketa barneratzean P12.2 eredu murriztua lortzen denez, azken horretan erabilitako estimatzaileak P12.3 ereduari erabilitako estimatzaileak baino bariantza txikiagoa du.

## P13. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. KTA estimazioa.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S})(H_i - \bar{H})}{\sum_{i=1}^N (H_i - \bar{H})^2} = \frac{30421, 7551}{270, 5306} = 112, 452$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{S} - \hat{\beta}_2 \bar{H} = \frac{89190}{49} - 112, 4521777 \times \frac{305}{49} = 1120, 25$$

Laginaren erregresio-zuzena:  $\hat{S}_i = 1120, 25 + 112, 452 H_i \quad i = 1, 2, \dots, 49.$

2.  $\hat{\beta}_2 = 112,452$ : oinarrizko ikasketak amaitu ondoren hezkuntza-urte bat gehitzean, 112,452 euroko gehikuntza estimatzen da soldatan.

$$3. R^2 = 1 - \frac{HKB}{KBO} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (S_i - \bar{S})^2} = 1 - \frac{16751123,49}{20172111,96} = 0,16959$$

zeren:

$$\begin{aligned} \sum \hat{u}_i^2 &= \sum S_i^2 - \hat{\beta}_1 \sum S_i - \hat{\beta}_2 \sum S_i H_i = \\ &= -1120,25 \times 89190 - 112,452 \times 585584 = 16751123,49 \end{aligned}$$

eta

$$\sum S_i^2 = \sum (S_i - \bar{S})^2 + T\bar{S}^2 = 20172111,96 + 49 \times (1820,204082)^2 = 182516114$$

baitira. Interpretazioa: lagineko soldataren aldagarritasunaren % 16,959 azaltzen da hezkuntza aldagaiaren aldagarritasunaren bitartez.

4. Banakako esanguraren kontrastea: hezkuntza.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 &= 0 & t &= \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \\ H_a : \beta_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$|t| = \left| \frac{112,452 - 0}{\sqrt{1317,436485}} \right| = 3,0981 > 2,01174 = t(49 - 2)_{0,05/2}$$

non:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum (H_i - \bar{H})^2} = \frac{356406,612}{270,5306} = 1317,436485$$

eta

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - k} = \frac{16751123,49}{49 - 2} = 356406,612$$

diren.

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hezkuntza aldagaia esanguratsua da soldata azaltzeko.

5. Lagineko banako guztiek oinarrizko hezkuntza bakarrik balute, hezkuntza aldagaiak zero balioa hartuko luke lagin osoan. Kasu horretan, ereduko  $X$  datu-matrizea ez litzateke hein osokoa izango, eta koefiziente guztiak ezin lirateke KTA bitartez estimatu. Izatez, halako lagin batean ez du inolako zentzurik hezkuntzak soldatan zer eragin duen analizatzeak.

**BIGARREN ZATIA.**

## 1. ELOE:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 H_i + \beta_3 X_i + \beta_4 GIZ_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, 2, \dots, 49.$$

P13.2 ereduan, bi aldagai azaltzaile berri txertatu dira: bata, kuantitatiboa (esperientzia-urteak), eta bestea, kualitatiboa (generoa). Azken aldagai horrek bi kategoria dituzenez, fikzio-aldagai bat definitu da kategoria bakoitzarentzat, eta, ondoren, bietatik bat hartu da kontuan ereduan txertatzeko, ereduak bai baitu termino konstante.

2.  $\hat{\beta}_1 = 434,821$ : oinarrizko hezkuntza soilik duen esperientzia gabeko gizon batentzat espero den soldata (eurotan).

$\hat{\beta}_2 = 133,551$ : oinarrizko ikasketak amaitu ondoren hezkuntza urte bat handitzean soldatan estimatzen den gehikuntza (eurotan), esperientzia konstante mantenduz eta generoarekiko independentea izanik.

$\hat{\beta}_3 = 34,4543$ : esperientzia urte bat handitzean, 34,4543 euroko gehikuntza estimatzen da soldatan, hezkuntza-urteak konstante mantenduz eta generoarekiko independentea izanik.

$\hat{\beta}_4 = 470,46$ : gizon eta emakumeen soldaten arteko diferentzia estimatua, esperientzia eta hezkuntza-urte berdinak izanik.

## 3. A. Baterako esanguraren kontrastea.

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0$$

$$F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

$$F = \frac{0,450263/3}{(1 - 0,450263)/(49 - 4)} = 12,28578 > 2,81154 = \mathcal{F}(3, 49 - 4)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, hezkuntza, esperientzia eta generoa aldagaiak batera esanguratsuak dira.

## B. Banakako esanguraren kontrasteak.

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$H_a : \beta_i \neq 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k) \quad i = 2, 3, 4.$$

$$\text{Hezkuntza (H)} \quad |t| = \left| \frac{133,551 - 0}{31,5081} \right| = 4,2386 > 2,0141 = t(49 - 4)_{0,05/2}$$

$$\text{Esperientzia (X)} \quad |t| = \left| \frac{34,4543 - 0}{12,1316} \right| = 2,8401 > 2,0141 = t(49 - 4)_{0,05/2}$$

$$\text{Generoa (GIZ)} \quad |t| = \left| \frac{470,46 - 0}{144,87} \right| = 3,2475 > 2,0141 = t(49 - 4)_{0,05/2}$$

Ondorioz, hezkuntza, esperientzia eta generoa aldagaiak banaka esanguratsuak dira, % 5eko esangura-maila izanik.

Ereduko aldagai azaltzaileak banaka eta batera esanguratsuak direnez, ez dago lagin-ebidentziarik aldagai azaltzaileen artean kolinealtasun altuko lagin-arazorik dagoenik esateko.

#### 4. Mutur bateko kontrastea.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_4 = 0 \\ H_a : \beta_4 > 0 \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_4 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$t = \frac{470,46 - 0}{144,87} = 3,2475 > 1,67943 = t(49 - 4)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Badago lagin-ebidentziarik gizonen emakumeek baino gehiago irabazten dutela esateko.

#### 5. Estimatuakotako soldatak:

$$(\hat{S} | H = 5, X = 0, GIZ = 0) = 434,821 + 133,551 \times 5 = 1102,576 \text{ euro}$$

$$(\hat{S} | H = 0, X = 5, GIZ = 0) = 434,821 + 34,4543 \times 5 = 607,0925 \text{ euro}$$

#### 6. Emakumezko langile baten soldatan estimatzen den gehikuntza: 34,4543 euro.

Gizonezko langile baten soldatan estimatzen den gehikuntza: 34,4543 euro.

Emaitza bera lortu da; izan ere, esperientzia urte bat handitzean soldatan espero den gehikuntza neurtzen du  $\hat{\beta}_3 = 34,4543$  koefizienteak, hezkuntza konstante mantenduz eta generoarekiko independentea izanik, hau da, berdina izanik langilea emakumea ala gizona izan.

## HIRUGARREN ZATIA.

### 1. ELOE:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 H_i + \beta_3 X_i + \beta_4 GIZ_i + \beta_5 A_i + \beta_6 G_i + u_i \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad i = 1, \dots, 49.$$

P13.3 ereduan, aldagai azaltzaile kualitatibo berri bat txertatu da: sukurtsalen kokapena. Aldagai horrek hiru kategoria dituenez (Araba, Bizkaia eta Gipuzkoa), hiru fikzio-aldagai definitu dira:

$$A_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{Araba} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \quad B_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{Bizkaia} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \quad G_i = \begin{cases} 1 & i \in \text{Gipuzkoa} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

Ereduko  $X$  datu-matrizean kolinealtasun zehatzaren arazoa saihesteko, termino konstantearen eta definitutako hiru fikzio-aldagaietatik biren bitartez zehaztu da eredia. Kanpoan utzi den fikzio-aldagaia Bizkaiko kategoria denez, horixe izango da koefizienteak interpretatzean dagoen oinarria.

2. Sukurtsalaren kokapena aldagaia ez da esanguratsua izango soldata azaltzeko, baldin eta hiru lurralde historikoetako langileek soldata bera badute, beste ezaugarriak berdinak izanik.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_5 = \beta_6 = 0 \\ H_a : \beta_5 \neq 0 \text{ edota } \beta_6 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P13.3) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P13.2) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 2$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(11089355 - 5689030)/2}{5689030/(49 - 6)} = 20,4089 > 3,21448 = \mathcal{F}(2, 49 - 6)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, sukurtsalen kokapena aldagai azaltzailea esanguratsua da espero den soldata azaltzeko, behin beste aldagaiak ereduan daudenean.

3. Gizon eta emakumeen soldaten arteko diferentzia estimatua, gainerako ezaugarriak berdinak izanik: 594,659 euro =  $\hat{\beta}_4$ .

Banakako esanguraren kontrastea: generoa.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_4 = 0 \\ H_a : \beta_4 \neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_4 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4}} \stackrel{H_0}{\sim} t(N - k)$$

$$|t| = \left| \frac{594,659 - 0}{118,738} \right| = 5,0082 > 2,01669 = t(49 - 6)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Generoa aldagaia espero den soldata azaltzeko esanguratsua dela ondorioztatu da.

4. Bizkaiko sukurtsal batean lan egiten duen eta esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen emakumezko baten soldata estimatua:

$$(\hat{S}|H = 0, X = 0, GIZ = 0, A = 0, G = 0) = \hat{\beta}_1 = 1580,34 \text{ euro.}$$

Arabako sukurtsal batean lan egiten duen eta esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen emakumezko baten soldata estimatua:

$$(\hat{S}|H = 0, X = 0, GIZ = 0, A = 1, G = 0) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_5 = (1580,34 - 1151,2) \text{ euro.}$$

Gipuzkoako sukurtsal batean lan egiten duen eta esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen emakumezko baten soldata estimatua:

$$(\hat{S}|H = 0, X = 0, GIZ = 0, A = 0, G = 1) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_6 = (1580,34 - 800,65) \text{ euro.}$$

5.  $(1580,34 + 594,659) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_4 = (\hat{S}|H = 0, X = 0, GIZ = 1, A = 0, G = 0)$

Bizkaiko sukurtsal batean lan egiten duen eta esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen gizonezko baten soldata estimatua.

## LAUGARREN ZATIA.

1. P13.4 eredua lortzeko, murrizketa lineala hau ezarri da P13.3 ereduari:  $\beta_5 = \beta_6$ .

$$\begin{aligned} S_i &= \beta_1 + \beta_2 H_i + \beta_3 X_i + \beta_4 GIZ_i + \beta_5 A_i + \beta_6 G_i + u_i \quad \rightarrow \\ &= \beta_1 + \beta_2 H_i + \beta_3 X_i + \beta_4 GIZ_i + \beta_5 A_i + \beta_5 G_i + u_i \quad \rightarrow \\ &= \beta_1 + \beta_2 H_i + \beta_3 X_i + \beta_4 GIZ_i + \beta_5 (A + G)_i + u_i \end{aligned}$$

Murrizketa horrek adierazten du Gipuzkoako eta Arabako sukurtsaletan lan egiten dutenen artean ez dagoela soldata-desberdintasunik, beste ezaugarriak berdinak izanik; baina, Bizkaiko sukurtsaletan lan egiten dutenekin alderatuta, berriz, badago desberdintasuna.

2. Bizkaiko sukurtsal batean lan egiten duen eta esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen emakumezko baten soldata estimatua:

$$(\hat{S}|H = 0, X = 0, GIZ = 0, A = 0, G = 0) = \hat{\beta}_1 = 1580,34 \text{ euro.}$$



Arabako sukurtsal batean lan egiten duen eta esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen emakumezko baten soldata estimatua:

$$(\hat{S}|H = 0, X = 0, GIZ = 0, A = 1, G = 0) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_5 = (1503,49 - 857,85) \text{ euro.}$$

Gipuzkoako sukurtsal batean lan egiten duen eta esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen emakumezko baten soldata estimatua:

$$(\hat{S}|H = 0, X = 0, GIZ = 0, A = 0, G = 1) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_5 = (1503,49 - 857,85) \text{ euro.}$$

Emaitza horiek eta hirugarren zatiko laugarren atalean lortutako emaitzak desberdinak dira. Izatez, P13.4 eta P13.3 ereduak koefizienteen estimazioak desberdinak dira, haien zehaztapena ere desberdina baita:

P13.3 erudian, esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen emakumezko baten soldata estimatua aldatu egiten da sukurtsalaren arabera.

P13.4 erudian, berriz, esperientziarik ez duen eta oinarritzko ikasketak dituen emakumezko baten soldata estimatua berdina da Arabako eta Gipuzkoako sukurtsaletan, baina aldatu egiten da Bizkaiko sukurtsaletan.

Ohartu zaitetz emaitza bera lortuko litzatekeela ezaugarri berak dituzten gizonentzat.

### 3. P13.3 eredia, arrazoi hauengatik:

- Hirugarren zatiko bigarren atalean, ondorioztatu da sukurtsalaren kokapena aldagai azaltzailea esanguratsua dela espero den soldata azaltzeko. P13.3 ereduko gainerako estimazio-emaitzak analizatuz, ikus daiteke hezkuntza, esperientzia eta generoa aldagaiak banaka esanguratsuak direla, t-estatistikoek balio kritikoa gainditzen baitute, % 5eko esangura-maila izanik.
- P13.1 eta P13.2 ereduak baztertu behar dira, ez baitute kontuan hartzen sukurtsalen kokapena aldagaia, KTAk estimatzaile alboratua erabili baitute, eta inferentzia ez baita baliagarria.
- P13.4 eredia P13.3 eredutik eratortzen da,  $\beta_5 = \beta_6$  murrizketa lineala ezarri ondoren. Murrizketa hori egiazkoa bada, P13.4 ereduko koefizienteen KTM estimatzailea alboragabea izango da, eta P13.3 erudian erabilitako KTA estimatzaileak duen baino bariantza txikiagoa izango du. Murrizketa egiazkoa ez bada, berriz, P13.4 erudian erabilitako estimatzaileak alboratuak izango dira, eta ez guke eredu hori aukeratuko. Hortaz, ereduaren sailkapena  $\beta_5 = \beta_6$  murrizketaren kontrastearen emaitzaren arabera da.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_5 = \beta_6 \quad (\beta_5 - \beta_6 = 0) \\ H_a : \beta_5 \neq \beta_6 \quad (\beta_5 - \beta_6 \neq 0) \end{array} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(N - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, N - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P13.3) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P13.4) hondarren karratuen batura den, eta

$q = 1$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(6347297 - 5689030)/1}{5689030/(49 - 6)} = 4,97545 > 4,06705 = \mathcal{F}(1, 49 - 6)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, Arabako eta Gipuzkoako sukurtsaletan lan egiten dutenek ez dute espero den soldata bera jasotzen, gainerako ezaugarriak berdinak izanik. Ondorioz, P13.3 ereduak aukeratu dugu, ezaugarri berak dituzten langileentzat espero den soldata aldatu egiten baita sukurtsalaren arabera.

## P14. PRAKTIKAREN ebazpena

### LEHEN ZATIA.

1. Produkzio-funtzioa:

$$\log Q_t = \beta_1 + \beta_2 \log K_t + \beta_3 \log L_t + \beta_4 \log E_t + \beta_5 \log A_t + \beta_6 \log O_t + \beta_7 \log H_t + u_t$$

$$u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1948, 1949, \dots, 1993.$$

Zehaztutako ereduaren KTA estimazioak hauek dira:

P15.1 Eredua: KTA estimazioak 46 behaketak erabiliz, 1948–1993

Aldagai azaldua:  $l_Q$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	2,62172	1,48327	1,7675	0,0850
$l_K$	-0,340100	0,0886314	-3,8372	0,0004
$l_L$	-0,666346	0,0796336	-8,3677	0,0000
$l_E$	0,208275	0,105148	1,9808	0,0547
$l_A$	1,07952	0,384756	2,8057	0,0078
$l_O$	-0,00796152	0,0731634	-0,1088	0,9139
$l_H$	0,141183	0,125934	1,1211	0,2691
Hondarren karratuen batura	0,0609414		$R^2$	0,977494

Taulako emaitzak aztertzean, ondoriozta daiteke kapitala, lana, energia eta azalera ekoizpen-faktoreak banaka esanguratsuak direla, % 5eko esangura-maila izanik. Ongarria eta erabilitako hazi kopurua, berriz, ez dira banaka esanguratsuak, % 5eko eta % 10eko esangura-mailak izanik.

Ondoren, ongariaren eta hazi kopuruaren baterako esanguraren kontrastea egingo dugu:

$$H_0 : \beta_6 = \beta_7 = 0 \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

$$H_a : \beta_6 \neq 0 \text{ edota } \beta_7 \neq 0$$

non  $q = 2$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P14.1) hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$\log Q_t = \beta_1 + \beta_2 \log K_t + \beta_3 \log L_t + \beta_4 \log E_t + \beta_5 \log A_t + u_t$$

$$F = \frac{(0,062971 - 0,0609414)/2}{0,0609414/(46 - 7)} = 0,649457 < 3,2381 = \mathcal{F}(2, 39)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzeko, % 5eko esangura-maila izanik. Ongarria eta hazi kopurua ez dira batera esanguratsuak artoaren produkzioa azaltzeko.

Kontrasteen emaitzak kontuan hartuz, ongarria eta hazi kopurua ez ez banaka ez batera esanguratsuak ez direnez, ereditik kanpo utzi behar dira, eta eredu berzehaztu behar da:

$$\log Q_t = \beta_1 + \beta_2 \log K_t + \beta_3 \log L_t + \beta_4 \log E_t + \beta_5 \log A_t + u_t$$

$$u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1948, 1949, \dots, 1993.$$

Berzehaztutako ereduaren estimazio-emaitzak hauek dira:

P15.2 Eredua: KTA estimazioak 46 behaketak erabiliz, 1948–1993

Aldagai azaldua:  $\ln Q$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	3,39123	1,29215	2,6245	0,0121
$\ln K$	-0,315200	0,0850853	-3,7045	0,0006
$\ln L$	-0,720098	0,0388490	-18,5358	0,0000
$\ln E$	0,191347	0,0949839	2,0145	0,0505
$\ln A$	1,08932	0,364861	2,9856	0,0048
Hondarren karratuen batura	0,0629711		$R^2$	0,976745

LEZ:

$$\widehat{\log Q_t} = 3,39123 - 0,3152 \log K_t - 0,720098 \log L_t + 0,191347 \log E_t +$$

$$(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) \quad (1,29215) \quad (0,0850853) \quad (0,0388490) \quad (0,0949839)$$

$$+ 1,08932 \log A_t \quad R^2 = 0,976745 \quad HKB = 0,0629711$$

$$(0,364861)$$

**A.** Koefizienteen interpretazioa.

$\hat{\beta}_1 = 3,39123$ : estimatzen den produkzioa (logaritmotan), ekoizpen-faktoreen balioak (logaritmotan) zero direnean, hau da, faktoreen unitate bat erabiltzen denean.

$\hat{\beta}_2 = -0,3152$ : kapitalaren ekoizpen-faktorea % 1 igotzean produkzioa % 0,3152 jaisten dela estimatzen da, gainerako ekoizpen-faktoreak konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_3 = -0,720098$ : lanaren ekoizpen-faktorea % 1 igotzean produkzioa % 0,720098 jaisten dela estimatzen da, gainerako ekoizpen-faktoreak konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_4 = 0,191347$  : energiaren ekoizpen-faktorea % 1 handitzean produkzioa % 0,191347 igotzen dela estimatzen da, gainerako ekoizpen-faktoreak konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_5 = 1,08932$  : azalera ekoizpen-faktorea % 1 handitzean produkzioa % 1,08932 igotzen dela estimatzen da, gainerako ekoizpen faktoreak konstante mantenduz.

P14.2 eredu logaritmiko bikoitza denez,  $\beta_2, \beta_3, \beta_4$  eta  $\beta_5$  koefizienteek kapitalari, lanari, energiari eta ereindako azalerari buruz espero den elastikotasuna adierazten dute, hurrenez hurren.

**B.** Doikuntzaren ontasuna.  $R^2 = 0,976745$ .

Lagineko produkzioaren (logaritmotan) aldagarritasunaren % 97,67 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez, hau da, kapitala, lana, energia eta ereindako azalera aldagaien aldagarritasunaren bitartez.

**C.** Aldagai azaltzaileen esangura.

## C.1. Baterako esanguraren kontrastea.

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

$$H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \text{ edota } \beta_5 \neq 0$$

$$F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

$$F = \frac{0,0,976745/4}{(1 - 0,976745)/(46 - 5)} = 430,506 > 2,59997 = \mathcal{F}(4, 41)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, kapitala, lana, energia eta ereindako azalera aldagai azaltzaileak batera esanguratsua dira.

C.2. Banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\approx} t(T - k) \quad i = 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{Kapitala (K)} \quad |t| = \left| \frac{-0,3152 - 0}{0,0850853} \right| = 3,705 > 2,01954 = t(46 - 5)_{0,05/2}$$

$$\text{Lana (L)} \quad |t| = \left| \frac{-0,720098 - 0}{0,038849} \right| = 18,54 > 2,01954 = t(41)_{0,05/2}$$

$$\text{Energia (E)} \quad |t| = \left| \frac{0,191347 - 0}{0,0949839} \right| = 2,015 \approx 2,01954 = t(41)_{0,05/2}$$

$$\text{Azalera (A)} \quad |t| = \left| \frac{1,08932 - 0}{0,364861} \right| = 2,986 > 2,01954 = t(41)_{0,05/2}$$

Kapitala, lana energia eta azalera ekoizpen-faktoreak banaka esanguratsuak direla ondorioztatzen da, % 5eko esangura-maila izanik.

2. Etekin konstanteko eskalaren kontrasterako hipotesia.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 1 \\ H_a : \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 \neq 1 \end{array} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\approx} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $q = 1$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P14.2) hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$\log Q_t = \beta_1 + \beta_2 \log K_t + \beta_3 \log L_t + \beta_4 \log E_t + \beta_5 \log A_t + u_t$$

$$\begin{aligned} \log Q_t &= \beta_1 + (1 - \beta_3 - \beta_4 - \beta_5) \log K_t + \beta_3 \log L_t + \beta_4 \log E_t + \\ &+ \beta_5 \log A_t + u_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log Q_t - \log K_t &= \beta_1 + \beta_3 (\log L_t - \log K_t) + \beta_4 (\log E_t - \log K_t) + \\ &+ \beta_5 (\log A_t - \log K_t) + u_t \end{aligned}$$

$$F = \frac{(0,074059 - 0,0629711)/1}{0,0629711/(46 - 5)} = 7,21936 > 4,07855 = \mathcal{F}_{0,05}(1, 46 - 5)$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, ondoriozta daiteke produkzio-funtzioak ez duela etekin konstanteko eskalarik.

**BIGARREN ZATIA.**

## 1. Lan-hipotesia:

*Ekoizpen-faktoreen maila bera izanik, produkzio-maila handitu egin da 1976. urtetik aurrera gertatutako teknologia-aldaketaren eraginez.*

Eragin hori ereduan txertatzeko  $UR76$  fikzio-aldagaia definitu da, zeinak bat balioa hartzen duen baldin eta behaketa 1976. urteaz geroztik egina bada, eta zero, bestela.

Eragin hori kontuan hartzen duen ereduaren zehaztapena hau da:

$$\log Q_t = \beta_1 + \beta_2 \log K_t + \beta_3 \log L_t + \beta_4 \log E_t + \beta_5 \log A_t + \beta_6 UR76_t + u_t$$

$$u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1948, 1949, \dots, 1993.$$

eta lortutako estimazio-emaitzak hauek dira:

P15.3 Eredua: KTA estimazioak 46 behaketak erabiliz, 1948–1993

Aldagai azaldua:  $l\_Q$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	3,98004	1,19167	3,3399	0,0018
$l\_K$	-0,231053	0,0821327	-2,8132	0,0076
$l\_L$	-0,646251	0,0427303	-15,1239	0,0000
$l\_E$	0,0844008	0,0931791	0,9058	0,3705
$l\_A$	0,901690	0,337673	2,6703	0,0109
$UR76$	0,0632216	0,0205339	3,0789	0,0037
Hondarren karratuen batura	0,0509067		$R^2$	0,981200

LEZ:

$$\widehat{\log Q_t} = \begin{matrix} 3,98004 & - & 0,231053 & \log K_t & - & 0,646251 & \log L_t & + & 0,0844008 & \log E_t & + \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & & (0,0821327) & & & (0,0427303) & & & (0,0931791) & & \end{matrix}$$

$$+ \begin{matrix} 0,90169 & \log A_t & + & 0,0632216 & UR76_t & R^2 = 0,9812 & HKB = 0,0509067 \\ (0,337673) & & & (0,0205339) & & & \end{matrix}$$

$\hat{\beta}_6 = 0,0632216$  koefiziente estimatuak adierazten du 1976. urtearen ostean 0,0632212 tona (logaritmotan) gehiago produzitu zela estimatzen dela, ekoizpen-faktoreen maila bera izanik.

Eragin horren esangura kontrastatzeko:

$$\begin{matrix} H_0 : \beta_6 = 0 \\ H_a : \beta_6 \neq 0 \end{matrix} \quad t = \frac{\hat{\beta}_6 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_6}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k)$$

$$|t| = \left| \frac{0,0632216 - 0}{0,0205339} \right| = 3,0789 > 2,02108 = t(46 - 6)_{0,05/2}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik. Hortaz, teknologiak eragina izan du produkzioan, eta ondoriozta daiteke 1976 baino lehenagoko eta ondorengo produkzio-maila desberdina izan dela.

## 2. Lan-hipotesia.

*Produkzio-funtzioa desberdina da 1976. urtea baino lehen eta ondoren, hau da, ekoizpen-faktoreen gehikuntzak arto-ekoizpenean eragin desberdina du 1976. urtea baino lehen eta ondoren.*

Lan-hipotesiak proposatzen du produkzio-funtzioaren egitura-aldaketa bat egon dela 1976. urtearen ostean. Hori kontrastatzeko,  $UR76$  fikzio-aldagaia eta ereduko aldagai azaltzaile guztien arteko elkar-eraginak hrtu behar dira kontuan:

$$(\log K \times UR76)_t = \begin{cases} 0 & t \in [1948 - 1975] \\ K_t & t \in [1976 - 1993] \end{cases} \quad (\log L \times UR76)_t = \begin{cases} 0 & t \in [1948 - 1975] \\ L_t & t \in [1976 - 1993] \end{cases}$$

$$(\log E \times UR76)_t = \begin{cases} 0 & t \in [1948 - 1975] \\ E_t & t \in [1976 - 1993] \end{cases} \quad (\log A \times UR76)_t = \begin{cases} 0 & t \in [1948 - 1975] \\ A_t & t \in [1976 - 1993] \end{cases}$$

Eredu berriaren zehaztapena hau da:

$$\begin{aligned} \log Q_t &= \beta_1 + \beta_2 \log K_t + \beta_3 \log L_t + \beta_4 \log E_t + \beta_5 \log A_t + \beta_6 UR76_t + \\ &+ \beta_7 (\log K \times UR76)_t + \beta_8 (\log L \times UR76)_t + \beta_9 (\log E \times UR76)_t + \\ &+ \beta_{10} (\log H \times UR76)_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1948, \dots, 1993. \end{aligned}$$

KTA irizpidearen araberako estimazio-emaitza hauek lortu dira:

P15.4 Eredua: KTA estimazioak 46 behaketak erabiliz, 1948–1993

Aldagai azaldua:  $l_Q$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	6,35278	2,13003	2,9825	0,0051
$l_K$	-0,0432245	0,154658	-0,2795	0,7815
$l_L$	-0,536663	0,0651691	-8,2349	0,0000
$l_E$	0,0943920	0,240928	0,3918	0,6975
$l_A$	0,0770934	0,470323	0,1639	0,8707
$UR76$	-5,8641	2,68453	-2,1844	0,0355
$l_K UR76$	-0,320497	0,187181	-1,7122	0,0955
$l_L UR76$	-0,414848	0,241894	-1,7150	0,0949
$l_E UR76$	0,0754497	0,303419	0,2487	0,8050
$l_A UR76$	1,95036	0,676819	2,8817	0,0066
Hondarren karratuen batura	0,0400310		$R^2$	0,985216

LEZ:

$$\begin{aligned} \widehat{\log Q}_t &= 6,35278 - 0,0432245 \log K_t - 0,536663 \log L_t + 0,0943920 \log E_t + \\ &\quad (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) \quad (2,13003) \quad (0,154658) \quad (0,0651691) \quad (0,240928) \\ &+ 0,0770934 \log A_t - 5,8641 UR76_t - 0,320497 (\log K \times UR76)_t - \\ &\quad (0,470323) \quad (2,68453) \quad (0,187181) \\ &- 0,414848 (\log L \times UR76)_t + 0,0754497 (\log E \times UR76)_t + \\ &\quad (0,241894) \quad (0,303419) \\ &+ 1,95036 (\log A \times UR76)_t \quad R^2 = 0,985216 \quad HKB = 0,0400310 \\ &\quad (0,676819) \end{aligned}$$

Egitura-aldaketaren kontrastea.

$$H_0 : \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = \beta_9 = \beta_{10} = 0$$

$$H_a : \beta_6 \neq 0 \text{ edota } \beta_7 \neq 0 \text{ edota } \beta_8 \neq 0 \text{ edota } \beta_9 \neq 0 \text{ edota } \beta_{10} \neq 0$$

$$F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko ereduko (P14.4) hondarren karratuen batura den,  $HKB_M$  eredu murriztuko (P14.2) hondarren karratuen batura den, eta  $q = 5$  murrizketa kopurua den.

$$F = \frac{(0,062971 - 0,0400310)/5}{0,0400310/(46 - 10)} = 4,12602 > 2,47717 = \mathcal{F}(5, 46 - 10)_{0,05}$$



Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, produkzio-funtzioan egitura-aldaketa bat izan zela ondorioztatzen da.

### HIRUGARREN ZATIA.

1. Bigarren zatiko emaitzak kontuan hartuta (hau da, egitura-aldaketa bat egon dela), produkzio-funtzioa azaltzeko eredurik egokiena P14.4 eredu da. Gainerako ereduetan (P14.2 eta P14.3), zehaztapen-errore bat egin da, koefiziente konstanteak ezarri baitira laginean zehar. Alegia, eredu horietan, gezurrezko murrizketa bat ezarri da (koefizienteak 1976. urtea baino lehen eta ondoren berdinak direla), eta, horrenbestez, eredu horietan erabilitako estimatzaileak alboratuak dira, perturbazioen bariantzaren estimatzailea ere alboratua da eta, ondorioz, egindako inferentzia ez da baliagarria.
2. Ereduaren zehaztapena logaritmiko bikoitza denez, emaitza lortzeko aldagaiak logaritmotan erabili behar dira.

### Puntuzko auresana :

$$\begin{aligned}
 \widehat{Q}_{1994} &= 6,35278 - 0,0432245 \log K_{1994} - 0,536663 \log L_{1994} + \\
 &+ 0,0943920 \log E_{1994} + 0,0770934 \log A_{1994} - 5,8641 UR76_{1994} - \\
 &- 0,320497 (\log K \times UR76)_{1994} - 0,414848 (\log L \times UR76)_{1994} \\
 &+ +0,0754497 (\log E \times UR76)_{1994} + 1,95036 (\log A \times UR76)_{1994} \\
 &= 6,35278 - 0,0432245 \log K_{1994} - 0,536663 \log L_{1994} + \\
 &+ 0,0943920 \log E_{1994} + 0,0770934 \log A_{1994} - 5,8641 - \\
 &- 0,320497 \log K_{1994} - 0,414848 \log L_{1994} + \\
 &+ 0,0754497 \log E_{1994} + 1,95036 \log A_{1994} = \\
 &= (6,35278 - 5,8641) - (0,0432245 + 0,320497) \log K_{1994} - \\
 &- (0,536663 + 0,414848) \log L_{1994} + \\
 &+ (0,0943920 + 0,0754497) \log E_{1994} + (0,0770934 + 1,95036) \log A_{1994}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (6,35278 - 5,8641) - (0,0432245 + 0,320497) \log 59 - \\
&- (0,536663 + 0,414848) \log 79 + (0,0943920 + 0,0754497) \log 92 + \\
&+ (0,0770934 + 1,95036) \log 87 = 4,670392
\end{aligned}$$

**Aurrezan-tartea**

$$KT(Q_{1994})_{\%95} = \left[ \widehat{Q}_{1994} \pm t(46 - 10)_{0,05/2} \hat{\sigma}_{1994} \right] = [4,590395 \quad 4,75039]$$

zeren

$$\hat{\sigma}_{1994}^2 = \hat{\sigma}_u^2 [1 + X'_{1994}(X'X)^{-1}X'_{1994}] = 0,001556$$

baita non

$$X'_{1994} = (1, \log 59, \log 79, \log 92, \log 87) = (1 \quad 4,077 \quad 4,369 \quad 4,5217 \quad 4,4659)$$

den.

**P15. PRAKTIKAREN ebazpena****LEHEN ZATIA.**

1. ELOE:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 PRAL_t + \beta_3 PRIS_t + \beta_4 PRCA_t + u_t \quad u_t \sim NIB(0, \sigma_u^2) \quad t = 1, \dots, 52.$$

P15.1 Eredua: KTA estimazioak 52 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	22963,4	9806,55	2,3416	0,0234
$PRAL$	-47084,	7957,79	-5,9168	0,0000
$PRIS$	9299,00	7001,26	1,3282	0,1904
$PRCA$	16511,3	9367,03	1,7627	0,0843
Hondarren karratuen batura	1,35872e+09		$R^2$	0,442860

LEZ:

$$\begin{array}{r} \hat{S}_t \\ (\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) \end{array} = \begin{array}{r} 22963,4 \\ (9806,55) \end{array} - \begin{array}{r} 47084 \\ (7957,79) \end{array} PRAL_t + \begin{array}{r} 9299,00 \\ (7001,26) \end{array} PRIS_t + \begin{array}{r} 16511,3 \\ (9367,03) \end{array} PRCA_t$$

$$R^2 = 0,442860 \quad HKB = 1358720000$$

**A.** Koefiziente estimatuen interpretazioa:

$\hat{\beta}_2 = -47084$ . Al markako laten prezioa euro bat igotzean, salmentak 47084 lata jaitsiko direla estimatzen da, lehiako enpresen prezioak konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_3 = 9299,00$ . IS markako laten prezioa euro bat igotzean, salmentak 9299 lata gehituko direla estimatzen da, AL eta CA markako laten prezioak konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_4 = 16511,3$ . CA markako laten prezioa euro bat igotzean, salmentak 16511,3 lata gehituko direla estimatzen da, AL eta IS markako laten prezioak konstante mantenduz.

**B.** Mugatze-koefizientea:  $R^2 = 0,4486$ .

Interpretazioa: lagineko soldataren aldagarritasunaren % 44,86 azaltzen da prezioen aldagarritasunaren bitartez, hau da, AL, IS eta CA marken prezioen aldagarritasunaren bitartez.

2. Hipotesia: lehiako bi marken prezio-politikek eragin bera dute AL markarentzat espero diren salmentetan.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_3 = \beta_4 \\ H_a : \beta_3 \neq \beta_4 \end{array} \quad F = \frac{(HKB_M - HKB_{MG})/q}{HKB_{MG}/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

non  $q = 1$  murrizketa kopurua den,  $HKB_{MG}$  murriztu gabeko (P15.1) ereduko hondarren karratuen batura den, eta  $HKB_M$  eredu murriztuko hondarren karratuen batura den:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 PRAL_t + \beta_3 PRIS_t + \beta_3 PRCA_t + u_t \quad \rightarrow$$

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 PRAL_t + \beta_3 (PRIS_t + PRCA_t) + u_t \quad (\text{P15.2})$$

Erabaki-araua:

$$F = \frac{(1368430000 - 1358720000)/1}{1358720000/(52 - 4)} = 0,343166 < 4,04265 = \mathcal{F}(1, 48)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, lehiako enpresen bi marken prezio-politikek eragin bera dute AL markarentzat espero diren salmentetan.

3. Aurreko ataleko kontrastearen emaitza kontuan izanik, (P15.2) eredua aukeratu behar da; izan ere, KTM estimatzailea lineala da, alboragabea da, eta KTA estimatzaileak duen baino bariantza txikiagoa du.

Ikuspegi ekonomikotik begiraturaz, prezioak eta lehiakoen prezioak AL markaren salmentetan eragiten dute, baina ez du garrantzirik lehiako enpresa zein den. Hortaz, arrazoizkoagoa litzateke lehiakoen prezio-indize bat erabiltzea, bi prezioen batura erabili beharrean. Defini dezagun

$$PRLH_t = \frac{(PRIS_t + PRCA_t)}{2}$$

lehiako enpresen prezio-indize gisa. Indize hori kontuan hartzen duen eredua hau litzateke:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 PRAL_t + \beta_3 PRLH_t + u_t \quad (\text{P15.3})$$

KTA irizpidearen bitartez, estimazio-emaitza hauek lortu dira:

P15.3 Eredua: KTA estimazioak 52 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	25002,5	9106,37	2,7456	0,0084
PRAL	-47863,7	7793,05	-6,1419	0,0000
PRLH	23967,8	10514,0	2,2796	0,0270

Hondarren karratuen batura 1368430000  $R^2$  0,438877

LEZ:

$$\hat{S}_t = 25002,5 - 47863,7 PRAL_t + 23967,8 PRLH_t$$

$$(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) \quad (9106,37) \quad (7793,05) \quad (10514,0)$$

$$R^2 = 0,438877 \quad HKB = 1368430000$$

**A.** Koefiziente estimatuen interpretazioa:

$\hat{\beta}_2 = -47863,7$ . AL markako laten prezioa euro bat igotzean, salmentak 47863,7 lata jaitsiko direla estimatzen da, lehiako enpresen prezio-indizea konstante mantenduz.

$\hat{\beta}_3 = 23967,8$ . Lehiako enpresen prezio-indizea euro bat igotzean, salmentak 23967,8 lata gehituko direla estimatzen da, AL markaren prezioa konstante mantenduz.

**B.** Mugatze-koefizientea:  $R^2 = 0,438877$ .

Interpretazioa: lagineko soldataren aldagarritasunaren % 43,88 azaltzen da prezioen (enpresaren eta lehiako enpresen indizea) aldagarritasunaren bitartez.

**C.** Aldagai azaltzaileen esangura.

C.1. Baterako esanguraren kontrastea.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \end{aligned} \quad F = \frac{R^2/q}{(1-R^2)/(T-k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T-k)$$

$$F = \frac{0,438877/2}{(1-0,438877)/(52-3)} = 19,1624 > 3,18658 = \mathcal{F}(2, 49)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, AL markaren prezioa eta lehiako enpresen prezio-indizea batera esanguratsuak dira.

C.2. Banakako esanguraren kontrasteak.

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T-k) \quad i = 2, 3.$$

AL markaren prezioa:

$$|t| = \left| \frac{-47863,7 - 0}{7793,05} \right| = 6,142 > 2,00958 = t(52-3)_{0,05/2}$$

Lehiako enpresen prezioa:

$$|t| = \left| \frac{23967,8 - 0}{10514,0} \right| = 2,28 > 2,00958 = t(52-3)_{0,05/2}$$

Lortutako emaitzak aztertuz, AL markaren prezioa eta lehiako enpresen prezio-indizea banaka esanguratsuak direla ondoriozta daiteke, % 5eko esangura-maila izanik.

4. 53. asteko salmenten tartezko auresana.

$$KT(S_{53})_{\%95} = \left[ \widehat{S}_{53} \pm t(52-3)_{0,05/2} \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X'_{53}(X'X)^{-1}X_{53}} \right]$$

non

$$\begin{aligned} X'_{53} &= (1 \quad 0,82 \quad 0,965) \\ \widehat{S}_{53} &= 25002,5 - 47863,7 \times 0,82 + 11983,9 \times 0,965 = 8883,11 \text{ lata} \end{aligned}$$

diren.

$$KT(S_{53})_{\%95} = [8883,11 \pm 2,00958 \times 5595,863] = [-2362,19 \quad 20128,42]$$

52. astean, 6668 lata saldu ziren; enpresako kudeatzaileak pentsatzen duenez salmentak 50 unitate igo daitezkeela, 53. astean 6718 lata sal daitezkeela uste du.  $6718 \in KT(S_{53})_{\%95}$  betetzen denez, kudeatzaileak dioena arrazoizkoa da, eta ondoriozta daiteke badagoela hipotesiaren aldeko lagin-ebidentziarik, % 95eko konfiantza izanik.

## BIGARREN ZATIA.

### 1. ELOE:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 PRAL_t + \beta_3 PRLH_t + \beta_4 AK_t + \beta_5 BK_t + u_t \quad t = 1, \dots, 52.$$

Kanpainak bata bestetik independenteak direnez, bi aldagai azaltzaile kualitatibo barneratu dira. Aldagai horiek bina kategoria dituztenez (kanpaina egitea ala ez egitea), bi fikzio-aldagai definitu behar dira aldagai azaltzaile bakoitzarentzat:

A Kanpaina

$$AK_t = \begin{cases} 1 & i \in A \text{ kanpaiana egitea} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \quad AKE_t = \begin{cases} 1 & i \in A \text{ kanpaina ez egitea} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

B Kanpaina

$$BK_t = \begin{cases} 1 & i \in B \text{ kanpaina egitea} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \quad BKE_t = \begin{cases} 1 & i \in B \text{ kanpaina ez egitea} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

Ereduko  $X$  datu-matrizean kolinealtasun-arazorik egon ez dadin, aldagai azaltzaile bakoitzetik fikzio-aldagai bakar bat sartu da; kanpaina aldagaia, hain zuzen. Hona hemen proposatutako ereduaren KTA estimazioren emaitzak:

## P15.4 Eredua: KTA estimazioak 52 behaketak erabiliz

Aldagai azaldua:  $S$ 

Aldagaia	Koefizientea	Desb. Tipikoa	$t$ -estatistikoa	p-balioa
const	27718,3	8325,55	3,3293	0,0017
$PRAL$	-50671,0	7221,18	-7,0171	0,0000
$PRLH$	19583,0	9448,74	2,0726	0,0437
$AK$	5496,27	1454,55	3,7787	0,0004
$BK$	3622,38	1988,17	1,8220	0,0748
Hondarren karratuen batura	1,04429e+09		$R^2$	0,571792

LEZ:

$$\begin{aligned} \widehat{S}_t &= 27718,3 - 50671,0 PRAL_t + 19583,0 PRLH_t + 5496,27 AK_t + \\ (\widehat{\sigma}_{\hat{\beta}}) & \quad (8325,55) \quad (7221,18) \quad (9448,74) \quad (1454,55) \\ & + 3622,38 BK_t \quad R^2 = 0,571792 \quad HKB = 1044290000 \\ & \quad (1988,17) \end{aligned}$$

**A.** Koefiziente estimatuen interpretazioa:

$\hat{\beta}_1 = 27718,3$ . Estimatuak salmenta 27718,3 lata da, enpresaren prezioa eta lehiako enpresen prezio-indizea zero direnean, eta kanpainarik martxan ez dagoenean.

$\hat{\beta}_2 = -50671$ . AL markako laten prezioa euro bat igotzean, salmentak 50671 lata gutxiago salduko direla estimatzen da, lehiako enpresen prezio-indizea konstante mantenduz eta kanpainak martxan dauden ala ez kontuan hartu gabe.

$\hat{\beta}_3 = 9791,51$ . Lehiako enpresen prezio-indizea euro bat igotzean, salmentak 9791,51 lata gehitzen direla estimatzen da, AL markaren prezioa konstante mantenduz eta kanpainak martxan dauden ala ez kontuan hartu gabe.

$\hat{\beta}_4 = 5496,27$ . A kanpaina martxan jartzean, estimatuak salmentak 5496,27 lata igotzen dira, beste ezaugarriak (prezioak eta B kanpaina) berdinak izanik.

$\hat{\beta}_5 = 3622,38$ . B kanpaina martxan jartzean, estimatuak salmentak 3622,38 lata igotzen dira, beste ezaugarriak (prezioak eta A kanpaina) berdinak izanik.

**B.** Mugatze-koefizientea:  $R^2 = 0,571792$ .

Interpretazioa: lagineko salmenten aldagarritasunaren % 57,18 azaltzen da ereduko aldagai azaltzaileen aldagarritasunaren bitartez: prezioen (enpresarena eta lehiako enpresena) eta publizitate-kanpainen (A eta B) aldagarritasunaren bitartez.

## C. Aldagai azaltzaileen esangura.

## C.1. Baterako esanguraren kontrastea.

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

$$H_a : \beta_2 \neq 0 \text{ edota } \beta_3 \neq 0 \text{ edota } \beta_4 \neq 0 \text{ edota } \beta_5 \neq 0$$

$$F = \frac{R^2/q}{(1 - R^2)/(T - k)} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T - k)$$

$$F = \frac{0,571792/4}{(1 - 0,571792)/(52 - 5)} = 15,69 > 2,56954 = \mathcal{F}(4, 47)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa baztertu egiten da, % 5eko esangura-maila izanik; beraz, AL markaren prezioa, lehiako enpresen prezio-indizea eta bi kanpainak (A eta B) batera esanguratsuak dira.

## C.2. Banakako esanguraren kontrasteak.

$$H_0 : \beta_i = 0 \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k) \quad i = 2, 3, 4, 5.$$

$$H_a : \beta_i \neq 0$$

AL markaren prezioa:

$$|t| = \left| \frac{-50671 - 0}{7221,18} \right| = 7,0171 > 2,00958 = t(52 - 3)_{0,05/2}$$

Lehiako enpresen prezioa:

$$|t| = \left| \frac{19583,0 - 0}{9448,740} \right| = 2,0726 > 2,00958 = t(52 - 3)_{0,05/2}$$

A kanpaina:

$$|t| = \left| \frac{5496,27 - 0}{1454,55} \right| = 3,7787 > 2,00958 = t(52 - 3)_{0,05/2}$$

B kanpaina:

$$|t| = \left| \frac{3622,38 - 0}{1988,17} \right| = 1,8220 < 2,00958 = t(52 - 3)_{0,05/2}$$

Hortaz, ondoriozta daiteke AL markaren prezioa, lehiakoen enpresen prezio-indizea eta A publizitate-kanpaina banaka esanguratsuak direla, % 5eko esangura-maila izanik. Bestalde, B publizitate-kanpaina ez da banaka esanguratsua % 5eko esangura-maila izanik, baina bai % 10eko esangura-maila izanik.

2. Aurreko ataleko emaitzak aztertuz, A publizitate-kanpaina gomendatuko diogu enpresako kudeatzaileari, bi arrazoi hauengatik:



- A kanpaina esanguratsua da, % 5eko esangura-maila izanik, eta B kanpaina, ordea, ez da esanguratsua, nahiz eta azken hori esanguratsua den % 10eko esangura-maila izanik.
- A kanpainak salmentetan eragiten duen gehikuntza B kanpainak eragiten duen baino handiagoa da, ezaugarri berdinak izanik.

## HIRUGARREN ZATIA.

1. P15.4 eredia aukeratu dugu; izan ere, P15.3 eredian ez dira publizitate-kanpainen eraginak kontuan hartu, eta, haietako bat esanguratsua denez, aldagai esanguratsu bat kanpoan gelditu da. Zehaztapen-errore horren ondorioz, P15.3 eredian erabiltzen diren KTA estimatzaileak alboratuak dira, perturbazioen bariantzaren estimatzailea alboratua da, eta erabilitako estatistikoek ez dituzte ohiko  $t$  eta  $F$  banaketak jarraitzen; ondorioz, egindako inferentzia ez da baliagarria.
2. Marketin-politikak analizatzean, bi publizitate-kanpainen eraginak positiboak dira, eta A kanpainaren eragina esanguratsua da salmentak gehitzeko.

Prezio-politikak aztertzean, lehiako marken prezioek salmentetan era berdinean eragiten dutela kontrastatu eta baieztatu da. Baina interesgarria litzateke jakitea ea lehiako marken prezio-indizearen jaitsiera enpresaren prezioaren antzeko jaitsiera batekin konpentsa daitekeen ala ez. Hortaz, komeni da jakitea ea neurri berekoak diren lehiako marken prezio-indizea jaistean salmentetan gertatzen den jaitsiera eta prezioa jaistean salmentetan gertatzen den igoera. Lan-hipotesi hori P15.4 erudian kontrastatu da:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 &= -\beta_3 & (\beta_2 + \beta_3 &= 0) & t &= \frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - 0}{\sqrt{\widehat{bar}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}} \stackrel{H_0}{\sim} t(T - k) \\ H_a : \beta_2 &> -\beta_3 & (\beta_2 + \beta_3 &> 0) & \end{aligned}$$

$$\text{non } \widehat{bar}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) = \widehat{bar}(\hat{\beta}_2) + \widehat{bar}(\hat{\beta}_3) + 2\widehat{kob}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 111083445,5 \text{ den.}$$

$$t = \frac{-50671 + 19583 - 0}{\sqrt{111083445,5}} = -2,9496 < 1,67793 = t(47)_{0,05}$$

Hipotesi hutsa ez da baztertzen, % 5eko esangura-maila izanik, hau da, lehiako enpresen prezio-indizearen jaitsiera prezioaren antzeko jaitsiera batekin konpentsa daiteke.

# Bibliografia

- [1] A. Cottrell and R.J. Lucchetti. *Gretl*. <http://gretl.sourceforge.net/>.
- [2] R. Frisch. Editorial. 33(1):1–14, 1933.
- [3] A. Goldberger. *Econometric Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1964.
- [4] D.N. Gujarati. *Basic Econometrics*. McGraw-Hill, United States, 2003.
- [5] R.C. Hill, W.E. Griffiths, and G.C. Lim. *Principles of Econometrics*. Wiley, United States, 2008.
- [6] R. Ramanathan. *Introductory Econometrics with Applications*. South-Western, Thomson Learning, United States, 2002.
- [7] J.M. Wooldridge. *Introductory Econometrics. A modern approach*. South-Western, Thomson Learning, United States, 2003.