Ejercicios resueltos de Matemáticas I

Exámenes propuestos en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Casilda Lasso de la Vega
Juan Carlos Santos
Amaia de Sarachu

EKONOMIA ETA ENPRESA
ZIENTZIEN FAKULTATEA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Y EMPRESARIALES

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ISBN: 978-84-9860-451-1

ISBN: 978-84-9860-451-1

Bilbao, noviembre 2010

www.argitalpenak.ehu.es

Índice

Introducción

Matemáticas I aporta los conocimientos básicos de Algebra Lineal e Integración que son necesarios en los estudios en Economía (L.E.) y Administración y Dirección de Empresas (L.A.D.E.).

Esta publicación recoge problemas resueltos propuestos en exámenes de Matemáticas I de ambas licenciaturas en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la U.P.V. entre los años 2001 y 2010. Los problemas están organizados en diferentes secciones siguiendo el esquema de los temarios de ambas asignaturas.

LICENCIATURA DE ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS (L.A.D.E.)

Temario

I.- ELEMENTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

1. **Matrices:** Definiciones básicas. Operaciones con matrices. Traspuesta de una matriz. Matrices escalonadas. Rango de una matriz.
2. **Determinantes**: Determinante de una matriz cuadrada. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea. Propiedades. Aplicaciones de los determinantes.
3. **Sistemas de ecuaciones lineales. El método de Gauss:** Definiciones básicas. Expresión matricial. Sistemas homogéneos. El método de Gauss. Teorema de Rouché. Regla de Cramer. Interpretación geométrica.
4. **Espacio vectorial**: Subespacios vectoriales. Sistemas libres y generadores. Bases. Variedad lineal.
5. **Espacio Euclídeo**: Producto interno. Norma. Angulo de dos vectores. Sistemas ortogonales. Bases ortonormales. Teorema de Gram-Schmidt.
6. **Aplicaciones lineales**: Definiciones básicas. Representación matricial de una aplicación lineal. Composición de aplicaciones lineales. Isomorfismos.

II.- INTEGRACIÓN

7. Integración de funciones acotadas sobre conjuntos acotados: Integral de una función sobre un intervalo. Integrabilidad de las funciones continuas. Propiedades de la integral.

8. Teoría del cálculo de integrales: Primitivas o antiderivadas. Regla de Barrow. Cambios de variable en la integración. Integración por partes.

9. Integrales impropias. Integrales impropias de 1ª especie. Integrales impropias de 2ª especie. Caso general.

Referencias Bibliográficas Básicas:

Matemáticas para el Análisis Económico. Sydsaeter y Hammond, Editorial Prentice Hall, 1996.

Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana. Juan de Burgos, Editorial Mc Graw Hill, 2000.

Álgebra Lineal y Teoría de Matrices. Barbolla y Sanz, Editorial Prentice Hall, 1998.

LICENCIATURA DE ECONOMÍA (L.E.)

Temario

1. Matrices: Definiciones básicas. Operaciones con matrices. Traspuesta de una matriz. Matrices escalonadas. Rango de una matriz.

2. Determinantes: Determinante de una matriz cuadrada. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea. Propiedades. Aplicaciones de los determinantes.

3. **Sistemas de ecuaciones lineales. El método de Gauss:** Definiciones básicas. Expresión matricial. Sistemas homogéneos. El método de Gauss. Teorema de Rouché. Regla de Cramer. Interpretación geométrica.

4. **Espacio vectorial**: Subespacios vectoriales. Sistemas libres y generadores. Bases. Variedad lineal.

5. **Espacio Euclídeo**: Producto interno. Norma. Angulo de dos vectores. Sistemas ortogonales. Bases ortonormales. Teorema de Gram-Schmidt.

6. **Aplicaciones lineales**: Definiciones básicas. Representación matricial de una aplicación lineal. Composición de aplicaciones lineales. Isomorfismos.

7. **Diagonalización**: Cambio de base. Valores y vectores propios. Condiciones de diagonalizabilidad. Polinomio característico. Método operativo de diagonalización. Diagonalización de matrices simétricas.

Referencias Bibliográficas Básicas:

Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana. Juan de Burgos, Editorial Mc Graw Hill, 2000.

Álgebra Lineal y Teoría de Matrices. Barbolla y Sanz, Editorial Prentice Hall, 1998.

MATEMÁTICAS I (L.A.D.E. y L.E.)

Sección 1. Matrices. Determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales

1.- (enero 2010-LE)

a) Calcular el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-2y-z+t=3 \\ x+y-z-2t=0 \\ 3x-5y-2z+2t=8 \end{cases}$.

a) $$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} =_{(E_4=E_4-5E_3)} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

b) $$\begin{cases} x-2y-z+t=3 \\ x+y-z-2t=0 \\ 3x-5y-2z+2t=8 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_3=E_3-3E_2 \\ E_2=E_2-E_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & 1 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_3=3E_3+8E_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-z+t=3 \\ 3y-3t=-3 \\ 3z=0 \end{array}\right\} z=0,\ y=-1+t\ ,x=1+t.$$

Luego la solución del sistema es:

$$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, z=0,\ y=-1+t\ ,x=1+t\} = \{(1+t,-1+t,0,t), t\in\mathbb{R}\}.$$

2.- (febrero 2009-LE) Sea el sistema $\begin{cases} ax+by+z+t=2 \\ -x+3z-t=2 \\ x-z+t=0 \\ 2x+y+2z+2t=5 \end{cases}$ siendo $a,b \in \mathbb{R}$.

a) Clasifica el sistema para los diferentes valores de *a* y *b*.

b) Para $a=1$ y $b=0$ encuentra el conjunto de soluciones del sistema utilizando Gauss.

a) La matriz de coeficientes *A* y la matriz ampliada *A**B* asociadas a este sistema son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a & b & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Para calcular el rango de la matriz A, primero calculamos su determinante

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-b\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2+2a.$$

Puesto que $\det(A)=-2+2a$ se tiene que:

Si $a\neq 1$, $rg(A)=4=rg(A|B)$ y el sistema es compatible determinado.

Si $a=1$ entonces $rg(A)=3$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Para calcular el $rg(A|B)$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 & \mathbf{2} \\ -1 & 0 & 3 & \mathbf{2} \\ 1 & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ 2 & 1 & 2 & \mathbf{5} \end{vmatrix}=2b.$$

Entonces, si $b=0$, $rg(A|B)=3$ y si $b\neq 0$, $rg(A|B)=4$.

En conclusión:

- $a \neq 1$ y para todo b, $rg(A) = rg(A|B) = 4$: sistema compatible determinado S.C.D.
- $a = 1$ y $b = 0$, $rg(A) = rg(A|B) = 3$: sistema compatible indeterminado S.C.I.
- $a = 1$ y $b \neq 0$, $rg(A) = 3 \neq 4 = rg(A|B)$: sistema incompatible S.I.

b) $A \setminus B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, $\begin{cases} x + z + t = 2 \\ y = 1 \\ 4z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - x \\ y = z = 1 \end{cases}$.

La solución del sistema es:

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, t = 1 - x;\ y = z = 1\} = \{(x, 1, 1, 1 - x), x \in \mathbb{R}\}.$$

3.- (junio 2009-LE)

a) Una empresa compra 2 unidades del artículo A, 3 unidades del artículo B y 5 unidades del artículo C. Si sabemos que el gasto total es de 2875 euros, que el precio del artículo B es el doble del precio del artículo A y que el precio del artículo C es el triple del precio del artículo A, ¿podemos averiguar los precios de los artículos? Si es cierto, calcúlalos. ¿Podemos averiguar los precios de los artículos si nos dicen que se han pagado 345 euros en concepto de IVA al 16% para las unidades de A y B y al 7% para las unidades de C? Si es cierto, calcúlalos.

b) Calcula el rango de de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Variables: $x =$ precio unitario del artículo *A*, $y =$ precio unitario del artículo *B*,

$z =$ precio unitario del artículo *C*.

Restricciones:

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=2875 \\ y=2x \\ z=3x \end{cases}$$

Resolución: $x=125$ euros, $y=250$ euros, $z=375$ euros.

Modelo ampliado: hallar *x*, *y*, *z* que cumplan (mismas variables):

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=2875 \\ y=2x \\ z=3x \\ 0{,}16(2x+3y)+0{,}07(5z)=345 \end{cases}$$

El sistema no es compatible: no podemos calcular los precios para que se cumplan todas las restricciones.

b) Calculamos el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

luego su rango es como mucho 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Conclusión: el rango es 3.

Sección 2. Espacios vectoriales. Espacio euclídeo

1.- (febrero 2010-LADE) Sea el subespacio vectorial

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \langle (x,y,z)/(1,1,-2)\rangle = 0\}$

a) Dar 2 vectores de S.

b) ¿Para que valores de a el vector $(1,a,2)\in S$?

c) Calcular una base y la dimensión de S.

d) Decir razonadamente si los siguientes sistemas de vectores son o no una base de S. ¿Y base ortonormal de S?

$\langle (1,1,-2)\rangle$; $\langle (0,2,1),(1,1,-2)\rangle$; $\langle (-1,1,0),(1,-1,1)\rangle$;

$\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle$; $\langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$.

e) Sea el subespacio vectorial $T=\{(x+y+2z,3x+y,2x+y+z)/ x,y,z\in\mathbb{R}\}$, ¿está $T\subset S$?

a) Los vectores deben cumplir $\langle (x,y,z)|(1,1,-2)\rangle = 0 \iff x+y-2z=0$

$x=0,\ y=0 \Rightarrow z=0$; $(0,0,0)\in S$

$x=0,\ y=2 \Rightarrow z=1$; $(0,2,1)\in S$

b) $(1,a,2)\in S$ si y solo si $\langle (1,a,2)|(1,1,-2)\rangle = 0$

$$\langle (1,a,2)|(1,1,-2)\rangle = 1+a-4=0 \iff a=3.$$

c) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z)|(1,1,-2)\rangle = 0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x+y-2z=0\}=$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x=-y+2z\}=\{(-y+2z,y,z):\ y,z\in\mathbb{R}\}=$

$$=\{y(-1,1,0)+z(2,0,1):\ y,z\in\mathbb{R}\}.$$

El sistema $\langle (-1,1,0),(2,0,1)\rangle$ es un sistema generador de S y además es libre ya que

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2$$

Por tanto es una base de S y dim(S) = 2.

d) • $\langle(1,1,-2)\rangle$ No es una base puesto que es un sistema de un vector y dim(S) = 2.

Y puesto que no es una base de S tampoco es una base ortonormal.

• $\langle(0,2,1),(1,1,-2)\rangle$

Comprobamos si los vectores del sistema pertenecen a S:

$\langle(0,2,1)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0$, luego $(0,2,1)\in S$. $\langle(1,1,-2)\,|\,(1,1,-2)\rangle=-2\neq 0$, por tanto $(1,1,-2)\notin S$

Como el segundo de los vectores no pertenece a S, el sistema no es una base de S y por tanto tampoco es una base ortonormal de S.

• $\langle(-1,1,0),(1,-1,1)\rangle$

Comprobamos si los vectores del sistema pertenecen a S:

$\langle(-1,1,0)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0$ luego $(-1,1,0)\in S$. $\langle(1,-1,1)\,|\,(1,1,-2)\rangle=-2\neq 0$ luego $(1,-1,1)\notin S$

Al igual que en el caso anterior, el segundo del los vectores del sistema no pertenece a S por lo que el sistema no es una base de S y por tanto tampoco una base ortonormal de S.

• $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle$

Comprobamos si los vectores del sistema pertenecen a S:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\in S \text{ ya que } \left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)/(1,1,-2)\right\rangle=0$$

$$\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\in S \text{ ya que } \left\langle\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)/(1,1,-2)\right\rangle=0$$

Puesto que $rg\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}=2$ los dos vectores son linealmente independientes.

Por tanto el sistema dado es una base de S. Para ser una base ortonormal además deben ser vectores ortogonales cuya norma sea 1. Pero,

$\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) / \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{15}} \neq 0$ luego no son ortogonales y el sistema dado no es una base ortonormal de *S*.

- $\langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$. No es una base ya que es un sistema de tres vectores y la dim(*S*) = 2. Y puesto que no es una base de *S* tampoco es una base ortonormal.

e) $T = \{ (x+y+2z, 3x+y, 2x+y+z) / x,y,z \in \mathbb{R} \} =$

$$\{ x(1,3,2)) + y(1,1,1) + z(2,0,1) \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}.$$

Entonces $\langle (1,3,1)),(1,1,1),(2,0,1) \rangle$ es un sistema generador de *T*.

Dado que $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ entonces dim*(T)*=2, siendo por ejemplo $\langle (1,3,2),(1,1,1) \rangle$ una base de *T*. También son bases de *T* $\langle (1,3,2),(2,0,1) \rangle$ y $\langle (1,1,1),(2,0,1) \rangle$.

Para que $T \subset S$ los vectores de la base de T tienen que pertenecer a S,

$$\langle (1,3,2) \mid (1,1,-2) \rangle = 0 \Rightarrow (1,3,2) \in S \quad \langle (1,1,1) \mid (1,1,-2) \rangle = 0 \Rightarrow (1,1,1) \in S$$

Por lo tanto se cumple que $T \subset S$.

2.-(mayo 2010-LADE) Sea *S* el subespacio vectorial generado por el sistema ⟨(1,0,2,1), (1,1,0,1)⟩.

a) Encuentra (si es posible) un vector (*x,y,z,t*) tal que ⟨(1,1,1,1), (*x,y,z,t*)⟩ sea una base de *S*. Por otra parte, ¿(1,2,−2,0)∈*S*?

b) Calcula una base del conjunto T={$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ | $\boldsymbol{x}$ es ortogonal a todos los vectores de *S*}.

c) Calcula una base ortonormal de *S*.

d) Encuentra dos vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$ tales que ⟨(1,0,2,1), (1,1,0,1), $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$⟩ sea una base de $\mathbb{R}^4$.

En primer lugar, nótese que los vectores ⟨(1,0,2,1), (1,1,0,1)⟩ son libres (ninguno de ellos es combinación lineal del otro) luego constituyen una base de S, y por tanto, la dimensión de *S* es 2.

a) Para que el sistema de vectores $\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ sea una base del conjunto S necesitamos:

(i) $(1,1,1,1)\in$S, (ii) $(x,y,z,t)\in$S (iii) $\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ sea un sistema de vectores libres.

Veamos si $(1,1,1,1)\in$S.

$$rg\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}=3,$$

por lo tanto $(1,1,1,1)\notin S$,

Luego no existe (x,y,z,t) tal que el sistema de vectores $\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ sea base de S.

- De igual manera veamos si $(1,2,-2,0)\in S$

$$rg\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&-2\\1&1&0\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=3,$$

luego $(1,2,-2,0)\notin S$.

b) $T=\left\{x\in\mathbb{R}^4 \mid x \text{ es ortogonal a todos los vectores de S}\right\}=$

$$=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\left\langle(x,y,z,t)\,|\,(1,0,2,1)\right\rangle=0,\ \left\langle(x,y,z,t)\,|\,(1,1,0,1)\right\rangle=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: x+2z+t=0,\ x+y+t=0\right\}.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases}x+2z+t=0\\ x+y+t=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\1&1&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\0&1&-2&0&0\end{array}\right)\to\begin{cases}x+2z+t=0\\ y-2z=0\end{cases}\to\begin{cases}x=-2z-t\\ y=2z\end{cases}.$$

Entonces

$$T=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: x=-2z-t;\ y=2z\right\}=\left\{(-2z-t,2z,z,t): z,t\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{z(-2,2,1,0)+t(-1,0,0,1): z,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Luego el sistema de vectores $\langle(-2,2,1,0),(-1,0,0,1)\rangle$ es generador de T, y además es libre ya que

$$rg\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Podemos concluir que es una base de T.

c) Aplicando el teorema de Gram-Schmidt a la base de S $\langle(1,0,2,1), (1,1,0,1)\rangle$ obtenemos:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1).$$

$$z_2 = (1,1,0,1) - \left\langle (1,1,0,1) \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1) = (1,1,0,1) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1)$$

$$= \frac{1}{3}(2,3,-2,2)$$

$$y_2 = \frac{\frac{1}{3}(2,3,-2,2)}{\left\| \frac{1}{3}(2,3,-2,2) \right\|} = \frac{(2,3,-2,2)}{\sqrt{21}}$$

Por lo tanto el sistema de vectores $\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1), \frac{1}{21}(2,3,-2,2) \right\rangle$ es una base ortonormal de S.

d) Buscamos dos vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$ que juntamente con $\langle(1,0,2,1), (1,1,0,1)\rangle$ formen un sistema libre.

El sistema $\langle(1,0,2,1), (1,1,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\rangle$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^4$. De estos seis vectores buscamos 4 que contengan a los dos primeros y que formen un sistema libre.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Por tanto el sistema de vectores$\langle(1,0,2,1), (1,1,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0)\rangle$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

También es una respuesta correcta cualquier sistema formado por 4 vectores, de los 6 vectores iniciales, que sea libre.

3.- (enero 2010-LE)

a) Indicar razonadamente si el sistema $\langle(1,-1,2),(1,0,1)\rangle$ es una base de los siguientes subespacios vectoriales:

i) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x-z=0; y+z-x=0\}$.

ii) $B=\{(x+z,-x-y,2x+y+z) \,/\, x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

b) Considerando los mismos subespacios vectoriales del apartado anterior

i) Calcular una base ortonormal de *A*.

ii) Calcular un vector $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ortogonal a todo vector de *A*.

iii) ¿Está $A\subset B$?

a) i) Opción 1: El sistema no es una base de *A* ya que $(1,-1,2)\notin A$ (no cumple la ecuación $x-z=0$).

Opción 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x-z=0;\ y+z-x=0\}=\left\{\begin{matrix} x=z \\ y=0\end{matrix}\right\}=\{(x,0,x)\,/\,x\in\mathbb{R}\}=$$
$$\{x(1,0,1)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$$

Una base de A es por tanto $(1,0,1)$ (es un sistema generador de A y libre). Luego $\dim A=1$. El sistema $\langle(1,-1,2),(1,0,1)\rangle$ no es una base de *A* ya que tiene dos vectores.

ii) $B=\{(x+z,-x-y,2x+y+z)\,/\,x,y,z\in\mathbb{R}\}=$

$$=\{x(1,-1,2)+y(0,-1,1)+z(1,0,1)\,/\,x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

Por tanto, $\langle(1,-1,2),(0,-1,1),(1,0,1)\rangle$ es un sistema generador de *B*. Como

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=2$, se tiene que la dimensión de *B* es 2, luego una base de *B* es cualquier sistema libre formado por dos vectores pertenecientes a *B*, por ejemplo $\langle(1,-1,2),(1,0,1)\rangle$. La respuesta es sí.

b) i) $\langle(1,0,1)\rangle$ base de *A*. Usando Gram-Schmith: $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle$ base ortonormal de *A*.

ii) (*x*,*y*,*z*) es ortogonal a todo punto de *A* si es ortogonal a su base. Luego: $\langle(x,y,z)\,|(1,0,1)\rangle=0 \Leftrightarrow x+z=0 \Leftrightarrow x=-z$. Como sólo nos piden un punto, por ejemplo, $(1,0,-1)$ ó $(0,1,0)$ ó $(0,0,0)$, etc.

iii) $A\subset B$ si se cumple que la dimensión de *A* es menor o igual que la de *B* (cierto, ya que sabemos que las dimensiones de *A* y *B* son 1 y 2, respectivamente) y si los vectores de una base de *A* pertenecen a *B* (cierto, el vector $(1,0,1)$ es una base de *A* y pertenece al subespacio vectorial *B*). Luego $A\subset B$.

4.- (junio 2010-LE) Sea el subespacio vectorial

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z)\,|\,(1,-1,2)\rangle=0\}.$$

a) Encuentra dos vectores de *S*.

b) ¿Para qué valores de *a* se cumple $(1,-3,a)\in S$?

c) Calcula la dimensión y una base de *S*.

d) De entre los siguientes sistemas de vectores indica cuáles son bases de *S* y cuáles no (razonando la respuesta). ¿Cuáles son bases ortonormales de *S*?

$$\langle(1,1,0)\rangle;\quad \langle(0,2,1),(2,0,-1)\rangle;\quad \langle(1,-1,-1),(-1,1,0)\rangle;$$

$$\left\langle\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle;\quad \langle(1,1,0),(2,0,-1),(0,2,1)\rangle.$$

e) Sea $T=\{(x+2y+z,3x+2y+z,x)/\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ un espacio vectorial. ¿Se cumple que $T\subset S$?

a) Los puntos de *S* son los que cumplen la ecuación $x-y+2z=0$. Por ejemplo:

(1,1,0), (2,2,0), (0,2,1), (-2,0,1).

b) $\langle (1,-3,a) | (1,-1,2) \rangle = 1+3+2a \to 4+2a = 0 \Leftrightarrow a = -2.$

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y - 2z\} =$

$$= \{(y-2z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,0) + z(-2,0,1) / y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto $\langle (1,1,0), (-2,0,1) \rangle$ es un sistema generador *S*; además es libre ya que

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Luego este sistema es una base de *S* y su dimensión es 2.

d) Como dim *S*= 2, para tener una base de *S* se necesitan 2 vectores libres que pertenezcan a *S*.

- $\langle (1,1,0) \rangle$ no es base, ya que tiene un único vector.

- $\langle (0,2,1), (2,0,-1) \rangle$ es un sistema formado por dos vectores:

¿ $(0,2,1), (2,0,-1) \in S$?

$\langle (0,2,1) | (1,-1,2) \rangle = 0$ y $\langle (2,0,-1) | (1,-1,2) \rangle = 0$.

Luego los dos vectores pertenecen a *S*. Además $\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ luego el sistema es libre y por tanto una base de *S*. Sin embargo no es una base ortonormal de *S* ya que no es ortogonal: $\langle (0,2,1) | (2,0,-1) \rangle \neq 0$.

- $\langle (1,-1,-1), (-1,1,0) \rangle$ es un sistema formado por dos vectores:

¿ $(1,-1,-1), (-1,1,0) \in S$? $\langle (1,-1,-1) | (1,-1,2) \rangle = 0$ pero $\langle (-1,1,0) | (1,-1,2) \rangle = 2 \neq 0$, luego no es una base de *S*.

- $\left\langle \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle$

$\left\langle\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\middle|(1,-1,2)\right\rangle=0$ y $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\middle|(1,-1,2)\right\rangle=\frac{6}{\sqrt{6}}\neq 0$. Por tanto uno de los vectores no pertenece a *S*. Luego este sistema no es una base de *S*.

- $\langle(1,1,0),(2,0,-1),(0,2,1)\rangle$ es una sistema formado por 3 vectores luego no puede ser una base de *S*.

e) $T=\{(x+2y+z,3x+2y+z,x)/x,y,z\in\mathbb{R}\}=$

$$\{x(1,3,1)+y(2,2,0)+z(1,1,0)/x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

Sistema generador de *T*: $\langle(1,3,1),(2,2,0),(1,1,0)\rangle$. Este sistema no es libre ya que (2,2,0)=2(1,1,0). El sistema $\langle(1,3,1),(1,1,0)\rangle$ es una base de *T*, luego la dimensión de *T* es 2. Falta comprobar que los vectores de la base de *T* pertenecen a *S*:

$\langle(1,3,1)|(1,-1,2)\rangle=0$ y $\langle(1,1,0)|(1,-1,2)\rangle=0$. Conclusión: $T\subset S$.

5.- (enero 2009-LADE) Sean los conjuntos

$$A=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+2y+z=0,\ x+2y+t=0\right\}$$

$B=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\text{:}\ x\text{-}z+t=0,\ 2y+t=0\right\}$ y

$$C=\left\{\left(x+2y,x\text{-}y,2x-3y,3x+y\right):x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

a) Calcular una base ortonormal de *A*.

b) Calcular $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ de manera que $\langle(x,y,z,t),(3,1,1,-2)\rangle$ sea una base de *B*.

c) Calcular una base y la dimensión de $A\cap B$.

d) ¿Existe algún valor de *a* para el que se cumpla que $(1,a,9,a)\in C$?

e) Encontrar un punto $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ cumpliendo que $(x,y,z,t)\notin A$ y $(x,y,z,t)\notin B$.

a) $\begin{cases}x+2y+z=0\\ x+2y+t=0\end{cases}\rightarrow z=-x-2y, t=-x-2y$

Luego $A=\{(x,y,-x-2y,-x-2y),x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,-1,-1)+y(0,1,-2,-2)x,y\in\mathbb{R}\}$

Sistema generador: $\langle(1,0,-1,-1)(0,1,-2,-2)\rangle$. $rg\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-2\\-1&-2\end{pmatrix}=2\rightarrow$ libre, y por tanto es una base de A.

Base ortonormal: $\mathbf{y}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1)$

$$\mathbf{z}_2=(0,1,-2,-2)-\left\langle(0,1,-2,-2)\left|\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1)\right.\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1)=$$

$$=(0,1,-2,-2)-\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1)=\frac{1}{3}(-4,3,-2,-2)$$

$$\mathbf{y}_2=\frac{(-4,3,-2,-2)}{\sqrt{33}}.$$

b) $B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: x-z+t=0,\ 2y+t=0\}$

Resolvemos el sistema:

$$t=-2y,x=z-t=z+2y\rightarrow(z+2y,y,z,-2y)$$

Luego $B=\{(z+2y,y,z,-2y),y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(2,1,0,-2)+z(1,0,1,0),y,z\in\mathbb{R}\}$

Sistema generador: $\langle(2,1,0,-2)(1,0,1,0)\rangle$. Y $rg\begin{pmatrix}2&1\\1&0\\0&1\\-2&0\end{pmatrix}=2$

Luego el sistema es libre y base de *B*. $\dim B=2$

Para que $\langle(x,y,z,t),(3,1,1,-2)\rangle$ sea una base de *B* es suficiente (y necesario) que el sistema sea libre y que (x,y,z,t) y $(3,1,1,-2)$ pertenezcan a B. $(3,1,1,-2)\in B$ (cumple las ecuaciones). Y como (x,y,z,t) podemos tomar cualquier vector de B que sea libre con $(3,1,1,-2)$, por ejemplo $(2,1,0,-2)$ o $(1,0,1,0)$.

c) $A \cap B$ es la solución de este sistema: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+2y+t=0 \\ x\text{-}z+t=0 \\ 2y+t=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$z=t; y=\dfrac{-1}{2}t; x=0 \rightarrow \left(0, \dfrac{-1}{2}t, t, t\right) \rightarrow$ base: $\left\langle \left(0, \dfrac{-1}{2}, 1, 1\right) \right\rangle$. Dimensión: 1.

d) $(1, a, 9, a) \in C$ si se verifica que la matriz ampliada

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & a \end{array}\right)$$

Esta asociada a un sistema compatible, esto es, si $rgA = rgA|B$.

Es inmediato comprobar que $rgA = 2,$ para cualquier valor de *a*.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 4$, pero $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Luego $rgA|B$ es 3 para todo *a*.

El sistema es siempre incompatible, y entonces para ningún valor de *a*, $(1, a, 9, a) \in C$.

e) $(x, y, z, t) \notin A$ y $(x, y, z, t) \notin B$ si

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & -2 & z \\ -1 & -2 & t \end{array}\right) \text{ y } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ -2 & 0 & t \end{array}\right)$$

son las matrices ampliadas asociadas a sistemas incompatibles.

Es sencillo demostrar que, por ejemplo, para $(x, y, z, t) = (1, 0, 0, 0)$ ambos sistemas son incompatibles. Otra respuesta correcta: el punto $(1, 0, 0, 0)$, ya que no verifica las ecuaciones de *A* ni de *B*.

6.- (junio 2009-LADE)

a) Sea *E* el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ cuya base es el sistema $\langle (1,1,1,1),(1,1,1,0) \rangle$

i) Calcular otra base del subespacio *E*.

ii) Calcular un vector de *E* de norma 1.

iii) Calcular un vector de *E*, distinto del vector nulo, ortogonal a $(1,1,1,0)$.

iv) Demostrar que $E = \{(a,a,a,b) \in \mathbb{R}^4 / a,b \in \mathbb{R}\}$

v) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el vector $(1,a,1,2) \in E$?

b) Decir si la siguiente afirmación es cierta: "si *S* es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim(S) = 3$ y $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ es un sistema de vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes, entonces $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ es una base de S". Razona la respuesta.

a) i) Cualquier otro sistema formado por 2 vectores linealmente independientes de E constituyen una base de *E* (ya que $\dim(E) = 2$). Por ejemplo:

$$\langle (2,2,2,2),(2,2,2,0) \rangle,\ \langle (1,1,1,1),(0,0,0,1) \rangle,\ \langle (2,2,2,1),(0,0,0,-1) \rangle$$

ii) Por ejemplo: $\left(\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}} \right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right)$, $(0,0,0,1)$ o $(0,0,0,-1)$

iii) Si $\mathbf{x} \in E \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,1,1,0) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha)$

Para que además $\langle \mathbf{x} \,|\, (1,1,1,0) \rangle = 0$ se tiene que cumplir que

$$\langle (\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha) \,|\, (1,1,1,0) \rangle = 3(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta .$$

Por ejemplo: $(0,0,0,1)$, $(0,0,0,-1)$, $(0,0,0,2)$,...

iv) Una base del subespacio *E* es $\langle (1,1,1,1),(1,1,1,0) \rangle$.

Una base del conjunto $\{(a,a,a,b) \in \mathbb{R}^4 / a,b \in \mathbb{R}\}$ es $\langle (1,1,1,0),(0,0,0,1) \rangle$. Ambos vectores pertenecen a *E*: el vector $(0,0,0,1) \in E$ ya que es el segundo vector de la base de *E* que se daba en el enunciado; puesto que

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \;\Rightarrow\; (0,0,0,1) \in E.$$

Ambos vectores son linealmente independientes y como $\dim(E) = 2$ el sistema constituye una base de $E \Rightarrow\; E = \{(a,a,a,b) \in \mathbb{R}^4 \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$

v) Puesto que $E = \{(a,a,a,b) \in \mathbb{R}^4 \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$ se tiene que $(1,a,1,2) \in E$ para $a = 1$ y $b = 2$.

b) Falso. Los tres vectores linealmente independientes deben además pertenecer a *S* para constituir una base de *S*.

7.- (febrero 2009-LE) Sea $\langle (1,1,1),(1,-1,0) \rangle$, base del subespacio vectorial *A*.

a) Encuentra una base ortonormal de *A*.

b) Encuentra, si es posible, un vector $\boldsymbol{u}$ tal que $\langle (0,1,1),\boldsymbol{u} \rangle$ sea una base de *A*.

c) Encuentra, si es posible, un vector $\boldsymbol{v}$ tal que $\langle (3,1,2),\boldsymbol{v} \rangle$ sea una base de *A*.

a) Los vectores $(1,1,1),(1,-1,0)$ son ortogonales: $\langle (1,1,1) | (1,-1,0) \rangle = 0$.

Dividiendo cada vector por su norma se obtiene una base ortonormal

$$\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \right\rangle.$$

b) El vector (0,1,1) no pertenece al subespacio *A* ya que el sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ es incompatible. En efecto, se tiene que $rgA = 2$ y como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

el rango de $A|B$ es 3.

Por tanto, cualquiera que sea **u**, $\langle (0,1,1), \boldsymbol{u} \rangle$ no es base de *A*.

c) El vector (3,1,2) pertenece al subespacio *A* ya que el sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ es compatible. En efecto, se tiene que $rgA = 2$ y como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

el rango de $A|B$ es 2.

Y como dim*A*=2, basta con encontrar otro vector de *A* linealmente independiente con (3,1,2). Por ejemplo, el vector (1,1,1) (ya que no es combinación lineal del vector (3,1,2)). Entonces, $\langle (3,1,2), (1,1,1) \rangle$ es una base de *A*.

8.- (junio 2009-LE) Sean los siguientes espacios vectoriales:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = z\} \qquad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0, y = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\}$$

a) Para cada uno de estos subespacios calcula la dimensión y encuentra una base.

b) ¿Se cumple $T \subset V$? ¿y $T \subset S$?

c) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se cumple $(a, a, a) \in V$?

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\} = \{(x, y, x + y), x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,1), x, y \in \mathbb{R}\}$

.

Los vectores $\langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$ generan el subespacio vectorial *S* y son linealmente independientes ya que $rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$; por tanto forman una base de *S* y la dimensión de *S* es 2.

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0, y=0\}=\{(0,0,z), z\in\mathbb{R}\}=\{z(0,0,1), z\in\mathbb{R}\}.$$

El vector $\langle(0,0,1)\rangle$ genera el subespacio vectorial *T* y es linealmente independiente, por lo tanto forma una base de *T* y la dimensión de *T* es 1.

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y=0\}=\{(x,x,z), x,z\in\mathbb{R}\}=$$

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x-y=0\}=\{(x,x,z)/ x,z\in\mathbb{R}\}=\{x(1,1,0)+z(0,0,1), x,z\in\mathbb{R}\}.$$

Los vectores $\langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$ generan el subespacio vectorial *V* y son linealmente independientes, ya que $rg\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2$, por lo tanto forman una base de *V* y la dimensión de *V* es 2.

b) $T\subset V$: El vector que genera *T* es miembro de una base de *V*, luego $T\subset V$.

$T\not\subset S$: El vector que genera *T* no pertenece a *S*, ya que $0+0\neq 1$.

Otra forma de ver que $T\not\subset S$ es estudiando si se puede expresar el vector que genera *T* como combinación lineal de la base de *S*

$$(0,0,1)=a(1,0,1)+b(0,1,1)\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=0\\ a+b=1\end{cases}$$

Lo cual es imposible, esto es, sistema incompatible.

c) Los vectores de *V* tienen la primera y la segunda componentes iguales, luego el vector $(a,a,a)\in V$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

Otra forma de hacer este apartado: como el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$$

es 2 para todo $a\in\mathbb{R}$, el vector $(a,a,a)\in V$.

9.- (enero 2008-LADE)

a) En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio vectorial E cuya base es $\langle(1,1,1,1),(1,1,1,0)\rangle$.

i) Calcular una base ortonormal del mismo.

ii) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el vector $(2,1,1,a) \in E$?

iii) Calcular el conjunto E y demostrar que $E = S$, siendo

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0, x + y - 2z = 0\}.$$

iv) Dar una base de todos los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ ortogonales al conjunto E.

b) Decir si la siguiente afirmación es cierta: si $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ es un sistema mutuamente ortogonal de $\mathbb{R}^3$ entonces constituye una base de $\mathbb{R}^3$. Razona la respuesta.

a) i) $$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{y}_1 \rangle \mathbf{y}_1 = (1,1,1,0) - \left\langle (1,1,1,0) \middle| \frac{1}{2}(1,1,1,1) \right\rangle \frac{1}{2}(1,1,1,1) =$$

$$= (1,1,1,0) - \frac{3}{2}\frac{1}{2}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-3}{4}\right)$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{\frac{1}{4}(1,1,1,-3)}{\sqrt{\frac{1^2}{4^2}+\frac{1^2}{4^2}+\frac{1^2}{4^2}+\frac{(-3)^2}{4^2}}} = \frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,-3).$$

ii) $(2,1,1,a) \in E \Leftrightarrow A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{array}\right)$ es la matriz ampliada asociada a un sistema compatible. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ tenemos que $rgA = 2 \neq 3 = rgA|B$ para todo a. Por tanto el sistema es siempre incompatible. Luego para ningún valor de a $(2,1,1,a) \in E$.

iii) $E = \{x(1,1,1,1) + y(1,1,1,0), x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x+y, x+y, x+y, x), x, y \in \mathbb{R}\}.$

El conjunto S es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

$3y-3z=0 \rightarrow y=z$

Y entonces $x-2y+z=0 \rightarrow x-2z+z=0 \rightarrow x=z$

Por tanto $S=\{(z,z,z,t), z,t \in \mathbb{R}\}$. Una base de *S* es $\langle(1,1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$. Entonces $\dim E = 2 = \dim S$ y como los dos vectores de la base de *E* pertenecen a *S* (cumplen las dos ecuaciones), se tiene que $E=S$.

iv) Un punto es ortogonal a todos los puntos de *E* si es ortogonal a los vectores de la base de *E*. Por tanto tiene que cumplir:

$$\langle(x,y,z,t)|(1,1,1,1)\rangle=0 \quad y \quad \langle(x,y,z,t)|(1,1,1,0)\rangle=0.$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=0, x=-y-z.$$

Es decir: $\{(-y-z,y,z,0)\, y,z \in \mathbb{R}\}$. Una base: $\langle(-1,1,0,0),(-1,0,1,0)\rangle$.

b) La afirmación es falsa, ya que si alguno de los vectores es el **0** entonces el sistema no es libre y por tanto no es una base. Por ejemplo, $\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0)\rangle$.

10.- (junio 2008-LADE)

a) Calcular una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-2y+z+t=0, \quad y-3t=0\}.$$

b) ¿Es el conjunto $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=z^2\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

c) Sea U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y $\langle(1,2,-1),(0,1,1)\rangle$ una base de U

i) ¿Para qué valores de *a* se verifica que $(1,1,a)\in U$?

ii) ¿Para qué valores de *b* se verifica que $\langle(0,1,1),(2,0,b)\rangle$ es una base de U?

iii) Calcular una base ortonormal de U.

iv) Escribir un subespacio vectorial V (de $\mathbb{R}^3$) tal que $\dim V=1$ y $V\subseteq U$.

a) $\begin{cases} x-2y+z+t=0 \\ y-3t=0 \end{cases} \rightarrow y=3t, x=-z+5t \rightarrow (-z+5t,3t,z,t), z,t\in\mathbb{R}$.

Entonces, las soluciones del sistema se pueden escribir de la forma:

$$(-z+5t,3t,z,t)=z(-1,0,1,0)+t(5,3,0,1).$$

Luego un sistema generador de *S* es $\langle(-1,0,1,0),(5,3,0,1)\rangle$.

Como $rg\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2$ el sistema es libre y por tanto una base de *S*.

Como la base de *S* está formada por dos vectores la dimensión de *S* es 2.

b) $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=z^2\}$ no es un subespacio vectorial.

$(4,0,2)\in T,(1,0,1)\in T$ y sin embargo $(4,0,2)+(1,0,1)=(5,0,3)\notin T$ ya que $5\neq 3^2$.

Luego *T* no cumple que $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in T$, para todo $\mathbf{x},\mathbf{y}\in T$, y por tanto no es un subespacio vectorial.

c) i) $(1,1,a)\in U \Leftrightarrow A|B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{array}\right)$ es la matriz ampliada asociada a un sistema compatible.

$$|A/B|=a+2\rightarrow a+2=0\Leftrightarrow a=-2. \text{ Luego}$$

$$\begin{cases} a\neq -2\rightarrow rgA=2\neq 3=rgA/B\rightarrow S.I. \\ a=-2\rightarrow rgA=2=rgA/B=n^o\, colA\rightarrow S.C.D. \end{cases}$$

Entonces $(1,1,a)\in U\Leftrightarrow a=-2$.

ii) Como la dimensión de *U* es 2, el sistema $\langle(0,1,1),(2,0,b)\rangle$ es una base de *U* si es libre y los dos vectores pertenecen a *U*.

$rg\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$, luego el sistema es libre para todo *b*.

$(0,1,1)\in U \Leftrightarrow A|B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ es la matriz ampliada asociada a un sistema compatible.

Como $|A|B|=0$, se tiene que $rgA=2=rgA|B$. Por tanto $(0,1,1)\in U$.

$(2,0,b)\in U \Leftrightarrow A|B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & b \end{array}\right)$ es la matriz ampliada asociada a un sistema compatible.

Como $|A|B|=b+6$, se tiene que

$$\begin{cases} b\neq -6 \rightarrow rgA=2\neq 3=rgA/B\rightarrow S.I. \\ b=-6\rightarrow rgA=2=rgA/B=n^{o}\, colA\rightarrow S.C.D. \end{cases}.$$

Por tanto $(2,0,b)\in U \Leftrightarrow b=-6$.

Entonces el sistema $\langle (0,1,1),(2,0,b)\rangle$ es una base de U para $b=-6$.

iii) $\mathbf{y}_1=\frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}=\frac{(1,2,-1)}{\|(1,2,-1)\|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}(1,2,-1)=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$.

$$\mathbf{z}_2=\mathbf{x}_2-\langle \mathbf{x}_2|\mathbf{y}_1\rangle \mathbf{y}_1=(0,1,1)-\left\langle (0,1,1)\left|\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\right.\right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)=$$

$$=(0,1,1)-\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)=(0,1,1)-\frac{1}{6}(1,2,-1)=\left(-\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{7}{6}\right).$$

$$\mathbf{y}_2=\frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|}=\frac{\frac{1}{6}(-1,4,7)}{\left\|\frac{1}{6}(-1,4,7)\right\|}=\frac{\frac{1}{6}(-1,4,7)}{\sqrt{\frac{1+16+49}{36}}}=\frac{1}{\sqrt{66}}(-1,4,7).$$

iv) Para que se verifique que $\dim V=1$ y $V\subseteq U$ se tiene que cumplir que el vector de la base de *V* pertenezca a *U*. Así que es suficiente con escribir un subespacio vectorial de dimensión 1 cuya base sea un vector de *U*. Por ejemplo, $(1,2,-1)\in U$, luego una opción es

$$V=\{(x,2x,-x),x\in\mathbb{R}\}.$$

11.- (junio 2008-LE) Sean los conjuntos $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+z=0\}$, $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+3y+4z=0\}$ y $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+3y\text{-}2z=0\}$.

a) Prueba que si $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$ entonces $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in A$.

b) Encuentra una base ortonormal de A.

c) Encuentra dos base de $A\cap B$.

d) Encuentra una base del conjunto de todos los vectores ortogonales a A.

e) Encuentra los valores de a para los cuales $(2,1,a)\in A\cap C$.

a) $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+z = 0\}$

$$\mathbf{x}\in A\rightarrow \mathbf{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right): x_1+2x_2+x_3=0 \qquad (1)$$

$$\mathbf{y}\in A\rightarrow \mathbf{y}=\left(y_1,y_2,y_3\right): y_1+2y_2+y_3=0 \qquad (2)$$

Tenemos que demostrar que $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\right)\in A$.

Para probar que $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ verifica la ecuación que caracteriza a los puntos de A es suficiente comprobar que esta igualdad es cierta: $\left(x_1+y_1\right)+2\left(x_2+y_2\right)+\left(x_3+y_3\right)=0$

Y la igualdad es cierta ya que es el resultado de sumar las igualdades establecidas en (1) y (2).

b) $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+z = 0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = -x-2y\} =$

$= \{(x, y,-x-2y),\ x,y\in\mathbb{R}\} = \{ x(1,0,-1) + y(0,1,-2),\ x,y\in\mathbb{R}\}$.

Entonces $\langle(1,0,-1), (0,1,-2)\rangle$ es un sistema generador de A. Como

$$rg\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=2$$

el sistema es libre y por tanto una base del conjunto A.

Aplicando el teorema de Gram-Schmidt obtendremos una base ortonormal de A.

$$y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}.$$

$$z_2=x_2-\langle x_2\mid y_1\rangle y_1=(0,1,-2)-\left\langle(0,1,-2)\mid\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)=$$

$$= (0,1,-2) - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = (0,1,-2)-(1,0,-1) =$$

$$y_2 = \frac{x_2 - \langle x_2 \mid y_1 \rangle y_1}{\left\| x_2 - \langle x_2 \mid y_1 \rangle y_1 \right\|} = \frac{(-1,1,-1)}{\left\|(-1,1,-1)\right\|} = \frac{(-1,1,-1)}{\sqrt{3}}.$$

Luego, $\left\langle \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1,1,-1)}{\sqrt{3}} \right\rangle$ es una base ortonormal de A.

c) $A \cap B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \boldsymbol{x} \in A \ \text{ y } \ \boldsymbol{x} \in B\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+z=0, \ 2x+3y+4z=0\}$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} y = 2z \\ x = -2y - z = -2(2z) - z = -5z \end{array}$$

Entonces $A \cap B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = -5z, y = 2z\} =$

$$= \{(-5z, 2z, z), z \in \mathbb{R}\} = \{z(-5, 2, 1), z \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto dos bases de $A \cap B$ son por ejemplo: $\langle(-5, 2, 1)\rangle$ y $\langle(-10, 4, 2)\rangle$. También es una base $\langle(5, -2, -1)\rangle$.

d) Sea S el conjunto de todos los vectores ortogonales a A:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle(x,y,z) : (-5, 2, 1)\rangle = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5x + 2y + z = 0\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5x - 2y\} = \{(x, y, 5x - 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x(1,0,5) + y(0, 1, -2), x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Luego una base del conjunto de todos los vectores ortogonales a A puede ser

$$\langle(1,0,5), (0,1,-2)\rangle.$$

e) Encuentra los valores de a para los cuales $(2,1,a) \in A \cap C$.

$$(2,1,a) \in A \cap C \Leftrightarrow (2,1,a) \in A \ \text{ y } \ (2,1,a) \in C.$$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+z=0\}$ y $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y-2z=0\}$ entonces,

- $(2,1,a) \in A \Leftrightarrow x+2y+z = 0$. Sustituyendo: $2 + 2 + a = 4 + a = 0 \Leftrightarrow a = -4$.
- $(2,1,a) \in C \Leftrightarrow x+3y-2z = 0$. Sustituyendo: $2 + 3 - 2a = 5 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 5/2$.

Como no se pueden dar los dos valores de a al mismo tiempo, podemos concluir que no existe ningún valor de a tal que $(2,1,a) \in A \cap C$.

12.- (febrero 2007-LADE)

a) Calcula una base del conjunto $A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (2,-1,1)\rangle = 0\}$.

b) Calcula una base del conjunto

$$B=\{(x+z+t, 2x+y+3z+t, -x+y-2t), x,y,z,t\in\mathbb{R}\}.$$

c) Sea $\langle(1,2,-1),(1,3,0)\rangle$ una base de un subespacio vectorial S.

i) Calcula los valores de a para los cuales $(1,1,a)\in$S.

ii) Calcula una base ortonormal de S.

iii) Calcula un vector $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ ortogonal a todo punto de S.

iv) Sea $T=\{(x,0,x), x\in\mathbb{R}\}$. ¿Está $T\subseteq S$?

a) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle(x,y,z)|(2,-1,1)\rangle=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x-y+z=0\}$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=2x+z\}=\{(x,2x+z,z), x,z\in\mathbb{R}\}$$

Sistema generador de A: $\langle(1,2,0),(0,1,1)\rangle$. Como $rg\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}=2$, el sistema es libre y por tanto una base de A.

b) $B=\{(x+z+t, 2x+y+3z+t, -x+y-2t), x,y,z,t\in\mathbb{R}\}$.

Sistema generador de B: $\langle(1,2,-1),(0,1,1),(1,3,0),(1,1,-2)\rangle$. Como

$rg\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&3&1\\-1&1&0&-2\end{pmatrix}=2$, las bases de B son los sistemas formados por dos vectores libres de B, por ejemplo

$$\langle(1,2,-1),(0,1,1)\rangle.$$

c) i) $(1,1,a)\in$S $\Leftrightarrow (1,1,a)$ es combinación lineal de $\langle(1,2,-1),(1,3,0)\rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ el sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $A|B=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&3&1\\-1&0&a\end{array}\right)$ es un sistema compatible $\Leftrightarrow rgA=2=rgA|B \Leftrightarrow a=-2$.

ii) Utilizando el método de Gram-Schmidt:

$$\mathbf{y}_1 = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{z}_2 = (1,3,0) - \left\langle (1,3,0) \middle| \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} \right\rangle \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} = (1,3,0) - \frac{7}{\sqrt{6}}\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{-1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{7}{6}\right).$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\left(\frac{-1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{7}{6}\right)}{\left\|\frac{-1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{7}{6}\right\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{66}}, \frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right)$$

iii) $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es ortogonal a todo punto de S si

$$\langle (x,y,z) | (1,2,-1) \rangle = 0 \quad y \quad \langle (x,y,z) | (1,3,0) \rangle = 0 .$$

Esto es,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3y, \quad z = -y .$$

Por ejemplo, (-3,1,-1).

iv) Una base de T es (1,0,1). Como el sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ es incompatible, se tiene que $(1,0,1) \notin S$, y por tanto $T \not\subset S$.

13.- (mayo 2007-LADE) Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,m)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,1,1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (2,1,1)$, con $m \in \mathbb{R}$,

a) ¿Existe algún valor de m tal que el sistema $\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 , \boldsymbol{v}_3 , \boldsymbol{v}_4 \rangle$ sea libre? Razona la respuesta.

b) ¿Existe algún valor de m tal que el sistema $\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 , \boldsymbol{v}_3 \rangle$ sea libre? Razona la respuesta.

c) Para $m = 0$ y utilizando algunos de los vectores del sistema $\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 , \boldsymbol{v}_3 , \boldsymbol{v}_4 \rangle$, encuentra una base de $\mathbb{R}^3$.

d) Sea A el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya base es el sistema $\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_3 \rangle$:

i) Calcula el conjunto A.

ii) Encuentra una base ortonormal de A.

a) Para ninguno, puesto que en $\mathbb{R}^3$ cualquier sistema con más de tres vectores necesariamente es ligado.

b) $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ libre $\Leftrightarrow$ $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow m \neq 0$

c) Las bases de $\mathbb{R}^3$ son sistemas formados por tres vectores libres de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo

$$\langle (1,0,1),(2,1,0),(2,1,1) \rangle.$$

d) i) Si es el sistema $\langle v_1, v_3 \rangle$ es una base de A, los puntos de A son aquellos que puedan ser expresados como combinación lineal de $\langle v_1, v_3 \rangle$, es decir:

$$A = \{\lambda_1 (1,0,1) + \lambda_2 (3,1,1), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda_1 + 3\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

ii) Utilizando el método de Gram-Schmidt: $\mathbf{y}_1 = \dfrac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$

$$\mathbf{z}_2 = (3,1,1) - \left\langle (3,1,1) \middle| \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = (3,1,1) - \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = (1,1,-1).$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

14.- *(enero 2006-LADE)*

a) Calcula los valores de a para los cuales (1,1,0) pertenece al espacio vectorial generado por el sistema de vectores $\langle (1,2,\ 1),\ (3,1,a) \rangle$.

b) Dado $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + z = 0\}$,

i) Calcula una base de S.

ii) Calcula los valores de a para los cuales $\langle (1,2,-1), (3,1,a) \rangle$ es una base de S.

c) Calcula los valores de a para los cuales $\langle (1,2,-1), (3,1,a) \rangle$ es ortogonal. ¿Existe algún valor de a para el cual $\|(1,2,-1)\| = \|(3,1,a)\|$?

d) Encuentra un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle (x,y,z), (1,2,-1), (3,1,a) \rangle$ sea libre para todo $a \in \mathbb{R}$.

a) (1,1,0) pertenece al espacio vectorial generado por $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ si es combinación lineal de ambos vectores; para esto, el sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $A|B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{array}\right)$ tiene que ser un sistema compatible.

Como $rgA=2$ y $|\mathrm{A}|\mathrm{B}|=a-2$, se tiene que:

$a\neq 2,\ rgA=2\neq 3=rgA/Y \rightarrow$ sistema incompatible $\leftrightarrow$ $S.I.$

$a=2,\ rgA=2=rgA/Y=n^{o}\,col.A \rightarrow$ sistema compatible determinado $\leftrightarrow S.C.D.$

Luego (1,1,0) pertenece al espacio vectorial generado por $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle \Leftrightarrow a=2$.

b) i) $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x-y+z=0\right\}=\left\{(x,y,-3x+y),x,y\in\mathbb{R}\right\}$. Luego un sistema generador de S es $\langle(1,0,-3),(0,1,1)\rangle$. Como $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=2$, el sistema $\langle(1,0,-3),(0,1,1)\rangle$ es libre y por tanto una base de S.

ii) La dimensión de S es 2, luego el sistema $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ es una base de S si es libre y ambos vectores pertenecen al conjunto S.

Como $rg\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}=2$, para todo a, $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ es libre para todo valor de a.

$(1,2,\text{-}1)\in\mathrm{S}$ ya que cumple la ecuación: $3x-y+z=0\rightarrow 3-2-1=0$

$(3,1,a)\in\mathrm{S}$ si cumple la ecuación:

$$3x-y+z=0\rightarrow 9-1+a=0\Leftrightarrow a=-8$$

Luego $(3,1,a)\in\mathrm{S}\Leftrightarrow a=-8$.

Por tanto, el sistema $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ es una base de S$\Leftrightarrow a=-8$.

c) El sistema $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ es ortogonal si $\langle(1,2,-1)|(3,1,a)\rangle=0$.

Como $\langle(1,2,-1)|(3,1,a)\rangle=3+2-a=5-a$, se tiene que es ortogonal si y solo si $a=5$.

$\|(1,2,-1)\|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$, y $\|(3,1,a)\|=\sqrt{9+1+a^2}=\sqrt{10+a^2}$, y evidentemente no existe ningún valor de a cumpliendo que $\sqrt{6}=\sqrt{10+a^2}$.

d) El sistema $\langle(x,y,z), (1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ es libre para todo a si

$$rg\begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 2 & 1 \\ z & -1 & a \end{pmatrix}=3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 2 & 1 \\ z & -1 & a \end{vmatrix} \neq 0, \text{ para todo } a.$$

Por ejemplo, $(x,y,z)=$ $(0,0,1)$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, para todo a.

15.- (*junio 2006-LADE)* Sean los conjuntos $A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \ : \ x-3y+2z=0\}$, B un espacio vectorial generado por $\langle(0,1,1), (1,0,1)\rangle$ y $C=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle \mathbf{x} \mid (1,2,1)\rangle=2\}$.

a) ¿Es C un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

b) Calcula una base de A.

c) Calcula una base ortonormal de B.

d) Calcula $A\cap C$.

e) Calcula un vector $\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle \mathbf{x}, (0,1,1), (1,0,1)\rangle$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.

a) C no es un subespacio vectorial ya que $\langle (0,0,0) | (1,2,1) \rangle = 0 \neq 2$, luego $\langle (0,0,0) \rangle \notin \tilde{C}$

b) $A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x-3y+2z=0\}=\{(3y-2z,y,z), y,z\in \mathbb{R}\}$. Luego un sistema generador de A es $\langle (3,1,0),(-2,0,1)\rangle$. Como $rg\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2$, el sistema $\langle (3,1,0),(-2,0,1)\rangle$ es libre y por tanto una base de A.

c) $\langle(0,1,1), (1,0,1)\rangle$ es un sistema generador de B. Como $rg\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=2$, el sistema $\langle(0,1,1), (1,0,1)\rangle$ es libre y por tanto una base de B.

Para calcular una base ortonormal, aplicando Gram-Schmidt,

$$\mathbf{y}_1=\frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}=\frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1).$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{y}_1 \rangle \mathbf{y}_1 = (1,0,1) - \left\langle (1,0,1) \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = (1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1) = \left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Luego una base ortonormal de B es $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{2}{\sqrt{6}}\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \right\rangle$.

d) $A \cap C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-3y+2z=0,\ \langle \mathbf{x} \mid (1,2,1) \rangle = 2\} =$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x-3y+2z=0,\ x+2y+z=2\}$$

Luego el conjunto $A \cap C$ es la solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$

La solución de este sistema de ecuaciones es $\left\{\left(\frac{6-7z}{5}, \frac{2+z}{5}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\} = A \cap C$.

e) El sistema $\langle (x,y,z), (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ es una base de $\mathbb{R}^3$ si es un sistema formado por 3 vectores libres $\mathbb{R}^3$. Y es libre si

$$rg\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por ejemplo, $(x,y,z) = (0,0,1)$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

16.- (febrero 2005-LE)

a) Calcular una base de los siguientes subespacios vectoriales:

i) $S=\{(a-2b,a+b+c,3b+c),a,b,c\in\mathbb{R}\}$.

ii) $T=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:\langle\mathbf{x}|(2,-1.0)\rangle=0\}$.

iii) $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:x-z+t=0;\ x+y-t=0\}$.

b) Sabiendo que el sistema ⟨(2,-1,0), (1,2,1)⟩ es una base de un subespacio vectorial *V*:

i) Calcular una base ortonormal de *V*.

ii) ¿Para qué valores de *a,* el sistema ⟨(3,1,1), (1,*a*,-1)⟩ es una base de *V*?

iii) Sabiendo que el sistema $\langle(1,1,2,1),(2,3,3,5),(2,1,a,1),(1,2,1,b)\rangle$ es un sistema generador de un subespacio vectorial *W* (*a,b*∈ $\mathbb{R}$), calcular la dimensión de *W* para los distintos valores de *a* y *b.*

a) i) $S=\{(a-2b,a+b+c,3b+c),a,b,c\in\mathbb{R}\}=$

$$\{a(1,1,0)+b(-2,1,3)+c(0,1,1)/a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

Sistema generador de *S*: <(1,1,0),(-2,1,3),(0,1,1)> y $rg\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}=2\Rightarrow$ sistema ligado. Por tanto una base de *S* es <(1,1,0),(-2,1,3)> ya que

$$rg\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\\0&3\end{pmatrix}=2.$$

ii) $T=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:\langle\mathbf{x}|(2,-1.0)\rangle=0\}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:2x-y=0\}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:y=2x\}=$

$\{(x,2x,z)\ /\ x,z\in\mathbb{R}\}=\{x(1,2,0)+z(0,0,1)\ /\ x,z\in\mathbb{R}\}$

Sistema generador de *T*: <(1,2,0),(0,0,1)> y además

$$rg\begin{pmatrix}1&0\\2&0\\0&1\end{pmatrix}=2$$

Luego <(1,2,0),(0,0,1)> es una base de *T*.

iii) $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:x-z+t=0;\ x+y-t=0\}$

$$A \backslash B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} x - z + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x = z - t \\ y = -z + 2t \end{array}$$

$U=\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x=z-t \text{ , } y=-z+2t \text{ , } z,t \in \mathbb{R}\}= \{(z-t, -z+2t,z,t): z,t \in \mathbb{R}\}=$

$\{z(1, -1,1,0)+ t(-1,2,0,1): z,t \in\mathbb{R}\}$

Sistema generador de U: <(1,-1,1,0), (-1,2,0,1)> y además

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Luego <(1,-1,1,0), (-1,2,0,1)> es una base de U.

b) i) Como ambos vectores son ortogonales se tiene que una base ortonormal de V es:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ (1,2,1)\right\rangle$$

ii) $(3,1,1) \in V$ puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=0 y entonces (3,1,1) es combinación

lineal de los vectores de la base de T.

$(1,a,-1) \in V \Rightarrow a = -3$ (puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a=-3$)

Para a=-3, ambos vectores pertenecen a V, son linealmente independientes y puesto que dim$V$=2 $\Rightarrow$ <⟨(3,1,1), (1,-3,-1)⟩ base de V.

iii) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & a & 1 \\ 1 & 5 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a-4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & b-1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & b-4 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \end{pmatrix}$$

Si a= 5 $\Rightarrow$ dim W = 3 para cualquier valor de $b \in \mathbb{R}$.

Si $a \neq 5$ y b=4 $\Rightarrow$ dim W = 3.

Si $a \neq 5$ y $b \neq 4$ $\Rightarrow$ dim W = 4.

17.- *(junio 2005-LE)*

a) Dado el sistema de vectores $\langle (1,0,-1),(2,1,1) \rangle$, decir si forman una base de los siguientes conjuntos (justificar la respuesta):

i) $T = \{(a,-2a,-a), a \in \mathbb{R})\}$.

ii) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1\}$.

iii) $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x} | \mathbf{v} \rangle = 0\}$, siendo $\mathbf{v} = (1,-3,1)$.

b) Calcular una base del conjunto

$$X = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0; x - 2y - z + t = 0\}.$$

a) Los vectores del sistema $\langle (1,0,-1),(2,1,1) \rangle$ son linealmente independientes ya que

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

i) $T = \{(a,-2a,-a), a \in \mathbb{R}\}$, Sistema generador de T: $\langle (1,-2,-1) \rangle$, por lo que dim$T$=1, el sistema de vectores $\langle (1,0,-1),(2,1,1) \rangle$ no puede ser base de T.

ii) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1\}$, El conjunto U no es un subespacio vectorial. U es una variedad lineal puesto que es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones no homogéneo. Las variedades lineales no tienen definidas bases.

iii) $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x} | \mathbf{v} \rangle = 0\}$, siendo $\mathbf{v} = (1,-3,1)$.

Entonces $\langle (x,y,z) | (1,-3,1) \rangle = 0 \Leftrightarrow x - 3y + z = 0 \Leftrightarrow x = 3y - z$

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y - z\}$; un sistema generador de *V:* $\langle(3,1,0),(-1,0,1)\rangle$; como ninguno de los dos vectores es combinación lineal del otro, el sistema también es libre y por tanto es una base de *V*. Entonces dim*V*=2

Los vectores del sistema $\langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$ pertenecen a *V* ya que $\langle(1,0,-1)|(1,-3,1)\rangle = 0$ y $\langle(2,1,1)|(1,-3,1)\rangle = 0$. Además son linealmente independientes (demostrado en el apartado a)), y la dim*V*=2 $\Rightarrow \langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$ es base de *V*.

b) $X = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = z - y, t = 3y\} =$

$$= \{(z - y, y, z, 3y), y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0,3) + z(z,0,1,0), y, z \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto un sistema generador de *X* es $\langle(-1,1,0,3),(1,0,1,0)\rangle$. Como

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

el sistema es libre. Luego una base de *X* es $\langle(-1,1,0,3),(1,0,1,0)\rangle$.

18.- (enero 2004-LE) Sea $S=\{(ax-y+az, x+3z, 2x+y+2z), x,y,z\in \mathbb{R}\}$, $a\in \mathbb{R}$.

a) Calcula los valores de *a* para los cuales dim(*S*)=2.

b) Calcula los valores de *a* para los cuales $(-3,1,3)\in S$.

c) Sea $\langle(2,1,-2), (1,0,1)\rangle$ un sistema generador del subespacio vectorial *T*. Calcula una base ortonormal de *T*.

d) Encuentra *S*, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, tal que dim(*S*)=2, $(1,1,1)\notin S$ y $(1,0,0)\notin S$. Razona la respuesta.

a) Un sistema generador de *S* es: $\langle(a,1,2),(-1,0,1),(a,3,2)\rangle$, luego

$$\dim S = 2 \Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow a = -2.$$

b) (-3,1,3)$\in S$ si es combinación lineal de los vectores del sistema generador, es decir, si el siguiente sistema de ecuaciones es compatible:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & a & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Para $a \neq -2$, es un $S.C.D.$, y para $a = -2$, es $S.C.I.$. Luego es un sistema compatible para todo valor de a.

c) El sistema $\langle(2,1,-2), (1,0,1)\rangle$ es una base de T ya que es generador y libre:

$$rg\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Utilizando el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal es :

$$\left\langle \frac{1}{3}(2,1,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}\ (1,0,1) \right\rangle.$$

d) Por ejemplo un subespacio vectorial cuya base sea $\langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$. La dimensión del subespacio es 2 y $(1,1,1)\notin S$ y $(1,0,0)\notin S$ (no son combinación lineal de los vectores de la base).

Otro ejemplo: $S = \{(x, y, 2x), x \in \mathbb{R}\}$. Este subespacio vectorial tiene dimensión 2 (es sencillo comprobar que $\langle(1,0,2), (0,1,0)\rangle$ es una base de S). Además $(1,1,1)\notin S$ y $(1,0,0)\notin S$ ya que no son combinación lineal de los vectores de la base.

19.- (junio 2004-LE) Sea $S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : \ y = 2x\text{-}z\}$.

a) Calcula una base de S.

b) Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

i) ¿$(1,-1,1)\in S$?

ii) ¿Es $\langle(1,1,1), (3,4,2), (-1,-5,3)\rangle$ un sistema generador de S ?

iii) ¿Es $\langle(-2,-5,1), (2,0,4)\rangle$ una base de S ?

c) Sea $T=\{(x,y,z)\in S : \ z = y - 4x\}$. Calcula dos puntos de T distintos del (0,0,0). ¿Cuál es la dimensión de T?

a) $S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : y = 2x - z\}=\{(x,2x-z,z)\, x,z\in\mathbb{R}\}$.

Luego un sistema generador de S es $\langle(1,2,0),(0,-1,1)\rangle$. Como $rg\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2$, el sistema anterior es también libre, y por tanto una base de S.

b) i) (Opción 1) Los puntos de S son los que cumplen que $y = 2x - z$; como el punto (1,-1,1) no cumple esta ecuación, no pertenece a S.

(Opción 2) El punto (1,-1,1) pertenece a S si y sólo (1,-1,1) es combinación lineal de los elementos de la base, esto es, si el sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)$ es compatible. Como el rango de la matriz de coeficientes de este sistema es 2 y el de la ampliada es 3, el sistema es incompatible, y por tanto el punto (1,-1,1) no pertenece a S.

ii) Como $\dim S=2$, todo sistema formado por dos o más vectores de S que contenga a dos vectores libres es generador de S. Los vectores del sistema $\langle(1,1,1)$, $(3,4,2)$, $(-1,-5,3)\rangle$ pertenecen a S ya que los tres cumplen la ecuación $y = 2x - z$. Como los dos primeros son libres, el sistema es generador de S.

iii) Como $\dim S=2$, todo sistema formado por dos vectores libres de S es una base de S. Los vectores del sistema $\langle(-2,-5,1), (2,0,4)\rangle$ pertenecen a S ya que cumplen la ecuación $y = 2x$ - z. Y $rg\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -5 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$=2, luego son libres, y por tanto una base de S.

c) Un punto $(x,y,z)\in T$ si cumple estas dos condiciones: $(x,y,z)\in S$ y que $z = y - 4x$. Como los puntos de S son los que cumplen que $y = 2x - z$, se tiene que $(x,y,z)\in T$ si es solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x - z\\ z = y - 4x\end{cases}$$

Resolvemos y tenemos que $T=\{(x,3x,-x), x\in\mathbb{R}\}$.

Por ejemplo los puntos (1,3,-1) y (2,6,-2) pertenecen a T. La $\dim T$=1 ya que el sistema $\langle(1,3,-1)\rangle$ es generador y libre, luego una base de T.

Sección 3. Aplicaciones Lineales

1.- (febrero 2010-LADE)

a) Sea *f* una aplicación lineal cuya matriz asociada es $M(f)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) Calcular una base y la dimensión del conjunto $Im(f)$. Demuestra que $Im(f)=\mathbb{R}^2$

ii) ¿Para qué valores de a el vector $(1,0,a)\in Ker(f)$?

iii) Siendo la aplicación lineal $h(x,y)=(x+y,y,2x+y)$. ¿Existe algún $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $h(x,y)=(0,1,1)$?, ¿y tal que $h(x,y)=(1,1,1)$? En caso afirmativo calcúlalos.

iv) Calcular la matriz asociada a $f\circ h$. ¿Es $f\circ h$ lineal e invertible? En caso afirmativo calcula $(f\circ h)^{-1}$.

b) Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que verifica $g(0,0,2)=(2,4,0)$, $g(1,1,-1)=(1,3,1)$ y $(x,0,-x)\in Ker(g)$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$

a) i) $\dim Im(f)=Rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2$. Una base de $Im(f)$ es, por ejemplo, el sistema de vectores $\langle(2,1),(0,1)\rangle$. Dado que la base del conjunto $Im(f)$ está formada por dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$ entonces $Im(f)=\mathbb{R}^2$.

ii) $(1,0,a)\in Ker(f)\Leftrightarrow f(1,0,a)=(0,0)$; $f(1,0,a)=(2+a,1+a)=(0,0)$.

Por lo que llegamos al siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2+a=0 \\ 1+a=0 \end{cases}$$

Que es un sistema de ecuaciones incompatible. Luego no existe ningún valor de a para el que el vector $(1,0,a)\in Ker(f)$.

iii) — Para comprobar si existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $h(x,y)=(0,1,1)$, dado que $h(x,y)=(x+y,y,2x+y)$, llegamos al siguiente sistema: $\begin{cases} x+y=0 \\ y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$.

El sistema es incompatible, por lo tanto no existe ningún $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $h(x,y)=(0,1,1)$.

— $h(x,y)=(1,1,1)$. Estudiamos el sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}.$$

Es un sistema compatible determinado, $rg(A)=rg(A|B)=2=$nº incógnitas. Si resolvemos el sistema obtenemos que $x=0,\ y=1$ es la solución del sistema.

iv) $M(f\circ h)=M(f)M(h)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$f\circ h$ es una aplicación lineal ya que es la composición de dos aplicaciones lineales, además $f\circ h$ es invertible ya que,

$$|M(f\circ h)|=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=12-9=3\neq 0.$$

$$M\left((f\circ h)^{-1}\right)=\left(M(f\circ h)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Entonces $(f\circ h)^{-1}(x,y)=\left(x-y,-x+{4/3}\,y\right)$

b) Aplicando las propiedades de las aplicaciones lineales y la definición del $Ker(g)$ tenemos,

$g(0,0,2)=2g(0,0,1)=(2,4,0)\Rightarrow\ g(0,0,1)=(1,2,0)$.

$g(1,0,-1)=g(1,0,0)-g(0,0,1)=g(1,0,0)-(1,2,0)=(0,0,0)\ \Rightarrow\ g(1,0,0)=(1,2,0)$.

$g(1,1,-1) = g(0,1,0) + g(1,0,-1) = g(0,1,0) + (0,0,0) = (1,3,1) \Rightarrow g(0,1,0) = (1,3,1)$.

Luego $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.- (junio 2010-LADE)

a) Sea la siguiente aplicación lineal,

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (x+2y-z, 2x+3y+z, 3y-9z) \end{array}$$

i) ¿Es *f* una aplicación invertible? En caso afirmativo, calcula la aplicación f^{-1}.

ii) Calcular $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (1,2,0)$. ¿Existe algún $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (1,1,0)$?

iii) Calcular alguna base de $Im(f)$ y de $Ker(f)$.

iv) Discute para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, $(a,1,1) \in Im(f)$ y para qué valores $(a,1,1) \in Ker(f)$.

b) Encontrar una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2,0,0) = (4,2,2)$ y $f(1,1,0) = (1,1,0)$.

a) i) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es invertible si y sólo si $|M(f)| \neq 0$.

$$|M(f)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Luego f no es invertible y no existe f^{-1}.

ii) — Buscamos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfaga el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+3y+z=2 \\ 3y-9z=0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1-5z,\, y=3z\} = \{(1-5z,3z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

Por lo tanto, $f(1-5z,3z,z)=(1,2,0)$ para cualquier $z\in\mathbb{R}$.

— Si $f(x,y,z)=(1,1,0)$ entonces (x,y,z) satisface el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3y-9z=0 \end{cases}$$

Este es un sistema incompatible, por lo tanto no existe ningún $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(1,1,0)$.

iii) — $Im(f)=\{f(x,y,z) \mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=$

$=\{(x+2y-z,2x+3y+z,3y-9z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=$

$=\{x(1,2,0)+y(2,3,3)+z(-1,1,-9) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}=2$$

El sistema de vectores $\langle(1,2,0),(2,3,3)\rangle$ es una base del conjunto $Im(f)$.

— $Ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,0)\}=$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0;\ 2x+3y+z=0;\ 3y-9z=0\}=$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-5z,\, y=3z\}=\{(-5z,3z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}=\{z(-5,3,1) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

Luego $\langle(-5,3,1)\rangle$ es una base de $Ker(f)$.

iv) — $(a,1,1)\in Im(f)$. Tenemos que ver para qué valores de a el sistema siguiente es compatible,

$$\begin{cases} x+2y-z=a \\ 2x+3y+z=1 \\ 3y-9z=1 \end{cases},\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix},\ (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 1 \end{array}\right)$$

Como el rango de la matriz A es 2, el sistema es compatible si el rango de la matriz ampliada es 2. Se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=6a-4$$

Luego $(a,1,1)\in \mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow 6a-4=0\Leftrightarrow a=\dfrac{2}{3}$

— $(a,1,1)\in Ker(f)\ \Leftrightarrow\ f(a,1,1)=(0,0,0)$. Además,

$$f(a,1,1)=(a+1,2a+4,-6)\neq(0,0,0).$$

Luego no existe ningún valor de a tal que $(a,1,1)\in Ker(f)$.

b) Dado que f es una aplicación lineal se tiene,

$f(2,0,0)=2f(1,0,0)=(4,2,2)$; por tanto $f(1,0,0)=(2,1,1)$.

$f(1,1,0)=f(1,0,0)+f(0,1,0)=(2,1,1)+f(0,1,0)=(1,1,0)$; por tanto

$f(0,1,0)=(-1,0,-1)$

Luego una aplicación lineal que satisfaga las dos condiciones impuestas podría ser, por ejemplo, una que tenga como matriz asociada la matriz,

$$M(f)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- (enero 2010-LE)

a) Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$h(1,-1)=(2,1,2) \text{ y } h(0,2)=(-2,2,2).$$

b) Sea *f* una aplicación lineal cuya matriz asociada es $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calcular una base y la dimensión del conjunto $Ker(f)$.

ii) Encontrar los valores de *a* para los cuales $(1,1,a)\in Im(f)$.

iii) Sea $g(x,y)=(x,y,x-y)$. Calcular $(f\circ g)(2,1)$ y la dimensión del conjunto $Im(f\circ g)$.

a) Para calcular la matriz asociada a la aplicación lineal *h*,

$h(0,2)=2h(0,1)=(-2,2,2)$ por tanto $h(0,1)=(-1,1,1)$

$h(1,-1)=1h(1,0)-1h(0,1)=h(1,0)-(-1,1,1)=(2,1,2)$

$\Rightarrow h(1,0)=(2,1,2)+(-1,1,1)=(1,2,3).$

Luego: $M(h)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) i) $Ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Resolvemos el sistema,

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z=0 \\ -x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{aligned}\right\}; \; y=-2z \text{ y } x=z.$$

$Ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / y=-2z, x=z\}=\{(z,-2z,z)/ z\in\mathbb{R}\}$. Luego $\langle(1,-2,1)\rangle$ es una base de $Ker(f)$ y por tanto $\dim Ker(f)=1$.

ii) Si $(1,1,a)\in Im(f)$ entonces $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ a\end{pmatrix}$ es un sistema compatible.

El rango de la matriz de coeficientes es 2. Como,

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=2a$$

se tiene que el rango de la matriz ampliada es 2 si y sólo si $a=0$.

Luego el sistema es compatible sólo cuando $a=0$.

iii) $g(2,1)=(2,1,1)$, entonces

$$(f\circ g)(2,1)=f(g(2,1))=f(2,1,1)$$

$$M(f)\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(f\circ g)(2,1)=(7,-1,4)$

$$\dim Im(f\circ g)=rgM(f\circ g)=rg\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=2.$$

4.- (junio 2010-LE)

a) Calcula la matriz asociada a la aplicación lineal $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifica,

$$h(0,-1,0)=(1,-1),\ h(3,0,0)=(3,6) \text{ y } h(2,3,1)=(0,0).$$

b) Sea f una aplicación lineal cuya matriz asociada es $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) ¿Para qué valores de a se cumple que $(2,a,-1)\in Ker(f)$?

ii) Encuentra los valores de a para los cuales

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(2,a,0)\}=\varnothing.$$

iii) Siendo $g(x,y,z)=(x+z,x-y)$, calcula $(g\circ f)(1,-1,0)$ y la dimensión del conjunto $Ker(g\circ f)$.

a) $h(0,-1,0)=-h(0,1,0)=(1,-1)$; por tanto $h(0,1,0)=(-1,1)$.

$h(3,0,0)=3h(1,0,0)=(3,6)$; por tanto $h(1,0,0)=(1,2)$.

$h(2,3,1)=2h(1,0,0)+3h(0,1,0)+h(0,0,1)=2(1,2)+3(-1,1)+h(0,0,1)=(0,0)$; por tanto, $h(0,0,1)=(1,-7)$.

Luego $M(h)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

b) i) $(2,a,-1)\in Ker(f) \Leftrightarrow f(2,a,-1)=(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+a-3=0 \\ 2-2=0 \\ 2-a-1=0 \end{cases}$$

Luego, $a=1$.

ii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(2,a,0)\}=\varnothing$. Tenemos que ver para qué valores el sistema de ecuaciones siguiente es incompatible,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Como el rango de la matriz A es 2, el sistema es incompatible si el rango de la matriz ampliada es 3. Se tiene que,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2a .$$

Luego el sistema es incompatible si $a \neq 1$.

iii) $M(g \circ f) = M(g)M(f)$.

$g(x,y,z) = (x+z, x-y)$ entonces $g(1,0,0) = (1,1)$, $g(0,1,0) = (0,-1)$ y $g(0,0,1) = (1,0)$.

Por tanto $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)(1,-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$Ker(g \circ f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (g \circ f)(x,y,z) = (0,0)\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 4z = 0,\ y + z = 0\} =$$

$$= \{(-2z, -z, z) / z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2,-1,1) / z \in \mathbb{R}\}.$$

Base de $Ker(g \circ f) : \langle(-2,-1,1)\rangle$. $\dim Ker(g \circ f) = 1$.

Otra forma de calcular la dimensión de $Ker(g \circ f)$:

$$\dim Ker\left(g\circ f\right)=3-rg\left(M\left(g\circ f\right)\right)=3-rg\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=3-2=1.$$

5.- (enero 2009-LADE)

a) Calcular $M\left(g\right)$ sabiendo que $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal que verifica las condiciones:

a1) $(1,-2)\in Ker\left(g\right)$. a2) $g\left(0,1\right)=\left(1,\text{-}1,2\right)$

b) Sea f una aplicación lineal tal que $M\left(f\right)=\begin{pmatrix}-2 & -1 & a\\ a & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$;

i) Calcular los valores de a y b para que se cumpla que f no es un isomorfismo y que $f(1,b,0)=\left(0,-2,2\right)$.

ii) Para $a=2$, calcular una base y la dimensión del conjunto $Ker(f)$.

iii) Para $a=-2$, calcular una base y la dimensión del conjunto $Im\left(f\right)$

iv) Calcular los valores de a para se cumpla

$$\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3:f\left(x,y,z\right)=\left(1,1,0\right)\right\}=\varnothing.$$

v) Calcular $\left(f\circ g\right)(2,-4)$.

a) $(1,-2)\in Ker\left(g\right)\Leftrightarrow g(1,-2)=(0,0,0)$

$g(1,-2)=g(1,0)-2g\left(0,1\right)=g(1,0)-\left(2,-2,4\right)=(0,0,0)$ luego $g(1,0)=(2,-2,4)$.

$$M(g)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

b) i) f no es un isomorfismo $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ o $a = -2$

$$f(1,b,0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-b \\ a \\ 4+b \end{pmatrix}$$

$$f(1,b,0) = (0,-2,2) \Leftrightarrow b = -2, a = -2$$

Por tanto, la respuesta es para $b = -2, a = -2$.

ii) $Ker(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones,

$\begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ se obtiene que $y = 4z,\ x = -2z$.

Luego $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 4z, x = -2z\} = \{(-2z, 4z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Una base de $Ker(f)$ es $\langle(-2,4,1)\rangle$ y $\dim Ker(f) = 1$.

iii) Un sistema generador de $Im(f)$, dado que conocemos $M(f)$, es

$$\langle(-2,-2,4),(-1,0,1),(-2,2,0)\rangle$$

Como el rango de este sistema de vectores es 2, una base por ejemplo es $\langle(-2,-2,4),(-1,0,1)\rangle$ y $\dim Im(f) = 2$

iv) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (1,1,0)\} = \varnothing \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un sistema incompatible.

1er caso si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ entonces $rgA = 3 = rgA/B$ y el sistema es compatible

2º caso si $a=2$ entonces $rgA=2=rgA/B$ y el sistema es compatible

3er caso si $a=-2$ entonces $rgA=2\neq 3=rgA/B$ y el sistema es incompatible

Respuesta: $a=-2$.

v) $\left(f\circ g\right)(2,-4)=M\left(f\circ g\right)\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=M(f)M(g)\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -1 & a\\ a & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & a\\ a & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Otra forma: $\left(f\circ g\right)(2,-4)=f\left(g\left(2,-4\right)\right)=f\left(2\left(g\left(1,-2\right)\right)\right)\overset{\text{por } a)}{=}f(0,0,0)=(0,0,0)$

6.- (junio 2009-LADE) Sea $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ la siguiente aplicación lineal,

$$f\left(x,y,z\right)=\left(ax+by+z,y+cz,2x\right),a,b,c\in\mathbb{R}.$$

a) Calcula los valores de *a*, *b* y *c* para que *f* sea un isomorfismo.

b) Calcula los valores de *a*, *b* y *c* para los cuales se verifican simultáneamente las dos condiciones siguientes $\left(0,1,1\right)\in Ker\left(f\right)$ y $f\left(1,1,1\right)=\left(0,0,2\right)$.

c) Para $a=0,\ b=1,\ c=1$,

i) Calcula una base ortonormal del conjunto $Im\left(f\right)$ y otra de $Ker\left(f\right)$.

ii) Calcula el conjunto $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3: f\left(x,y,z\right)=\left(3,3,2\right)\right\}$.

iii) Calcula los valores de *d* para que $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3: f\left(x,y,z\right)=\left(1,d,1\right)\right\}=\varnothing$.

d) Sea $g:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ definida por $g\left(x,y,z\right)=\left(x+z,y\right)$. Calcula los valores de *a, b* y *c* para los que $\left(g\circ f\right)\left(1,1,1\right)=\left(3,1\right)$.

a) f isomorfismo si y sólo si $\left|M\left(f\right)\right| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2bc - 2 \neq 0$ luego

$b \cdot c \neq 1$ y $a \in \mathbb{R}$.

b) $\left(0,1,1\right) \in Ker\left(f\right) \Leftrightarrow f\left(0,1,1\right) = \left(b+1, 1+c, 0\right) = \left(0,0,0\right)$, $b = c = -1$ y $a \in \mathbb{R}$.

Si $f\left(1,1,1\right) = \left(0,0,2\right)$ como $f\left(1,1,1\right) = \left(a+b+1, 1+c, 2\right)$ deducimos, teniendo en cuenta lo anterior ($b = c = -1$), que entonces $a = 0$.

c) Sean $a = 0,\ b = 1,\ c = 1$

i) — $Im\left(f\right) = \left\{\left(y+z, y+z, 2x\right) / x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$

Luego $\left\langle\left(1,1,0\right), \left(1,1,0\right), \left(0,0,2\right)\right\rangle$ es un sistema generador y $\left\langle\left(1,1,0\right), \left(0,0,2\right)\right\rangle$ es una base. Puesto que es un sistema ortogonal, $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0,0,1\right)\right\rangle$ es una base ortonormal de $Im\left(f\right)$.

— $Ker\left(f\right) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(y+z, y+z, 2x\right) = \left(0,0,0\right)\right\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ y+z=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases}$$

$Ker\left(f\right) = \left\{(0, y, -y) / y \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow \left\langle\left(0,1,-1\right)\right\rangle$ Base de $Ker\left(f\right) \Rightarrow$

$\left\langle\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle$ Base ortonormal de $Ker\left(f\right)$.

ii) $\left\{\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 : f\left(x, y, z\right) = \left(3,3,2\right)\right\} = \left\{\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 : \left(y+z, y+z, 2x\right) = \left(3,3,2\right)\right\}$;

$$\begin{cases} y+z=3 \\ y+z=3; \\ 2x=2 \end{cases} \begin{cases} y=3-z \\ x=1 \end{cases} ; \left\{\left(1, 3-z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(1,3,0\right) + \left(0, -z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$$

iii) $\left\{\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 : f\left(x, y, z\right) = \left(1, d, 1\right)\right\} =$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(y+z,y+z,2x)=(1,d,1)\right\}=\varnothing$$

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ y+z=d \\ 2x=1 \end{array}\right\}$$

El anterior sistema tiene que ser un sistema incompatible, luego $d\neq 1$.

d) $(g\circ f)(1,1,1)=g\left(f(1,1,1)\right)=g(a+b+1,1+c,2)=(a+b+3,1+c)=(3,1)$.

Entonces $a+b=0$ y $c=0$.

7.- (febrero 2009-LE) Sea la aplicación lineal $f(x,y,z)=(x+2y,x+3z,y-z)$.

a) Encuentra el conjunto de puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ cuya imagen es $f(x,y,z)=(3,4,5)$. ¿Es un subespacio vectorial? ¿Es una variedad lineal?

b) ¿Es *f* un isomorfismo? En caso afirmativo encuentra la aplicación inversa f^{-1}.

c) Encuentra una base de $Im(f)$. ¿Se cumple $Im(f)\subset\mathbb{R}^3$? ¿Se cumple $\mathbb{R}^3\subset Im(f)$?

a) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(3,4,5)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x+2y,x+3z,y-z)=(3,4,5)\right\}$

Resolviendo el sistema compatible y determinado, obtenemos que sólo existe un punto $(-29,16,11)$ cuya imagen es $(3,4,5)$.

Este conjunto no es un subespacio vectorial, pero si es una variedad lineal de dimensión 0 (trasladado del subespacio vectorial $\left\{(0,0,0)\right\}$).

b) El determinante de la matriz asociada es:

$$|M(f)|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

Luego es un isomorfismo.

$$M\left(f^{-1}\right)=\left(M\left(f\right)\right)^{-1}==\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2 & -6\\ -1 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(x,y,z)=(3x-2y-6z,-x+y+3z,-x+y+2z)$.

c) $Im\left(f\right)=\left\{\left(x+2y,x+3z,y-z\right)/\,x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$

Se cumple siempre que $Im\left(f\right)$ es un subespacio vectorial con dimensión $\dim(Im\left(f\right))=rgM(f)=3$, luego $Im\left(f\right)=\mathbb{R}^3$.

$\left\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right\rangle$ es un sistema generador y como el rango del sistema es tres es una base. Otra base es por ejemplo, $\left\langle(1,1,0),(2,0,1),(0,3,-1)\right\rangle$.

8.- (junio 2009-LE) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, siendo

$$f\left(2,0,0\right)=\left(2,0,-2\right),\ f\left(0,1,0\right)=\left(-1,1,-1\right),\ f\left(0,0,1\right)=\left(0,1,-2\right)$$

a) Encuentra $M\left(f\right)$.

b) Encuentra el conjunto de puntos $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3$ cuya imagen es:

$$f\left(x,y,z\right)=\left(0,1,-2\right)$$

c) Encuentra $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,f(x,y,z)=(0,0,0)\}$. ¿Cuál es su dimensión?

a) *f* es aplicación lineal,

$$f\left(2,0,0\right)=2f\left(1,0,0\right)=\left(2,0,-2\right)\Rightarrow f\left(1,0,0\right)=\left(1,0,-1\right).$$

Por tanto, la matriz a asociada a *f* es:

$$M\left(f\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(0,1,-2)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x-y=0 \\ y+z=1 \\ -x-y-2z=-2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=y \\ z=1-y \end{cases}$$

Se tiene entonces

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(0,1,-2)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=y,\ z=1-y\}=$$

$$=\{(y,y,1-y)\in\mathbb{R}^3 / y\in\mathbb{R}\}=\{(0,0,1)\}+\{(y,y,-y)\in\mathbb{R}^3 / y\in\mathbb{R}\}$$

c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(0,0,0)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x-y=0 \\ y+z=0 \\ -x-y-2z=0 \end{cases}\Rightarrow x=y=-z.$$

Entonces

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(0,0,0)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=y=-z\}=$$

$$=\{(y,y,-y)/ y\in\mathbb{R}\}=\{y(1,1,-1)/ y\in\mathbb{R}\}.$$

Una base de este subespacio vectorial es $\langle(1,1,-1)\rangle$, por tanto, su dimensión es 1.

9.- (enero 2008-LADE) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(ax,by+z,cy+z)$ donde $a,b,c\in\mathbb{R}$

a) Para $a=0,\ b=1,\ c=1$ calcula una base ortonormal de $Im(f)$ y otra de $Ker(f)$.

b) Calcula los valores de $a,\ b,\ c$ para los cuales $(1,1,1)\in Ker(f)$.

c) Calcula los valores de $a,\ b,\ c$ para los cuales $\dim Im(f)=2$.

d) Sea $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y,z)=(x+y,x+z)$. Calcula los valores de $a,\ b,\ c$ para los que se verifique que $(g\circ f)(0,1,1)=(2,0)$.

a) $M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

— $\dim Im(f)=rgM(f)$ luego $\dim Im(f)=1$ y una base de $Im(f):\langle(0,1,1)\rangle$.

Entonces una base ortonormal de $Im(f)$ es $\left\langle\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle$.

— $Ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / y+z=0\}=\{(x,y,-y), x,y\in\mathbb{R}\}$

Luego una base de $Ker(f)$: $\langle(1,0,0),(0,1,-1)\rangle$ y $\dim Ker(f)=2$. Como el anterior sistema de vectores es ortogonal, una base ortonormal de $Ker(f)$ es:

$$\left\langle(1,0,0),\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle.$$

b) $(1,1,1)\in Ker(f)\Leftrightarrow f(1,1,1)=(0,0,0)$, $f(1,1,1)=(a,b+1,c+1)$

Luego tienen que ser $a=0,\ b=-1,\ c=-1$

c) $\dim Im(f)=2 \Leftrightarrow rgM(f)=2$, $|M(f)|=a(b-c)$

1 er caso: si $a=0$ y $b\neq c$ $\dim Im(f)=2$.

2º caso: si $a=0$ y $b=c$ $\dim Im(f)=1$.

3 er caso: si $a\neq 0$ y $b=c$ $\dim Im(f)=2$.

4º caso: si $a\neq 0$ y $b\neq c$ $\dim Im(f)=3$.

Luego la respuesta correcta es para $a=0$ y $b\neq c$ junto con $a\neq 0$ y $b=c$

d) $(g\circ f)(0,1,1)=g(f(0,1,1))=g(0,b+1,c+1)=(b+1,c+1)=(2,0)$

$\Leftrightarrow b=1,\ c=-1$ y cualquier $a\in\mathbb{R}$.

10.- (junio 2008-LADE) Sea *f* una aplicación lineal cuya matriz asociada es:

$$M(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix},\quad \text{donde}\quad a\in\mathbb{R}.$$

a) ¿Para qué valores de a y b se verifica que $(b,3,1)\in Ker(f)$?

b) ¿Para qué valores de a se verifica que $\dim Ker(f)=1$?

c) Para $a=5$ calcular una base del conjunto $Im(f)$.

d) Para $a=1$ calcular el conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(3,5,0)\}$.

e) Sea $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z)=x-y+3z$. Calcular para $a=1$ $(g\circ f)(2,0,1)$.

a) $$(b,3,1)\in Ker(f)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ 3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b+4\\ 2b+3+a\\ b+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Y esta igualdad es cierta si y sólo si $b=-4$ y $a=5$.

b) $\dim Ker(f)=n^{o}\, colM(f)-rgM(f)=3-rgM(f)$.

Luego $\dim Ker(f)=1 \Leftrightarrow rgM(f)=2$.

Como $|M(f)|=5-a$, y $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, se tiene que $rgM(f)=2\Leftrightarrow a=5$.

c) El sistema $\langle(1,2,1),(1,1,2),(1,5,-2)\rangle$ es generador del conjunto $Im(f)$. Además,

$$rgM(f)=rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}=2$$

Luego la dimensión del conjunto imagen es 2, y algunas bases son, por ejemplo,

$$\langle(1,2,1),(1,1,2)\rangle,\ \langle(1,2,1),(1,5,-2)\rangle\ \langle(1,5,-2),(1,1,2)\rangle$$

d) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(3,5,0)\}$ coincide con la solución del sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}.$$

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(3,5,0)\}=(2,0,1)$.

e) $$(g\circ f)(2,0,1)=M(g)M(f)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=-2$$

Otra forma de resolverlo: $(g\circ f)(2,0,1)=g(f(2,0,1))=g(3,5,0)=-2$.

11.- (junio 2008-LE) Sean las aplicaciones lineales,

$f(x,y,z)=(2x+y-z,x-z,2x-y-3z)$ y $g(x,y,z)=(2x+y-z,x-z,2x-y)$.

a) Calcula los valores de a para los cuales $(2,a,1)\in Im(f)$.

b) Calcula una base del conjunto $Ker(f)$.

c) ¿Se verifica que $Ker(f)\subset Im(f)$?

d) ¿Es g invertible? En caso afirmativo, calcula la aplicación g^{-1}.

e) Calcula el conjunto de los vectores (x,y,z) tales que $(g\circ f)(x,y,z)=(1,1,1)$.

a) $$(2,a,1)\in Im(f) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=2 \\ x-z=a \\ 2x-y-3z=1 \end{array}\right\}$$ es un sistema compatible.

Resolviendo por Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & a \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2a-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4a-3 \end{array}\right)$$

Si el sistema que representa es compatible entonces $a = \dfrac{3}{4}$.

Luego $(2,a,1) \in Im(f) \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{4}$.

b) $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0,0)\} =$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (2x+y-z, x-z, 2x-y-3z) = (0,0,0)\}$$

Resolviendo el sistema,

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-z=0 \\ 2x-y-3z=0 \end{cases}$$

Obtenemos, $x = z,\ y = -z$. Por tanto,

$$Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z, y = -z\} = \{(z,-z,z) / z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,-1,1) / z \in \mathbb{R}\}$$

Una base de $Ker(f)$ es, por ejemplo: $\langle (1,-1,1) \rangle$

c) $Ker(f) \subset Im(f) \Leftrightarrow (1,-1,1) \in Im(f)$.

$(1,-1,1) \in Im(f) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x-z=-1 \\ 2x-y-3z=1 \end{array}\right\}$ es un sistema compatible.

Pero $rgA = 2 < rgA|B = 3$ luego el sistema anterior es incompatible y por tanto $Ker(f)$ no está contenido en $Im(f)$.

d) $|M(g)| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, por tanto g es invertible.

Haciendo cálculos obtenemos que:

$$\left(M(g)\right)^{-1}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix},$$

Luego,

$$\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-x+y-z\\ -2x+2y+z\\ -x+4y-z\end{pmatrix}$$

De donde obtenemos que:

$$g^{-1}(x,y,z)=\frac{-1}{3}(-x+y-z,-2x+2y+z,-x+4y-z)$$

e) $$M(g\circ f)=M(g)M(f)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Luego los vectores (x,y,z) tales que $(g\circ f)(x,y,z)=(1,1,1)$ serán las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Pero el sistema anterior es un sistema incompatible ($rgA=2\neq rgA|B=3$) por tanto no existe ningún (x,y,z) tal que $(g\circ f)(x,y,z)=(1,1,1)$.

12.- (febrero 2007-LADE)

a) Calcula la matriz asociada a la aplicación lineal $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$h(2,-1)=(3,3,1) \quad \text{y} \quad h(2,0)=(2,4,2).$$

b) Sea f una aplicación lineal cuya matriz asociada es $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) Calcula una base y la dimensión del conjunto $Ker(f)$.

ii) Encuentra los valores de a para los cuales $(1,1,a) \in Ker(f)$.

iii) Encuentra los valores de a para los cuales $(1,1,a) \in Im(f)$.

iv) Calcula el conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=(1,1,-2)\}$.

v) Siendo $g(x,y)=(x-y,x+y,y)$, calcula $(f\circ g)(2,1)$ y la dimensión del conjunto $Im(f\circ g)$.

a) $h(2,0)=2h(1,0)=(2,4,2)$ por tanto $h(1,0)=(1,2,1)$

$h(2,-1)=2h(1,0)-h(0,1)=2(1,2,1)-h(0,1)=(3,3,1)$ por tanto $h(0,1)=(-1,1,1)$.

Luego $M(h)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) i) $Ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Resolviendo por Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Luego $Ker(f)=\{(-z,-z,z), z\in\mathbb{R}\}$.

Base de $Ker(f)$: $\langle(-1,-1,1)\rangle$, $\dim Ker(f)=1$.

ii) $(1,1,a)\in Ker(f) \Leftrightarrow f(1,1,a)=(0,0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $(1,1,a)\in Ker(f)\Leftrightarrow a=-1$

iii) $(1,1,a)\in Im(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ es un sistema compatible.

Y ese sistema es compatible cuando $a=-2$.

iv) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(1,1,-2)\}=$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+z=1,\ 2x+y+3z=1,\ -x+y=-2\}$$

Luego $y=-1-z,\quad x=1-z$.

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(1,1,-2)\}=\{(1-z,-1-z,z)/ z\in\mathbb{R}\}$$

v) $M(f\circ g)=M(f)M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(f\circ g)(2,1)\to\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\to(f\circ g)(2,1)=(2,8,2).$$

$$\dim Im(f\circ g)=rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2.$$

13.- (mayo 2007-LADE) Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula los valores de a para que f sea un isomorfismo.

b) Calcula los valores de a y b para que $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=(1,b,2)\}=\varnothing$.

c) Para $a=1$, calcula el conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=(2,-3,4)\}$.

d) Para $a=2$, calcula $(f\circ f)(1,-1,2)$.

e) Para $a=-1$, calcula una base de $Im(f)$ y otra de $Ker(f)$.

a) f es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ $|M(f)|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -1$

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=(1,b,2)\}=\varnothing$ $\Leftrightarrow$ el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ es

incompatible $\Leftrightarrow$ $rgA\neq rgA|B$ $\Leftrightarrow$ $rgA=2$ y $rgA|B=3$ (dado que $rgA\geq 2$) $\Leftrightarrow$

$a=-1$ y $b\in\mathbb{R}$

c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=(2,-3,4)\}$ es el conjunto formado por las soluciones del sistema,

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -2x+3z=-3 \\ x+y-z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=(2,-3,4)\}=\{(0,3,-1)\}.$$

d) $M(f\circ f)=M(f)M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Y $(f \circ f)(1,-1,2) = (4,-14,10)$.

e) $Ker(f)$ coincide con las soluciones del sistema de ecuaciones siguiente,

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ -2x+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Luego $Ker(f) = \{(-3y, y, -2y)\}$ y una base de $Ker(f): \langle(-3,1,-2)\rangle$.

Por otra parte $Im(f) = \{(x+y-z, -2x+3z, x+y-z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Un sistema generador de $Im(f)$: $\langle(1,-2,1),(1,0,1),(-1,3,-1)\rangle$ y algunas bases son por ejemplo: $\langle(1,-2,1),(1,0,1)\rangle$, $\langle(1,-2,1),(-1,3,-1)\rangle$, $\langle(-1,3,-1),(1,0,1)\rangle$.

14.- (enero 2006-LADE) Sea $f(x,y,z) = (x+y, x+2y+2z, ax+y-2z)$ es una aplicación lineal.

a) Encuentra los valores de a para los cuales $(2,-2,1) \in Ker(f)$.

b) Encuentra los valores de a para los cuales $(2,1,1) \in Im(f)$.

c) Encuentra los valores de a para los cuales $f(2,-1,1) = (1,2,3)$.

d) Encuentra los valores de a para los cuales $Ker(f) = \{(0,0,0)\}$.

e) Para $a = 2$, calcula el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = (1,4,-1)\}$

f) Para $a = 2$, calcula una base de $Im(f \circ f)$.

a) $(2,-2,1) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(2,-2,1) = (0,0,2a-4) = (0,0,0)$.

Luego $(2,-2,1) \in Ker(f) \Leftrightarrow a = 2$.

b) $(2,1,1)\in Im(f) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x+2y+2z=1 \\ ax+y-2z=1 \end{array}\right\}$ es un sistema compatible.

Clasificando el sistema anterior se tiene que:

$a\neq 2,\ rgA=3=rgA/Y=n^{o}\,col.A$ sistema compatible y determinado

$a=2,\ rgA=2\neq 3=rgA/Y$ sistema incompatible

Luego $(2,1,1)\in Im(f) \Leftrightarrow a\neq 2$.

c) Como $f(2,-1,1)=(1,2,2a-3)$ se tiene que $f(2,-1,1)=(1,2,3) \Leftrightarrow a=3$.

d) $Ker(f)=\{(0,0,0)\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un sistema compatible determinado$\left(\Leftrightarrow \dim Ker(f)=0\right)$.

Clasificando el sistema anterior se tiene que:

$a\neq 2,\ rgA=3=n^{o}\,col.A$ sistema compatible y determinado

$a=2,\ rgA=2$ sistema compatible e indeterminado

Luego $Ker(f)=\{(0,0,0)\} \Leftrightarrow a\neq 2$.

e) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(1,4,-1)\}$ es la solución del siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo obtenemos que $y=3-2z,\ x=2z-2$.

Así que, $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=(1,4,-1)\}=\{(2z-2,3-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}=.$

f) $M(f\circ f)=M(f)M(f)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\2&1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\2&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\7&7&0\\-1&2&6\end{pmatrix}.$

Como $rg\begin{pmatrix}2&3&2\\7&7&0\\-1&2&6\end{pmatrix}=2$, la dimensión del conjunto $Im(f\circ f)=2$, y una algunas bases son, por ejemplo, los sistemas $\langle(2,7,-1),(3,7,2)\rangle$, $\langle(2,7,-1),(2,0,6)\rangle$, $\langle(2,0,6),(3,7,2)\rangle$.

15.- (junio 2006-LADE) Sea f una aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$M(f)=\begin{pmatrix}0&0&a&0\\4&3&-2&0\\1&0&0&b\end{pmatrix}.$$

a) ¿Para qué valores de $a,b\in\mathbb{R}$ es f un isomorfismo?

b) ¿Para qué valores de $a,b\in\mathbb{R}$ se verifica que $f(-1,0,1,1)=(0,b,0)$?

c) ¿Para qué valores de $a,b\in\mathbb{R}$ se verifica que $(1,0,2,1)\in Ker(f)$?

d) ¿Para qué valores de $a,b\in\mathbb{R}$ se cumple que $\dim Ker(f)=\dim Im(f)$?

e) Para $a=1$ y $b=1$, calcula el conjunto $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / f(x,y,z,t)=(1,5,2)\}$.

a) Para ninguno, ya que $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ y la matriz asociada no es cuadrada.

b) $f(-1,0,1,1)=(a,-6,-1+b)$, ya que

$$f(-1,0,1,1)=\begin{pmatrix}0&0&a&0\\4&3&-2&0\\1&0&0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-6\\-1+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\-6=b\\-1+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-6\\b=1\end{cases}$$

Luego se tiene que para todo valor de *a, b* $f(-1,0,1,1) \neq (0,b,0)$.

La respuesta es: para ningún valor de *a* y de *b*.

c) $(1,0,2,1) \in Ker(f) \Leftrightarrow \quad f(1,0,2,1) = (0,0,0)$. Como $f(1,0,2,1) = (2a,0,1+b)$, ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 1+b \end{pmatrix},$$

Se tiene que $(1,0,2,1) \in Ker(f) \;\Leftrightarrow\; a = 0$ y $b = -1$.

d) $\dim Ker(f) = n^{\circ}\, colM(f) - rgM(f) = 4 - rgM(f)$ y $\dim Im(f) = rgM(f)$,

se tiene que:

$$\dim Ker(f) = \dim Im(f) \;\Leftrightarrow\; rgM(f) = 2.$$

Calculando el rango de $M(f)$ obtenemos ,

$$\begin{cases} a \neq 0, \text{ para todo } b, \; rgM(f) = 3 \\ a = 0, \text{ para todo } b, \; rgM(f) = 2 \end{cases}$$

Luego $\dim Ker(f) = \dim Im(f) \;\Leftrightarrow a = 0,$ para todo *b*.

e) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, f(x,y,z,t) = (1,5,2)\}$ es la solución del siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo: $z = 1,\; y = \dfrac{4t-1}{3},\; x = 2-t$.

Así que, $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, f(x,y,z,t) = (1,5,2)\} = \left\{\left(2-t, \dfrac{4t-1}{3}, 1, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$.

16.- (febrero 2005-LE)

a) Sea f una aplicación lineal tal que $f(1,2)=f(2,1)=(3,-3)$. Calcular $f(x,y)$.

b) Sea g una aplicación lineal tal que

$$M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Calcula el conjunto $Ker(g)$, una base del mismo y su dimensión.

ii) Calcula una base del conjunto $Im(g)$. Encuentra un vector que no pertenezca al conjunto $Im(g)$.

iii) ¿Para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ se cumple que no existe ningún $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $g(x,y,z)=(a,0,2)$?

iv) Encuentra una aplicación lineal $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $(h\circ g)(1,1,0)=(3,1)$.

a) Como $f(1,2)=f(1,0)+2f(0,1)=(3,-3)$ y $f(2,1)=2f(1,0)+f(0,1)=(3,-3)$

$$\Rightarrow\ f(1,0)=(1,-1) \text{ y } f(0,1)=(1,-1)$$

Entonces,

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\ f(x,y)=(x+y,-x-y)$$

b) i) $Ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Resolviendo el sistema, $\begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases}.$

$$Ker(g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=z, y=-z\right\}=\left\{(z,-z,z), z\in\mathbb{R}\right\}$$

Sistema generador de $Ker(g)$: $\langle(1,-1,1)\rangle$

Base de $Ker(g)$: $\langle(1,-1,1)\rangle$ $\quad \dim Ker(g)=1$

ii) $Im(g)=\{(x+y,-2x+y+3z,y+z)/x,y,z\in\mathbb{R}\}=$

$$=\{x(1,-2,0)+y(1,1,1)+z(0,3,1)/x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

Sistema generador de $Im(g)$: $\langle(1,-2,0),(1,1,1),(0,3,1)\rangle$

Bases $Im(g)$, algunos ejemplos:

$\langle(1,-2,0),(1,1,1)\rangle$, $\langle(1,-2,0),(0,3,1)\rangle$, $\langle(1,1,1),(0,3,1)\rangle \Rightarrow \dim Im(g)=2$

Respecto a algún vector que no pertenezca a $Im(g)$, por ejemplo:

$$(0,0,1)\notin Im(g)$$

iii) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix}1&1&0\\-2&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\2\end{pmatrix}\right\}=\varnothing \Rightarrow$ el sistema debe ser incompatible. $rgA=2$, luego el sistema es incompatible si y sólo si $rgA|B=3$.

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\-2&1&3&0\\0&1&1&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&3&3&2a\\0&1&1&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&1&1&2\\0&0&0&2a-6\end{array}\right)\Rightarrow$ si $a\neq 3$ el sistema es incompatible.

Si $a\neq 3$ no existe ningún $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $g(x,y,z)=(a,0,2)$.

iv) $(h\circ g)(1,1,0)=(3,1) \Rightarrow M(h)\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow M(h)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Otra forma: $(h\circ g)(1,1,0)=h(g(1,1,0))$ dado que $g(1,1,0)=(2,-1,1)$ entonces,

$$(h\circ g)(1,1,0)=h(2,-1,1)=(3,1)$$

Un ejemplo de una aplicación *h* que satisfaga lo anterior:

$M(h)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; $h(x,y,z)=(x+z,z)$; ya que $h(2,-1,1)=(3,1)$

17.- (junio 2005-LE) Sean las aplicaciones lineales:

$$f(x,y,z)=(y+z,x-y+z,x+2z) \text{ y } g(x,y,z)=(2x-y+z,y-3z).$$

a) ¿Son las aplicaciones *f* y *g* isomorfismos?

b) Calcula $(g\circ f)(1,0,-1)$.

c) Calcula una base del conjunto $Ker(g)$.

d) ¿$(1,-2)\in Im(\mathrm{g})$?

e) Calcula la dimensión de los subespacios vectoriales $Ker(f)$ e $Im(f)$.

f) ¿Para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ se cumple que $(a,1,1)\in Im(f)$?

a) $M(f)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$. Dado que $|M(f)|=0$, *f* no es un isomorfismo.

La aplicación *g* no es un isomorfismo puesto que $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$.

b) $(g\circ f)(1,0,-1)=g(f(1,0,-1))=g(-1,0,-1)=(-3,3)$

c) $Ker(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/g(x,y,z)=(0,0)\}=$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x-y+z=0,y-3z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=z,y=3z\}=$$

$$=\{z(1,3,1)/z\in\mathbb{R}\}$$

Base de $Ker(g)$: $\langle(1,3,1)\rangle$.

d) $(1,-2)\in Im(g)$ si existe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/g(x,y,z)=(1,-2)$;

$$g(x,y,z)=(2x-y+z,y-3z)=(1,-2)$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}+z\\ y=-2+3z\end{cases}$

El sistema es compatible e indeterminado ($rg(A)=rg(A|B)=2<$ nº de incógnitas) por lo tanto $(1,-2)\in Im(g)$.

e) $rgM(f)=rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=2$; entonces,

$\dim Ker(f)=3-rgM(f)=1$ y $\dim Im(f)=rgM(f)=2$.

f) Tenemos que estudiar para qué valores de $a\in\mathbb{R}$, existe algún $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(y+z,x-y+z,x-2z)=(a,1,1)$

Es decir, cuándo el sistema resultante es compatible.

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=rg\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)\Leftrightarrow a=0$$

18.- (enero 2004-LE) Sean las aplicaciones lineales

$$f(x,y)=(ax-y,x+3y,bx),\ g(x,y)=(3x,2x+y),\ a,b\in\mathbb{R}.$$

a) Calcula los valores de a y b para los cuales $f(1,1)=(1,4,3)$.

b) Calcula los valores de a y b para los cuales la dimensión del núcleo es 1, es decir, $\dim Ker(f)=1$.

c) Calcula los valores de a y b para los cuales $(1,0,0)\in Im(f)$.

d) Calcula los valores de a y b para los cuales no existe ningún $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(0,0,1)$.

e) Para $a=0$ y $b=1$, calcula $(f\circ g)(1,-1)$ y $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(f\circ g)(x,y)=(-1,3,0)\}$.

a) $f(1,1)=(a-1,4,b)$. Luego $f(1,1)=(1,4,3)\Leftrightarrow a=2$ y $b=3$.

b) $Ker(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=(0,0,0)\right\}$. Es decir: $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Entonces, $\dim Ker(f)=2-rg\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

Luego $\dim Ker(f)=1\Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}=1$.

Y el $rgM(f)=1\Leftrightarrow a=\frac{-1}{3}$ y $b=0$.

Así que $\dim Ker(f)=1\Leftrightarrow a=\frac{-1}{3}$ y $b=0$.

c) $(1,0,0)\in Im(f)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un sistema compatible

Para $b\neq 0$ y $a\in\mathbb{R}$, el sistema es incompatible.

Para $b=0$ y $a\neq\frac{-1}{3}$, el sistema compatible y determinado.

Para $b=0$ y $a=\frac{-1}{3}$, el sistema es incompatible.

Luego $(1,0,0)\in Im(f)\Leftrightarrow b=0$ y $a\neq\frac{-1}{3}$.

d) No existirá ningún $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(0,0,1)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un sistema incompatible.

Para $a \neq \dfrac{-1}{3}$ y $b \in \mathbb{R},$ el sistema es incompatible.

Para $a = \dfrac{-1}{3}$ y $b \neq 0,$ el sistema compatible y determinado.

Para $a = \dfrac{-1}{3}$ y $b = 0,$ el sistema es incompatible.

Luego $a \neq \dfrac{-1}{3}$ y $b \in \mathbb{R},$ o $a = \dfrac{-1}{3}$ y $b = 0.$

e) $M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

$$(f \circ g)(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Luego $(f \circ g)(1,-1) = (-1,6,3).$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (f \circ g)(x,y) = (-1,3,0)\}$ es la solución del sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & -1 \\ 9 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solución de este sistema es: $x = 0,\ y = 1$.

Luego $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 / (f \circ g)(x,y) = (-1,3,0)\} = \{(0,1)\}$

19.- (junio 2004-LE)

a) Sea f una aplicación lineal tal que $M(f)=\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

i) Calcula los valores de a y b para los cuales f es un isomorfismo.

ii) Calcula los valores de a y b para los cuales no existe ningún $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(1,1,3)$

iii) Para $a=0$ y $b=5$, calcula una base de $Im(f)$ y una base de $Ker(f)$.

iv) Dada una aplicación lineal g tal que $g(1,3)=(1,4,6)$ y $g(2,1)=(2,3,2)$, calcula $M(g)$. Y para $a=0$ y $b=5$, calcula $(f\circ g)(1,3)$.

b) Encuentra, razonando la respuesta, una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(2,3)$ y f no sea un isomorfismo.

a) i) Una aplicación lineal es un isomorfismo si y sólo si es biyectiva, esto es, si y sólo si $|M(f)|\neq 0$. En este caso, $|M(f)|=2a-a^2=a(2-a)$.

Luego $|M(f)|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 2$ y $a\neq 0, b\in\mathbb{R}$.

ii) No existirá ningún $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(1,1,3)$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{ el sistema } \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ es incompatible.}$$

Si $a\neq 2$ y $a\neq 0, b\in\mathbb{R},$ el sistema es compatible y determinado.

Si $a=2, b\in\mathbb{R},$ el sistema es incompatible.

Si $a=0$ y $b\neq -2,$ el sistema es incompatible.

Si $a=0$ y $b=-2,$ el sistema es compatible e indeterminado.

Luego $a=2, b\in\mathbb{R},$ ó $a=0$ y $b\neq -2,$

iii) — Se verifica que $\dim Im(f) = rgM(f) = rg\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$.

Una base de $Im(f)$ es $\langle (5,1,1),(3,0,2) \rangle$.

— $Ker(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left. \begin{array}{r} 5y+3z=0 \\ y=0 \\ y+2z=0 \end{array} \right\} \right\} = \{(x,0,0), x \in \mathbb{R}\}$$

Una base de $Ker(f)$ es: $\langle (1,0,0) \rangle$.

iv) $g(1,3) = g(1,0) + 3g(0,1) = (1,4,6)$ y $g(2,1) = 2g(1,0) + g(0,1) = (2,3,2)$

Resolviendo, se obtiene:

$g(1,0) = (1,1,0)$ y $g(0,1) = (0,1,2)$. Luego $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$, se tiene que $(f \circ g)(1,3) = (38,4,16)$.

b) Como $f(1,1) = f(1,0) + f(0,1)$, vale cualquier aplicación lineal cumpliendo que $f(1,0) + f(0,1) = (2,3)$ y tal que $|M(f)| = 0$.

Por ejemplo $f(1,0) = (2,3)$ y $f(0,1) = (0,0)$, en cuyo caso $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $f(x,y) = (2x,3x)$.

20.- (febrero 2001-LADE) Dadas las aplicaciones lineales

$$f(x,y)=(x+y,2x-y) \text{ y } g(x,y,z)=(x+z,y-z),$$

a) Calcula las matrices $M(f\circ g)$, $M\left(f^{-1}\circ g\right)$ y $M\left(f\circ f^{-1}\right)$.

b) Calcula los siguientes conjuntos:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / g(x,y,z)=(1,1)\right\} \text{ y } \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / f(x,y)=(1,1)\right\}.$$

c) Sean los conjuntos,

$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / g(x,y,z)=(1,2)\right\}$, $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / g(x,y,z)=(a,b)\right\}$

Dar unos valores de *a* y *b* para los cuales $A\cap B=\varnothing$ y otros para los cuales $A\cap B\neq\varnothing$.

a) $M(f)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $M(g)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $M\left(f^{-1}\right)=\left(M(f)\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$,

$$M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix},$$

$$M(f^{-1}\circ g)=M(f^{-1})\cdot M(g)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$M(f\circ f^{-1})=M(f)\cdot M(f^{-1})=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

b) — $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / g(x,y,z)=(1,1)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x+z,y-z)=(1,1)\right\}$

$$\left.\begin{array}{l}x+z=1\\ y-z=1\end{array}\right\} \text{ luego } x=1-z,\quad y=1+z$$

Por lo que $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / g(x,y,z)=(1,1)\right\}=\left\{(1-z,z+1,z),z\in\mathbb{R}\right\}$

— $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / f(x,y)=(1,1)\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=1,\ 2x-y=1\right\}$

Luego $x=\dfrac{2}{3},\quad y=\dfrac{1}{3}$

Por lo que $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y)=(1,1)\}=\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$

De otra forma, puesto que f es una aplicación invertible,

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y)=(1,1)\}=f^{-1}(1,1)$$

$$M\left(f^{-1}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow f^{-1}(1,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$$

c) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, g(x,y,z)=(1,2)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+z=1,\, y-z=2\}$

$=\{(1-z,2+z,z)\,/\, z\in\mathbb{R}\}$

$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, g(x,y,z)=(a,b)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+z=a,\, y-z=b\}$

$=\{(a-z,b+z,z)\,/\, z\in\mathbb{R}\}$

$$A\cap B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+z=1,\, y-z=2,\ x+z=a,\ y-z=b\}$$

$A\cap B\neq\varnothing$. Estos sistemas son compatibles sólo para $a=1$ y $b=2$.

$A\cap B=\varnothing$. Incompatibles para $a\neq 1$ o $b\neq 2$.

Sección 5. Integración

1.- (febrero 2010-LADE)

a) Clasifica la siguiente integral $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ para los diferentes valores de $a\in\mathbb{R}$.

b) Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ para $a=-1$ y para $a=2$.

a) Para cualquier *a*, fijo, $f(x)=\sqrt[3]{x-a^2}$, está definida y es continua para todo *x*. Pero $f(x)=1\big/\sqrt[3]{x-a^2}$ es continua para todo *x*, salvo en el punto $x=a^2$, donde no está definida al anularse el denominador. En este caso la función no es acotada en torno al punto $x=a^2$, pues para valores de *x* muy próximos a a^2 los valores de la función se hacen tan grandes como se quiera, al acercarse a cero el denominador. Por lo tanto,

* si $-1\le a^2\le 1$, la función no está acotada en el intervalo $[-1,1]$, que es acotado.

  Como $-1\le a^2\le 1$ si y sólo si $-1\le a\le 1$, para estos valores de *a* la integral es una integral impropia de 2ª especie.
* Para los demás valores, cuando $a<-1$ ó $1<a$, la función es continua en $[-1,1]$, luego la integral es propia.

b) Para $a=-1$, la integral es impropia de 2ª especie, teniendo como punto singular $x=1$, donde la función es no acotada. Por ello,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-(-1)^2}}=\lim_{r\to1^-}\int_{-1}^{r}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}\lim_{r\to1^-}\left(\left.\frac{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}{2}\right|_{-1}^{r}\right)=\lim_{r\to1^-}\left(\frac{3(r-1)^{\frac{2}{3}}}{2}-\frac{3(-2)^{\frac{2}{3}}}{2}\right)==-\frac{3\cdot2^{\frac{2}{3}}}{2}=-\frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}$$

Para $a=2$, la integral es propia. Se tiene:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-2^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}=\left(\left.\frac{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}{2}\right|_{-1}^{1}\right)=\left(\frac{3(1-4)^{\frac{2}{3}}}{2}-\frac{3(-1-4)^{\frac{2}{3}}}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(3^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{3}}\right)$$

2.- (mayo 2010-LADE)

a) Clasifica (sin calcular) la siguiente integral para los distintos valores de $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3} dx$$

b) Calcula el valor de la integral anterior para $a = \frac{1}{2}$ y para $a = 2$.

a) La función $f(x) = \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ es continua en $\mathbb{R}$ salvo en $x = -1$ y en $x = 1$, donde no está definida al anularse el denominador. En torno a estos puntos la función no está acotada, pues para valores de *x* muy próximos a 1 y a -1, los valores de la función se hacen tan grandes como se quiera al acercarse a 0 el denominador. El intervalo de integración es acotado. Por tanto:

* si $0 < a < 1$, la función $f(x) = \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ es continua y está acotada en $[-a, a]$ y la integral es una integral propia.
* si $1 \leq a$, la función $f(x) = \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ es continua en $[-a, a]$ salvo en $x = -1, 1 \in [-a, a]$, y no está acotada. Podremos descomponer la integral en suma de integrales impropias de 2ª especie.

b) - Para $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ es una función continua en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, acotado. Por tanto la integral es propia:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{-3} dx = -\frac{1}{4\left(x^2-1\right)^2}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)^2} + \frac{1}{4\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right)^2} = 0$$

- Para $a=2$, $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ es continua en $[-2,2]$ salvo en $x=-1$ y en $x=1$, donde no está definida al anularse el denominador, y no está acotada. Podemos descomponer la integral como suma de integrales de 2ª especie de la siguiente manera (el punto 0 es opcional y se puede escoger cualquier punto entre $[-1,1]$):

$$\int_{-2}^{2}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx+\int_{-1}^{0}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx+\int_{1}^{2}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx=$$

$$\lim_{r\to-1^-}\int_{-2}^{r}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx+\lim_{r\to-1^+}\int_{r}^{0}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx+\lim_{r\to1^-}\int_{0}^{r}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx+\lim_{r\to1^+}\int_{r}^{2}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx$$

Calculamos el primero de los límites:

$$\lim_{r\to-1^-}\int_{-2}^{r}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx=\lim_{r\to-1^-}\left(\left.\frac{-1}{4\left(x^2-1\right)^2}\right|_{-2}^{r}\right)=\lim_{r\to-1^-}\left(\frac{-1}{4\left(r^2-1\right)^2}+\frac{1}{4\left(4-1\right)^2}\right)=-\infty$$

Luego la integral es divergente.

3.- (enero 2009-LADE)

a) Clasifica la integral $\int_a^0 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ para los distintos valores de $a<0$.

b) Clasifica la integral $\int_0^b \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ para los distintos valores de $b>0$.

c) Calcula los valores de a y b $(a<b)$ para los que la integral $\int_a^b \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ es propia.

d) Calcula la integral $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$.

a) Puesto que $\sqrt[3]{1-x^2}=0 \Leftrightarrow x=1, x=-1$, la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ es continua en $\mathbb{R}$ salvo en los puntos $x=1$ y $x=-1$. En torno a estos puntos la función no está acotada. Además:

$x=1\notin[a,0]$, ya que $a<0$.

$x=-1\in[a,0]\Leftrightarrow a\leq -1$.

Luego la integral $\int_a^0 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$, puesto que el intervalo de integración $[a,0]$ es acotado, es impropia de 2ª especie si $a\leq -1$, y es propia si $-1<a<0$.

b) En este caso:

$x=-1\notin[0,b]$, ya que $b>0$.

$x=1\in[0,b]\Leftrightarrow b\geq 1$.

Luego la integral $\int_0^b \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$, puesto que el intervalo de integración $[0,b]$ es acotado, es impropia de 2ª especie si $b\geq 1$, y es una integral propia si $0<b<1$.

c) En esta situación,

$x=-1\in[a,b]\Leftrightarrow a\le -1$ y $b\ge -1$, ya que $a<b$.

$x=1\in[a,b]\Leftrightarrow a\le 1$ y $b\ge 1$, ya que $a<b$.

De manera similar a los casos anteriores, la integral es propia si

* $b<-1$, ya que $a<b$.
* $a>1$, ya que $a<b$.
* $-1<a<b<1$.

d) $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$ es impropia de 2ª especie (como se ha comentado, la función es continua en $[-1,1]$ salvo en los puntos $x=1, x=-1$ y no está acotada).

$$\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\frac{-1}{2}\int -2x\left(1-x^2\right)^{-1/3}dx=\frac{-1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{2/3}}{2/3}=\frac{-3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}{4}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\lim_{y\to -1^+}\int_{y}^{0}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx+\lim_{y\to 1^-}\int_{0}^{y}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\lim_{y\to -1^+}\left.\frac{-3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}{4}\right]_{y}^{0}+\lim_{y\to 1^-}\left.\frac{-3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}{4}\right]_{0}^{y}=$$

$$=\lim_{y\to -1^+}\left(\frac{-3}{4}-\frac{-3\sqrt[3]{\left(1-y^2\right)^2}}{4}\right)+\lim_{y\to 1^-}\left(\frac{-3\sqrt[3]{\left(1-y^2\right)^2}}{4}-\frac{-3}{4}\right)=0$$

4.- (junio 2009-LADE)

a) Clasifica la integral $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^a}$ para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Clasifica y calcula la integral $\int_{-\infty}^{2} f(x)dx$, siendo $f(x)=\begin{cases} e^{2+2x} & ; \quad x<-1 \\ 3x & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ 1/\sqrt[4]{x} & ; \quad x>1 \end{cases}$.

a) El intervalo de integración $[0,1]$ es acotado.

* Si $a>0$ la función $f(x)= 1/(x-1)^a$ es continua en el intervalo de integración salvo en el punto $x=1 \in [0,1]$, en torno al que no está acotada. Por tanto la integral es impropia de 2ª especie.

* Si $a \le 0$ la función es continua y, por tanto, acotada en el intervalo $[0,1]$, por lo que es una integral propia.

b) $\int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{2+2x}dx + \int_{-1}^{1} 3xdx + \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$, es una integral impropia de 1ª especie:

* $\int_{-\infty}^{-1} e^{2+2x}dx$ es una integral impropia de 1ª especie, por tratarse de la integral de una función continua y acotada sobre recinto no acotado.

* $\int_{-1}^{1} 3xdx, \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$ son las dos integrales propias ya que se trata de integrar funciones continuas en recintos acotados.

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{2+2x}dx + \int_{-1}^{1} 3xdx + \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} e^{2+2x}dx + \int_{-1}^{1} 3xdx + \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left.\frac{e^{2+2x}}{2}\right|_a^{-1} + \left.\frac{3x^2}{2}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{x^{\frac{3}{4}}}{3/4}\right|_1^2 = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^0}{2} - \frac{e^{2+2a}}{2}\right] + 0 + \frac{4\cdot 2^{3/4}-4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{4\cdot 2^{3/4}-4}{3}$$

5.- (enero 2008-LADE)

a) Completa los huecos para que $\int_{\square}^{\square} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ sea una integral:

i) Propia.

ii) Impropia de primera especie.

iii) Impropia de segunda especie.

iv) Impropia combinada de primera y segunda especie.

b) Clasifica, para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$, la integral $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x-a)^2}$, y calcula el valor de la integral para $a = 1$.

c) Clasifica y calcula $\int_{-2}^{2} \frac{x}{(x^2-5)^2}$

a) La función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ es continua en $\mathbb{R}$ salvo en $x = 1$, donde no está definida al anularse el denominador. En torno a este punto la función no está acotada. Por tanto:

i) la integral es propia si se integra la función en un recinto acotado que no contenga el valor x=1, por ejemplo $\int_{\boxed{2}}^{\boxed{3}} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$.

ii) la integral es impropia de 1ª especie si se integra la función en un recinto no acotado que no contenga el valor x=1, por ejemplo $\int_{\boxed{2}}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$.

iii) la integral es impropia de 2ª especie si se integra la función en un recinto acotado que contenga el valor x=1, por ejemplo $\int_{\boxed{0}}^{\boxed{2}} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$.

iv) la integral es impropia combinada de 1ª y de 2ª especie si se integra la función en un recinto no acotado que contenga el valor x=1, por ejemplo $\int_{\boxed{-1}}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$.

b) En este caso, la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}$ es continua en $\mathbb{R}$ salvo en $x=a$,

donde no está definida al anularse el denominador. En torno a este punto la función no está acotada. Por tanto

* si $a<-2$ ó $a>2$, la integral es propia.
* si $-2\le a\le 2$ la integral es impropia de 2ª especie.

Si hacemos $a=1$ se tiene:

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}=\int_{-2}^{1^-}\frac{dx}{(x-1)^2}+\int_{1^+}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}dx=$$

$$=\lim_{t\to 1^-}\int_{-2}^{t}\frac{dx}{(x-1)^2}+\lim_{t\to 1^+}\int_{t}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\int_{-2}^{1^-}\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{t\to 1^-}-\frac{1}{(x-1)}\Bigg|_{-2}^{t}=\lim_{t\to 1^-}\left(-\frac{1}{(t-1)}+\frac{1}{-3}\right)=-\infty$$

Luego $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$ es divergente.

c) Puesto que $x^2-5=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}\notin[-2,2]$, la función $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-5)^2}$ es

continua y está acotada en $[-2,2]$, que es un intervalo acotado. Por tanto es una integral propia.

$$\int_{-2}^{2}\frac{x}{(x^2-5)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{2x}{(x^2-5)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}2x(x^2-5)^{-2}dx=-\frac{1}{2}(x^2-5)^{-1}\Big|_{-2}^{2}=0$$

6.- (junio 2008-LADE)

a) Clasifica y calcula $\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x+2a}}\,dx$ para $a=-3$.

b) Clasifica $\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x+2a}}\,dx$ para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

c) Clasifica y calcula $\int_0^1 3xe^{1-x^2}\,dx$.

a) La integral $\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x-6}}\,dx$ es impropia de 2ª especie puesto que la función es continua salvo en el punto $x=6$, y no está acotada en el recinto de integración, el intervalo acotado $[0,6]$.

$$\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x-6}}dx = \lim_{y\to 6^-}\int_0^y \frac{4}{\sqrt[3]{x-6}}dx = \lim_{y\to 6^-}\int_0^y 4(x-6)^{-1/3}\,dx = \lim_{y\to 6^-} 4\frac{3}{2}(x-6)^{\frac{2}{3}}\Big]_0^y =$$

$$= \lim_{y\to 6^-} 6\sqrt[3]{(x-6)^2}\Big]_0^y = \lim_{y\to 6^-}\left(6\sqrt[3]{(y-6)^2} - 6\sqrt[3]{36}\right) = -6\sqrt[3]{36}.$$

b) Puesto que $x+2a=0$ si y sólo si $x=-2a$ y, además, $-2a\in[0,6]$, si y sólo si $a\in[-3,0]$, entonces la función $f(x)=4/\sqrt[3]{x+2a}$ es continua en $\mathbb{R}$ salvo en el punto $x=-2a$, y no está acotada. Luego:

* si $a\in[-3,0]$ es una integral impropia de 2ª especie.

* si $a\notin[-3,0]$ es una integral propia (función continua y acotada en intervalo de integración acotado).

c) La función $f(x)=3xe^{1-x^2}$ es continua en el intervalo $[0,1]$, acotado. Por tanto esta integral es propia. Además:

$$\int_0^1 3xe^{1-x^2}dx = -\frac{3}{2}\int_0^1 -2xe^{1-x^2}dx = \frac{-3}{2}e^{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{-3}{2}e^0 + \frac{3}{2}e^1 = \frac{-3}{2}+\frac{3}{2}e.$$

7.- (febrero 2007-LADE) Sea $f(x)=\begin{cases} 2+e^x & \text{si } x\le a \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{si } x>a \end{cases}$ $\quad (a\in\mathbb{R})$

a) Clasifica $\int_a^{a+2} f(x)dx$ (la integral de *f* en $[a,a+2]$) para todo $a\in\mathbb{R}$.

b) Para *a* = 0, clasifica y calcula las siguientes integrales:

$$\text{i) } \int_{-1}^{0} f(x)dx; \qquad \text{ii) } \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

a) En este caso, $\int_a^{a+2} f(x)dx=\int_a^{a+2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. El recinto de integración $[a,a+2]$ es acotado.

La función $f(x)$ es continua salvo en *x* = 0, y no está acotada. Además $0\in[a,a+2]$ si y sólo si $a\le 0\le a+2$, es decir, $-2\le a\le 0$. Por tanto

* la integral es impropia de 2ª especie si y sólo si $-2\le a\le 0$;
* en otro caso, es decir, cuando $a<-2$ ó $a>0$, es una integral propia.

b) i) La función $f(x)=(2+e^x)$, es una función continua y está acotada en el intervalo de integración $[-1,0]$, que es acotado. Luego la integral es propia.

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left(2+e^x\right)dx=2x+e^x\Big]_{-1}^{0}=0+e^0-\left(-2+e^{-1}\right)=1+2-e^{-1}=3-\frac{1}{e}.$$

ii) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left(2+e^x\right)dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$, es una integral impropia de 2ª especie (integral de una función continua salvo en el punto $x=0$, y no acotada, en un intervalo acotado).

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left(2+e^x\right)dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=3-\frac{1}{e}+\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\lim_{y\to 0^+}\int_y^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\lim_{y\to 0^+}\frac{x^{2/3}}{2/3}\Bigg]_y^1=\lim_{y\to 0^+}\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Bigg]_y^1=\lim_{y\to 0^+}\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{y^2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Luego $\int_{-1}^{1} f(x)dx=3-\frac{1}{e}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}-\frac{1}{e}$

8.- (mayo 2007-LADE) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 3e^{2x} & ;\text{ si } \ x\le 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x}} & ;\text{ si } \ x>0. \end{cases}$

a) Clasifica y calcula las integrales $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

b) Calcula, utilizando el método de integración por partes, la integral $\int_{1}^{e} x\ln x dx$.

a) $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 3e^{2x}dx$. Es una integral impropia de 1ª especie: la función es continua y está acotada, y el intervalo de integración es no acotado.

$$\int_{-\infty}^{0} 3e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} 3e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left.\frac{3}{2}e^{2x}\right]_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{2a}\right]=\frac{3}{2}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 3e^{2x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx$. Es una integral impropia combinada:

* la primera y la tercera integrales son impropias de 1ª especie puesto que, en ambos casos, la función de integración es continua y acotada y el recinto de integración es no acotado.

* la segunda es una integral impropia de 2ª especie puesto que la función es continua salvo en $x = 0$, y no está acotada, y el intervalo de integración está acotado.

$$\int_{-\infty}^{0} 3e^{2x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx=\frac{3}{2}+\lim_{a\to0^+}\int_{a}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx+\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx=\frac{3}{2}+\lim_{a\to0^+}\left.\frac{3}{8}(4x)^{2/3}\right]_{a}^{1}+\lim_{b\to\infty}\left.\frac{3}{8}(4x)^{2/3}\right]_{1}^{b}$$

La integral es divergente puesto que el último límite no existe.

b) Definiendo $u=lnx$ y $dv=xdx$, tenemos

$du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\frac{x^2}{2}$. Sustituyendo:

$\int xlnxdx=\frac{x^2}{2}lnx-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}lnx-\frac{x^2}{4}+C$, de donde

$$\int_{1}^{e} x\ln xdx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_{1}^{e}=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

9.- (enero 2006-LADE) Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & ; \quad x<a \\ e^{2x} & ; \quad x \geq a \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Para a=1, clasifica la integral $\int_0^3 f(x)dx$.

b) ¿Para qué valores de a≥0 es $\int_0^3 f(x)dx$ una integral impropia?

c) Para a=3 calcula, si es posible, $\int_0^3 f(x)dx$.

a) Para $a=1$ se tiene que $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int_1^3 e^{2x}dx$.

Luego es una integral propia porque cada una de estas dos integrales es propia: el intervalo de integración está acotado y las funciones son continuas y están acotadas en el intervalo de integración.

b) $\int_0^3 f(x)dx$ es una integral impropia de 2ª especie siempre que $a \geq 2$, ya que en este caso el punto $x=2$ pertenece al intervalo de integración y la función, $f(x)= 1/(x-2)^2$, no es continua en $x=2$ y no está acotada en torno a ese punto.

c) Para $a=3$ la integral es impropia de 2ª especie:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx =$$

$$\lim_{y\to 2^-}\int_0^y \frac{1}{(x-2)^2}dx + \lim_{y\to 2^+}\int_y^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \lim_{y\to 2^-}\left.\frac{-1}{(x-2)}\right]_0^y + \lim_{y\to 2^+}\left.\frac{-1}{(x-2)}\right]_y^3 =$$

$$\lim_{y\to 2^-}\left(\frac{-1}{(y-2)}-\frac{-1}{(0-2)}\right)+\lim_{y\to 2^+}\left(\frac{-1}{(3-2)}-\frac{-1}{(y-2)}\right)=\left(\infty-\frac{1}{2}\right)+(-1+\infty).$$

Luego no existe la integral, es divergente.

10.- (junio 2006-LADE) Clasifica y calcula las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 5x^2\left(x^3-1\right)^4 dx$

b) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

c) $\int_0^\infty 4e^{-2x} dx$.

a) La función $f\left(x\right)=5x^2\left(x^3-1\right)^4$ es una función continua en el intervalo $\left[0,1\right]$ acotado, por tanto la integral $\int_0^1 5x^2\left(x^3-1\right)^4 dx$ es una integral propia.

$$\int_0^1 5x^2\left(x^3-1\right)^4 dx=\frac{5}{3}\int_0^1 3x^2\left(x^3-1\right)^4 dx=\left.\frac{\left(x^3-1\right)^5}{3}\right]_0^1=0-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3}.$$

b) La función $f\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}$ es una función continua en el intervalo $\left[0,1\right]$ acotado, salvo en el punto $x=1$. Y no está acotada. Por tanto la integral $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ es una integral impropia de 2ª especie.

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} dx=\lim_{y\to 1^-}\int_0^y \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} dx$$

$$=\lim_{y\to 1^-} \left. 3\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}\right]_0^y=\lim_{y\to 1^-}\left(3\sqrt[3]{\left(y-1\right)^2}-\left(-3\right)\right)=\left(0-\left(-3\right)\right)=3.$$

c) $\int_0^\infty 4e^{-2x} dx$ es una integral impropia de 1ª especie ya que la función $f\left(x\right)=4e^{-2x}$ es continua y acotada, y el intervalo de integración $\left[0,\infty\right)$ no está acotado.

$$\int_0^\infty 4e^{-2x} dx=\lim_{y\to\infty}\int_0^y 4e^{-2x} dx=\lim_{y\to\infty}\left.-2e^{-2x}\right]_0^y=\lim_{y\to\infty}\left(-2e^{-2y}-\left(-2\right)\right)=2.$$

11.- (febrero 2001-LADE) Clasifica y calcula, si es posible, las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\ dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{1}{(x-2)^5}\ dx$

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\ dx$ es una integral propia puesto que la función es continua y el intervalo de integración está acotado. Es una integral inmediata:

$$\int_1^4 \frac{2x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\ dx = \int_1^4 2x\left(x^2+1\right)^{1/5} dx = \left.\frac{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^4}}{4/5}\right]_1^4 = \frac{\sqrt[5]{(17)^4}}{4/5} - \frac{\sqrt[5]{(2)^4}}{4/5}.$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{1}{(x-2)^5}\ dx$ es una integral impropia combinada de 1ª y 2ª especie ya que el intervalo de integración no está acotado y la función no es continua en *x=2* y no está acotada.

$$\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{(x-2)^5} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-2)^5} + \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^5} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^5} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{(x-2)^5} + \lim_{b\to2^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-2)^5} + \lim_{c\to2^+}\int_c^3 \frac{dx}{(x-2)^5} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left.\frac{(x-2)^{-4}}{-4}\right]_a^0 + \lim_{b\to2^-}\left.\frac{(x-2)^{-4}}{-4}\right]_0^b + \lim_{c\to2^+}\left.\frac{(x-2)^{-4}}{-4}\right]_c^3 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{(0-2)^{-4}}{-4} - \frac{(a-2)^{-4}}{-4}\right) + \lim_{b\to2^-}\left(\frac{(b-2)^{-4}}{-4} - \frac{(0-2)^{-4}}{-4}\right) + \lim_{c\to2^+}\left(\frac{(3-2)^{-4}}{-4} - \frac{(c-2)^{-4}}{-4}\right) =$$

$$= \left(\frac{-1}{64} - 0\right) + \left(-\infty + \frac{1}{64}\right) + \left(\frac{-1}{4} + \infty\right).$$

Como las dos últimas integrales son divergentes, la integral propuesta es divergente.

12.- (junio 2001-LADE)

a) Calcula $\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$

b) i) Clasifica las siguientes integrales para cada valor de $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 x^a dx \qquad \int_1^\infty x^a dx$$

ii) Calcula, si es posible, las integrales anteriores para $a = 2$.

iii) Calcula, si es posible, las integrales anteriores para $a = -2$.

a) Es una integral propia inmediata:

$$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx = \left.\frac{-x\cdot(1-x)^6}{6}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^6}{6}dx = 0 + \left.\frac{-(1-x)^7}{6\cdot 7}\right|_0^1 = \frac{1}{42}$$

b) i) $\int_0^1 x^a dx$, es una integral propia para $a \geq 0$. Para a<0, es impropia de 2ª especie ya que la función es continua salvo en x=0 y no está acotada.

$\int_1^\infty x^a dx$, es siempre impropia de 1ª especie ya que el intervalo de integración $(1,\infty)$ no está acotado. (Nota: el punto x=0 no está en el intervalo de integración así que nunca es impropia de 2 especie).

ii) $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$

$$\int_1^\infty x^2 dx = \lim_{y\to\infty}\int_1^y x^2 dx = \lim_{y\to\infty}\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^y = \lim_{y\to\infty}\frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} = \infty, \text{ divergente.}$$

iii) $\int_0^1 x^{-2} dx = \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 x^{-2} dx = \lim_{y\to 0^+}\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_y^1 = -1 + \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y} = \infty,$ divergente

$$\int_1^\infty x^{-2} dx = \lim_{y\to\infty}\int_1^y x^{-2} dx = \lim_{y\to\infty}\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^y = \lim_{y\to\infty}\frac{-1}{y} + 1 = 1.$$

Sección 6. Diagonalización

1.- (enero 2010-LE) Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) ¿Es diagonalizable la matriz *A*? En caso afirmativo, calcula las matrices *P* y *D* tales que $P^{-1}AP=D$.

b) ¿Existe algún valor de *a* para el que $(3,-6,a)$ sea un vector propio de la matriz *A*?

a) Primero calculamos los valores propios, que corresponden a las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 2 & -\lambda & 0\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-2]=(2-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda).$$

Luego los valores propios son $\lambda=2$ (doble) y $\lambda=-1$ (simple).

* Como $\lambda=-1$ es simple se tiene que $\dim S(-1)=1$.

* Ahora calculamos $\dim S(2)$:

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Entonces, $\dim S(2)=n^{o}\,col(A-2I)-rg(A-2I)=3-2=1\neq mult(2)$ y por tanto *A* no es diagonalizable.

b) $(3,-6,a)$ es un vector propio de *A* si:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -6\\ a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\ -6\\ a\end{pmatrix}, \text{ es decir, } \left.\begin{array}{r}-3=3\lambda\\ 6=-6\lambda\\ -3+2a=a\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda=-1, a=1.$$

Por tanto $(3,-6,1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda=-1$.

2.- (junio 2010-LE) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Para $a=2$, ¿es diagonalizable la matriz *A*? En caso afirmativo, calcula la matriz diagonal *D* semejante a *A*.

b) ¿Existe algún valor de *a* para el que 4 sea un valor propio de la matriz *A*?

a) El polinomio característico de la matriz A cuando $a=2$ es:

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)-2(3-\lambda)=$$

$$=(3-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2)=(3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda)=\lambda(3-\lambda)(\lambda-3).$$

Los valores propios de *A*, es decir, las raíces del polinomio característico son $\lambda=0$ y $\lambda=3$ (doble). Como son reales, sólo tenemos que la dimensión del subespacio espectral asociado a $\lambda=3$ coincide con su multiplicidad.

$$\dim S(3)=3-rg(A-3I)=3-rg\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=3-1=2.$$

Luego *A* es diagonalizable y una matriz diagonal semejante a *A* es:

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si $\lambda=4$ es un valor propio de la matriz *A*, entonces es una raíz del polinomio característico:

$$|A-4I|=\begin{vmatrix} 1-4 & 0 & a \\ 3 & 3-4 & -3 \\ 1 & 0 & 2-4 \end{vmatrix}=-6+a$$

Luego $\lambda=4$ es un valor propio de la matriz A si $a=6$.

3.- (febrero 2009-LE) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & -2 & a\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, donde $a\in\mathbb{R}$.

a) Encuentra los valores de *a* para los cuales -2 es un valor propio de *A* y halla su subespacio espectral asociado.

b) Calcula los valores de *a* para los cuales $(1,5,-1)$ es un vector propio del valor propio 4.

c) Para $a=3$, ¿es *A* diagonalizable?

a) Calculamos las raíces del polinomio característico para la matriz *A*:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 3\\ 3 & -2-\lambda & a\\ 3 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)[(1-\lambda)^2-9]=0,\quad \begin{cases}\lambda=-2 \text{ (doble)}\\ \lambda=4\end{cases}$$

Por tanto, $\lambda=-2$ es valor propio de la matriz *A* para todo *a*. El subespacio espectral $S(-2)$ son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 3 & 0 & a\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

* Para $a=3$, $S(-2)=\{(x,y,-x)/\,x,y\in\mathbb{R}\}$

* Para $a\neq 3$, $S(-2)=\{(0,y,0)/\,y\in\mathbb{R}\}$

b) Si $(1,5,-1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda=4$ se cumple que:

$$Ax=\lambda x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & -2 & a\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\\ -1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\ 5\\ -1\end{pmatrix}$$, sistema incompatible cualquiera que sea *a*.

c) Si $a=3$ los valores propios de *A* son $\lambda=-2$ (doble) y $\lambda=4$. $\dim S(4)=1$.

$$\dim S(-2)=3-\text{rango}(A+2I)=3-\text{rango}\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}=2.$$

Por tanto, para $a=3$ la matriz *A* diagonalizable

4.- (junio 2009-LE) Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de *a* es *A* diagonalizable?

b) Para $a=0$, calcula una matriz diagonal semejante a *A*.

a) Hallamos las raíces del polinomio característico:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - a^2(1-\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 - a^2] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+a)(\lambda-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1. \\ \lambda = a. \\ \lambda = -a. \end{cases}$$

Se tiene: si $a=0$ valores propios 1 y 0 (doble).

si $a=1$ valores propios 1 (doble) y -1.

si $a=-1$ valores propios 1 (doble) y -1.

En cualquier otro caso ($a \neq 0,\ a \neq 1,\ a \neq -1$), se obtienen 3 raíces reales distintas por tanto *A* es diagonalizable.

* $a=0$, la dimensión del subespacio espectral S(1) es 1. Calculamos la dimensión del subespacio espectral S(0),

$$\dim S(0) = 3 - \mathrm{rg}(A - 0I) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego coincide con la multiplicidad del valor propio, por tanto *A* es diagonalizable.

* $a=1$, $\dim S(-1) = 1$ y $\dim S(1) = 3 - \mathrm{rg}(A - I) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$

Por tanto, *A* no es diagonalizable.

$*\quad a=-1$, $\dim S(-1)=1$ y $\dim S(1)=3-\text{rg}(A-I)=3-\text{rg}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}=2$

Por tanto, *A* es diagonalizable.

En resumen, A es diagonalizable para $a\neq 1$.

b) Si $a=0$, por el apartado anterior, una matriz diagonal semejante a ella es:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Además $D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ donde *P* es la matriz de paso, formada por las vectores de la base de los subespacios espectrales S(1) y S(0).

5.- (junio 2008-LE) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\\ 0 & a & 4-a\\ 0 & a & -a\end{pmatrix}\in M_3$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Calcula los valores de a para los cuales A es diagonalizable.

b) Para $a=4$, ¿es A diagonalizable? En caso afirmativo, encuentra todas las matrices diagonales semejantes a A.

a) Calculamos las raíces del polinomio característico:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 6\\ 0 & a-\lambda & 4-a\\ 0 & a & -a-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[(a-\lambda)(-a-\lambda)-a(4-a)\right]=(2-\lambda)\left[\lambda^2-4a\right]$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}\\ \lambda=-\sqrt{4a}=-2\sqrt{a}\end{cases}$$

* Si $a<0$: $\lambda=2\sqrt{a}$ y $\lambda=-2\sqrt{a}$ no son valores reales. En consequencia *A* no es diagonalizable.

* Si $a=0$: $\lambda=0$ (doble) y $\lambda=2$ (simple). Luego *A* es diagonalizable si y sólo si $\dim S(0)=2$.

$$\dim S(0)=3-rg(A-0I)=3-rg\begin{pmatrix}2&-2&6\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=3-2=1.$$

Por tanto *A* no es diagonalizable

* Si $a=1$: $\lambda=2$ (doble) y $\lambda=-2$ (simple). Luego *A* es diagonalizable si y sólo si $\dim S(0)=2$ dim S(2).

$$\dim S(2)=3-rg(A-2I)=3-rg\begin{pmatrix}2-2&-2&6\\0&1-2&3\\0&1&-1-2\end{pmatrix}=3-rg\begin{pmatrix}0&-2&6\\0&-1&3\\0&1&-3\end{pmatrix}=3-1=2$$

Luego *A* es diagonalizable

* Si $a>0$ y $a\neq 1$: existen tres valores propios reales y distintos. Luego *A* es diagonalizable

En resumen, *A* es diagonalizable si y sólo si $a=1$ *ó* $a>0$ *y* $a\neq 1$.

b) El polinomio característico es

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&6\\0&4-\lambda&0\\0&4&-4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(4-\lambda)(-4-\lambda)$$

Cuyas raíces son $\lambda=2$, $\lambda=4$, $\lambda=-4$ reales y distintas, luego *A* es diagonalizable.

Todas las matrices diagonales semejantes a *A* son:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&-4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

6.- (febrero 2005-LE) Sea la matriz A= $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \in M_3,\ a\in\mathbb{R}$.

a) Calcula los valores de *a* para los cuales *A* es diagonalizable.

b) Para $a=1$, calcula una matriz diagonal semejante a *A* y una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de *A*.

c) Calcula los valores de *a* para los cuales $\lambda=4$ es un valor propio de *A*.

a) $$p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} (a-\lambda) & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & (a^2-\lambda) \end{vmatrix}=(a-\lambda)(-\lambda)(a^2-\lambda)$$

Raíces del polinomio característico: $\lambda=a, 0, a^2$

* Si $a\neq 0,1$, las raíces del polinomio característico son simples, luego *A* diagonalizable.

* Si $a=0$, las raíces del polinomio característico son $\lambda=0$ (triple).

$\dim S(0)=3-rg(A-1I)=3-rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3-1=2$. Luego *A* no diagonalizable.

* Si $a=1$, las raíces del polinomio característico: $\lambda=1$ (doble) y $\lambda=0$ (simple).

$\dim S(0)=3-rg(A-1I)=3-rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3-1=2$. Luego A diagonalizable.

b) $S(1)$ son las soluciones del sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir,

$S(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=-y+2z\}=\{(-y+2z,y,z): y,z\in\mathbb{R}\}$. Luego una base de $S(1)$ es $\langle(-1,1,0),(2,0,1)\rangle$

$S(0)$ son las soluciones del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir,

$S(0)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=0, z=0\}=\{(0,y,0): y\in\mathbb{R}\}$.

Por tanto, $S(0)=\langle(0,1,0)\rangle$

Base de vectores propios de $A=\langle(-1,1,0),(2,0,1),(0,1,0)\rangle$

Matriz Diagonal semejante a *A*:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c) Opción 1. Si $\lambda=4$ es un valor propio de *A*, entonces

$$|A-4I|=\begin{vmatrix}(a-4)&0&0\\-1&-4&2\\0&0&(a^2-4)\end{vmatrix}=(a-4)(-4)(a^2-4)=0\text{. Luego } a=2,-2,4$$

Opción 2. Si $\lambda=4$ es un valor propio de *A*, entonces 4 es raíz del polinomio característico $p(\lambda)=|A-\lambda I|$ (calculadas en el apartado a): $\lambda=a,0,a^2$. Por tanto, $\lambda=4$ es un valor propio de *A* si $a=2,-2,4$.

7.- (junio 2005-LE) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcula los valores de *a* para los cuales $\lambda=-3$ es un valor propio de A.

b) Calcula los valores de a para los cuales $(0,1,1)$ es un vector propio de *A*.

c) Calcula los valores de *a* para los cuales *A* es diagonalizable.

a) Calculamos los valores propios de *A*; es decir, las raíces del polinomio característico:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & a & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(2-\lambda)(\lambda+3)$$

Raíces del polinomio característico $\lambda=-3$ (simple) y $\lambda=2$ (doble). Independientemente de los valores de *a*, $\lambda=-3$ es un valor propio de *A*.

b) $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego, $\lambda=2$ y $a=-1$.

c) Raíces del polinomio característico $\lambda=-3$ (simple) y $\lambda=2$ (doble).

$\dim S(-3)=1$

$$\dim S(2)=3-rg|A-2I|=3-\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

* Si $a=-1$, $\dim S(2)=2$
* Si $a\neq-1$, $\dim S(2)=1$

Por lo tanto *A* es diagonalizable si $a=-1$.

8.- (enero 2004-LE)

a) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3$, $a,b \in \mathbb{R}$.

i) Calcula los valores de *a* y *b* para los cuales $\lambda = 3$ es un valor propio de *A*.

ii) Calcula los valores de *a* y *b* para los cuales $(0,1,1)$ es un vector propio de *A*.

iii) Para $a=0$, ¿es la matriz *A* diagonalizable? En caso afirmativo, encuentra una matriz diagonal semejante a *A*.

iv) Para $a=b=0$, calcula todos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 0$.

b) Escribe, razonando la respuesta, una matriz no diagonal semejante a $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) i) $\lambda = 3$ es un valor propio de la matriz *A* si y sólo si $|A-3I|=0$ y $|A-3I|=(a-3)(2-a)$. Luego $\lambda = 3$ es un valor propio de *A*, para $a=3$ y $b \in \mathbb{R}$ y para $a=2$ y $b \in \mathbb{R}$.

ii) $(0,1,1)$ es un vector propio de la matriz *A* si y sólo

$$\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Luego } \begin{cases} \lambda = 3 \\ a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

iii) Para calcular los valores propios de *A* planteamos el polinomio característico:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & b & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda = 0, 1, 2$, todos simples y reales, luego *A* es diagonalizable.

Una matriz diagonal semejante a A es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

iv) El subespacio espectral asociado al valor propio 0 es la solución del sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$A - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solución es $y = 0,\ z = 0.$ Luego $S_A(0) = \{(x,0,0), x \in \mathbb{R}\}$ y una base es: $\langle (1,0,0) \rangle$. Por tanto, los vectores propios asociados al valor propio 0 son los puntos de la forma $(x,0,0), x \in \mathbb{R}$, menos el punto $(0,0,0)$.

b) Por ejemplo $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ya que sus valores propios son 3 y –1, reales y simples, luego es diagonalizable, y por tanto semejante a $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9.- (junio 2004-LE) Sea la matriz $A= A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_3,\ a,b \in \mathbb{R}$.

a) Calcula los valores de a y b para los cuales A es diagonalizable.

b) Para $a = 2$ y $b = 0$, calcula una matriz diagonal semejante a A y una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

a) $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & b \\ 0 & -a-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-a-\lambda)(a-\lambda).$$

Por tanto los valores propios de la matriz A son: $\lambda = a$ (doble) y $\lambda = -a$ (simple) .

Casos:

* Si $a = 0$, entonces el único valor propio es $\lambda = 0$ (triple). Como

$$rg(A - 0 \cdot I) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

se tiene que $\dim S_A(0) = 3 - rg(A - 0 \cdot I) \neq 3 = mult(0)$, luego la matriz A no es diagonalizable en este caso.

* Si $a \neq 0$, los valores propios son $\lambda = a$ (doble) y $\lambda = -a$ (simple). Luego A será diagonalizable si $\dim S_A(a) = 2 = mult(a)$. Como $rg(A - a \cdot I) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que $rg(A - a \cdot I) = 2,$ si $b \neq 0,$ y $rg(A - a \cdot I) = 1,$ si $b = 0.$

Luego $\dim S_A(a) = 1,$ si $b \neq 0,$ y $\dim S_A(a) = 2,$ si $b = 0.$ Es decir, $\dim S_A(a) = 2 = mult(a)$ para todo $a \neq 0$ y $b = 0.$

Entonces A es diagonalizable si $a \neq 0$ y $b = 0.$

b) En este caso se cumple que $a \neq 0$ y $b = 0,$ entonces, por el apartado anterior, la matriz A es diagonalizable. Como los valores propios son:
$\lambda = 2$ (doble) y $\lambda = -2$ (simple), se tiene que una matriz diagonal semejante a A es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para calcular una base formada por vectores propios calculamos el subespacio espectral asociado al valor propio 2, es decir, la solución del sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La solución es $y = 0.$ Luego $S_A(2) = \{(x,0,z), x,z \in \mathbb{R}\}$ y una base es: $\langle (1,0,0),(0,0,1) \rangle.$

El subespacio espectral asociado al valor propio -2 es la solución del sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A+2\cdot I=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. La solución es $x=0,\ y=-4z.$ Luego $S_A(-2)=\{(0,-4z,z):z\in\mathbb{R}\}$ y una base es: $\langle(0,-4,1)\rangle$.

Por tanto, una base formada por vectores propios es: $\langle(1,0,0),(0,0,1),(0,-4,1)\rangle$.