ENPRESEN ADMINISTRAZIO ETA ZUZENDARITZARAKO MATEMATIKA II AZTERKETAK

enpresa matematika

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

www.argitalpenak.ehu.es
ISBN: 978-84-694-1843-7

Sarrera

Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako Lizentziaturako Matematika II irakasgaia analisiaren elementuak jorratzen dituen lau hileko irakasgai bat da, azken urteotan Euskal Herriko Unibertsitateko Ekonomia eta Enpresa Zientzien Fakultateko lehenengo urtean irakatsi dena, Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako lizentziaturan.

Argitalpen honetan Matematika IIko irakasgaian 2002. urtetik 2010. urtera egin diren azterketetan ezarritako problemak jasotzen dira, otsaileko eta ekaineko deialdietakoak.

Bestalde, ariketa hauek baliagarriak dira Fakultatean ezarri berri diren graduetako lehenengo ikasturteko Matematika II irakasgairako.

Ariketa hauek egin aurretik, ikasleek irakasgaiko kontzeptuak menperatzea oinarrizkoa da. Gomendagarria da, gainera, galderak ebazteko beharrezkoa den ahalegina egin aurretik problemen ebazpenak ez begiratzea. Modu honetan gai bakoitzeko kontzeptuak menperatzen dituzten edo ez frogatu ahal izango dute.

MATEMATIKA IIko azterketa

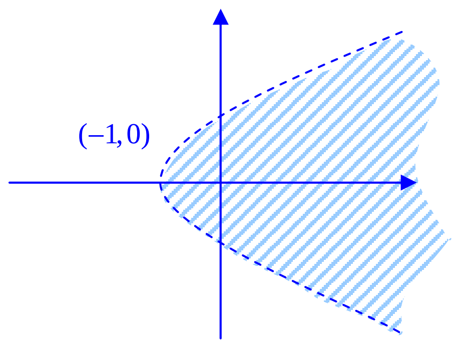
EZALeko 2002ko otsaila

1. (10 puntu) Demagun

$$f(x,y)=\frac{\ln(-y^2+x+1)}{x^2+y^2+1}\sqrt{x^2+y^2}$$

funtzioa. Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(1,0)$ eta $(-1,0)$ puntuetan. Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna eta deribagarritasuna $(0,0)$ puntuan. Kalkulatu f funtzioari dagozkion deribatu partzialak, deribagarria den kasuetan.

Eremua: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -y^2+x+1>0\}$.



Ondorioz, $(1,0)\in \operatorname{int} D$ da.

$$f_1(x,y)=\frac{\frac{1}{-y^2+x+1}1(x^2+y^2+1)-(\ln(-y^2+x+1))2x}{(x^2+y^2+1)^2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\ln(-y^2+x+1)}{x^2+y^2+1}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x.$$

$$f_2(x,y)=\frac{\frac{1}{-y^2+x+1}(-2y)(x^2+y^2+1)-(\ln(-y^2+x+1))2y}{(x^2+y^2+1)^2}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$+\frac{\ln(-y^2+x+1)}{x^2+y^2+1}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y.$$

Horrela, $f_1(x,y)$ eta $f_2(x,y)$ existitzen dira $(1,0)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(1,0)$ puntuan; izan ere, erroa, karratua, polinomioak eta logaritmo nepertar funtzioa (funtzio jarraituak) agertzen dira biderkatzen, batzen, kentzen, zatitzen eta konposatzen, izendatzaileak zero ez izanik. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(1,0)$ puntuan. Eta f funtzioa diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Jarraitua denez, limitea du puntu horretan. Deribatu partzial funtzioetan ordezkatuz, $f_1(1,0)=\frac{1}{4}$ eta $f_2(1,0)=0$ dira.

Orain $(0,0)\in \operatorname{int} D$ puntua aztertuko dugu. Konturatu ezin dugula lehengo moduan arrazoitu, $(0,0)$ puntuan x^2+y^2 izendatzailea 0 delako. Deribagarritasuna deribatu partzialen definizioa erabiliz aztertuko dugu.

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(-0^2+h+1)}{h^2+0^2+1}\sqrt{h^2+0^2}-\frac{\ln(0+1)}{0+1}\sqrt{0}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\ln(h+1))\sqrt{h^2}}{(h^2+1)h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\ln(h+1))|h|}{(h^2+1)h}.$$

Eta

$$\begin{cases} h>0, \ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(\ln(h+1))|h|}{(h^2+1)h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(\ln(h+1))h}{(h^2+1)h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\ln(h+1)}{h^2+1}=\dfrac{\ln(1)}{1}=0, \\ h<0, \ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(\ln(h+1))|h|}{(h^2+1)h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-(\ln(h+1))h}{(h^2+1)h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-\ln(h+1)}{h^2+1}=\dfrac{-\ln(1)}{1}=0. \end{cases}$$

Ezkerretik eta eskuinetik zenbaki bera, 0 zenbakia, irten denez,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\ln(h+1))|h|}{(h^2+1)h}=0$$

da. Hortaz, $f_1(0,0)$ existitzen da. Era berean,

$$f_2(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(-h^2+0+1)}{0^2+h^2+1}\sqrt{0^2+h^2}-\frac{\ln(0+1)}{0+1}\sqrt{0}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\ln(-h^2+1))\sqrt{h^2}}{(h^2+1)h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\ln(-h^2+1))|h|}{(h^2+1)h},$$

$$\begin{cases} h>0, \ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(\ln(-h^2+1))|h|}{(h^2+1)h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(\ln(-h^2+1))h}{(h^2+1)h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\ln(h+1)}{h^2+1}=\dfrac{\ln(1)}{1}=0, \\ h<0, \ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(\ln(-h^2+1))|h|}{(h^2+1)h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-(\ln(-h^2+1))h}{(h^2+1)h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-\ln(h+1)}{h^2+1}=\dfrac{-\ln(1)}{1}=0. \end{cases}$$

Horrela, $f_2(0,0)$ ere existitzen da. Bi deribatu partzialak existitzen direnez, *f* funtzioa deribagarria da (0,0) puntuan.

Azter dezagun *f* funtzioaren jarraitutasuna $(0,0)$ puntuan. Funtzio horren adierazpenean agertzen diren funtzioak jarraituak dira $(0,0)$ puntuan. Eta funtzio horiek konposatzen, biderkatzen eta zatitzen ari dira, izendatzaileak zero ez izanik. Ondorioz, *f* funtzioa jarraitua da (0,0) puntuan.

Bukatzeko, $(-1,0)$ puntua aztertuko dugu. Ohartu $(-1,0)\notin D$ dela. Beraz, f ez da jarraitua $(-1,0)$ puntuan. Eta $(-1,0)\notin \operatorname{int} D$ denez, f ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria $(-1,0)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia puntu horretan. Lehenik, $(-1,0)\in D\cup frD$ da. Baina ez da existitzen $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} \dfrac{\ln(-y^2+x+1)}{x^2+y^2+1}\sqrt{x^2+y^2}$, f funtzioak $-\infty$-rantz jotzen duelako $(x,y)\to(-1,0)$ denean.

---

2. (4 puntu) Demagun $z=f\left(\dfrac{xy-1}{x^2y}\right)+g(x-y,\sin(xy))$ funtzioa, $f\in C^1(\mathbb{R})$ eta $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik. Kalkulatu z funtzioaren deribatu partzialak.

$$z_1(x,y)=\left(f'\left(\frac{xy-1}{x^2y}\right)\right)\frac{yx^2y-(xy-1)2xy}{(x^2y)^2}+g_1(x-y,\sin(xy))+(g_2(x-y,\sin(xy)))(\cos(xy))y\,,$$

$$z_2(x,y)=\left(f'\left(\frac{xy-1}{x^2y}\right)\right)\frac{xx^2y-(xy-1)x^2}{(x^2y)^2}+g_1(x-y,\sin(xy))+(g_2(x-y,\sin(xy)))(\cos(xy))x\,.$$

---

3. (4 puntu) Demagun $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\alpha>0$ mailako funtzio homogeneoa, eta x_0 zenbaki erreala, $f(x_0,-4)=-4$ eta $f_1(x_0,-4)=0$ izanik. Aztertu ea $F(x,y)=f(x,y)+4=0$ ekuazioak $(x_0,-4)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa definitzen duen.

Ikus dezagun funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak egiaztatzen diren. Lehenik, $F(x,y)=f(x,y)+4$ funtzioaren existentzia-eremua $\mathbb{R}^2$ da, f funtzioaren existentzia-eremua $\mathbb{R}^2$ delako. Eta $(x_0,-4)\in\operatorname{int}\mathbb{R}^2$ da.

1. $F(x_0,-4)=f(x_0,-4)+4=-4+4=0$.
2. $F(x,y)=f(x,y)+4$ jarraitua da $(x_0,-4)$ puntuaren ingurunean, funtzio konstantea eta f batzen agertzen direlako, eta funtzio konstantea jarraitua delako eta f jarraitua delako ($f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ baita).
3. $F_2(x,y)=f_2(x,y)$ existitzen da eta jarraitua da $(x_0,-4)$ puntuaren ingurunean, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ delako.
4. $F_2(x_0,-4)=f_2(x_0,-4)\neq 0$?

Aplika dezagun Eulerren teorema, f funtzioa $\alpha > 0$ mailako funtzio homogeneoa dela kontuan izanik:

$$x_0 f_1(x_0,-4) - 4 f_2(x_0,-4) = \alpha f(x_0,-4) ,$$

$$0 - 4 f_2(x_0,-4) = \alpha(-4) ,$$

$$f_2(x_0,-4) = \alpha \neq 0 .$$

Orduan, laugarren baldintza ere betetzen da, eta $F(x, y) = 0$ ekuazioak $(x_0,-4)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa definitzen du.

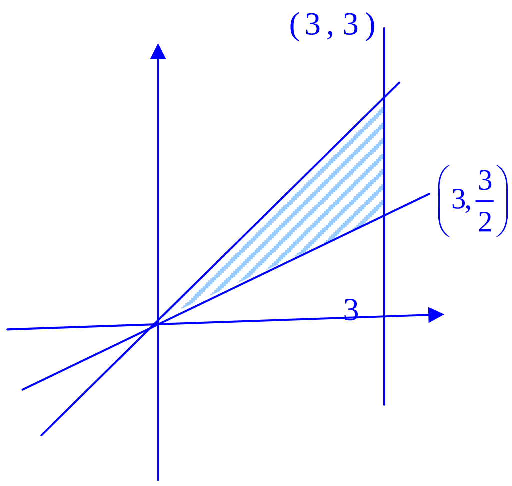
3. (9 puntu) Demagun $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$ funtzioa eta

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3, x - 2y \le 0, x - y \ge 0\right\}$$

multzoa.

i) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur globalak.



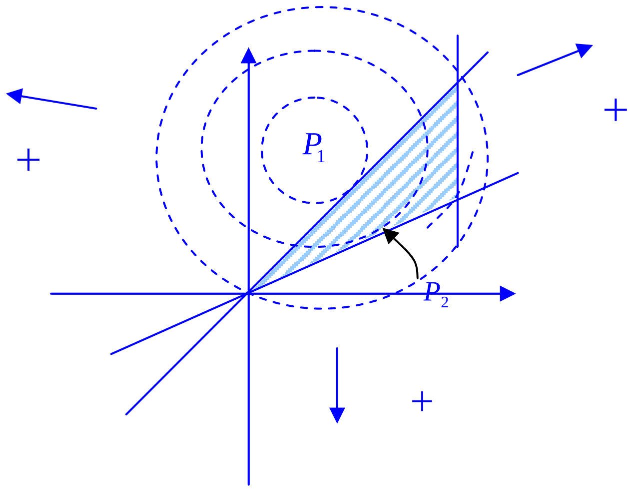
i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x, y) = 2(x-1) = 0 \\ f_2(x, y) = 2(y-2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 \text{ eta } y = 2 \Leftrightarrow (x, y) = (1, 2) .$$

Eta $(1, 2) \notin \text{int } A$ denez, barrualdean ez da lortzen muturrik.

A-ren muga: maila-lerroak $(1,2)$ puntuan zentratutako zirkunferentziak dira.



Muga-zati desberdinen ebaki-puntuak ($(0,0)$, $(3,3)$ eta $\left(3,\frac{3}{2}\right)$) bukaeran aztertuko ditugu.

- $x=y$ zatian, maila-lerroak erabiliz, P_1 puntuan A multzoarekiko minimo lokala lortzen dela ikusten da, A multzoko inguruneko puntuen irudiak handiagoak direlako. Puntu hori, lagrangearra erabiliz lortuko dugu.

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(x-1)^2+(y-2)^2+\lambda(x-y)\,.$$

Eta beraren deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2(x-1)+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2(y-1)+\lambda(-1)=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=x-y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\lambda=-2(x-1)\\ \lambda=2(y-2)\end{array}\right\}\Rightarrow 1-x=y-2\Rightarrow y=3-x\,.$$

Eta hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $x=\frac{3}{2}$ dugu. Horrela, $y=\frac{3}{2}$ eta $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=P_1$.

- $x=3$ zatian muturrik ez da lortzen, muga ebakitzean maila-lerroek A multzoaren ingurunean bi alde egiten dituztelako. Alde batean irudiak txikiagoak dira, eta bestean, handiagoak.

- $x=2y$ zatian ezer ez da lortzen, maila-lerroa ukitzailea den puntuan (hau da, P_2 puntuan) A multzoaren alde bateko inguruneko puntuen irudiak handiagoak, eta bestaldekoen irudiak txikiagoak, direlako.

- Mugako $(0,0)$, $(3,3)$ eta $\left(3,\frac{3}{2}\right)$ hiru ebaki-puntuetan maila-lerroak erabiliz, A multzoarekiko maximo lokalak lortzen dira, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako.

ii) Maila-lerroak erabiliz eta $f\left(3,\frac{3}{2}\right)=\frac{17}{4}$, $f(3,3)=5=f(0,0)$ kontuan izanik, $(3,3)$ eta $(0,0)$ puntuetan maximo globala lortzen dela ikusten da. Bestalde, $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ puntuan minimo globala lortzen da.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2002ko ekaina

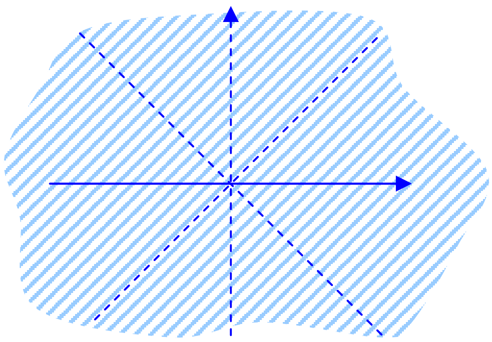
1. (9 puntu) Demagun

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{\sin^2(xy)}}{x(x^2-y^2)}$$

funtzioa. Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, deribagarritasuna eta limitearen existentzia $(1,1)$ eta $\left(\pi,\frac{1}{2}\right)$ puntuetan.

Aztertu f^2 funtzioaren deribagarritasuna $(\pi,1)$ puntuan.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\neq 0, x^2-y^2\neq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\neq 0, x\neq y, x\neq -y\}$.



ii) Ondorioz, $(1,1)\notin D$ da. Beraz, f funtzioa ez da jarraitua eta ez da deribagarria $(1,1)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia: $(1,1)\in D\cup \mathrm{fr}D$ da. Baina ez da existitzen $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\sqrt{\sin^2(xy)}}{x(x^2-y^2)}$, funtzioak ∞-rantz edo $-\infty$-rantz jotzen duelako $(x,y)\to(1,1)$ denean.

Orain $\left(\pi,\frac{1}{2}\right)\in D$ puntua aztertuko dugu. Erroa, sinua eta funtzio polinomikoak jarraituak dira (ohartu erroaren barruko adierazpena ez dela negatiboa) eta $x(x^2-y^2)\neq 0$ da. Ondorioz, f funtzioa jarraitua da $\left(\pi,\frac{1}{2}\right)$ puntuan.

Azter dezagun f funtzioaren deribagarritasuna $\left(\pi,\frac{1}{2}\right)$ puntuan. Lehenik, $\left(\pi,\frac{1}{2}\right)\in \operatorname{int}D$ da.

$$f_1(x,y)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin^2(xy)}}2(\sin(xy))(\cos(xy))yx(x^2-y^2)-\sqrt{\sin^2(xy)}(1(x^2-y^2)+x2x)}{x^2(x^2-y^2)^2},$$

$$f_2(x,y)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin^2(xy)}}2(\sin(xy))(\cos(xy))x^2(x^2-y^2)-\sqrt{\sin^2(xy)}x(-2y)}{x^2(x^2-y^2)^2}.$$

.

Horrela, deribatu partzial horiek existitzen dira $\left(\pi,\frac{1}{2}\right)$ puntuan, izendatzaileetan arazorik ez dugulako (erroaren barruko adierazpenak ere ez dira negatiboak, puntua eremuan dagoelako).

Ondoren, azter dezagun f^2 funtzioaren deribagarritasuna $(\pi,1)$ puntuan.

$$f^2(x,y)=\frac{\sin^2(xy)}{x^2(x^2-y^2)^2},$$

$$f_1^2(x,y)=\frac{2(\sin(xy))(\cos(xy))yx^2(x^2-y^2)^2-\sin^2(xy)(2x(x^2-y^2)^2+x^2 2(x^2-y^2)2x)}{x^4(x^2-y^2)^4},$$

$$f_2^2(x,y)=\frac{2(\sin(xy))(\cos(xy))x^3(x^2-y^2)^2-(\sin^2(xy))2x^2(x^2-y^2)(-2y)}{x^4(x^2-y^2)^4}.$$

Deribatu horiek existitzen dira $(\pi,1)$ puntuan, puntu horretan izendatzaileak zero egiten ez direlako.

2. (7 puntu) Demagun $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 3. mailako funtzio homogeneoa, $f(1,1)=1$ eta $f_1(1,1)=2$ izanik.

i) Definitzen al du $f(x,y)-1=0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa, $y=\varphi(x)$? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

ii) Aurkitu c-ren balioa, $f(x,y)-c=0$ ekuazioak $(2,2)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa, $y=\psi(x)$, definitzeko.

i) Azter ditzagun funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak. Lehenik, $F(x,y)=f(x,y)-1$ funtzioaren existentzia-eremua $\mathbb{R}^2$ da, f funtzioaren eremua $\mathbb{R}^2$ delako. Eta $(1,1)\in \operatorname{int}\mathbb{R}^2$.

1. $F(1,1)=f(1,1)-1=1-1=0$.
2. $F(x,y)=f(x,y)-1$ jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, funtzio konstantea eta f (funtzio jarraituak) kenketa batean agertzen direlako. Konturatu f jarraitua dela $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ delako.

3. $F_2(x,y) = f_2(x,y)$ existitzen da eta jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ delako.

4. $F_2(1,1) = f_2(1,1) \neq 0$?

Aplika dezagun Eulerren teorema, f funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa dela kontuan izanik:

$$1 f_1(1,1) + 1 f_2(1,1) = 3 f(1,1),$$

$$2 + f_2(1,1) = 3,$$

$$f_2(1,1) = 1.$$

Beraz, $F_2(1,1) = f_2(1,1) = 1 \neq 0$.

Hortaz, $f(x,y) - 1 = 0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du.

Eta F funtzioa $(1,1)$ puntuan diferentziagarria denez, orduan

$$\varphi'(1) = \frac{-f_1(1,1)}{f_2(1,1)} = \frac{-2}{1} = -2.$$

ii) Orain, $f(x,y) - c$ funtzioa dugu. Eta lehenengo baldintza honako hau da:

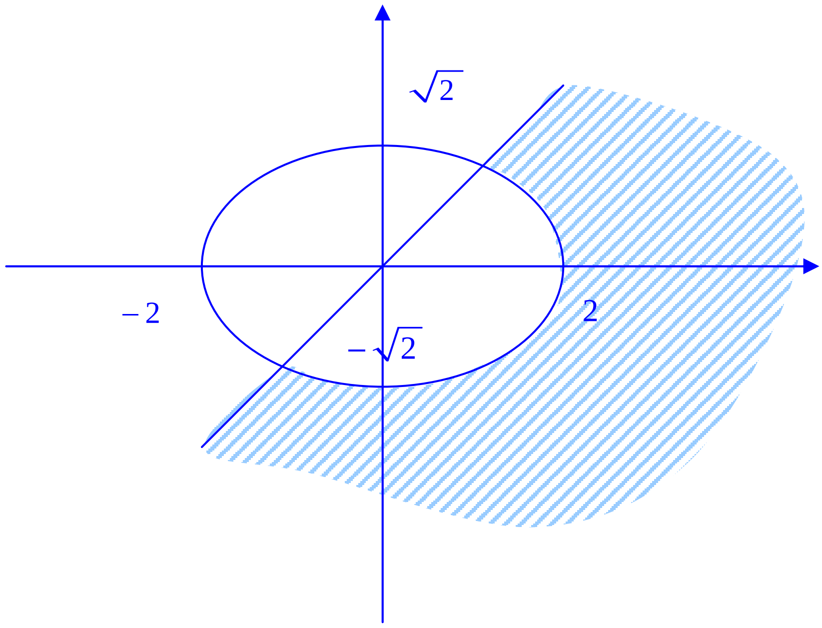
$$f(2,2) - c = 0 \Leftrightarrow 2^3 f(1,1) - c = 0 \Leftrightarrow c = 8.$$

Eta beste baldintzak ere egiaztatzen dira. Ohartu laugarrena egiaztatzen dela f funtzioaren deribatu partzialak ere homogeneoak direlako ($f_2(2,2) = 2^2 f_2(1,1) = 4 \neq 0$).

3. (9 puntu) Demagun $f(x,y) = x^2y^2$ funtzioa eta $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \geq 4, x - y \geq 0\right\}$ multzoa.

i) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur globalak.



i) Azter dezagun *A*-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2xy^2 = 0 \\ f_2(x,y) = 2x^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ edo } y = 0\,.$$

Beraz, barrualdean, soilik lor daitezke mutur lokalak $(0,y)$ puntuetan, $y < -\sqrt{2}$ izanik, eta $(x,0)$ puntuetan, $x > 2$ izanik.

Baldintza nahikoak ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$$f_1(x,y) = 0 \text{ eta } f_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,y) \text{ edo } (x,y) = (x,0)\text{, non } y < -\sqrt{2} \text{ eta } x > 2 \text{ diren,}$$

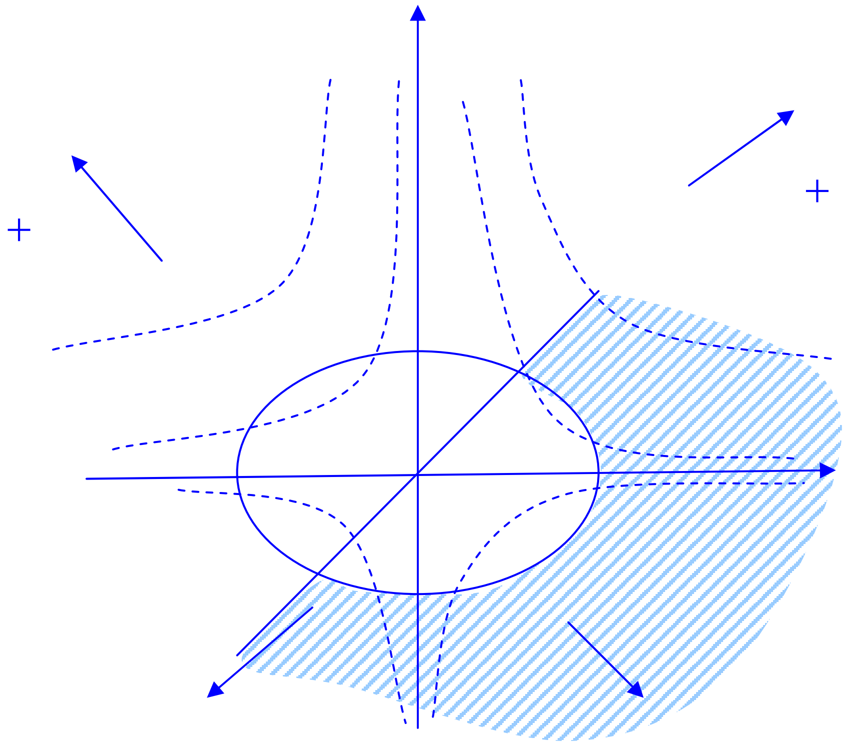
$$f_{11}(x,y) = 2y^2,$$

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{vmatrix} = -12x^2y^2,\ \ H_f(0,y) = 0 = H_f(x,0).$$

Orduan, baldintza nahikoak ez dira egiaztatzen. Kasu honetan, baldintza nahikoek ez digute ezer esaten.

Bestalde, $H_f(0,y) = 0 = H_f(x,0)$ denez, puntu horietan ez dakigu zer gertatzen den.

Maila-lerroak erabiliko ditugu erantzuna emateko.



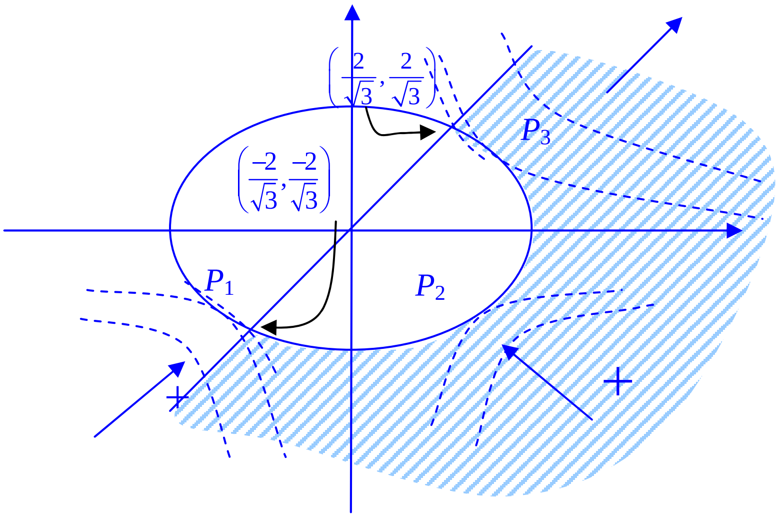
$\left\{(0,y): y<-\sqrt{2}\right\} \cup \left\{(x,0): x>2\right\}$ multzoko puntuetan *A* multzoarekiko minimo lokalak lortzen dira, *A* multzoko inguruneko puntuen irudiak handiagoak direlako.

Orain *A*-ren muga aztertuko dugu:

Muga-zati desberdinen ebaki-puntuak bukaeran aztertuko ditugu.

- $x=y$ zatian, maila-lerroak erabiliz, ez da ezer lortzen, maila-lerroak muga ebakitzean, alde batean puntuen irudiak handiagoak, eta bestaldean txikiagoak, direlako.

- $x^2+2y^2=4$ zatian, laugarren koadrantean ez da ezer lortzen, maila-lerroa ukitzailea den puntuan (hau da, P_2 puntuan) *A* multzoaren alde batean puntuen irudiak handiagoak, eta beste aldean txikiagoak, direlako. Lehenengo eta hirugarren koadrantean zer gertatzen den ikusteko, lagrangearraren bidez aurkituko ditugu maila-lerroak ukitzaileak diren elipseko puntuak. Bestalde, $(2,0)$ eta $\left(0,-\sqrt{2}\right)$ puntuetan minimo lokalak lortzen dira, *A* multzoko inguruneko puntuen irudiak handiagoak direlako (bi puntu horiek ere lagrangearra erabiliz irtengo dira).



$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2y^2+\lambda(x^2+2y^2-4)\,.$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)&=2xy^2+\lambda 2x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)&=2x^2y+\lambda 4y=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)&=x^2+2y^2-4=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}\lambda&=-2xy^2/2x\\ \lambda&=-2x^2y/4y\end{aligned}\right\}\Rightarrow -y^2=\frac{-x^2}{2}\Rightarrow 2y^2=x^2\,.$$

Hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $x=\pm\sqrt{2}$ dugu.

$$x=\sqrt{2}\Rightarrow y=\pm 1,$$
$$x=-\sqrt{2}\Rightarrow y=\pm 1.$$

Berdintza horietan lau puntu ditugu. Horrela, $P_1=\left(-\sqrt{2},-1\right)$ eta $\left(-\sqrt{2},1\right)$ puntuak ez daude A multzoan; $P_3=\left(\sqrt{2},1\right)$ puntua, berriz, A multzoan dago. Maila-lerroen bidez ikusten da $P_3=\left(\sqrt{2},1\right)$ puntuan ez dela ezer lortzen, puntu horretan ukitzailea den maila-lerroa kontuan izanik, A multzoaren alde batean puntuen irudiak handiagoak, eta beste aldean txikiagoak, direlako. Bestalde, $P_2=\left(\sqrt{2},-1\right)$ puntua lehen aztertu dugu, eta ikusi dugu puntu horretan ez dela A multzoarekiko muturrik lortzen.

Sistema ebaztean $2x$ adierazpenaz zatitu dugunez, izendatzaile hau zero denean, berriz ebatzi behar dugu sistema. Beraz, $x=0$ denean, berriz ebatzi behar dugu. Kasu horretan, hirugarren ekuaziotik $y=\sqrt{2}$ dugu ($y=-\sqrt{2}$ ez dugu hartuko, dagokion puntua multzoan ez dagoelako). Lehenengo ekuazioa egia ($0=0$) da eta bigarrenetik $\lambda=0$ dugu.

Horrela, $(x,y)=\left(0,-\sqrt{2}\right)$ puntuan muturra lor daiteke. Eta lehen esan dugun moduan, maila-lerroen bidez ikusten da puntu horretan minimo lokala lortzen dela.

Era berean, sistema berriz ebatziz, $(x,y)=(2,0)$ lortzen dugu. Maila-lerroak erabiliz, puntu horretan minimo lokala lortzen dela ikusten dugu.

- Bestalde, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ puntuan A multzoarekiko minimo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak handiagoak direlako. Eta $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ puntuan, ordea, ez da ezer lortzen. Maila-lerroak puntu horretan muga ebakitzean, A multzoko ingurunean bi alde daudelako, alde batean irudiak txikiagoak izanik, eta bestean, handiagoak.

ii) Maila-lerroak erabiliz ikusten da ez dela ez maximo eta ez minimo globalik lortzen A multzoarekiko.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2003ko otsaila

1. (9 puntu) Demagun $h(x,y) = \ln\left(f(x,y)\right) + \sqrt{\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2}$ funtzioa,

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2)\ ,\ f(2,1) = 9,\ f_1(2,1) = 1,\ f_2(2,1) = 1 \text{ eta } f(x,y) > 0\ \ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

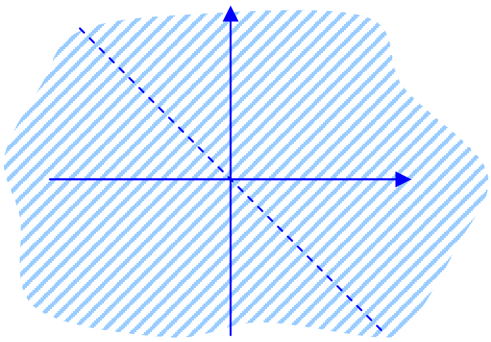
izanik.

i) Aurkitu eta irudikatu *h* funtzioaren *D* existentzia-eremua. Aurkitu eta irudikatu int*D*.

ii) Aztertu *h* funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(0,0)$ eta $(2,1)$ puntuetan. Aurkitu, existitzen badira, *h* funtzioaren deribatu partzialak puntu horietan.

iii) Aurkitu, existitzen badira, $\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2}$ funtzioaren deribatu partzialak $(1,1)$ puntuan, eta aztertu $\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2}$ funtzioaren diferentziagarritasuna $(1,1)$ puntuan.

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\}$ eta $\operatorname{int} D = D$ dira.



ii) Ondorioz, $(0,0) \notin D$ da. Beraz, *f* ez da jarraitua, ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia: $(0,0) \in D \cup \operatorname{fr} D$ da.

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0)\ ,\ \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D\,,$$

$$\left\{h\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\ln\left(f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to\ln\big(f(0,0)\big),\ f \text{ funtzioa jarraitua delako,}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\ ,\ \left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,$$

$$\left\{h\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\ln\left(f\left(\frac{1}{n},0\right)\right)+\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\ln\left(f\left(\frac{1}{n},0\right)\right)+1\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to\ln\big(f(0,0)\big)+1,$$

f funtzioa jarraitua delako.

Eta $\ln\big(f(0,0)\big)\neq\ln\big(f(0,0)\big)+1$ denez, *f* funtzioak ez du limiterik $(0,0)$ puntuan.

Orain $(2,1)$ puntua aztertuko dugu. Lehenik, $(2,1)\in\operatorname{int}D$ da. Horrez gainera, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ denez,

$$h_1(x,y)=\frac{1}{f(x,y)}f_1(x,y)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}}2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\frac{1(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2},$$

$$h_2(x,y)=\frac{1}{f(x,y)}f_2(x,y)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}}2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\frac{-1(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}.$$

.

Horrela, $h_1(x,y)$ eta $h_2(x,y)$ existitzen dira $(2,1)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(2,1)$ puntuan; izan ere, erroa, karratua, polinomioak eta $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ (funtzio jarraituak) agertzen dira biderkatzen, batzen, kentzen, zatitzen eta konposatzen, izendatzaileak zero ez izanik. Hortaz, *h* funtzioa diferentziagarria da $(2,1)$ puntuan. Eta *h* funtzioa diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Jarraitua denez, limitea du puntu horretan. Deribatu partzialak, puntua ordezkatuta aurkituko ditugu:

$$h_1(2,1)=\frac{1}{3}\ \text{eta}\ h_2(2,1)=\frac{-1}{3}.$$

iii) Orain, $D_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x+y\neq 0\}=D$ eta $(1,1)\in\operatorname{int}D_g$ dira. Konturatu $(1,1)$ puntuan arazoak daudela, $g(x,y)$ mekanikoki deribatzen badugu. Beraz, definizioa erabiliko dugu.

$$g_1(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h,1)-g(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\left(\frac{h}{2+h}\right)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{h}{2+h}\right|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{|h|}{|2+h|}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{(2+h)h},$$

$$\begin{cases} h>0, \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{(2+h)h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{(2+h)h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2+h}=\frac{1}{2}, \\ h<0, \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{(2+h)h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{(2+h)h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-1}{2+h}=\frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Eta $\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{2}$ denez, $\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{(2+h)h}$ ez da existitzen; hau da, $g_1(1,1)$ ez da existitzen. Horren ondorioz, g funtzioa ez da deribagarria $(1,1)$ puntuan; eta hortaz, ez da diferentziagarria $(1,1)$ puntuan.

Ikus dezagun $g_2(1,1)$ existitzen den.

$$g_2(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1,1+h)-g(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\left(\frac{-h}{2+h}\right)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\left(\frac{h}{2+h}\right)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{h}{2+h}\right|}{h}.$$

Limite hau ez denez existitzen, orduan, $g_2(1,1)$ ez da existitzen.

2. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2g(x^2,x^3+y^3)$ funtzioa, g funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g(1,2)=0$ eta $g_1(1,2)=-3$ izanik.

i) Definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa, $y=\varphi(x)$? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

ii) Difererentziala erabiliz, eta posible bada, kalkulatu gutxi gorabehera f funtzioaren aldaketa $(1,1)$ puntutik $(0,9,1,01)$ puntura igarotzerakoan. Kasu horretan, zer gertatzen zaio f funtzioaren balioari?

i) Lehenik, f funtzioaren existentzia-eremua $D=\mathbb{R}^2$ da. Eta $(1,1)\in \operatorname{int} D$ da.

1. $f(1,1)=1g(1,2)=0$.
2. f jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, funtzio polinomikoak eta g agertzen direlako konposatzen eta biderkatzen, eta funtzio polinomikoak jarraituak direlako eta g jarraitua delako ($g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ baita).
3. $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ denez,

$$f_2(x,y)=x^2((g_1(x^2,x^3+y^3))0+(g_2(x^2,x^3+y^3))3y^2)=3x^2y^2g_2(x^2,x^3+y^3)$$

existitzen da eta jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, funtzio polinomikoak eta g_2 (funtzio jarraituak) agertzen direlako konposatzen eta biderkatzen.

4. $f_2(1,1) = 3g_2(1,2)$.

Eta $g_2(1,2)$ kalkulatzeko, Eulerren teorema aplikatuko dugu, g funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa dela kontuan izanik:

$$1g_1(1,2) + 2g_2(1,2) = 2g(1,2).$$

Horrela, $g(1,2) = 0$ eta $g_1(1,2) = -3$ direnez, berdintzan ordezkatuz, $g_2(1,2) = \frac{3}{2}$ dugu.

Ondorioz, $f_2(1,1) = 3g_2(1,2) = \frac{9}{2} \neq 0$ da.

Hortaz, $f(x, y) = 0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa definitzen du. Eta f funtzioa $(1,1)$ puntuan diferentziagarria denez, orduan

$$\varphi'(1) = \frac{-f_1(1,1)}{f_2(1,1)}.$$

Kalkula dezagun $f_1(1,1)$:

$$f_1(x, y) = 2xg(x^2, x^3 + y^3)) + x^2((g_1(x^2, x^3 + y^3))2x + (g_2(x^2, x^3 + y^3))3x^2),$$

$$f_1(1,1) = 2g_1(1,2) + 3g_2(1,2) = -6 + \frac{9}{2} = \frac{-3}{2}.$$

Deribatu partzial hori eta lehen kalkulatutako deribatu partziala aurreko formulan ordezkatuz,

$$\varphi'(1) = \frac{1}{3}.$$

ii) f funtzioa $(1,1)$ puntuan diferentziagarria denez, orduan f funtzioaren diferentziala puntu horretan existitzen da eta hurbilketa hau lor dezakegu:

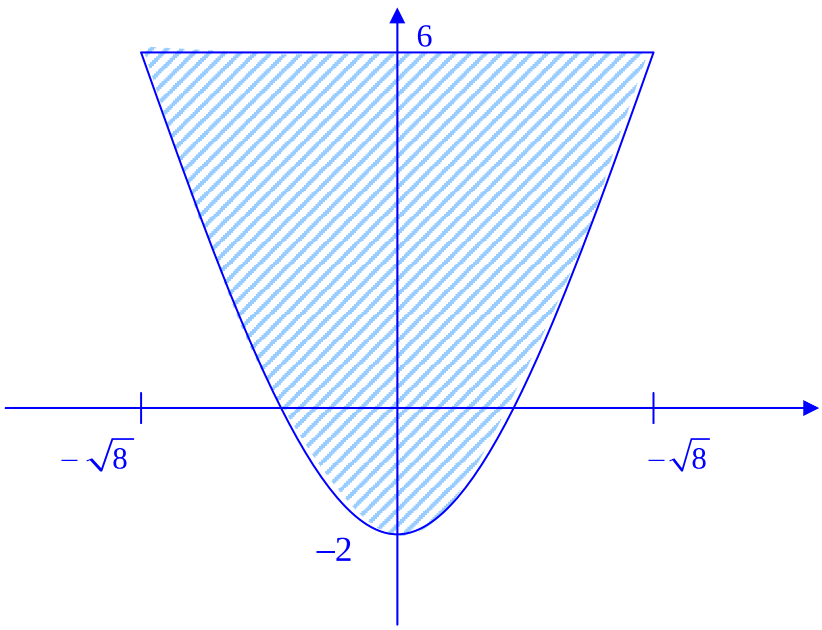
$$f(0'9, 1'01) - f(1,1) \approx -0'1 f_1(1,1) + 0'01 f_2(1,1) = 0'195.$$

Hortaz, $f(0'9, 1'01) - f(1,1) \approx 0'195 > 0$, eta f handitu egiten da.

3. (9 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2y$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2-2, y\leq 6\}$ multzoa.

i) Aurkitu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur globalak.



i) Azter dezagun *A*-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f\in C^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{cases} f_1(x,y)=2xy=0 & \Rightarrow 0=0 \\ f_2(x,y)=x^2=0 \Rightarrow x=0 & \end{cases}$$

Beraz, barrualdean, soilik lor daitezke mutur lokalak $(0,y)$ puntuetan, $-2<y<6$ izanik.

Baldintza nahikoak ($f\in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$$f_1(x,y)=0 \text{ eta } f_2(x,y)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,y)\text{, non } -2<y<6 \text{ den,}$$

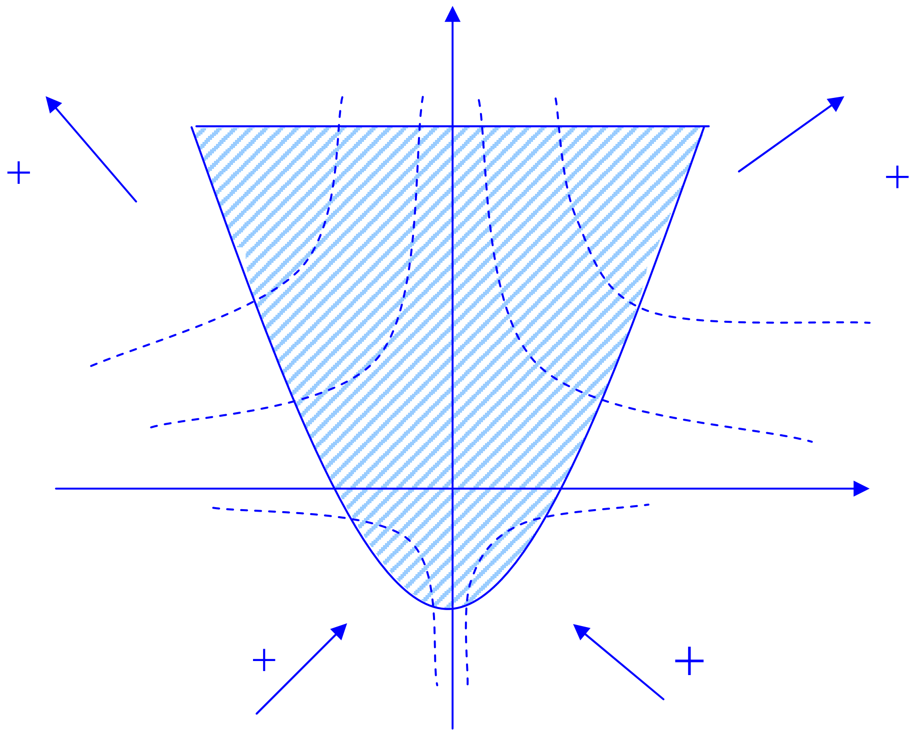
$$f_{11}(x,y)=2y,$$

$$H_f(x,y)=\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{vmatrix}=-4x^2,\ H_f(0,y)=0.$$

Beraz, baldintza nahikoak ez dira egiaztatzen. Kasu honetan, baldintza nahikoek ez digute ezer esaten.

Bestalde, $H_f(0,y)=0$ denez, puntu horietan ez dakigu zer gertatzen den.

Maila-lerroak erabiliko ditugu erantzuna emateko.

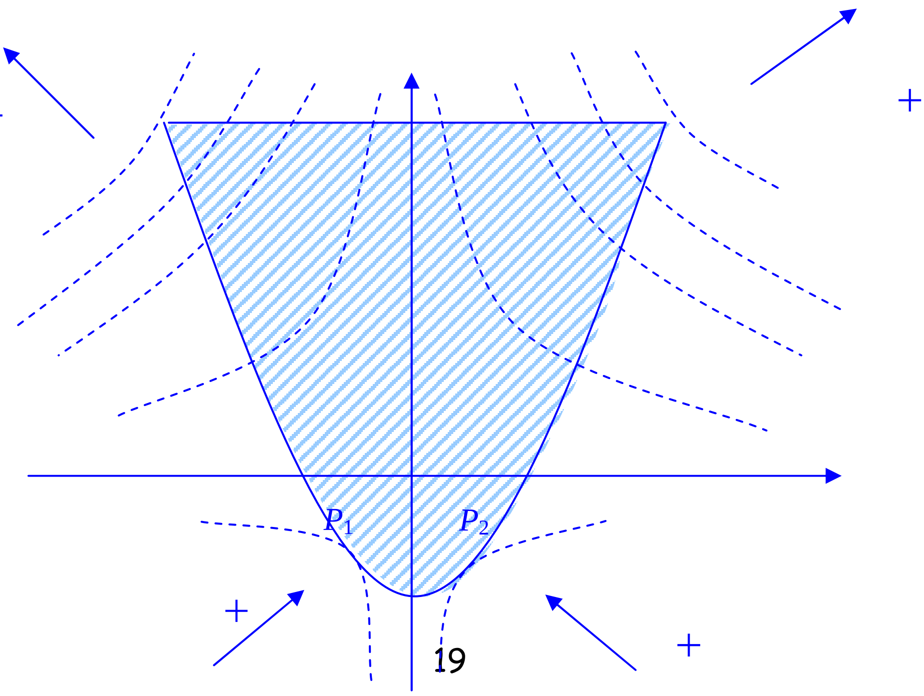


(0,0) puntuan ez da ezer lortzen, A multzoko inguruneko puntu batzuetan (hirugarren eta laugarren koadrantekoetan) irudiak txikiagoak direlako, eta beste puntu batzuetan (lehenengo eta bigarren koadrantekoetan), handiagoak.

Bestalde, $0 < y < 6$ betetzen duten $(0, y)$ puntuetan, aldiz, A multzoarekiko minimo lokalak lortzen dira, A multzoko inguruneko puntuen irudiak handiagoak direlako.

Eta $-2 < y < 0$ betetzen duten $(0, y)$ puntuetan, A multzoarekiko maximo lokalak lortzen dira, A multzoko inguruneko puntuen irudiak txikiagoak direlako.

Orain A-ren muga aztertuko dugu:



Muga-zati desberdinen ebaki-puntuak bukaeran aztertuko ditugu.

- $y=2$ zatian, maila-lerroak erabiliz, $(0,6)$ puntuan A multzoarekiko minimo lokala lortzen dela ikusten da, eta beste puntuetan ez dela ezer lortzen, maila-lerroak muga ebakitzean, alde batean irudiak handiagoak, eta beste aldean txikiagoak, direlako.

- $y=x^2-2$ parabola-zatian, berriz, maila-lerroak ukitzaileak diren bi puntu daude. Konturatu P_1 puntuan A multzoarekiko minimo lokala lortzen dela, A multzoko inguruneko puntuen irudiak handiagoak direlako. Era berean, P_2 puntuan A multzoarekiko maximo lokala lortzen da. Puntu horiek aurkitzeko lagrangearra erabiliko dugu:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2y+\lambda(y-x^2+2)\,.$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2xy-\lambda 2x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=-x^2+\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y-x^2+2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\lambda=2xy/2x\\ \lambda=-x^2\end{array}\right\}\Rightarrow y=-x^2\,.$$

Hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $x=\pm 1$ dugu.

$$x=1\Rightarrow y=-x^2=-1,$$
$$x=-1\Rightarrow y=-x^2=-1.$$

Ondorioz, $P_1=(-1,-1)$ eta $P_2=(1,-1)$.

Sistema ebaztean $2x$ adierazpenaz zatitu dugunez, izendatzaile hau zero denean, berriz ebatzi behar dugu sistema. Beraz, $x=0$ denean, berriz ebatzi behar dugu. Kasu horretan, hirugarren ekuaziotik $y=-2$ dugu. Lehenengo ekuazioa egia ($0=0$) da eta bigarrenetik $\lambda=0$ dugu. Horrela, $(x,y)=(0,-2)$ puntuan muturra lor daiteke. Maila-lerroen bidez ikusten da puntu horretan maximo lokala lortzen dela. Konturatu baldintza beharrezkoak erabiliz, puntu horretaz erreparatu garela.

- Ebaki-puntuak maila-lerroen bidez aztertuz, $\left(-\sqrt{8},6\right)$ eta $\left(\sqrt{8},6\right)$ puntuetan A multzoarekiko maximo lokalak lortzen dira, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako.

ii) Maila-lerroak erabiliz eta

$$f(x,0)=0<f\left(\sqrt{8},6\right)=48=f\left(-\sqrt{8},6\right),$$

$$f(x,0)=0>f(-1,-1)=f(1,-1)=-1$$

kontuan izanik, $P_1=(-1,-1)$ eta $P_2=(1,-1)$ puntuetan minimo globala lortzen da. Bestalde, $\left(-\sqrt{8},6\right)$ eta $\left(\sqrt{8},6\right)$ puntuetan maximo globala lortzen da.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2003ko ekaina

1. (9 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2-4}$.

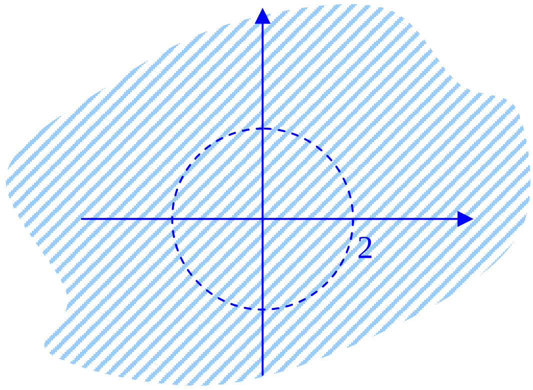
i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren D existentzia-eremua. Aurkitu int$D$ eta fr$D$ multzoak. Existentzia-eremua multzo irekia al da? Multzo itxia al da? Multzo trinkoa al da?

ii) Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(2,0)$ eta $(1,1)$ puntuetan.

iii) Kalkulatu, existitzen badira, $f_1(0,0)$ eta $f_2(0,0)$. Aztertu f funtzioaren diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2-4\neq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\neq 4\}$.

$\operatorname{int} D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\neq 4\}$, $\operatorname{fr}D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=4\}$.



Horrela, $\operatorname{int} D = D$ denez, irekia da. Eta $\operatorname{fr}D \not\subset D$ denez, D ez da itxia. Beraz, D ez da trinkoa.

ii) Ohartu $(2,0)\notin D$ dela. Ondorioz, f ez da jarraitua, ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria $(2,0)$ puntuan.

Bestalde, $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2-4}$ ez da existitzen, f funtzioa ∞-rantz edo $-\infty$-rantz doalako $(x,y)\to(2,0)$ denean.

Bukatzeko, $(1,1)\in \operatorname{int} D$ puntua aztertuko dugu.

$$f_x(x,y)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x(x^2+y^2-4)-\sqrt{x^2+y^2}\,2x}{(x^2+y^2-4)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y(x^2+y^2-4)-\sqrt{x^2+y^2}\,2y}{(x^2+y^2-4)^2}.$$

Deribatu partzialak existitzen dira $(1,1)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(1,1)$ puntuan, erroa, karratua eta polinomioak, hau da funtzio jarraituak, biderkatzen, kentzen, zatitzen eta konposatzen ari direlako, izendatzaileak zero ez izanik. Hortaz, f funtzioa diferentziagarria da $(1,1)$ puntuan. Diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Eta f funtzioa jarraitua denez $(1,1)$ puntuan, limitea du $(1,1)$ puntuan.

iii) Orain $(0,0)\in \operatorname{int} D$ aztertuko dugu. Deribatu horiek ezin dira kalkulatu aurreko formulak erabiliz. Beraz, definizioa erabili behar dugu.

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-\dfrac{\sqrt{0^2+0^2}}{0^2+0^2-4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{h^2+0^2}}{h^2+0^2-4}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{(h^2-4)h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{(h^2-4)h},\begin{cases} h>0,\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{(h^2-4)h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{(h^2-4)h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h^2-4}=\dfrac{-1}{4}, \\ h<0,\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{(h^2-4)h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{(h^2-4)h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-1}{h^2-4}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Eta $\frac{1}{4}\neq\frac{-1}{4}$ denez, limite hori ez da existitzen, hau da, $f_1(0,0)$ ez da existitzen. Horrela, f ez da deribagarria $(0,0)$ puntuan. Eta ondorioz, f ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

Ikus dezagun $f_2(0,0)$ existitzen den.

$$f_2(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{0^2+h^2}}{0^2+h^2-4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{(h^2-4)h}.$$

Limite hori ez denez existitzen, $f_2(0,0)$ ez da existitzen.

2. (4 puntu) $f(x,y)=(x-y)(x+y)+4(y-1)$ bada, definitzen al du $f(x,y)-4y+4=0$ ekuazioak (0,0) puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa?

$$f(x,y)-4y+4=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)+4(y-1)-4y+4=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=0\,.$$

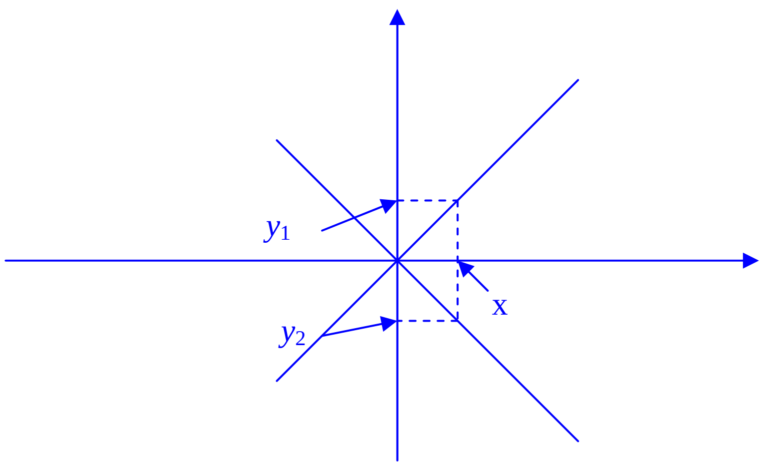
Ikus dezagun funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak egiaztatzen diren. Lehenik, $F(x,y)=(x-y)(x+y)$ funtzioaren existentzia-eremua $\mathbb{R}^2$ da eta $(0,0)\in \operatorname{int} D$ da.

1. $F(0,0)=0$.
2. F jarraitua da $(0,0)$ puntuaren ingurunean, polinomioa delako.
3. $F_2(x,y)=-1(x+y)+(x-y)1=-2y$ existitzen da eta jarraitua da $(0,0)$ puntuaren ingurunean, polinomioa delako.
4. $F_2(0,0)=0$.

Laugarren baldintza ez da egiaztatzen eta funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak ez dira egiaztatzen. Beraz, teoremak ez digu ezer esaten.

Erantzuna grafikoki emango dugu.

$$F(x,y)=0 \Leftrightarrow x-y=0 \text{ edo } x+y=0 \Leftrightarrow x=y \text{ edo } x=-y\,.$$



Konturatu y ez dela x aldagaiaren funtzio inplizitua, x finkatuta (irudikoa) bi y daudelako $f(x,y)=0$ izanik.

3. (3 puntu) Demagun $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $g\in C^2(\mathbb{R})$ eta $z=f(x,g(y))$. Kalkulatu

$$z_x z_{yx}-z_y z_{xx}\,.$$

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in C^2(\mathbb{R})$ direnez, deribatuak honela kalkula daitezke:

$$z_x=(f_1(x,g(y)))1+(f_2(x,g(y)))0=f_1(x,g(y)),$$

$$z_y = (f_1(x,g(y)))0 + (f_2(x,g(y)))g'(y) = (f_2(x,g(y)))g'(y),$$

$$z_{xx} = (f_{11}(x,g(y)))1 + (f_{12}(x,g(y)))0 = f_{11}(x,g(y)),$$

$$z_{yx} = [(f_{21}(x,g(y)))1 + (f_{22}(x,g(y)))0]g'(y) + (f_2(x,g(y)))0 = (f_{21}(x,g(y)))g'(y),$$

$$z_x z_{yx} - z_y z_{xx} = (f_1(x,g(y)))(f_{21}(x,g(y)))g'(y) - (f_2(x,g(y)))g'(y)(f_{11}(x,g(y))).$$

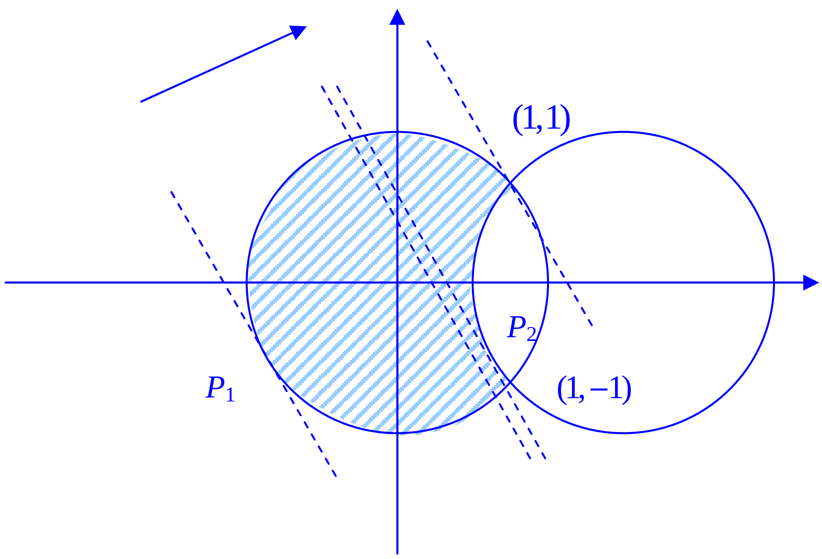
3. (9 puntu) Demagun $f(x,y) = y + 7x$ funtzioa eta

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2, (x-2)^2 + y^2 \ge 2\right\}$$

multzoa.

i) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur globalak.



i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$):

$$f_1(x,y) = 7 \ne 0 .$$

Beraz, barrualdean ez da muturrik lortzen.

Orain A-ren muga aztertuko dugu:

Muga-zati desberdinen ebaki-puntuak bukaeran aztertuko ditugu.

• Maila-lerroak erabiliz, P_1 puntuan A multzoarekiko minimo lokala lortzen da, A multzoko inguruneko puntuen irudiak handiagoak direlako. Bestalde, P_2 puntuan ez da ezer lortzen, puntu horretan ukitzailea den maila-lerroaren alde batean A multzoko inguruneko puntuen irudiak txikiagoak direlako, eta beste aldean, handiagoak.

Aurki dezagun P_1 puntua, lagrangearra erabiliz:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=y+7x+\lambda(x^2+y^2-2).$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=7+\lambda 2x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=1+\lambda 2y=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=x^2+y^2-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda=-7/2x\\ \lambda=-1/2y\end{array}\right\}\Rightarrow -7/2x=-1/2y\Rightarrow 7y=x.$$

Hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $y=\pm\sqrt{\frac{2}{50}}$ dugu. Baina $y=+\sqrt{\frac{2}{50}}$ ez dugu hartuko, dagokion puntua multzoan ez dagoelako. Horrela, $x=-7\sqrt{\frac{2}{50}}$ eta $P_1=\left(-7\sqrt{\frac{2}{50}},-\sqrt{\frac{2}{50}}\right)$.

Sistema ebaztean x eta y adierazpenez zatitu dugunez, izendatzaile hauek zero direnean, berriz ebatzi behar dugu sistema. Baina, $x=0$ denean, $7=0$ gezurrezko berdintza dugu. Eta era berean, $y=0$ denean, $1=0$.

Ebaki-puntuak aztertuz, $(1,1)$ eta $(1,-1)$ puntuetan maximo lokalak lortzen dira, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako.

ii) Maila-lerroak erabiliz, P_1 puntuan A multzoarekiko minimo globala lortzen dela eta $(1,1)$ puntuan maximo globala lortzen dela ikusten da.

MATEMATIKA IIko azterketa

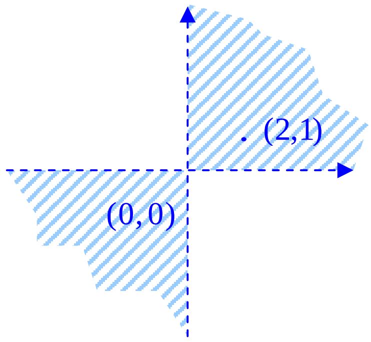
EZALeko 2004ko otsaila

1. (9 puntu)

i) Demagun $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}\,\ln\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2+1}\right)$ funtzioa. Aurkitu f funtzioaren D existentzia-eremua. Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(0,0)$ eta $(2,1)$ puntuetan.

ii) Demagun $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2+1}\right)$ funtzioa. Aurkitu g funtzioaren existentzia-eremua. Aztertu g funtzioaren deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan. Aurkitu, posible bada, g funtzioaren deribatu partzialak $(0,0)$ puntuan.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, xy>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x>0 \text{ eta } y>0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x<0 \text{ eta } <0\}$.



Ondorioz, $(0,0)\notin D$. Beraz, f ez da jarraitua, ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia: $(0,0)\in D\cup \text{fr}D$ da.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\ ,\ \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D\,,$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+1}\cdot\ln\left(\frac{2\left(1/n^2\right)}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+1}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to-\infty\,.$$

Ez doa zenbaki batera. Hortaz, ez da existizen f funtzioaren limitea $(0,0)$ puntuan.

Orain $(2,1) \in \operatorname{int} D$ puntua aztertuko dugu.

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+1}} \ln\left(\frac{2xy}{x^2+y^2+1}\right) + \sqrt{x^2+y^2+1}\,\frac{1}{\dfrac{2xy}{x^2+y^2+1}}\,\frac{2y(x^2+y^2+1)-2xy2x}{(x^2+y^2+1)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+1}} \ln\left(\frac{2xy}{x^2+y^2+1}\right) + \sqrt{x^2+y^2+1}\,\frac{1}{\dfrac{2xy}{x^2+y^2+1}}\,\frac{2x(x^2+y^2+1)-2xy2y}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Deribatu partzialak existitzen dira $(2,1)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(2,1)$ puntuan; izan ere, erroa, logaritmo nepertarra eta polinomioak, hau da funtzio jarraituak, biderkatzen, batzen, kentzen, zatitzen eta konposatzen ari dira, izendatzaileak zero ez izanik. Ondorioz, f funtzioa diferentziagarria da $(2,1)$ puntuan. Diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Deribatu partzial funtzioetan ordezkatuz,

$$f_1(2,1) = \frac{2}{\sqrt{6}} \ln\left(\frac{4}{6}\right) - \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \text{eta} \quad f_2(2,1) = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left(\frac{4}{6}\right) + 4\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

ii) Lehenik, g funtzioaren existentzia-eremua $\mathbb{R}^2$ da. Eta $g(x,y)$ mekanikoki deribatzen badugu, $(0,0)$ puntuan arazoak daude. Beraz, definizioa erabiliko dugu.

$$g_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-\sqrt{0}\cos 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+0^2}\cos 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}, \begin{cases} h>0, \ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 1 = 1, \\ h<0, \ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} -1 = -1. \end{cases}$$

Eta $1 \neq -1$ denez, limite hori ez da existitzen, hau da, $g_1(0,0)$ ez da existitzen. Beraz, g ez da deribagarria $(0,0)$ puntuan. Horrela, g ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

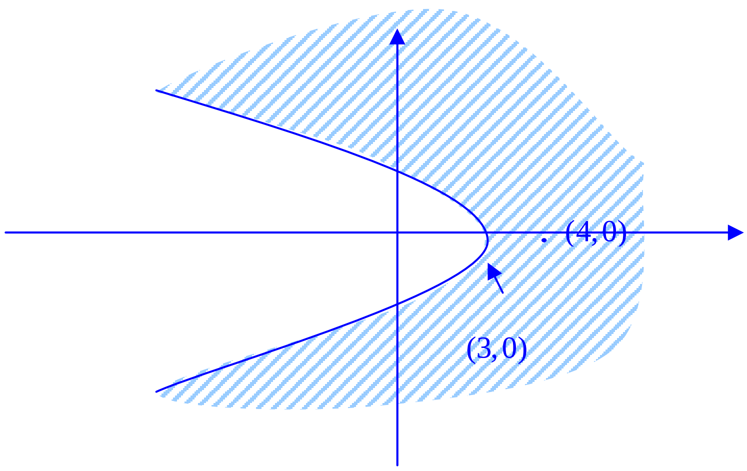
Ikus dezagun $g_2(0,0)$ existitzen den.

$$g_2(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,0+h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{0^2+h^2}\cos 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h}.$$

Limite hori ez denez existitzen, $g_2(0,0)$ ez da existitzen.

2. (3 puntu) Demagun $f(x,y)=\ln(x+y^2-3)$ funtzioa. Funtzio inplizituaren teoremaren baldintza nahikoak egiaztatzen al dira $f(x,y)=0$ ekuazioak $(4,0)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa definitzeko? Definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $(4,0)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa?

i) Lehenik, f funtzioaren existentzia-eremua $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y^2-3>0\right\}$ da.



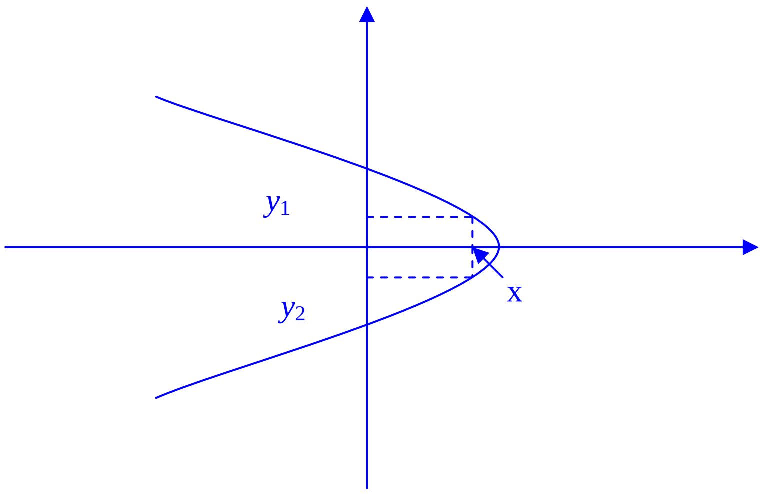
Ondorioz, $(4,0)\in \operatorname{int} D$ da.

1. $f(4,0)=\ln(4+0-3)=\ln 1=0$.
2. f funtzioa jarraitua da $(4,0)$ puntuaren ingurunean, puntu horren ingurunean $x+y^2-3>0$ delako eta $f(x,y)=0$ funtzioa polinomio baten eta logaritmo nepertarraren (hau da, funtzio jarraituen) konposaketa delako.
3. $f_2(x,y)=\dfrac{2y}{x+y^2-3}$ existitzen da eta jarraitua da $(4,0)$ puntuaren ingurunean, polinomioen zatiketa delako eta (4,0) puntuaren ingurunean izendatzailea zero ez delako.
4. $f_2(4,0)=0$.

Orduan, laugarren baldintza ez da egiaztatzen eta funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak ez dira egiaztatzen.

Grafikoki ikusiko dugu $f(x,y)=0$ ekuazioak $(4,0)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa definitzen duen.

$$\ln(x+y^2-3)=0 \Leftrightarrow x+y^2-3=1 \Leftrightarrow y^2=-x+4 \Leftrightarrow y^2=-(x-4).$$



Konturatu y ez dela x aldagaiaren funtzio inplizitua, x finkatuta (irudikoa) bi y daudelako $f(x,y)=0$ izanik.

---

3. (3 puntu) Demagun $f(x,y)=h\left(xtg\left(\frac{x}{y}\right), x^2+y^2-1\right)$ funtzioa, $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $h_2(0,0)=-1$ izanik.

Aurkitu $f_1(0,1)$ eta $f_2(0,1)$.

Agertzen diren funtzioak diferentziagarriak direnez, *f* funtzioa diferentziagarria da.

$$f_1(x,y)=\left(h_1(xtg\left(\frac{x}{y}\right), x^2+y^2-1)\right)\left(1tg\left(\frac{x}{y}\right)+x\left(1+tg^2\left(\frac{x}{y}\right)\right)\frac{1}{y}\right)+\left(h_2(xtg\left(\frac{x}{y}\right), x^2+y^2-1)\right)2x\,,$$

$$f_1(x,y)=\left(h_1(xtg\left(\frac{x}{y}\right), x^2+y^2-1)\right)\left(x\left(1+tg^2\left(\frac{x}{y}\right)\right)\frac{-x}{y^2}\right)+\left(h_2(xtg\left(\frac{x}{y}\right), x^2+y^2-1)\right)2y\,.$$

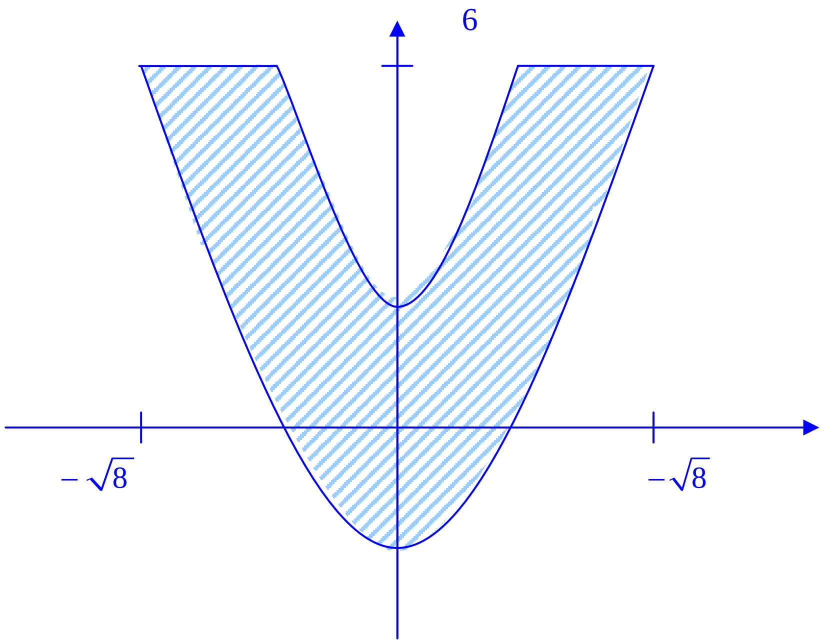
Hortaz, $f_1(0,1)=0$ eta $f_2(0,1)=-2$ dugu.

---

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=xy$ funtzioa eta $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -2\le x^2-y\le 2, y\le 6\right\}$ multzoa.

i) Aurkitu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur globalak.



i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = y = 0 \\ f_2(x,y) = x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0) \in \operatorname{int} A.$$

Beraz, barrualdean, $(0,0)$ puntuan soilik lor daiteke mutur lokala.

Baldintza nahikoak ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$$f_1(x,y) = 0 \text{ eta } f_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),$$

$$f_{11}(x,y) = 0.$$

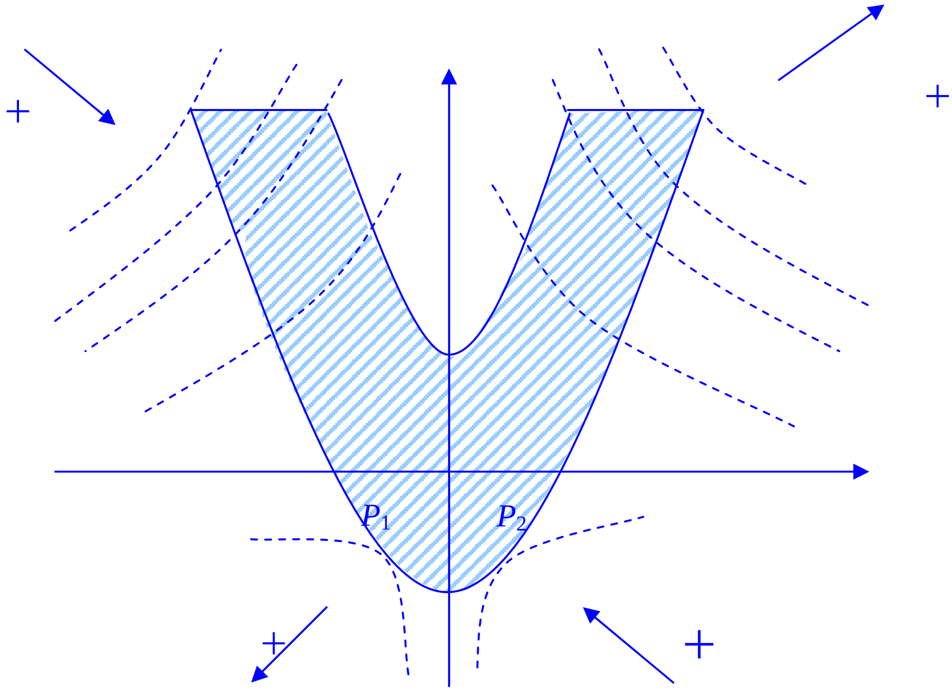
Ondorioz, baldintza nahikoak ez dira egiaztatzen. Kasu honetan, baldintza nahikoek ez digute ezer esaten.

Bestalde,

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \; H_f(0,0) = -1 < 0$$

denez, $(0,0)$ puntuan ez da muturrik lortzen. Horrela, barrualdean ez da muturrik lortzen

Orain A-ren muga aztertuko dugu:



Muga-zati desberdinen ebaki-puntuak bukaeran aztertuko ditugu.

• Maila-lerroak erabiliz, $-2 = x^2 - y$ parabolari dagokion zatian ez da ezer lortzen, maila-lerroak muga ebakitzean, alde batean A multzoko inguruneko puntuen irudiak txikiagoak direlako, eta beste aldean, handiagoak. Ohartu $(0,2)$ puntuan ere A multzoko inguruneko lehenengo koadranteko puntuen irudiak handiagoak direla, eta bigarren koadrantekoak, txikiagoak.

• $y = 6$ zatian ere ez da ezer lortzen, hemen ere, maila-lerroak muga ebakitzean, alde batean irudiak handiagoak, eta beste aldean txikiagoak, direlako.

• $x^2 - y = 2$ zatian, berriz, maila-lerroak ukitzaileak diren bi puntu daude. Konturatu P_1 puntuan A multzoarekiko maximo lokala lortzen dela, A multzoko inguruneko puntuen irudiak txikiagoak direlako. Eta P_2 puntuan, berriz, A multzoarekiko minimo lokala, A multzoko inguruneko puntuen irudiak handiagoak direlako. Puntu horiek aurkitzeko, lagrangearra erabiliko dugu:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 - y - 2) \, .$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y+\lambda 2x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=x+\lambda(-1)=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=x^2-y-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\lambda=-y/2x\\ \lambda=x\end{array}\right\}\Rightarrow -y/2x=x\Rightarrow -y=2x^2 .$$

Hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ dugu. Horrela,

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow y=x^2-2=\frac{-4}{3},$$
$$x=-\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow y=x^2-2=\frac{-4}{3}.$$

Orduan, $P_1=\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{-4}{3}\right)$ eta $P_2=\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{-4}{3}\right)$.

Sistema ebaztean $2x$ adierazpenaz zatitu dugunez, izendatzaile hau zero denean, berriz ebatzi behar dugu sistema. Beraz, $x=0$ denean, berriz ebatzi behar dugu. Kasu horretan, lehenengo ekuaziotik $y=0$ dugu. Hirugarrenean ordezkatuta, $-2=0$ dugu, eta hau kontraesana da. Horrela, beste soluziorik ez dago.

- Mugako $(2,6)$ eta $(-2,6)$ ebaki-puntuetan maila-lerroak erabiliz, puntu horietan ez da ezer lortzen, maila-lerroek multzoa ebakitzean, alde bateko inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako, eta beste aldean, handiagoak. Bestalde, $\left(-\sqrt{8},6\right)$ puntuan minimo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak handiagoak direlako. Eta $\left(\sqrt{8},6\right)$ puntuan maximo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako.

ii) Maila-lerroak erabiliz eta

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{-4}{3}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{2}<f\left(\sqrt{8},6\right)=6\sqrt{8},$$
$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{-4}{3}\right)=-\frac{4}{3}\sqrt{2}>f\left(-\sqrt{8},6\right)=-6\sqrt{8}$$

kontuan izanik, $\left(-\sqrt{8},6\right)$ puntuan minimo globala lortzen da eta $\left(\sqrt{8},6\right)$ puntuan, maximo globala.

MATEMATIKA IIko azterketa

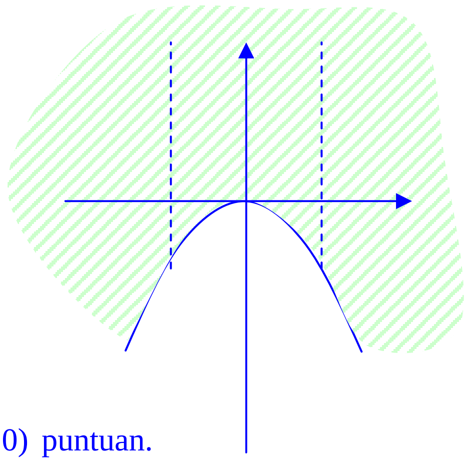
EZALeko 2004ko ekaina

1. (9 puntu) Demagun $f(x,y)=e^{\frac{1}{x^2-4}}\sqrt{x^2+y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu *f* funtzioaren existentzia-eremua.

ii) Aztertu f funtzioaren diferentziagarritasuna, deribagarritasuna, jarraitutasuna eta limitearen existentzia $(2,0)$, $(0,2)$ eta $(0,0)$ puntuetan. Kalkulatu deribatu partzialak, existitzen diren kasuetan.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y\geq 0,\ x^2-4\neq 0\}$.



ii) Ondorioz, $(2,0)\notin D$ da eta *f* ez da jarraitua $(2,0)$ puntuan.

Bestalde, $(2,0)\notin \operatorname{int} D$ denez, *f* ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria $(2,0)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia: $(2,0)\in D\cup \operatorname{fr}D$ da.

$$\left\{\left(2+\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(2,0)\ ,\ \left\{\left(2+\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,$$

$$\left\{f\left(2+\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{e^{\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2-4}}\sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to e^{\infty}=\infty\,.$$

Hortaz, *f* funtzioak ez du limiterik $(2,0)$ puntuan.

Orain $(0,2)\in\operatorname{int}D$ puntua aztertuko dugu.

$$f_x(x,y)=e^{\frac{1}{x^2-4}}\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}\sqrt{x^2+y}+e^{\frac{1}{x^2-4}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}2x\,,$$

$$f_y(x,y) = e^{\frac{1}{x^2-4}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}.$$

Horrela, deribatu partzialak existitzen dira $(0,2)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(0,2)$ puntuan; izan ere, erroa, funtzio esponentziala eta polinomioak (funtzio jarraituak) biderkatzen, batzen, zatitzen eta konposatzen ari dira, izendatzaileak $(0,2)$ puntuan zero ez izanik. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(0,2)$ puntuan. Diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Jarraitua denez, limitea du.

Bukatzeko, $(0,0)\in D$ puntua aztertuko dugu. Konturatu $(0,0)\notin \operatorname{int} D$ dela. Hortaz, f ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan. Bestalde, f funtzioa jarraitua da $(0,0)$ puntuan, funtzio jarraituak (polinomioak, funtzio esponentziala eta erroak) biderkatzen, zatitzen eta konposatzen ari direlako. Orduan, limitea du $(0,0)$ puntuan.

2. (6 puntu)

i) Demagun $u(x,y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ funtzioa,

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ eta } f(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

izanik, eta $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u \cdot F(x,y)$ ekuazioak definitzen duen $F(x,y)$ funtzioa. Aurkitu $F(x,y)$ funtzioa, $xy \neq 0$ denean.

ii) Demagun $g(x,y) = x^2 y + \sin(xy)$ funtzioa. Definitzen al du $g(x,y)=0$ ekuazioak $(1,0)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa?

i)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{xy-(x+y)y}{(xy)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{xy-(x+y)x}{(xy)^2},$$

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + x^3 yf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{-y^2}{(xy)^2} - y^2 xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) -$$

$$-xy^2 f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{-x^2}{(xy)^2} = (x^2y - y^2x)\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right) - xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right) =$$

$$xy(x-y)\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right) = (x-y)u = u \cdot F(x,y) \Leftrightarrow F(x,y) = x-y.$$

ii) Funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu. Lehenik, g funtzioaren existentzia-eremua $\mathbb{R}^2$ da eta $(1,0)\in \mathrm{int}(\mathbb{R}^2)$ da.

1. $g(1,0)=0$.
2. g jarraitua da $(1,0)$ puntuaren ingurunean, polinomioak eta sinua, hau da, funtzio jarraituak, batzen eta konposatzen agertzen direlako.
3. $g_2(x,y)=x^2+(\cos(xy))x$ existitzen da eta jarraitua da $(1,0)$ puntuaren ingurunean, polinomioak eta kosinua, hau da, funtzio jarraituak, batzen, biderkatzen eta konposatzen agertzen direlako.
4. $g_2(1,0)=1+(\cos 0)1=2\neq 0$.

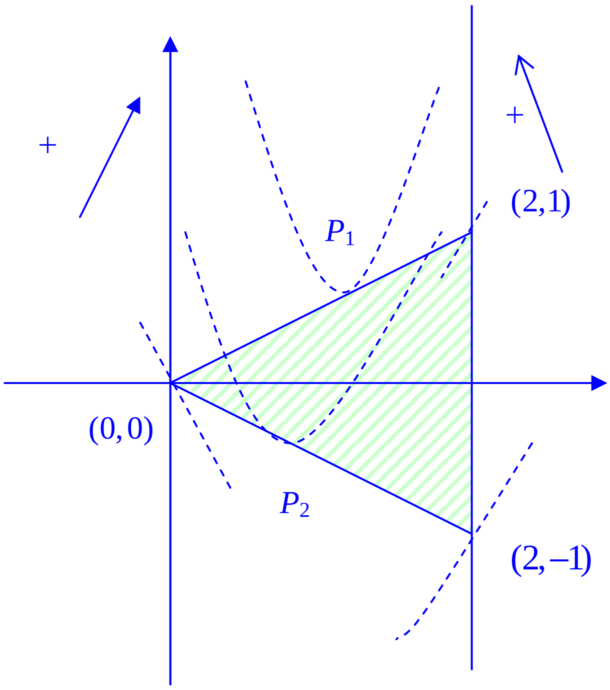
Beraz, teoremaren baldintzak egiaztatzen dira eta y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitua da.

---

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=y-(x-1)^2$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\leq 2, -x\leq 2y\leq x\}$ multzoa.

i) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur globalak.



i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$f_2(x,y)=1\neq 0\,.$$

Beraz, barrualdean ez da muturrik lortzen.

Orain A-ren muga aztertuko dugu:

- $-x=2y$ zatian ez da ezer lortzen. Konturatu maila kurba ukitzailea den puntuan (P_2 puntuan) ez dela muturrik lortzen, inguruneko A multzoko puntu batzuetan irudiak handiagoak direlako, eta beste batzuetan, txikiagoak.

- $2y=x$ zatian, aldiz, P_1 puntuan maximo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako. Puntu hori aurkitzeko, lagrangearra erabiliko dugu:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=y-(x-1)^2+\lambda(2y-x).$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=-2(x-1)-\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=1+2\lambda=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2y-x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\lambda=-2(x-1)\\ \lambda=-1/2\end{array}\right\}\Rightarrow -2(x-1)=-1/2\Rightarrow x=5/4.$$

Hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $y=\dfrac{5}{8}$ dugu. Hortaz, $P_1=\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{8}\right)$.

- Ebaki-puntuetan maila-lerroak erabiliz, $(0,0)$ eta $(2,-1)$ puntuetan minimo lokalak lortzen dira, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak handiagoak direlako. Eta $(2,1)$ puntuan ez da ezer lortzen. Konturatu puntu horretan maila-lerroak multzoa ebaki egiten duela; eta alde bateko inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direla, eta beste aldeko puntuetan, handiagoak.

ii) Maila-lerroak erabiliz, maximo globala $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{8}\right)$ puntuan lortzen da. Minimo globala, berriz, $(2,-1)$ puntuan, $f(2,-1)=-2<f(0,0)=-1$ baita.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZAL. 2005eko otsaila

1. (6 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ funtzioa.

i) Aurkitu, arrazoituz, f funtzioaren limitea ez den existitzen puntu bat. Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna puntu horretan eta $(1,2)$ puntuan.

ii) f diferentziagarria al da $(1,2)$ puntuan? Baiezko kasuan, hurbildu $f(1{,}01,1{,}98)-f(1,2)$.

i) $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ eta $(0,0)\in D\cup \mathrm{fr}D$ dira.

Azter dezagun f funtzioaren limitearen existentzia $(0,0)$ puntuan.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\ ,\ \left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{n\}_{n\in\mathbb{N}}\to\infty\,.$$

Segida hori ez doa zenbaki erreal batera. Beraz, f funtzioak ez du limiterik $(0,0)$ puntuan. Eta f funtzioa ez da jarraitua $(0,0)$ puntuan.

f funtzioa jarraitua da $(1,2)$ puntuan, funtzio polinomikoen zatiketa delako, (1,2) puntuan izendatzailea zero ez izanik.

ii) Orain $(1,2)\in \mathrm{int}\,D$ puntua aztertuko dugu.

$$f_x(x,y)=\frac{1(x^2+y^2)-(x-y)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2+2xy}{x^4+2x^2y^2+y^4},$$

$$f_y(x,y)=\frac{-1(x^2+y^2)-(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2-2xy}{x^4+2x^2y^2+y^4}.$$

Horrela, deribatu partzialak existitzen dira $(1,2)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(1,2)$ puntuan, polinomioak, hau da, funtzio jarraituak, zatitzen ari direlako, $(1,2)$ puntuan izendatzailea zero ez izanik. Ondorioz, f funtzioa diferentziagarria da $(1,2)$ puntuan.

Hortaz, ariketak eskatzen duen hurbilketa egin dezakegu:

$$f(1{,}01,1{,}98)-f(1,2)\approx 0{,}01f_1(1,2)-0{,}02f_2(1,2)=\frac{0{,}07}{25}+\frac{0{,}02}{25}=0{,}0036\,.$$

2. (8 puntu) Aurkitu, existitzen badira, funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak $(1,1)$ puntuan:

i) $f(x,y)=(x^2+y^2x^3-1)(x^2-y)$.

$$f_1(x,y)=(2x+3y^2x^2)(x^2-y)+(x^2+y^2x^3-1)2x,\quad f_1(1,1)=2,$$

$$f_2(x,y)=2yx^3(x^2-y)+(x^2+y^2x^3-1)(-1),\quad f_2(1,1)=-1.$$

ii) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x+y^2}{x^3y}}$.

$$f_1(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+y^2}{x^3y}}}\,\frac{x^3y-(x+y^2)3x^2y}{(x^3y)^2},\quad f_1(1,1)=\frac{-5}{2\sqrt{2}},$$

$$f_2(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+y^2}{x^3y}}}\,\frac{2yx^3y-(x+y^2)x^3}{(x^3y)^2},\quad f_2(1,1)=0.$$

iii) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{x+1}{y}\right)$.

$$f_1(x,y)=\frac{1}{\dfrac{x+1}{y}}\,\frac{y-(x+1)}{y^2}=\frac{1}{x+1},\quad f_1(1,1)=\frac{1}{2},$$

$$f_2(x,y)=\frac{1}{\dfrac{x+1}{y}}\,\frac{-(x+1)}{y^2}=\frac{-1}{y},\quad f_2(1,1)=-1.$$

iv) $f(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

Mekanikoki deribatzen badugu arazoak ditugunez, definizioa erabiliko dugu.

$$f_1(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(1+h-1)^2+(1-1)^2}-\sqrt{(1-1)^2+(1-1)^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h},\ \begin{cases} h>0,\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}1=1,\\ h<0,\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}-1=-1.\end{cases}$$

Eta $1\neq -1$ denez, limite hori ez da existitzen, hau da, $f_1(1,1)$ ez da existitzen.

Bestalde,

$$f_2(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1,1+h)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(1-1)^2+(1+h-1)^2}-\sqrt{(1-1)^2+(1-1)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}.$$

Limite hau ez denez existitzen, $f_2(1,1)$ ez da existitzen.

2. (6 puntu) Demagun $f(x,y)=g\left(\frac{x}{y}\right)g\left(\frac{y}{x}\right)$ funtzioa, $g\in C^1(\mathbb{R})$ eta $g(x)\neq g\left(\frac{1}{x}\right)$ izanik, $x\neq\pm 1$ denean.

i) *f* homogeneoa al da? Homogeneoa bada, esan maila.

ii) $g(2)=0$ eta $g'(2)\neq 0$ badira, definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $(2,1)$ puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua? Erantzuna baiezkoa bada, kalkulatu $\varphi'(2)$.

iii) $g(1)=0$ eta $g'(1)\neq 0$ badira, definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $(2,2)$ puntuaren ingurunean $y=\psi(x)$ funtzio inplizitua? Erantzuna baiezkoa bada, kalkulatu $\psi'(2)$.

i) Definizioa erabiliz,

$$f(tx,ty)=g\left(\frac{tx}{ty}\right)g\left(\frac{ty}{tx}\right)=g\left(\frac{x}{y}\right)g\left(\frac{y}{x}\right)=f(x,y)=t^0 f(x,y).$$

Beraz, *f* funtzioa 0. mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Ikus dezagun funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak egiaztatzen diren. Lehenik, $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0,\, x\neq 0\right\}$ eta $(2,1)\in\operatorname{int}(D)$ dira.

1. $f(2,1)=g\left(\frac{2}{1}\right)g\left(\frac{1}{2}\right)=g(2)g\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

2. *f* funtzioa jarraitua da $(2,1)$ puntuaren ingurunean, *g* funtzioa eta funtzio polinomikoak (funtzio jarraituak) agertzen direlako biderkatzen, zatitzen eta konposatzen, izendatzaileak zero ez izanik. Ohartu *g* funtzioa jarraitua dela $g\in C^1(\mathbb{R})$ delako.

3. $f_2(x,y)=\left(g'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\frac{-x}{y^2}g\left(\frac{y}{x}\right)+\left(g\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(g'\left(\frac{y}{x}\right)\right)\frac{1}{x}$ existitzen da eta jarraitua da $(2,1)$ puntuaren ingurunean, g, g' eta polinomioak agertzen direlako batzen, zatitzen, biderkatzen eta konposatzen, izendatzaileak zero ez izanik. Konturatu g eta g' jarraituak direla $g\in C^1(\mathbb{R})$ delako.

4. $f_2(2,1)=(g'(2))(-2)g\left(\frac{1}{2}\right)+(g(2))\left(g'\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{1}{2}=-2(g'(2))\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right).$

Bestalde, $g\left(\frac{1}{2}\right)\neq g(2)$ eta $g(2)=0$ direnez, $g\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$ da. Horrela,

$$f_2(2,1)=-2(g'(2))\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)\neq 0.$$

Teoremaren baldintzak egiaztatzen dira eta erantzuna baiezkoa da.

Horrez gainera, *f* funtzioa (2,1) puntuan diferentziagarria denez,

$$\varphi'(2)=\frac{-f_1(2,1)}{f_2(2,1)}.$$

Kalkula dezagun $f_1(2,1)$.

$$f_1(x,y)=\left(g'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\frac{1}{y}g\left(\frac{y}{x}\right)+\left(g\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(g'\left(\frac{y}{x}\right)\right)\frac{-y}{x^2},\ f_1(2,1)=(g'(2))\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

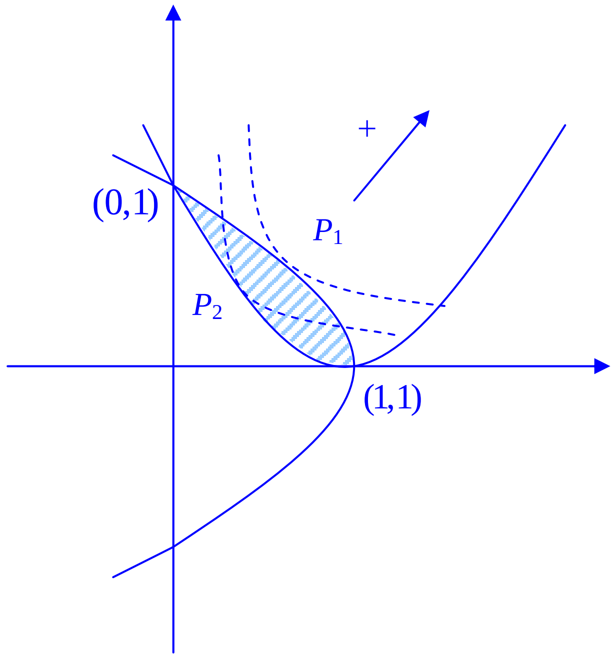
Horrela, $\varphi'(2)=\dfrac{-f_1(2,1)}{f_2(2,1)}=-\dfrac{(g'(2))\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{-2(g'(2))\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\dfrac{1}{2}.$

iii) Orain $f_2(2,2)=0$ denez, teoremak ez digu ezer esaten. Bestalde, grafikoki ezin dugu erantzun, grafikoa nolakoa den ez dakigu eta. Ondorioz, ezin dugu ziurtatu $f(x,y)=0$ ekuazioak $(2,2)$ puntuaren ingurunean funtzio inplizitua definitzen duenik.

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=xy$ eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y^2\leq 1-x,\ y\geq(x-1)^2\}$.

i) Aurkitu itzazu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur globalak.



i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{cases} f_1(x,y) = y = 0 \\ f_2(x,y) = x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)\,.$$

Eta $(0,0) \notin \operatorname{int} A$ denez, barrualdean ez da lortzen muturrik.

Orain A-ren muga aztertuko dugu:

Muga-zati desberdinen ebaki-puntuak, $(0,1)$ eta $(1,0)$ puntuak, bukaeran aztertuko ditugu.

• $y = (x-1)^2$ zatian, maila-lerroak erabiliz, muturrik ez da lortzen, maila-lerroa ukitzailea den puntuan (P_2 puntuan) ez delako muturrik lortzen: inguruneko A multzoko puntu batzuetan irudiak handiagoak dira, eta beste batzuetan, txikiagoak.

• Orain $y^2 = 1 - x$ aztertuko dugu. Maila-lerroak erabiliz, P_1 puntuan maximo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako. Puntu hori aurkitzeko, lagrangearra erabiliko dugu:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(y^2 - 1 + x)\,.$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=x+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y^2-1+x=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\lambda=-y\\ \lambda=-x/2y\end{array}\right\}\Rightarrow y=x/2y\Rightarrow 2y^2=x\,.$$

Hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ dugu. Lehenengo koadrantean gaudenez, $y=\sqrt{\frac{1}{3}}$ da. Eta $2y^2=x$ denez, $x=\frac{2}{3}$ da. Horrela, $(x,y)=\left(\frac{2}{3},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=P_1$.

Era berean, $2y=0$ denean, berriz ebatzi behar dugu sistema. Kasu horretan, $(x,y)=(1,0)$ dugu. Puntu hori muga-zati desberdinen ebaki-puntua denez, bukaeran aztertuko dugu.

• Ebaki-puntuetan maila-lerroak erabiliz, (1,0) eta (0,1) puntuetan minimo lokalak lortzen dira, inguruneko *A* multzoko puntuetan irudiak handiagoak direlako.

ii) Maila-lerroak erabiliz ikusten da, maximo globala $P_1=\left(\frac{2}{3},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ puntuan lortzen dela. Minimo globala, berriz, (1,0) eta (0,1) puntuetan, $f(1,0)=0=f(0,1)$ delako.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2005eko ekaina

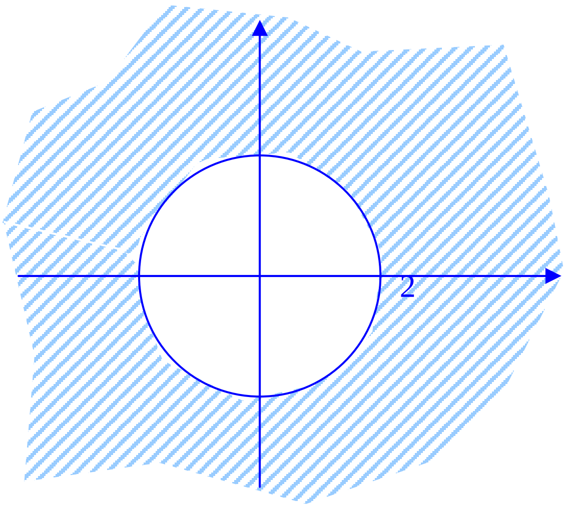
1. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$.

i) Aurkitu eta irudikatu *f* funtzioaren *D* eremua. Esan *D* irekia, itxia edo trinkoa den.

ii) Aurkitu $f_1(x,y)$ eta $f_2(x,y)$ deribatu partzialak int*D* multzoan.

iii) Aztertu $g(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(0,2)$ eta $(2,0)$ puntuetan. Deribagarria den puntuetan, kalkulatu $g(x,y)$ funtzioaren deribatu partzialen balioak.

i) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4\geq 0\right\}$.



$\operatorname{int} D = D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4>0\right\}$ eta $\operatorname{fr}D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4=0\right\}$.

Ondorioz, $\operatorname{int} D\neq D$ denez, *D* ez da irekia. Eta $\operatorname{fr}D\subset D$ denez, *D* itxia da. Bestalde, *D* ez da bornatua. Beraz, *D* ez da trinkoa.

ii) $f_1(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-4}}2x$ eta $f_2(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-4}}2y$.

iii) Lehenik, $(2,2) \in \operatorname{int} D$ da.

$$g_1(x,y) = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-4}}2x}{x^2+y^2-4} = \frac{-x}{(x^2+y^2-4)\sqrt{x^2+y^2-4}},$$

$$g_2(x,y) = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-4}}2y}{x^2+y^2-4} = \frac{-y}{(x^2+y^2-4)\sqrt{x^2+y^2-4}}.$$

Horrela, deribatu partzialak existitzen dira $(2,2)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(2,2)$ puntuan; izan ere, polinomioak eta erroa (funtzio jarraituak) zatitzen, biderkatzen eta konposatzen ari direlako, izendatzailea zero ez izanik. Hortaz, g funtzioa diferentziagarria da $(2,2)$ puntuan. Diferentziagarria denez, jarraitua eta deribagarria da. Jarraitua denez, limitea du.

Orain $(0,2)$ puntua aztertuko dugu.

Konturatu $(0,2) \notin D$ dela. Beraz, g funtzioa ez da jarraitua, ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria puntu horretan.

Azter dezagun limitearen existentzia: $(0,2) \in D \cup frD$ da. Baina ez da existitzen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$, funtzioak ∞-rantz jotzen duelako $(x,y) \to (0,2)$ denean.

2. (5 puntu) Demagun $f(x,y) = g\left(x^2, \dfrac{x-2y}{x}\right)$ funtzioa, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g_1(4,0) = 0$ eta $g_2(4,0) = 4$ izanik. Esan ezazu, arrazoituz, $f(2+h, 1+h) > f(2,1)$ egiazkoa edo gezurrezkoa den, $h > 0$ nahiko txikia denean.

Ohartu f funtzioa (4,0) puntuan diferentziagarria dela, agertzen diren funtzioak (polinomioak eta $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$) diferentziagarriak direlako, izendatzaileak zero ez izanik. Hortaz,

$$f(2+h,1+h) - f(2,1) = hf_1(2,1) + hf_2(2,1)$$

dugu. Eta

$$f_1(x,y) = 2xg_1\left(x^2, \frac{x-2y}{x}\right) + \frac{x-(x-2y)}{x^2} g_2\left(x^2, \frac{x-2y}{x}\right),$$

$$f_2(x,y) = \frac{-2}{x} g_2\left(x^2, \frac{x-2y}{x}\right)$$

direnez, $f_1(2,1) = 2$ eta $f_2(2,1) = -4$ dira. Horrela,

$$f(2+h,1+h) - f(2,1) = hf_1(2,1) + hf_2(2,1) = -2h < 0$$

da. Horren ondorioz,

$$f(2+h,1+h) < f(2,1)$$

da eta kontrako desberdintza gezurrezkoa da.

3. (5 puntu) Demagun 2. mailako $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ funtzio homogeneoa, $f(3,3) = 18$ eta $f_1(3,3) = -2$ izanik. i) Kalkulatu $f(1,1)$ eta $f_1(1,1) + f_2(1,1)$. ii) Demagun $F(x,y) = f(x,y) - k$ funtzioa. Existitzen al da k parametroaren baliorik, $F(x,y) = 0$ ekuazioak $(3,3)$ puntuaren ingurunean $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzeko? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(3)$.

i) Definizioa erabiliz,

$$f(3,3) = 3^2 f(1,1) \Leftrightarrow 18 = 9 f(1,1) \Leftrightarrow f(1,1) = 2 .$$

Bestalde, *f* funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa denez, Eulerren teorema aplikatuz,

$$f_1(1,1) + f_2(1,1) = 2 f(1,1) = 4 .$$

ii) Ikus dezagun funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak egiaztatzen diren. Lehenik, $F(x,y) = f(x,y) - k$ funtzioaren existentzia-eremua $\mathbb{R}^2$ da eta $(3,3) \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^2)$ da.

1. $F(3,3) = f(3,3) - k = 18 - k = 0 \Leftrightarrow k = 18$.

2. *F* jarraitua da $(3,3)$ puntuaren ingurunean, agertzen diren funtzioak jarraituak direlako. Izan ere, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ denez, *f* funtzioa jarraitua da, eta funtzio konstanteak jarraituak dira.

2. $F_2(x,y) = f_2(x,y)$ existitzen da. Horrez gainera, $F_2(x,y)$ jarraitua da $(3,3)$ puntuaren ingurunean, $f_2(x,y)$ funtzio jarraitua delako ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ baita).

4. $F_2(3,3) = f_2(3,3) \neq 0$?

Aplika dezagun Eulerren teorema, *f* funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa dela kontuan izanik:

$$3 f_1(3,3) + 3 f_2(3,3) = 2 f(3,3) \Leftrightarrow -6 + 3 f_2(3,3) = 36 \Leftrightarrow f_2(3,3) = 14 .$$

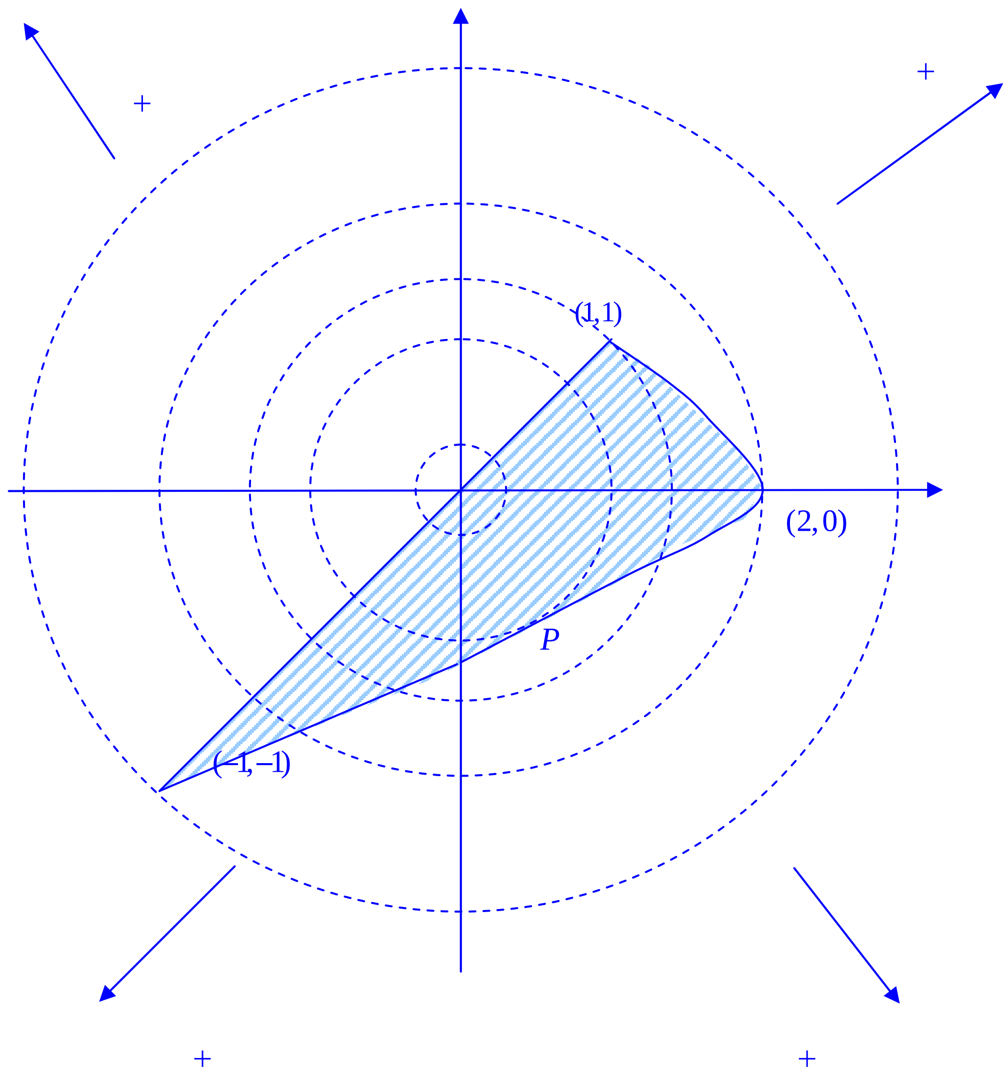
Beraz, $F_2(3,3) = f_2(3,3) = 14 \neq 0$.

Hortaz, teoremaren baldintzak egiaztatzen dira eta $k = 18$ existitzen da. Horrez gainera, F funtzioa $(3,3)$ puntuan diferentziagarria denez, $\varphi'(3) = \dfrac{-F_1(3,3)}{F_2(3,3)} = \dfrac{-f_1(3,3)}{f_2(3,3)} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$ da.

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = x^2 + y^2$ eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \leq x,\ x \leq 2 - y^2\}$.

i) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur globalak.



i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2x = 0 \\ f_2(x,y) = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)\,.$$

Eta $(0,0) \notin \operatorname{int} A$ denez, barrualdean ez da lortzen muturrik.

Orain *A*-ren muga aztertuko dugu:

Muga-zati desberdinen ebaki-puntuak bukaeran aztertuko ditugu.

• $x = 2 - y^2$ zatian maila-lerroak erabiliz, $(2,0)$ puntuan maximo lokala lortzen da eta beste muturrik ez da lortzen. Maila-lerroa ukitzailea den beste puntuan (*P* puntuan) ez da muturrik lortzen. Konturatu *P* puntuaren inguruneko *A* multzoko puntu batzuetan irudiak handiagoak direla, eta beste batzuetan, txikiagoak.

• Orain $y = x$ aztertuko dugu. Maila-lerroak erabiliz, $(0,0)$ puntuan minimo lokala lortzen da, inguruneko *A* multzoko puntuetan irudiak handiagoak direlako.

Beraz, ariketa honetan lagrangiarra erabiltzea ez da beharrezkoa. Norbait ez bada konturatzen zati honetan zer gertatzen den, lagrangiarra erabiliko luke:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - x)\,.$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= 2y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= y - x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda &= 2x \\ \lambda &= -2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -y\ \ .$$

Hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $y = 0$ da. Beraz, $(0,0)$ hautagaia lortuko luke. Maila-lerroak erabiliz, puntu horretan minimo lokala lortzen dela ikusiko luke.

• Mugako $(1,1)$ ebaki-puntuan ez da muturrik lortzen, puntu horretatik igarotzen den maila-lerroak multzoa ebakitzean, *A* multzoko inguruneko alde bateko puntuetan irudiak handiagoak, eta beste aldekoetan txikiagoak, direlako. Eta $(-2,-2)$ puntuan, ordea, maximo lokala lortzen da, inguruneko *A* multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako.

ii) Maila-lerroak erabiliz, $(0,0)$ puntuan minimo globala lortzen da. Maximo globala, aldiz, $(-2,-2)$ puntuan ($f(-2,-2) > f(2,0)$ baita).

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2006ko otsaila

1. Demagun

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{(x-1)y}}{x-y}$$

funtzioa.

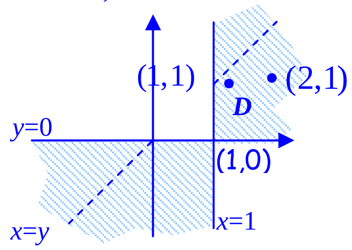
i) Kalkulatu eta irudikatu *f* funtzioaren existentzia-eremua.

ii) Esan existentzia-eremua irekia, itxia edo trinkoa den.

iii) Aztertu *f* funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna eta deribagarritasuna $(1,1)$ eta $(2,1)$ puntuetan.

iv) *f* diferentziagarria al da $(2,1)$ puntuan? Baiezko kasuan, hurbildu $f(2{,}05, 0{,}9)-f(2,1)$.

i) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-1)y\geq 0, x\neq y\right\}$.



ii)

$$\mathrm{fr}D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ y=0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x=y, x\notin[0,1]\right\}.$$

Ondorioz, *D* ez da itxia eta ez da irekia. Ez denez itxia, ez da trinkoa.

iii) Konturatu $(1,1)\notin D$ dela. Beraz, *f* ez da jarraitua eta ez da deribagarria $(1,1)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia: $(1,1)\in D\cup\mathrm{fr}D$ da.

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,1) \text{ eta } \left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,$$

$$\left\{f\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\sqrt{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to\infty.$$

Horrela, ez da existitzen *f*-ren limitea $(1,1)$ puntuan.

f funtzioa jarraitua da $(2,1)$ puntuan, agertzen diren funtzioak (erroa eta polinomioak) jarraituak direlako, eta horiek biderkatzen, zatitzen eta konposatzen ari direlako, izendatzailea zero ez izanik. Eta

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = 1 .$$

Bestalde,

$$f_1(x,y) = \frac{\dfrac{y(x-y)}{2\sqrt{(x-1)y}} - \sqrt{(x-1)y}}{(x-y)^2} \quad \text{eta} \quad f_1(2,1) = -\frac{1}{2},$$

$$f_2(x,y) = \frac{\dfrac{(x-1)(x-y)}{2\sqrt{(x-1)y}} + \sqrt{(x-1)y}}{(x-y)^2} \quad \text{eta} \quad f_2(2,1) = \frac{3}{2}.$$

iv) Deribatu partzialak existitzen dira $(2,1)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(2,1)$ puntuan; izan ere, erroak eta polinomioak (funtzio jarraituak) agertzen dira biderkatzen, batzen, kentzen, zatitzen eta konposatzen, izendatzaileak zero ez izanik. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(2,1)$ puntuan.

Bestalde,

$$df(2,1)(h_1,h_2) = f_1(2,1)h_1 + f_2(2,1)h_2 = -\frac{1}{2}h_1 + \frac{3}{2}h_2$$

berdintza eta $f(2+h_1,1+h_2) - f(2,1) \simeq df(2,1)(h_1,h_2)$ kontuan izanik,

$$f(2{,}05, 0{,}9) - f(2,1) \simeq -\frac{0{,}05}{2} + \frac{3(-0{,}1)}{2} = -0{,}175 .$$

2. Demagun $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} g\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ funtzioa, $g \in C^1(\mathbb{R})$ funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa eta $g(2) = 2$ izanik.

i) f funtzioa homogeneoa al da? Baiezko kasuan, esan maila.

ii) Kalkulatu $g'(2)$, Eulerren teorema f funtzioari eta $(2,2)$ puntuari aplikatuz.

iii) Frogatu $f(x,y) = 4$ ekuazioak $(2,2)$ puntuaren ingurunean $y = \varphi(x)$ funtzioa inplizituki definitzen duela. Kalkulatu $\varphi'(2)$.

i) Definizioa erabiliz,

$$f(tx,ty) = \frac{t^2x^2}{ty} g\left(\frac{t^2x^2}{ty}\right) = t\left(\frac{x^2}{y}\right)t^3 g\left(\frac{x^2}{y}\right) = t^4 f(x,y) .$$

Beraz, *f* funtzioa 4. mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Kalkula ditzagun *f* funtzioaren deribatuak:

$$f_1(x,y)=\frac{2x}{y}g\left(\frac{x^2}{y}\right)+\frac{2x^3}{y^2}g'\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad \text{eta} \quad f_1(2,2)=4+4g'(2),$$

$$f_2(x,y)=-\frac{x^2}{y^2}g\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{x^4}{y^3}g'\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad \text{eta} \quad f_2(2,2)=-2-2g'(2).$$

Eta Eulerren teorema aplikatuz,

$$4\left(\frac{x^2}{y}g\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)=x\left(\frac{2x}{y}g\left(\frac{x^2}{y}\right)+\frac{2x^3}{y^2}g'\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)+y\left(-\frac{x^2}{y^2}g\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{x^4}{y^3}g'\left(\frac{x^2}{y}\right)\right),$$

$$16=8+8g'(2)-4-4g'(2),$$

$$16=4+4g'(2),$$

$$g'(2)=3.$$

iii) Horretarako funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu.

Demagun $F(x,y)=f(x,y)-4$ funtzioa.

1. $f(2,2)-4=2g(2)-4=0.$

2. F jarraitua da $(2,2)$ puntuaren ingurunean, funtzio jarraituak (polinomioak eta $g\in C^1(\mathbb{R})$) zatitzen, biderkatzen, zatitzen, konposatzen eta kentzen ari direlako, izendatzaileak zero ez izanik.

3. $F_2(x,y)=-\frac{x^2}{y^2}g\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{x^4}{y^3}g'\left(\frac{x^2}{y}\right)$ existitzen da eta jarraitua da $(2,2)$ puntuaren ingurunean.

4. $F_2(2,2)=-g(2)-2g'(2)=-8\neq 0$.

Beraz, $f(x,y)=4$ ekuazioak $(2,2)$ puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki definitzen du.

Eta $\varphi'(2)=-\frac{F_1(2,2)}{F_2(2,2)}=-\frac{4+4g'(2)}{-8}=2$.

3. Demagun $f(x,y)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2$ eta $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y^2-x\le 1;\, y^2+x\le 1\right\}$. Kalkulatu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur lokalak eta *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur globalak.

A-ren barrualdea aztertzeko:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-3=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow (x,y)=\left(\frac{3}{2},0\right)\notin \operatorname{int} A.$$

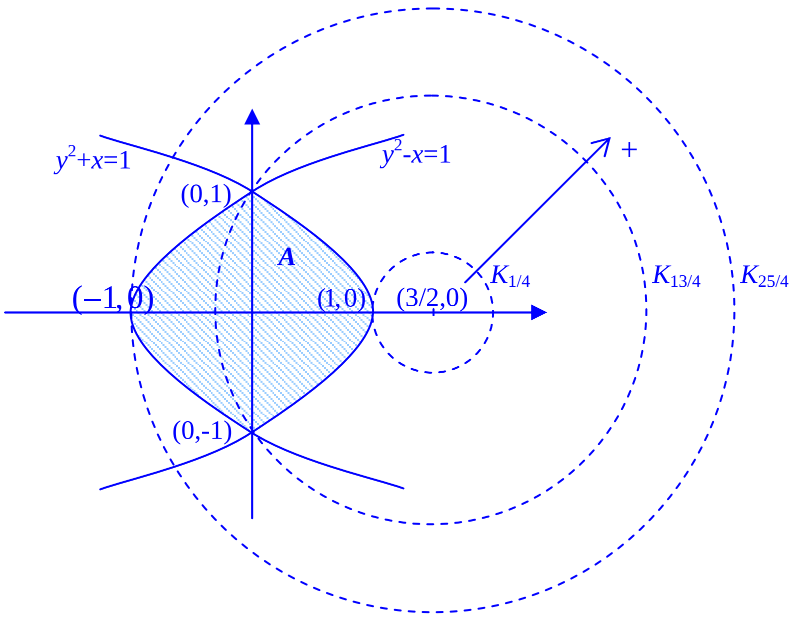
Beraz, barrualdean ez da lortzen muturrik.

Azter dezagun *A*-ren muga.

Ariketa honetan, maila-lerroak erabiliz, mugako mutur guztiak lor daitezke.

Mugako $(1,0)$ puntuan, A-rekiko minimo lokala lortzen da, eta $(-1,0)$ puntuan, *A*-rekiko maximo lokala.

:



Mugako $(0,1)$ eta $(0,-1)$ ebaki-puntuetan ez da muturrik lortzen, maila-lerroak A multzoa ebakitzean, *A* multzoko inguruneko alde bateko puntuetan irudiak txikiagoak direlako, eta beste aldeko puntuetan, handiagoak.

Mutur globalei dagokienez, $(1,0)$ puntuan *A*-rekiko minimo globala lortzen da, eta $(-1,0)$ puntuan, maximo globala.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2006ko ekaina

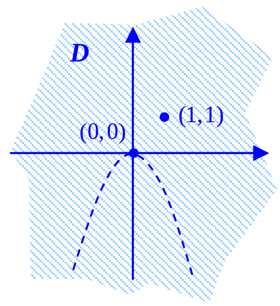
1. (6 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x^2+y^2)(x^2+y)}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu *f*-ren existentzia-eremua. Eremu hori irekia al da? Itxia? Trinkoa?

ii) Aztertu *f*-ren jarraitutasuna $(1,1)$ puntuan. Aurkitu $f_1(1,1)$.

iii) Aztertu *f*-ren limitearen existentzia eta jarraitasuna $(0,0)$ puntuan.

i) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y\neq 0\right\}$.



Ez dago *D*-ren muga-punturik *D* multzoan. Beraz, *D* irekia da. Eta $\mathrm{fr}D\not\subset D$ denez, *D* ez da itxia. Eta itxia ez denez, ez da trinkoa.

ii) Azter dezagun $(1,1)\in D$ puntua. Konturatu *f* funtzioa bi funtzio jarraituen zatiketa dela, izendatzailea $(1,1)$ puntuan zero ez izanik. Hortaz, *f* funtzioa jarraitua da $(1,1)$ puntuan. Bestalde, $(1,1)\in\operatorname{int}D$ eta

$$f_1(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(x^2+y)-(x-y)\left[2x(x^2+y)+2x(x^2+y^2)\right]}{(x^2+y^2)^2(x^2+y)^2}.$$

Ondorioz, $f_1(1,1)=\dfrac{1}{4}$.

iii) Orain $(0,0)\in D\cup\mathrm{fr}D$ aztertuko dugu.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\ ,\ \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D\,,$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0\}_{n\in\mathbb{N}}\to 0\,,$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\ \text{eta}\ \left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D\,,$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1/n}{1/n^4}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{n^3\right\}\to\infty\,.$$

Beraz, ez da existitzen *f*-ren limitea $(0,0)$ puntuan. Eta limitea ez denez existitzen, *f* funtzioa ez da jarraitua $(0,0)$ puntuan.

2. (6 puntu) Aurkitu funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}$.

$$f_1(x,y)=\frac{\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin(x-y)\sin(x+y)}{\cos^2(x-y)},$$

$$f_2(x,y)=\frac{\cos(x+y)\cos(x-y)-\sin(x-y)\sin(x+y)}{\cos^2(x-y)}.$$

ii) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^3-y^2x}\right)$.

$$f_1(x,y)=\frac{3x^2-y^2}{2(x^3-y^2x)},$$

$$f_2(x,y)=\frac{-xy}{x^3-y^2x}.$$

iii) $z=g(x-y,x^3y),\ g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g_1(x-y,x^3y)+g_2(x-y,x^3y)3x^2y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-g_1(x-y,x^3y)+g_2(x-y,x^3y)x^3.$$

3. (8 puntu) Demagun $F(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ funtzioa,

$$f,g\in C^1(\mathbb{R}^2),\ g(x,y)\neq 0\ \ \forall(x,y)\in\ \mathbb{R}^2$$

izanik, eta *f* eta *g* funtzioak 3. eta 2. mailako funtzio homogeneoak, hurrenez hurren, izanik.

i) Definizioa erabiliz, froga ezazu *F* homogeneoa dela. Zein gradutakoa?

ii) $f(1,1)=0$ eta $f_1(1,1)=5$ badira, definitzen al du $F(x,y)=0$ ekuazioak (2,2) puntuaren ingurunean *y* aldagaia *x* aldagaiaren funtzio inplizitu gisa ($y=\varphi(x)$)? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(2)$.

i) Definizioa erabiliz,

$$F(tx,ty)=\frac{f(tx,ty)}{g(tx,ty)}=\frac{t^3 f(x,y)}{t^2 g(x,y)}=tF(x,y).$$

Horrela, *F* funtzioa 1. mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu:

1. $F(2,2)=\dfrac{f(2,2)}{g(2,2)}=\dfrac{2^3 f(1,1)}{g(2,2)}=0$ da, *f* funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa delako.

2. *F* jarraitua da $(2,2)$ puntuaren ingurunean, funtzio jarraituen zatiketa delako eta izendatzailea zero ez delako.

3. $F_2(x,y)=\dfrac{f_2(x,y)g(x,y)-g_2(x,y)f(x,y)}{g^2(x,y)}$ existitzen da (2,2) puntuaren ingurunean eta jarraitua da.

4. $F_2(2,2)=\dfrac{f_2(2,2)g(2,2)-g_2(2,2)f(2,2)}{g^2(2,2)}\neq 0?$

$f(2,2)=2^3 f(1,1)=0$ (*f* funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa delako),

$f_1(2,2)=2^2 f_1(1,1)=20$ (f_1 funtzioa 2 graduko funtzio homogeneoa delako).

Eta Eulerren teorema aplikatuz,

$$3f(2,2)=2f_1(2,2)+2f_2(2,2),$$
$$0=40+2f_2(2,2),$$
$$f_2(2,2)=-20.$$

Beraz, $F_2(2,2)=-\dfrac{20}{g(2,2)}\neq 0$.

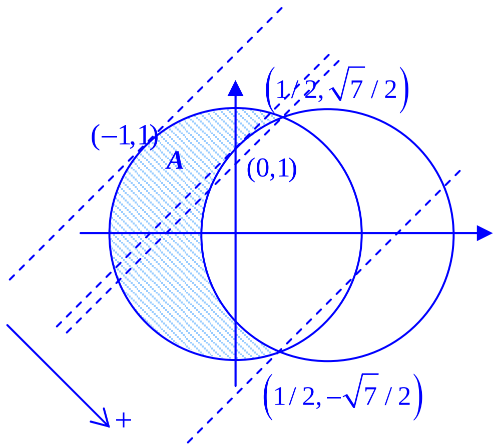
Hortaz, $F(x,y)=0$ ekuazioak (2,2) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki definitzen du.

Eta $\varphi'(2)=-\dfrac{F_1(2,2)}{F_2(2,2)}=1$ da, $F_1(2,2)=\dfrac{f_1(2,2)g(2,2)-g_1(2,2)f(2,2)}{g^2(2,2)}=\dfrac{20}{g(2,2)}$ delako.

4. (10 puntu) Kalkulatu

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 2, (x-1)^2+y^2\geq 2\right\}$$

multzoarekiko $f(x,y)=x-y$ funtzioaren mutur lokalak eta globalak.



i) A-ren barrualdea aztertzeko, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliko dugu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \neq 0 .$$

Beraz, barrualdean f funtzioak ez du lortzen muturrik.

A-ren muga aztertzeko, mutur baldintzatuak erabiliko ditugu:

- $x^2 + y^2 - 2 = 0$ zatian lagrangearra erabiliko dugu:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x - y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right).$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = -1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = -1/2x \\ \lambda = 1/2y \end{array}\right\} \Rightarrow -1/2x = 1/2y \Rightarrow x = -y .$$

Horrela, $x = -y$ berdintza hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $y = \pm 1$ dugu. Beraz, bi soluzio ditugu: $(-1,1)$ eta $(1,-1)$. Baina $(1,-1)$ ez dago muga-zati horretan.

Sistema ebaztean bi zatiketa egin ditugunez, izendatzaile horiek zero direnean berriz ebatzi behar dugu sistema. Horrela, $x = 0$ bada, $1 = 0$ dugu; hau da, kontraesana. Eta $y = 0$ bada, $-1 = 0$ dugu. Eta hori ere kontraesana da. Hortaz, ez dago beste soluziorik.

Eta maila-lerroak erabiliz, $(-1,1)$ puntuan minimo lokala lortzen dela ikusten da.

- $(x-1)^2 + y^2 - 2 = 0$ zatian:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x - y + \lambda\left((x-1)^2 + y^2 - 2\right),$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda(x-1) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = -1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) = (0,1) \text{ edo } (x,y) = (2,-1).$$

Konturatu $(0,1)$ puntua muga-zati horretan dagoela. Maila-lerroak erabiliz, multzoko inguruneko puntu batzuetan irudiak handiagoak direla ikusten da, eta beste batzuetan, txikiagoak. Beraz, puntu horretan ez da ezer lortzen. Eta $(2,-1)$ puntua, ordea, ez dago zati horretan.

- Ebaki-puntuetan maila-lerroak erabiliz, $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ eta $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ puntuetan maximo lokalak lortzen direla ikusten da.

ii) Bukatzeko, f funtzioa A multzo trinkoan jarraitua denez, maximo eta minimo globalak existitzen dira. Horrela, $f(-1,1)=-2$, $f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ eta $f\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ kontuan izanik, $(-1,1)$ puntuan minimo globala lortzen da, eta $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ puntuan, maximo globala.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2007ko urtarrila

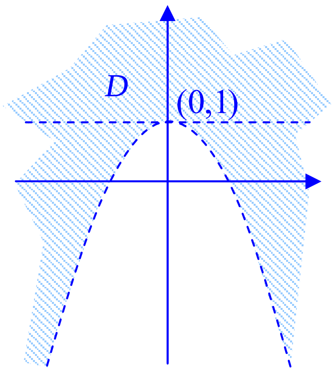
1. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x-1}{(y-1)\sqrt{y-1+x^2}}$.

i) Aurkitu eta irudikatu *f* funtzioaren existentzia-eremua. Irekia al da?

ii) Aztertu *f* funtzioaren limitearen existentzia $(1,1)$ puntuan.

iii) Aztertu *f* funtzioaren jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(1,2)$ puntuan. Eta $(1,2)$ puntuan *f* funtzioaren diferentziala erabiliz, hurbildu $f(1{,}01,1{,}98)$.

i) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\neq 1, y-1+x^2>0\right\}$ eta $\operatorname{int} D = D$ direnez, *D* irekia da.



ii) Azter dezagun *f* funtzioaren limitearen existentzia $(1,1)\in D\cup \operatorname{fr}D$ puntuan.

$$\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1)\ ,\ \left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D,$$

$$\left\{f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0,$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1)\ ,\ \left\{\left(1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D,$$

$$\left\{f\left(1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to 1\neq 0.$$

Beraz, ez da existitzen *f* funtzioaren limitea $(1,1)$ puntuan.

OHARRA: $\left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida ezin dugu hartu, eremuan ez dagoelako.

iii) Orain, $(1,2)\in\text{int}D$ da. Deribatu partzialak hauek dira:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(y-1)\sqrt{y-1+x^2}-\dfrac{x(x-1)(y-1)}{\sqrt{y-1+x^2}}}{\left((y-1)\sqrt{y-1+x^2}\right)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-(x-1)\left(\sqrt{y-1+x^2}+\dfrac{y-1}{2\sqrt{y-1+x^2}}\right)}{\left((y-1)\sqrt{y-1+x^2}\right)^2}.$$

Deribatu partzialak existitzen dira $(1,2)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(1,2)$ puntuan; izan ere, erroa eta polinomioak (funtzio jarraituak) biderkatzen, kentzen, batzen, zatitzen eta konposatzen ari dira, izendatzaileak $(1,2)$ puntuan zero ez izanik. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(1,2)$ puntuan. Diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Eta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\;,\;\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=0\,.$$

Bestalde, f funtzioa $(1,2)$ puntuan diferentziagarria denez,

$$df(1,2)(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)h_2=\frac{h_1}{\sqrt{2}}$$

da eta $f(1{,}01,1{,}98)\cong f(1,2)+df(1,2)(0{,}01,-0{,}02)=\dfrac{0{,}01}{\sqrt{2}}$.

2. (8 puntu) Kalkulatu funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $f(x,y)=\sin((x-y)e^x)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(e^x+(x-y)e^x)\cos((x-y)e^x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-e^x\cos((x-y)e^x)\,.$$

ii) $f(x,y)=e^{x^2}\cos y+y^2\ln y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xe^{x^2}\cos y\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x^2}\sin y + 2y\ln y + y\,.$$

iii) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}\,.$$

iv) $z = f(x+3, y-2)g(xy^2)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = f_1(x+3,y-2)g(xy^2) + f(x+3,y-2)g'(xy^2)y^2\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = f_2(x+3,y-2)g(xy^2) + f(x+3,y-2)g'(xy^2)2xy\,.$$

3. (10 puntu) Demagun $F(x,y) = xy^3 + f(x^2-y^2, xy)$ funtzioa, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0,1)=1$, $f_1(0,1)=0$, $f_2(0,1)=2$ eta f funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa izanik.

i) F funtzioa homogeneoa al da? Zein gradutakoa?

ii) Kalkulatu $F(2,2)$ eta $F_2(2,2)$.

iii) Demagun $G(x,y) = F(x,y) - k$ funtzioa. Existitzen al da k-ren baliorik, $G(x,y)=0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa ($y=\varphi(x)$) definitzeko? Balio horietarako, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) Definizioa erabiliz,

$$F(tx,ty) = t^4xy^3 + f(t^2x^2 - t^2y^2, t^2xy) = t^4xy^3 + t^4 f(x^2-y^2, xy) = t^4F(x,y)$$

da. Ondorioz, F funtzioa 4. mailako funtzio homogeneoa da.

ii) f funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa denez, $f(0,4) = 4^2 f(0,1) = 16$ da. Beraz, $F(2,2) = 16 + f(0,4) = 32$ da.

Eta $F_2(x,y) = 3xy^2 - 2yf_1(x^2-y^2, xy) + xf_2(x^2-y^2, xy)$ denez,

$$F_2(2,2) = 24 - 4f_1(0,4) + 2f_2(0,4)$$

da. Horrez gainera, f_1 eta f_2 funtzioak 1. mailako funtzio homogeneoak direla kontuan izanik,

$$f_1(0,4) = 4f_1(0,1) = 0 \text{ eta } f_2(0,4) = 4f_2(0,1) = 8$$

dira. Hortaz, $F_2(2,2) = 40$.

iii) Funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu.

1. $G(1,1) = F(1,1) - k = 1 + f(0,1) - k = 2 - k = 0$. Beraz, $k = 2$.

2. $G(x,y) = F(x,y) - 2$ jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, funtzio jarraituak (polinomioak eta $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$) biderkatzen, konposatzen, batzen eta kentzen ari direlako.

3. Era berean arrazoituz,

$$G_2(x,y) = F_2(x,y) = 3xy^2 - 2yf_1(x^2 - y^2, xy) + xf_2(x^2 - y^2, xy)$$

existitzen da eta jarraitua da.

4. $G_2(1,1) = F_2(1,1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 F_2(2,2) = 5$, izan ere, F_2 funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa da.

Hortaz, $G(x,y) = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du.

Eta G funtzioa $(1,1)$ puntuan diferentziagarria denez, $\varphi'(1) = -\dfrac{G_1(1,1)}{G_2(1,1)} = -\dfrac{3}{5}$.

Konturatu:

$$G_1(x,y) = y^3 + f_1(x^2 - y^2, xy)2x + f_2(x^2 - y^2, xy)y,$$

$$G_1(1,1) = 1 + 2f_1(0,1) + f_2(0,1) = 3.$$

4. (12 puntu) Demagun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y, x - y \geq -2\}$ eta $f(x,y) = (x-1)^2 + y$.

i) Kalkulatu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur lokalak.

ii) Kalkulatu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur globalak.

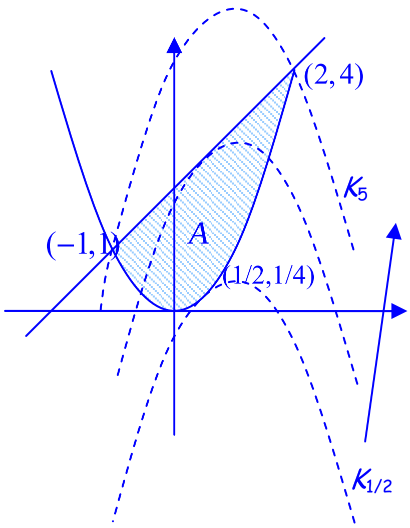
i) Barrualdea aztertzeko, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliko dugu.

Baldintza beharrezkoak ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2x - 2 = 0, \\ f_2(x,y) = 1 \neq 0. \end{cases}$$

Beraz, *A*-ren barrualdean ez da lortzen muturrik.

Azter dezagun *A*-ren muga, mutur baldintzatuen teoria erabiliz.



• Parabolan dagoen muga-zatia:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y+\lambda(x^2-y),$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2+2\lambda x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=1-\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2-y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}\lambda=\frac{2-2x}{2x}\\ \lambda=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{2-2x}{2x}=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{4}.$$

Zatiketa bat egin dugunez, izendatzailea zero denean, berriro ebatzi behar dugu sistema. Hau da, $x=0$ denean. Lehenengo berdintzan ordezkatuz, $-2=0$ dugu. Kontraesana denez, ez dugu soluzio berririk.

Beraz, $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ puntua dugu. Eta maila-lerroak erabiliz, puntu horretan minimo lokala lortzen da.

• Azter dezagun $x-y=-2$ betetzen duen muga-zatia, maila-lerroak erabiliz. Ez da muturrik lortzen, maila-lerroa ukitzailea den puntuan muturrik ez delako lortzen. Konturatu inguruneko A multzoko puntu batzuetan irudiak handiagoak direla, eta beste batzuetan, txikiagoak.

• $(-1,1)$ eta $(2,4)$ ebaki puntuetan, berriz, maila-lerroak erabiliz, maximo lokala lortzen dela ikusten da.

ii) Funtzioa A multzo trinkoan jarraitua denez, maximo eta minimo globalak existitzen dira. Minimo globala, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ puntuan lortzen da, minimo lokal bakarra delako. Bestalde, $(1,1)$ eta $(2,4)$ puntuetan maximo globala lortzen da, $f(1,1)=f(2,4)=5$ delako.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2007ko ekaina

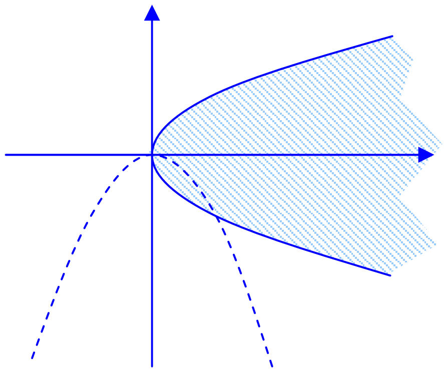
1. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x-y^2}}{x^2+y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzia-eremua. Irekia, itxia, bornatua edo trinkoa al da?

ii) Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(0,0)$ eta $(2,1)$ puntuetan.

iii) Hurbildu, posible bada, f(1,98,1,05) irudia, f funtzioaren diferentziala $(2,1)$ puntuan erabiliz.

i) $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,/\,x-y^2\geq 0, x^2+y\neq 0\right\}$.



Hortaz, E multzoa ez da irekia (muga-puntu batzuk multzokoak dira) eta ez da itxia (muga-puntu batzuk ez dira multzokoak). Ez da bornatua, eta ondorioz, ez da trinkoa.

ii) Ohartu $(0,0)\notin E$ dela. Beraz, funtzioa ez da jarraitua, ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria puntu horretan. Azter dezagun limitearen existentzia:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)\,,\ \left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}\subset D\,,$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2}}\right\}=\left\{\frac{n^2}{\sqrt{n}}\right\}=\left\{n^{3/2}\right\}\xrightarrow{n\to\infty}\infty\,.$$

Beraz, ez da existitzen funtzioaren limitea $(0,0)$ puntuan.

Ondoren, $(2,1)\in\operatorname{int}E$ aztertuko dugu.

$$f_x(x,y)=\frac{\dfrac{x^2+y}{2\sqrt{x-y^2}}-2x\sqrt{x-y^2}}{(x^2+y)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{-\dfrac{y(x^2+y)}{\sqrt{x-y^2}}-\sqrt{x-y^2}}{(x^2+y)^2}.$$

Deribatu partzialak existitzen dira $(2,1)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(2,1)$ puntuan; izan ere, erroa eta polinomioak (funtzio jarraituak) biderkatzen, kentzen, batzen eta zatitzen ari dira, izendatzaileak $(2,1)$ puntuan zero ez izanik. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(2,1)$ puntuan. Diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan.

iii) Funtzioa $(2,1)$ puntuan diferentziagarria denez,

$$f(x+h,y+k)\approx f(x,y)+df(x,y)(h,k),$$

$$f(2-0{,}02,1+0{,}05)\approx f(2,1)+f_x(2,1)(-0{,}02)+f_y(2,1)(0{,}05),$$

$$\mathrm{f}(1{,}98,1{,}05)\approx\frac{1}{5}+\frac{0{,}06}{50}-\frac{0{,}3}{25}=\frac{9{,}46}{50}=0{,}19.$$

2. (8 puntu) Kalkulatu funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $f(x,y)=\sqrt{y^2x-1}$.

$$f_1(x,y)=\frac{y^2}{2\sqrt{y^2x-1}},$$

$$f_2(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{y^2x-1}}.$$

ii) $f(x,y)=\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)$.

$$f_1(x,y)=\frac{2}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$f_2(x,y)=-\frac{2x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

iii) $f(x,y)=\ln\sqrt[3]{1+x^2+y^2}$.

$$f_1(x,y)=\frac{\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2+y^2)^2}}}{\sqrt[3]{1+x^2+y^2}}=\frac{2x}{3(1+x^2+y^2)},$$

$$f_2(x,y)=\frac{\dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(1+x^2+y^2)^2}}}{\sqrt[3]{1+x^2+y^2}}=\frac{2y}{3(1+x^2+y^2)}.$$

iv) $z=f(y^2,x^2)g(y^2)$, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ izanik.

$$z_x=2xf_2(y^2,x^2)g(y^2),$$

$$z_y=2yf_1(y^2,x^2)g(y^2)+2yf(y^2,x^2)g'(y^2).$$

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=yg\left(\dfrac{x}{y}\right)-xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ funtzioa, g funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ eta $g(1)\neq 0$ izanik.

i) *f* funtzioa homogeneoa al da? Zein gradutakoa?

ii) Definitzen al du $f(x,y)-g(x)+g(y)=0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean *y* aldagaia *x* aldagaiaren funtzio inplizitu gisa ($y=\varphi(x)$)? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) Definizioa erabiliz,

$$f(tx,ty)=tyg\left(\frac{tx}{ty}\right)-txg\left(\frac{ty}{tx}\right)=tyg\left(\frac{x}{y}\right)-txg\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=t\left(yg\left(\frac{x}{y}\right)-xg\left(\frac{y}{x}\right)\right)=tf(x,y)$$

da. Beraz, *f* funtzioa 1. mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu. Demagun

$$H(x,y)=f(x,y)-g(x)+g(y)=yg\left(\frac{x}{y}\right)-xg\left(\frac{y}{x}\right)-g(x)+g(y)$$

funtzioa.

1. $H(1,1)=g(1)-g(1)-g(1)+g(1)=0$.

2. $H(x,y)=f(x,y)-g(x)+g(y)$ funtzioa jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, funtzio jarraituak batzen, kentzen, biderkatzen eta zatitzen agertzen direlako, izendatzaileak zero ez izanik. Konturatu g jarraitua dela, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ delako.

3. $H_2(x,y)=g\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right)-g'\left(\frac{y}{x}\right)+g'(y)$ existitzen da eta jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, funtzio jarraituak batzen, kentzen, biderkatzen eta zatitzen agertzen direlako, izendatzaileak zero ez izanik. Konturatu g' jarraitua dela, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ delako.

4. $H_2(1,1)=g(1)-g'(1)-g'(1)+g'(1)=g(1)-g'(1)\neq 0$?

   Eulerren teorema aplikatuz g funtzioari: $1\cdot g'(1)=2\cdot g(1)$ da.

   Beraz, $H_2(1,1)=-g(1)\neq 0$.

Orduan, $f(x,y)-g(x)+g(y)=0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa ($y=\varphi(x)$) definitzen du.

Bukatzeko, H diferentziagarria denez,

$$\varphi'(1)=-\frac{H_1(1,1)}{H_2(1,1)}=-\frac{H_1(1,1)}{-g(1)}.$$

Eta

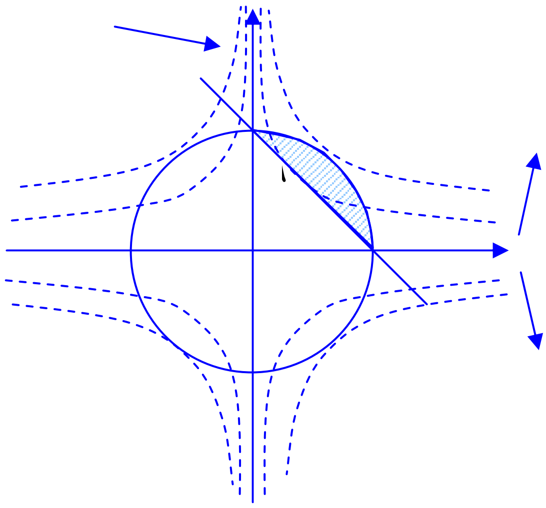
$$H_1(x,y)=g'\left(\frac{x}{y}\right)-g\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-g'(x),$$
$$H_1(1,1)=g'(1)-g(1)+g'(1)-g'(1)=g'(1)-g(1)=g(1)$$

kontuan izanik, $\varphi'(1)=1$.

4. (12 puntu) Demagun $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y\geq 1, x^2+y^2\leq 1\}$ eta $f(x,y)=xy^2$.

i) Kalkulatu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren mutur lokalak.

ii) Kalkulatu *A* multzoarekiko *f* funtzioaren globalak.



i) Barrualdean mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliko dugu:

Baldintza beharrezkoak ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x,y) = y^2 = 0 \\ f_2(x,y) = 2xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = (x,0) \notin \operatorname{int} A .$$

Beraz, barrualdean ez da lortzen muturrik.

Azter dezagun A-ren muga, mutur baldintzatuen teoria erabiliz:

• Zirkunferentzian dagoen muga-zatia:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) ,$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y^2 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2xy + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda = -y^2/2x \\ \lambda = -2xy/2y \end{array}\right\} \Rightarrow -y^2/2x = -x \Rightarrow y^2 = 2x^2 .$$

Eta $y^2 = 2x^2$ berdintza hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ dugu. Baina $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ezinezkoa denez, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dugu. Hortaz, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ da. Eta orain, $y = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ezinezkoa da.

Beraz, $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ da.

Sistema ebaztean x eta y adierazpenez zatitu dugunez, $x = 0$ eta $y = 0$ kasuak aztertu behar ditugu.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ eta } y = \pm 1 .$$

Kontraesana denez, ez dugu soluzio berririk.

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 .$$

Horrela, zirkunferentziaren eta zuzenaren ebaki-puntua lortzen dugu. Puntu hori bukaeran aztertuko dugu.

Maila-lerroak erabiliz, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ puntuan maximo lokala lortzen da.

• $x + y = 1$ zuzenean dagoen muga-zatian, maila-lerro bat puntu batean ukitzailea da. Puntu horren inguruneko A multzoko puntu batzuetan irudiak txikiagoak dira, eta beste batzuetan, handiagoak. Beraz, puntu horretan ez da muturrik lortzen. Hortaz, muga-zati horretan ere ez.

• Maila-lerroak erabiliz, $(1,0)$ eta $(0,1)$ ebaki-puntuetan minimo lokalak lortzen dira.

ii) Maila-lerroei begiratuz, eta $f(1,0) = f(0,1) = 0$ kontuan izanik, $(0,0)$ eta $(2,2)$ puntuetan minimo globala lortzen da. Bestalde, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ puntuan minimo globala lortzen da.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2008ko otsaila

1. (12 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-y}$.

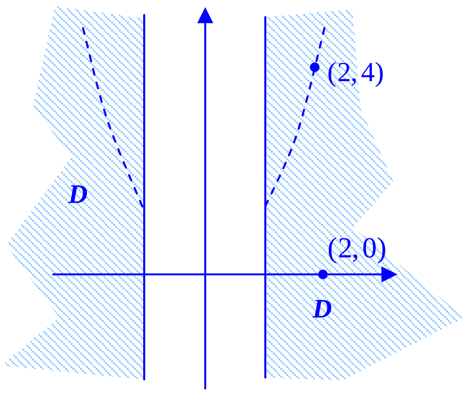
i) Aurkitu eta irudikatu funtzioaren existentzia-eremua. Existentzia-eremua itxia, irekia, bornatua edo trinkoa al da?

ii) Aztertu f funtzioaren diferentziagarritasuna, deribagarritasuna, jarraitutasuna eta limitearen existentzia $(2,0)$ puntuan. Aurkitu $f_y(2,0)$.

iii) Aztertu f funtzioaren diferentziagarritasuna, deribagarritasuna, jarraitutasuna eta limitearen existentzia $(2,4)$ puntuan.

iv) Demagun $f(x,y)=\sqrt{4x^2+5y^2}$ funtzioa. Deribagarria al da f funtzioa $(0,0)$ puntuan?

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2\geq 1,\ x^2\neq y\}$.



Ondorioz, D ez da itxia (parabolan dauden muga-puntuak ez dira multzokoak), eta ez da irekia ($x=1$ eta $x=-1$ zuzenetan dauden muga-puntuak multzokoak dira). Bornatua ez denez, ez da trinkoa.

ii) Orain $(2,0)\in \operatorname{int} D$ puntua aztertuko dugu.

$$f_x(x,y)=\frac{\dfrac{x(x^2-y)}{\sqrt{x^2-1}}-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-y)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2-y)^2}.$$

Bi deribatu partzialak existitzen dira eta jarraituak dira $(2,0)$ puntuaren ingurunean. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(2,0)$ puntuan. Hortaz, deribagarria eta jarraitua da. Jarraitua denez, limitea existitzen da. Deribatu partzial funtzioetan ordezkatuz,

$$f_y(2,0)=\frac{\sqrt{3}}{16}.$$

iii) Kasu honetan $(2,4)\notin D$ da. Beraz, f ez da jarraitua, ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria $(2,4)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia.

$$\left\{\left(2,4-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(2,4),\ \left\{\left(2,4-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,$$

$$\left\{f\left(2,4-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{4-4+\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\sqrt{3}n\}_{n\in\mathbb{N}}\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

Horrela, f funtzioak ez du limiterik $(2,4)$ puntuan.

iv) Lehenik, $(0,0)$ puntua funtzioaren existentzia-eremuaren barrualdean dago. Mekanikoki deribatzen badugu,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+5y^2}}$$

dugu, baina $(0,0)$ puntuan indeterminazioa dugu. Horregatik, definizioa erabiliko dugu.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{4h^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2|h|}{h},\begin{cases}h>0,\ \lim\limits_{h\to0^+}\frac{2|h|}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{2h}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}2=2,\\ h<0,\ \lim\limits_{h\to0^-}\frac{2|h|}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{-2h}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}-2=-2.\end{cases},$$

Beraz, limitea ez da existitzen, hau da, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ez da existitzen. Eta f ez da deribagarria $(0,0)$ puntuan.

2. (8 puntu) Kalkula itzazu honako funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $z=\dfrac{\sin(xy)}{\cos y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\cos(xy)}{\cos y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\cos(xy)\cos y^2 + 2y\sin(y^2)\sin xy}{\cos^2 y^2}.$$

ii) $z = \ln\left(x\sqrt{y}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y}.$$

iii) $z = \mathrm{e}^{xf(2y)} + 2yg\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(2y)\mathrm{e}^{xf(2y)} + 4xg'\left(\frac{x^2}{y}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xf'(2y)\mathrm{e}^{xf(2y)} + 2g\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{2x^2}{y}g'\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

iv) $z = f(xy^2, h(x^2))$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 f_1(xy^2, h(x^2)) + 2xh'(x^2) f_2(xy^2, h(x^2)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xyf_1(xy^2, h(x^2)).$$

3. (8 puntu) Demagun $F(x,y) = xy^2 + g\left(\frac{x^2}{y}\right)$ funtzioa, $g(1) = -1$, $g'(1) = -3$ eta $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa izanik.

i) Homogeneoa al da F funtzioa? Zein mailatakoa?

ii) Kalkulatu $F(1,1)$ eta $F(2,2)$.

iii) Definitzen al du $F(x,y) = 0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) Definizioa erabiliz, $F(tx,ty) = t^3xy^2 + g\left(\frac{t^2x^2}{ty}\right) = t^3xy^2 + t^3g\left(\frac{x^2}{y}\right) = t^3F(x,y)$ dugu.

Ondorioz, F funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Ordezkatuz, $F(1,1)=1+g(1)=0$ da eta F funtzioa homogeneoa denez, $F(2,2)=0$ da.

iii) Aplika dezagun funtzio inplizituaren teorema.

1. $F(1,1)=0$.

2. $F\in C^1(\mathrm{B}(1,1))$ da, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ eta polinomioak $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ multzokoak direlako, izendatzaileak $(1,1)$ puntuaren ingurunean zero ez izanik.

3. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2xy-\dfrac{x^2}{y^2}g'\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ da eta $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1)=2-g'(1)=5\neq 0$.

Beraz, $F(x,y)=0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du.

Bukatzeko, $\varphi'(1)=-\dfrac{F_1(1,1)}{F_2(1,1)}$.

Eulerren teorema aplikatuz,

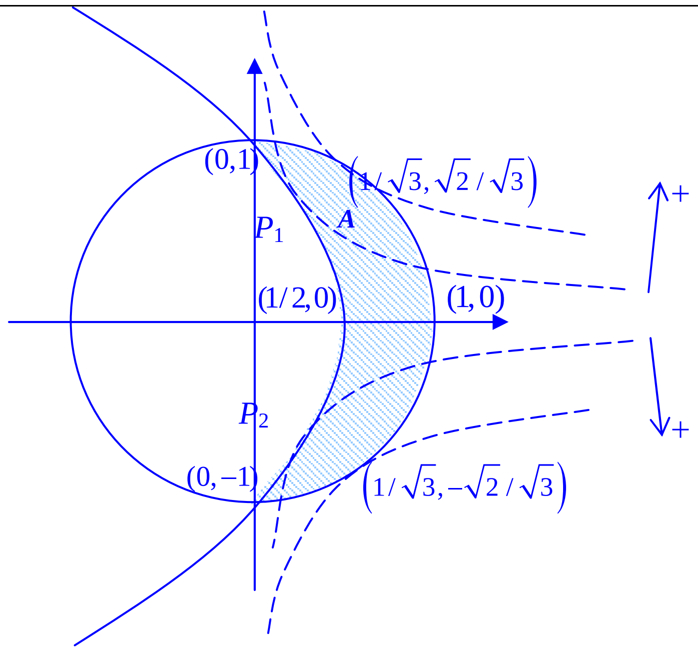
$$\begin{aligned}3F(1,1)&=F_1(1,1)+F_2(1,1),\\ F_1(1,1)&=-F_2(1,1)=-5.\end{aligned}$$

Ondorioz, $\varphi'(1)=1$.

4. (12 puntu) Demagun $f(x,y)=xy^2$ eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 1,\ y^2+2x\geq 1\}$.

i) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur globalak.



i)Azter dezagun A multzoaren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x,y) = y^2 = 0 \\ f_2(x,y) = 2xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 .$$

Beraz, A multzoko $(x,0)$ puntuetan ($\left(\frac{1}{2},0\right)$ eta $(1,0)$ puntuen artean daudenetan) baldintza beharrezkoak betetzen dira.

Baldintza nahikoak:

$$\left|H_f(x,y)\right| = \begin{vmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{12}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = -4y^2 ,$$

$$\left|H_f(x,0)\right| = 0 .$$

Beraz, baldintza nahikoak ez dira egiaztatzen.

Bukaeran maila-lerroak erabiliko ditugu erantzuna emateko.

Orain A-ren muga aztertuko dugu.

- $x^2 + y^2 = 1$ parabolan dagoen muga-zatian lagrangiarra erabiliz,

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) .$$

Eta deribatuak kalkulatuz,

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y^2 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2xy + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y(x+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \\ x = -\lambda. \end{array}\right.$$

Lehenengo ekuazioan $x = -\lambda$ ordezkatuz, $y^2 - 2x^2 = 0$ dugu. Eta hirugarrenarekin batera:

$$\left.\begin{array}{r} y^2 - 2x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} .$$

Eta multzoan dauden soluzioak hauek dira:

$$(1,0) \in A, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \in A, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \in A .$$

- $y^2 + 2x = 1$ zuzenean dagoen muga-zatian:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(y^2 + 2x - 1) .$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y^2+2\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2xy+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y^2+2x-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2y(x+\lambda)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2},\\ x=-\lambda.\end{array}\right.$$

Orain, $x=-\lambda$ denean, lehenengo ekuazioan $y^2-2x=0$ dugu. Hirugarrenarekin batera:

$$\left.\begin{array}{r}y^2-2x=0\\ y^2+2x-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Eta puntuak hauek dira:

$$\left(\frac{1}{2},0\right)\in A,\left(\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in A,\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in A.$$

Maila-lerroak erabiliz, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ eta $(1,0)$ puntuen artean dauden puntuak, $(0,1)$ eta $(0,-1)$ minimo lokalak dira.

Bestalde, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ eta $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ puntuetan, funtzioak maximo lokala lortzen du. Aldiz, $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eta $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ puntuak ez dira ezer (maila-lerroek puntu horietan muga ebakitzen dutelako).

OHARRA: $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eta $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ puntuak aurkitzea ez da derrigorrezkoa, maila-lerroen bidez ikusten baita ezer ez direla.

ii) Lehenik, f funtzioak A multzoan maximo eta minimo globalak lortzen ditu. Minimo globala minimo lokalen artean egongo da. Minimo lokal guztietan funtzioak balio bera duenez, minimo lokal guztietan lortzen da minimo globala. Maximo lokaletan gauza bera gertatzen denez, maximo globala, maximo lokala lortzen den puntuetan lortzen da.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2008ko ekaina

1. (12 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{2-x^2-y^2}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzia-eremua. Existentzia-eremua irekia, itxia, bornatua edo trinkoa al da?

ii) Aztertu f funtzioaren diferentziagarritasuna, deribagarritasuna, jarraitutasuna eta limitearen existentzia $(1,1)$ puntuan. Aurkitu, existitzen badira, $f_x(1,1)$ eta $f_y(1,1)$.

iii) Aztertu f funtzioaren diferentziagarritasuna, deribagarritasuna, jarraitutasuna eta limitearen existentzia $(0,4)$ puntuan. Aurkitu, existitzen badira, $f_x(0,4)$ eta $f_y(0,4)$.

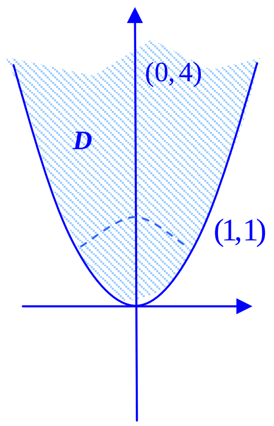
iv) Hurbildu, posible bada, $f(0{,}02,\,3{,}99)$.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y\ge x^2,\ x^2+y^2\ne 2\}$.

$\mathrm{fr}D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=x^2\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y\ge x^2,\ x^2+y^2=2\}$

Beraz, D ez da itxia eta ez da irekia.

Bestalde, D ez da bornatua. Hortaz, ez da trinkoa.



ii) Ondorioz, $(1,1)\notin D$ da. Hortaz, f ez da diferentziagarria, ez da deribagarria eta ez da jarraitua $(1,1)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia: $(1,1)\in D\cup \mathrm{fr}D$ da.

$$\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,1)\ ,\ \left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,$$

$$\left\{f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}-1}}{2-1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{n^2}{\sqrt{n}(-1-2n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{-1-2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to-\infty.$$

Beraz, f funtzioak ez du limiterik $(1,1)$ puntuan.

Bukatzeko, funtzioa $(1,1)$ puntuan deribagarria ez denez, ez dira existitzen $f_x(1,1)$ eta $f_y(1,1)$.

iii) Orain $(0,4) \in \operatorname{int} D$ puntua aztertuko dugu.

$$f_x(x,y) = \frac{\dfrac{-x(2-x^2-y^2)}{\sqrt{y-x^2}} + 2x\sqrt{y-x^2}}{(2-x^2-y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{\dfrac{2-x^2-y^2}{2\sqrt{y-x^2}} + 2y\sqrt{y-x^2}}{(2-x^2-y^2)^2}.$$

Horrela, $f_x(x,y)$ eta $f_y(x,y)$ existitzen dira $(0,4)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(0,4)$ puntuan; izan ere, erroa, eta polinomioak (funtzio jarraituak) agertzen dira biderkatzen, batzen, kentzen, zatitzen eta konposatzen, izendatzaileak zero ez izanik. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(0,4)$ puntuan. Eta f funtzioa diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Jarraitua denez, limitea du puntu horretan. Deribatu partzial funtzioetan ordezkatuz,

$$f_x(0,4) = 0 \text{ eta } f_y(0,4) = \frac{25}{392}.$$

iv) Konturatu f funtzioa $(0,4)$ puntuan diferentziagarria dela. Horrela,

$$f(x+h,y+k) - f(x,y) \approx f_x(x,y)h + f_y(x,y)k\,,$$

$(x,y) = (0,4)$ eta $(h,k) = (0{,}02, 0{,}01)$ izanik. Orduan,

$$f(0{,}02, 3{,}99) \approx f_x(0,4)\cdot 0{,}02 + f_y(0,4)\cdot(-0{,}01) + f(0,4)\,,$$

$$f(0{,}02, 3{,}99) \approx \frac{25}{392}\cdot(-0{,}01) - \frac{1}{7}.$$

Eta beraz, $f(0{,}02, 3{,}99) \approx -0{,}14$.

2. (8 puntu) Kalkulatu funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $z = \dfrac{x^2}{y\cos(x^2)}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy\cos(x^2) + 2x^3 y\sin(x^2)}{y^2\cos^2(x^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2\cos(x^2)}.$$

ii) $z = \ln\sqrt{x+2y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2(x+2y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+2y}.$$

iii) $z=(x-2y)e^{xy^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy^2}+y^2(x-2y)e^{xy^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2e^{xy^2}+2xy(x-2y)e^{xy^2}.$$

iv) $z=f\left(\frac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)+g\left(\frac{x-2}{e^x}\right)$, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(f_1\left(\frac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)\right)\left(-\frac{2(1-y)}{x^3}\right)+\left(g'\left(\frac{x-2}{e^x}\right)\right)\left(\frac{-x+3}{e^x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(f_1\left(\frac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\left(f_2\left(\frac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)\right)\left(\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right).$$

3. (8 puntu) Demagun $g(x,y)=\dfrac{f(xy,y^2-x^2)}{x}$ funtzioa, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa izanik.

i) Homogeneoa al da g? Zein mailatakoa? Kalkulatu g funtzioaren existentzia-eremua.

ii) $f(1,0)=0$ eta $f_2(1,0)=1$ badira, definitzen al du $g(x,y)=0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa, $y=\varphi(x)$? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) Definizioa erabiliz,

$$g(tx,ty)=\frac{f(t^2xy,t^2(y^2-x^2))}{tx}=\frac{(t^2)^3f(xy,y^2-x^2)}{tx}=t^5g(x,y)$$

dugu. Ondorioz, g funtzioa 5. mailako funtzio homogeneoa da. Konturatu bigarren berdintzan f funtzioa 3. mailako funtzio homogeneoa dela kontuan izan dugula.

Bestalde, g funtzioaren existentzia-eremua $E_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\neq 0\}$ da.

ii) Funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu:

1. $g(1,1)=f(1,0)=0$.

2. $g \in \mathcal{C}^1(\mathrm{B}(1,1))$ da, polinomioak eta f funtzioa $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ multzokoak direlako, izendatzailea (1,1) puntuaren ingurunean zero ez izanik.

3 $g_2(x,y) = \dfrac{xf_1\left(xy, y^2-x^2\right)+2yf_2\left(xy, y^2-x^2\right)}{x} \neq 0$?

Eulerren teorema aplikatuz, $3f(1,0) = f_1(1,0)$ da, hau da, $f_1(1,0)=0$.

Orduan, $g_2(1,1) = 2 \neq 0$.

Beraz, $g(x,y)=0$ ekuazioak (1,1) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du.

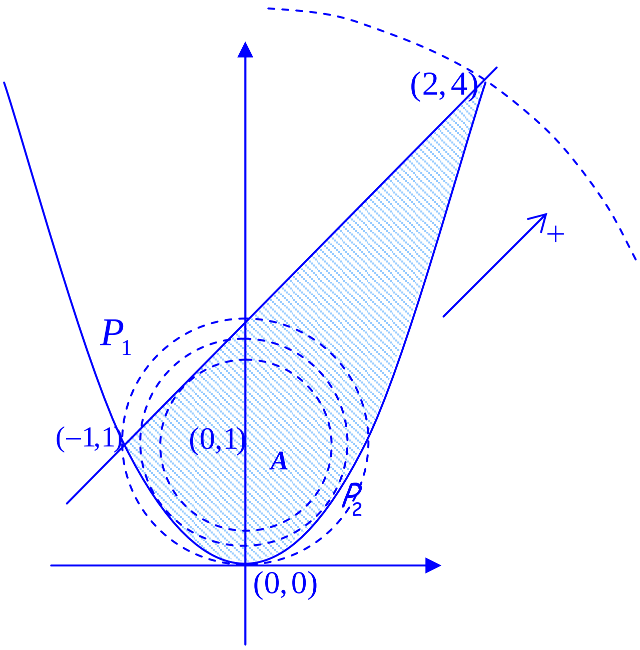
Eta g funtzioa 5. mailako funtzio homogeneoa denez, Eulerren teorema aplikatuz; $5g(1,1) = g_1(1,1) + g_2(1,1)$ da. Horrela, $g_1(1,1) = -g_2(1,1) = -2$ da eta

$$\varphi'(1) = -\frac{g_1(1,1)}{g_2(1,1)} = 1.$$

4. (12 puntu) Demagun $f(x,y) = x^2+(y-1)^2$ eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2 \leq y,\ x-y\geq -2\}$.

i) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur lokalak.

ii) Aurkitu A multzoarekiko f funtzioaren mutur globalak.



i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x,y)=2x=0 \\ f_2(x,y)=2y-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,1)\in \operatorname{int}(A) \,.$$

Baldintza nahikoak ($f\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$):

$$\left|H_f(0,1)\right| = \begin{vmatrix} f_{11}(0,1) & f_{12}(0,1) \\ f_{12}(0,1) & f_{22}(0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4>0 \,,$$

$$f_{11}(0,1)>0 \,.$$

Ondorioz, (0,1) puntuan A-rekiko minimo lokala lortzen da.

Orain A-ren muga aztertuko dugu.

• Maila-lerroak erabiliz, P_1, P_2 eta P_3 puntuetan ez da ezer lortzen, A multzoko inguruneko puntu batzuetan irudia txikiagoa delako, eta beste batzuetan, handiagoa. Eta (0,0) puntuan maximo lokala lortzen da, maila-lerroak erabiliz, A multzoko inguruneko puntuetan irudia txikiagoa delako.

• Mugako bi ebaki-puntuetan maximo lokala lortzen da, A multzoko inguruneko puntuetan irudia txikiagoa delako.

ii) Funtzioa A multzo trinkoan jarraitua denez, maximo eta minimo globalak lortzen dira. Maximo lokaletatik handiena maximo globala da, eta minimo lokaletatik txikiena, minimo globala. Beraz, (0,1) puntuan minimo globala lortzen da, eta (2,4) puntuan, maximo globala.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2009ko otsaila

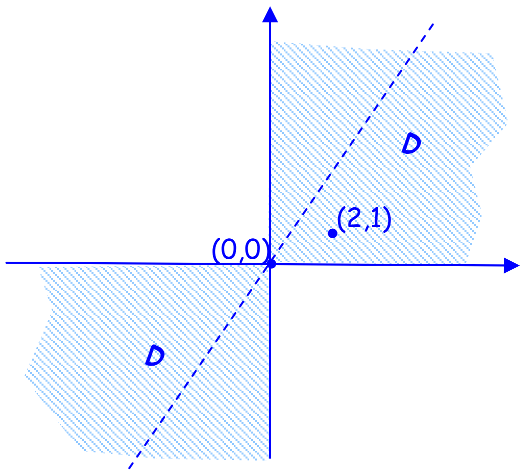
1. (12 puntu) Demagun $f(x,y)=e^{\frac{\sqrt{xy}}{2x-y}}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzia-eremua. Irekia, itxia, bornatua edo trinkoa al da?

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna $(2,1)$ puntuan.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, xy\geq 0,\ 2x-y\neq 0\}$.



Existentzia-eremua ez da itxia ($2x=y$ zuzenean dauden muga-puntuak ez dira multzokoak) eta ez da irekia (ardatzetan dauden muga-puntuak multzokoak dira). Bornatua ez denez, ez da trinkoa.

i) Konturatu f ez dela jarraitua (0,0) puntuan, $(0,0)\notin D$ baita.

Eta $(0,0)\notin \text{int}D$ denez, f funtzioa ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia $(0,0)\in \text{fr}D\cup D$ puntuan.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0),\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{e^{\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\cdot 0}}{\frac{2}{n}-0}\right)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{e^{\left(\frac{\sqrt{0}}{\frac{2}{n}}\right)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{e^0\}_{n\in\mathbb{N}}=\{1\}_{n\in\mathbb{N}}\to 1,$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0),\ \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D,$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \mathrm{e}^{\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}}\right)} \right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \mathrm{e}^{\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}}\right)} \right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\mathrm{e}^1\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\mathrm{e}\}_{n\in\mathbb{N}} \to \mathrm{e}.$$

Horrela, $1 \neq \mathrm{e}$ denez, ez da existitzen *f* funtzioaren limitea $(0,0)$ puntuan.

ii) Ondoren, $(2,1) \in \mathrm{int}(D)$ puntua aztertuko dugu.

$$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{xy}}{2x-y}} \frac{\frac{y}{2\sqrt{xy}}(2x-y) - 2\sqrt{xy}}{(2x-y)^2},$$

$$f_y(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{xy}}{2x-y}} \frac{\frac{x}{2\sqrt{xy}}(2x-y) + \sqrt{xy}}{(2x-y)^2}.$$

Deribatu partzialak existitzen dira $(2,1)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(2,1)$ puntuan; izan ere, erroa, polinomioa eta funtzio esponentziala (funtzio jarraituak) biderkatzen, kentzen, batzen, zatitzen eta konposatzen ari dira, izendatzaileak $(2,1)$ puntuan zero ez izanik. Beraz, f funtzioa $(2,1)$ puntuan diferentziagarria da. Diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Jarraitua denez, limitea existitzen da $(2,1)$ puntuan.

2. (8 puntu) Demagun $g(x,y) = h\left(2xy - y^2, \dfrac{x^3+y^3}{3y-x}\right)$ funtzioa, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa izanik.

i) Homogeneoa al da g funtzioa? Zein mailatakoa?

ii) Existitzen al da $h(1,1)$-en baliorik, $g(x,y) - x^2 - y^2 = 0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzeko? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) Froga dezagun g funtzio homogeneoa dela.

$$g(tx,ty)=h\left(2txty-(ty)^2,\frac{(tx)^3+(ty)^3}{3ty-tx}\right)=h\left(t^2(2xy-y^2),\frac{t^3(x^3+y^3)}{t(3y-x)}\right)=$$
$$=h\left(t^2(2xy-y^2),t^2\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)=t^4h\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)=t^4g(x,y).$$

Beraz, g funtzioa 4. mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Ikus dezagun funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak noiz egiaztatzen diren. Lehenik, $F(x,y)=g(x,y)-x^2-y^2=h\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)-x^2-y^2$ funtzioaren existentzia-eremua $\mathbb{R}^2$ da eta $(1,1)\in \operatorname{int}(D)$ da.

1. $F(1,1)=0 \Leftrightarrow h(1,1)-1^2-1^2=0 \Leftrightarrow h(1,1)=2$.

2. $F(x,y)=h\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)-x^2-y^2$ jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, $h\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ eta polinomioak (funtzio jarraituak) kentzen eta konposatzen ari direlako, izendatzaileak zero ez izanik.

4. Existitzen da

$$F_2(x,y)=h_1\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)\cdot(2x-2y)$$
$$+h_2\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)\cdot\frac{3y^2\cdot(3y-x)-(x^3+y^3)\cdot 3}{(3y-x)^2}-2y$$

deribatu partziala. Horrez gainera, $F_2(x,y)$ jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, $h\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ delako eta polinomioak agertzen direlako, izendatzaileak zero ez izanik.

4. $F_2(1,1)=-2\neq 0$.

Beraz, $h(1,1)=2$ denean, $F(x,y)=0$ ekuazioak $(1,1)$ puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du. Eta F funtzioa $(1,1)$ puntuan diferentziagarria denez,

$$\varphi'(1)=-\frac{F_1(1,1)}{F_2(1,1)}.$$

Kalkula dezagun $F_1(1,1)$:

$$F_1(x,y)=h_1\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)\cdot 2y+h_2\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)\cdot\frac{3x^2\cdot(3y-x)-(x^3+y^3)\cdot(-1)}{(3y-x)^2}-2x.$$

Eta ordezkatuz eta Eulerren teorema aplikatuz,

$$F_1(1,1)=2(h_1(1,1)+h_2(1,1))-2=2\cdot 2\cdot h(1,1)-2=6\,.$$

Horrela, $\varphi'(1)=3$.

3. (8 puntu) Kalkulatu funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $z = \ln \sqrt[5]{2xy + y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{5(2xy + y^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x + 2y}{5(2xy + y^2)}.$$

ii) $z = \sin\left(\frac{x^3y^2}{2x+1}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\left(\frac{x^3y^2}{2x+1}\right)\frac{3x^2y^2(2x+1) - 2x^3y^2}{(2x+1)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\left(\frac{x^3y^2}{2x+1}\right)\frac{2yx^3}{2x+1}.$$

iii) $z = y^2 f(x\text{-}y, 3x)$, non $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ den.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(f_1(x - y, 3x) + 3f_2(x - y, 3x)),$$

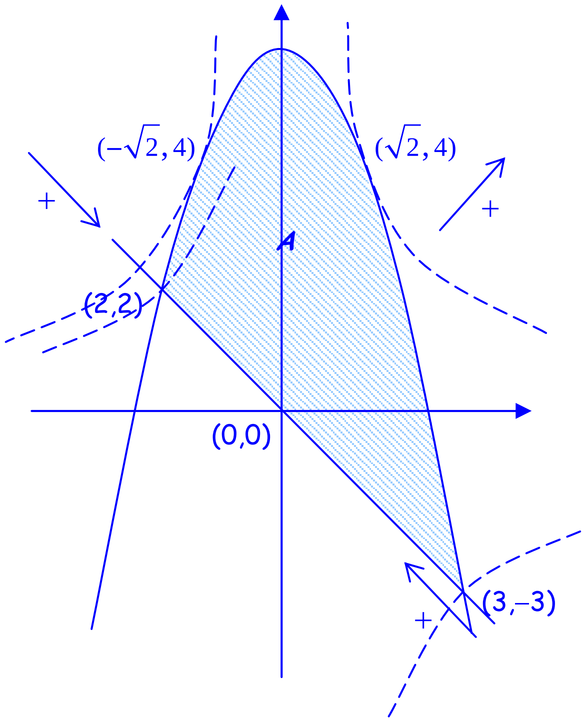
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2yf(x - y, 3x) - y^2 f_1(x - y, 3x).$$

iv) $z = f(x^3 + 2y, g(x^2y))$, non $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ den.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 f_1(x^3 + 2y, g(x^2y)) + 2xyg'(x^2y) f_2(x^3 + 2y, g(x^2y)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 f_1(x^3 + 2y, g(x^2y)) + x^2g'(x^2y) f_2(x^3 + 2y, g(x^2y)).$$

4. (12 puntu) Kalkulatu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y \le 6,\ x + y \ge 0\}$ multzoarekiko $f(x, y) = xy$ funtzioaren mutur lokalak eta globalak.



Mutur lokalak.

Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x,y) = y = 0 \\ f_2(x,y) = x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \notin \operatorname{int}(A) .$$

Beraz, barrualdean ez da lortzen muturrik.

Orain A-ren muga aztertuko dugu:

- $x^2 + y = 6$ parabolaren muga-zatian lagrangearra erabiliz,

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y - 6) ,$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda = -y/2x \\ \lambda = -x \end{array}\right\} \Rightarrow y/2x = x \Rightarrow y = 2x^2 .$$

Eta $y = 2x^2$ denean, hirugarren ekuazioan $x^2 + 2x^2 - 6 = 0$ dugu. Horrela, $x = \pm\sqrt{2}$ eta $y = 4$ ditugu. Hau da, $(\sqrt{2},4) \in A$ eta $(-\sqrt{2},4) \in A$ puntuak.

Sistema ebaztean x adierazpenaz zatitu dugunez, $x = 0$ denean, berriz ebatzi behar dugu sistema. Lehenengo ekuazioan eta hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $y = 0$ eta $y = 6$ berdintzak ditugu. Eta hori kontraesana da.

• $x+y=0$ zatian lagrangearra erabiliz,

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y),$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=x+\lambda=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=x+y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda=-y\\ \lambda=-x\end{array}\right\}\Rightarrow x=y.$$

Orain, $x=y$ denean, hirugarren ekuazioan $x+x=0$ dugu. Horrela, $(0,0)\in A$ puntua lortzen dugu.

• Bukatzeko, ebaki-puntuak aztertuko ditugu:

$$\left.\begin{array}{r}x^2+y=6\\ x+y=0\end{array}\right\}\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow \begin{cases}x=3\Rightarrow y=-3\\ x=-2\Rightarrow y=2\end{cases}$$

Horrela, $(-2,2)\in A$ eta $(3,-3)\in A$ ditugu.

Ondoren, maila-lerroak erabiliko ditugu.

$(\sqrt{2},4)$ puntuan: A multzoko inguruneko puntuetan irudiak txikiagoak direnez, puntu horretan f funtzioak A multzoarekiko maximo lokala lortzen du.

$(-\sqrt{2},4)$ puntuan: A multzoko inguruneko puntuetan irudiak handiagoak direnez, puntu horretan f funtzioak A multzoarekiko minimo lokala lortzen du.

$(0,0)$ puntuan: A multzoko inguruneko puntu batzuetan irudiak handiagoak dira, eta beste batzuetan, txikiagoak. Orduan, $(0,0)$ puntuan ez da ezer lortzen.

Era berean, $(2,2)$ puntuan ez da ezer lortzen eta $(-3,3)$ puntuan minimo lokala lortzen da.

Mutur globalak.

Konturatu f funtzioa A multzo trinkoan jarraitua dela. Beraz, mutur globalak existitzen dira. Minimo globala minimo lokalik txikienean lortuko da. Hortaz, $(-3,3)$ puntuan minimo globala lortzen da.

Era berean, $(\sqrt{2},4)$ puntuan maximo globala lortzen da.

OHARRA: Mutur globalak maila-lerroak erabiliz ere kalkula ditzakegu.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2009ko ekaina

1. (12 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x-1}{y\sqrt{x}}$ funtzioa.

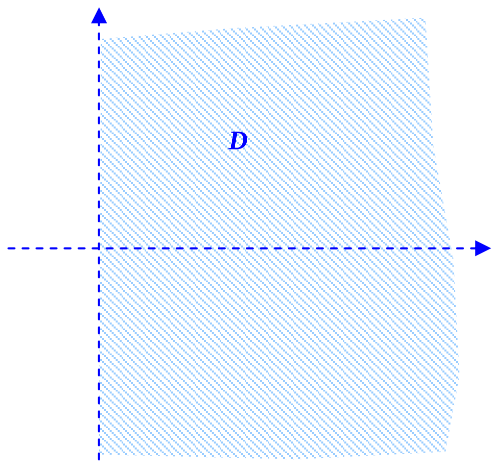
i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzia-eremua. Existentzia-eremua irekia, itxia, bornatua edo trinkoa al da?

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna $(1,0)$ puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna $(2,1)$ puntuan.

iv) Kalkula ezazu gutxi gorabehera $f(1.98,1.03)$ irudia, f funtzioaren diferentziala $(2,1)$ puntuan erabiliz.

i) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x>0,\ y\neq 0\right\}$.



Ondorioz, D ez da itxia ($x=0$ zuzenean dauden muga-puntuak ez dira multzokoak). Eta irekia da, multzoko puntu guztiak barruko puntuak baitira. Bornatua ez denez, ez da trinkoa.

ii) Konturatu $(1,0)\notin D$ dela. Beraz, f funtzioa ez da jarraitua $(1,0)$ puntuan. Eta $(1,0)\notin \operatorname{int}D$ denez, f funtzioa ez da deribagarria eta ez da diferentziagarria $(1,0)$ puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia $(1,0)\in D\cup \operatorname{fr}D$ puntuan. Ordezkatuta indeterminazioa dugunez, segidak erabiliko ditugu.

$$\left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}\to(1,0),\ \left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}\subset D,\ \left\{f\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}=\left\{\frac{1-1}{\frac{1}{n}\sqrt{1}}\right\}=\left\{\frac{0}{\frac{1}{n}\sqrt{1}}\right\}=\{0\}\to 0,$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}\to(1,0)\,,\left\{\left(1+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}\subset D\,,\left\{f\left(1+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}=\left\{\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}\sqrt{1}}\right\}=\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\sqrt{1}}\right\}=\{1\}\to 1.$$

Eta $0\neq 1$ denez, ez da existitzen *f* funtzioaren limitea $(1,0)$ puntuan.

iii) Ondoren, $(2,1)\in \operatorname{int}(D)$ puntua aztertuko dugu.

$$f_x(x,y)=\frac{y\sqrt{x}-\dfrac{y(x-1)}{2\sqrt{x}}}{y^2x}=\frac{2yx-y(x-1)}{2y^2x\sqrt{x}},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\sqrt{x}(1-x)}{y^2x}.$$

Deribatu partzialak existitzen dira $(2,1)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(2,1)$ puntuan; izan ere, erroa eta polinomioa (funtzio jarraituak) biderkatzen, kentzen, batzen eta zatitzen ari dira, izendatzaileak $(2,1)$ puntuan zero ez izanik. Hortaz, *f* funtzioa diferentziagarria da $(2,1)$ puntuan. Diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. Jarraitua denez, limitea existitzen da.

iv) *f* funtzioa $(2,1)$ puntuan diferentziagarria denez,

$$f(1{,}98{,}1{,}03)-f(2,1)\approx -0{,}02f_1(2,1)+0{,}03f_2(2,1),$$

$$f(1{,}98{,}1{,}03)\approx f(2,1)-0{,}02\frac{3\sqrt{2}}{8}-0{,}03\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f(1{,}98{,}1{,}03)\approx 0{,}67.$$

2. (8 puntu)

i) Demagun $g(x,y)$ funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa, $g(1,3)=2$ eta $g_x(1,3)=5$ izanik. Kalkulatu $g(3,9)$, $g_x(3,9)$ eta $g_y(3,9)$.

ii) Demagun $f(x,y)=\dfrac{(x-y)(y^2-1)}{e^2}$ funtzioa. Aztertu ea $f(x,y)=0$ ekuazioak $(1,1)$ eta $(0,0)$ puntuen ingurunetan $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen duen. Kalkulatu, existitzen badira, $\varphi'(1)$ eta $\varphi'(0)$.

i) $g(3,9)=9g(1,3)=18$ eta $g_x(3,9)=3g_x(1,3)=15$ dira. Eulerren teorema aplikatuz, $2g(3,9)=3g_x(3,9)+9g_y(3,9)$ da. Hortaz, $g_y(3,9)=\dfrac{2g(3,9)-3g_x(3,9)}{9}=-1$ da.

ii) Ikus dezagun funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak egiaztatzen diren.

$(1,1)$ puntuan:

1. $f(1,1)=0$.
2. $f(x,y)=\dfrac{(x-y)(y^2-1)}{e^2}$ jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, polinomioa delako.
3. Existitzen da

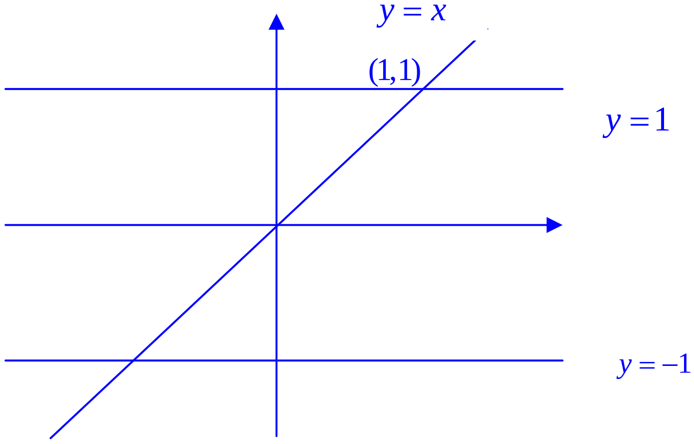
$$f_y(x,y)=\frac{-y^2+1+2y(x-y)}{e^2}=\frac{-3y^2+2yx+1}{e^2}$$

eta jarraitua da $(1,1)$ puntuaren ingurunean, polinomioa delako.

4. $f_y(1,1)=0$.

Beraz, ez dira baldintza nahikoak betetzen. Hortaz, grafikoki aztertuko dugu:

$$f_0=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=x\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=-1\right\}.$$



Ohartu $(1,1)$ puntuaren ingurunean x finkatuta bi y daudela $f(x,y)=0$ izanik. Bata $y=1$ zuzenean dago, eta bestea, $y=x$ zuzenean.

Bukatzeko, $(0,0)$ puntuan ez dago arazorik, $f_y(0,0)=\dfrac{1}{e^2}\neq 0$ baita. Eta f funtzioa $(0,0)$ puntuan diferentziagarria denez, $\varphi'(0)=-\dfrac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)}$ da. Eta $f_x(x,y)=\dfrac{y^2-1}{e^2}$ denez, $\varphi'(0)=1$ da.

3. (8 puntu) Kalkulatu funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $z = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2}{3y}.$$

ii) $z = \cos^2(x^3 + 3xy^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2(\cos(x^3+3xy^2))(\sin(x^3+3xy^2))(3x^2+3y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -12xy(\cos(x^3+3xy^2))(\sin(x^3+3xy^2)).$$

iii) $z = f(x^2 y, 5e^{3x})$, non $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ den.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xyf_1(x^2y,5e^{3x}) + 15e^{3x} f_2(x^2y,5e^{3x}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 f_1(x^2y,5e^{3x}).$$

iv) $z = g(x^3 - 2y)h(y^3x)$ non $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ eta $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ diren.

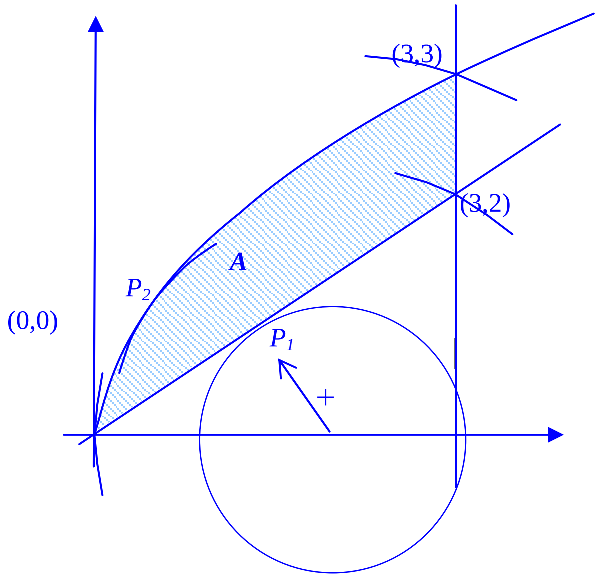
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 g'(x^3-2y)h(y^3x) + y^3h'(y^3x)g(x^3-2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2g'(x^3-2y)h(y^3x) + 3y^2xh'(y^3x)g(x^3-2y).$$

4. (12 puntu) Kalkulatu

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \le 3, 2x \le 3y, x \ge \frac{1}{3}y^2 \right\}$$

multzoarekiko $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ funtzioaren mutur lokal eta globalak.



Mutur lokalak:

Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y) = 2\left(x-2\right) = 0 \\ f_2(x,y) = 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(x,y\right) = (2,0) \notin \operatorname{int}(A).$$

Beraz, A-ren barrualdean ez da muturrik lortzen.

Orain A-ren muga aztertuko dugu:

- $x = \frac{1}{3}y^2$ zatian ez da muturrik lortzen, P_2 puntuaren inguruneko A multzoko puntu batzuetan irudiak handiagoak, eta beste batzuetan txikiagoak, direlako.

- $x = 3$ zatian ez da ezer lortzen, maila-lerroek multzoa ebakitzean, alde bateko puntuen irudiak txikiagoak, eta beste aldekoenak handiagoak, direlako.

- $2x = 3y$ zatian, maila-lerroa ukitzailea den muga-puntuan minimo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuen irudiak handiagoak direlako. Puntu hori lortzeko lagrangearra erabiliko dugu.

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-2)^2 + y^2 .$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2(x-2)+2\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-3\lambda=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-3y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\lambda=2-x\\ \lambda=2y/3\\ \\ \end{array}\right\}\Rightarrow 2-x=2y/3,$$

$$\left.\begin{array}{r}2-x=2y/3\\ 2x-3y=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{18}{13},\, y=\frac{12}{13},$$

Eta puntu hau lortzen dugu: $P_1=\left(\frac{18}{13},\frac{12}{13}\right)$.

- Orain, hiru muga desberdinen ebaki-puntuak aztertuko ditugu. Mugako $(0,0)$ puntuan maximo lokala lortzen da, *A* multzoko inguruneko puntuetan balio txikiagoak lortzen direlako. Era berean, $(3,3)$ puntuan maximo lokala lortzen da. Eta (3,2) puntuan ez da ezer lortzen, *A* multzoko inguruneko puntu batzuetan irudiak handiagoak, eta beste batzuetan txikiagoak, direlako.

Mutur globalak:

Maial-lerroak erabiliz, P_1 minimo globala lortzen da, eta $(3,3)$ puntuan, maximo globala.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2010eko otsaila

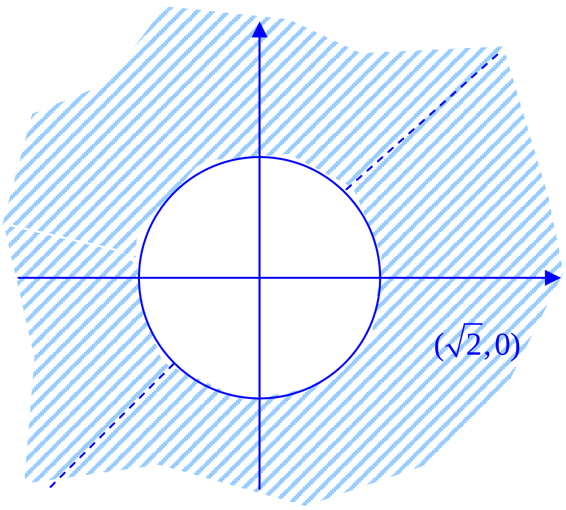
1. (9 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-2}}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzia-eremua. Existentzia-eremua irekia, itxia, bornatua edo trinkoa al da?

ii) Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia $(1,1)$ puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(0,2)$ puntuan.

i) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2\geq 0, x\neq y\right\}$.



$$\operatorname{int} D = D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2>0, x\neq y\right\},$$

$$\mathrm{fr}D = D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2=0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2\geq 0, x-y=0\right\}.$$

Horrela, $\operatorname{int} D\neq D$ denez, D ez da irekia. Eta $\mathrm{fr}D\not\subset D$ denez, D ez da itxia. Beraz, D ez da trinkoa. Bestalde, D ez da bornatua.

ii) Lehenik, $(1,1)\in D\cup \mathrm{fr}D$ da. Funtzioaren adierazpenean $(1,1)$ ordezkatuz, indeterminazioa dugu. Ondorioz, segidak erabiliko ditugu.

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1)\ ,\ \left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D\,,$$

$$\left\{f\left(1+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+1-2}{1+\frac{1}{n}-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2n}{n^2}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}+\frac{2n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}+2\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to 2\,,$$

$$\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1)\ ,\ \left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D\,,$$

$$\left\{f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2}{1-1-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to -2\,.$$

Eta $2\neq -2$ denez, ez da existitzen f funtzioaren limitea (1,1) puntuan.

iii) Konturatu $(0,2)\in \operatorname{int} D$ dela. Kalkula ditzagun deribatu partzialak:

$$f_1(x,y)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2-2}}(x-y)-\sqrt{x^2+y^2-2}}{(x-y)^2}\,,$$

$$f_2(x,y)=\frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2-2}}(x-y)-\sqrt{x^2+y^2-2}(-1)}{(x-y)^2}\,.$$

Deribatu partzial horiek existitzen dira $(0,2)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(0,2)$ puntuan, polinomioak eta erroa (funtzio jarraituak) kentzen, biderkatzen, zatitzen eta konposatzen ari direlako, izendatzailea zero ez izanik. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(0,2)$ puntuan. Hortaz, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan.

2. (3 puntu) Demagun $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ funtzioa. Aztertu f funtzioaren deribagarritasuna (0,0) puntuan.

Mekanikoki deribatzen badugu arazoak ditugunez, definizioa erabiliko dugu.

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1\,,$$

$$f_2(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1\,.$$

Bi deribatu partzialak existitzen direnez, f funtzioa deribagarria da $(0,0)$ puntuan.

3. (8 puntu) Kalkulatu funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $z=\ln\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$.

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}}\frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{-2y}{2\dfrac{x+y}{x-y}(x-y)^2}=\frac{-y}{(x+y)(x-y)},$$

$$z_2=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}}\frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{2\dfrac{x+y}{x-y}(x-y)^2}=\frac{x}{(x+y)(x-y)}.$$

ii) $z=\sin^2(xe^y)$.

$$z_1=2(\sin(xe^y))(\cos(xe^y))e^y,$$

$$z_2=2(\sin(xe^y))(\cos(xe^y))xe^y.$$

iii) $z=x^3y^2\left(g\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$, non $g\in C^1(\mathbb{R})$ den.

$$z_1=3x^2y^2\left(g\left(\frac{y}{x}\right)\right)+x^3y^2\left(g'\left(\frac{y}{x}\right)\right)\frac{-y}{x^2},$$

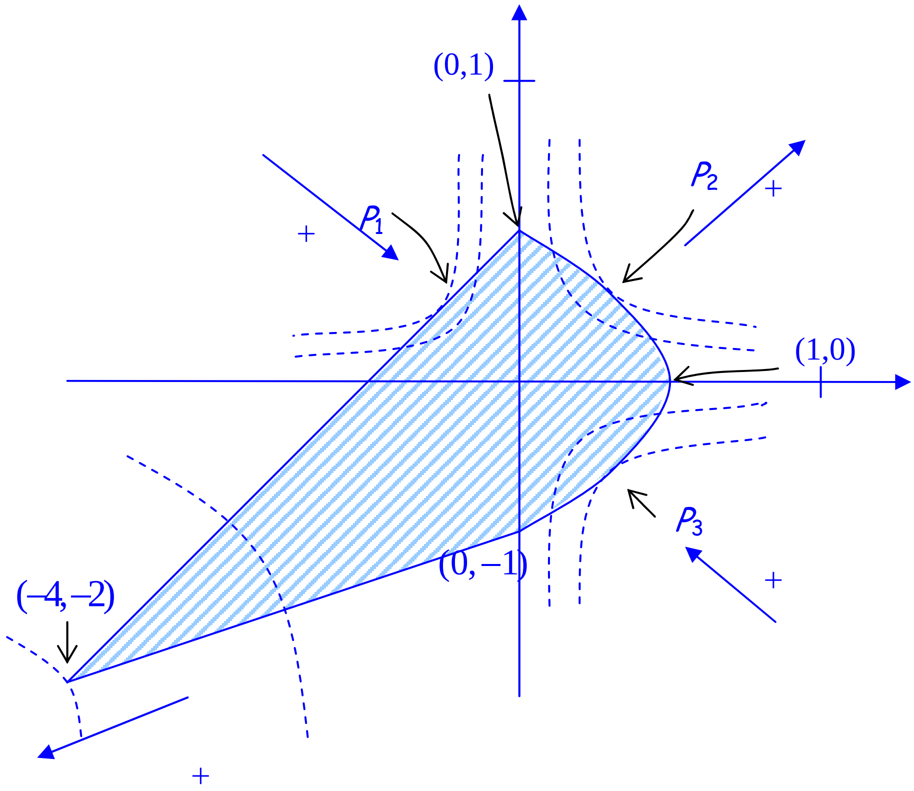
$$z_2=2x^3y\left(g\left(\frac{y}{x}\right)\right)+x^3y^2\left(g'\left(\frac{y}{x}\right)\right)\frac{1}{x}.$$

iv) $z=f(xy,g(x^2,y^2))$, non $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ den.

$$z_1=\left(f_1(xy,g(x^2,y^2))\right)y+\left(f_2(xy,g(x^2,y^2))\right)(g_1(x^2,y^2))2x,$$

$$z_2=\left(f_1(xy,g(x^2,y^2))\right)x+\left(f_2(xy,g(x^2,y^2))\right)(g_2(x^2,y^2))2y.$$

4. (12 puntu) Kalkulatu $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y^2\le 1, x-y+1\ge 0\}$ multzoarekiko $f(x,y)=xy$ funtzioaren mutur lokalak eta globalak.



i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{cases} f_1(x,y) = y = 0 \\ f_2(x,y) = x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)\,.$$

Baldintza nahikoak ($f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$):

$$f_1(x,y) = 0 \text{ eta } f_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)\,,$$

$$f_{11}(x,y) = 0.$$

Beraz, baldintza nahikoak ez dira betetzen. Orduan, baldintza nahikoek ez digute ezer esaten.

Bestalde,

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\;\; H_f(0,0) = -1 < 0$$

denez, $(0,0)$ puntuan ez da ezer lortzen.

Azter dezagun A-ren muga:

• $x-y+1=0$ aztertuko dugu. Maila-lerroak erabiliz, P_1 puntuan minimo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak handiagoak direlako. Puntu hori aurkitzeko, lagrangearra erabiliko dugu:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x-y+1)\,.$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=x-\lambda=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=x-y+1=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\lambda=-y\\ \lambda=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow -y=x\ .$$

Hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $(x,y)=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)=P_1$.

• $x+y^2-1=0$ zatian maila-lerroak erabiliz, P_3 puntuan minimo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak handiagoak direlako. Eta P_2 puntuan maximo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak txikiagoak direlako. Puntu horiek, lagrangearra erabiliz kalkulatzen dira.

• Mugako $(0,1)$ ebaki-puntuan ezer ez da lortzen, A multzoko inguruneko puntu batzuetan irudiak txikiagoak direlako (bigarren koadrantekoak), eta inguruneko beste puntu batzuetako irudiak, handiagoak (lehenengo koadrantekoak). Bestalde, $(-3,-2)$ puntuan maximo lokala lortzen da, A multzoko inguruneko puntuetan irudiak txikiagoak direlako.

ii) Maila-lerroak eta

$$f(-3,-2)=6\,,\ f\left(\frac{2}{3},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}\,,\ f\left(\frac{2}{3},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{-2}{3\sqrt{3}}\,,\ f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

kontuan izanik, $(-3,-2)$ puntuan A multzoarekiko maximo globala lortzen da. Bestalde, $\left(\frac{2}{3},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ puntuan minimo globala lortzen da.

5. (8 puntu) Demagun $f(x,y)=x(x^2+y^2-4)$. Aztertu $f(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa, $y=\varphi(x)$, definitzen al duen, puntu hauen ingurunean: $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),(0,2)$ eta $(2,0)$. Kalkulatu, posible bada, $\varphi'(2)$.

Ikus dezagun funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak betetzen diren.

$$f(x,y) = x(x^2+y^2-4),\ D=\mathbb{R}^2,\ \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),(0,2),(2,0)\in \operatorname{int} D.$$

1. $f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = f(0,2) = f(2,0) = 0$.

2 f jarraitua da $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),(0,2)$ eta $(2,0)$ puntuen ingurunetan, polinomioa delako.

3. $f_2(x,y) = 2xy$ existitzen da eta jarraitua da $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),(0,2)$ eta $(2,0)$ puntuen ingurunetan, polinomioa delako.

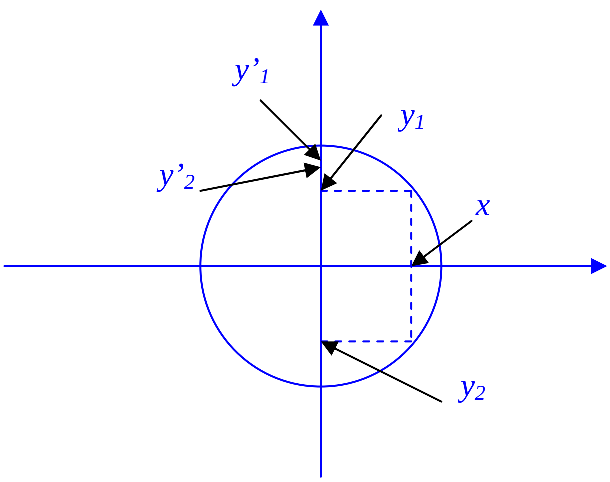
4. $f_2\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 4 \neq 0$, $f_2(0,2)=0$ eta $f_2(2,0)=0$.

Laugarren baldintza $(0,2)$ eta $(2,0)$ puntuetan ez da betetzen eta $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ puntuan bai. Beraz, $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ puntuaren ingurunean $f(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu gisa, $y=\varphi(x)$, definitzen du. Beste puntuen ingurunetan teoremak ez digu ezer esaten.

Bi puntu horietan erantzuna grafikoki emango dugu.

$$x(x^2+y^2-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ edo } x^2+y^2-4=0.$$

Irudikatuz,



Bi kasuetan, x finkatuta, bi y ditugu (irudikoak) (x,y) puntuak ekuazioa egiaztaturik. Beraz, y ez da x aldagaiaren funtzio inplizitua bi puntu horien ingurunean.

Bukatzeko, $\varphi'(\sqrt{2}) = \dfrac{-f_1\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)}{f_2\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)} = -\dfrac{4}{4} = -1$.

MATEMATIKA IIko azterketa

EZALeko 2010eko ekaina

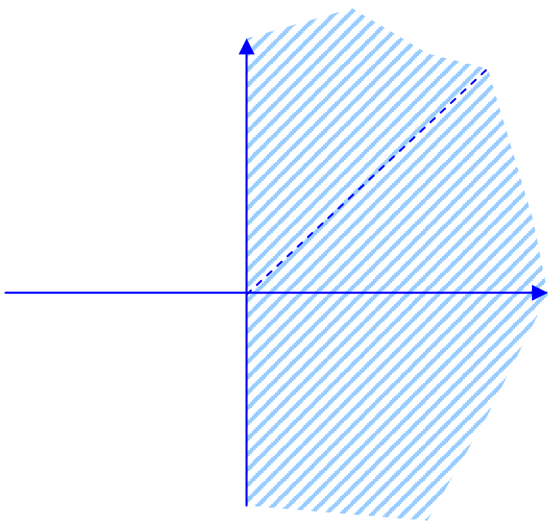
1. (12 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{y\sqrt{x}}{(x-y)^2}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzia-eremua. Existentzia-eremua multzo irekia, itxia, bornatua edo trinkoa al da?

ii) Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia $(0,0)$ puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna $(1,0)$ puntuan. Existitzen al da f funtzioaren limitea puntu horretan?

i) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, x\neq y\right\}$.



$\operatorname{int} D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, x\neq y\right\}$ eta $\operatorname{fr}D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, x=y\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\right\}$.

Horrela, $\operatorname{int} D\neq D$ denez, D ez da irekia. Eta $\operatorname{fr}D\not\subset D$ denez, D ez da itxia. Beraz, D ez da trinkoa. Bestalde, D ez da bornatua.

ii) Lehenik, $(0,0)\in D\cup\operatorname{fr}D$ dugu. Konturatu $(0,0)$ puntua funtzioan ordezkatuta indeterminazioa dugula. Segidak erabiliz,

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\ ,\ \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D\,,$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{-\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{-n}{4\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{-\sqrt{n}}{4}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to-\infty\,.$$

Beraz, ez da existitzen f funtzioaren limitea (0,0) puntuan.

iii) Orain $(1,0)\in\operatorname{int}D$ da. Kalkula ditzagun deribatu partzialak:

$$f_1(x,y)=\frac{y\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-y)^2-y\sqrt{x}\,2(x-y)}{(x-y)^4}\,,$$

$$f_2(x,y)=\frac{\sqrt{x}(x-y)^2+y\sqrt{x}\,2(x-y)}{(x-y)^4}\,.$$

Deribatu partzial horiek existitzen dira $(1,0)$ puntuaren ingurunean eta jarraituak dira $(1,0)$ puntuan; izan ere, polinomioak eta erroa (funtzio jarraituak) batzen, kentzen, biderkatzen, zatitzen eta konposatzen ari dira, izendatzailea $(1,0)$ puntuan zero ez izanik. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(1,0)$ puntuan. Hortaz deribagarria eta jarraitua da. Funtzioa $(1,0)$ puntuan jarraitua denez, limitea existitzen da puntu horretan.

2. (8 puntu) Kalkulatu funtzio hauen deribatu partzialak:

i) $f(x,y)=\cos^2\left(\frac{2y}{x^2}\right)$.

$$f_1(x,y)=2\left(\cos\left(\frac{2y}{x^2}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{2y}{x^2}\right)\right)\frac{-2y2x}{x^4}=8\left(\cos\left(\frac{2y}{x^2}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{2y}{x^2}\right)\right)\frac{y}{x^3}\,,$$

$$f_2(x,y)=2\left(\cos\left(\frac{2y}{x^2}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{2y}{x^2}\right)\right)\frac{2x^2}{x^4}=-4\left(\cos\left(\frac{2y}{x^2}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{2y}{x^2}\right)\right)\frac{1}{x^2}\,.$$

ii) $f(x,y)=\ln(2xy^4)$.

$$f_1(x,y)=\frac{1}{2xy^4}2y^4=\frac{1}{x}\,,$$

$$f_2(x,y)=\frac{1}{2xy^4}2x4y^3=\frac{4}{y}\,.$$

iii) $z=\left(g\left(e^{xy}\right)\right)^3$, non $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ den.

$$z_1 = 3\left(g\left(\mathrm{e}^{xy}\right)\right)^2 g'\left(\mathrm{e}^{xy}\right)\mathrm{e}^{xy} y\,,$$

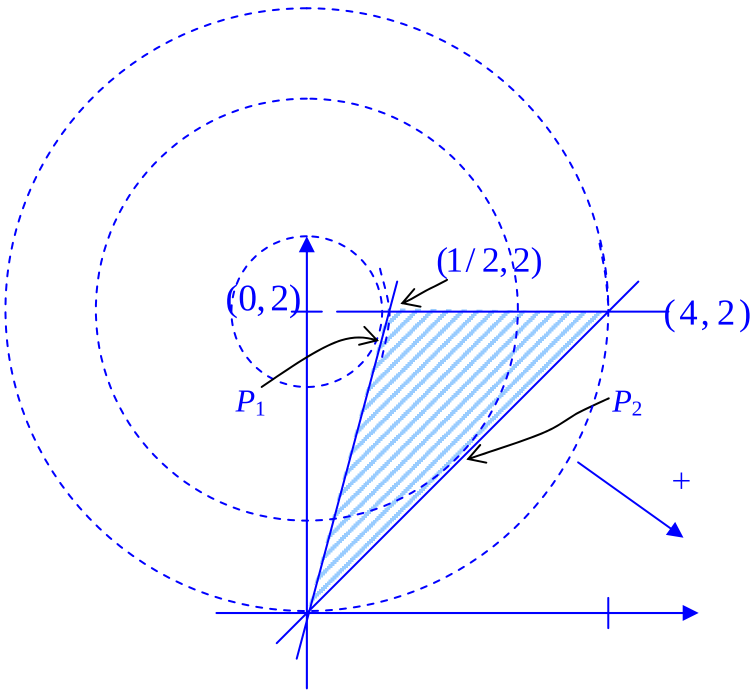
$$z_2 = 3\left(g\left(\mathrm{e}^{xy}\right)\right)^2 g'\left(\mathrm{e}^{xy}\right)\mathrm{e}^{xy} x\,.$$

iv) $z = y^2 f(x^2, 2\sqrt{x-y})$, non $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ den.

$$z_1 = y^2\left[\left(f_1(x^2, 2\sqrt{x-y})\right)2x + \left(f_2(x^2, 2\sqrt{x-y})\right)2\frac{1}{2\sqrt{x-y}}\right],$$

$$z_2 = 2yf(x^2, 2\sqrt{x-y}) + y^2\left(\left(f_2(x^2, 2\sqrt{x-y})\right)2\frac{-1}{2\sqrt{x-y}}\right).$$

3. (12 puntu) Kalkulatu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \le 4x,\ y \le 2,\ y \ge x\}$ multzoarekiko $f(x, y) = x^2 + (y-2)^2$ funtzioaren mutur lokalak eta globalak.



i) Azter dezagun A-ren barrualdea, mutur ez-baldintzatuen teoria erabiliz:

Baldintza beharrezkoak ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y)=2x=0 \Leftrightarrow x=0 \\ f_2(x,y)=2(y-2)=0 \Leftrightarrow y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y)=(0,2)\,.$$

Eta $(0,2)\notin \operatorname{int} A$ denez, barrualdean muturrik ez da lortzen.

A-ren muga:

- $y=x$ zatian muturrik ez da lortzen, maila-lerroa ukitzailea den puntuan (P_2 puntuan) A multzoaren alde bateko inguruneko puntuen irudiak handiagoak, eta beste aldekoen irudiak txikiagoak, direlako.

- $y=4x$ zatian, P_1 puntuan minimo lokala lortzen da, inguruneko A multzoko puntuetan irudiak handiagoak direlako. Puntu hori aurkitzeko lagrangearra erabiliko dugu:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+(y-2)^2+\lambda(y-4x)\,.$$

Eta deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda(-4)=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2(y-2)+\lambda=0 \\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y-4x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda=2x/4 \\ \lambda=-2(y-2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2x/4=-2(y-2)\ .$$

$\left\{\begin{array}{r} 2x/4=-2(y-2) \\ y-4x=0 \end{array}\right.$ sistema ebatziz, $(x,y)=\left(\dfrac{8}{17},\dfrac{32}{17}\right)=P_1$ dugu.

- Maila-lerroen bidez, $(0,0)$ eta $(2,2)$ puntuetan maximo lokalak lortzen dira, eta $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ puntuan ezer ez da lortzen. Lehenengo bi puntuetan, *A* multzoko inguruneko puntuetan irudiak txikiagoak dira. Eta $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ puntuan maila-lerroak muga ebakitzean, alde bateko inguruneko puntuetan irudiak txikiagoak dira, eta beste aldekoetan, handiagoak.

ii) Maila-lerroei begiratuz, eta $f(0,0)=f(2,2)=4$ kontuan izanik, $(0,0)$ eta $(2,2)$ puntuetan maximo globala lortzen da. Bestalde, $\left(\dfrac{8}{17},\dfrac{32}{17}\right)$ puntuan minimo globala lortzen da.

4. (8 puntu) Demagun $f(x,y)=(g(x,y))x^3$ funtzioa, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa izanik.

i) *f* funtzioa homogeneoa al da? Zein gradutakoa?

ii) Eta $f(2,4)=64$ bada, aurkitu $f(1,2)$.

iii) Konprobatu *f* funtzioak Eulerren teorema egiaztatzen duela.

i) Definizioa erabiliz, $f(tx,ty)=(g(tx,ty))(tx)^3=(t^2g(x,y))(t^3x^3)=t^5(g(x,y))x^3=t^5f(x,y)$ da. Hortaz, *f* funtzioa 5. mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Homogeneotasun maila kontuan izanik, $f(2,4)=2^5f(1,2)$ da. Eta $f(2,4)=64$ denez, $f(1,2)=\dfrac{64}{32}=2$ da.

iii) Eulerren teoremaren berdintza honako hau da:

$$xf_1(x,y)+yf_2(x,y)=x((g_1(x,y))x^3+(g(x,y))3x^2)+y(g_2(x,y))x^3$$

$$=x^3(xg_1(x,y)+yg_2(x,y))+3x^3g(x,y)=x^3 2(g(x,y))+3x^3(g(x,y))=5f(x,y).$$

Ondorioz, *f* funtzioak Eulerren teorema egiaztatzen du. Hirugarren berdintzan *g* funtzioa 2. mailako funtzio homogeneoa dela (eta beraz, Eulerren teorema egiaztatzen duela) erabili dugu.