Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Errenta finkoa eta bere modelizazioa

Gradu Amaierako Lana
Matematikako Gradua

Jone Ascorbebeitia Bilbatua

Larraitz Aranburu Laka
Irakasleak zuzendutako lana

Leioa, 2014ko ekainaren 20a

Aurkibidea

Sarrera **v**

I. Lehenengo atala **1**

1 Oinarrizko kontzeptuak **3**
1.1 Oinarrizko kontzeptuak 3
1 Bono baten ezaugarriak 4
1.2 Bonoen balorazioa 6
1 Arbitraje eza 6
2 Bono baten balorazioa 6

2 Interes tasaren modelizazioa **13**
2.1 Interes-tasen oinarrizko kurbak 13
2.2 Aldagai bakarreko ereduak 16
1 Prozesu estokastikoak 16
1 Propietate orokorrak 21
2 Ereduak 22
1 Merton eredua 22
2 Vasicek eredua 23
3 Cox, Ingersoll and Ross eredua edo CIR eredua 24
4 Black eta Scholes eredua 25
5 Brennan eta Schwartz eredua 25

II. Bigarren atala **27**

3 Kasu praktikoa **29**
3.1 Ereduak 34
1 Merton eredua 34
2 Vasicek eredua 37
3 CIR eredua 40
4 Black eta Scholes eredua 42
5 Brennan eta schwartz eredua 45

3.2 Ondorioak 47

Bibliografia **51**

Sarrera

Interes tasak eguneroko bizitzan agertzen dira, ez dira gauza arraroa. Banku-kontu baten dirua sartzen dogunean, denbora aurrera joan ahala diru kopuru hori handitzen joatea espero dogu. Baina badakigu diru hori bihar edo aste bat barru berreskuratzea ez dala gauza bera, zehazki bere "balioa" ez da bera. Gure helburua gaur inbertitutako diruak etorkizunean izan daiken balioa ezagutzea da. Hasiera batean inbertitutako diru hori mailegu bat da. Horregaitik, maileguan emoten dogun dirua ez dogu doan emoten. Mailegutza horren ordez interes batzuk jasotzen doguz eta interes horreek kupoiak emongo deuskuez. Gure kasuan hasierako kapitala bonoak izango dira.

Lehenengo kapituluan oinarrizko kontzeptu batzuk definituko doguz ondoren datorrena ulertu ahal izateko. Kontzeptu horreek ekonomiaren munduan etengabe erabiltzen diren kontzeptuak dira. Bono bat, epemuga, *"cash-flow"*-ak edo kupoia bezalako kontzeptuak definituko doguz. Bonoen artean oso bereziak diren bono mota batzuk dagoz, zero kupoiko bonoak. Aurrerantzean bono mota honeek erabiliko doguz. Zero kupoiko bonoetan "balioa" eta "prezioa" kontzeptuak desbardinduko doguz epemuga desberdinetarako. Bono baten balioa zein une jakin bateko prezioa kalkulatzerako orduan, interes-tasa garrantzi handiko balioa da. Baina zer da interes-tasa?. Interes-tasa hasierako nominala inbertitzeko konstante bat da eta denboran zehar bere balioa aldatu egiten da merkatuaren egoeraren arabera. Interes-tasak denboran zehar daukan eboluzioa grafikoki ere ikusi daiteke. Grafiko honeei *Zero kupoiko kurbak* deitzen jake. Eboluzioaren arabera zero kupoiko kurba ezberdinak lortzen dira.

Dakigunez, interes-tasaren balioa merkatuko ezaugarri ezberdinen menpean dago eta ezaugarri horreen arabera aldatzen da. Posiblea da orainarte ezaguna dan informazioa erabiltzea, baina orain jaulkitzen dan bono baten etorkizuneko balioa ezagutzeko guztiz beharrezkoa da epemugararte dagozan denbora-unitateetan interes-tasaren balioa zein dan ezagutzea. Guk euriborrarekin lan egingo dogu. Etorkizuneko interes-tasaren balioa aldez aurretik ezagutzea ezinezkoa danez, balio hori aurresan nahiko dogu. Horretarako interes-tasa modelizatzen saiatuko gara. Eredu ezberdinak dagoz, baina lan honetan Merton, Vasicek, CIR, Black eta Scholes eta Brennan eta Schwartz-en ereduak aztertuko doguz. Eredu horreek euriborraren datuetara aplikatuko doguz. Eredu bakoitzak ezaugarri batzuk daukaz eta eredu batzuk beste batzuk baino hobeto modelizatuko dabe euriborra. Gainera, euriborraren etorkizuneko balioa aurresan nahi dogunez, ereduaren arabera aurresan bat edo beste bat lortuko dogu. Gu aurresanik onenaren edo zehatzenaren bila gabilz. Eredu ezberdinak aztertu eta gero, konparatu egingo doguz euriborraren datuetarako egokiena dana eta baita interes-tasa hobeto modelizatzen dauana aukeratzeko.

I. atala

1. kapitulua

Oinarrizko kontzeptuak

Lehenik eta behin komenigarria litzateke errenta finkoari buruzko oinarrizko zenbait kontzeptu ezagutzea.

1.1 Oinarrizko kontzeptuak

Finantzen munduan, bono, epemuga, kupoi eta antzeko hitzak etengabe erabiltzen dira. Baina, zer da bono bat? Eta kupoi bat? Aurrera egin aurretik definitu daiguzan era honetako oinarrizko kontzeptu batzuk.

Definizioa 1. Izan bitez t eta T bi denbora une non $t < T$ dan. $\gamma(t, T)$ t eta T uneen arteko denbora neurria dala esango dogu eta t eta T daten arteko *urte-zatiki* moduan ezagutzen da.

t eta T-ren arteko aldea egun batekoa baino txikiagoa danean, $\gamma(t, T)$ T-t denbora-uneen artean dagoen urte-diferentzia bezala interpretatzen da. Bereziki, data biren arteko denbora diferentzia neurtzeko egiten dan aukeraketari *egun-kopuru hitzarmena* deritsogu.

Denbora neurtzeko era merkatuaren araberakoa da. Hori dala eta egun-kontaketa ezberdinak dagoz. Ikusi daiguzan adibide esangarri batzuk:

- *orainaldia*/365: Hitzarmen honetan urteak 365 egun daukaz eta data biren arteko urte-zatikia 365-ekin zatitzen dan data bien arteko egun kopurua da. Hau da, $D_1 = (e_1, h_1, u_1)$ eta $D_2 = (e_2, h_2, u_2)$ data bi badira, bien arteko urte-zatikia hurrengoa izango da:

$$\frac{D_2 - D_1}{365}$$

- *orainaldia*/360: Hitzarmen honetan aldiz, urteak 360 egun daukaz. Beraz, aurreko era berean:

$$\frac{D_2 - D_1}{360}$$

- 30/360: Adibide honetan hilabete bakoitzak 30 egun eta urteak 360 egun daukazala onartzen da. Kasu honetan erne ibili behar da hilabete bakoitzak daukazan egun kopuruarekin, hilabete batzuk 28-29 nahiz 31 egun izan daikiezalako.

Definizioa 2. *Bono* bat hartzaileak edo erosleak igorleari egiten deutson mailegu bat da.

1 Bono baten ezaugarriak

Gobernuak, enpresek nahiz administrazioek bonoak jaukitzen dabez kapital falta daukienean. Adibidez, Estatuko bono bat erosten badogu, Gobernuari dirua maileguz emoten ari gara. Aldiz, enpresa bati hartzen badeutsagu, enpresa horri ari gara dirua maileguan emoten. Mailegu arrunt bat balitz bezala, bono batek aldiro-aldiro interesak ordaintzen dauz eta maileguz hartutako guztia bueltatzen dau adostatutatutako epemugan. Epemuga hori era ezberdinetan neurtua izan daiteke, eguneka, hileka nahiz urteka.

Hartzaile batek bono bat erosten dauanean, adostatutako epean bonoaren hartzaileari bueltatzen deutson diru-kopuruari bonoaren *balio nominala* esaten jako. Gainera, hasierako unean inbertitzen dan diru kopurua *nominala* deituko deutsagu. Esan bezala, bono batean aldiro-aldiro interesak ordaintzen dira.

Definizioa 3. *Bono baten epemuga* bonoaren amortizazio unea da, hau da, mailegua berreskuratzen dan unea, eta T adieraziko dogu. Aldiz, t unetik $T > t$ bonoaren amortizazio unerarteko edo mailegua berreskuratzerarteko denborari *epemugararteko denbora* esango deutsagu eta $\tau(t, T)$ adieraziko dogu. Denbora kopurua urteetan neurtzen da.

Nabaria dan moduan, denbora une biak urte berekoak badira data bien aldea egunetan neurtuko da.

Adibidez, bono batek hamar urterako epemuga badauka, igorleari amortizatuko jako hamar urteren buruan.

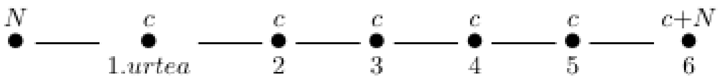
Definizioa 4. Izan bedi T epemuga daukan bono bat. *Denbora unitatea* t_1 eta t_2 bi uneren arteko denbora bezala definitzen da, $t_0 \leq t_1, t_2 \leq T$ eta t_0 hasierako unea izanik. Denbora unitatea Δt adieraziko dogu.

Bono bat epemugara heltzeko pasatu beharreko denbora oso garrantzitsua izan daiteke arriskuari zein errentabilitateari begira. Faktore ezberdinek eragin daikie bonoaren igorleak hartzaileari ordaindu ezin izateko. Gainera, zenbat eta bonoaren epemuga luzeagoa izan, gainerako arriskua orduan eta handiagoa izango da.

Definizioa 5. Bonoa jaulkitzerako momentuko interes motari *kupoia* deitzen jako. Kupoi baten kalkulurako nominala eta interes-tasa baino ez doguz kontutan hartu behar. Holan, kupoi baten balioa $c = r \cdot \Delta t \cdot N$ izango da, r une horretako interes-tasa eta N hasierako nominala izanik.

Adibidea 1. Estatu Batuetan adibidez, kupoiak bi urterik behin ordaintzen dira. Suposatu daigun hasierako nominala N dala eta r interes-tasarekin inbertitu nahi dogula 6 urtera. Kupoiak bi urterik behin ordaintzen badira, inbertsioa egin eta bi urteren buruan c kobratuko dogu eta lau urteren buruan ere c kobratuko dogu. Sei urteren buruan aldiz, $c+N$ kobratuko dogu. Beraz, hurrengo egoeraren aurrean egongo gara:

Europan aldiz, ohikoena urtero ordaintzea izaten da. Goiko egoera berean, demagun hasierako nominala N dala eta r interes-tasarekin inbertitu nahi dogula 6 urtera. Kupoiak urtero ordaintzen diranez, urtero c kobratuko dogu lehenengo eta bosgarren urteen bitartean. Seigarren urtean aldiz, $c+N$ kobratuko dogu. Beraz, hurrengo egoeraren aurrean egongo gara:



Bono mota ezberdinen artean zero kupoiko bonoak oso garrantzitsuak dira.

Definizioa 6. *Zero kupoiko bonoak* kupoi bakarra ordaintzen daben bonoak dira eta kupoiaren ordainketa T epemugako unean gertatzen da hasierako nominalarekin batera.

Beraz, zero kupoiko bonoetan ez dago aldiro-aldiro kupoiak jasotzeko aukerarik eta ordainketa guztia behin egiten da. Horretaz aparte, erosketa-prezioa bere benetako balioa baino baxuagoa danez, erosleentzat erakargarria egiten da.

Zero kupoiko bono bat badaukagu gure egoera hurrengoa izango da:

Adibidea 2. Aurreko adibidearen egoera berean, demagun N hasierako nominala 6 urtera inbertitzen dogula r interes-tasarekin. Orduan, hasieran N inbertitzen dogu eta 6 urteren buruan $c+N$ kupoia eta nominala kobratuko doguz. Bitartean ez dogu kupoirik kobratuko.

Gure lanaren helburua interes-tasa modelizatzea da, hau da, interes-tasaren eboluzioa aurresatea. Horretarako bonoak aztertzen hasi gara, baina interes-tasak zerikusi handia dauka bonoen prezioaz hitz egiten dogunean. Hori dala eta, bono bat zelan baloratzen dan aztertuko dogu. Gainera, bono bati prezioa zelan jarri ikusiko dogu.

1.2 Bonoen balorazioa

1 Arbitraje eza

Ekonomiaren oinarrietako bat arbitrajea da. Gure helburua hurrengoa da: bono bat merke erostea eta garesti saltzea. Demagun hasieran ezaugarri berdineko A eta B bono bi daukaguzala. Guk merke erosi eta garesti saldu nahi dogunez etekina atara ahal izateko eta A bonoa merkeagoa danez, A bonoa erosten dogu. Bonoak ezaugarri berdinekoak direnez eta B bonoa garestiago dagoenez, erosi dogun bonoa B bonoaren prezioan saltzen dogu. Erosi dogun baino garestiago saltzen dogunez, irabaziak jaso doguz. Beste batzuk ere, gutaz aparte, konturatuko dira eragiketa berdina eginda irabaziak lortu daikiezala. Horregatik danok nahiko dogu merkea erosi eta garesti saldu. Eskaintza eta eskariaren legea dala eta, A bonoaren prezioa igon egingo da eskari handia dagoelako eta B bonoaren prezioa jaitsi egingo da eskaintza gitxi dagoelako. Horrela, bono bien prezioa bardindu egingo da. Orduan, ezaugarri berdineko bi bonok azkenean prezio berdina eukingo dabe. Mota honetako eragiketetatik etekina ataratzeko zuhur ibili behar da. Lehenengo konturatzen diranak bakarrik etekinak atarako dabez. Beste guztiek ere bide bera jarraitu nahiko dabe, baina ekaintza-eskariaren zikloan sartuko dira eta bonoen prezioa bardindu egingo da. Horregaitik, arbitrajerik balego, merkatuak berehala orekatuko leukela esaten da. Beraz, arbitraje eza kontsideratu daikegu, hau da, etorkizunean prezio bardina izango daben bono bik, orain ere prezio bardina eukin behar dabe.

Vasicek-ek arrazonamendu hau erabili eban interesaren menpeko bono baten etorkizuneko prezioa kalkulatzeko eredua garatzerako orduan. Vasicek ereduari eta beste eredu batzuei buruz beranduago hitz egingo dogu.

2 Bono baten balorazioa

Izan bedi N hasierako nominala. Zero kupoiko bono batek, epemugara heltzen danean, hasierako nominala eta nominal horren interesa emoten dau; hau da, $N + N \cdot r$. Baina ez da aurkitu daikegun egoera bakarra, denbora tarte ezberdinetan kupoiak ordaintzen dauzan bono bat ere eukin daikegu.

Kasu honetan kupoiak kobratuko geunkez adostatutako denbora-tarte bakoitzaren amaieran, eta hasierako nominala gehi kupoia epemugan.

Definizioa 7. *"Cash-flow"* edo *kaxa-fluxua* irabazien eta amortizazioen arteko batura da eta kobrantza eta ordainketen arteko erlazioa neurtzen dau. Beraz, *"cash-flow"*-ak etekinaren adierazleak dira.

Ondorioz, aurrekoak bono baten *"cash-flow"*-ak izango litzatekez, non $c = r_{\Delta t} \cdot N = \Delta t \cdot r \cdot N$ kupoiak diren.

Orain arte azaldutako guztia interes-tasaren menpean dago, baina zer da interes-tasa? Zein ezaugarri daukiez interes-tasek?. Aurrera egin ahal izateko aztertu daigun zer dan interes-tasa.

Definizioa 8. *Interes-tasa sinplea* interes-tasa konstante bat da, zeinetan N nominalaren inbertsioa egiten dan. Nominala ez da etengabe handitzen, interesak aldiro aplikatzen baitira. Interes-tasa hau r adieraziko dogu:

$$r = -\frac{1-N}{\tau(t,T)N}$$

Zero-kupoiko interes-tasa oso desberdinak dagoz. Guk urte beterako interes-tasak erabiliko doguz. Gaur N hasierako nominala inbertitzen badogu r interes-tasa sinplearekin, hemendik urte betera hasierako N eta berorrek emondako interesa $N \cdot r \cdot \Delta t$ berreskuratuko doguz. Beraz amaieran $N + N \cdot r \cdot \Delta t = N(1 + r \cdot \Delta t)$ berreskuratuko dogu.

Suposatu daigun orain datorren urtean barriro inbertitu nahi dogula. Egoera honetan, hasierako nominala orain $N(1 + r \cdot \Delta t)$ da; orduan urte betera $N(1+r\cdot\Delta t)+N(1+r\cdot\Delta t)\cdot r\cdot\Delta t = N(1+r\cdot\Delta t)(1+r\cdot\Delta t) = N(1+r\cdot\Delta t)^2$ berreskuratuko dogu. Horrela jarraituz, m urtetan inbertitu nahi izango bagendu ezer atara barik, m urteren buruan $N(1 + r \cdot \Delta t)^m$ jasoko geunke.

Ikusi daigun adibide bat ideia orokor bat eukiteko.

Adibidea 3. Demagun 1000 euro aurrestuta daukaguzala eta urte beterako inbertitu nahi doguzala. Demagun baita inbertsioaren uneko interes-tasa %5 dala. Orduan, urtea pasatu ondoren zenbat berreskuratuko dogu?

Daukaguzan datuak:

$r = 0.05$, $N = 1000$, $\tau(t, T) = \Delta t = 1$ urte

$$P(t, T) = N(1 + r) = 1000(1 + 0.05) = 1000 + 50 = 1050 \text{ euro}$$

$c = r \cdot \Delta t \cdot N = 0.05 \cdot 1 \cdot 1000 = 50$ euro kupoiaren balioa izango da.

Eta urtean kupoi bakarra emon beharrean kupoi bi emoten badauz?

$P(t,T) = 1000 * (1+0.05)^{1/2}(1+0.05)^{1/2} = 1050!!$. Hau da, diru kopuru bardina berreskuratzen dogu amaieran kupoi bakarra emon edo urtean bi kupoi emoten badauz.
Orduan, zein desberdintasun dago?
Urte erdian jasotako 25 horreek barriro berrinbertitu daitekezala eta ondorioz, errentagarritasuna handitu.

Zero-kupoiko bono baten ordez, kupoiak aldiro-aldiro jasotzen badira, antzeko zeozer egiten da. Kasu honetan aipatu beharra dago denbora unitate bakoitzaren amaieran jasotako kupoiak geldi eukin beharrean berrinbertitu egiten direla. Orduan, nominalak emoten dauzan etekinetatik aparte, c kupoiak r interes-tasan inbertitzen doguz kupoi horreetatik ere etekina ataratzeko.

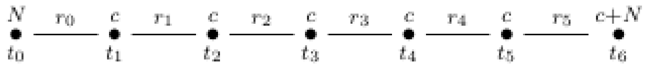
Izan bitez N nominala, Δt urte bat, r_0 interes-tasa eta n denbora unitate. Kupoia $c = \Delta t \cdot r_0 \cdot N$ izango da. Orduan hurrengo egoeran egongo ginateke:

- t_1 unean kupoia jasoko dogu eta kupoi hori $t_1 - t_2$ denbora unitatean berrinbertituko dogu denbora unitate horretako interes-tasarekin.
- t_2 unean c kupoia eta aurreko denbora unitatean berrinbertitutako kupoiaren interesak jasoko doguz. Beraz, $c+c+c\cdot r_1 = c+c(1+r_1)$. Une honetan jaso dogun guztia $t_2 - t_3$ denbora unitatean berrinbertituko dogu denbora unitate horretako interes-tasarekin.
- t_3 unean c kupoia eta aurreko uneetan berrinbertitutako kopuruaren interesak jasoko doguz. Beraz, $c + (c + c(1 + r_1))(1 + r_2) = c + c(1 + r_2) + c(1 + r_1)(1 + r_2)$. Une honetan jasotako guztia berrinbertituko dogu denbora unitate horretako interes-tasarekin.

...

- $t_n = T$ epemugako unean, kupoiaz gain nominala eta aurreko unean azken denbora unitateko interes tasan berrinbertitutako kopuruak emoten dauzan interesak ere jasoko doguz. Beraz, $c+N+c(1+r_{n-1})+c(1+r_{n-2})(1+r_{n-1}) + ... + c(1+r_1)(1+r_2)...(1+r_{n-2})(1+r_{n-1})$ eskuratuko dogu epemugan.

Adibidea 4. Izan bitez $N = 1000$, $\Delta t = 1$ urte eta $r_0 = \%5$. Kasu honetan denbora-tarte ezberdinetan kupoiak ordaintzen dira. Demagun 6 denbora-tarte daukaguzala, orduan hurrengo egoeran egongo ginateke:



Aurreko azalpenari jarraituz, kupoiaren balioa $c = r_{\Delta t} \cdot N = \Delta t \cdot r_0 \cdot N = 1 \cdot \frac{5}{100} \cdot 1000 = 50$ da. Orduan, aurreko diagrama jarraituz:

- t_1 unean kupoia bakarrik jasoko dogu eta t_1-etik t_2-ra kupoi hori berrinbertituko dogu denbora-tarte horretako interes-tasarekiko. Beraz, momentuz $c = 50$ daukagu eskuetan.

- t_2 unean, t_1 unean bezala, kupoia jasoko dogu; baina gainera, aurreko t_1 unean berrinbertitutako kupoiaren interesak ere jasoko doguz. Hori dala eta, momentu honetan daukagun kopurua $c + c + c \cdot r_1 = c + c(1 + r_1) = 50 + 50(1 + r_1)$ da. Orain, une honetan daukagun guztia berrinbertituko dogu t_2-tik t_3-ra dagoen interes-tasarekiko.

- t_3 unean, t_1 eta t_2 uneetan bezala, kupoia jasoko dogu eta gainera, aurreko pausuan berrinbertitutako kupoiaren interesak ere. Beraz, orain $c + c + c + c \cdot r_1 = c + (c + c(1 + r_1))(1 + r_2) = 50 + (50 + 50(1 + r_1))(1 + r_2) = 50 + 50(1 + r_2) + 50(1 + r_1)(1 + r_2)$ eukiko dogu. Hurrengo denbora tarterako barriro berrinbertituko geunke une honetan jasotako guztia.

...

- t_6 unean, epemugan gagozanez, kupoia eta nominala jasoko doguz. Horrez gain aurreko pausuan berrinbertitutako kupoiaren interesa ere kontuan hartu behar dogu. Beraz, amaieran $(1000+50)+50(1+r_5)+50(1+r_4)(1+r_5)+50(1+r_3)(1+r_4)(1+r_5)+50(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)(1+r_5)+50(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)(1+r_5)$ daukagu.

Holan, bono baten prezioa zer dan esateko gai gara.

Definizioa 9. *Bono baten prezioa* norbaitek etorkizuneko *"cash-flow"* guztiengatik ordainduko leuken diru kantitatea da.

Definizioa 10. Etorkizunean epemuga daukan balio baten aurrezordainketari *deskontua* esaten jako. $T = t_n$ epemuga bada, t_k uneko deskontua $\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(1+r_i)}$ formularen bitartez kalkulatzen da, non r_i denbora unitate bakoitzeko interes-tasa dan eta $1 \leq k \leq n$.

Bono baten prezioa kalkulatzerakoan, egindako berrinbertsioak oso garrantzitsuak dira. Suposatu daigun N inbertitu dogula $T = t_n$ epemugara.

Beraz, bonoaren prezioa etorkizuneko *"cash-flow"*-en deskontatutako balioa da, hau da:

$$P = \frac{c}{1+r_0} + \frac{c}{(1+r_0)(1+r_1)} + ... + \frac{c+N}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+r_i)}$$

Hala ere, hasiera batean guk ez dakigu etorkizunean *"cash-flow"*-ak berrinbertitzeko denbora unitate bakoitzean egongo dan interes-tasa. Hori dala eta, bono baten prezioa i-garren unean hurrengoa izango da:

$$P_i = \frac{c}{1+r_i} + \frac{c}{(1+r_i)^2} + ... + \frac{c+N}{(1+r_i)^{n-(i+1)}}$$

Zein da horren arrazoia?Aztertu daigun unez-une zer gertatzen dan.

Gaur c kobratuko bagendu, c kupoi hori berrinbertituko geunke eta hurrengo denbora unitatea pasatu eta gero t_2 unean $c(1+r_0)$ kobratuko geunke. Baina ez daukagu gaur, t_2 unean baizik. Horregatik, gaur $\frac{c}{1+r_0}$ izango bagendu bezala da.

Beraz denbora guztian r_0 interes-tasa berdina kontsideratuko dogu momenturarte ezagutzen dogun informazioa bakarrik erabili daikegulako. Ondorioz:

- t_0 unean, $P_0 = \frac{c}{1+r_0} + \frac{c}{(1+r_0)^2} + ... + \frac{c+N}{(1+r_0)^{n-1}} = N$, beti berreskuratu beharko da kasu honetan hasierako nominalaren balioa.

Baina t_1 unera heltzean informazio barria daukagu. Informazio barri hori erabiltzen badogu:

- t_1 unean, $P_1 = \frac{c}{1+r_1} + \frac{c}{(1+r_1)^2} + ... + \frac{c+N}{(1+r_1)^{n-2}}$.

t_2 unera heltzean, t_1 uneko informazioa ez dogu erabiliko oraintsuago informazio berria jaso dogulako. Orduan:

- t_2 unean, $P_2 = \frac{c}{1+r_2} + \frac{c}{(1+r_2)^2} + ... + \frac{c+N}{(1+r_2)^{n-3}}$.

...

Baina t_i i-garren unera heltzean informazio barria daukagu eta une bakoitzean datorkigun informazio barri hori erabiliko dogunez, une bakoitzeko prezioa aldatu egiten da:

- t_i unean, $P_i = \frac{c}{1+r_i} + \frac{c}{(1+r_i)^2} + ... + \frac{c+N}{(1+r_i)^{n-(i+1)}}$.

...

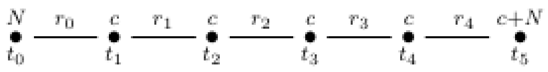
- t_{n-1} unean, $P_{n-1} = \frac{c}{1+r_{n-1}} + \frac{c+N}{(1+r_{n-1})^2}$.
- t_n unean, $P_n = \frac{c+N}{(1+r_n)}$.

Guzti honekin egindako inbertsioaren balioa lortuko geunke. Orduan:

Definizioa 11. Bono bat inbertitu eta gero, epemugan irabaziko dogun diru kopuruari *bonoaren balioa* esango deutsagu.

Inbertsioaren gaurko balioa jakin nahi bageunke, inbertsioaren balioa deskontatu beharko geunke, bonoei prezioa jartzen jaken era berean. Bonoen egungo balioa jakin nahi dogunez, etorkizuneko deskontatutako *"cash-flow"*-ak kontsideratuko doguz.

Suposatu daigun hurrengo egoeraren aurrean gagozala, $T = t_5$ epemuga izanik:



- t_1 unean ordainduko dan kupoi baten t_0 uneko balioa $\frac{c}{(1+r_0)}$ da, baina kantitate horren amaierako balioa

  $$\frac{c}{(1+r_0)}(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4) = c(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)$$

  izango da.

- t_2 unean ordainduko dan kupoi baten t_0 uneko balioa $\frac{c}{(1+r_0)(1+r_1)}$ da. Amaieran kantitate horren balioa

  $$\frac{c}{(1+r_0)(1+r_1)}(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4) = c(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)$$

  izango da.

- t_3 unean ordainduko dan kupoi baten t_0 uneko balioa $\frac{c}{(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)}$ bada, kantitate horren amaierako balioa

  $$\frac{c}{(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)}(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4) = c(1+r_3)(1+r_4)$$

  izango da.

- t_4 unean ordainduko dan kupoi baten t_0 uneko balioa $\frac{c}{(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)}$ da. Orduan kantitate horren balioa amaieran

  $$\frac{c}{(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)}(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4) = c(1+r_4)$$

  da.

Guzti hau kontutan hartuta, bonoaren balioa kalkulatzeko denbora unitate bakoitzean lortutakoari $c+N$ amaieran emoten deuskuena gehitu baino ez dogu egin behar. Beraz, bonoaren balioa:

$$c(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)+c(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)+c(1+r_3)(1+r_4)+c(1+r_4)+c+N,$$

hau da, momentuko interes tasara berrinbertitzen diren *”cash-flow”*-en batura.

Oharra 1. Ikusi daitekeen moduan, bono baten balorazioa egiterako orduan, oso garrantzitsua da denbora uneak argi eukitea, baita non gelditu behar dogun ere.
Adibidez, epemuga $T = t_n$ bada, kontuan izan behar da aurreko adibiderako t_0 uneko kupoiaren balioaren amaierako balioa $c(1 + r_4)(1 + r_5) \cdot ... \cdot (1 + r_{n-2})(1 + \mathbf{r_{n-1}})$ izango dala.

2. kapitulua

Interes tasaren modelizazioa

Nahiz eta guk urte baterako interes-tasak erabiliko doguzan, interes-tasak asko aldatzen dira epemugaren arabera. Gainera, interes tasa ez da era linealean aldatzen. Era honetan, interes tasak era independentean aldatzen dira epemuga desberdinetarako.

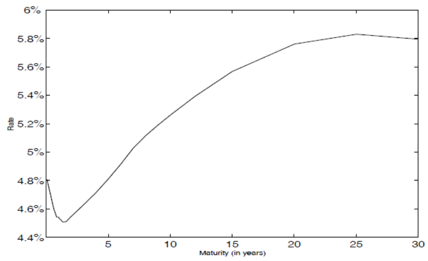
Urteko interes tasa r bada, Δt denbora tarteari dagokion interes tasa $r_{\Delta t} = \Delta t \cdot r$ da, Δt urtetan neurtuta egonik. Interes tasen denborazko egitura deskontu faktoreen nahiz zero kupoiko tasen bidez definitzen da eta orainaldiko bono baten balioa zehazteko balio dau. Holan, denborazko egituraren adierazpen grafikoak zero kupoiko bonoen interes-tasak euren epemugekin erlazionatzen dauz momentu konkretu batean. Adierazpen grafiko horri *zero kupoiko kurba* deitzen jako.

2.1 Interes-tasen oinarrizko kurbak

Definizioa 12. t une bakoitzerako *Zero kupoiko kurba* une bakoitzean interes-tasen eta dagokien epemugaren arteko erlazioa adierazten dauan kurba da.

Kurba mota honi *"yield curve"* (ingelesez) edo ETTI (Estructura temporal de los tipos de interes, erdaraz) deitzen jako.

Adibidea 5. Adibidez, 2001.urteko zero kupoiko kurba egun konkretu batean hurrengoa izan zan.



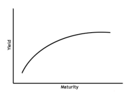
2.1. irudia. EURO merkatuko zero kupoiko kurba 2001eko otsailak 13an, arratsaldeko 5etan

Irudian ikusi daitekeen moduan, hasieran kurba beherakorra da denbora tarte txiki batean zehar. Hau da, gitxi gora behera lehenengo urtean zehar interes-tasa jaitsi egiten da, baina %4.5 inguruan dagoenean hurrengo lau urteetan asko hazten da. Beraz, askoz komenigarriagoa litzateke bost urtetara inbertitzea urte batera inbertitzea baino. Lehenengo urtean zehar interes-tasa jaitsi egiten danez, bost urtetara inbertitzerakoan emondako errentagarritasuna askoz handiagoa izango da eta beraz, gehiago irabaziko dogu. 15-20 urtetik aurrera interes-tasa orekatu egiten da. Beraz, denbora gehiagorako inbertitzeak ez dauka inongo zentzurik.

Zero kupoiko kurben artean egoeraren arabera hiru kurba mota bereiztu daitekez:

- Zero kupoiko kurba *gorakorra*: Zero kupoiko kurba hau merkatuaren baldintzak normalak direnean sortzen da, hau da, inbertitzaileak ekonomian aldaketa adierazgarririk egongo ez dala uste dauanean. Kurba mota hau arriskurik ez dagoenean emoten da eta hau da guk kontsideratuko dogun kurba mota.

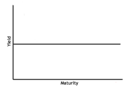
  Beste alde batetik, epemuga laburrerako interes-tasak epemuga luzerako interes-tasak baino handiagoak direnean emoten da kurba mota hau.

  2.2. irudia. Zero kupoiko kurba *gorakorra*.

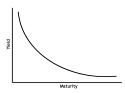
  Aurreko adibidean ikusitako 2001 urteko kurba mota honetako kurba da.

- Zero kupoiko kurba *laua*: Kasu honetan interes tasen mugimenduak era ezberdinetan interpretatzen dira. Interpretazioak kontrajarri egiten dira, hori dala eta ezin daiteke interes tasaren eboluzioa zehaztu. Kurba mota hau epemuga guztietarako interes-tasak berdinak direnean emoten da.



2.3. irudia. Zero kupoiko kurba *laua.*

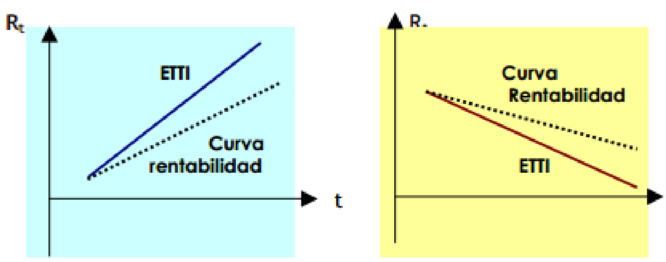
- Zero kupoiko kurba *beherakorra*: Epemuga laburrerako interes-tasak epemuga luzerakoak baino handiagoak direnean emoten da kurba mota hau.



2.4. irudia. Zero kupoiko kurba *beherakorra.*

Zero kupoiko kurbaren kalkulua sarritan zaila izaten da ez baitira epemuga desberdinetako zero kupoiko bono asko jaulkitzen. Hori dala eta, antzerako kontzeptu bat aztertuko dogu: errentagarritasun kurbaren kontzeptua. Kurba hau aurreko zero kupoiko kurbaren ordezko lez erabiltzen da.

Zero kupoiko kurba eta errentagarritasunaren kurba erlazionatuta dagoz. Interes tasen denborazko egitura gorakorra danean zero kupoiko kurba errentagarritasunaren kurbaren gainean kokatzen da, aldiz denborazko egitura beherakorra danean zero kupoko kurba azpian kokatzen da.



2.2 Aldagai bakarreko ereduak

1 Prozesu estokastikoak

Atal honetan interes-tasa modelizatzeko eredu ezberdinak ikusiko doguz. Aztertuko doguzan ereduak aldagai bakarrekoak izango dira, hala ere ikusiko dogu eredu batzuk beste batzuk baino hobeak direla. Ereduak aztertzen hasi baino lehen, kontzeptu batzuk definitu beharko doguz datorrena hobeto ulertu ahal izateko.

Interes-tasa denboraren menpeko aldagai bat da, beraz, interes-tasaren funtzioan idazten dan edozein funtzio ere denboraren menpekoa izango da. Gure helburuetako bat eredu bat eraikitzea da. Eredu honek denboran zehar behatu daitekeen aldagai baten egitura azaldu ez ezik, bere eboluzioa aurresatea ahalbidetu beharko deusku, gitxienez denbora laburrean. Orduan, *denborazko serie* bat denboran zehar era sekuentzialean lortutako aldagai baten balioen segida bat izango da.

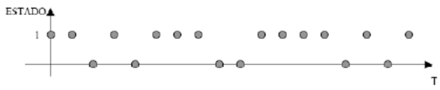
Definizioa 13. *Prozesu estokastiko* bat t denboraren azpiindizearen arabera ordenatuta dagozan $\{X_t : t \in T\}$ zorizko aldagaien multzoa da non T azpiindizeen multzoa dan.

Orduan, t une bakoitzerako X_t-ren bitartez adierazitako zorizko aldagai bat eukingo dogu. Beraz, prozesu estokastiko bat zorizko aldagaien segida bat bezala interpretatu daiteke eta aldagai horreen ezaugarriak denboran zehar aldatu daitekez.

Zorizko aldagaiaren balio ezberdinak *egoerak* dira. Hori dala eta, *egoera diskretuko tarteak* eta *egoera jarraituko tarteak* aurkitu daikeguz. Denbora adibidez, egoera diskretuko zein jarraitukoa izan daiteke. Denbora diskretua bada, egoera aldaketak egunero, hilero, urtero, ... gertatu daitekez; aldiz jarraitua bada, egoera aldaketak edozein unetan gertatu daitekez. Guk aztertuko doguzan prozesu estokastikoetan t-k denbora adieraziko dau, hau da, $\{X_t\}$ denboran zehar behatutako balioen multzoa izango da. Balio honeei *seinale* esaten jake, edo baita *denborazko serie* ere. Beraz, azpiindizearen motaren eta aldagaiaren arabera, prozesu estokastikoak ere halakoak izango dira:

- t diskretua bada eta gainera X_t zorizko aldagaia ere diskretua bada, prozesu estokastikoa egoera eta denbora diskretuduna izango da. Prozesu mota honi *katea* deitzen jako. Adibidez, demagun makina batek bi egoera posible daukazala: martxan egotea edo martxan ez egotea eta ezaugarri hau egunaren hasieran begiratzen dala. Martxan ez egoteari "0" egokitzen badeutsagu eta martxan egoteari "1" , hurrengo irudian egoera aldaketen sekuentzia posible bat adierazten da denboran zehar makina horrentzat:

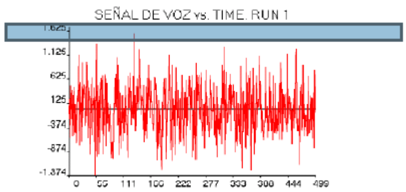
- t diskretua bada baina X_t zorizko aldagaia jarraitua bada, prozesu



estokastikoa egoera jarraituduna eta denbora diskretuduna izango da. Adibidez, produktu baten eguneroko tonelada produkzioa.

- t jarraitua bada baina X_t zorizko aldagaia diskretua bada, prozesu estokastikoa egoera diskretuduna eta denbora jarraituduna izango da. Prozesu mota honi *erabateko saltoetako prozesua* deitzen jako. Adibidez, seinale telegrafikoa. Egoera aukera bi baino ez dagoz (1 eta -1 adibidez) kasu honetan, baina egoera aldaketa edozein unetan gertatu daiteke. Hurrengo irudiak seinale telegrafiko bat erakusten dau:

- t jarraitua bada eta gainera X_t zorizko aldagaia ere jarraitua bada, prozesu estokastikoa egoera eta denbora jarraituduna izango da. Prozesu mota honi *prozesu jarraitua* deitzen jako. Prozesu honetan egoera aldaketak edozein unetan gertatu daitekez. Adibidez, demagun ahots-seinale bat ikusten ari garela osziloskopio bateko pantaila batean. Seinale akustikoa seinale elektriko analogiko baten eraldatzen da eta edozein balio hartu daike egoeren tarte jarraitu batean. Hurrengo irudian ahots-seinale bat adierazten da:



Guk egoera jarraituko prozesuak bakarrik erabiliko doguz eta azpiindizea denborari egokituko jako.

Kontzeptu garrantzitsu bat *gauzatzea* da. Gertakizun bat errepikatzean lortzen dan emaitzari *gauzatzea* esaten jako. Ikusi daigun prozesu estokastiko baten gauzatzearen adibide bat. Demagun motore baten tenperaturaren eboluzioa aztertu nahi dogula P puntu batean ordu betez era jarraituan. Orduan "uneko tenperatura P puntuan" aldagaia prozesu estokastiko jarraitua da, parametro jarraituduna. Azterketa behin egiten badogu, tenperaturaren eboluzioaren denbora-grafiko bat lortuko dogu; grafiko horrek prozesu estokastiko bat adierazten dau. Azterketa barriro errepikatzen badogu, beste grafiko bat lortuko dogu.

Beraz, prozesu estokastiko baten gauzatzea denboran zehar aldatzen dan aldagai baten balioen segida infinitua da. t jarraitua bada, adierazpen jarraitua lortuko dogu; t diskretua bada aldiz, puntuen segida bat lortuko dogu. Gauzatzearen eta denborazko seriearen arteko desbardintasuna elementuen kopuruan dago; gauzatzeak infinitu elementu daukaz, denborazko serieak aldiz, kopuru zenbakigarri bat.

Beraz, prozesu estokastikoen teoria denborazko serieei ere aplikatu ahal jake.

Prozesu estokastikoen artean, garrantzi handiko prozesu bat *Markov-en prozesua* da.

Definizioa 14. *Markov-en prozesua* prozesu estokastiko diskretu berezi bat da. Prozesu honetan gertaera bat emoteko probabilitatea aurreko gertaeraren menpe dago. Argi eukin behar da menpekotasuna aurreko gertaeran soilik dagoela, eta ez aurreko beste gertaera guztietan. Hau da, g_t gertaera, g_{t-1} gertaeraren menpe dago soilik, ez $g_{t-2}, ...$ aurreko gertaeren menpe. Ondorioz, azkenengo gertaerek guztiz baldintzatzen dabez etorkizuneko gertaerak. Aurreko gertaerarekiko menpekotasunak Markov-en prozesuak gertakizun askeko serieetatik bereizten dauz.

Egoera eta denbora jarraitudun Markov-en prozesu baten adibide garrantzitsuena mugimendu Browndarra da.

Definizioa 15. *Mugimendu Browndarra* edo *Wiener-en prozesua* balioak $\mathbb{R}$-n hartzen dauzan $\{W_t : t \geq 0\}$ prozesu estokastikoa da eta hurrengo propietateak betetzen dauz:

(i) $W_0 = 0$.

(ii) $t \hookrightarrow W_t$ ibilbide jarraituak dira.

(iii) Prozesuak gehikuntza askeak daukaz. $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ bada, orduan $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ zorizko aldagai askeak dira.

(iv) Edozein $0 \leq s < t$ denbora uneetarako, $W_t - W_s$ gehikuntza aldagaia batazbesteko nulua eta $t - s$ bariantza daukan aldagai Gaussiarra da. Hau da, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ banaketa normaldun aldagaia da.

Proposizioa 2.2.1. *Mugimendu Browndarrak propietate garrantzitsu bi daukaz:*

(i) *W_t aldagaia normala da, zentratuta dago eta bariantza t da.*

$$W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$$

(ii) *Prozesuaren* ΔW *gehikuntza* $\mathcal{N}(0,\Delta t)$ *da. Kontsideratu daigun* $(\Delta W)^2$ *aldagaia. Orduan,*

$$E((\Delta W)^2) = \Delta t, \qquad Var((\Delta W)^2) = 2(\Delta t)^2$$

Hori dala eta, $\Delta t \longrightarrow 0$ *bada, bariantza itxaropena baino txikiagoa da. Orduan, aldagaia itxarotako baliora hurbiltzen da eta ondorioz,*

$$(\Delta W)^2 \sim \Delta t, \quad \textit{edo ulertu geinke } (dW)^2 = dt.$$

Proposizioa 2.2.2. (i) W_t *aldagaiaren dentsitate funtzioa* $f_{W(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$ *da.*

(ii) $W(t)$ *gehikuntza egonkorreko prozesu estokastikoa da.*

Proposizioa 2.2.3. *Probabilitatea 1 bada,* $W(t)$ *prozesuak ez dira diferentziagarriak* $t \geq 0$ *guztietarako.*

Ondorioa 1. $W(t)$ prozesuak diferentziagarriak ez diranez beti, denbora diskretuko prozesu estokastiko batetik denbora jarraituko prozesu estokastiko batera pasatzea ez da berehalakoa. Hori dala eta, beste tresna batzuk eraiki behar dira.

Orokorrean, elementuak Wiener-en prozesu baten menpe daukiezan prozesu estokastikoak definitu daitekez. *Ito prozesua* edo *difusio prozesua* Wiener-en prozesu orokortu bat da. Prozesu honetan, μ eta σ parametroak denboraren eta aldagaiaren beraren menpeko funtzioak dira:

$$dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dW$$

Interes-tasetarako ereduetan iraganeko gertakizunek prozesu estokastiko baten orainean eta ondorioz etorkizunean izango daben eragina adierazi nahi dogu. Horretarako aukera desberdinak kontsideratu daitekez. Aukeretako bat prozesuaren oraingo balioa prozesuaren beraren aurreko balioen menpe era linealean idaztean datza. Idazkera barri honetan aldagaiak banaketa normala izango dauala suposatuko dogu. Beraz,

$$X_t = \delta + a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + ... + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t$$

δ konstante bat eta ε_t perturbazio bat izanik. Formulazio honi *autoerregresiboa* edo *autoatzerakorra* deitzen jako. Prozesu bat autoatzerakorra bada, autoatzerapen ordena zein dan jakin behar dogu. Prozesu bat $\mathcal{AR}(1)$ bada, X_{t-2}-ren eragina X_t gainean X_{t-1}-en bitartekoa da beti eta euren artean ez da eragin zuzenik existitzen. X_{t-1} ezagututa, X_{t-2}-ren balioa garrantziagabekoa da X_t-ren balioa aurresateko orduan. Balioen menpekotasuna era honetan irudikatu daiteke:

$$\mathcal{AR}(1) \; : \; X_{t-3} \rightarrow X_{t-2} \rightarrow X_{t-1} \rightarrow X_t$$

$\mathcal{AR}(2)$ prozesu batean aldiz, X_{t-1}-en bitartez X_t gainean transmititzen dan X_{t-2}-ren eraginaz gain, X_{t-2}-ren eragin zuzena existitzen da X_t gainean. Kasu honetan:

$$\mathcal{AR}(2) : \; X_{t-3} \rightarrow X_{t-2} \rightarrow X_{t-1} \rightarrow X_t$$

Autokorrelazio funtzio sinpleak X_t eta X_{t-2} kasu bietan erlazionatuta dagozala bakarrik kontutan hartzen dau. Aldiz, X_t eta X_{t-2}-ren arteko erlazio zuzena neurtzen badogu, $\mathcal{AR}(2)$-ren kasuan ez bezala, $\mathcal{AR}(1)$-en kasuan X_{t-2}-ren eragin zuzena X_t gainean nulua da.

Orokorrean, $\mathcal{AR}(p)$ batek 1, 2, ..., p atzerapenez bereizitako behaketen eragin zuzena jasotzen dau. Ideia honek autokorrelazio partzialeko funtzioaren erabilera ahalbidetuko dau. K ordeneko autokorrelazio partzialeko koefizientea k periodotan bereizitako behaketen erlazio lineala neurtzen dauan neurri moduan ulertu behar da, tarteko balioak edozein izanda ere. Atzerapenaren menpeko korrelazio partzialeko koefizienteen adierazpenari *autokorrelazio partzialeko funtzioa* esaten jako eta *fap* adierazten da. Honela, $\mathcal{AR}(p)$ prozesu batek autokorrelazio partzialeko lehenengo p koefizienteak zeroren desberdinak eukingo dauz. Hortaz, *fap* funtzioan, adierazgarriak diren koefiziente kopuruak $\mathcal{AR}$ prozesuaren ordena adieraziko dau.

Gure kasuan prozesu estokastikoa r(t) izango da.
Esan dogun bezala, interes-tasa modelizatu nahi dogu eta horretarako eredu ezberdinak proposatuko doguz.

Aldagai bakarreko ereduak interes-tasak aztertzeko eredu mota erabilgarriak dira eta hurrengo ekuazio diferentzial estokastikoaren bidez adierazten dira:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

Ekuazio honetan bi zati bereizten dira: $\mu(t, r(t))dt$ batugaia edo *"drift"* eta $\sigma(t, r(t))dW(t)$ batugaia edo *"difussion"*.

"drift" eta *"difussion"* batugaiek propietate berezi batzuk daukiez:

- *"drift"* osagaiak itxarotako aldaketa edo tendentzia neurtzen dau; *"difussion"* osagaiak aldiz, itxaroten ez dogun aldaketa, zehatz-mehatz itxarotakoarekiko aldaketaren desbiderapena adierazten dau. Beste era batean esanda, *"difussion"* batugaiak prozesuaren hegakortasuna adierazten dau.

- $E(dr) = \mu(t, r(t))dt$
- dW mugimendu Browndarra da eta zero batazbesteko eta dt desbiderapen estandarreko banaketa normalari dagokio, $dW \sim N(0, dt)$.
- $Var(dr) = \sigma^2(t, r(t)) \implies S_n(dr) = \sigma(t, r(t))\sqrt{dt}$. Gainera, dr-ren *"difussion"* batugaia $\sigma(t, r(t))dW$ danez, $dr = E(dr) + Dif(dr)$. $Dif(dr) > 0$ bada, benetako aldaketa itxarotakoa baino handiagoa izango da beti; baina hau ez da egia, $dW \sim N(0, dt)$ danez, $dW < 0$ izan baitaiteke.

1 Propietate orokorrak

- Suposatzen da interes-tasa aldagai jarraitua dala denboran zehar. Horregatik difusio prozesuak erabiliko doguz, saltorik gabeko prozesuak.
- Faktore bakar bat nahikoa da interes-tasen denborazko egitura zelan mugitzen dan azaltzeko.
- Faktorea edo aldagaia arriskurik gabeko epe laburrerako interes-tasa izaten da.
- Interes-tasa difusio prozesu baten arabera modelizatzen da.
- Helburua difusio prozesuko parametroak estimatzea da. Parametroen estimazioa egin ostean, denborazko egitura orekatua lortzen da. Guzti honek aktibo deribatuen balorazioa, portaera empirikoaren analisia nahiz estaldura estrategiak burutzea ahalbidetu daike.
- Parametroen murrizketek kasu partikular desberdinetara bidea emoten dabe. Kasu partikular honeek, gehienetan, batazbestekora itzultzea adierazten dabe.
- Autokorrelazio altua.
- Heterozedastizitatea, hau da, bariantza ez da konstantea.
- Zero-kupoiko kurbako aldaketak: paraleloak edo ez-paraleloak (aldaketak maldan edo kurbaturan).
- Eredurik erabilienak Black and Scholes eredua (1973an sortua), Vasicek eredua (1977an sortua), Brennan and Schwartz eredua (1973an sortua) eta CIR eredua (1985an sortua) dira. Hala ere Merton eredua (1973an sortua) ere ikusiko dogu eredurik sinpleena dalako.
- Desabantailak:
  - Epemuga ezberdinetako bonoen errentagarritasunek korrelazioa daukie. Epemuga hurbileko bonoek korrelazio altuak daukiez; epemugak urrunduz gero korrelazioa jaitsi egiten da, baina hala ere altua izaten jarraitzen dau.

– Gertatu daiteke aldagai bat interes-tasen portaera azaltzeko nahikoa ez izatea

Ekuazio diferentziala gehiago zehazten badogu:

$$\begin{aligned} dr(t) &= k(\theta - r(t))dt + \sigma r^{\gamma} dW(t), k, \tau > 0 && (2.1) \\ &= (\alpha + \beta \cdot r(t))dt + \sigma r^{\gamma} dW(t) && (2.2) \end{aligned}$$

Ekuazio honi *prozesu orokorra* deitzen jako. Prozesu honetan, (2.1) ekuazioko *"difussion"* batugaian konstantea dan prozesuaren bariantzaren zati bat agertzen da (σ) eta γ-ren balioen bitartez interes-tasaren menpe dagoen beste zati bat. Gainera, zenbat eta γ handiagoa izan, hegakortasunak r-rekiko menpekotasun handiagoa dauka. Zentzu honetan, prozesua autorregresiboa, autoatzerakorra edo ARIMA dala esaten da. θ parametroak epe luzerako batazbesteko interes-tasa adierazten dau; k parametroak aldiz, batazbestekora itzultzearen abiadura adierazten dau. k parametroaren balioaren arabera dr era ezberdinetan portatzen da:

- $k < 0$ bada, dr-k batazbestekora dibergitzen dau.
- $k = 0$ bada, dr-k ausazko balioak hartzen dauz.
- $k > 0$ bada, θ-ra zein arintasunarekin doan adierazten dau. $r < \theta$ bada, $dr > 0$ da, $r > \theta$ bada aldiz, $dr < 0$ izango da. Hala ere, θ-rantz joten dau beti.

Diskretizazio hurbildua eginez gero, lortutako eredua

$$r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \eta_t \text{ da,}$$

non $E(\eta_t) = 0$ eta $E(\eta_t^2) = \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma}$ diren, hau da, $\eta_t \sim N(0, \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma})$.

2 Ereduak

Prozesu orokorra apur bat aztertu ostean, ikusi daigun parametroen balio desberdinen arabera, zein berezitasun daukan eredu bakoitzak.

1 Merton eredua

Ekuazio orokorretik abiatzen gara: $dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r^{\gamma} dW(t)$

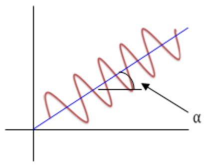
$\beta = 0$ eta $\gamma = 0$ balioak ekuazio orokorrean ordezkatzen badoguz, Mertonen eredua lortzen dogu:

$$dr = \alpha dt + \sigma dW$$

Eredua diskretizatzen badogu, ($\Delta t = 1$)

$$r_t - r_{t-1} = \alpha\Delta t + \sigma\Delta W = \alpha + \sigma\Delta W \longrightarrow r_t - r_{t-1} = \alpha + \eta_t,$$

non $E(\eta_t) = 0$ eta $E(\eta^2) = \sigma^2$, hau da, $\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$.
Orduan, $E(r_t - r_{t-1}) = \alpha$. Beraz, ez dago batazbestekora itzultzerik.



Gainera, dr-ren banaketa kasu honetan $dr \sim N(\alpha dt, \sigma^2 dt)$ da. Banaketa normaldun aldagai baten integrala aldagai normalen batura danez, r aldaketaren banaketa ere normala da. Orduan, r-k balio negatiboak ere hartu daikez, zentzugabekoa dana ikuspuntu ekonomiko batetik begiratuta. Gainera, $\gamma = 0$ danez, hegakortasuna batukorra da beti eta ondorioz interes-tasarekiko askea da.

Prozesu estokastikoan ikusi daikegun moduan, Mertonen ereduan ez dago atzerapenik. Beraz, esango dogu $\mathcal{AR}(0)$ prozesu autoerregresiboa edo autoatzerakorra dala.

Eredu hau ez da asko erabiltzen beharrezkoak diren baldintzak betetzen ez dauzalako. Hala ere, tendentzia dala eta, Merton-en eredu hau burtsako prezioak modelizatzeko ere erebili eitekean adibidez, baina hegakortasuna konstantea da.

2 Vasicek eredua

Barriz ere ekuazio orokorretik abiatzen gara: $dr(t) = (\alpha + \beta \cdot r(t))dt + \sigma r^\gamma dW(t)$

$\gamma = 0$ balioa ekuazio orokorrean ordezkatzen badogu, Vasicek eredua lortzen dogu:

$$dr = (\alpha + \beta \cdot r)dt + \sigma dW = k(\theta - r)dt + \sigma dW$$

Euler-en metodoaz diskretizatuz gero hurrengo eredua lortzen dogu interes-tasarako:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta \cdot r_{t-1} + \sigma\Delta W = \alpha + \beta \cdot r_{t-1} + \eta_t, \;\; \eta_t = \sigma\Delta W$$

Beraz,

$$r_t = \alpha + (\beta + 1)r_{t-1} + \eta_t, \;\; \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Eredu honen kasuan $k(\theta - r)$ batugaiak batazbestekora itzultzea badagoela adierazten dau. Gainera, ereduaren bigarren batugaian σ daukagunez, hegakortasuna konstantea da. Merton-en ereduan bezala, dr-ren banaketa normala da eta ondorioz r-k ere banaketa normala eukingo dau, $r \sim N(\theta + (r_0 - \theta)e^{-kt}, \frac{\sigma}{\sqrt{2k}}\sqrt{1 - e^{-2kt}})$. Hori dala eta, r negatiboa izan daiteke. Aurreko ereduan gertatzen dan bezala, honek ez dauka zentzurik ikuspuntu ekonomikoa kontutan hartzen badogu. Aurreko ereduarekin Vasicek ereduak beste ezaugarri bat dauka komunean. γ-ren balioa nulua danez, hegakortasuna batukorra da beti eta interes-tasarekiko independentea.

Hala ere eredu honetan abantaila bat dago, balioek itxura berezi bat hartzen dabe:

Irudian ikusi daitekeen bezala, balio negatiboen portzentaia oso txikia da.

Kasu honetan, β ereduan kontutan hartu beharreko parametro bat da, hau da, $\beta \neq 0$ kontsideratzen dogu. Hori dala eta, atzerapen bat daukagu eta ondorioz, Vasicek eredua $\mathcal{AR}(1)$ atzerapen bakarreko prozesu autoerregresiboa edo autoatzerakorra da.

Eredu hau nahiko erabilia izan da.

3 Cox, Ingersoll and Ross eredua edo CIR eredua

Prozesu orokorra hartzen badogu: $dr(t) = (\alpha + \beta \cdot r(t))dt + \sigma r^{\gamma} dW(t)$

Ordezkatu daigun ekuazioan $\gamma = 0.5$ eta ondorioz CIR eredua lortuko dogu:

$$dr = (\alpha + \beta \cdot r)dt + \sigma\sqrt{r}dW = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$$

Diskretizazioa aplikatu ondoren interes-tasarako lortzen dogun eredua hurrengoa da:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \eta_t \longrightarrow r_t = \alpha + (\beta + 1)r_{t-1} + \eta_t,$$

non $E(\eta_t) = 0$ eta $E(\eta_t^2) = \sigma^2 r_{t-1}$ diren, hau da, $\eta_t \sim N(0, \sigma^2 r_{t-1})$.

CIR eredua oreka orokorreko lehenengo eredua izan zan. Eredu honetan ere batazbestekora itzultzea daukagu. Ezaugarri adierazgarri bat $\gamma = 0.5$ balioa da. Hori dala eta, hegakortasuna ez da konstantea. Kasu honetan eredu ez-lineal bat daukagu eta Merton moduko ereduetan agertzen diren interes-tasa negatiboen probabilitatea ezabatu egiten da baina interes-tasen eta hegakortasunaren arteko erlazio positiboa mantendu egiten da. Gainera, r-k $r \sim \chi^2$ Ji- karratu banaketa jarraitzen dau. Horren ondorioz, r-k ez dau balio negatiborik hartzen.

CIR eredua $\mathcal{AR}(0)$ lehen ordeneko prozesu autorregresibo edo autoatzerakor jarraitu bati dagokio. Prozesu honetan interes-tasen ausazko portaerak θ-rantz jotzen dau.

4 Black eta Scholes eredua

Izan bedi prozesu orokorra : $dr(t) = (\alpha + \beta \cdot r(t))dt + \sigma r^\gamma dW(t)$

Ordezkatu daiguzan $\alpha = 0$ eta $\gamma = 1$ balioak. Orduan, Black eta Scholes eredua lortzen dogu:

$$dr = \beta \cdot rdt + \sigma rdW$$

Ekuazioa apur bat aldatuko dogu hobeto ikusi daiten. Biderkatu daigun ekuazioa $\frac{1}{r}$ faktorearekin:

$$dr = \beta \cdot rdt + \sigma rdW \Longrightarrow \frac{dr}{r} = \beta dt + \sigma dW$$

β-ren balioaren arabera egoera ezberdinak aurkituko doguz:

- $\beta < 0$ bada, 0-ra itzultzen da.
- $\beta > 0$ bada, ez dago itzulpenik, hau da, zerotik dibergitzen dau. Ondorioz, prozesuaren tendentzia esponentziala izango da.

Diskretizazio hurbildua eginez gero:

$$r_t - r_{t-1} = \beta r_{t-1} + \eta_t \longrightarrow r_t = (1 + \beta)r_{t-1} + \eta_t,$$

non $\eta_t \sim N(0, \sigma^2 r_{t-1}^2)$.

Esan beharra dago eredu honetan desbiderazio estandarra r-ri proportzionala dala. Gainera, r-k $r \sim$ *lognormal* banaketa jarraitzen dau. Hori dala eta, $r > 0$ izango da beti. Ezaugarri adierazgarri bat $\gamma = 1$ balioa da. Hori dala eta, hegakortasuna ez da konstantea eta r-ren arabera hazi edo jaisten da denboran zehar.

5 Brennan eta Schwartz eredua

Izan bedi prozesu orokorra: $dr(t) = (\alpha + \beta \cdot r(t))dt + \sigma r^\gamma dW(t)$

$\gamma = 1$ balioa ordezkatuz, Brennan eredua lortzen dogu:

$$dr = (\alpha + \beta \cdot r)dt + \sigma rdW = k(\theta - r)dt + \sigma \cdot rdW$$

Diskretizatuz gero:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \eta_t \longrightarrow r_t = \alpha + (1+\beta)r_{t-1} + \eta_t,$$

non $\eta_t \sim N(0, \sigma^2 r_{t-1}^2)$.

Aurreko ereduetan bezala, hegakortasuna r-rekin handitzen da. Gainera, eredu honetan ere, batazbestekora itzultzea daukagu. Black eta Scholes ereduan bezala, r-ren banaketa $r \sim lognormal$ banaketa da eta ondorioz r-k balio positiboak hartzen dauz beti. Black ereduan bezala, $\gamma = 1$ balioaren ondorioz, hegakortasuna r-rekin aldatzen da, ez da konstantea.

Nahiz eta eredu ezberdinak ikusi izan, datuetara hobeto egokitzen diran ereduak batazbestekora itzulera daukien ereduak dira. Izan ere, orokorrean ondoen egokitzen dan eredua Brennan eta Schwartz eredua izaten da, gero CIR eta azkenik Vasicek eredua. Brennan eredua, esan dogun bezala, oso ona da; baina ez dauka formula itxi bat. CIR eta Vasicek ereduek aldiz, formulazio itxia daukie baina ez dira Brennan eta Schwartz eredua bezain ondo egokitzen.

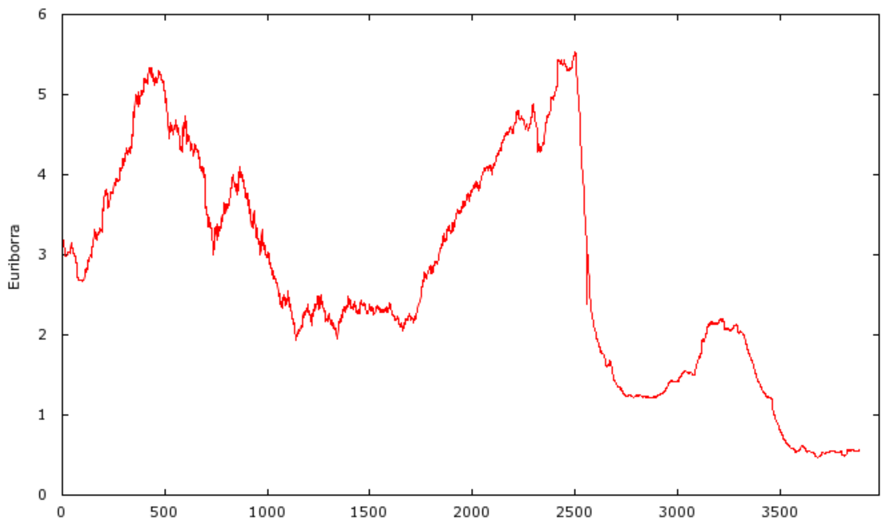
II. atala

3. kapitulua

Kasu praktikoa

Bonoei prezioa jartzeko eredu ezbardinak aztertu ondoren, benetako datu batzuk hartu eta datu horreetan aplikatuko dogu aurretik ikusitako guztia. Horretarako, euriborra urte betera hartu da interes-tasa moduan eta 1999-tik 2014-ra arteko datuak bildu dira. Lehenik eta behin datuak aztertuko doguz. Eredu desberdinekin saiatu ondoren, gure datuentzat onena dana aukeratuko dogu.

Denbora-serie bat aztertzen ari gara, hain zuzen ere euriborraren eboluzioa hainbat urtetan zehar.



3.1. irudia. Euriborreko denbora-seriearen grafikoa.

1999 eta 2014 urteen arteko euriborraren portaera aztertuko dogu (2.1 Irudia). 1999 urtean euriborra %3 inguruan egon zan. Hala eta guztiz ere, urte horren erdi aldera portzentai hau zertxobait jaitsi zan, baina 1999 urtearen amaieran eta bai 2000 urtearen hasieran ere, euriborra etengabe hazten joan zan, %5a gainditzeraino. Izugarrizko hazkunde horren ondoren, apurka-apurka jaisten hasi zan, eta une batzuetan hobetzera egiten eban arren, joera beherakorra eukin eban. 2003 eta 2005 urteen bitartean nahiko egonkor mantendu zan, %2 eta %2.5 artean. Honen ostean, barriz ere joera gorakorra hartu eban 2008-ra heldu arte. 2008 urtearen amaiera eta 2009 urtearen hasieran euriborrak izugarrizko jaitsiera jasan eban hilabete gutxi batzuren buruan, %5.5etik %1.3ra. Garai honetan euriborra %1.3 inguruan kokatu zan. Bairudien 2011 urtean egoerak onera egiten ebala %2a gaindituz. Hala ere, 2012-2013 urteetan zehar egoera ekonomikoak ez eban onera egin eta krisialdia oraindik luzarorako espero izango zan. Horregatik 2012-an berriro tendentzia beherakorra eukin eban eta urte honen amaieran euriborra %0.5 inguruan kokatu zan. Une horretatik eta 2013 urte osoan zehar, 2014aren lehen hiruhilabetera arte, euriborra egonkor mantenduko da.

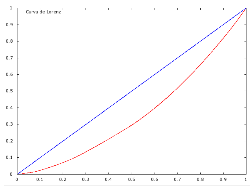
Europako herrialdeen artean potentziarik handiena Alemania izan da beti. 2003 urtean Alemanian erreforma ekonomiko garrantzitsuak burutu ziren herrialdearen egoera ekonomikoa hobetzeko. Ondorioz, eta urte gitxi batzuk igaro ondoren, Alemania asko indartu zan eta guztiz barriztuta Europako pisurik garrantzitsuena bihurtu zan. Erreforma honeen ondorioz euriborrak joera beherakorra eukin eban, baina nahiko egonkor mantendu zan %2 eta %2.5 artean 2005 urtera arte. Jaitsiera eta ondorengo egonkortasunaren ondorioz, Europako beste herritarrei etxebizitza eta abarretan inbertsioak egitera animatu jaken interes-tasaren eskuragarritasuna zala eta.

2003-2005 urteen bitarteko egonkortasunaren ostean, euriborrak joera gorakorra hartu eban. 2007 urtearen erdialdean arrisku handiko hipoteken krisia nabaritzen hasi zan Estatu Batuetan higiezinen burbuilaren ondorioz. Hori zala eta, finantza-sistemari dirua emoten eutsoen merkatu batzuk itxi ziran. Krisi hau berehala heldu zan Europara. Finantza-erakundeak banku arteko maileguak bueltatuak ez izateari beldurra izaten hasi ziran. Beldur horren ondorioz, dirua maileguan emoteagatik gehiago kobratzen hasi ziran eta euriborra igoten hasi zan. Egoera honetan, Europako Banku Zentrala (EBZ) ez zan izan krisi ekonomikoa aurresateko gai eta gainera lehenengo neurriak beranduegi hartu ebazan. Ordurako euroguneko herrialdeak atzeraldian sartuta egozan. 2008 eta 2009 urteen bitartean EBZk interes-tasak jaitsi ebazan petroleoaren prezioaren beherakada eta higiezinen prezio-zuzenketa ondoren. 2009 urtean zehar EBZk hainbat aldiz jaitsi ebazan interes-tasak, %1 inguruan gelditu zan arte.

Egia esan arazo hau uste dogun baino askoz arinago hazi zan, krisi ekonomikoa Estatu batuetan hasi baitzan. 1980-2000 urteen bitartean lehengaien prezioa oso bajua zan. 2000 urtetik aurrera prezioak igoten hasi ziran, baina 2008an lehengai honeen prezioa (batez ere petroleoaren eta elikagaien prezioa) hainbeste igon zan benetako kalte ekonomikoak eragiten hasi zala.

Kalte honen ondorioz, garapen bidean egozan herrialdeetan gizarte-arazoak eta globalizazioaren eta ekonomiaren geldialdia ekarriko ebazan.

Gure datuetatik abiatuta, euriborraren batazbesteko balioa 2.8102 da. Mediana 2.474 balioan kokatzen da. Balio biak nahiko hurbil dagozanez, banaketa nahiko simetrikoa dala esan daikegu. Irudian ikusi daitekeen bezala balio minimoa eta maximoa 0.47300 eta 5.5260 dira hurrenez hurren. Beste alde batetik Giniren koefizientea 0.276403 da eta zerotik hurbil dagoenez, Lorentz-en kurba diagonaletik hurbil dago.



Hori dala eta balioen kontzentrazioa txikia dala esango dogu.

Behin bildutako datuak apur bat ezagutzen doguzala, datu horreekin lan egiten hasiko gara. Daukaguzan datuetarako ereduak proposatu aurretik eta denbora jarraian lan egin nahi dogunez, prozesu estokastikoaren diskretizazioa aztertzen hasiko gara.

Diskretizazio modu ezberdinak dagoz: zehatza eta Euler-en diskretizazioa edo diskretizazio hurbildua. Interes-tasen denborazko bilakaera azaltzeko izan bedi bero-difusioaren hurrengo ekuazio diferentzial estokastikoa edo *prezesu orokorra*:

$$dr_t = (\alpha + \beta \cdot r_t)dt + \sigma \cdot r_t^{\gamma} dW_t$$

Ekuazio diferentzial honetan, prozesu estokastiko erreala eta bertako lau parametroak (α, β, σ eta γ) azaltzen dira denbora jarraian. Aurreko prozesu estokastikoaren diskretizazio zehatza egiten dauan eredua hurrengoa da:

$$r_t = e^{\beta} \cdot r_{t-1} + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta} - 1) + \eta_t$$

non η_t-ren itxaropena $E(\eta_t) = 0$, $E(\eta_t \cdot \eta_s) = 0$ $s \neq t$ danean eta $E(\eta_t^2) = \frac{\sigma^2}{2\beta}(e^{2\beta} - 1)r_{t-1}^{2\gamma}$.

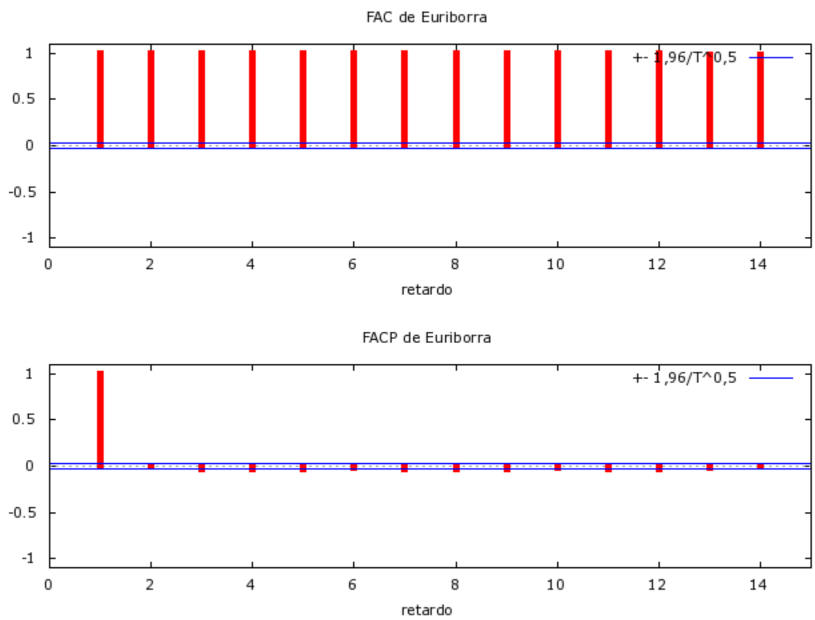
Aldiz, diskretizazio hurbilduarekin beste hurrengo eredu hau daukagu:

$$r_t = \alpha + (1 + \beta) \cdot r_{t-1} + \eta_t \tag{3.1}$$

non η_t-ren itxaropena $E(\eta_t) = 0$ eta bariantza $E(\eta_t^2) = \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma}$ diren. Hau da, η_t-k $\eta_t \sim N(0, \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma})$ banaketa normala jarraitzen dau. Kasu bakoitzean ekuazio bi eukingo doguz eta bi ekuazio horreetatik α eta β estimatu beharko doguz.

Izan bedi orduan interes-tasaren modelizaziorako (3.1) ekuazioa. Aurreko kapituluan aipatu dogun moduan, eredu orokor honetan interes-tasa bere atzerapenen menpe dago. Gure kasuan r_t aldagaia Euriborra da, beraz ikusi daigun daukaguzan euriborraren datuak bere atzerapenekin erlazionatuta dagozan eta erlazionatuta egotekotan zelan erlazionatuta dagozan. Horretarako korrelograma batez baliatuko gara.

Korrelograma korrelazio estatistikoen irudi bat da. Bertan autokorrelazioak irudikatzen dira denboran zehar. Datuak ausazkoak badira, autokorrelazioak zerotik hurbil egon beharko dira; aldiz ausazkoak ez badira, jarraian dagozan autokorrelazio bat edo gehiago zeroren oso desberdinak izango dira.



3.2. irudia. Euriborraren korrelograma.

(3.2) irudian ikusten dan korrelogramako bigarren grafikoan lehenengo marra gorri bertikala zero batazbestekotik urrun dagoela ikusi daikegu. Marra horrek euriborraren datu bakoitza bere aurreko datuarekin oso erlazionatuta dagoela adierazten dau, hau da, daukaguzan datuetan balio bakoitzak zehatz-mehatz bere aurreko balioarekin erlazio handia dauka. Ondorioz, esan daikegu autokorrelazioa dagoela.

Erreparatu deiogun orain (3.3) irudiari. Lehenengo zutabean ikusi daiteke balio guztiak adierazgarriak dirala, izan ere, $t-2$ uneko datua $t-1$ uneko datuarekin erlazionatuta dago eta $t-1$ uneko datua t uneko datuarekin.

$$r_t = \alpha r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$r_t = \beta r_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$r_t = \gamma r_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$\ldots$$

Beraz, esan daikegu balioak binaka erlazionatuta dagozala.

Aldiz, zer gertatzen da lehenengo balioa adierazgarria ez bada? Dakigunez, lehenengo balioa adierazgarria izateak beste guztiak ere adierazgarriak izatea inplikatzen dau, baina lehenengo balioa adierazgarria ez bada ezin daikegu hurrengo balioei buruz ezer ondorioztatu.

Demagun orain, datu bi izan beharrean, hirugarren datu bat sartzen dogula. Adierazgarria da hirugarren datua lehenengo balio biak kontuan hartu barik? Demagun hurrengo erlazio-ekuazioa daukagula:

$$r_t = \alpha r_{t-1} + \beta r_{t-2} + \varepsilon_t$$

Badakigu lehenengo zutabeetako emaitzei esker r_{t-1}, r_t eta r_{t-2}, r_t erlazionatuta dagozala bakoitza bere aldetik. Baina α kontutan hartu barik β-k ba al dauka pisurik?. Horretarako bigarren zutabeari begiratu behar deutsagu.

Función de autocorrelación para Euriborra

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q.	[valor p]
1	0,9994	***	0,9994	***	3884,6728	[0,000]
2	0,9989	***	-0,0001		7766,0207	[0,000]
3	0,9983	***	-0,0328	**	11643,7633	[0,000]
4	0,9977	***	-0,0261		15517,6789	[0,000]
5	0,9970	***	-0,0238		19387,5570	[0,000]
6	0,9964	***	-0,0171		23253,2402	[0,000]
7	0,9957	***	-0,0276	*	27114,4767	[0,000]
8	0,9949	***	-0,0322	**	30970,9748	[0,000]
9	0,9941	***	-0,0227		34822,5183	[0,000]
10	0,9934	***	-0,0148		38668,9506	[0,000]
11	0,9925	***	-0,0243		42510,0304	[0,000]
12	0,9917	***	-0,0234		46345,5264	[0,000]
13	0,9908	***	-0,0132		50175,2893	[0,000]
14	0,9899	***	-0,0061		53999,2245	[0,000]

3.3. irudia. Autokorrelazio funtzioa.

Bertan ikusi daitekeen lez, lehenengo atzerapena adierazgarria da bera bakarrik (lehendik genkian). $r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-3}$ lehenengo, bigarren eta hirugarren atzerapenak hartzen badoguz, r_{t-3} atzerapena adierazgarria da lehenengo eta bigarrenarekiko. r_{t-8}-ren autokorrelazio koefizientea ere, r_{t-3}-ren autokorrelazio koefizientearen antzera, apur bat esanguratsua danez, aurreko zazpi atzerapenekin erlazionatuta dagoela ikusten dogu . r_{t-7}-ren autokorrelazio koefizienteak aldiz, besteekin konparatuz, esangarritasun oso txikia dauka. Ondorioz, koefizienterik adierazgarriena lehenengo atzerapenari dagokiona dala esan daikegu.

Korrelograman adierazten dan bezala, balioek autokorrelazioa daukie. Planteatu daiguzan orain interes-tasaren modelizaziorako aztertu doguzan eredu ezbardinak.

3.1 Ereduak

1 Merton eredua

Mertonen ereduaren kasuan ez dago batazbestekora itzultzerik. Teoriaren garapenean azaldu dogun bezala, Merton-en eredua hurrengoa da:

$$dr_t = \alpha dt + \varepsilon_t,$$

$\varepsilon_t = \sigma dW$ izanik. Diskretizazioa kasu honetan $r_t - r_{t-1} = \alpha + \eta_t$, da $\Delta t = 1$ dala onartuta eta $\eta_t = \sigma \Delta W$ izanik.

Eredu honetan ez dira atzerapenak kontsideratzen eta konstanteekin baino ez dogu lan egiten. Dakingun lez, Mertonen eredua $\mathcal{AR}(0)$ prozesu autoerregresibo bat da.

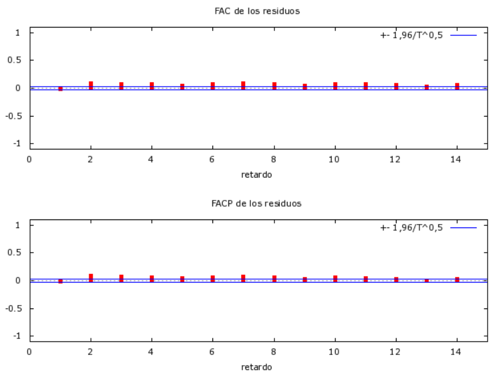
```
Evaluaciones de la función: 10
Evaluaciones del gradiente: 1

Modelo 1: estimaciones ARMA
utilizando las 3800 observaciones 2-3801
Estimado usando el filtro de Kalman (MV exacta)
Variable dependiente: Errentagarritas

 VARIABLE        COEFICIENTE       DESV.TÍP.        ESTAD T   VALOR P
  const               -0,000705003      0,000471953  -1,494   0,13523

  Media de la var. dependiente = -0,000705
  Desviación típica de la var. dependiente. = 0,029097
  media de las innovaciones = 1,25026e-005
  Varianza de las innovaciones = 0,000846412
  Log-verosimilitud = 8049,5922
  Criterio de información de Akaike (AIC) = -16095,2
  Criterio de información Bayesiano de Schwarz (BIC) = -16082,7
  Criterio de Hannan-Quinn (HQC) = -16090,7
```

Erregresio eredua planteatu eta gero, emaitzak taula honetan biltzen dira. Aldagaiaren koefizientearen balioa hartzen badogu hurrengo eredua planteatzen dogu:

$$r_t - r_{t-1} = -0.000705003 + 0.000471953 \cdot \Delta W,$$

Eredu honetan $AIC = -16095.2$ eta $R^2 = 0$ dira.

Orain, eredu honen erroreak aztertuko doguz.



Función de autocorrelación de los residuos

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q.	[valor p]
1	-0,0117		-0,0117		0,5175	[0,472]
2	0,0857	***	0,0856	***	28,4737	[0,000]
3	0,0675	***	0,0699	***	45,7918	[0,000]
4	0,0659	***	0,0612	***	62,3162	[0,000]
5	0,0455	***	0,0366	**	70,1997	[0,000]
6	0,0763	***	0,0638	***	92,3586	[0,000]
7	0,0884	***	0,0780	***	122,1044	[0,000]
8	0,0676	***	0,0532	***	139,4968	[0,000]
9	0,0472	***	0,0254		147,9850	[0,000]
10	0,0760	***	0,0513	***	170,0104	[0,000]
11	0,0711	***	0,0504	***	189,3038	[0,000]
12	0,0512	***	0,0267		199,3085	[0,000]
13	0,0284	*	-0,0025		202,3868	[0,000]
14	0,0586	***	0,0261		215,4832	[0,000]

3.4. irudia. Merton ereduaren korrelograma eta autokorrelazio funtzioa hurrenez hurren.

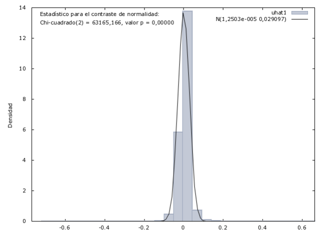
Korrelograma honetan ikusi daitekeen moduan, balioak konfiantza tartetik urten egiten dira; beraz, eredu honekin ez dogu autokorrelazioa kendu.

Korrelogramaz gain, aztertu daigun autokorrelazio funtzioa informazio gehiago lortu ahal izateko. Lehenengo zutabea ikusita lehenengo atzerapena ez da adierazgarria eta hori dala eta momentuz ezin daikegu gehiagorik esan. Bigarren atzerapenetik aurrera ia danak oso adierazgarriak, beraz binaka erlazionatuta dagoz. Bigarren zutaberi dagokionez eta arinago azaldutako azalpena jarraituz, $r_{t-1}, r_{t-9}, r_{t-11}, r_{t-12}, r_{t-13}$ eta r_{t-14} atzerapenak ez dira esanguratsuak. Besteak, aldiz, oso esanguratsuak dira nahiz eta r_{t-5} -garren atzerapenaren esangarritasuna hain ona ez izan; hau da, 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 10. eta 11. atzerapenek dagokiezan aurreko atzerapenekin erlazio handia daukie. Ikusi daigun eredu hau ondo egokitzen dan datuetara. Horretarako hiru ezaugarri aztertu behar doguz:

- Normaltasuna:

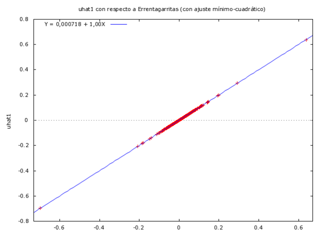
$$\begin{cases} H_0 & : \text{Erroreen banaketa normala da.} \\ H_1 & : \text{Erroreen banaketa ez da normala.} \end{cases}$$

  Grafiko honetan ikusten dan moduan erroreak guztiz normalak dira. Gainera, $p-balioa = 0.000$ danez, ez geunke hipotesi nulua beztertuko eta ondorioz erroreak normalak izango litzatekez.

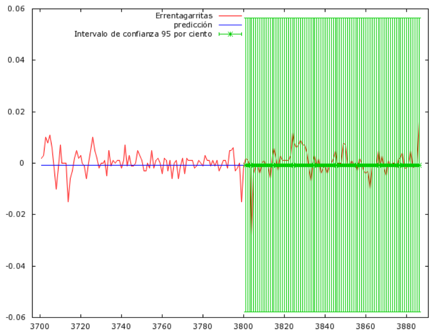


- Independentzia: Durbin-Watson-en estatistikoa 2.02322 $\sim$ 2 danez, ez da erroreen arteko autokorrelaziorik existitzen.

- Bariantza konstantea da, izan ere balioak (-2, 2) tartean kokatzen dira.



Merton-en eredua planteatu ahal izateko 3801 behatutako balio hartu doguz, hain zuzen ere 1999ko urtarrilaren 1etik 2013ko azaroaren 4ra arteko euriborraren balioak. Datu honeek erabilita hurrengo 85 egunetarako euriborraren balioa aurresaten saiatuko gara.



Irudi honetan ikusi daikegun moduan Merton eredua ez da oso aproposa interes-tasa modelizatzeko. Irudiko banda berdeak aurresanaren balioak mugitzen diren tartea adierazten dau. Beraz, hurrengo 85 balioak aurresan nahi doguzanean, Merton ereduak balioetarako tarte oso handia emoten dau, hau da, Merton ereduarekin aurresandako balioak banda berde horretan egongo dira. Tartea handiegia da, interes-tasak planoko edozein balio hartu daike eta ondorioz eredu honek ez dau inolako murrizketarik egiten balioei dagokienez.

Autokorrelazioa kendu ez dogunez, aldagaiaren aldakortasuna ez da ona. Ondorioz, eta egokitasun hau ona ez danez, hobekuntza bat planteatuko dogu, Vasicek eredua.

2 Vasicek eredua

Vasicek ereduaren kasuan atzerapen bakar bat kontsideratzen dogu. Teoriaren garapenetik badakigu Vasicek eredua hurrengoa dala:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t = \sigma dW.$$

Ekuazioaren diskretizazioa kasu honetan:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \eta_t \longrightarrow r_t = \alpha + (\beta + 1)r_{t-1} + \eta_t, \;\; \eta_t = \sigma \Delta W$$

Eredu honetan batazbetekora itzulpena daukagu eta holan adierazten dau ekuazioaren lehenengo batugaiak. Esan dogun moduan atzerapen bat kontsideratzen dogu, beraz lehen ordeneko ARIMA eredu bat daukagu, $\mathcal{AR}(1)$ izendatu doguna. Orduan, Vasicek eredua $\mathcal{AR}(1)$ prozesu autoerregresibo bat da, hau da, erregresio-eredu bat zeinetan aldagaia aurreko uneetako aldagaiaren beraren behaketen bitartez azalduta dagoen.

```
Modelo 2: estimaciones Cochrane-Orcutt
utilizando las 3799 observaciones 3-3801
Variable dependiente: Euriborra

 VARIABLE        COEFICIENTE       DESV.TÍP.        ESTAD T   VALOR P
  const               -0,00108376       0,00108820   -0,996    0,31935
  Euriborra_1          1,00014          0,000344732    2901   <0,00001 ***

Estadísticos basados en los datos rho-diferenciados:

  Suma de cuadrados de los residuos = 3,21579
  Desviación típica de los residuos = 0,029102
  R-cuadrado = 0,999539
  R-cuadrado corregido = 0,999539
  Grados de libertad = 3797
  Estadístico de Durbin-Watson = 1,99788
  Coef. de autocorr. de primer orden. = 0,00098926
  Criterio de información de Akaike (AIC) = -16090,6
  Criterio de información Bayesiano de Schwarz (BIC) = -16078,1
  Criterio de Hannan-Quinn (HQC) = -16086,2
```

Erregresio eredua planteatuta, taula honetan bildu dira emaitzak. Beraz

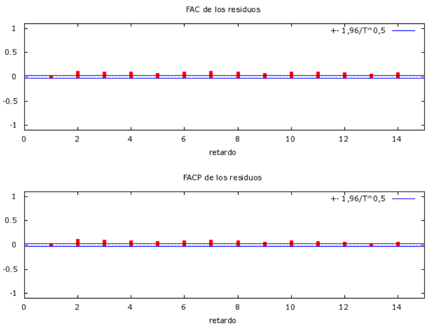
COEFICIENTE balioei erreparatzen badeutsegu, euriborrerako daukaguzan datuetarako hurrengo eredua lortzen dogu:

$$r_t = -0.00108376 + 1.00014 r_{t-1} + \eta_t, \text{ non kasu honetan}$$

$$\eta_t = \begin{pmatrix} 1.18417 \cdot 10^{-6} & -3.37974 \cdot 10^{-7} \\ -3.37974 \cdot 10^{-7} & 1.18840 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix} \cdot \Delta W \text{eta } \eta_t \text{ bariantza-kobariantza matrizea diran.}$$

Eredu honetan AIC-ren balioa -16090.6 da eta R^2-ren balioa 0.999539.
Aztertu daiguzan eredu honen erroreak:

Korrelogramaren 3.5 irudian ikusi daikegun moduan balioak konfiantza tartetik urten egiten dira eta atzerapenk oraindik esangarriak dira.



Función de autocorrelación de los residuos

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q.	[valor p]
1	0,0010		0,0010		0,0037	[0,951]
2	0,0862	***	0,0862	***	28,2879	[0,000]
3	0,0691	***	0,0695	***	46,4498	[0,000]
4	0,0671	***	0,0607	***	63,5635	[0,000]
5	0,0470	***	0,0366	**	71,9787	[0,000]
6	0,0777	***	0,0642	***	94,9766	[0,000]
7	0,0899	***	0,0778	***	125,7686	[0,000]
8	0,0690	***	0,0525	***	143,9025	[0,000]
9	0,0487	***	0,0252		152,9378	[0,000]
10	0,0772	***	0,0515	***	175,6772	[0,000]
11	0,0725	***	0,0500	***	195,6896	[0,000]
12	0,0522	***	0,0260		206,0952	[0,000]
13	0,0295	*	-0,0026		209,4245	[0,000]
14	0,0594	***	0,0264		222,8871	[0,000]

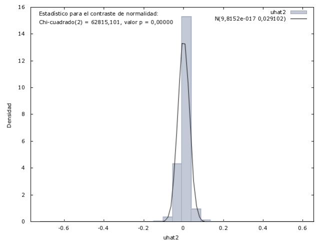
3.5. irudia. Vasicek ereduaren korrelograma eta autokorrelazio funtzioa hurrenez hurren.

Aztertu daigun orain autokorrelazio funtzioa. Ikusi nahi dogu barriz ere zeintzuk diran baliorik adierazgarrienak. Azaldu dogunari jarraituz, badakigu bigarren zutabeari begiratu behar deutsagula. Holan, atzerapenik esanguratsuenak r_{t-2}, r_{t-3}, r_{t-4}, r_{t-5}, r_{t-5}, r_{t-6}, r_{t-7}, r_{t-8}, r_{t-10} eta r_{t-11} dira. Bederatzi atzerapenak oso adierazgarriak dira, hala ere r_{t-5} atzerapenak beste atzerapen guztiek baino adierazgarritasun gitxiago dauka. Beraz, 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 10. eta 11. atzerapenek dagokiezan aurreko atzerapenekin erlazio handia daukie, Merton-en ereduan gertatzen dan moduan.

Ikusi daigun eredu hau ondo egokitzen dan datuetara. Horretarako hiru ezaugarri aztertu behar doguz:

- Normaltasuna:

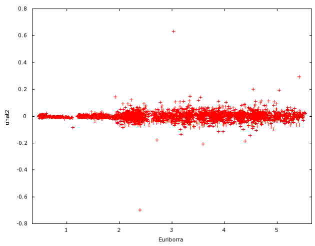
$$\begin{cases} H_0 & : \text{Erroreen banaketa normala da.} \\ H_1 & : \text{Erroreen banaketa ez da normala.} \end{cases}$$



Grafiko honetan ikusten dan moduan normalitate hipotesia betetzen da. Gainera, oraingoan ere $p - balioa = 0.000$ danez, ez dogu hipotesi nulua beztertzen eta ondorioz erroreak normalak dira.

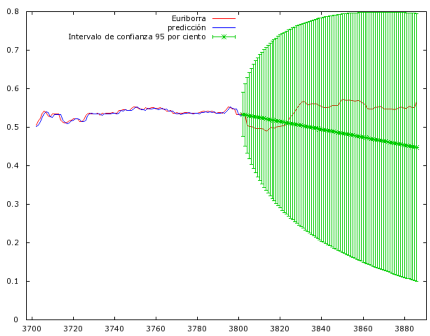
- Independentzia: Durbin Watson-en estatistikoaren balioa 1.99788 da. Balio hau $1.99788 \sim 2$ danez, erroreek ez daukie korrelaziorik.

- Bariantza konstantea:



Irudi honetan ikusi daitekeenez, balioak (-2,2) tartean aurkitzen dira. Hori dala eta, bariantza konstantea dala esango dogu.

Vasicek eredua ere 3801 behatutako baliorekin planteatu dogu eta interes-tasarako gainerako balioak aurresango doguz.



Vasicek ereduarekin aurreko ereduan lortutako emaitzak aldatu egiten dira. Oraingoan ereduak oso ondo modelizatzen dau interes-tasa. Hurrengo balioak aurresateari dagokionez, badakigu irudiko banda berdeak aurresanaren balioak zein tartetan mugitzen diren adierazten dauala. Beraz, hurrengo 85 balioak aurresan nahi badogu, Vasicek ereduarekin aurresandako balioak elipse-erdi itxurako konfiantza tartean dagoz. Merton ereduko aurresanarekin konparatuta, aurresan hau askoz hobea da, hau da, kasu honetan interes-tasaren balioetarako nolabaiteko murrizketa daukagu.

Oraindik ere gehiago hobetu nahi dogu eredua. Horretarako beste eredu bat kontsideratuko dogu, CIR eredua.

3 CIR eredua

Aurreko kasuan bezala, CIR ereduan batazbestekora itzultzea dago. Aurreko kapituluan esan dogun moduan, CIR eredua hurrengoa da:

$$dr_t = (\alpha + \beta \cdot r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW$$

CIR ereduan ez dogu atzerapenik kontsideratzen, hau da, $\mathcal{AR}(0)$ prozesu bat dala esango dogu.

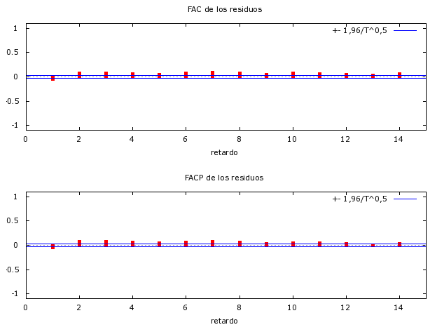
```
Evaluaciones de la función: 11
Evaluaciones del gradiente: 1

Modelo 3: estimaciones ARMAX
utilizando las 3800 observaciones 2-3801
Estimado usando el filtro de Kalman (MV exacta)
Variable dependiente: cir

 VARIABLE        COEFICIENTE       DESV.TÍP.         ESTAD T   VALOR P
  cir1              -0,00108807       0,000673380  -1,616    0,10613
  cir2               1,00014          0,000287975    3473   <0,00001 ***

  Media de la var. dependiente = 1,6196
  Desviación típica de la var. dependiente. = 0,431926
  media de las innovaciones = 2,53881e-005
  Varianza de las innovaciones = 0,000272734
  Log-verosimilitud = 10201,358
  Criterio de información de Akaike (AIC) = -20396,7
  Criterio de información Bayesiano de Schwarz (BIC) = -20378
  Criterio de Hannan-Quinn (HQC) = -20390,1
```

Erregresio eredua planteatu ostean emaitzen taula honi erraparatuko deutsagu. Aldagaiaren koefizientearen balioa hartzen badogu hurrengo eredua planteatzen dogu:

$$r_t = -0.00108807 + 1.00014 r_{t-1} + \eta_t, \text{ non}$$

$$\eta_t = \begin{pmatrix} 4.53441 \cdot 10^{-7} & -1.61323 \cdot 10^{-7} \\ -1.61323 \cdot 10^{-7} & 8.29298 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{r_{t-1}} \cdot \Delta W \text{ eta } \eta_t \text{ bariantza-kobariantza matrizea diran.}$$

CIR eredurako $AIC = -20396.7$ eta $R^2 = 0.999903$ betetzen dira. Aztertu daigun zelangoak diran eredu honen erroreak:



Función de autocorrelación de los residuos

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q.	[valor p]
1	-0,0373	**	-0,0373	**	5,2823	[0,022]
2	0,0745	***	0,0732	***	26,3879	[0,000]
3	0,0675	***	0,0733	***	43,7208	[0,000]
4	0,0630	***	0,0636	***	58,8319	[0,000]
5	0,0441	***	0,0395	**	66,2405	[0,000]
6	0,0697	***	0,0603	***	84,7592	[0,000]
7	0,0818	***	0,0746	***	110,2447	[0,000]
8	0,0654	***	0,0562	***	126,5500	[0,000]
9	0,0424	***	0,0257		133,4121	[0,000]
10	0,0672	***	0,0452	***	150,6079	[0,000]
11	0,0586	***	0,0406	**	163,7106	[0,000]
12	0,0433	***	0,0224		170,8669	[0,000]
13	0,0277	*	0,0015		173,7908	[0,000]
14	0,0585	***	0,0304	*	186,8641	[0,000]

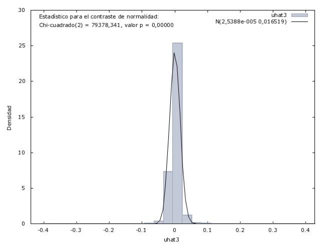
3.6. irudia. CIR ereduaren korrelograma eta autokorrelazio funtzioa hurrenez hurren.

Korrelogramari begiratuta korrelazio apur bat dagoela dirudi. Hala ere, aztertu daigun autokorrelazio funtzioa. Lehenengo zutabeak, lehenengo atzerapena izan ezik, beste atzerapenak binaka erlazionatuta dagozala baino ez deusku adierazten. Bigarren zutaberi begiratuta orain arte lortutako antzerako emaitzak daukaguz, hau da, 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 10. eta 11. atzerapenek dagokiezan aurreko atzerapenekin erlazio handia daukie.

Eredu hau datuetara ondo egokitzen dan jakin ahal izateko hiru irizpide aztertuko doguz:

- Normaltasuna:

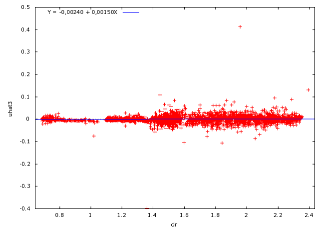
$$\begin{cases} H_0 & : \text{Erroreen banaketa normala da.} \\ H_1 & : \text{Erroreen banaketa ez da normala.} \end{cases}$$



$p - balioa = 0.000$ danez, ez dogu hipotesi nulua baztertzen eta erroreak normalak direla esango dogu. Gainera, grafikoan ere normalitate hipotesia betetzen dala nabarmen ikusten da.

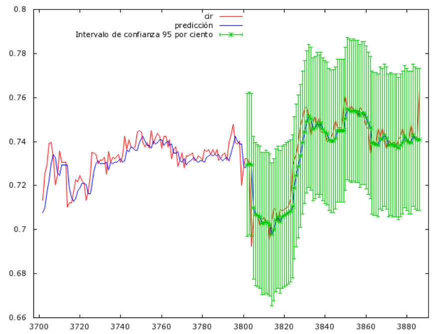
- Independentzia: Durbin-Watson-en estatistikoaren balioa kasu honetan $2.07453 \sim 2$ da, beraz ez dago korrelaziorik.

- Bariantza konstantea:



Kasu honetan ere balioak (-2,2) tartean kokatzen dira, ondorioz bariantza konstantea daukagu.

CIR ereduak nahiko ondo modelizatzen dau interes-tasa, estimatutako balioak behatutako balioen antzerakoak dira.



2013ko azaroaren 4tik aurrerako balioak aurresan nahi doguz orain CIR ereduaren bitartez. Estimazioa ez da Vasicek ereduarekin lortutako estimazioa bezain ona. Aurresandako balioetan zentratzen bagara aldiz, hobekuntza nabaria daukagu. Banda berdea edo konfiantza tartea kasu honetan orain arte eukin doguzanak baino askoz zehatzagoa da, hau da, itxura aldetik balioen konfiantza-tartea $(aurresana - \varepsilon, aurresana + \varepsilon)$ banda mugatuagoa da. Gainera, tarte hori txikia da balioetan arreta jartzen badogu, $(aurresana - \varepsilon, aurresana + \varepsilon) \sim (aurresana - 0.7, aurresana + 0.7)$.

Dirudienez, eredu honekin emaitza hobeak lortzen doguz. Beraz, CIR ereduak hobekuntza bat emoten deuskula esan daikegu. Hala ere, hobetzen saiatuko gara eta horretarako aurreko kapituluan aztertutako beste eredu bi proposatuko doguz.

4 Black eta Scholes eredua

Kasu honetan hurrengo eredua daukagu:

$$dr_t = \beta \cdot r_t dt + \sigma \cdot r_t dW$$

Eredu honetan ere batazbestekora itzultzea daukagu. Planteatu daigun erregresio eredua.

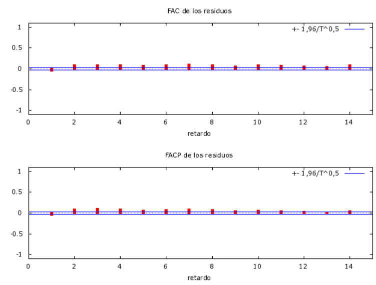
```
Evaluaciones de la función: 11
Evaluaciones del gradiente: 1

Modelo 4: estimaciones ARMA
utilizando las 3800 observaciones 2-3801
Estimado usando el filtro de Kalman (MV exacta)
Variable dependiente: black

 VARIABLE        COEFICIENTE       DESV.TÍP.         ESTAD T   VALOR P
  const               0,999577        0,000161115    6204  <0,00001 ***

  Media de la var. dependiente = 0,999577
  Desviación típica de la var. dependiente. = 0,00993311
  media de las innovaciones = 1,24943e-005
  Varianza de las innovaciones = 9,86409e-005
  Log-verosimilitud = 12133,681
  Criterio de información de Akaike (AIC) = -24263,4
  Criterio de información Bayesiano de Schwarz (BIC) = -24250,9
  Criterio de Hannan-Quinn (HQC) = -24258,9
```

Taulari begiratuz, koefizienteen balioa hartzen badogu hurrengo eredua idazten dogu:

$$r_t = 0.999577 \cdot r_{t-1} + 0.000161115 \cdot r_{t-1} \cdot \Delta W,$$

Eredu honetarako AIC eta R^2 irizpideek -24265.4 eta 0 balioak daukiez hurrenez hurren.

Aztertu daigun eredu honek daukazan erroreak:




```
Función de autocorrelación de los residuos

RETARDO    FAC           FACP          Estad-Q. [valor p]

   1  -0,0265        -0,0265          2,6795  [0,102]
   2   0,0792   ***   0,0785 ***     26,5177  [0,000]
   3   0,0775   ***   0,0821 ***     49,3625  [0,000]
   4   0,0673   ***   0,0664 ***     66,5789  [0,000]
   5   0,0530   ***   0,0455 ***     77,2666  [0,000]
   6   0,0749   ***   0,0631 ***     98,6551  [0,000]
   7   0,0864   ***   0,0757 ***    127,1138  [0,000]
   8   0,0753   ***   0,0623 ***    148,7314  [0,000]
   9   0,0497   ***   0,0295 *      158,1590  [0,000]
  10   0,0697   ***   0,0436 ***    176,6795  [0,000]
  11   0,0550   ***   0,0313 *      188,2092  [0,000]
  12   0,0436   ***   0,0169        195,4709  [0,000]
  13   0,0351   **    0,0050        200,1624  [0,000]
  14   0,0655   ***   0,0354 **     216,5285  [0,000]
```

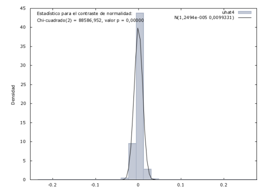
3.7. irudia. Black eta Scholes ereduaren korrelograma eta autokorrelazio funtzioa hurrenez hurren.

Korrelogramari begiratuta badirudi oraindik korrelazioa dagoela. Hala ere, autokorrelazio funtzioa aztertuko dogu. Lehenengo zutabearen arabera atzerapenak binaka erlazionatuta dagoz, baina honek ez deusku informazio gehiagorik emoten. Bigarren zutaban ikusi daitekeen moduan aurreko ereduekin lortutako atzerapenak dira orain ere adierazgarrienak.

Eredu honek datuetarako egokitzapen ona daukan ikusteko hiru irizpide aztertuko doguz:

- Normaltasuna:

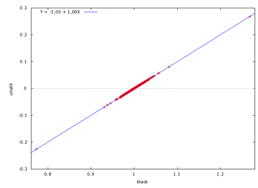
$$\begin{cases} H_0 & : \text{Erroreen banaketa normala da.} \\ H_1 & : \text{Erroreen banaketa ez da normala.} \end{cases}$$



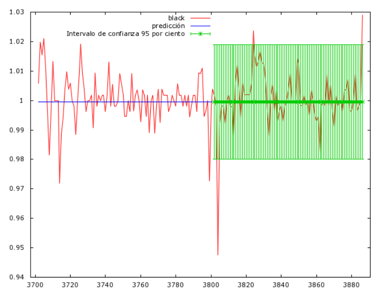
$p - balioa = 0.000 < 0.05$ danez, oraingoan ere ez dogu hipotesi nulua baztertzen eta erroreak normalak izango dira. Gainera, grafikoari begiratuta erroreen banaketa normala dala ikusi daiteke.

- Independentzia: Durbin-Watson-en estatistikoari erreparatuko deutsagu. Estatistikoaren balioa $2.05304 \sim 2$ da, beraz autokorrelaziorik ez dagoela esango dogu.

- Bariantza konstantea da, balioak (-2, 2) tartean gelditzen baitira.



Merton-en ereduan gertatzen zan era berean, Black eta Scholes ereduak ez dau estimazio ona egiten.



Estimazioaz gain, ereduak emoten dauan aurresana ez da oso ona. Kasu honetan aurresana ez da CIR ereduarekin egindako aurresana bezain zehatza, hala ere, aurresandako balioen konfiantza tartea nolabait mugatuta dago (0.98, 1.02) tartean. Beraz, aurresan hau hasiera batean dirudiena baino hobea da.

5 Brennan eta schwartz eredua

Kasu honetan hurrengo eredua daukagu:

$$dr = (\alpha + \beta \cdot r)dt + \sigma r dW = k(\theta - r)dt + \sigma \cdot r dW$$

Eredu honetan ere batazbestekora itzultzea daukagu. Planteatu daigun erregresio eredua.

```
Evaluaciones de la función: 11
Evaluaciones del gradiente: 1

Modelo 5: estimaciones ARMAX
utilizando las 3800 observaciones 2-3801
Estimado usando el filtro de Kalman (MV exacta)
Variable dependiente: brenan

 VARIABLE         COEFICIENTE        DESV.TÍP.          ESTAD T   VALOR P
  const               1,00001          0,000254529     3929  <0,00001 ***
  brenan1            -0,000849482      0,000383478  -2,215    0,02675 **

  Media de la var. dependiente = 0,999577
  Desviación típica de la var. dependiente. = 0,00993311
  media de las innovaciones = 1,89261e-005
  Varianza de las innovaciones = 9,85139e-005
  Log-verosimilitud = 12136,129
  Criterio de información de Akaike (AIC) = -24266,3
  Criterio de información Bayesiano de Schwarz (BIC) = -24247,5
  Criterio de Hannan-Quinn (HQC) = -24259,6
```

Taulari begiratuz, koefizienteen balioa hartzen badogu hurrengo eredua idazten dogu:

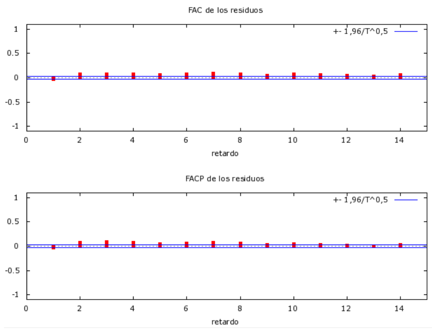
$$r_t = 1.00001 - 0.000849482 \cdot r_{t-1} + \eta_t, \text{ non}$$

$$\eta_t = \begin{pmatrix} 6.47851 \cdot 10^{-8} & -7.55954 \cdot 10^{-8} \\ -7.55954 \cdot 10^{-8} & 1.47056 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix} \cdot r_{t-1} \cdot \Delta W$$

eta η_t bariantza-kobariantza matrizea diran. Eredu honetarako $R^2 = 0.001289680$ eta $AIC = -24268.3$ dira.

Begiratu daiguzan erroreak zelangoak diran.

Korrelogramari begiratuz marratxo gorriak konfiantza tartetik (banda urdina) apur bat urtetan direla ikusi daikegu. Hala ere, hobeto ikusi ahal izateko aztertu daigun autokorrelazio funtzioa.



Función de autocorrelación de los residuos

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q.	[valor p]
1	-0,0283	*	-0,0283	*	3,0352	[0,081]
2	0,0776	***	0,0769	***	25,9470	[0,000]
3	0,0760	***	0,0807	***	47,9278	[0,000]
4	0,0657	***	0,0652	***	64,3809	[0,000]
5	0,0515	***	0,0445	***	74,4627	[0,000]
6	0,0735	***	0,0622	***	95,0184	[0,000]
7	0,0849	***	0,0749	***	122,5023	[0,000]
8	0,0738	***	0,0615	***	143,2417	[0,000]
9	0,0481	***	0,0288	*	152,0619	[0,000]
10	0,0681	***	0,0429	***	169,7435	[0,000]
11	0,0533	***	0,0307	*	180,5957	[0,000]
12	0,0420	***	0,0162		187,3100	[0,000]
13	0,0334	**	0,0044		191,5606	[0,000]
14	0,0639	***	0,0348	**	207,1254	[0,000]

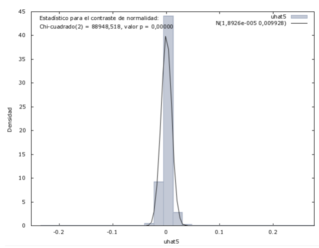
3.8. irudia. Brennan eta Schwartz ereduaren korrelograma eta autokorrelazio funtzioa hurrenez hurren.

Lehenengo zutabean ikusi daitekeenaren arabera atzerapenak binaka erlazionatuta dagoz, baina honek ez deusku informazio gehiagorik emoten. Bigarren zutabeari begiratuta, egoera aldatu egin dala ikusi daiteke aurreko ereduei dagokienez. Kasu honetan atzerapen adierazgarrienak $r_{t-2}, r_{t-3}, r_{t-4}, r_{t-5}, r_{t-6}, r_{t-7}, r_{t-8}$ eta r_{t-10} atzerapenak direla ikusi daikegu. Gainera, 1., 9., 11. atzerapenen adierazgarritasuna ia-ia baztergarria da besteekin konparatuta. Azken atzerapena ez da oso esanguratsua baina kontutan hartzekoa da.

Ikusi daiguzan eredua datuetara ondo egokituta egon ahal izateko bete beharreko hiru irizpideak:

- Normaltasuna:

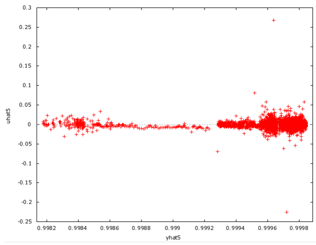
  $$\begin{cases} H_0 & : \text{Erroreen banaketa normala da.} \\ H_1 & : \text{Erroreen banaketa ez da normala.} \end{cases}$$

  $p-balioa = 0.000 < 0.05$ danez, ez dogu hipotesi nulua baztertuko eta erroreak normalak izango dira. Gainera, grafikoari begiratuta berehala ikusi daiteke erroreen banaketa normala dala.

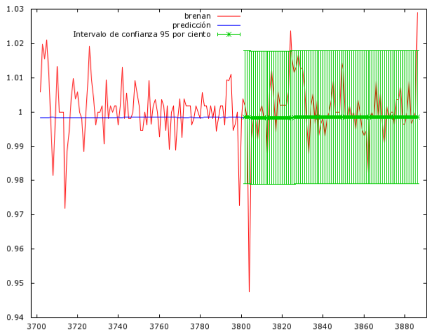
- Independentzia: Kasu honetan ere Durbin-Watson-en estatistikoa $2.05641 \sim 2$ danez, autokorrelaziorik ez dagoela esango dogu.

- Bariantza konstantea:



Irudian ikusi daikegun moduan, oraingoan ere balioak (-2,2) tartean mantentzen direnez, bariantza konstantea da.

Merton eta Black eta Scholes ereduetan gertatzen zan era berean, Brennan eta Schwartz ereduak ez dau estimazio lar ona egiten.



Kasu honetan ere aurresanaren konfiantza tartea ez da CIR ereduarekin egindako aurresanaren konfiantza tartea bezain zehatza, hala ere, tarte hori mugatuta dago (0.98, 1.02) tartean.

3.2 Ondorioak

Eredu bakoitza datuei aplikatu deutsegu eta emaitza batzuk lortu doguz eredu bakoitzerako. Baina eredu batzuk beste batzuk baino hobeak dira. R^2 eta AIC irizpideak erabiliko doguz eredurik aproposena aukeratzeko.

Ereduak	R^2	AIC
Merton	0	-16095.2
Vasicek	0.999539	-16090.6
CIR	0.999903	-20396.7
Black eta Scholes	0	-24265.4
Brennan eta Schwartz	0.001289680	-24268.3

R^2 determinazio edo mugatze-koefizienteak aldagaia zein ondo azaltzen dan adierazten deusku. Zenbat eta handiagoa izan koefiziente honen balioa, orduan eta hobea izango da eredua aldagai dependenteak aldagai askea hobeto azalduko daualako. R^2 irizpideari begiratzen badeutsagu, balio handieneko ereduak Vasicek eta CIR ereduak dira. Vasicek eta CIR ereduetan mugatze-koefizientearen balioa 1 baliotik oso hurbil dago, hori dala eta, interes-tasa guztiz azalduta dagoela esango dogu eredu honeetan. Merton eta Black eta Scholes ereduetan $R^2 = 0$ da, hau da, Merton eta Black eta Scholes ereduek ez dabe interes-tasa aldagaia batere azaltzen. AIC irizpidea aztertzen badogu aldiz, badakigu zenbat eta AIC irizpide-balio txikiagoa eredua orduan eta hobea izango da. Azken hau kontuan hartuz, Black eta Scholes eta Brennan eta Schwartz ereduak berdinki onak dira. Hala ere, CIR eredua eredu hobea da Merton eta Vasicek ereduak baino.

Irizpide biak kontuan hartzen badoguz, hurrengo sailkapena egin daikegu: Eredurik onena Brennan eta Schwartz eredua izango litzateke. Bigarren eredu moduan CIR aukeratuko geunke eta azkenik Vasicek eredua. Eredurik txarrenak Merton eta Black eta Scholes ereduak direla esango geunke. Konturatu behar gara lortu doguzan emaitzak aurreko kapituluan teorikoki azaldu dogunarekin bat datozela, hau da, aurreko kapituluan aipatutako ereduen sailkapena eta kasu praktikoan lortutako ereduen sailkapena bat datoz.

Eredu bakoitzarekin aurresandako balioetareko emaitza batzuk lortu doguz. Merton ereduarekin konfiantza tarterik handiena lortu dogu eta ez daukagu inolako murrizketarik. Vasicek ereduarekin aldiz, aurresana asko hobetzen da. Oraingoan interes-tasaren konfiantza tartea mugatuta dago (0.2, 0.8) tartera. CIR ereduarekin gainera, askoz konkretuagoa dan aurresan bat lortzen dogu. Irudian ikusi eitekean bezala, konfiantza tartea $(aurresana - \varepsilon, aurresana + \varepsilon)$ itxurako tartea da. Brennan eta Black ereduekin antzerako emaitzak lortzen doguz, ez dira CIR ereduarekin lortutako aurresana bezain onak ezta Merton ereduarekin lortutako aurresan zehaztugabea ere. Konfiantza tarteak ez dauka itxura esanguratsurik eta handia da, baina hala ere (0.98, 1.02) tarteko banda bat da. Emaitza desberdinak ikusi eta gero, aurresanik zehatzena CIR ereduak emoten deuskula esan geinke. Gainera, konfiantza tarterik txikiena dauka, eta itxurarekin batera, aurresanik aproposena dala ikusi daiteke. Vasicek ereduarekin lortutako aurresana ere nahiko ona da, beraz CIR ereduaren aurresanaren ostean Vasicek ereduaren aurresana aukeratuko geunke. Askoz zehaztugabeagoak Black eta Brennan ereduen aurresanak dira eta zehaztugabeena Merton ereduaren aurresana.

Kasu praktikoaren atal honetan interes-tasa modelizatu nahi izan dogu eta horretarako eredu ezberdinak planteatu doguz. Ereduak aztertu eta gero emaitza batzuk lortu doguz eta gainera balio batzuk aurresaten saiatu gara. Interes-tasa modelizatzeko eredurik onenak Brennan eta Schwartz, CIR eta Vasicek ereduak izan dira hurrenez hurren. Interes-tasa aurresateko aldiz, CIR eta Vasicek izan dira zehaztasun handieneko ereduak. Hori dala eta, interes-tasaren modelizaziorako eredurik egokiena CIR eredua dala esango dogu eta bigarren eredu moduan Vasicek eredua aukeratuko dogu. Beraz, ikusi daikegu modelizazio eredurik egokienak batazbestekora itzultzea daukien ereduak dirala.

Bibliografia

[1] Damiano Brigo and Fabio Mercurio, *Interest Rate Models- Theory and Practice*, 2ª ed., Springer, New York, 2007.

[2] Euribor Banking Federation (EBF), Euribor Rates, (1999ko urtarrilaren 1etik 2014ko martxoaren 7ra).

[3] Investopedia, Investing, Advanced Bond Concepts: Term Structure of Interest Rates (http://www.investopedia.com/university/advancedbond/advancedbond4.asp).

[4] Miguel Ángel San Millán Martín, Bolsa y Mercados Financieros, Tema 2: La renta fija. Valoración y gestión de carteras de renta fija (http://www.emp.uva.es/ gfinan/Tema2-Miguel

[5] L. Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, Facultad de Ciencias UNAM, México DF, Enero 2012 (http://lya.fciencias.unam.mx/lars/Publicaciones/procesos2012.pdf).

[6] Salvador Tamarit Ramos, El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés, Máster Universitario en Dirección Financiera y Fiscal, Trabajo fin de máster, Universitat Politecnica de Valencia, Valencia, Mayo 2013 (http://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/31031/Eledicci

[7] Raúl Jiménez y Rosario Romera, Movimiento Browniano, Procesos estocásticos, UC3M, Diciembre 2008

[8] J. Sebastián Palacio Montoya, *Un Acercamiento desde las Ecuaciones Diferenciales Estocasticas*, Análisis, Descripción y Simulación de Modelos Estocásticos de Tasas de Interés, Universidad EAFIT de Medellin, Noviembre 2009.