eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Euskadi 2006

Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado
Fisikako Gradua / Grado en Física

Kaluza-Klein Teoriak

Egilea/Autor:
Xabier Llobregat
Zuzendaria/Director:
Iñigo Luis Egusquiza

Leioa, 2014ko irailaren 2a /Leioa, 2 de septiembre de 2014

Gaien Aurkibidea

Sarrera

1919. urtean Theodor Kaluza fisikari alemaniarrak Einsteini ideia interesgarri bat proposatu zion. Planteamendu honetan erlatibitate orokorra bost dimentsioko espazio-denbora batean aplikatuz, ordurarte ezagunak ziren bi interakzio motak, grabitatorioa eta elektromagnetikoa, grabitazio orokortu baten ondorio bezela ikusi zitezkeen.

Urte batzuk beranduago, 1926-ean, Oskar Klein fisikari suediarrak Kaluzaren ideiari hobekuntza batzuk egin zizkion. Hobekuntza hauen artean bostgarren dimentsioak zirkunferentzia oso txiki baten forma zuela proposatu zuen. Honela, Klein-en teorian bostgarren dimentsioa besteekiko ezberdina da eta zirkunferentzia baten forman *konpaktifikatuta* dago.

Planteamendu modernoetan bost dimentsio motz geratu dira, baina eskema orokorra nolabait mantentzen da. Dimentsio extra batzuk konpaktifikatuz, behatzen ditugun interakzioak grabitazio orokortu baten pean lortu nahi dituzten teoriei Kaluza-Klein teoriak deitzen zaie.

Lan hau Kaluza-Klein teoriei buruzko lan bibliografikoa da. Helburua teoria hauen planteamendu orokorra aurkeztea da, bai ezaugarri onak zein arazoak aipatuz.

Horretarako bost atal bereizi ditut. Lehenengoan Kaluza eta Klein-en pausoak jarraituz bost dimentsioko teoria aztertuko da. Bigarrenean bost baino dimentsio gehiago kontsideratuz elektromagnetismoaz gain eredu estandarreko beste gauge eremuak ere lortuko dira.

Hirugarrenean modo masiboei buruz hitz egingo da (hauek zer diren lehengo atalean zehaztuko da). Laugarrenean Kaluza-Klein teorien arazo larrienetako bat aztertuko da, fermioi kiralak lortzeko ezintasuna.

Azkenik, bostgarren atalean bost dimentsioko teoriako soluzio partikular interesgarri batzuk aipatuko dira.

Notazioari buruz ohar batzuk

Espazio-denbora *osoko* magnitudeak lau dimentsioko espazio-denborako magnitudeetatik bereizteko txapela bat erabiliko da. Adibidez, $\hat{R}$-k espazio-denbora osoko Ricci-ren eskalarea adierazten du, eta aldiz R-k lau dimentsiokoa.

μ eta ν bezelako letra grekoek ohiko $0, 1, 2$ eta 3 balioak hartuko dituzte. Aldiz, letra larri latinoak espazio-denbora osoko indizeak izango dira. Honela, adibidez, $\hat{R}_{AB}$ espazio denbora osoko Ricci-ren tentsorea litzateke, eta $R_{\mu\nu}$ lau dimentsiokoa.

Orokorrean $A, B, \ldots$ indize larri latinoek $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ balioak hartuko dituzte. Dena dela, lehenengo atalean aztertuko den bost dimentsioko teorian indizeen notazioa apur bat berezia da.

Ohiko lau dimentsioetarako $0, 1, 2, 3$ balioak erabiliko dira, baina bostgarren dimentsioarentzat ohikoa da 4 erabili beharrean 5 erabiltzea. Honela, kasu honetan indizeek $0, 1, 2, 3$ eta 5 balioak hartuko dituzte.

Hirugarren atalean izan ezik, erabiliko den metrikaren signatura $(-, +, +, +, \ldots, +)$ da. Lan guztian zehar $c = 1$ eta $\hbar = 1$ direneko unitateak erabili dira.

1 Erlatibitate orokorra bost dimentsiotan

1.1 Kaluzaren ideia

Abiapuntua tentsore metrikoa da. Espazio-denborari dimentsio bat gehitzen bazaio[1] tentsore metrikoa 5×5 tamainako matrize bat izango da. Honek esan nahi du metrikan lau dimentsioko kasuan ez zeuden, eta interpretatu beharko ditugun bost aldagai berri daudela.

Kaluzak bost aldagai horietatik lau, $\hat{g}_{5\nu}$-ak, (tetra) bektore batekin identifikatu zituen (eta dagoeneko susmatu daitekeen bezela bektore hau potentzial elektromagnetikoarekin identifikatuz ezarri zuen elektromagnetismoarekin lotura).

$\hat{g}_{55}$ osagai berriari zegokionez, Kaluzak berak ez zeukan oso argi zer egin ([4]"...the role of the component $\hat{g}_{55}$ in the corner remains unsettled for the time being..."). Aurrerago hitz egingo dut teoriako akzioaz, baina ikusiko dugu $\hat{g}_{55}$ elementu honek eremu eskalare baten ekarpena ematen duela.

Garaia hartan eremu eskalare hau desiragarria ez zen ezaugarri bat bezela ikusia izan zen (ez baitzekiten zerekin identifikatu), eta horregatik $\hat{g}_{55} = 1$ egin oi zen. Bost dimentsioko grabitazio batetik elektromagnetismoa eta betiko grabitazioa lortzeko $\hat{g}_{55} = 1$ baldintza nahikoa denez, guk ere momentuz balio hau erabiliko dugu eta aurrerago hitz egingo da $\hat{g}_{55}$ elementuaren kasu orokorraz.

Gauzak honela, hau da Kaluzaren tentsore metrikoa

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} & A_0 \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} & A_2 \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} & A_3 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 1 \end{pmatrix}$$

metrika honi buruz azken ohar bat. Kaluzak magnitude guzti hauek bostgarren dimentsioarekiko menpekotasunik gabekoak zirela onartu zuen (aurrerago Kleinek eman zuen baldintza honentzako justifikazio bat).

1.2 Geodesikoak eta Lorentz-en indarra

Kaluzaren metrikaren eta elektromagnetismoarekin arteko lotura ikusten hasteko, kontsidera ditzagun espazio-denbora honetako geodesikoak

$$\frac{d^2x^A}{d\sigma^2} + \hat{\Gamma}^A_{BD}\frac{dx^B}{d\sigma}\frac{dx^D}{d\sigma} = 0$$

non geodesikoak parametrizatzeko $d\sigma = \sqrt{-d\hat{s}^2}$ erabiliko dugun. Kontuz, σ *ez* da denbora propioa. Denbora propioa lau dimentsioko luzera elementuarekin eraikitzen da $d\tau = \sqrt{-ds^2}$. σ nolabaiteko denbora propioaren bost dimentsioko

[1] gehitzen den dimentsioa espazio motakoa da, denbora motako dimentsioek arazoak dakartzate [1]

analogo formala da, zeina bost dimentsioko espazio-denboran zeharreko geodesikoak parametrizatzeko erabili daitekeen.

Gure arrazonamendurako $A = \alpha$ ekuazioak aztertzearekin aski izango dugu. Beraz, garatuz

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} + \hat{\Gamma}^A_{\mu 5}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^5}{d\sigma} + \hat{\Gamma}^\alpha_{5\nu}\frac{dx^5}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} + \hat{\Gamma}^\alpha_{55}\frac{dx^5}{d\sigma}\frac{dx^5}{d\sigma} = 0$$

eta konexio koefizienteak kalkulatuz

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha 5}(\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu)$$

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu 5} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}F_{\beta\mu}$$

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{55} = 0$$

non $F_{\mu\beta} \equiv \partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu$ egin dugun. Emaitza hauek erabiliz adierazpen hau lortzen dugu

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \frac{dx^5}{d\sigma}F_\mu{}^\alpha\frac{dx^\mu}{d\sigma} - g^{\alpha 5}\partial_\nu A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}$$

ekuazio honetan has gaitezke lehenengo aldiz A_ν bektorea eta elektromagnetismoaren arteko lotura ikusten. Eskuineko lehen terminoak Lorentz-en indarraren tankera dauka.

Dena dela, ekuazio honetan arazo garrantzitsuak daude. Hasteko, eskuineko bigarren gaiarentzat ez dugu interpretazio garbirik. Gainera, gai hau ez da tentsoriala eta ondorioz, goiko ekuazioa ez da kobariantea.

Ez dugu lehen ezer aipatu, baina goiko ekuazioaren kobariantza ez honen jatorria Kaluzaren "tentsore" metrikoa benetan tentsore bat ez izatea da (hau da, onartuz $g_{\mu\nu}$ eta A_ν lau dimentsioko koordenatu aldaketa baten aurrean lau dimentsioko espazio-denborako tentsore bezela portatzen direla, $\hat{g}_{AB}$ ez da bost dimentsioko koordenatu aldaketa betan aurrean tentsore bat bezela transformatzen).

Arazo hauek guztiak Klein-en metrika kontsideratzean konpontzen dira.[2]

1.3 Klein-en hobekuntzak

Lan honen sarreran aurreratu den bezela, 1926-ean Oskar Klein-ek Kaluzaren proposamenari hobekuntza interesgarri batzuk egin zizkion. Hasteko, tentsore

[2] Kaluzaren metrika geodesikoak aztertzeko bakarrik erabili dugun arren ez da hau metrika honekin egin daitekeen gauza bakarra. Adibidez, froga daiteke A_μ eremuarentzat Maxwell-en ekuazioak berreskuratzen direla. Dena dela, Kaluzaren metrikaren $\hat{g}^{AB}$ alderantzizkoaren forma nahaspila bat denez, Kaluzaren metrikaren eginiko kalkulu gehienak asko konplikatu oi dira

metrikoaretzat forma hau proposatu zuen

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{00} + A_0A_0 & g_{01} + A_0A_1 & g_{02} + A_0A_2 & g_{03} + A_0A_3 & A_0 \\ g_{10} + A_1A_0 & g_{11} + A_1A_1 & g_{12} + A_1A_2 & g_{13} + A_1A_3 & A_1 \\ g_{20} + A_2A_0 & g_{21} + A_2A_1 & g_{22} + A_2A_2 & g_{23} + A_2A_3 & A_2 \\ g_{30} + A_3A_0 & g_{31} + A_3A_1 & g_{32} + A_3A_2 & g_{33} + A_3A_3 & A_3 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 1 \end{pmatrix}$$

froga daiteke metrika hau bai dela tentsore bat. Honetaz gain, bere determinantea lau dimentsioko metrikaren determinantearen berdina da

$$det(g_{\mu\nu}) = det(\hat{g}_{AB})$$

eta metrikaren alderantzizkoak ondoko forma sinplea dauka

$$\hat{g}^{AB} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} & -A^0 \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} & -A^1 \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} & -A^2 \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} & -A^3 \\ -A^0 & -A^1 & -A^2 & -A^3 & 1 + A_\nu A^\nu \end{pmatrix}$$

Kaluzaren metrikarekin egin den bezela, metrikaren osagai guztiak (momentuz) bostgarren dimentsioarekiko menpekotasunik gabeak kontsideratuko ditugu. Aurrerago justifikatuko dugu baldintza hau eta hitz egingo dugu kasu orokorraz.

1.4 Geodesikoak eta Lorentz-en indarra II

Errepika dezagun geodesikoen azterketa Klein-en metrika erabiliz. Idatz dezagun geodesikoen ekuazioa

$$\frac{d^2x^A}{d\sigma^2} + \hat{\Gamma}^A_{BD}\frac{dx^B}{d\sigma}\frac{dx^D}{d\sigma} = 0$$

eta (momentuz) zentra gaitezen $A = \alpha$ ekuazioetan. Konexioak kalkulatuz

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\nu(A_\beta A_\mu) + \partial_\mu(A_\beta A_\nu) - \partial_\beta(A_\mu A_\nu)\right) - \frac{1}{2}A^\alpha(\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu)$$

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu 5} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}$$

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{55} = 0$$

non berriro $F_{\mu\beta} \equiv \partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu$ egin dugun. Konexio koefiziente hauek erabiliz ekuazio honetara iristen gara

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = F^\alpha_{\ \mu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^5}{d\sigma} + F^\alpha_{\ \mu}A_\nu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}$$

ekuazio honek Kaluzaren metrika erabiliz lortu dugun ekuazioa baino itxura hobea dauka. Hasteko guztiz kobariantea da. Gainera, Lorentz-en indarrarekin lotura egitea ahalbidetzen digun $F^\alpha_{\ \mu}$ gaia berriro agertzen da, baina oraingoan eskuineko bi gaietan.

Honela, bi termino hauek erabili ditzakegu goiko ekuazioan Lorentz-en indarrarekin lotura egiten hasteko eta honela ez dugu interpretatu gabeko terminorik

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \left(\frac{dx^5}{d\sigma} + A_\nu\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right)F^\alpha_{\ \mu}\frac{dx^\mu}{d\sigma} \tag{1}$$

gainera, froga daiteke parentesi arteko gai hori higidura konstantea dela. Hau frogatzeko orainarte erabili ez dugun $A = 5$ geodesikoen ekuazioa behar dugu.

Hau da $A = 5$ geodesikoen ekuazioa

$$\frac{d^2x^5}{d\sigma^2} - A_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = -\partial_\nu A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} - A^\beta F_{\alpha\beta}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^5}{d\sigma} - A^\alpha A_\mu F_{\nu\alpha}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}$$

orain, (1) ekuazioa A_α-z bidertuz eta goiko ekuazioari gehituz, adierazpen honetara iristen gara

$$\frac{d^2x^5}{d\sigma^2} + A_\mu\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \partial_\nu A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$$

eta konturatuz

$$\partial_\nu A_\mu\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \frac{dA_\mu}{d\sigma}$$

dela, emaitza hau lortzen dugu

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx^5}{d\sigma} + A_\nu\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right) = 0$$

hau da, (1) ekuazioko parentesi arteko adierazpena higidura konstantea da. Higidura konstante honi Ξ deituko diot. Beraz, (1) honela geratzen da

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \Xi F^\alpha_{\ \mu}\frac{dx^\mu}{d\sigma} \tag{2}$$

ekuzio hau ikusita tentagarria da Lorentz-en indarrarekin identifikatzeko $\Xi = q/m$ egitea. Dena dela, identifikazio hau egin aurretik detaile bat izan behar dugu kontutan.

Orainarte geodesikoak parametrizatzeko σ parametroa erabili dugu. Dena dela, Lorentz-en indarraren ekuazioak *denbora propioa* erabiliz idaztean hartzen du forma hau

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{q}{m}F^\alpha_{\ \mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{3}$$

eta beraz, (2) ekuazioa denbora propioa erabiliz parametrizatu behar da (3)-rekin alderatuz Ξ higidura konstantearen balioa zehazteko.

Parametro aldaketa hau sinplea da baldin eta konturatzen bagara

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{AB}dx^A dx^B$$

ekuaziotik abiatuz

$$(1 - \Xi^2)d\hat{s}^2 = ds^2$$

berdintzara iristen garela. Beraz, azken ekuazio honen bi aldeak -1-ez bidertuz eta erroa hartuz, σ eta τ denbora propioaren arteko erlazioa lor dezakegu

$$d\sigma = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\Xi^2}}$$

berdintza hau eskuan izanik (2) ekuazioa denbora propioa erabiliz idatz dezakegu

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\Xi}{\sqrt{1-\Xi^2}}F^\alpha_{\ \mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

eta orain bai, ekuazio hau (3)-ekin alderatuz Ξ higidura konstantearentzat balio hau lortzen dugu

$$\Xi = \frac{q}{m\sqrt{1-\frac{q^2}{m^2}}}$$

beraz, laburbilduz, Klein metrikatik abiatuz lau dimentsioko espazio-denbora kurbatu batean Lorentz-en indarraren pean higitzen den q kargako eta m masako partikularen higidura ekuazioa lortu dugu

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{q}{m}F^\alpha_{\ \mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

1.5 Gauge transformazioak

Geodesikoak aztertuz bostgarren dimentsioaren eta elektromagnetismoaren arteko lotura oso argi agertu zaigu. Dena dela, batek pentsa lezake hau guztia agian kasualitatea besterik ez dela.

Atal honetan A_ν bektorearen eta elektromagnetismoaren arteko lotura oraindik nabariagoa egingo dugu. Ikusiko dugu koordenatu aldaketa batzuen (lan honen bigarren zatian zehaztuko da zer koordenatu aldaketa mota diren hauek) ondorioz potentzial elektromagnetikoaren gauge transformazioak lortuko ditugula A_ν-rentzat.

Beraz, kontsidera dezagun bostgarren dimentsioko koordenatu aldaketa lokal hau

$$x^5 \to x^5 + \epsilon(x)$$

non $\epsilon(x)$ ohiko lau dimentsioen menpeko den funtzio arbitrario bat den. $\hat{g}_{AB}$ tentsore bat denez, koordenatu aldaketa baten pean honela transformatzen da

$$\hat{g}_{AB} = \frac{\partial x'^M}{\partial x^A}\frac{\partial x'^N}{\partial x^B}\hat{g}'_{MN}$$

eta $A=\mu, B=5$ gaian zentratuz, honakoa lortzen dugu

$$\hat{g}_{\mu 5} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^5}\hat{g}'_{\beta\alpha} + \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^5}{\partial x^5}\hat{g}'_{\beta 5} + \frac{\partial x'^5}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^5}\hat{g}'_{5\alpha} + \frac{\partial x'^5}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^5}{\partial x^5}\hat{g}'_{55}$$

$$\hat{g}_{\mu 5} = \delta^\beta_\mu\hat{g}'_{\beta 5} + \partial_\mu\epsilon\hat{g}'_{55}$$

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\epsilon$$

zeina potentzial elektromagnetikoaren gauge transformazioak diren. Hau da, kontsideratutako koordenatu aldaketa horiek gauge transformazioak induzitzen dituzte. Ikusten dugu beraz bostgarren dimentsioa eta elektromagnetismoaren arteko lotura geroz eta nabariagoa egiten ari dela.

1.6 Akzioa

Atal honetan bost dimentsioko teoriaren akzioa aztertuko dugu. Honela, bost dimentsioko grabitaziotik abiatuz Maxwell-en akzioa eta lau dimentsioko Hilbert-en akzioa lortuko ditugu. Hori egiteko teoriaren akzioa bostgarren dimentsioan integratuko da[3], lau dimentsioko akzio *efektibo* bat lortuz.

Bost dimentsioko espazio-denbora batean erlatibitate orokorra aplikatzen besterik ez garenez ari, abiapuntua bost dimentsioko espazio-denbora batera orokortutako Hilbert-en akzioa da

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}}\int d^5x\sqrt{-\hat{g}}\hat{R} \tag{4}$$

non $\hat{g}$ tentsore metrikoaren determinantea den, eta $\hat{G}$ grabitazio konstante orokortu moduko bat (a priori ez baitago inungo arrazoirik pentsatzeko ohiko G-a izango dugunik).

Bostgarren dimentsioan integratu aurretik Ricci-ren eskalarea kalkulatu behar dugu. Horretarako lehenik konexio koefizienteak kalkulatu behar ditugu.

$$\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(A_\mu F^{\lambda}{}_{\nu} + A_\nu F^{\lambda}{}_{\mu}) \qquad \hat{\Gamma}^{5}_{\mu 5} = -\frac{1}{2}A_\lambda F^{\lambda}{}_{\mu}$$

$$\hat{\Gamma}^{5}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\nu A_\mu + \nabla_\mu A_\nu) - \frac{1}{2}A_\lambda(A_\mu F^{\lambda}{}_{\nu} + A_\nu F^{\lambda}{}_{\mu})$$

$$\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}A_\lambda F^{\lambda}{}_{\mu} \qquad \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\lambda 5} = 0$$

$$\hat{\Gamma}^{5}_{55} = \hat{\Gamma}^{\lambda}_{55} = 0 \qquad \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu 5} = \frac{1}{2}F^{\lambda}{}_{\mu}$$

non orain arte bezela $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ egin dugun. Beraz, konexio koefiziente hauek erabiliz Ricci-ren tentsorea eraikiz

$$\hat{R}_{AB} = \partial_B \hat{\Gamma}^{D}_{AD} - \partial_D \hat{\Gamma}^{D}_{AB} + \hat{\Gamma}^{D}_{AE}\hat{\Gamma}^{E}_{BD} - \hat{\Gamma}^{D}_{DE}\hat{\Gamma}^{E}_{AB}$$

honakoa lortzen dugu

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(A_\mu \nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu} + A_\nu \nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\mu}) + \frac{1}{4}(F^{\lambda}{}_{\nu}F_{\lambda\mu} + F^{\lambda}{}_{\mu}F_{\lambda\nu}) - \frac{1}{4}A_\mu A_\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$\hat{R}_{\mu 5} = -\frac{1}{2}\nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\mu} - \frac{1}{4}A_\mu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \qquad \hat{R}_{55} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

eta hemendik Ricci-ren eskalarea lortuz

$$\hat{R} = R + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

non R lau dimentsioko Ricci-ren eskalarea den. Ikusten dugu beraz bost dimentsioko grabitazioaren Lagrangear dentsitatea den Ricci-ren eskalaretik lau dimentsioko grabitazioaren Lagrangear dentsitatea eta eremu elektromagnetikoaren Lagrangear dentsitatea lortu ditugula.

---

[3]prozedura honi "dimensional reduction" deitu oi zaio

Orain, Ricci-ren eskalarearen adierazpen hau (4) Hilbert-en akzioan sartuz, eta gogoratuz tentsore metrikoaren determinantea $\hat{g} = g$ dela (non g lau dimentsioko $g_{\mu\nu}$ metrikaren determinanea den), akzioarentzat hau lortzen dugu

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}} \int d^4x\sqrt{-g}\left(R + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \int dx^5$$

non lehen begirada batean ematen duen elektromagnetismoaren eta grabitazioaren akzioak lortu ditugula.

Dena dela, ekuazio honetan arazo garrantzitsu bat dugu. Bostgarren dimentsioan zeharreko integralak ez dauka itxura oso onik. Baldin eta bostgarren dimentsioa beste hiru dimentsio espazialen izaera berekoa balitz, integralak dibergitu egingo luke.

1.7 Bostgarren dimentsioaren konpaktifikazioa

Hala ere, ez du zertan hori izan behar kasua. Hemen agertzen zaigu lehenengo aldiz bostgarren dimentsioaren ezaugarri bereizgarria. Baldin eta bostgarren dimentsioa nolabait itxia dela onartzen badugu, azken integral horretan ez genuke arazorik. Kleinek perspektiba hau hartu zuen, eta bostgarren dimentsioa r erradioko zirkunferentzia bailitzan kontsideratu zuen. Ideia honek oso ondorio interesgarriak dituela ikusiko dugu.

Hasteko, honela azal dezakegu zergatik ez daukagun bostgarren dimetsioarekin esperientzia zuzenik. Egoera nolabait elektrizitate kable batenaren analogoa da. Oso urrunetik begiratuta, luzerarekin alderatuz kablearen erradioa oso txikia denez, kableak dimentsio bakarra duen objetua dirudi.

Berdina gertatuko litzateke bostgarren dimentsioarekin baldin eta bere erradioa behar bezain txikia balitz (askotan Planck-en luzeraren magnitude ordenakoa dela esaten da), eta honela justifika daiteke bostgarren dimentsio espazialarekin esperientzia zuzenik ez izatea.

Honetaz gain, orainarte A_ν eta $g_{\mu\nu}$ bostgarren dimentsioarekiko menpekotasunik gabeak direla onartu dugu. Bostgarren dimentsioa zirkunferentzia bat izateak, Fourier-en garapenen bidez, planteamendu hau justifika dezake.

Bostgarren dimentsioa zirkunferentzia bat bada periodizitatea daukagu, eta beraz, edozein $\Upsilon(x, \theta)$ funtzio Fourier-en modotan garatu daiteke (θ bostgarren dimentsio periodikoaren koordenatua besterik ez da)

$$\Upsilon(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \upsilon(x)e^{in\theta}$$

$\theta = x^5/r$ dugularik (non r bostgarren dimentsioaren erradioa den). Hurrengo atalean ikusiko dugun bezela Fourier-en modo bakoitzak n^2/r^2 ordenako masa dauka. Baldin eta bostgarren dimentsioaren erradioa oso txikia balitz, $n \neq 0$ modoak oso masiboak izango lirateke eta energia baxuetan beraien ekarpena arbuiatu ahalko genuke.

Hau genuke orainarte egin dugunaren justifikazioa. Hau da, A_ν eta $g_{\mu\nu}$ eremuetan θ-rekiko menpekotasunik kontutan ez hartzea $n \neq 0$ *modo masiboak* arbuiatzea besterik ez da.

1.8 Kargaren kuantizazioa

Bostgarren dimentsioa zirkunferentzia bat bezela hartzeak badu beste ondorio interesgarri bat. Eremuen modo masiboek karga elektrikoa dute eta berau kuantizatuta agertzen da.

Atal honetan (sinplizitatez) eremu sinple bat (hau da eskalare masagabe bat) kontsideratuko dut kargaren kuantizazioa nola agertzen den ikusteko (eta bide batez aurreko atalean esan bezela modo masiboak eremu masadunak direla ere ikusiko dugu).

Beraz, demagun eremu eskalar (konplexu) masagabe bat dugula bost dimentsioko grabitazioari akoplatuta

$$S = \int d^5x\sqrt{-\hat{g}}(-\hat{g}^{AB}\partial_A\Phi^*\partial_B\Phi)$$

Φ eremuak Fourier-en garapen hau onartu behar du

$$\Phi(x, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x)e^{inx^5/r}$$

garapen hau akzioan sartuz eta bostgarren dimentsioan integratuz

$$S_4 = 2\pi r \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^4x\sqrt{-g}\left(-g^{\mu\nu}(\partial_\mu + i\frac{n}{r}A_\mu)\phi^{(n)*}(\partial_\nu - i\frac{n}{r}A_\nu)\phi^{(n)} - \frac{n^2}{r^2}|\phi^{(n)}|^2\right)$$

emaitza lortzen dugu. Orain, gogoratuz elektrodinamikako gauge deribatu kobariantea

$$D_\nu = \partial_\nu - iqA_\nu$$

goiko ekuazioa honela geratzen zaigu

$$S_4 = 2\pi r \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^4x\sqrt{-g}\left(-g^{\mu\nu}(D_\mu\phi^{(n)})^*D_\nu\phi^{(n)} - \frac{n^2}{r^2}|\phi^{(n)}|^2\right)$$

ekuazio honetan ikusten da $\phi^{(n)}$ eremuak lau dimentsioko eskalare konplexuak direla, zeinek masa hau duten

$$m_n = \frac{n^2}{r^2}$$

bostgarren dimentsioaren erradioa Planck-en eskalakoa izatea espero baldin badugu, masa hauek (lehen esan bezela) gaur egun behatutako edozein partikularena baino askoz handiagoak lirateke.

Honetaz gain, ikusten dugu $\phi^{(n)}$-ak potentzial elektromagnetikoari minimoki akoplatuta daudela eta karga elektriko hau dutela

$$q_n = \frac{n}{r}$$

eta beraz modo masiboak kargadunak dira ($n = 0$ modo ez masiboa izan ezik) eta karga hau goiko adierazpenaren arabera kuantizatuta dago[4].

1.9 Eskalarea

Orainarte Kaluza eta Klein-en pausoak jarraituz tentsore metrikoaren 55 gaia 1-ekin identifikatu dugu. Dena dela, lehen aipatu dugun bezela posible da kasu orokorrago bat kontsideratzea non $\hat{g}_{55} = \Phi$ izango genukeen, Φ funtzio eskalare bat delarik.

Honela, Φ, A_ν eta $g_{\mu\nu}$ hiru eremuak erabiliz honela idatz dezakegu tentsore metrikoa[5] [7]

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu \Phi & \Phi A_\mu \\ \Phi A_\nu & \Phi \end{pmatrix} \qquad \hat{g}^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -A^\mu \\ -A^\nu & \Phi^{-1} + A_\beta A^\beta \end{pmatrix}$$

eta gainera

$$det(\hat{g}_{AB}) = det(g_{\mu\nu})\Phi$$

$$d\hat{s}^2 = \Phi(dx^5 + A_\nu dx^\nu)^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Φ eremuari batzuetan *dilatoia* deitzen zaio. Honen arrazoia Φ eremua modu batean bostgarren dimentsioaren geometriarekin lotuta dagoela da. Orainarte $\Phi = 1$ egin dugunean (edo orokorrean $\Phi = k$ egitean) dimentsio konpaktuen tamaina finkatu egiten dugu. $\Phi \neq k$ egitean bostgarren dimentsioaren geometria, beste lauena bezela, aldatu egin daiteke.

Amaitzeko, metrika $g_{\mu\nu}$, A_ν eta Φ hiru eremuak erabiliz idaztean lortzen dugun lau dimentsioko akzio efektiboa idatziko dut[6] [7]

$$S_4 = -\frac{-1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \Phi^{1/2} (R + \frac{1}{4} \Phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

non hiru eremuen ekarpena dugun.

---

[4]kontuz, toki batzuetan (adibidez [1]) kargarentzako balio ezberdinak aurkitu daitezke. Guk $\hat{g}_{55} = 1$ artu dugu orainarte. Batzuek $\hat{g}_{55} = k$ balioarekin egiten dute lan eta emaitza batzuk konstante batzuetan ezberdinak izan daitezke.

[5]badaude tentsore metrikoa $g_{\mu\nu}$, A_ν eta Φ erabiliz idazteko hemen erabilia baino modu gehiago, hau ez da bakarra

[6]lehen esan dudan bezela, $\hat{g}_{AB}$ idazteko hainbat modu daude eta modu berean akzioa idazteko ere hainbat modu aurki ditzakegu

2 Orokorpen ez abeldarra

Kaluza eta Klein-ek beren lanak aurkeztu zituzten garaian ezagunak ziren interakzioak elektromagnetikoa eta grabitatorioa ziren. Dena dela, denok dakigun bezela, urte batzuk geroago fisikariek interakzio ahula eta sendoa aurkitu zituzten eta hauek gauge teorien bidez ereduztatuak izan ziren.

Atal honetan ikusiko dugu nola den posible aurreko ataleko planteamendua orokortzea eredu estandarreko (izatez nahi den) gauge eremuak lortzeko.

Honetarako bost dimentsio motz geratuko zaizkigu.

Ulertzeko nola orokortu teoria, garrantzitsua da ulertzea *zergatik* bost dimentsioko kasuan potentzial elektromagnetikoarekin identifika dezakegun gauge eremu bat lortu dugun. Erantzuna ohiko espazio denborari gehitu diogun espazio konpaktuan dago.

Zein da bost dimentsioko teoriako espazio-denbora *hutsean*? ba aurreko atalean esan dugunaren arabera $\mathbb{R}^{1,3} \times S^1$, hau da, zirkunferentzia bat gehitu diogu Minkowskiren espazio-denborari. Orain, zein da elektromagnetismoaren gauge taldea? $U(1)$, hau da, *zirkunferentzia* taldea. Beraz, ikusten dugu $U(1)$ gauge taldea nolabait espazio-denborari gehitu diogun espazio konpaktuan sartu dugula.

Hau ikusita batek pentsa lezake teorian edozein gauge eremu sartzeko egin beharrekoa espazio-denboraren hutsa $\mathbb{R}^{1,3} \times G$ dela onartzea dela, non G lortu nahi dugun gauge (Lie) taldea den. Dena dela, gauzak *ez* dira hain sinpleak. Egin beharrekoa ohiko Minkowskiren espazio-denborari B barietate bat gehitzea da, zeinak nahi dugun gauge taldea *isometria talde* bezela duen.

Adibide bezela, bost dimentsioko kasuan S^1 barietatea gehitu diogu Minkowskiren espazio-denborari, zeinaren isometria taldea $U(1)$ den, hain zuzen lortu dugun gauge taldea.

Gogoratu isometriak (nolabait esateko) metrika aldatu gabe uzten duten transformazioak direla. Zehatzago izanik, kontsidera dezagun koordenatu aldaketa infinitesimal hau

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + (\epsilon_a)(\xi^a)^\mu$$

non $(\xi^a)^\mu$-ak $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ ekuazioa betetzen duten Killing-en bektore eremuak diren[7]. Goiko koordenatu aldaketa isometria infinitesimal bat da, eta honen ondorioz metrika honela transformatzen da

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x')$$

hau da, metrika "ez da aldatzen". Adibidez, Minkowskiren espazio-denboraren kasuan Poincaré-ren taldeak emanak dira isometriak.

[7] a indizea isometria infinitesimal independienteak ematen dituzten Killing-en bektoreak izendatzeko indize bat besterik ez da, eta hartu ditzakeen balioak isometria taldearen aljebraren dimentsioak ematen dizkigu

Beraz, atal honetan onartuko dugu hutseko espazio-denbora $\mathbb{R}^{1,3} \times B$ dela, non B espazioa $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ isometria taldea duen D dimentsioko barietate konpaktua den.

Ohar garrantzitsu bat. Bost dimentsioko teorian bezela, gehitzen diren dimentsio extrak beti espazio motakoak izan behar dute. Denbora motako dimentsio extrek arazoak dakartzate [1].

2.1 Tentsore metrikoa

Aurreko ataleko Klein-en metrikaren antzerako itxura duen metrika bat erabiliz orokortuko dugu bost dimentsiotan egin dugun planteamendua, noski oraingoan eremu gehiago erabiliz

$$\hat{g}_{AB}(x,y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \gamma_{ij}(\xi_\alpha)^i(\xi_\beta)^j(A^\alpha)_\mu(A^\beta)_\nu & \gamma_{in}(\xi_\alpha)^i(A^\alpha)_\mu \\ \gamma_{mj}(\xi_\beta)^j(A^\beta)_\nu & \gamma_{mn} \end{pmatrix}$$

notazioa apur bat astuna da eta argibide batzuk beharrezkoak dira.

Hasteko, kontuz, α eta β indizeek isometria independienteen sortzaile diren Killing-en bektorea denotatzen dizkigute (hau da lan guztiko toki bakarra non α eta β letra grekoak *ez* diren lau dimentsioko indizeak adierazteko erabiltzen), eta isometria taldearen aljebraren dimentsioak adina daude.

i, j, m eta n espazio konpaktuko indizeak dira eta 1-etik D-ra dijoaz. μ eta ν ohiko 4 dimentsioko espazio-denborako indizeak dira. γ_{mn} espazio konpaktuko metrika dugu. $(A^\alpha)_\nu$-ak $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ gauge eremuak dira.

y-ek espazio konpaktuko koordenatuak adierazten dituzte. x-ek ohiko espazio-denborakoak. Onartuko dugu $g_{\mu\nu}$ eta $(A^\alpha)_\nu$ soilik x aldagaien menpeko direla. Hau da, modo masiboak arbuiatzen ari gara orain ere. Modu berean, γ_{mn} (eta ondorioz Killing-en bektoreak) soilik y aldagaien menpeko izango da.

Pentsa genezake zergatik sartu dugun espazio konpaktuaren metrika orain eta ez bost dimentsioko kasuan. Erantzuna da bost dimentsiotan ere sartu dugula metrika, baina ez hain esplizituki.

Zirkunferentzia baten tentsore metrikoa r^2 besterik ez dugu. Hau da, *konstantea* da. Hori dela eta, arazo gehiegirik gabe lan egin dezakegu $r^2 = k$ (gure kasuan $k = 1$) eginez. Kasu orokorrean ez dugu hainbeste zorterik eta nahi dugun isometria taldea duten espazio konpaktuen metrikak ez dira konstanteak izango.

Honetaz gain, γ_{mn}-n x-ekiko menpekotasuna ere sar genezake. Momentuz ez dugu horrelakorik egingo, ez baitugu behar eredu estandarreko gauge eremuak lortzeko, baina aipatzen dut hori eginez eskalareak lortzen direla [1].

2.2 Gauge transformazioak

Kasu abeldarrean bezela (nahiz eta ez dudan esplizituki esan), gauge eremuen gauge transformazioak induzitzen dituzten koordenatu aldaketak espazio konpaktuko *isometria* lokalak dira.

Bost dimentsiotan egin dugunaren antzera, espazio konpaktuko isometria lokal infinitesimal (lokaltasuna ϵ-en x-ekiko menpekotasunean sartu da) bat kontsideratuz

$$y^n \to y^n + (\xi_\alpha)^n(\epsilon^\alpha)$$

eremuak honela transformatzen dira [1]

$$(A^\alpha)_\mu \to (A'^\alpha)_\mu + \partial_\mu(\epsilon^\alpha) + C_{\alpha\beta\iota}(\epsilon^\beta)(A^\iota)_\mu$$

non $C_{\alpha\beta\iota}$ isometria taldearen egitura konstantea den. Hau da, Yang-Mills gauge transformazio bat lortzen dugu.

Beraz, laburbilduz, espazio konpaktuko isometriek gauge transformazioak induzitzen dituzte.

2.3 Akzioa

Atal honetan egingo duguna kasu abeldarrean egin dugunaren analogoa da. $(1, 3 + D)$ dimentsioko espazio-denbora bateko grabitaziotik abiatuz, eta espazio konpaktuko aldagaietan integratuz, 4 dimentsioko teoria efektibo bat lortuko dugu, zeinean ohiko grabitazioa eta isometria taldeak emaniko gauge eremuak izango ditugun.

Dena dela, oraingoan detaile bat aldatuko dugu. Gero argi geratuko diren arrazoiengatik oraingoan bost dimentsioko konstante kosmologiko bat sartuko dugu hasieratik. Beraz,

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}}\int d^{4+D}x\sqrt{|\hat{g}|}(\hat{R} + \hat{\Lambda})$$

orain, tentsore metrikoa erabiliz Ricci-ren eskalarea garatuz [3] adierazpen honetara iristen gara

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}}\int d^4x d^D y\sqrt{|g|}\sqrt{|\gamma|}\left(R + R_D + \hat{\Lambda} + \frac{1}{4}\gamma_{mn}(\xi_\alpha)^m(\xi_\beta)^n(F^\alpha)^{\mu\nu}(F^\beta)_{\mu\nu}\right)$$

non $(F^\alpha)_{\mu\nu} = \partial_\mu(A^\alpha)_\nu - \partial_\nu(A^\alpha)_\mu - C_{\alpha\beta\iota}(A^\beta)_\mu(A^\iota)_\nu$ den.

Bost dimentsiotan genuenaren antzera, 4 dimentsioko Hilbert-en Lagrangearra eta Yang-Mills-en Lagrangearra lortu ditugu. Dena dela, akzio honetan bost dimentsioko kasuan ez genuen gauza bat atera zaigu, espazio konpaktuko R_D Ricci-ren eskalarea[8].

Hala eta guztiz ere, espazio konpaktuko Ricci-ren eskalareak ez dizkigu gauzak gehiegi nahasten. Azken finean, y-en menpekoa da soilik eta espazio konpaktuan integratzen dugunean konstante bat besterik ez digu emango. Hau da, lau dimentsioko Λ konstante kosmologikoari ekarpen bat besterik ez dio egingo. Horregatik sartu dugu hasieratik bost dimentsioko $\hat{\Lambda}$ konstante kosmologiko

[8]zentzu batean, bost dimentsiotan ere lortu dugu espazio konpaktuko Ricci-ren eskalarea, zeina zirkunferentziaren kasuan nulua den

bat, zeinak ere dimentsio konpaktuetan integratzean 4 dimentsioko konstante kosmologikoari ekarpen bat egingo dion. Honela, $\hat{\Lambda}$-ren balioa zehaztuz nahi dugun Λ lor dezakegu edozein espazio konpaktu dugularik ere.

Amaitzeko, espazio konpaktuan integratuz eta Hilbert-en eta Yang-Mills-en akzio egokiak lortzeko definizio hauek eginez

$$\frac{1}{16\pi\hat{G}}\int d^D y\sqrt{|\gamma|} = \frac{1}{16\pi G}$$

$$\frac{1}{16\pi\hat{G}}\int d^D y\sqrt{|\gamma|}\gamma_{mn}(\xi_\alpha)^m(\xi_\beta)^n = \delta_{\alpha\beta}$$

$$-\frac{1}{16\pi\hat{G}}\int d^D y(R_D+\hat{\Lambda}) = \frac{2\Lambda}{16\pi G}$$

honakoa lortzen dugu

$$S_4 = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) - \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}(F^\alpha)^{\mu\nu}(F^\alpha)_{\mu\nu}$$

hau da, grabitazioa eta gauge eremuak lortu ditugu.

2.4 Konpaktifikazio mekanismoen beharra

Orainarte ez dugu ezer esan, baina kasu ez abeldarrak kasu abeldarrarekin alderatuta arazo garrantzitsu bat du.

Bost dimentsiotan $\mathbb{R}^{1,3}\times S^1$ bada bost dimentsioko hutseko Einstein-en ekuazioen soluzioa. Aldiz, kasu ez abeldarrean $\mathbb{R}^{1,3}\times B$ *ez* da orokorrean hutseko Einstein-en ekuazioen soluzioa izango.

Oso erraz ikusi daiteke hau. Kontsidera ditzagun hutseko Einstein-en ekuazioak

$$\hat{R}_{AB} - \frac{1}{2}(\hat{R}+\hat{\Lambda})\hat{g}_{AB} = 0$$

orain, onartu dugun hutseko soluzioa $\mathbb{R}^{1,3}\times B$ denez

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix}\eta_{\mu\nu} & \\ & \gamma_{mn}\end{pmatrix}$$

eta Minkowskiren espazio-denbora laua denez, Ricci-ren tentsorearen $\mu\nu$ osagaiak nuluak izan behar dira

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} = 0$$

eta ondorioz Einstein-en ekuazioen $\mu\nu$ osagaiek hau ematen digute

$$(\hat{R}+\hat{\Lambda}) = 0$$

baina hori honela balitz Einstein-en ekuazioen mn gaietan honakoa genuke

$$R_{mn} = 0$$

hau da, espazio konpaktuak nahitaez Ricci-laua izan behar du. Dena dela, *ezinezkoa* da $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ isometria taldedun espazioak lortzea zeinak Ricci-lauak diren [8].

Beraz, orainarte egin dugun planteamendua apur bat aldatu behar dugu. Zer da egiten dena? Bi soluzio mota proposatu oi dira. Bat, Einstein-en ekuazioak nolabait aldatzea, behar ditugun konpaktifikazioak onar ditzaten.

Honela, Hilbert-en akzioan beste kurbatura eskalare batzuk kontsideratu genitzazke

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}} \int d^{4+D} \sqrt{|\hat{g}|}(\hat{\Lambda} + \hat{R} + \alpha\hat{R}^2 + \beta\hat{R}_{AB}\hat{R}^{AB} + \gamma\hat{g}^{AB}\nabla_A\hat{R}\nabla_B\hat{R} + \dots)$$

hemendik lortutako higidura ekuazioek komeni zaigun konpaktifikazioa soluzio bezela onar dezaten. Adibidez, $\mathbb{R}^{1,3} \times S^D$ konpaktifikazioa posible dugu akzio honekin [1]

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}} \int d^{4+D} \sqrt{|\hat{g}|}(\hat{R} + \alpha\hat{R}^2 + \beta\hat{R}_{AB}\hat{R}^{AB} + \gamma\hat{g}^{AB}\nabla_A\hat{R}\nabla_B\hat{R})$$

Planteatu ohi den bigarren alternatiban Einstein-en ekuazioak ez dira aldatzen baina energia momentu tentsore bat sartzen da, zeinak komeni zaizkigun soluzioen existentzia ziurtatuko digun.

Hau aldaketa garrantzitsua da. Bost dimentsioko teorian espazio-denbora *hutsik* genuen, eta interakzio fisikoak soilik espazio-denborako geometriaren ondorioz lortzen genituen. Hasieratik energia momentu tentsore bat sartzean, bost dimentsioko Kaluza-Klein teoriaren filosofia zen planteamentu guztiz geometrikoari uko egiten zaio.

Dena dela, askotan hartzen da perspektiba hau. Detaile gehiegitan sartu gabe, adibide dugu Freund-Rubin konpaktifikazioa [1], non hiru ordenako $\hat{A}_{ABC}$ tentsore antisimetriko bat erabiliz, eta

$$\hat{F}_{ABCD} = \partial_A\hat{A}_{BCD} - \partial_B\hat{A}_{ACD} + \partial_C\hat{A}_{ABD} - \partial_D\hat{A}_{ABC}$$

eginez, energia-momentu tentsore hau eraikitzen den Einstein-en ekuazioen eskuineko aldean sartzeko

$$\hat{T}_{AB} = -\frac{1}{6}(\hat{F}_{CDEA}\hat{F}^{CDE}{}_B - \frac{1}{8}\hat{F}_{CDEF}\hat{F}^{CDEF}\hat{g}_{AB})$$

3 Modo masiboen masa espektroa

Lan honen lehen atalean aipatu dugu bostgarren dimentsioaren topologia zirkularra dela eta teoriako eremuek Fourier-en garapen hau onartu behar dutela

$$\Upsilon(x,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \upsilon^{(n)} e^{inx^5/r} \tag{5}$$

bostgarren dimentsioaren erradioaren txikitasunean oinarrituz orainarte arbuiatu egin ditugu $n \neq 0$ modoak. Hirugarren atal honetan modo masiboetaz apur bat hitz egingo dugu eta berauen masa espektroa lortuko dugu.

Bost dimentsioko teoria aztertuko dugu soilik. Kasu ez abeldarrean ere posible da eremuak (5)-ren antzerako moduan garatzea. Garapen hori lortzeko espazio konpaktuaren isometria taldearen adierazpideetan garatzen dira eremuak (konturatzen bazara bost dimentsiotan ere hori egin dugu esponentzialak erabiliz).

Hau da *garapen harmoniko* izenarekin ezagutzen dena [9]. Dena dela, garapen hau ez da orokorrean sinplea izango eta horregatik bost dimentsiotara mugatuko gara soilik.

Eremuen masa espektroa lortzeko higidura ekuazioak lehengo ordenara garatu behar ditugu. Beraz, has gaitezen Einstein-en ekuazioetatik[9]

$$\hat{R}_{AB} = 0$$

eta idatz dezagun metrika honela

$$\hat{g}_{AB}(x,\theta) = \eta_{AB} + h_{AB}(x,\theta)$$

non[10]

$$\eta_{AB} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -r^2 \end{pmatrix}$$

den. $\hat{g}_{AB}$ higidura ekuazioetan ordeztuz eta lehen ordenera garatuz

$$\partial_B \partial_A h^C_{\ C} - \partial_C \partial_A h^C_{\ B} - \partial_C \partial_B h^C_{\ A} + \partial^C \partial_C h_{AB} = 0 \tag{6}$$

higidura ekuazioa lortzen dugu. Ekuazio hau aldaezina da transformazio hauekiko

$$h_{AB} \to h_{AB} + \partial_A \xi_B + \partial_B \xi_A$$

[9]Gogoratu sarreran esan dudan bezela atal honetan $(+,-,-,-,-)$ signatura erabiliko dela
[10]gogoratu zirkunferentziaren metrika r^2 dela

eta kalkuluak egiteko [1] jarraituz gauge hau aukeratuko dugu

$$\partial^\mu h_{\mu 5}(x,\theta) = 0$$
$$\partial^5 h_{\mu 5}(x,\theta) = 0$$
$$\partial^5 h_{55}(x,\theta) = 0$$

gauge aukeraketa baldintza hauek h_{AB}-ren Fourier-en modoak erabiliz idatz ditzazkegu. Horretarako garapen hau

$$h_{AB}(x,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{AB}^{(n)} e^{in\theta}$$

goiko ekuazioetan sartuz, honela geratzen dira gauge baldintzak

$$\partial^\mu h_{\mu 5}^{(0)} = 0$$
$$h_{\mu 5}^{(n)} = 0 \qquad n \neq 0$$
$$h_{55}^{(n)} = 0 \qquad n \neq 0$$

hemen jada emaitza interesgarri bat dugu. Modo masiboetan bizirik geratzen diren eremu bakarrak $h_{\mu\nu}^{(n)}$-ak dira.

Erabil ditzagun orain higidura ekuazioak. $h_{AB}(x,\theta)$-ren Fourier-en garapena (6)-en ordeztuz, h_{AB}-ren Fourier-en modoen higidura ekuazioak lortzen ditugu.

Honela, $h_{\mu\nu}^{(n)}$-entzako adierazpen hau lortzen dugu

$$(\partial_\alpha \partial^\alpha + \frac{n^2}{r^2}) h_{\mu\nu}^{(n)} = 0 \qquad n \neq 0$$

hau da $m_n = n/r$ masako spin 2-ko eremu masibo baten ekuazioa. Ondorioz, ikusten dugu spin 2-ko *infinitu* modo masibo ditugula.

Detaile gehiegitan sartu gabe, esperotzekoa da modo masibo hauen ondorioz ohiko $1/r$ menpekotasuna duen potentzial grabitatorioaz gain, Yukawa-ren e^{-kmr}/r potentzialaren moduko ekarpenak izango ditugula, zeinak distantzia txikietan garrantzia izango luketen.

Itzul gaitezen modo ez masiboetara. $h_{55}^{(0)}$ eremuarentzat (6)-etik (espero bezela) masa nuluko eskalare baten ekuazioa lortzen dugu

$$\partial_\alpha \partial^\alpha h_{55}^{(0)} = 0$$

eta $h_{\mu 5}$-rentzat

$$\partial_\alpha \partial^\alpha h_{\mu 5}^{(0)} = 0$$

zeina (berriro espero bezela) eremu bektorial masagabe bat den

Azkenik, $h_{\mu\nu}^{(0)}$-entzat birdefinizio hau eginez

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(0)} \equiv h_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{(0)5}{}_5$$

(5)-etik higidura ekuazio hau lortzen dugu

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}^{(0)}_{\mu\nu} + \partial_{mu} \partial_\nu \bar{h}^{(0)\alpha}{}_{\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}^{(0)\alpha}{}_{\mu} - \partial_\nu \partial_\alpha \bar{h}^{(0)\alpha}{}_{\nu} = 0$$

zeina (berriro ere espero bezela) masa nuluko spin 2-ko eremu masagabe bat den.

Beraz, laburbilduz, dagoeneko ezagunak genituen modo ez masiboez gain, teoria ez trunkatuan spin 2-ko infinitu eremu masibo ditugu.

4 Fermioi kiralen arazoa

Eredu estandarrean fermioi eremuak $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ gauge taldearen adierazpideetan daude antolatuta. Adibidez, ezker kiralitatedun leptoientzako $\mathbb{C}_{-1} \otimes \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ daukagu; ezker kiralitatedun quark-entzat aldiz $\mathbb{C}_{1/3} \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$. Zentzu batean adierazpide hauek partikula hauek nola interakziona dezaketen esaten digute. Adibidez, $SU(3)$-ren triplete adierazpideetan dauden fermioiek interakzio sendoan parte har dezakete (quark-ak), eta aldiz $SU(3)$-ren singlete adierazpidean dauden fermioiek ez (leptoiak).

Atal honetan Kaluza-Klein motako planteamendu batean fermioiek eredu estandarreko gauge taldearen adierazpideetan duten egitura lortzearen posibilitateari buruz hitz egingo dugu.

Ikusiko dugunez, kontsideratu ditugun espazio-denboretan izango genituzkeen fermioi eremuak[11], espazio konpaktuaren simetria dela eta, *automatikoki* egon behar dira isometria taldearen (gure kasuan $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$-ren) adierazpideetan.

Eredu estandarreko ezaugarri hau hain modu naturalean lortzea oso emaitza interesgarria da, eta eredu estandarrean fermioiek duten antolamendua Kaluza-Klein teoria batetik lortzeko aukeraren aurrean jartzen gaitu[12]

4.1 Modo nuluak

Hasteko, ikus dezagun nola berreskuratzen ditugun $4 + D$ dimentsiotan eredu estandarreko fermioi eremuak. Kontsidera dezagun $\mathbb{R}^{1,3} \times B$ espazio-denboran Dirac-en ekuazioak emaniko masa nuluko espinore eremua

$$\not{D}_{4+D}\Psi = 0$$

gure helburua $4 + D$ dimentsiotako espinore batetatik abiatuz 4 dimentsioko espinoreak lortzea da. Gauzak honela, ondoko deskonposizioa erabilgarria suertatuko zaigu

$$\Psi = \psi(x) \otimes \phi(y)$$

non $\psi(x)$ 4 dimentsiotako espinore bat den, eta $\phi(y)$ espazio konpaktuko espinore bat. Bi espinore eremu hauetan eragiten duten eragileak erabiliz, honela idatz dezakegu Dirac-en ekuazioa

$$(\not{D}_4 \otimes I + I \otimes \not{D}_B)\Psi = 0$$

eta Ψ ekuazio honetan sartuz

$$(\not{D}_4 \otimes I + I \otimes \not{D}_B)\psi \otimes \phi = 0$$

$$(\not{D}_4\psi \otimes \phi + \psi \otimes \not{D}_B\phi) = 0$$

orain, ϕ-ri $\not{D}_B$-ren m balio propiodun egoera propioa izatea eskatuz

$$(\not{D}_4\psi \otimes \phi + m\psi \otimes \phi) = 0$$

[11]gero ikusiko dugun bezela, zehatzago esanik soilik masa nuluko fermioi eremuak

[12]dena dela, ikusiko dugunez hau ezinezkoa izango da

$$(\not{D}_4 - m)\psi \otimes \phi = 0$$
$$(\not{D}_4 - m)\psi = 0$$

nahi genuen lau dimentsioko fermioien Dirac-en ekuazioa berreskuratu dugu. Gainera, ikusten dugu $\not{D}_B$ eragileak nolabaiteko *masa eragile* bezela jokatzen duela, eta bere balio propioak ohiko lau dimentsiotako fermioien masa bezela ikus ditzakegula.

Dena dela, eredu estandarreko fermioien masak B egoki baten $\not{D}_B$ eragilearen balio propioetatik lortzea ez da oso aukera plausiblea. Hirugarren atalean bost dimentsioko teoriako eremuen masa espektroa aztertu dugunean lortu ditugun masak Planck-en masaren eskalaren ingurukoak izan dira (onartuz zirkunferentziaren erradioa Planck-en luzeraren ingurukoa dela), eta kasu orokorrean ere hori espero da. Balio hauek orainarte behatu ditugun fermioien masen balioak baino *askoz* handiagoak dira (ideia bat egiteko, elektroiaren masaren magnitude ordena 10^{-30}kg da, Planck-en masarena 10^{-8}kg).

Hala ere, kontsidera dezakegu eredu estandarreko fermioiak $\not{D}_B$-ren balio propio nuludun eremuak direla (hemendik *modo nulu* izena), eta eredu estandarrean egiten den bezela, masa $U(1) \times SU(2)$ simetria apurtzean lortuko luketela. Modo ez nuluak aldiz, oraindik behatu ez ditugun fermioi oso masiboak lirateke.

Badago modo nuluak eredu estandarreko fermioi bezela ikusteko beste arrazoi bat. Hauek automatikoki daude espazio konpaktuko isometria taldearen adierazpideetan [5], zeina (lehen esan bezela) eredu estandarreko fermioien ezaugarria den.

Egoera zentzu batean harmoniko esferikoenarenarekin alderatu dezakegu. Harmoniko esferikoak Laplace-en ekuazioaren soluzioak dira

$$\nabla^2 Y_l^m = 0$$

Laplacearra aldaezina da biraketekiko eta harmoniko esferikoak $SO(3)$ biraketa taldearen adierazpidetan daude sailkatuta.

Modo nuluak (masa nuluko) espazio konpaktuko Dirac-en ekuazioaren soluzioak dira

$$\not{D}_B \phi = 0$$

$\not{D}_B$ aldaezina da isometriekiko, laplacearrarekin eta biraketekin gertatzen den bezela, eta modu analogoan, harmoniko esferikoak biraketa taldearen adierazpideetan sailkatuta dauden bezela, modo nuluak isometria taldearen adierazpideetan daude.

4.2 Fermioi kiralak lortzeko ezintasuna

Aurreko atalean esandakoaren arabera, eredu estandarreko fermioiekin identifikatu ditugun modo nuluak $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ taldearen adierazpideetan daude. Hau da, modo nuluak komeni zaigun taldearen adierazpideetan ditugu. Dena dela, momentuz ez dakigu komeni zaigun taldearen komeni zaizkigun adierazpideetan dauden ala ez.

Erantzuna ezezkoa da. Arrazoia (atal honen izenburuak dioen bezela) fermioi kiralak lortzeko ezintasuna da.

Eredu estandarreko propietate garrantzitsua da kiralitate ezberdineko eremuek ez dutela modu berean interakzionatzen. Honela, ezker kiralitatedun fermioiek interakzio ahulean parte hartzen dute, eskuin kiralitatedunek ez bezela. Propietate bitxi hau eredu estandarraren ezaugarri garrantzitsua da, eta gure dimentsio extradun planteamenduan berreskuratu behar genukeena.

Nola plasmatzen da ezaugarri hau eredu estandarrean? Ezker kiralitateko fermioien adierazpidearen, $(3,2)^{1/3} \oplus (\bar{3},1)^{-4/3} \oplus (\bar{3},1)^{2/3} \oplus (1,1)^{2} \oplus (1,2)^{-1}$, eta bere konplexu konjugatuaren, $(3,2)^{-1/3} \oplus (3,1)^{4/3} \oplus (3,1)^{-2/3} \oplus (1,1)^{-2} \oplus (1,2)^{1}$, hau da eskuin kiralitateko fermioien adierazpidearen, baliokidetasun ezean [13]. Hau da, ezker eta eskuin kiralitatedun fermioiak adierazpide *ezberdinetan* daude.

Atal honetan ikusiko dugu gure Kaluza-Klein planteamenduetan ezinezkoa dela ezker eta eskuin kiralitatedun fermioiak isometria taldearen adierazpide konplexuetan lortzea. Hau da lan honen laugarren atal honi izena ematen dion fermioi kiralen arazoa.

Espazio konpaktuaren dimentsioak bakoitiak eta bikoitiak direneko kasuak aparte aztertuko ditugu.

4.2.1 D bakoitia

Hau da kasurik errezena. D bakoitia bada, espazio konpaktuko espinore adierazpide *bakarra* dago (nahiko intuitiboa da hau ohartzen bagara espazio konpaktuko $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_D$ kiralitate matrizea identitatearen proportzionala dela [1], eta beraz ezin ditugula espazio konpaktuko ϕ espinoreak osagai kiraletan banatu). Beraz, kontsidera dezagun fermioi kandidato hau

$$\Psi = \psi \otimes \phi$$

eta lau dimentsiotako ψ espinorea osagai kiraletan banatuz

$$\Psi = (\psi_L + \psi_R) \otimes \phi$$

$$\Psi = \psi_L \otimes \phi + \psi_R \otimes \phi$$

eta ikusten dugu ezker eta eskuin kiralitatedun eremuak modo nulu *berarekin* dijoazela nahitaez (eta ez ahaztu modo nuluak ematen digula ze adierazpidetan dagoen gure fermioi eremua). Beraz, lau dimentsioko kiralitate ezberdina duten fermioiak $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$-ren adierazpide berdinetan daude nahitaez, eta ondorioz ezin ditugu fermioiak isometria taldearen adierazpide konplexuetan izan.

4.2.2 D bikoitia

D bikoitia denean gauzak ez dira hain sinpleak. Kasu honetan kiralitate matrizea ez da identitatearen proportzionala, eta aurreko azpiataleko argudioak ez

[13] hau adierazteko batzuetan esaten fermioiak adierazpide konplexuetan daudela

digu balio.

Atiyah eta Hirzebruch-en teorema bat da kasu honetan fermioiak isometria taldearen adierazpide konplexuetan lortzeko ate guztiak ixten dizkiguna. Teorema honen ondorioak ulertzeko ideia bat beharko dugu, eta hau da hurrengo atalean ikusiko duguna.

4.2.2.1 Hiru kiralitateen arteko erlazioa

Interesatzen zaiguna espazio-denbora osoko, espazio konpaktuko eta lau dimentsioko kiralitateen artean dagoen erlazioa da. Ikusiko dugu D bikoitia deneko kasuan, Ψ eremu batek izan ditzakeen hiru kiralitate hauen artean lotura bat dagoela, zeina geroago Atiyah eta Hirzebruch-en teorema aplikatzerakoan erabiliko dugun.

Denok dakigu zein den 4 dimentsioko Minkowski-ren espazio-denborako kiralitate matrizea

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

definizioen nondik norakoei buruz gehigi arduratu gabe, espazio konpaktuan ere defini dezakegu antzeko propietateak dituen barne kiralitate matrize bat [1]

$$\Gamma \equiv \Gamma^1\Gamma^2\ldots\Gamma^D$$

non Γ^j matrizeak espazio konpaktuko Dirac-en ekuazioa idazteko erabiltzen ditugun $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ tamainako $\{\Gamma^n, \Gamma^r\} = 2\delta^{nr}$ betetzen duten gamma matrizeak diren.

Modu guztiz analogoan, posible da propietate analogoak dituen espazio-denbora *osoko* χ kiralitate matrize bat definitzea. Berriro ere definizioen nondik norakoetaz arduratu gabe, hau da Ψ espinorea osagai kiraletan banatzea ahalbidetzen digun kiralitate matrizea [1]

$$\chi \equiv -i(-1)^N\gamma^5 \otimes \Gamma \tag{7}$$

non N $D = 2N$-tik datorren. Hau da atal honetako ekuazio garrantzitsuena, χ-ren balio propio *finko*[14] bat duen Ψ batentzat lau dimentsioko eta espazio konpaktuko kiralitateen artean baldintza bat ezartzen baitu.

Froga daiteke [1] χ-ren balio propioak hauek direla

$$\pm i \qquad N \text{ bikoitia}$$

$$\pm 1 \qquad N \text{ bakoitia}$$

Adibidez, kontsidera dezagun N bakoitia (gogoratu $D = 2N$) deneko $\chi = 1$ kasua. Kasu honetan, (7) ekuazioak baimentzen dituen lau dimentsioko eta espazio konpaktuko kiralitateak hauek dira

$$\gamma^5 = 1 \qquad \Gamma = -i$$

[14] χ-ren balio jakin bateko eremuak kontsideratzen dituzten teoriak kontsideratuko ditugu soilik. Zergatik? plausible itxura duten bakarrak direlako. Honen argudioa [1] edo [6]-en aurki daiteke, eta ideia da lau dimentsioko ezker kiralitateko eremu baten konplexu konjugatua eskuin kiralitate-duna izan behar duela, eta erlazio hori modu koherentean lortzeko χ finkoko eremuak dituzten teorietara mugatu behar garela

eta

$$\gamma^5 = -1 \qquad \Gamma = i$$

eta beraz, $\chi = 1$ espinorea[15] deskonposatuz

$$\Psi_{+1} = \psi_R \otimes \phi_{-i} + \psi_L \otimes \phi_{+i}$$

hemen ikusten dugu χ *finkoko* eremuetara mugatzen bagara, posible dela ezker eta eskuin kiraliteko fermioiak modo nulu *ezberdinekin* joatea. Beraz, (momentuz) ematen du fermioiak isometria taldearen adierazpide konplexuetan lortzeko aukera bizirik dagoela.

Dena dela, ez da hau azpi-atal honetan bilatzen genuen ideia. Goiko ekuaziotik atera behar dugun, eta gero beharko dugun, ideia espazio konpaktuko kiralitate *jakin* bat lau dimentsioko kiralitate *jakin* batekin dagoela elkartuta da[16].

4.2.2.2 Atiyah eta Hirzebruch-en teorema

Orain bai, Atiyah eta Hirzebruch-en teorematik ondorioak ateratzeko moduan gaude. Teorema “Character valued index” delako kontzeptua erabiliz dago enuntziatuta, eta beraz, defini dezagun hasteko kontzeptu hau.

Demagun espazio konpaktu bat dugula G isometria talde bat duena. Dirac-en ekuazioaren modo nuluak isometria taldearen adierazpideetan egongo dira. kontsidera dezagun R isometria taldearen adierazpide bat (gure kasuan $G = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ delarik, R adibidez ezker kiralitatedun leptoien $\mathbb{C}_{-1} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ adierazpidea izan liteke). Honela definitzen dugu M masa eragileari (gogoratu masa eragile bezela $\not{D}_B$ definitu dugula) loturiko $index_R(M)$ “character valued index”-a

$$index_R(M) \equiv n_+(R) - n_-(R)$$

Non n_+ eta n_--k kiralitate jakin bateko R adierazpide batean dauden M-ren modo nuluen kopurua adierazten duten. Hau da, labur esateko, R adierazpide jakin batean ditugun kiralitate ezberdineko modo nuluen kopuruaren diferentzia besterik ez da.

Eta zergatik da kontzeptu hau hain garrantzitsua? pentsatu segundu batez zer gertatuko litzatekeen R jakin batentzat diferentzia hau zero izango balitz. Kasu horretan R adierazpide horretan espazio konpaktuko kiralitate jakin bateko zein besteko fermioi kopuru *bera* genuke. Gogoratu orain **4.2.2.1** ataleko azken parrafoa.

Parrafo horretan esan dugu D bikoitia deneko kasuan (eta χ finkoko eremuetara mugatzen diren teorietan) espazio konpaktuko kiralitate *jakin* bat lau dimentsioko kiralitate *jakin* bati lotuta dagoela.

Beraz, esatea R adierazpide batean espazio konpaktuko kiralitate bateko zein

[15] gauza antzerakoa lortzen da $\chi = -1$-entzat

[16] hau da, R-a $-i$-arekin; L-a i-arekin

besteko bezainbeste eremu ditugula, R adierazpide horretan lau dimentsioko kiralitate bateko zein besteko bezainbeste eremu ditugula esatearen baliokidea da. Hau da, R batentzat "character valued index"-a nulua balitz, adierazpide horretan ezker zein eskuin kiralitatedun bezainbeste fermioi genituzke.

Hau da hain zuzen Atiyah eta Hirzebruch-en teoremak esaten duena. R *guztientzat* index-a nulua da, eta beraz D bikoitia denean ere ezinezkoa da eredu estandarrean fermioiek $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$-ren adierazpide bezela duten egitura berreskuratzea.

5 Soluzio interesgarri batzuk

Orainarte Kaluza-Klein teorien ezaugarri orokorrak aipatu ditugu, baina ez dugu Kaluza-Klein teoria baten adibiderik eman. Beti ere interesgarria da soluzio partikular batzuk aztertzea, teoriatik espero ditzakegun fenomenoen ideia bat izateko. Horregatik, lanaren azken atal honetan (sinplizitatez) bost dimentsioko teoriara itzuliko gara, eta bost dimentsioko Einstein-en ekuazioen soluzio batzuk aipatuko ditugu.

5.1 Monopolo eta dipolo magnetikoak

Demagun ohiko lau dimentsiotan Einsteinen hutseko ekuazioen soluzio den ds^2 metrika bat dugula. Soluzio honi $(dx^5)^2$ koordenatu periodiko bat gehitu ezkero bost dimentsioko espazio-denborako ekuazioen soluzio bat lortzen dugu. Dena dela, horrela eraikitako soluzioak ez dira oso interesgarriak.

Askoz ere interesgarriagoak dira beste modu honetan eraikiak. Hasi 4 dimentsiotako Einstein-en ekuazio *euklidearren* ds^2 soluzio batetik, eta gehitu denbora bostgarren koordenatu bezela

$$d\hat{s}^2 = -dt^2 + ds^2$$

hau berriro ere bost dimentsiotako Einstein-en ekuazioen soluzio da.

Azpiatal honetan modu honetan eraikitako metrika batzuk aztertuko ditugu. Agertuko zaizkigun espazio-denborak nahiko bitxiak izango dira, eta monopolo magnetikoak bezelako objetuak agertuko zaizkigu.

5.1.1 Monopolo magnetikoa

Aztertuko dugun lehen soluzioa eraikitzeko grabitazio euklidearreko "self-dual euclidean Taub-NUT" delako soluzioa erabiliko dugu [7]. Azpiatal honen hasieran aipatutako pausoak jarraituz, lau dimentsioko soluzio honi denbora gehituz, bost dimentsioko metrika hau eraiki dezakegu

$$d\hat{s}^2 = -dt^2 + V\left(dx^5 + 4m(1-\cos\theta)\right)^2 + \frac{1}{V}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2)$$

non r, θ, ϕ-ek ohiko koordenatu esferikoen definizio eremua duten, eta x^5 bostgarren Kaluza-Klein koordenatu periodikoa den. m konstante bat besterik ez da, eta V[17]-rentzat

$$\frac{1}{V} = 1 + \frac{4m}{r}$$

dugu. Metrika honetatik informazioa ateratzen hasteko gogora dezagun **1.9** ataleko formula hau

$$d\hat{s}^2 = V(dx_5 + A_\mu dx^\mu)^2 + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{8}$$

[17] $\frac{1}{V}$-ren forma ikusita ematen du $r = 0$ puntuan singularitate bat dagoela. Dena dela, ez da hori kasua baldin eta x_5 periodikoa bada $16\pi m$ periodoarekin [7]. Honetaz gain, nahiz eta begi bistakoa ez izan, koordenatu singularitate bat dago $\theta = \pi$ puntuan, eta hau konpontzeko $\theta > \pi/2$-rentzat koordenatu aldaketa bat egiten da [7]

hemendik bi gauza ikusten ditugu berehala. Hasteko, $r >> 0$ denean $\frac{1}{V} \to 1$ dugunez ikusten dugu zonalde asintotikoan Minkowskiren espazio denbora berreskuratzen dugula.

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$$

Honetaz gain, potentzial elektromagnetikoari dagokionez emaitza hau lortzen dugu

$$A_\phi = 4m(1 - \cos\theta)$$

eta errotazionala eginez

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

zeina argi eta garbi monopolo magnetiko batek sortuko lukeen eremu magnetikoa den.

Soluzio honek beraz Minkowskiren espazio-denboran murgildutako monopolo magnetiko bat deskribatzen digu.

5.1.2 Dipoloa

Bost dimentsioko bigarren soluzioa eraikitzeko grabitazio *euklidearreko* Kerr-Schwarzschild-en metrika erabiliko dugu [7]. Aurreko kasuan egin dugun bezela, denbora gehituz metrika euklidearrari

$$d\hat{s}^2 = -dt^2 + \frac{1}{r^2 - a^2\cos^2\theta}\left(\Delta(dx_5 + a\sin^2\theta d\psi)^2 + \sin^2\theta([r^2 - a^2]d\psi - adx^5)^2\right) +$$

$$+(r^2 - a^2\cos^2\theta)(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2)$$

non

$$\Delta = r^2 - 2mr - a^2$$

dugun, eta a eta m konstante errealak diren.

(8) formula erabili dezakegu berriro eremuei buruz informazioa ateratzeko. Dena dela, bigarren metrika honentzat (8)-rekin alderaketa egitea ez da monopoloaren kasuan bezain sinplea.

Analisia errazagoa da $r >> 0$ denean. Honela, metrikan limite hau hartuz froga daiteke potentzial elektromagnetikoaren adierazpen hau lortzen dugula [7]

$$A_\phi \to \frac{-2ma\sin^2\theta}{r}$$

zeina dipolo magnetiko baten eremua den.

5.1.3 Monopoloa eta dipoloa

Aurreko bi soluzioetan monopolo bat eta dipolo bat aurkitu ditugu. Posible da soluzio soluzio orokorrago bat aurkitzea non biak, monopoloa eta dipoloa, kasu partikular bezela agertzen diren. Hau da soluzio honen metrika

$$d\hat{s}^2 = -dt^2 + \frac{1}{\Xi}\left(\Delta(dx_5 + Pd\psi)^2 + \sin^2\theta(adx_5 + Qd\psi^2)\right) + \Xi\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right)$$

non

$$\Delta = r^2 - 2mr + N^2 - a^2$$
$$\Xi = r^2 - (N + a\cos\theta)^2$$
$$P = a\sin^2\theta + 2N\cos\theta - \frac{aN^2}{N^2 - a^2}$$
$$Q = r^2 - a^2 - \frac{N^2}{N^2 - a^2}$$

diren. Ikusten dugu $N = 0$ kasuan aurreko ataleko dipoloaren metrika berreskuratzen dugula. Aldiz, $N = \pm m$ baldin bada $m > 0$ eta $a = 0$ direlarik, monopoloaren metrika berreskuratzen dugu.

Dipoloaren kasuan bezela, (7) formula erabili dezakegu zonalde asintotikoan potentzial elektromagnetikoaren adierazpena lortzeko [7]

$$A_\phi \to 2N\cos\theta - \frac{2aN^2}{N^2 - a^2} + \frac{2m}{r}\left(a\sin^2\theta - 2N\cos\theta + \frac{aN^2}{N^2 - a^2}\right) + O(r^{-2})$$

non monopoloaren eta dipoloaren ekarpenak ditugun.

5.2 Bost dimentsioko izarrak

4 dimentsiotan, Birkhoff-en teoremaren arabera, esferikoki simetrikoa den hutseko Einstein-en ekuazioen soluzio *bakarra* dago, Schwarzschild-en soluzioa.

Dena dela, bost dimentsiotan egoera ezberdina da. Birkhoff-en teorema ez da egia, eta esferikoki simetrikoak diren soluzio bat baino gehiago daude.

Adibide moduan soluzio familia hau dugu

$$d\hat{s}^2 = -\left(\frac{1 - m/r}{1 + m/r}\right)^{2/\alpha} dt^2 + (1 + \frac{m}{r})^4 \left(\frac{1 - m/r}{1 + m/r}\right)^{2(\alpha-\beta-1)/\alpha} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) +$$
$$+ \left(\frac{1 - m/r}{1 + m/r}\right)^{2\beta/\alpha} dx_5^2$$

non α eta β parametroen balio ezberdinek soluzio ezberdinak ematen dizkiguten. Kasu partikular bezela, $\alpha = 1$ eta $\beta = 0$ direnean, bostgarren dimentsioa modu tribialean gehitua duen betiko Schwarzschild-en lau dimentsioko soluzioa lortzen dugu (koordenatu isotropikoetan). Jakina den bezela, soluzio hau singularra da $r = 0$ puntuan. Honetaz gain, α eta β-en beste balioek ematen dizkiguten soluzioak ere singularrak dira (hauek $r = m$ puntuan [7]), soluzio *bat* izan ezik. $\alpha \to \infty$ eta $\beta \to \infty$ direneko soluzioa guztiz erregularra da.

Honek guztiak egoera interesgarri baten aurrean jartzen gaitu. Goiko soluzio familiako edozein kidek bost dimentsioko izar baten (edo esferikoki simetrikoa den beste objetu astrofisiko baten) kanpo eskualdea eman liezaiguke. Esan bezela, denak singularrak dira *bat* izan ezik. Orduan, bost dimentsioko teorian, agian posible da izar baten kolapsoaren ondoren zulo beltz bat lortu beharrean espazio-denbora guztiz erregular bat lortzea.

Ondorioak

Amaitu dugu Kaluza-Klein teoriei buruzko lan hau. Zer esanik ez, hau gaiaren sarrera orokor bat besterik ez da izan, eta gauza (interesgarri) asko geratu dira kanpoan.

Adibidez, ez da kosmologiari buruz hitzik ere aipatu ([3]-en Kaluza-Klein kosmologiei buruz artikulu batzuk aurki daitezke), ez eta fenomeno kuantikoei buruz (berriro [3]).

Gauge teoriak eta grabitazioaren arteko lotura ezartzeko Kaluza-Klein teoriek eskaintzen diguten aukera erakargarria da. Hala eta guztiz ere, planteamendu konbentzionalean fermioi kiralak lortzeko ezintasunak perspektiba apur bat iluntzen du. Noski, arazo honi aurre egiteko ideia batzuk proposatu dira.

Adibidez, lan honetan espazio konpaktuak soilik gehitu dizkiegu ohiko 4 dimentsioei, baina badaude isometriak dituzten bolumen finituko eta konpaktuak *ez* diren espazioak kontsideratzen dituzten teoriak, zeinetan fermioi kiralak lortu ahal diren [10].

Hala ere, fermioiena ez da arazo bakarra. Ez dugu ezer esan orainarte, baina aurkeztu ditugun teoriak ez dira errenormalizagarriak.

Arazo teorikoak alde batera utziz, alde esperimentalean oraindik ez dugu dimentsio extren arrastorik ikusi. Gainera, benetan Planck-en luzeraren magnitude ordena baldin badute zaila izango da (benetan existitzen badira) berauek hautematea.

Noski, gerta liteke planteamendu hauen ezaugarri interesgarri guztiak kasualitate hutsa besterik ez izatea, eta unibertsoak dimentsio extrarik ez izatea.

Dena dela, Kaluza-Klein teorien bertsio modernoak ditugun soken teorien egoera ikusita, ematen du (aldi batean behintzat) dimentsio extrek fisika teorikoan protagonismoa izaten jarraituko dutela.

Erreferentziak

[1] D. Bailin, A. Love; *Kaluza-Klein theories.* Rep. Prog. Phys 50, 1087-1170 (1987)

[2] J.M. Overduin, P.S. Wesson; *Kaluza-Klein Gravity.* arXiv:gr-qc/9805018v1 (1998)

[3] T. Appelquist, A. Chodos, P.G.O. Freund; *Modern Kaluza-Klein Theories.* Frontiers in Physics, Vol 65. Adisson Wesley Longman Publishing Co. (1987)

[4] T. Kaluza; *On the Unification Problem of Physics.* [3] 61-68 orriak (1921)

[5] E. Witten; *Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory.* [3] 278-294 orriak (1981)

[6] E. Witten; *Fermion Quantum Numbers in Kaluza-Klein Theory.* [3] 438-511 orriak (1983)

[7] D.J. Gross, M.J. Perry; *Magnetic Monopoles in Kaluza-Klein theories.* [3] 578-597 orriak (1983)

[8] T. Appelquist, A. Chodos; *Quantum Dynamics of Kaluza-Klein theories.* [3] 345-358 orriak (1983)

[9] A. Salam, J. Strathdee; *On Kaluza-Klein Theory.* [3] 163-199 orriak (1981)

[10] C. Wetterich; *Dimensional Reduction of Fermions in Generalized Gravity.* [3] 512-541 orriak (1984)