Jesús García Iturrioz
Josu Ruiz de Gauna Gorostiza
Joxemari Sarasua Fernández

Matemáticas y su didáctica I

Grado de Maestro en Educación Primaria

Escuela de Magisterio de Leioa
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
y de las Ciencias Experimentales

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

Junio de 2012

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo trata de proporcionar, a los alumnos del Título de Grado de Maestro de Educación Primaria, un instrumento con el que poder completar los contenidos que se exigen en la asignatura de “Matemáticas y su Didáctica-I”.

Es ésta una asignatura cuatrimestral, de 6 créditos ECTS, situada en el primer año de los estudios de Grado, que tendrá su continuidad en la asignatura de “Matemáticas y su Didáctica-II”, del tercer año y asignada al Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática.

Comprende tres grandes apartados. En el primero, “aspectos generales de las matemáticas”, se hará un recorrido histórico por algunos de los tópicos más usuales de las matemáticas escolares, así como una introducción al razonamiento matemático y a la teoría de conjuntos, que aunque ha perdido la importancia que tuvo en el tercer cuarto del siglo XX en la enseñanza de las matemáticas en los niveles elementales, sigue siendo un poderoso y útil instrumento pedagógico de representación de problemas. Se hace, además, un recorrido histórico por lo que ha sido la enseñanza de las Matemáticas y se termina con una recopilación de la legislación educativa en vigor.

El segundo apartado lleva el título general de “resolución de problemas”, algo que, aunque desde su nacimiento ha sido inherente al hacer matemático, sólo en los últimos tiempos ha aparecido explícitamente, en las disposiciones oficiales para la enseñanza elemental, siendo incluso uno de los bloques de contenido, para la educación primaria, en la Comunidad Autónoma Vasca.

El último y tercer bloque trata de dar una visión general de lo que hay, actualmente, en ese mundo de las nuevas tecnologías en lo que toca a la enseñanza de las Matemáticas.

Esperamos que este texto, experimentado, modificado y mejorado durante los cursos 2010-2011 y 2011-2012, sirva de ayuda a los alumnos de Magisterio y despierten en ellos el interés por esta ciencia tan antigua y, al mismo tiempo, tan actual y necesaria.

Los Autores

Jesús García Iturrioz
Josu Ruiz de Gauna Gorostiza
Joxemari Sarasua Fernández

Leioa, Junio de 2012.

ISBN: 978-84-9860-711-6

INDICE.

TEMA 1. Aspectos generales de las Matemáticas.

1.a. Valor práctico, instrumental y formal de las Matemáticas.

"*Es un tópico común poner de relieve la contribución fundamental de las matemáticas griegas al desarrollo de la filosofía y la ciencia en occidente. La denominación misma de matemáticas y matemáticos en la mayoría de las lenguas europeas es de origen griego, derivada del verbo conocer o aprender. "Mathema" significaba en griego lo que se ha aprendido o entendido, o conocimiento adquirido*". **(1)**

"*Por diversas fuentes, sabemos que fue Pitágoras quién utilizó, por primera vez, los términos de filosofía y matemáticas. (...) Pitágoras se llamó a sí mismo filósofo o amante de la sabiduría*". **(1)**

Antes de adentrarnos en la presentación de una serie de ejemplos y problemas que nos hagan ver el valor que tienen las Matemáticas en nuestra sociedad, en sus aspectos práctico (situaciones de la vida cotidiana), instrumental (en otras ciencias) y formal (como lenguaje), vamos, en primer lugar, a realizar una amable introducción al problema de su enseñanza, mediante dos chistes: el primero es un relato sacado de Internet, aunque ya circulaba en ambientes estudiantiles a mediados de los años 70 del siglo XX; el segundo, sacado de la prensa escrita, es un chiste gráfico de 1988; ambos, en forma de parodia, no dejan de tener una relación con la realidad, aunque sea ésta la de un pasado reciente.

EL PROBLEMA

La reforma de la enseñanza está lejos de alcanzar unanimidad. Un grupo de docentes de muy alto nivel se ha inclinado por indagar una cuestión que preocupa a la mayoría de los futuros profesores: la evolución de un problema matemático. La siguiente comparación puede ayudar a centrar la cuestión:

Enseñanza 1960:

Un campesino vende un saco de patatas por 1.000 pts . Sus gastos de producción se elevan a los 4/5 del precio de venta. ¿Cuál es su beneficio?

Enseñanza tradicional 1970:

Un campesino vende un saco de patatas por 1.000 pts . Sus gastos de producción se elevan a los 4/5 del precio de venta, esto es, a 800 pts ¿Cuál es su beneficio?

Enseñanza moderna 1970:

Un campesino cambia un conjunto P de patatas por un conjunto M de monedas. El cardinal del conjunto M es igual a 1.000. y cada elemento pεM vale 1 peseta. Dibuja 1.000 puntos gordos que representen los elementos del conjunto M.

El conjunto F de los gastos de producción comprende 200 puntos gordos menos que los del conjunto M.

Representa el conjunto F como subconjunto del conjunto M, estudia cuál será su unión y su intersección, y da respuesta a la cuestión siguiente: ¿Cuál es el cardinal del conjunto B de los beneficios? Dibuja B en color rojo.

Enseñanza renovada 1980:

Un agricultor vende un saco de patatas por 1.000 pts . Los gastos de producción se elevan a 800 pts. y el beneficio es de 200 pts.

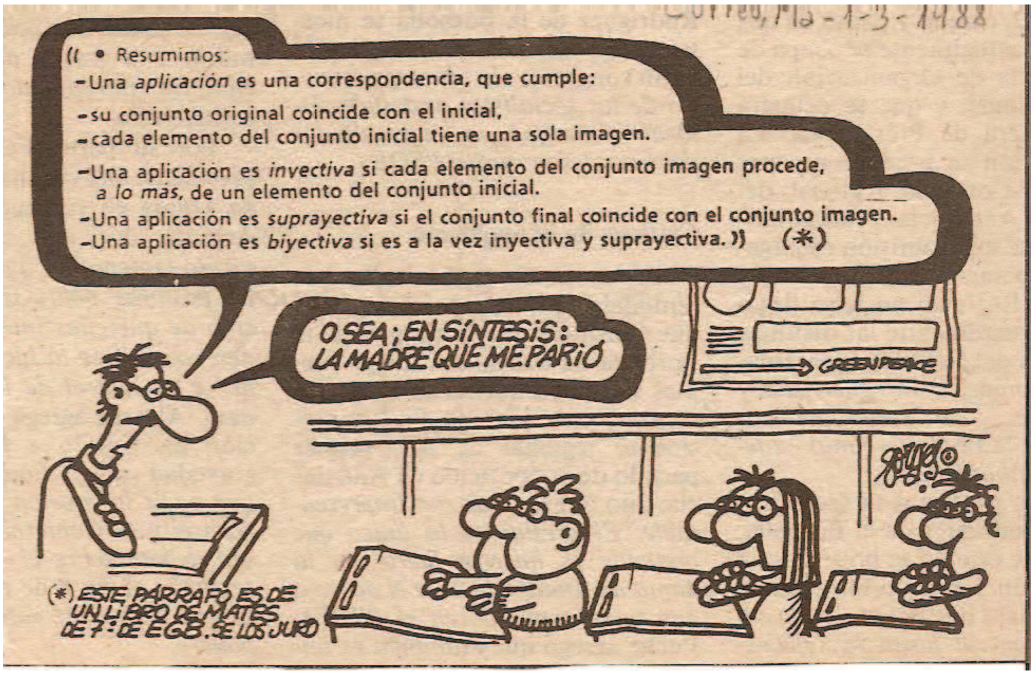
Actividad: Subraya la palabra "patata" y discute sobre ella con tu compañero.

Enseñanza reformada 1990:

El tio Ebaristo, lavriego burgues latifundista i intermediario es un kapitalista insolidario y que senriquecio con 200 pelas al bender espokulando un costal de patata. Analiza el testo y vusca las falta de sintasi dortografia de puntuacion, y deseguido di lo que tu digieres de estos avuso antidemocreticos.

Un groupe de normalions de Grenoble.

(1) *GONZÁLEZ URBANEJA, P.M.- "Platón y la academia de Atenas". Nivola. Madrid, 2006*.

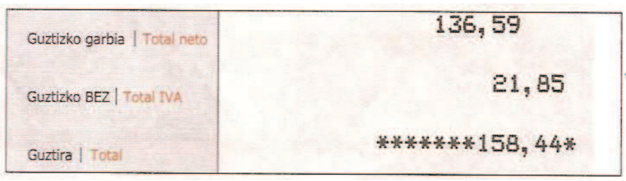


Y hecha esta jocosa introducción al problema de la enseñanza de las matemáticas, volvamos al título que encabeza este epígrafe con algunas situaciones de la vida cotidiana en las que es necesario hacer uso de las matemáticas:

Son frecuentes, en los supermercados, ofertas del tipo de la que aparece a la izquierda de estas líneas.

¿Cuál es el descuento aplicado por el supermercado?
Expresa ese descuento con diferentes notaciones numéricas: tanto por ciento, tanto por uno, en forma de fracción y en forma de número decimal.

Siguiendo con los porcentajes, son frecuentes las situaciones en las que nos enfrentamos a la aplicación del IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido).



Guztizko garbia | Total neto	136,59
Guztizko BEZ | Total IVA	21,85
Guztira | Total	*******158,44*

Supongamos que hemos comprado un producto, como el de la imagen, cuyo precio ha sido de 158,44 €. ¿Cuál es el porcentaje aplicado de IVA?

Y si hemos comprado un producto cuyo precio es de 84,00 € pero al que no han añadido el IVA, si éste es del 18%, ¿cómo hallaríamos el precio con IVA, con una calculadora y haciendo una sola operación?

Y si el precio es de 112,10 € con un IVA del 18%, ¿cómo hallaríamos, con una calculadora y una sola operación, el precio sin IVA?

Cuando en los medios de comunicación se presentan noticias sobre estadísticas de una población determinada, suelen ser frecuentes términos como los siguientes:
Tasa de natalidad. Es el número de nacimientos que se producen en un año por cada 1000 habitantes.
Natalidad. Total de nacidos vivos en un año.
Indice de fecundidad.- Es el número medio de hijos por mujer. Para que se asegure el reemplazo generacional y la población de un país se mantenga, debe ser del orden de 2,1. Se añade el 0,1 para contrarrestar la mortalidad infantil.
Tasa de fecundidad. Es el número de nacimientos por cada 1000 mujeres en edad fértil (15-45 años).
Tasa de mortalidad. Mide los fallecimientos por cada mil habitantes en el año de que se trate.
Pirámides de población. Son representaciones gráficas de la población repartida por edades.

Buscar todos los valores anteriores referidos a la población del País Vasco.

Otro asunto de frecuente aparición en los medios de comunicación es el de las tasas de paro de un país.

1. Un ayuntamiento tiene 18.000 habitantes, de los que 5.000 tienen menos de 16 años. De los que están en edad de trabajar, 7.000 son estudiantes, amas de casa o jubilados, y 1.500 están en el paro. Calcula:

¿Cuántas personas hay empleadas?
El total de la población activa.
El total de la población inactiva.
Tasa de actividad.
Tasa de paro.

2. Si en un municipio la tasa de paro es del 7%, ¿qué significado le podemos dar a este dato? ¿Cuál sería la población activa si el total de parados es de 455?.

3. En otro municipio la población activa es de 8.000 personas. ¿Cuántos parados hay y cuál es la tasa de paro si la tasa de actividad es del 64%?

La población activa de un país es la cantidad de personas que se han incorporado al "mercado de trabajo", es decir, que tienen un empleo o que lo buscan. No se considera población activa la que realiza un trabajo sin remunerar, por ejemplo, el cuidado del propio hogar o el estudio, pero no busca un empleo remunerado.

La población activa se divide en dos grupos: quienes desempeñan un trabajo remunerado (población ocupada) y los que no (población en paro). La fracción de población activa que busca empleo pero no es capaz de encontrarlo determina la tasa de paro.

La tasa de actividad de una población resulta del cociente entre la población activa y la población en edad activa (habitualmente expresado en porcentaje).

Se cierra este primer apartado con los dos problemas siguientes para su discusión en clase:
(*Ambos problemas tomados de PAULOS, John Allen.- "El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias". Tusquets editores. Barcelona, 2000. Págs. 43 y 193*).

1.- "Un hombre que viajaba mucho estaba preocupado por la posibilidad de que hubiera una bomba en su avión. Calculó la probabilidad de que fuera así y, aunque ésta era baja, no lo era lo suficiente para dejarlo tranquilo. Desde entonces, lleva siempre una bomba en la maleta. Según él, la probabilidad de que haya dos bombas a bordo es infinitesimal".

2.- "Aunque sea lo más fácil y agradable, sumar no es siempre lo más apropiado. Hay una demostración curiosa, según la cual, a los niños no les quedarían días para ir a la escuela:

En un año,	1/3 del tiempo duermen (8 horas diarias) =	122 días.
	1/8 del tiempo están comiendo (3 horas diarias) =	45 días.
	1/4 del tiempo están de vacaciones =	91 días.
	2/7 del tiempo son fin de semana =	104 días.
	TOTAL	362 días

OTROS PROBLEMAS.

1.- "Comprender la cuestión".
El monstruo del lago Ness:
"La longitud del monstruo del lago Ness es de 20 m. de largo y la mitad de su propia longitud, pero no mide 30 m. de largo. ¿Cuántos metros mide de largo?
(*STACEY,K./GROVES,S.- "Resolver problemas: estrategias". Narcea. Madrid, 1999. Pág. 57*).

2.- Tres amigos van a cenar; para ello, ponen 10 € cada uno en un fondo común. La cena cuesta 25 €; sobran 5, por lo que cada uno coge 1 € y quedan 2 € en el fondo. Lo gastado sería, por tanto, (10 – 1) x 3 = 27. Si a los 27 € gastados les sumamos los 2 que han quedado en el fondo, tenemos 29 €. ¿Qué ha sido del otro euro que falta para completar los 30 iniciales?

3.- Timo aritmético.

A la una de la tarde, entraron en una sucursal bancaria dos personas, que solicitaron que se les cambiase 7 billetes de 50 euros por 3 de 100. El empleado les advirtió de que sobraba un billete de 50, que les devolvió. Dejando sobre el mostrador los 6 billetes de 50 euros que querían cambiar las dos personas, el empleado depositó también los 3 billetes de 100. Lo clásico hubiera sido que escamotearan algún billete, pero no fue así.

Los timadores fueron más originales: Tras pensárselo un momento, dijeron que, en vez de los 3 billetes de 100, les venía mejor un billete de 500, aportando ellos 200 euros más. No hubo inconveniente. Entonces, cogieron 2 de los 3 billetes de 100, que todavía estaban sobre el mostrador, se los dieron al empleado y éste les entregó el de 500. Y se fueron tan contentos. El empleado de caja cayó entonces en la cuenta de que se habían llevado 600 euros – un billete de 500 y otro de 100 – a cambio de 6 billetes de 50.

("El Correo". 09/04/2006).

1.b. Historia de las Matemáticas: sistemas de numeración, geometría euclídea, estadística y probabilidad.

1.b.1. Sistemas de numeración.

Antes de entrar en la historia de los sistemas de numeración, conviene hacer un repaso de los diferentes tipos de números que han ido apareciendo a lo largo de la historia y cuyos nombres son, a veces, evocadores.

Están, en primer lugar, los llamados <u>números naturales</u>, cuyo conjunto se representa con una N y está formado por los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, … Su nombre hace referencia a que fueron considerados “naturales”, es decir, obvios, dados por la Naturaleza.

Los llamados <u>números enteros</u>, cuyo conjunto es representado con una Z, son los naturales, aunque pudiendo tomar tanto el signo positivo como el negativo, es decir, … -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, … Su nombre hace referencia a que no tienen “partes” de la unidad.

Los <u>números racionales</u>, quebrados o fraccionarios, cuyo conjunto se representa con una Q, son los que comprenden a todos los cocientes de números enteros con divisor (o denominador) distinto de 0. Por ejemplo, 1/3, -6/4, 5, 2.34, … El nombre “racional” fue puesto en contraposición a los números irracionales, de los que se habla a continuación; lo de “quebrados” (es decir, “rotos”) o fraccionarios, hace referencia a que tienen “partes”, no son enteros.

Los <u>números irracionales</u>. En la Grecia clásica, donde aun no existía el instrumento algebraico, los razonamientos matemáticos se hacían, exclusivamente, sobre figuras geométricas, figuras en cuya construcción se empleaban la regla y el compás. Al construir un cuadrado de lado 1, sabemos, por el Teorema de Pitágoras, que su diagonal mide la raíz cuadrada de 2. Esta diagonal, que puede construirse fácilmente y, por tanto, verse, no puede, sin embargo, ser medida con una regla (raíz de 2 tiene infinitos decimales que no siguen una pauta periódica). Por ello, estos números recibieron el nombre de irracionales. Entre ellos están el número π y el número e de los logaritmos neperianos; pero también muchas raíces de números enteros positivos.

Por último, se llama <u>números reales</u> a todos los anteriores.

Entrando ya en la historia de los sistemas de numeración, se puede comenzar por la definición de lo que se entiende por tal cosa: “*Un sistema de numeración se puede definir como el conjunto de normas y convenios empleados para poder nombrar y representar cualquier número (natural) mediante un conjunto reducido de símbolos y palabras*”.

Pero, ¿es necesario un sistema de numeración para poder “contar”?. Imaginemos a un pastor primitivo, que no sabe nada de números ni de contar y que, al terminar el día, quiere saber si le falta alguna oveja. ¿Cómo podría resolver este problema?

Los intentos para conseguir sistemas que representaran los números se remontan a los orígenes mismos de la invención de la escritura. Naturalmente, se podían haber inventado, fácilmente, símbolos escritos para las palabras que representaran a los números; sería tan sencillo como escribir cualquier otra palabra. Así, en español, se podría escribir el número de dedos de una mano como "cinco". Pero desde un principio fue obvio que los números tenían una particularidad: estaban ordenados, se podían contar de una forma determinada, a cualquier número se llegaba "contando" hasta él.

Así, si indicáramos "uno" por “I”, "dos" por “II”, "tres" por “III”, etc., cualquier número podía ser indicado por un símbolo dado. Por ejemplo, el símbolo IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII querría decir "veintidós". Además, este símbolo sería universal, independiente del sonido particular que cada idioma utilizara para nombrarlo y representarlo.

Tendría la pega de que su lectura es difícil al aumentar el número. ¿Cómo distinguir "veintidós" de "veintitrés"?. Resulta bastante natural separar ese conjunto de palotes en grupos más pequeños (es lo que se hace, frecuentemente, al contar, por ejemplo, los votos de una elección a delegado de clase). Si se está acostumbrado a contar con los dedos de la mano, parece lógico hacer grupos de cinco palotes: "veintidós" sería entonces IIIII IIIII IIIII IIIII II.
Si se utilizaran las dos manos, se podrían hacer grupos de diez palotes: IIIIIIIIII IIIIIIIIII II.

O si se utilizaran las falanges de los cuatro dedos de una mano y el dedo pulgar, oponible a los demás, para contar, se podían hacer grupos de doce; o de veinte, si se utilizaran los dedos de ambas manos y pies, etc., etc.

Una vez iniciado tal proceso, como cada uno de estos grupos de cinco, diez o veinte palotes era igual a los demás, resultaría más sencillo representarlo por un solo símbolo que tener que escribir los cinco o diez componentes de cada grupo. Así, en vez de IIIIIIIIII, puede escribirse, por ejemplo, +.

Entonces, "veintidós" sería ++II, mucho más fácil de escribir y de reconocer. El proceso continuaría y un grupo de diez "+" (o sea, cien "I"), podía ser substituido por otro símbolo, como por ejemplo, "x". A su vez, un grupo de diez "x" podía ser substituido por "o", etc., etc.

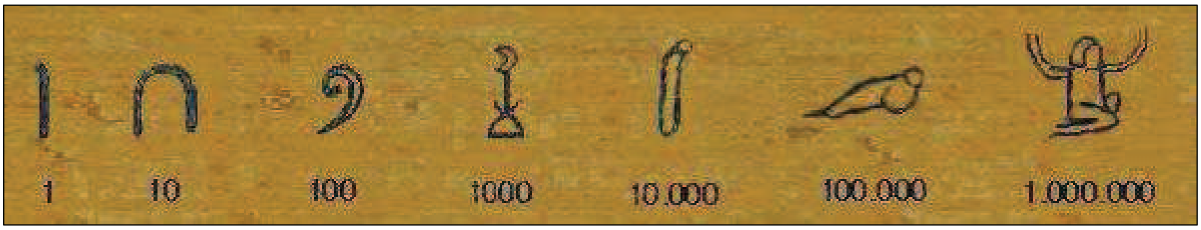
Como ejemplo, en este sistema, un número como el "mil ochocientos treinta y cuatro" sería escrito de esta manera: oxxxxxxxx+++IIII

Para poder ser visualizado más rápidamente, aprovechando las capacidades del ojo humano, también podía ser escrito así:

oxxxx++II
xxxx+ II

<u>Sistema de numeración egipcio</u>.

Y ,éste era, justamente, el sistema empleado por los antiguos egipcios, aunque con su escritura jeroglífica.



Palote Herradura Espiral (cuerda enrollada) Flor de loto Dedo Renacuajo (o rana) Hombre arrodillado

Debe observarse que el orden en que se colocan los signos es indiferente en cuanto que el número representado sigue siendo el mismo; también serían "mil ochocientos treinta y cuatro" los siguientes:

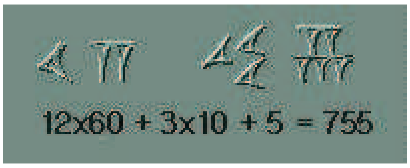
xxxIIo++
xxxII + y IIxxxo+II++xxxxx

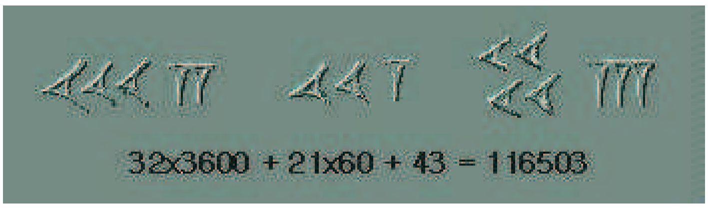
Es, por tanto, un sistema “no posicional”. Es, además, “aditivo”, en el sentido de que el valor del número representado aparece al sumar los valores de cada uno de los símbolos utilizados.

El sistema de numeración babilónico.

Entre la muchas civilizaciones que florecieron en la antigua Mesopotamia se desarrollaron distintos sistemas de numeración. Entre ellos, un sistema sexagesimal (de base 60) que ha perdurado hasta nuestros días en la medición de ángulos y del tiempo.

A partir de ahí, cada grupo de unidades representaba la cantidad existente de las diferentes potencias de 60 (60, 60x60, 60x60x60, ...). Por ejemplo:





Su sistema de numeración es posicional y aditivo-multiplicativo.

Los babilonios estaban interesados en el cálculo, conocían el cálculo del interés compuesto y eran buenos astrónomos y constructores. Algunos de sus conocimientos fueron: cálculo de raíces cuadradas, mediante aproximaciones; fórmulas para el cuadrado de un binomio y el producto de una suma por una diferencia; conocían los teoremas de Pitágoras y de Thales; conocían algunas tablas de trigonometría. Sin embargo utilizaban el 3 como aproximación de π .

Un sistema de numeración griego.

Otra forma de representar los números es una que utilizaron los griegos. Estos recurrieron al empleo de otro sistema ordenado: el alfabeto.

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϟ	900	ϡ

En principio, el método podía ser similar al anterior: utilizando nuestro alfabeto, "uno" sería "A", "dos" sería "AB", "tres" sería "ABC", etc. Pero al ser todos los símbolos diferentes, en realidad, con poner sólo el último, bastaría para representar el número.

Así, "uno" sería "A", "dos" "B", "tres" "C", ... , "diez" sería "J". Al llegar aquí se puede continuar y hacer "once" = "K", "doce" = "L", etc. Pero, entonces, al llegar a veintiséis, se acabarían los signos. Los griegos hicieron algo mejor: como "once" = "diez" + "uno", hicieron "once" = "JA", "doce" = "JB", etc., reservando los signos K,L,M, ... para las decenas: "k" = "veinte", "L" = "treinta", ... , "R" = "cien", para luego continuar "S" = "doscientos", ... , "Z" = "novecientos".

Como el alfabeto griego tenía sólo veinticuatro letras, para poder contar hasta novecientos, utilizaron símbolos especiales. Aún así, al llegar a "novecientos noventa y nueve", se acababan los símbolos y para poder pasar a unidades de mil tuvieron que utilizar signos auxiliares tales como comillas. Así, "mil" era A' y "dos mil", B'. Otra dificultad era la necesidad que había de aprender de memoria el valor de veintisiete letras.

Obsérvese que el orden de colocación de los símbolos empleados no altera su significado numérico. Así "doscientos treinta y cinco" = SLE = ELS = LES.
Es, como en el caso del sistema egipcio visto anteriormente, no posicional y aditivo.

La numerología.

Una consecuencia tangencial que tuvo la utilización de las letras del alfabeto para representar los números fue la aparición de una pseudociencia llamada “gematría” (probablemente, por deformación de la palabra “geometría”) o numerología.

Por ejemplo, los judíos. En su afán por estudiar cada palabra de la Biblia, veían números por todas partes. El sistema es tan sencillo como asignar un valor numérico a cada letra, con lo que cada palabra se convierte en un número y de ahí, según la palabra o nombre obtenido, dar a ese número buen o mal carácter, buena o mala suerte, decidir si una persona debe casarse con otra, etc.
El ejemplo más famoso tal vez sea el del número 666, el llamado “número de la Bestia”, identificada ésta con el Anticristo. En la Biblia, en el Libro de las Revelaciones (13-18), se dice:

"*Aquí está la sabiduría. Deja a aquél que posea entendimiento calcular el número de la Bestia, pues éste es el número del hombre: su número es 666*" **(1)**.

Ha habido muchos intentos para identificar a personajes históricos cuyos nombres, en Gematría, dieran el valor 666. Estas investigaciones llevaron a personajes como "Nerón César" o "Diocleciano", ambos perseguidores de los cristianos, pero se pueden encontrar más.

Sin relación con lo anterior, es curioso el hecho mencionado por Ifrah **(2)** sobre el número 17 en Italia: " ... Napoleón Bonaparte aplazó hasta el 18 su famoso golpe de estado de Brumario, que inicialmente estaba previsto para el viernes 17 ("no me gustan los incrédulos, había explicado; sólo los tontos desafían a lo desconocido"). Es también sabido que en los hoteles italianos no hay habitación 17, ni piso 17 y que, en ningún asiento, los aviones de Alitalia llevan el número 17, así como que el coche Renault 17 ha sido comercializado entre nuestros vecinos con el apelativo de Renault 117".

Y prosigue, explicando la razón: "En cifras romanas, el número 17 se escribe XVII; es, pues, el anagrama y el valor numérico de la expresión latina VIXI, que quiere decir "he vivido" y, por extensión, "estoy muerto".

<u>El sistema de numeración romano</u>.

El posterior sistema de numeración romano, universalmente conocido aún en nuestros días, conjugaba, de alguna manera los dos, anteriores: empleaba letras como los griegos pero para representar grupos de unidades como los babilonios. Los romanos, en vez de hacer grupos regulares, todos con igual número de componentes, alternaron grupos de cinco con grupos de diez.

1= I	9 = IX	80 = LXXX	700 = DCC
2 = II	10 = X	90 = XC	800 = DCCC
3 = III	20 = XX	100 = C	900 = CM
4 = IV	30 = XXX	200 = CC	1000 = M
5 = V	40 = XL	300 = CCC	
6 = VI	50 = L	400 = CD	$\overline{V}$ = 5.000
7 = VII	60 = LX	500 = D	
8 = VIII	70 = LXX	600 = DC	$\overline{X}$ = 10.000

Los símbolos romanos se pueden dividir en dos clases, según su uso: por una parte, I, X, C, M. Por otra, V, L, D. Como regla general, los símbolos se escriben de mayor a menor. Las letras del segundo grupo no pueden repetirse y siempre suman; las del primero, sin embargo, pueden repetirse hasta tres veces para sumar y se puede colocar una letra a la izquierda de un símbolo mayor para restar.

Es un sistema de numeración extraño pues combina la base 10 con la base 5; es no posicional (el valor de las cifras no cambia) y es aditivo.

Como curiosidad, sobre el origen de las letras empleadas, parece que la V haría referencia a una mano abierta, la X a dos manos cruzadas, la C y la M a las iniciales de cien y mil. También hay que hacer notar que, en casi todos los relojes, 4 aparece como IIII; existe la teoría de que se abandonó la expresión IV por ser las iniciales del dios Júpiter.

(1) *LIVIO, M.- "La proporción aúrea". Pág. 30.*
(2) *IFRAH, G.- "Las cifras. Historia de una gran invención". Pág. 214*.

<u>El sistema de numeración posicional</u>.

Como hemos visto, los griegos (y también los romanos), para representar números grandes (unidades de mil, de millón, etc.) utilizaban signos auxiliares:

A' era "mil" entre los griegos, $\overline{V}$ = "cinco mil" entre los romanos.

Supongamos, por un momento, que en vez de utilizar signos auxiliares para indicar órdenes grandes de unidades, se utilizaran para todos los órdenes. Por ejemplo, usando los símbolos utilizados al principio (I = unidades, + = decenas, x = centenas, o = unidades de mil), con sólo nueve letras, podríamos indicar todos los números hasta el "nueve mil novecientos noventa y nueve". Por ejemplo,

o x + I
"Dos mil trescientos cuarenta y cinco" = B C D E

o x + I
"Cuatro mil cuatrocientos cuarenta y cuatro" = D D D D

Y no habría ninguna confusión al utilizar cuatro "D" pues el símbolo colocado sobre cada una indica que la primera vale "cuatro mil", la segunda cuatrocientos", etc. Incluso, con otros símbolos auxiliares, podría aumentarse la cantidad de números representables por este sistema.

Obsérvese que el orden en que se coloquen las letras continúa sin alterar el valor del número:

o x + I x I o +
"Dos mil trescientos cuarenta y cinco" = B C D E = C E B D.

Pues ahora, supongamos que se conviene en que el orden no pueda ser alterado, que las unidades vayan siempre al final, precedidas de las unidades de segundo orden, éstas de las de tercero y así sucesivamente. Es evidente que, entonces, los signos auxiliares colocados encima de las letras no serían necesarios pues el orden en que éstas aparecen dentro del número determinaría el orden de unidades al que pertenecen.

Así, por ejemplo, "ADB" sólo podría ser "ciento cuarenta y dos". Se diría, entonces, que el sistema es posicional, ya que el valor de los símbolos empleados depende de su posición en el número.

Pero surge entonces una nueva dificultad: ¿Qué ocurre cuando no hay unidades de un determinado orden?. Por ejemplo, ¿cómo representar el número "ciento dos"?. Se podría escribir "A B" con un espacio en blanco en medio del número, pero a la hora de escribirlo llevaría a numerosos errores dependiendo de la mayor o menor amplitud dada a tal espacio. La otra solución es emplear un nuevo símbolo para representar la "nada". Casi cinco mil años le llevó a la humanidad encontrar tal solución, siendo los hindúes los primeros en utilizarlo hacía los siglos VIII - IX. A ese símbolo lo denominaron "sunya" (vacío); recogido por los árabes, éstos lo denominaron cífer (vacío), palabra que dio origen a los vocablos internacionales cero y cifra.

Con lentitud, el nuevo sistema llegó a Europa, reemplazando al romano. Como provenía de países no romanizados, las formas de los números no se parecían en nada a las letras del alfabeto latino lo que fue una nueva ventaja, pues acabó con la confusión entre letras y números.

Así apareció el actual sistema decimal de numeración, cuyas características principales son:

- Es <u>posicional</u>.
- Emplea nueve símbolos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), más otro especial (0) para representar la "nada", la falta de unidades de un cierto orden.
- Es <u>decimal</u>: Diez unidades de cada orden equivalen a una unidad de orden superior. (Se dice que diez es la **<u>base del sistema</u>**).
- Es <u>aditivo-multiplicativo</u>.

La primera propiedad es la más importante. Los sistemas posicionales tienen la ventaja de permitir escribir grandes números con una cantidad relativamente pequeña de símbolos y permiten realizar fácilmente las operaciones aritméticas.

<u>Sobre nuestro sistema de numeración decimal</u>:

Aunque al ser el fruto último de una larga evolución, nuestro sistema de numeración, decimal y posicional, puede ser considerado como el más perfecto de los existentes hasta ahora, no por ello deja de tener ciertos “defectos”, entre los que pueden citarse:

- Contradicción entre la expresión escrita y oral de los números que, muchas veces es multiplicativa (dos-cientos, dos-mil, ...) y el hecho de ser un sistema posicional. ¿Por qué no leer el número “1268” como “uno-dos-seis-ocho”, tal y como hacemos, aunque agrupando las cifras por parejas, con los números de teléfono?.

- Aun más: teniendo en cuenta la manera en que se generan las cifras de cada número, ¿por qué no leer “1268” como “ocho-seis-dos-uno”, empezando por las unidades?.

- ¿Por qué “once”, “doce”, “trece”, ... y no “diez y uno”, “diez y dos”, ...?

- Contradicción, al nombrar los números, entre la expresión multiplicativa de unos (dos-cientos, tres-cientos, ...) y la sumativa de otros (diez y seis, diez y siete, ...).

- Al ser la base 10 un número compuesto, existen fracciones equivalentes. Para resolver este “problema”, sería suficiente con haber tomado como base un número primo, como el 11.

- Por último, aunque sea un problema sin posible solución, se puede señalar el hecho de que, al ser los números un sistema ordenado, cualquier error en la escritura de un número puede hacer a éste irreconocible, al contrario de lo que ocurre con las palabras (p.e., “Univrsidad”).

- En el lenguaje oral, a la hora de nombrar los números ordinales, las irregularidades son la norma. Veamos sus nombres:

NUMEROS ORDINALES:

9º = noveno, nono
11º = undécimo, onceno
12º = duodécimo
13º = decimotercero, decimotercio
16º = decimosexto, dieciseiseno
18º = decimoctavo, dieciocheno
19º = decimonono, decimonoveno
20º = vigésimo
30º = trigésimo
40º = cuadragésimo
50º = quincuagésimo
60º = sexagésimo
70º = septuagésimo
80º = octogésimo
90º = nonagésimo

100º = centésimo
200º = ducentésimo
300º = tricentésimo
400º = cuadrigentésimo
500º = quingentésimo
600º = sexcentésimo
700º = septigentésimo
800º = Octingentésimo
900º = noningentésimo
1000º = milésimo
1.000.000 = millonésimo

Representación de los números.

Nuestros símbolos numéricos, al igual que el sistema de numeración, proceden de la India, traídos a Europa por los árabes. Aquí, los nuevos números recibieron el nombre de "cifrae", derivado del árabe "al-cifr", que era la traducción de "sunya" (vacío, "cero"); en latín culto apareció la palabra "zephirae" o "zephirum", que dio lugar a las palabras "cero" y "cifra". (Sobre la evolución que ha seguido la escritura de las cifras, puede verse IFRAH (1987), pág. 293 y sig.)

Por otra parte, la mano humana, gracias al considerable número de huesos y articulaciones que posee y a la disposición de sus dedos, con el pulgar oponible a los demás, es un instrumento sorprendente que, en el caso de los números, ha sido el más antiguo y generalizado medio auxiliar de cuenta y cálculo, empleado por todos los pueblos a lo largo de la historia.
El procedimiento más elemental es aquél con el que aprenden a contar los niños y que consiste en atribuir un valor entero a cada dedo en el orden de los números naturales, empezando por el uno. Hay múltiples variantes por todo el mundo: levantar los dedos uno a uno, encogerlos, empezar a contar por uno u otro, señalar los dedos de una mano empleando la otra, utilizar los pulgares, ...). A este respecto, pueden verse, en IFRAH (1987):

- Procedimiento empleado por algunos pueblos árabes para el regateo (pág. 80-81).
- Contar con las falanges de los dedos (pág. 82-83).
- Alfabeto de los sordomudos (pág. 86).
- Juegos de palabras obtenidos de representaciones digitales de los números (pág. 91)
- Calculadores chinos: contaban hasta 100.000 (una mano) o 10.000 millones (2 manos).

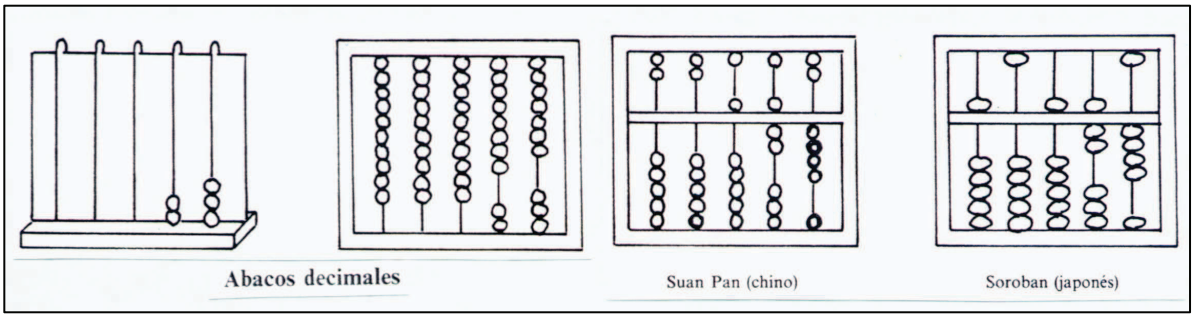
En este último caso, cada articulación de las falanges se subdividía en 3 partes: izda., central y dcha., de modo que cada dedo correspondía a las 9 unidades consecutivas de un mismo orden decimal:

Meñique dcho.	: unidades simples		pulgar izdo.	: centenas de mil
Anular	"	: decenas	índice "	: millones
Medio	"	: centenas	medio "	: decenas de millón
Índice	"	: millares	anular "	: centenas de millón
Pulgar	"	: decenas de mil	meñique"	: millares de millón

Por último, también han existido, a lo largo de la historia, los objetos más diversos:

- Los incas empleaban un sistema de cordeles con nudos, llamados "quipu". (pág. 97-98).
- Las muescas prehistóricas.
- Guijarros (los "calculi" latinos).
- Abacos de diferentes tipos.

Diferentes tipos de ábacos



1.b.2. Sobre las operaciones numéricas.

Hay que hacer la distinción entre lo que es una **operación** y el **algoritmo** con el que se hace. Es decir, una cosa es la suma o la multiplicación y otra es la manera como realizamos esa suma o esa multiplicación que, como vamos a ver, no se reduce a lo que se enseña actualmente en la escuela, sino que ha conocido diferentes manifestaciones a lo largo de la historia.

Vamos a comenzar con el sistema de numeración egipcio, visto anteriormente y que, recordemos, se diferenciaba del nuestro, esencialmente, en ser no posicional, es decir, que cada símbolo empleado tiene un mismo valor numérico independientemente del lugar en que lo escribamos.

SUMA y RESTA: No presentan dificultad; se yuxtaponen un número y otro, y se opera como se haría con el ábaco.

2.643	+	868				
ooxxx++II xxx++ I	+	xxxx+++IIII xxxx+++IIII	=	ooxxxxxxx+++++IIIIII xxxxxxx+++++ IIIII	=	oooxxxxx+I

MULTIPLICACIÓN:

- Por 10: Basta sustituir cada cifra por el símbolo que corresponde al orden superior. (Queda, como ejercicio, explicar el porqué).
- En el caso general, para multiplicar dos números, proceden a hacer duplicaciones sucesivas:

Por ejemplo, 12 x 128:

Se hacen 2 columnas:

1	$\boxed{12}$
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
$\boxed{128}$	$\boxed{1536}$

(1536 sería el resultado)

Si uno de los números no es una potencia de 2: Por ejemplo, 369 x 19

*	1	$\boxed{19}$
	2	38
	4	76
	8	152
*	16	304
*	32	608
*	64	1216
	128	2432
*	256	4864

(El siguiente sería > 369)

Se busca, en la columna de la izquierda una suma igual a $\boxed{369}$:
1 + 16 + 32 +64 + 256

La suma correspondiente, en la columna de la derecha, nos da el resultado: 19 + 304 + 608 + 1.216 + 4.864 = $\boxed{7.011}$.

- Nótese que no era necesario aprender las tablas de multiplicar, salvo la del 2.
- Queda, como ejercicio, la justificación de que este método es siempre aplicable.
- Problema: ¿Cuál será el último número, en las tablas de multiplicar, en un sistema de numeración de base n?

<u>DIVISIÓN</u>:

- Por 10: Basta sustituir cada cifra por el símbolo que corresponde al orden inferior. ¿Por qué?.

- Para una división, en general, se hacían duplicaciones, igual que antes, en dos columnas: una, encabezada por el número 1 y, la otra, por el divisor

Sea, por ejemplo, 1.476 : 12 (números divisibles entre sí)

1	$\boxed{12}$ ←	
2	24 ←	
4	48	
8	96 ←	
16	192 ←	
32	384 ←	
64	768 ←	(Se detiene en 768 porque el nº siguiente sería > 1.476).

En la columna de la derecha (no en la izquierda), se buscan los números los números cuya suma sea 1.476:

$$12 + 24 + 96 + 192 + 384 + 768 = \boxed{1.476}$$

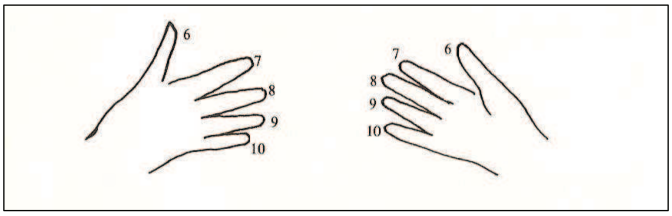
Al sumar los números corespondientes en la fila de la izquierda, se tiene el resultado:

$$1 + 2 + 8 + 16 + 32 + 64 = \boxed{123}.$$

- Cuando los números no eran divisibles entre sí, recurrían a fracciones de número.

<u>**Cálculo corporal**</u>: (*Puede verse GÓMEZ ALFONSO,B.- "Numeración y cálculo". Pág. 82*).

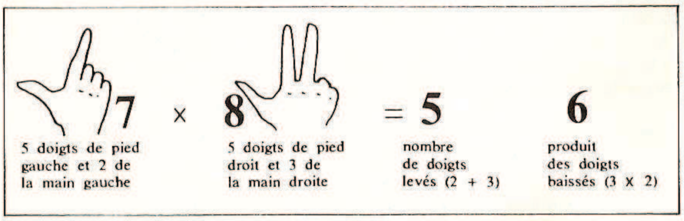
Vamos a ver, como ejemplo, la multiplicación con los dedos, mediante una técnica que, según parece, fue muy popular durante el Renacimiento, y que evita tener que aprender las tablas de multiplicar de las cifras mayores que 5 (habría que tener presente, así mismo, lo frecuente que es recurrir a los dedos, para la adición, en los niños, durante el aprendizaje, así como en algunos adultos).



Reglas a seguir:

- Se colocan las dos manos una frente a otra y cada dedo se asocia a un número (pulgar-6, índice-7, ..., meñique-10).
- Para multiplicar dos de esos números, se juntan los dedos correspondientes hasta tocarse.
- Los dedos que se tocan y los que quedan por encima, valen 10 cada uno.
- Los que quedan por debajo, se multiplican: la cantidad de los de una mano por los de la otra.
- Se suman los resultados obtenidos.

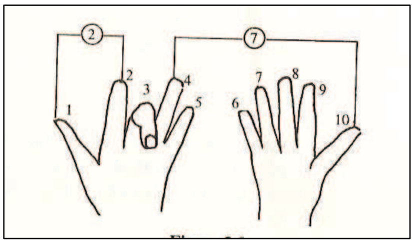
Otra forma de cálculo con las manos es la llamada "**regla del perezoso**" (regula pigri)" **(1)**



Para multiplicar, por ejemplo, 8x7:

- Se toman los complementarios de los dos números respeco a 10, es decir, 2 y 3.
- Se resta, a uno de los números, el complementario del otro:
  8-3 = 5 ó 7-2 = 5 (*explicar por qué es lo mismo*). Esa es la cifra de las decenas.
- Se hace el producto de los complementarios (2 x 3 = 6) para obtener la cifra de las unidades.

Y, por último, vamos a ver cómo obtener la **tabla del 9** con las manos:

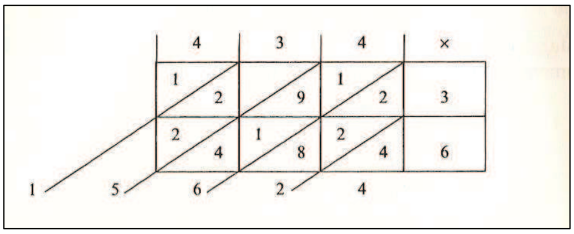


Supongamos que queremos multiplicar 9x3. Ponemos una mano junto a la otra, como en el dibujo, y numeramos los dedos de 1 a 9. Doblamos el dedo correspondiente a 3. A la izquierda, tenemos las decenas (2) y, a la derecha, las unidades (7). Así, 9x3 serían 27.

Como anécdota, y aunque no tenga una relación directa con las operaciones, recordemos el siguiente método para, empleando los nudillos y los valles entre ellos, saber si un mes tiene, o no, 31 días:

(1) *HOCQUENGHEM,M.L. et AL.- «Histoire des Mathématiques pour les collèges» (Pág. 30)*

Multiplicación hindú ("método de la rejilla"). Vamos a multiplicar 434 x 36:



Prueba de los 9. (división y multiplicación).

Para comprobar si una división (multiplicación) está bien hecha, se recurre a comprobar que, si al resultado de multiplicar el divisor (d) por el cociente (c), se le suma el resto (r), tenemos como resultado el dividendo (D), es decir, la conocida fórmula D = (d.c) + r.

La prueba de los 9 consiste en hacer esa misma comprobación, pero con cada número se hace la operación de sustituirlo por la suma de sus cifras, y ésta también por la suma de sus cifras y, así sucesivamente, hasta obtener un número de una sola cifra y haciendo que, cada vez que se llega a 9, se empieza el recuento desde 0. Sea, por ejemplo, la siguiente división:

23456 : 845
641 27

Se hace:

$$23456 \equiv 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 \equiv 2 + 0 = 2$$
$$845 \equiv 8 + 4 + 5 = 17 \equiv 1 + 7 = 8$$
$$27 \equiv 2 + 7 = 9 \equiv 0$$
$$641 \equiv 6 + 4 + 1 = 11 \equiv 2$$

Entonces, $(d.c) + r \equiv 8 \,.\, 0 + 2 = 2 \equiv D$, con que la división estaría bien hecha.

Se proponen, como ejercicios, las siguientes cuestiones:

- Háganse prácticas de sumas y restas en el **sistema sexagesimal** aun empleado en la medición de ángulos y del tiempo.

- De las cuatro operaciones aritméticas, tan sólo la división se hace de izquierda a derecha. Inténtese hacer una **división de derecha a izquierda** para comprobar las dificultades que presenta.

- Los **números decimales periódicos**, a pesar de tener infinitos decimales, se diferencian de los irracionales en que esos decimales siguen una pauta de formación, lo que permite transformarlos en números racionales o fracciones. Veamos un ejemplo:

  Sea el número 5,34343434 …

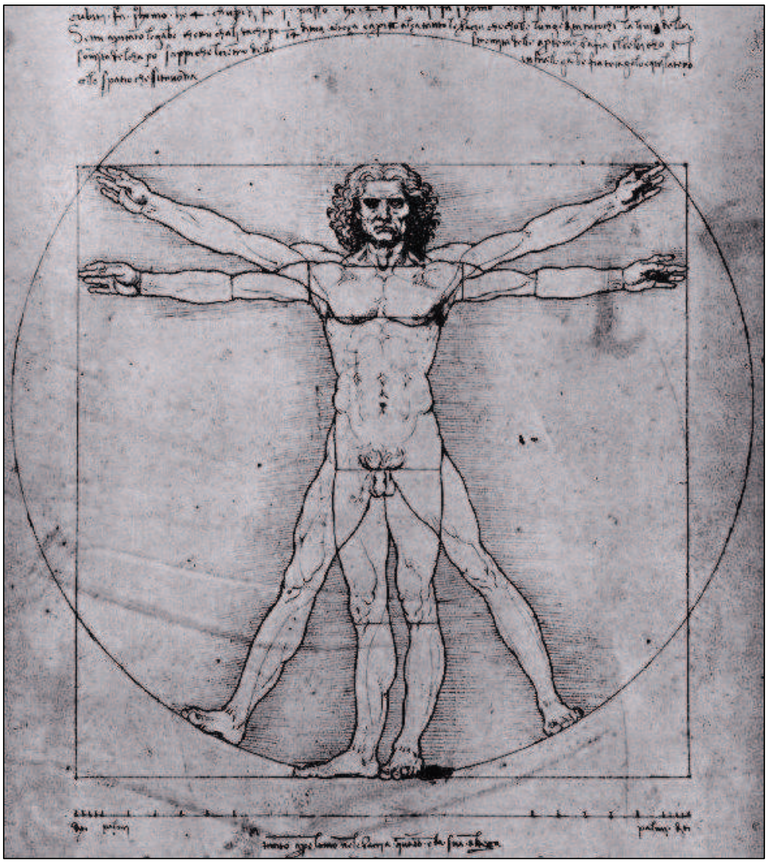
  Llamemos a = 5,343434…
  Multipliquémoslo por 100: 100 a = 534,3434…

  Restando ambos números: 99 a = 529, es decir, a = 529 / 99

  Háganse ejercicios con otros números decimales periódicos.

1.b.2. Geometría euclídea.

Antes de hablar de Geometría, veamos dos puntos de vista diferentes sobre esta ciencia. En primer lugar, el famoso cuadro de Leonardo en el que postula un canon de belleza basado en acoplar el cuerpo humano a una serie de figuras geométricas.



Leonardo da Vinci. El hombre de Vitruvio. Canon del cuerpo humano.

En segundo lugar, en tono más jocoso, el punto de vista dado por un periódico gratuito en su sección de horóscopos:

"LA GEOMETRÍA. La Geometría tiene como base la Matemática y la Física. Sirve para estudiar los polígonos: el cuadrado, el cono, el trapecio, el cubo, etc. Otra utilidad menos conocida por el gran público es su uso para aumentar e influir en la magia. Leonardo, cuando dibujó el Hombre de Vitruvio dentro de un círculo que, a su vez, estaba dentro de un cuadrado, sabía perfectamente que estaba estableciendo el eje de un triángulo que representaba las 4 estaciones, los 4 puntos cardinales, los 4 elementos y los 4 puntos del hombre.

Dibujar un círculo es crear un campo gravitacional, hacer un escudo protector. Dibujar un triángulo es establecer un campo de fuerza. Un cuadrado es crear un campo que ejerce un espíritu llano y normalizado, es decir, un campo que regla nuestra seguridad.

Los prismas los trapecios y los conos, al dibujarlos, nos trasmiten seguridad y espíritu de libertad, deseo y pasión de evasión.

Cuando se entra en una iglesia hay que fijarse en las formas geométricas. Siempre el altar mayor será un semicírculo, el área del altar será un cuadrado o un rectángulo. Como nuestra tumba o fosa, los 4 puntos, los 4 elementos y, en el medio, el alma y la esencia. Por ese motivo se sospecha que la piedra filosofal era cúbica como el gran Durero nos pintó en el grabado "Melancolía". El cubo donde sólo la manzana cabe."

(*"Qué fácil". 10 de Julio de 2002. Pág. 14*)

Etimológicamente, "Geometría" proviene del griego "geo" (tierra) y de "metron" (medida) **(1)**, pudiendo ser definida como la parte de las Matemáticas que se ocupa de las propiedades de las figuras del plano o del espacio.

Se acepta, de forma general, que su origen parece encontrarse en el Antiguo Egipto **(*)** y, más concretamente, en la resolución de problemas de la vida cotidiana, como la medición de tierras, cuyos límites cambiaban con frecuencia debido a las periódica inundaciones del Nilo, o determinación de capacidades de contenedores y almacenes. Sabían determinar las áreas y volúmenes más sencillos, conocían con bastante exactitud la proporción que existe entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, y parece que sabían calcular el área de una esfera. Se puede encontrar, en la cultura egipcia, una culminación de la Geometría aplicada, tanto ligada a la resolución cotidiana de problemas como a la creación artística. No obstante, no parece que los egipcios estuvieran en posesión de una geometría como ciencia teórica, provista de teoremas y demostraciones. Al igual que la Aritmética, en aquel tiempo, la Geometría era, fundamentalmente, una colección de reglas deducidas de la experiencia.

Unos años más tarde y contemporánea, en parte, de la civilización egipcia (desde 3.300 a 539 a.C.), está la cultura Babilónica (para los griegos, Mesopotamia, o región entre ríos; lo que sería el actual Irak). Destacaron, sobre todo en la medición de ángulos (relacionada con su interés por la astronomía). De ellos hemos heredado el actual sistema de numeración sexagesimal que empleamos en la medición de ángulos y del tiempo.

Es entre los siglos IV y III a.C., al pasar de Egipto a Grecia y ser desarrollada por filósofos como Tales, Demócrito, Pitágoras, ... cuando la Geometría fue convirtiéndose, gradualmente, en una teoría matemática, consiguiendo dos resultados fundamentales: el concepto de <u>teorema</u> geométrico y su demostración, por una parte; la clasificación de aquellas proposiciones fundamentales a partir de las cuales se pueden deducir las restantes, es decir, los <u>axiomas</u>, por otra. Una institución importante de la época es la Academia, fundada por Platón, en el frontispicio de cuya entrada figuraba la leyenda: "No entre aquí nadie ignorante en Geometría". **(2)**

Es aquí cuando aparece la figura de Euclides de Alejandría (ciudad egipcia, a orillas del Mediterráneo, fundada por Alejandro Magno el 331 a.C.), quien hacia el año 300 a.C. escribe un tratado en 13 libros al que pone por nombre "Elementos" y en el que va a sistematizar los conocimientos existentes hasta su época en los campos de Teoría de Números y Geometría. Son varias las anécdotas curiosas que se cuentan de Euclides, como las dos que relata H.S.M. Coxeter **(3)**. La 1ª, muy conocida, se refiere a la pregunta que una vez le hizo su contemporáneo, el primer Ptolomeo, sobre la existencia, en el aprendizaje de la Geometría, de un camino más corto que el de los "Elementos", a lo que Euclides respondió que no había un camino regio a la Geometría. La 2ª se refiere a alguien que, habiendo comenzado a estudiar Geometría, preguntó a Euclides: "¿Qué obtendré al aprender estas cosas?". Euclides llamó a su esclavo y le dijo: "Dale una moneda, pues éste tiene que sacar ganancia de lo que aprende".

En su famoso libro, a partir de cinco postulados básicos o axiomas, Euclides hace el desarrollo de todas las propiedades geométricas, usando argumentos puramente lógicos. Estos postulados son:

1. Se puede trazar una línea recta que pase por dos puntos.
2. Se puede prolongar una línea recta indefinidamente.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro y radio dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una línea recta, que corta a otras dos rectas, forma, de un mismo lado, con ellas, ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos últimas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado en que la suma de los ángulos es menor que dos rectos.

(1) *Diccionario de la Lengua Española, de la Real Academia. 21-a Edición. Madrid, 1.992*.

(*) *Periodo que va, aproximadamente, del 5.000 a.C. (primeros poblamientos del Nilo) hasta el 30 a.C. (muerte de Cleopatra, última reina de Egipto, e invasión romana*).

(2) *González Urbaneja,P.M.- "Platón y la academia de Atenas". Nivola. Madrid, 2006*.

"La Academia platónica estaba situada extramuros de Atenas, a unos 1.500 m. de la ciudad. Su nombre deriva de su ubicación en los jardines del santuario dedicado al héroe Akademos. (...) Aristocles fue el auténtico nombre de Platón, sobrenombre que se le adjudicó por sus anchas espaldas".

(3) *COXETER, H.S.M.- "Fundamentos de Geometría". Limusa-Wiley. México,1971. (pág. 26)*.

Aunque como señalan Courant/Robbins **(1)**, de ningún modo es cierto que la Matemática griega estuviera desarrollada o presentada, exclusivamente, en la forma rígida de postulados de los "Elementos", la impresión que tal obra produjo en las generaciones posteriores fue tan grande que se transformó en un modelo para toda demostración rigurosa en Matemáticas; tal situación no se vio rota hasta principios del siglo XIX en que el alemán Gauss (1777-1855), el húngaro Bolyai (1802-1860) y el ruso Lobachevsky (1.793-1.856), dan a luz, simultáneamente, respectivas Geometrías no-euclidianas. De hecho, el libro de Euclides fue tomado como libro de texto durante generaciones y generaciones.

Entre los cinco postulados, el 5º tuvo, desde un principio, un carácter en cierto modo especial. Ya su formulación es bastante más complicada que la de los demás, dificultad que va inherente en la misma definición de rectas paralelas, con el concepto de "infinito" que encierra esta noción.

En vista de su dificultad, ya desde la antigüedad, se sucedieron los intentos por prescindir de él, deduciéndolo, como teorema, a partir del resto de los axiomas y de los conceptos básicos de la Geometría. Sin embargo, todos los intentos fueron vanos. Cada vez que parecía haberse llegado a la solución, se demostraba que el autor se había apoyado en alguna proposición tomada como obvia que no se deducía necesariamente de las demás premisas de la Geometría, o bien en alguna equivalente al 5º postulado, tales como que:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo plano es, exactamente, dos rectos.

El axioma de Playfair: "A través de un punto dado, P, existe una única recta paralela a una recta dada L, que no contenga a P" (Por este axioma, el 5º postulado se conoce también como el "postulado de las paralelas").

Así, a comienzos del siglo XIX, el problema se encontraba en la misma situación que en la época de Euclides, 2.000 años antes. Fue en esa época cuando el punto de vista cambió: en vez de tratar de deducir el 5º postulado a partir de los otros axiomas, se tomó como hipótesis de partida la aserción contraria, a saber: "por un punto exterior a una recta se pueden trazar, al menos, dos rectas paralelas a la recta dada". Si a esta hipótesis se le añadieran las demás propiedades de la Geometría y se llegara a una contradicción, se probaría el 5º postulado. Pero lo que ocurrió fue que tal contradicción no apareció y, por tanto,

El 5º postulado no se puede probar a partir de los cuatro anteriores.

Suponiendo la proposición opuesta al 5º postulado, se puede desarrollar una teoría no contradictoria, lógicamente posible, que puede considerarse como una nueva geometría (no euclidiana), a pesar de que sus resultados estén en desacuerdo con nuestra imagen intuitiva del espacio.

En una geometría así, como la de Lobachevski, obtenida de suponer que por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela a ella, se dan resultados ciertamente sorprendentes, tales como que:

Una recta siempre diverge de otra dada. Así pues, una línea que guarde una distancia constante respecto a otra dada, no puede ser recta; es una curva, llamada curva equidistante.

La suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que dos rectos.

No existen triángulos de área arbitrariamente grande.

Sin embargo, una propiedad muy importante de la geometría de Lovachevski es que para dominios pequeños difiere poco de la de Euclides. El mismo Lovachevski ya supuso que las diferencias respecto a la geometría euclídea podrían ser detectadas mediante observaciones astronómicas, suposición que ha sido corroborada. Así, la geometría de Euclides sería un caso particular de la de Lovachevski, conteniendo ésta a aquélla.

(1) *COURANT,R./ROBBINS,H.- "¨Qué es la Matemática?. Una exposición elemental de sus ideas y métodos". Aguilar. Madrid,1955. (Pág. 226)*.

No obstante, caminos en la búsqueda de Geometrías nuevas ya habían sido abiertos. Por ejemplo, el dar solución a los problemas de "perspectiva" estudiados por artistas como Leonardo de Vinci (1.452-1.519) y Alberto Durero (1.471-1.528), hizo que algunos matemáticos se interesaran por el estudio de las propiedades geométricas que más tarde (su estudio sistemático comenzaría a finales del siglo XVIII) se agruparían bajo el nombre de geometría proyectiva: La imagen trazada por un pintor puede considerarse como la proyección del original sobre la tela, con el centro de proyección en el ojo del pintor. En este proceso, las longitudes y los ángulos se alteran dependiendo de las posiciones relativas de los objetos pintados. Sin embargo, el original puede reconocerse sobre la tela. Ello es posible porque existen propiedades geométricas "invariantes en la proyección" y que hacen posible la identificación. El análisis y deducción de tales propiedades es el objeto de la Geometría proyectiva.

Duccio (1255-1318). "La última cena". Véase la perspectiva utilizada.
Parece que las cosas de la mesa se caen hacia el espectador.

Leonardo da Vinci (1452-1519). La última cena. Ejemplo de uso de la perspectiva.

Rafael Sanzio (1483-1520). “La Escuela de Atenas”. Excelente ejemplo de perspectiva. En el cuadro aparecen, además, diferentes personajes de la Antigua Grecia y, entre ellos, muchos matemáticos.

1: Zenón de Citio o Zenón de Elea – 2: Epicuro – 3: Federico II Gonzaga – 4: Boecio o Anaximandro o Empédocles – 5: Averroes – 6: Pitágoras – 7: Alcibíades o Alejandro Magno – 8: Antístenes o Jenofonte – 9: Hipatia o el joven Francesco Maria della Rovere – 10: Esquines o Jenofonte – 11: Parménides – 12: Sócrates – 13: Heráclito (pintado como Miguel Ángel) – 14: Platón sosteniendo el *Timeo* (pintado como Leonardo da Vinci) – 15: Aristóteles sosteniendo la *Ética* – 16: Diógenes de Sinope – 17: Plotino? – 18: Euclides o Arquímedes junto a un grupo de estudiantes (pintado como Bramante)? – 19: Estrabón o Zoroastro? – 20: Claudio Ptolomeo – R: Rafael como Apeles – 21: El Sodoma como Protógenes

En la primera mitad del siglo XVII, de la mano de Pierre Fermat (1.601-1.665) y, sobre todo, René Descartes (1.596-1.650), aparece la llamada **geometría analítica**, fundamentada sobre dos conceptos: el de las coordenadas y el de representar en forma de curva plana cualquier ecuación algebraica con 2 incógnitas, valiéndose para ello del método de las coordenadas. Con ello, Descartes consigue trasladar a la Geometría el método algebraico de trabajo, consiguiendo la unidad de toda la

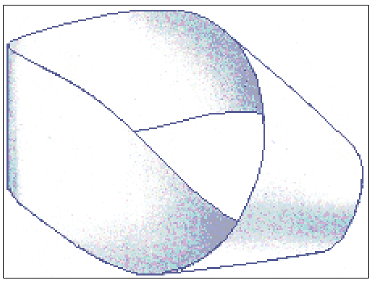
Matemática y la generalización en la resolución de problemas: del estudio "del" problema se pasa a un método susceptible de ser aplicado a todos los problemas.

Con la ayuda del cálculo diferencial, se facilita el estudio de las curvas pues se hace posible la determinación de la tangente a la curva en cualquier punto así como la curvatura. El término **geometría diferencial** designó la nueva rama de la Geometría que hacía uso de tal cálculo.

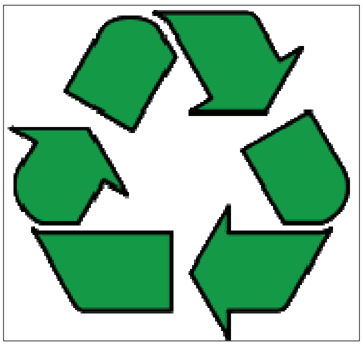
Por último, a mediados del siglo XIX, aunque el matemático suizo Euler (1707-1783) es considerado su precursor, comenzó un desarrollo enteramente nuevo de la Geometría. La nueva disciplina se llamó **análisis situs** o **topología** y su campo de acción era el estudio de las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aún si esas figuras se someten a deformaciones tan radicales que las hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas. Los ejemplos más intuitivos de transformaciones topológicas generales son las "deformaciones", siendo sus conceptos fundamentales los de adyacencia, vecindad, lo infinitamente próximo y la disección de un cuerpo.

Hay que hacer notar que, en los llamados “programas renovados” de EGB, de los años 1981-2, aparecía un bloque temático con el nombre de “Topología” ya que como observaron diferentes autores (Piaget, Dienes), puesto que en topología se puede hacer, con los cuerpos y figuras geométricos, “casi de todo”, “salvo cortar o pegar” las propiedades a estudiar son muy generales y los conceptos topológicos, por esta generalidad, serían los primeros en poder ser comprendidos por la mente del niño, siendo los últimos los de la Geometría métrica. Esta situación pondría de manifiesto una contradicción entre la evolución histórica de la Geometría y la conveniencia de su seguimiento en la formación del niño.

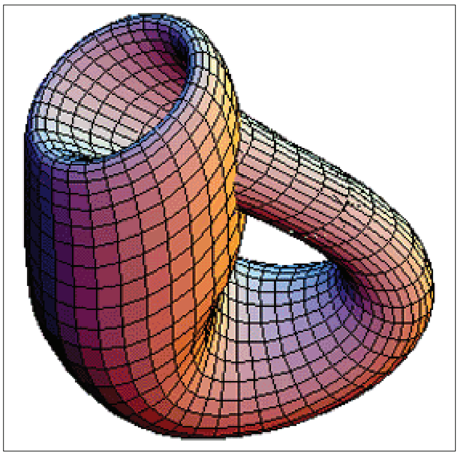
A continuación, aparecen algunos objetos de estudio de la topología:



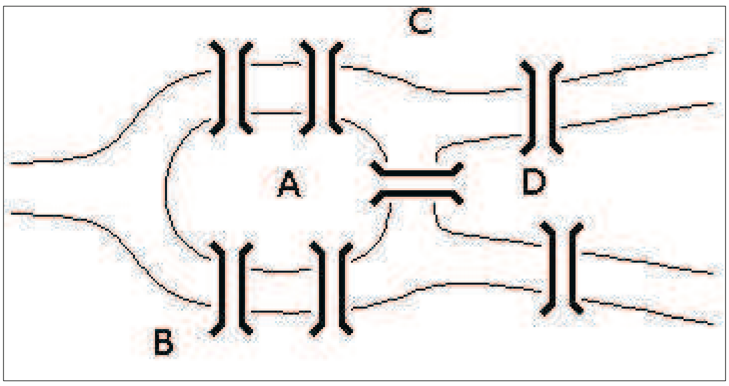
Banda de Möbius



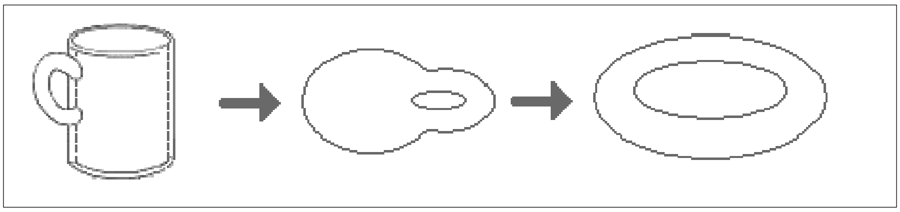
El símbolo internacional de reciclaje es una banda de Möbius.



Botella de Klein



El problema de los puentes de Könisberg(Es considerado el hito que marca el nacimiento de la Topología)



Figuras topológicamente equivalentes
(Nótese el paso de una figura a otra mediante "deformaciones", en las que "sólo está prohibido cortar o pegar")

Es un plano del metro de Madrid. Aquí están representadas las estaciones y las líneas de metro que las unen. Pero no es *geométricamente* exacto. La curvatura de las líneas de metro no coincide, ni su longitud a escala, ni la posición relativa de las estaciones... Pero aun así es un plano perfectamente útil (de hecho, si fuera exacto sería bastante más difícil de utilizar). Sin embargo este plano es exacto en cierto sentido; representa fielmente cierto tipo de información, la única que necesitamos para decidir nuestro camino por la red de metro: *información topológica*.

<u>Ejercicios</u>.

Utilizando sólo regla y compás, sin poder utilizar la regla para medir distancias,

1. Hallar una recta paralela a otra dada.
2. Idem, pasando por un punto exterior a la recta dada.
3. Trasladar un ángulo en el plano.
4. Obtener el ángulo suma de dos ángulos dados.
5. Hallar la proyección ortogonal de un punto sobre una recta.
6. Hallar la mediatriz de un segmento dado.
7. Hallar la bisectriz de un ángulo dado.
8. Construir un hexágono regular.
9. Construir todos los polígonos regulares que se pueda a partir de una circunferencia.
10. Construir la circunferencia que pasa por tres puntos dados
11. Construir un triángulo equilátero
12. Construir la perpendicular a un segmento en uno de sus puntos
13. Trazar las mediatrices de un triángulo, el circuncentro y la circunferencia circunscrita
14. Trazar las bisectrices de los ángulos de un triángulo, el incentro y la circunferencia inscrita
15. Construir alguna figura simétrica respecto de uno o dos ejes de simetría

1.b.3. Estadística y probabilidad.

La Academia Española de la Lengua hace proceder la palabra "estadística" del término "estadista" que, a su vez, procede de "estado" y, éste, de la palabra latina "status", "situación en que está una persona o cosa y, en especial, cada uno de los sucesivos modos de ser de una persona o cosa sujeta a cambios que influyen en su condición".

Las tres acepciones de la palabra "estadística" son: **(1)**

1. Censo o recuento de la población, de los recursos naturales e industriales, del tráfico o de cualquier otra manifestación de un Estado, provincia, pueblo, clase, etc.

2. Estudio de los hechos morales o físicos que se prestan a numeración o recuento y a comparación de las cifras a ellos referentes.

3. (Mat.) Ciencia que utiliza conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades.

La 1ª acepción responde al objeto más tradicional de la Estadística: la recolección, presentación y descripción de datos numéricos. Es la llamada **estadística descriptiva**.Ya en el Antiguo Egipto se efectuaban anualmente trabajos censales para repartir los bienes y propiedades tras las periódicas inundaciones del Nilo. El Imperio Romano hizo censos para recaudación de impuestos; según la Biblia, el mismo Jesucristo habría nacido durante un viaje de sus padres para censarse.

Sin embargo, la tercera acepción anterior habla de algo más que recuentos: "obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades"; frase en la que se intuye la posibilidad de hacer predicciones. Sería la otra gran área en que se divide la Estadística, la llamada **estadística de inferencias**: Técnicas de interpretar los valores que se obtienen a partir de las técnicas descriptivas y a la técnica de tomar decisiones sobre la base de sus resultados. **(2)**

El precursor de la Estadística, en este sentido, fue **John Graunt** (1620/1674), vendedor de paños londinense que, a partir de datos demográficos de las parroquias de Londres, descubrió leyes demográficas de validez permanente, llegando a estimar la población de Londres y otras ciudades inglesas. También notó que los porcentajes de muertes por accidentes, suicidios y varias enfermedades eran similares en las diferentes localidades estudiadas y que apenas variaban de un año a otro. Así, sucesos que parecían depender del azar tenían unas sorprendentes regularidades. A la naciente ciencia se le dio el nombre de “Aritmética política” y Petty, sucesor en los trabajos de Graunt la definió como “el arte de razonar por medio de cifras sobre cosas que se relacionan con el gobierno”. **(3)**

La originalidad de Graunt estribó en medir, por primera vez, fenómenos que se suponía que dependían de Dios: la muerte, los nacimientos, la enfermedad, …; al mismo tiempo, acabó con ideas falsas, que eran tópicos comunes como, por ejemplo, que la peste no coincidia con la coronación de los reyes; que la población no disminuía sino que aumentaba, a pesar de guerras y peste; la ligera desigualdad, entre el número de hombres y mujeres, a favor de éstas, etc.; también hizo un primer intento de tablas de vida. **(4)**

Los primeros censos modernos de población datan del siglo XIX, siendo pioneros los realizados en Gran Bretaña y Noruega (1801). En España, en 1713, se dictaron disposiciones sobre el Registro Civil; en 1829, se publicó el censo de la población del siglo XVI. Los realizados en 1846 (para el cumplimiento de la ley electoral) y 1850 (para averiguar los mozos de reemplazo del ejército) merecieron muy poca confianza, incluso del propio Gobierno. El primer censo moderno de población de España se considera que es el de 1857.

El 31-12-1945 se crea el Instituto Nacional de Estadística, organismo encargado de las estadísticas oficiales. Posteriormente, en las diferentes autonomías aparecen instituciones análogas. En el País Vasco, tenemos el Eustat.

(1) *R.A.E. "Diccionario de la Lengua Española". Madrid, 1992. Pág. 905*.
(2) *JOHNSON,R. "Estadística Elemental". Trillas. México, 1976. Pág. 18*.
(3) *KLINE, M.- “Matemáticas para los estudiantes de humanidades”. Fondo de Cultura Económica. México, 2000. Pág. 497*.
(4) *MORA CHARLES,M.- “Los inicios de la teoría de la probabilidad. Siglos XVI y XVII. UPV. Bilbao, 1989. Pgs.185 y sig.*.

Para terminar esta breve introducción histórica a la Estadística, mencionemos la diferencia que hace M. Kline entre el método estadístico y el deductivo: “El enfoque estadístico de un problema es, ante todo, una confesión de ignorancia. Cuando ni los experimentos, ni la observación ni la intuición nos conducen a los principios fundamentales que pudieran utilizarse como premisas para desarrollar cadenas de razonamiento, nos volvemos a los “datos”, y tratamos de recoger cuanta información sea posible sobre lo que ha ocurrido. Si carecemos del conocimiento que nos permita “deducir” lo que debe resultar de un nuevo tratamiento médico, aplicamos el tratamiento, anotamos los resultados, y tratamos de sacar algunas conclusiones. Aun cuando lleguemos a la conclusión de que el tratamiento es notablemente eficaz y debe aplicarse en forma profusa, todavía no sabemos qué factores físicos o químicos están en la operación. Quizá la diferencia más importante entre el método deductivo y el estadístico se halle en que este último nos dice lo que ocurre con grandes grupos, pero no permite hacer predicciones definidas sobre lo que ocurrirá en un caso dado, mientras que el primero predice, precisamente, lo que debe ocurrir en cada caso”. **(1)**

En cuanto a la teoría de probabilidades, sus orígenes se remontan a la sociedad francesa de 1650, en la que el juego era un entretenimiento corriente, sin demasiadas restricciones legales. Y cada vez se fueron introduciendo juegos mas complicados, que hicieron sentir la necesidad de un método para calcular la probabilidad de ganar en cada juego.

La probabilidad se obtiene dividiendo el número de casos favorables entre el número de los casos posibles; por tanto, la probabilidad de obtener oros al extraer al azar una carta de una baraja es 10/40 = 1/4 y se admite que, al repetir la extracción de una carta 400 veces, devolviendo la carta a la baraja tras cada extracción, sería muy poco usual que la frecuencia relativa de los oros obtenidos estuviese alejada de 1/4. La probabilidad es, por tanto, una medida: la de la posibilidad de que ocurra un suceso determinado.

Un jugador apasionado, el caballero De Méré, encontró un desacuerdo entre las frecuencias relativas de las veces que ganaba (valores observados realmente) y el valor de la correspondiente probabilidad de ganar que él mismo había calculado.

Consultó esta discrepancia, en París, con el famoso matemático y filósofo Blaise Pascal, quien se interesó por los problemas que le proponía De Méré, comenzando una correspondencia epistolar sobre cuestiones probabilísticas con otros matemáticos amigos, sobre todo con Pierre Fermat. Esta correspondencia puede considerarse el origen de la teoría de probabilidades.

Pronto, Pascal y Fermat probaron que el desacuerdo de De Méré se debía a que era erróneo el cálculo de probabilidad que había hecho, ya que De Méré se había equivocado al considerar como equiprobables casos que no lo eran, y sólo cuando los casos posibles son equiprobables tiene sentido aplicar la definición dada de probabilidad.

El desarrollo de la teoría de probabilidades tiene otro punto de referencia en 1713, año en que se publica la obra *"Ars conjectandi"* (El arte de la Conjetura) de J. Bernoulli, donde hace un estudio de la distribución binominal y su célebre teoría que da para esta distribución la expresión matemática de la propiedad de estabilidad de las frecuencias relativas.

Otro hito es la segunda edición de la obra “*La doctrina de las probabilidades*” ("The Doctrine of Chances"), aparecida en 1738 y debida al hugonote francés De Moivre, que por motivos religiosos huyó de Francia refugiándose en Inglaterra, donde vivió de la resolución de problemas de juegos de azar. En la obra señalada aparecen las primeras indicaciones sobre las distribución normal de probabilidades.

En 1812, Laplace publica su famosa “Teoría analítica de las probabilidades” ("*Theoríe Analytique des probabilités")*, que contiene una exposición completa y sistemática de la teoría matemática de los juegos de azar, además de una gran cantidad de aplicaciones de la teoría de la probabilidad a muchas cuestiones científicas y prácticas.

(1) *KLINE, M.- “Matemáticas para los estudiantes de humanidades”. Fondo de Cultura Económica. México, 2000. Pág. 498*.

Tras la obra de Laplace se extienden las aplicaciones de su obra a otras ramas de la Ciencia durante el siglo XIX, y así, Gauss y Laplace, independientemente, aplicaron la teoría de la probabilidad al análisis de los errores de medida en las observaciones físicas y astronómicas; Maxwell, Boltzmann y Gibbs aplicaron la probabilidad en su obra *"Mecánica Estadística",* que ha sido fundamental en distintas partes de la Física moderna. Ya durante el siglo XX las aplicaciones de la teoría de la probabilidad se extienden por los más variados campos, como genética, economía, psicología...
MIRO

Pese al éxito de estas aplicaciones, también se oyen voces críticas a la definición clásica de probabilidad, que exigía, a priori, saber, o suponer, que todos los casos posibles eran igualmente favorables. Además, en ciertos casos, es imposible aplicar la definición clásica de probabilidad, como puede suceder al intentar calcular la probabilidad de que una chincheta caiga con la punta hacia arriba, o de que un hombre de 30 años muera el próximo año.

Si bien la matemática cambió profundamente de forma entre las dos guerras mundiales, también es cierto que buena parte de la matemática que siguió a la Segunda Guerra Mundial consistía en el comienzo de algo radicalmente nuevo que anunciaba una nueva era. La teoría de conjuntos y la teoría de la medida invadieron, a lo largo del siglo XX, una parte cada vez más extensa de la matemática, aunque pocas de sus ramas se han visto afectadas tan profundamente por esta tendencia como la teoría de probabilidades, a la que Borel había dedicado ya en 1909 sus "*Elementos de la teoría de las probabilidades*" (*"Eléments de la théorie des probabilités")*.

El primer año del siglo XX se anunciaba ya propicio para las aplicaciones de la teoría de probabilidades tanto en Física como en Genética, pues en 1901 Gibbs publica su obra *Elementary Principles in Statistical Mechanics,* y el mismo año se funda la revista *Biometrika* por Karl Pearson (1857-1936). Francis Galton (1822-1911), precoz estadístico, estudia los fenómenos de regresión; en 1900, Pearson, en la universidad de Londres populariza el criterio de la «chi-cuadrado». Uno de los títulos de Poincaré fue el de "profesor de cálculo de probabilidades", lo que indica un interés creciente por el tema.

Mientras, en Rusia, se inicia el estudio de las cadenas de sucesos eslabonados, especialmente en 1906-1907, por obra de Andrei Andreyevich Markov (o Markoff, 1856-1922), discípulo de Tchebycheff y coeditor de las *Oeuvres* (2 vols., 1899-1904) de su maestro. En la teoría cinética de los gases y en muchos fenómenos sociales y biológicos, la probabilidad de un suceso depende frecuentemente de los resultados anteriores, y especialmente desde mediados de este siglo las cadenas de Markov de probabilidades eslabonadas se han estudiado muy detalladamente. En su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de probabilidades en expansión, los estadísticos encontraron a mano las herramientas necesarias, y hoy no es posible ya dar una exposición rigurosa de la teoría de probabilidades sin utilizar los conceptos de función medible y de las teorías de integración modernas.

En Rusia mismo, por ejemplo, Andrel Nicolaevich Kolmogoroff hizo importantes progresos en la teoría de procesos de Markov (1931) y dio solución a una parte del sexto problema de Hilbert, en el que se pedía una *fundamentación axiomático de la teoría de probabilidades*, utilizando la medida de Lebesgue.

El análisis clásico se había ocupado principalmente de funciones continuas, mientras que los problemas de probabilidades generalmente se refieren a casos discretos. La teoría de la medida y las sucesivas extensiones del concepto de integral se adaptaban perfectamente a conseguir una asociación más estrecha entre el análisis y la teoría de probabilidades, especialmente a partir de mediados del siglo, cuando Laurent Schwartz (1915-2002), de la universidad de París, generalizó el concepto de diferenciación mediante su teoría de distribuciones (1950-1951).

Ejercicios.

1. Un fabricante de pantalones desearía saber cuántos ha de fabricar de cada talla de un modelo para hombres. Cometer un error en la decisión puede hacer que tenga una gran demanda de tallas de las que tiene poca disponibilidad o, viceversa, tener poca demanda de tallas de las que tiene una gran cantidad en stock, con la consecuencia de no poder venderlos. Para resolver el problema elige una muestra del conjunto de posibles compradores de su modelo de pantalón, obteniendo los siguientes datos:

Talla	Número de personas
42	10
44	17
46	30
48	27
50	20
52	8
54	3

Estos datos plantearían algunas cuestiones:

a. ¿Cómo podríamos resumir la información que nos da esta muestra?.

b. ¿Cuánta información nos proporciona la muestra sobre la población? Si en vez de una muestra tomáramos varias, ¿hasta qué punto podemos esperar que las diferencias observadas entre las muestras no han sido producto de la casualidad o el azar?; o, por el contrario, ¿representan algo que caracteriza a la población?

c. ¿Qué se entiende por muestra representativa? ¿Hasta qué punto se puede asegurar que una muestra lo es?

(*MARTÍN, G.- "Introducción a la Estadística". Pág. 8*)

2. Hace miles de años, bajo el reinado de un príncipe cruel, los ladrones detenidos eran lanzados al interior de un negro calabozo, que tenía tres salidas. Los ladrones erraban por el calabozo, donde no había ninguna luz. Cuando encontraban una de las salidas, la seguían sin saber cuál era ni a dónde les conducía.

- La primera de las salidas les llevaba a la libertad en una hora.
- La segunda daba a un túnel que les conducía, de nuevo, al calabozo, después de una marcha de dos días.
- La tercera llevaba igualmente al calabozo, pero después de tres días.

Si no lograban escapar antes, al cabo de 5 días y una hora, morían de hambre, sed y desesperación.

a) Simula, con un dibujo, lo que podía ocurrir a un ladrón en este calabozo.
b) Si un año se detuvo a 27 ladrones, ¿cuántos lograron escapar?.

3. Diseña una situación de enseñanza-aprendizaje que admita una representación a través de una tabla de doble entrada. Pasa de la tabla de doble entrada a una representación mediante un diagrama de árbol y a otra mediante un diagrama de Venn (ayuda: puede ser una situación con fumadores, no fumadores, hombres y mujeres). Al diseñar la situación proporciona el mínimo número de datos necesarios.

1.c. Razonamiento matemático: cuantificadores lógicos, conjuntos y representaciones gráficas.

1.c.1. Razonamiento matemático. La demostración en Matemáticas: Teoremas.

Un teorema es un enunciado que hay que demostrar. Así, por ejemplo, cuando en el lenguaje cotidiano decimos “si tienes sed, hay agua fresca en el frigorífico”, no se trataría de un teorema. En cambio, la frase “si tomas una aspirina, no te dolerá la cabeza” sí sería un teorema.

También se emplean palabras como lema, que es una proposición que prepara el establecimiento de un teorema; corolario, que es una proposición consecuencia de un teorema; y axioma, que es una proposición cuya validez se admite sin demostración. La palabra teorema se suele reservar para una proposición que se considera importante.

La demostración de un teorema consiste en deducir la validez de ciertas conclusiones, partiendo de unas premisas, mediante una sucesión de implicaciones lógicas. Cada implicación, de la forma H ➔ T, es un teorema. H se llama hipótesis y T tesis.

Ejemplo: “La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º”.
Hipótesis: “una figura es un triángulo”;
tesis: “la suma de sus ángulos interiores es 180º”.

Dada la implicación, o teorema, H ➔ T, que llamaremos directo, a partir de él se tienen:
Teorema recíproco: T ➔ H
Teorema contrario: No H ➔ No T
Teorema contrarrecíproco: No T ➔ No H

Entre ellos hay las siguientes relaciones: * H ➔ T equivale a No T ➔ No H
* T ➔ H equivale a No H ➔ No T

Así, por ejemplo, si tomamos el texto de una famosa canción y afirmamos que “si una persona tiene salud, dinero y amor, entonces, es feliz” (Teo. directo), tal afirmación sería equivalente a esta otra: “Si una persona no es feliz, entonces, no tiene salud, dinero y amor” (Teo. contrarrecíproco).

Análogamente, la afirmación “Si una persona es feliz, entonces, tiene salud, dinero y amor” (Teo. recíproco), equivaldría a “Si una persona no tiene salud, dinero y amor, entonces, no es feliz” (Teo. contrario).

No se debe confundir H ➔ T (T. directo) con T ➔ H (T. recíproco): “Si la dopamina produce una disminución de los temblores de la enfermedad de Parkinson, entonces, la falta de dopamina produce temblores”. (*PAULOS,J.A.- “El hombre anumérico”. Tusquets. Barcelona,1990*).

Condición necesaria y suficiente.

Dado un teorema H ➔ T, podemos decir que
el cumplimiento de H es condición suficiente para asegurar el de T
el cumplimiento de T es condición necesaria para el de H.

Ejemplo: Sea la afirmación “si un número es múltiplo de 6, entonces es par”.
Ser múltiplo de 6 es suficiente para ser par, pero no necesario.
Ser par es necesario para ser múltiplo de 6, pero no suficiente.

Además, en este caso, podríamos decir también que:
La afirmación recíproca T ➔ H no es cierta.
La afirmación contraria No H ➔ NO T no es cierta.
La afirmación contrarrecíproca No T ➔ No H sí es cierta.

Cuando en un teorema H ➔ T se cumple también el recíproco, T ➔ H, se dice que H es condición necesaria y suficiente para que se cumpla T.

Ejemplo: "Si en un polígono la suma de sus ángulos interiores es 180º, ese polígono es un triángulo, y recíprocamente".

Demostración de un teorema.

Después de todo lo escrito anteriormente, hay diferentes maneras de demostrar un teorema de la forma H ➔ T :

* Demostración directa: Suponiendo la verdad de H, se llega a la verdad de T.

* Demostración indirecta, por reducción al absurdo (No T ➔ No H): Se supone que "No T" es verdadera (es decir, T falsa) y con esa hipótesis se razona hasta encontrar la falsedad de H (o sea, que "No H" es verdadera).

Ejemplo: Veamos, como ejemplo, esta bella demostración atribuida a Euclides, hace unos 2.400 años: Queremos demostrar que la raíz cuadrada de 2 es un número irracional (que no se puede escribir como una fracción).

Para ello, suponemos que no lo es, es decir, que se puede escribir como una fracción irreducible a/b (a no divisible por b). Entonces, tendríamos:

$\sqrt{2} = a/b$ ➔ $2 = a^2 / b^2$ ➔ $2 b^2 = a^2$ ➔ a^2 es par ➔ a es par ➔ $a = 2\alpha$ ➔ $a^2 = 4\alpha^2$ ➔ $2b^2 = 4\alpha^2$ ➔ $b^2 = 2\alpha^2$ ➔ b^2 par ➔ b es par, lo que está en contradicción con que a/b era irreducible.

* El contraejemplo: Ocurre con frecuencia que el enunciado de un teorema toma la forma de una proposición referida a los elementos de un conjunto C (lo que se llama una "función lógica", p(x). Así, para cada valor de x, p(x) se convierte en un enunciado, que puede ser verdadero o falso). En este caso, al igual que ocurría cuando hablábamos de conjuntos, se utilizan cuantificadores:

$\exists x \in C / p(x)$. "Hay algún número natural menor que 100 que es primo"
$\forall x \in C / p(x)$. "Para todo número natural n, la suma de todos los números naturales anteriores a n, se puede hallar por la fórmula (n + 1) n/2".

Y lo mismo que en el caso de los conjuntos, también existen las leyes de Morgan para las proposiciones que contienen cuantificadores:

No ($\forall$ x, p(x) <==> ($\exists$ x, No p(x))
No ($\exists$ x, p(x) <==> ($\forall$ x, No p(x))

Así, por la primera de las dos leyes de Morgan, para demostrar que un enunciado de la forma $\forall$x, p(x) es falso, da lo mismo demostrar que $\exists$ x, No p(x) es verdadero, esto es, que existe un elemento $x_o \ni p(x_o)$ es falso. Ese elemento x_o se dice que es un contraejemplo del enunciado $\forall$x, p(x).

Por ejemplo, para demostrar la falsedad de la afirmación "todos los suecos son rubios", bastaría con encontrar uno que no lo fuera. Sería el "contraejemplo" que probaría la falsedad de la afirmación.

Otros Ejemplos: Demostrar que son falsos los siguientes enunciados:

a) "Todo número impar es la suma de los cuadrados de dos números naturales".
(Contraejemplo: el número 3).

b) $\forall x,\ |x| \neq 0$ (Contraejemplo: el número 0).

c)$\forall x,\ x^2 > x$ (Contraejemplo: el número 1).

Demostración por inducción: Hay proposiciones, en Matemáticas, que hacen referencia a la totalidad del conjunto de los números naturales. Por ejemplo, la conocida propiedad de que, cualquiera que sea el número natural n, la suma de todos los números naturales anteriores a n es $n(n+1)/2$.

La demostración se hace en tres pasos:

1. Se comprueba la validez de la proposición para el primer valor de n:

   En este caso, si sólo tenemos un número natural, el 1: $1.(1+1)/2 = 1$.
   La fórmula es cierta.

2. Se supone que la fórmula es cierta para un valor $n = k$, es decir, que

$$1+2+3+ .... + k = k(k+1)/2$$

3. Supuesto lo anterior, se trata de demostrar que la fórmula es cierta para el valor siguiente, $n = k+1$.

   En efecto, $1+2+3+ .... + k +(k+1) = k(k+1)/2 + (k+1) = (k+1)(k/2 + 1) =$
   $= (k+1)(k+2)/2$, como se quería demostrar.

En todo lo anterior, funciona un "efecto dominó": al ser la fórmula cierta para $n = 1$, por los pasos 2 y 3 de la demostración, sería cierta para $n=2$; al serlo para este valor, lo sería para $n=3$; y, entonces, para $n=4$, etc., hasta el infinito.

Ejercicio: Demostrar que la suma de los n primeros números impares es n^2.

a) Inténtese, primero, representando cada número por puntos, dispuestos de tal manera que formen cuadrados. Se empieza por 1 y se van añadiendo los demás.
b) Después de lo anterior, inténtese hacer la demostración utilizando el método de inducción.

Ejemplos de razonamientos:

1. 100 m. = 1 Hm.
   25 m. = ¼ Hm.
   5 m. = ½ Hm. Absurdo. ¿Por qué?.
   (*PAULOS, J.A. – "El hombre anumérico". Tusquets. Barcelona, 2000. Pág. 111*)

2. INDECOROSO. Hemos sido advertidos por la Ararteko, Mertxe Agúndez, de que los ayuntamientos carecen de competencias para sancionar las conductas supuestamente indecorosas que se registran en las calles: nudismo, botellón, mendicidad. Solicito a la Ararteko que defienda mi derecho de verla públicamente desnuda y a sus hijos (si los tiene) con el botellón, puesto que dichas conductas serían supuestamente decorosas.
(*Carta al Director. "El Correo". Bilbao. D-05/05/2002*)

3. UNA HISTORIA. El gobierno de España ha manifestado su intención de que en los libros de historia lo que se relate sea lo que nos atañe a todos, dando a cada acontecimiento la importancia que realmente tuvo. (...) la polémica la han seguido, por ejemplo, J.M. Carrascal, en ABC, recordándonos con este motivo la manida frase: "los pueblos que olvidan su pasado están condenados a repetirlo". Esta frase es brillante pero falsa. Si fuera cierta, los pueblos que tienen, o tenemos, un pasado glorioso, para repetirlo, tendríamos que olvidarlo ...".

(*Carta al Director. "El Correo". Bilbao. V-07/11/1997*)

¿Qué te parecen estas formas de razonar que aparecen en estas dos "cartas al director"?

4. El dilema del prisionero.

En una cárcel hay dos prisioneros, ambos sospechosos de haber cometido un mismo delito grave, pero ambos detenidos por cometer un delito menor.

En los interrogatorios, por separado, se les da la posibilidad de confesar el delito grave, implicando con ello a su compinche, o permanecer en silencio.

1. Si ambos se mantienen callados, cada uno tendrá una pena de un año de cárcel.
2. Si uno confiesa y el otro no, el que confiesa queda libre y el otro es encarcelado durante 5 años.
3. Si ambos confiesan, cada uno permanecerá 3 años en prisión.

¿Cuál sería la mejor opción para los dos? ¿Y la mejor para cada uno de ellos individualmente? ¿Cuál te parece la que tiene más probabilidades de producirse?

¿Ves paralelismos con situaciones de vida corriente?

Las paradojas.

"Quizá la mayor de todas las paradojas es que haya paradojas en matemáticas". **(1)**

Las matemáticas, paradigma de ciencia "lógica" y bien fundamentada, no han estado exentas, a lo largo de su historia, de resultados curiosos, que iban en contra de toda intuición e, incluso, contradictorios. Tales resultados provocaron, en algunos casos, una revisión de los propios fundamentos de las matemáticas.
Se pueden diferenciar tres tipos de paradojas:

1) Proposiciones absurdas que surgen de razonamientos falaces.

"Supongamos que $A+B=C$, donde $A=3$ y $B=2$, y multipliquemos los dos miembros de la ecuación por $A+B$. Resulta que $A^2 + 2AB + B^2 = C(A+B)$
Reordenando los términos, $A^2 + AB - AC = - AB - B^2 + BC$
Sacando factor común $(A + B - C)$, se tiene: $A(A + B - C) = - B(A + B - C)$,
De donde $A = - B$, es decir, $A + B = 0$, lo que es absurdo.

(*El razonamiento no sería válido pues se ha dividido por A+B-C, que es 0*)

2) Proposiciones que son lógicamente aceptables pero que chocan con la intuición.

Por ejemplo, algunos resultados de las geometrías no euclídeas que se vieron en un epígrafe anterior: "Por un punto exterior a una recta se pueden trazar dos paralelas a ella".

3) Paradojas lógicas, relacionadas con la teoría de conjuntos.

Son las más interesantes pues han dado lugar a problemas relacionados con la misma naturaleza de las matemáticas. Vamos a ver algunos ejemplos de ellas:

(1) *KASNER,E./NEWMAN,J.- "Matemáticas e imaginación". Salvat. Barcelona, 1987*.

3.1. Aquiles y la tortuga (Zenón de Elea).

Aquiles y una tortuga deciden echar una carrera. La tortuga parte con una distancia de ventaja. Para alcanzarla, Aquiles debe llegar primero al lugar del que partió la tortuga; pero, para cuando llegue, la tortuga habrá avanzado un poco; cuando llegue al nuevo punto, la tortuga habrá vuelto a avanzar otro poco; así, a medida que Aquiles llega a cada nuevo punto de su carrera, la tortuga, que ya había estado allí, lo ha abandonado; a Aquiles le resulta imposible alcanzar a la tortuga.

3.2. Paradoja del mentiroso.

El poeta cretense Epiménides (siglo VII a.C.) pasó a la posteridad por la frase "todos los cretenses son mentirosos".

3.3. Paradoja del ahorcado.

En un país se decreta que todo extranjero detenido en su territorio será llevado ante un tribunal que le ordenará pronunciar una frase provista de sentido y verificable antes de 24 horas. Si la frase es exacta, el extranjero será fusilado; si es inexacta, será ahorcado.

Un día, aparece un extranjero que declara: "vosotros me ahorcaréis".

Desde ese momento, fue tan ilegal ahorcarlo como fusilarlo.

3.4. Paradoja del bibliotecario.

Un bibliotecario se da cuenta de que su biblioteca contiene dos clases de catálogos: unos, que se mencionan a sí mismos y, otros, que no. Tuvo la idea de clasificarlos y distribuirlos en dos listas diferentes. El trabajo progresaba sin obstáculos hasta que tuvo que decidir si la lista de la que estaba ocupando, que era la de los catálogos que no se mencionaban a sí mismos, debía mencionarse a sí misma, o no.

3.5. Groucho Marx.

Es, por último, muy famosa la afirmación que hizo Groucho Marx en una de sus películas: "Yo nunca pertenecería a un club que estuviese dispuesto a aceptarme como uno de sus miembros".

1.c.2. Conjuntos y representaciones gráficas.

Georg Cantor

A finales del siglo XIX, el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) revoluciona las matemáticas con su trabajo sobre la teoría de conjuntos, fundamental para una concepción unificada de éstas.
La de conjunto es una noción base que tiene un significado intuitivo conocido (colección, agrupamiento, reunión, montón, ...), que, en el fondo, es similar al que dio el propio Cantor: "Se entiende por conjunto a la agrupación, en un todo, de objetos bien diferenciados, de nuestra intuición o de nuestra mente, a los que llamamos elementos del conjunto".

Notación. Los conjuntos se nombrarán, aunque no siempre, con letras mayúsculas: A, B, C, ...; y los elementos que los constituyen, con letras minúsculas: a, b, c, ...; para indicar que un objeto "a" es un elemento del conjunto A, se escribirá "$a \in A$" y se dirá que "a pertenece a A".

Determinación de un conjunto:

* Por comprensión: indicando cada uno de los elementos que pertenecen a un conjunto. A = {a, e, i, o, u}

* Por extensión: Dando un criterio de pertenencia al conjunto.
A = conjunto de las letras vocales.

Es muy usual, en este último caso, el empleo de los cuantificadores lógicos $\forall$ y $\exists$.

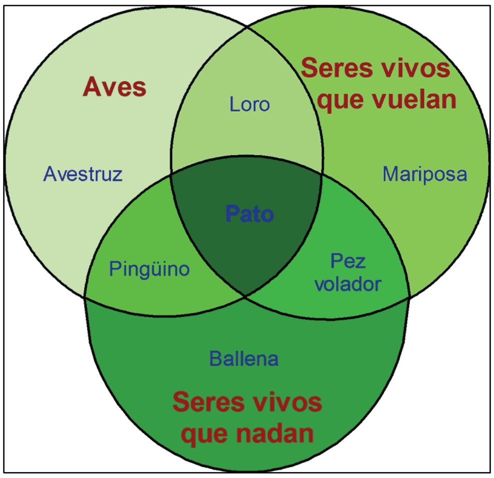
Por ejemplo, si queremos indicar el conjunto P de los números no primos: $P= \{p \in N / \exists\, d \in N$ y d divide a p, $d \neq 1$ y $d \neq p\}$

(Se leería como "el conjunto P cuyos elementos pertenecen a N (son números naturales) y tales que ("/") existe algún ($\exists$) número natural d ($d \in N$) que divide a p y es distinto ($\neq$) de 1 y de p")

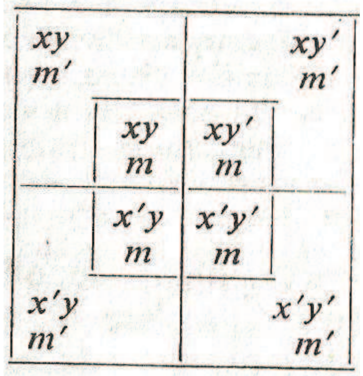
O el conjunto de los números pares: $P= \{2.n, \forall p \in N\}$

Representación:

- Diagramas de Venn.



- Diagramas de Carroll. **(1)**



(*La región xym' representa le intersección (*véase, más abajo, operaciones con conjuntos*) de los conjuntos x, y, complementario (*idem*) de m; xym la de los conjuntos x, y, m; x'y'm', la de los complementarios de x, y, m; etc., etc.*)

Tipos de conjuntos:

- Conjunto vacío: ∅. Es aquél que no contiene ningún elemento.
- Conjunto universal: U. Es aquél que hace referencia a todo el universo (a todos los conjuntos posibles) a que se refiere una situación determinada.
- Conjunto unitario. Es el formado por un solo elemento. Hay que diferenciar el conjunto con un solo elemento de ese elemento (Ejemplo: una cerilla y una caja de cerillas con una cerilla).
- Conjunto de conjuntos. Los elementos de un conjunto pueden ser, a su vez, conjuntos. (Una caja con cajas de cerillas. Cada cerilla no sería un elemento de ese conjunto).

Inclusión e igualdad de conjuntos:

- Subconjuntos. Se dirá que un conjunto A es un subconjunto de otro conjunto B, o que está contenido en B, si todo elemento de A está también en B. Se escribirá A C B. Propiedades (∅ C A; A C A; transitiva: si A C B y B C C, entonces, A C C).

  Es importante comprender que hablar de contenido, en matemáticas, es expresar, de forma cómoda, que unos elementos tienen una cierta propiedad. Por ejemplo, "Todo hombre es mortal", "Cualquier triángulo es un polígono", etc.

- Conjunto de las partes de un conjunto. Dado un conjunto A, se llama conjunto de las partes de A al conjunto P(A) cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Si A tiene n elementos, P(A) tendrá 2^n elementos. (Compruébese como ejercicio).

- Igualdad de conjuntos. Dos conjuntos A y B se dirán iguales si A está contenido en B y B está contenido en A.

  El concepto de igualdad de conjuntos nos da pie a hablar de la igualdad en Matemáticas:
  En matemáticas, cuando decimos que dos cosas son iguales, no nos referimos a la igualdad absoluta pues, evidentemente, si dos cosas fueran completamente iguales, no serían dos, sino una sola. Estamos hablando de igualdad en lo que se refiere a un aspecto o propiedad de esas cosas, es decir, cuando hablamos de que "A es igual a B", nos estamos refiriendo siempre a algún aspecto parcial de A y de B (el número de elementos, la forma, su posición, etc.).

(1) *CARROLL,L.- "El juego de la lógica". Alianza. Madrid, 1984.*

Operaciones con conjuntos:

- Intersección. Dados dos conjuntos A y B, se llamará conjunto intersección de ambos y se representará por $A \cap B$, al conjunto formado por todos los elementos que están en A y en B, o sea,

  $A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$

  Si $A \cap B = \varnothing$, los conjuntos A y B se dicen disjuntos.

- Unión. Dados dos conjuntos A y B, se llamará conjunto unión de ambos y se representará por A U B, al conjunto formado por todos los elementos que están en A, o en B, o en ambos a la vez, o sea,

  $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ó } x \in B\}$

- Propiedades de unión e intersección: La unión y la intersección de conjuntos poseen propiedades semejantes a la suma (la unión) y el producto (la intersección) de números naturales. Como ejercicio, puede establecerse el paralelismo entre las propiedades de unas y otras operaciones.

- Producto cartesiano. Dados dos conjuntos A y B, se llamará producto cartesiano de ambos y se representará por A x B, al conjunto formado por todos los pares que pueden formarse tomando un elemento de A y otro de B , o sea,

  $A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$

  Ejemplo: Al ir a comer a un bar y pedir el menú del día, me presentan 5 primeros platos y cuatro segundos. ¿De cuántas maneras diferentes podría comer?

  Primeros platos: P = {sopa, alubias, acelgas, pasta, ensalada}
  Segundos platos: S = {pollo, pescado, cordero, tortilla, escalope}
  PxS = {(sopa, pollo), (sopa, pescado), ..., (ensalada, escalope)}

- Diferencia de dos conjuntos. Dados dos conjuntos A y B, se llamará conjunto diferencia de ambos y se representará por A - B, al conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B, o sea,

  $A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$

- Complementario de un conjunto. Dado un conjunto A, se llamará conjunto complementario de A, y se representará por $\bar{A}$, al conjunto formado por todos los elementos que no pertenecen a A, o sea,

  $\bar{A} = \{x / x \notin A\}$

Leyes de Morgan. Existen dos igualdades, conocidas como Leyes de Morgan, que hacen referencia a los complementarios de la unión y de la intersección de dos conjuntos:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Cardinal de un conjunto: Es el número de elementos de ese conjunto y se representa por card (A). En referencia a la unión de conjuntos, se tiene que

card (AUB) = card (A) + card (B) – card (A∩B)

card (AUBUC) = card (A) + card (B) + card (C) – card (A∩B) – card (A∩C) – card (B∩C) + card (A∩B∩C)

(Se verán diferentes ejemplos en el apartado de problemas).

Cardinales infinitos.

La palabra "infinito" hace referencia a aquello que no tiene fin. Es conocido que hay conjuntos infinitos, como, por ejemplo, el conjunto de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, ...

Existe un símbolo, ∞ , que indica la idea de infinitud y que, por tanto, podría escribirse al final de la serie anterior; no se trata de un número, sino de una indicación que nos dice que, escrito un número, siempre existe otro mayor, en una carrera sin fin.

Entre conjuntos infinitos ocurren cosas curiosas:

Por ejemplo, en el conjunto anterior de números naturales, consideremos sólo los números pares 2, 4, 6, 8, ... , que también es infinito. Es fácil emparejar los elementos de ambos conjuntos, de manera que a cada número natural le corresponda uno y sólo un número par, y recíprocamente:

1	2	3	4	5	6	....
2	4	6	8	10	12	....

Esto querría decir que hay tantos elementos en el primer conjunto como en el segundo, es decir, "una parte sería tan grande como el todo del que procede", lo que contradice nuestra intuición.

Y lo mismo pasaría si consideráramos los números impares, o los múltiplos de 3, o los de 4, o los de 100, o los de 567.

Así mismo, el conjunto de todas las fracciones también se puede numerar, es decir, a cada fracción le corresponde un número natural y recíprocamente.

Sin embargo, los puntos de una recta no pueden ser numerados; entre cada dos de ellos, vuelve a haber una infinitud de puntos. O sea, se trata de un infinito "mayor" que el anterior.

Fue Georg Cantor quien estableció diferentes categorías de infinitud, a las que llamó "números transfinitos" , a los que representó con la letra "alef ($\aleph$), primera letra del alfabeto hebreo.

Así, el infinito correspondiente a los números naturales sería el $\aleph_0$.

El correspondiente a los puntos de una recta (la recta de los números reales), $\aleph_1$.

Y el correspondiente a todas las funciones que se pueden representar en el plano, $\aleph_2$.

Para terminar este epígrafe, diremos que el estudio de los conjuntos contribuye al logro de los siguientes objetivos didácticos:

- Por medio de la representación se contribuye a la solución intuitiva de los problemas.

- El lenguaje de los conjuntos refuerza el pensamiento lógico.

- Supone la convergencia de distintos métodos: diagramas (Venn, Carroll), fórmulas, tablas de doble entrada, diagramas de árbol.

- Aparecen en el currículo

- Resuelven ejercicios de aritmética de forma indirecta

Ejercicios.

1. Define por extensión los siguientes conjuntos:
   - $A = \{1,3,5,7,9\}$
   - $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$
   - $C = \{lunes, martes\}$

2. Define por comprensión los siguientes conjuntos:
   - Los múltiplos impares de 5 que están comprendidos entre 3 y 21
   - Los meses del año que llevan en su nombre la letra r

3. Di cuáles de los siguientes son conjuntos y expresa para cada caso un elemento del conjunto:
   - una caja de cerillas
   - Un paquete que contiene cajas de cerillas
   - Los libros de una biblioteca
   - Las chicas guapas de Bergara
   - Los números naturales múltiplos de 5
   - Los ríos de Euskal Herria
   - Las personas inteligentes de Zeanuri

4. Una compañía de seguros tiene un conjunto V de clientes y trata de estudiar algunas características de los mismos. Sea A el conjunto de los adultos, B el de las mujeres y C el de clientes casados.

   a) Describir, verbalmente, los conjuntos siguientes:

   $$A,\ B,\ \overline{C},\ A - B,\ \overline{A} \cup B,\ A \cap B$$

   b) Dar expresión formal a los conjuntos siguientes:
   "Adultos casados"; "varones menores no casados"; "menores, o bien varones casados".
   (RÍOS, S.- "Matemática aplicada". Paraninfo. Z-1975. Pág. 42)

5. Representa, mediante un diagrama de Venn, las relaciones de contenido que se dan entre los diferentes conjuntos de números.

6. Determina U y sus 3 subconjuntos A,B.C sabiendo que $\overline{A \cup B \cup C} = \{1,8,S\}$; $A \cap C = \{5\}$;

   $A \cup C = \{2,3,4,5,6,m,r\}$; $B \cap C = \{\phi\}$; $A \cup B = \{2,3,4,5,7,9\}$; $\overline{B} = \{1,2,5,6,8,m,r,S\}$.

7. ¿Puede creerse a un investigador que informa que de cada 1000 habitantes de una gran ciudad 815 son trabajadores; 723 hombres; 145 universitarios; 520 hombres y trabajadores; 100 hombres y universitarios; 75 trabajadores y universitarios; y 10 hombres, trabajadores y universitarios?. (*Solución: No, pues card (AUBUC) = 998*).

8. Si en una clase de 30 niños hay 11 que llevan gafas, 9 jersey rojo y 15 no llevan ni gafas ni jersey rojo, ¿Cuántos llevan las dos cosas? Haz un diagrama de Venn y expresa los datos también mediante una tabla de doble entrada. (*Tomado de un libro de Primaria*).

9. En un bar se ofrecen 5 clases de bocadillos y 3 de bebidas. ¿De cuantas maneras diferentes puedo merendar tomando un bocadillo y una bebida?. (*Tomado de un libro de Primaria*).

10. En una encuesta realizada en una escuela se ha obtenido que el 31% de los alumnos practica atletismo, el 41% fútbol, el 39% natación, el 14% atletismo y fútbol, el 12% fútbol y natación, el 10% atletismo y natación, y el 8% los 3 deportes. ¿Qué % practica un solo deporte? ¿Y ninguno?.

11. En un campo de concentración de la 2ª Guerra Mundial había 10.000 presos; 5.600 hablaban francés, 4.400 ruso, 2.200 polaco, 100 F y P, 2.600 F y R, 900 R y P, 100 los tres idiomas. Si llega un intérprete que habla los 3 idiomas, ¿con cuántos podría hablar?.

12. Si A tiene 23 elementos, (A U B) 41 y (A ∩ B) 8, ¿cuántos tendrán B, A-B y B-A?.

13. La empresa "Propaganda S.A." dispone de los soportes publicitarios S1, S2 y S3 para dirigirse a una población objetivo de 100.000 personas. Las audiencias brutas de tales soportes son de 20.000, 30.000 y 40.000 personas. Hay 5.000 expuestas al 1 al 2, 10.000 al 2 y al 3, y 8.000 al 1 y al 3; a los 3 soportes están expuestas 1.000.
 ¿Cuál es la audiencia neta de los tres soportes?. (Solución: 20+30+40–5–8–10 + 1 = 68.000).
(*PEREZ GOROSTEGUI,E. "Economía de la empresa aplicada". (Pág. 522*).

14. Los obreros de una fábrica están clasificados por:
a) estado civil (S/C); b) lugar de nacimiento (portugalujos/no portugalujos); c) estudios (universidad/no universidad).
Un investigador averigua que un obrero "X" que está buscando es "o soltero, o universitario no portugalujo".
Un segundo investigador, sobre el mismo individuo, averigua que es "o soltero, o no portugalujo, o no universitario". ¿Quién de los dos investigadores da más información sobre "X"?.

15. Los individuos de una cierta población V son examinados para ver si su sangre presenta uno, o más, de los antígenos A, B y Rh. Llamamos

A = {x ε V / x tiene el antígeno A}
B = {x ε V / x tiene el antígeno B}
Rh = {x ε V / x tiene el antígeno Rh}

Tenemos así los siguientes 8 subconjuntos posibles (con la nomenclatura biomédica usual al lado):

$X \cap Y \cap Z$ = tipo (AB , Rh+)

$X \cap Y \cap \overline{Z}$ = tipo (AB , Rh-)

$X \cap \overline{Y} \cap Z$ = tipo (A , Rh+)

……………………………………
……………………………………

Describir, mediante un diagrama de Venn, los diferentes tipos de grupos sanguíneos y establecer las relaciones que se dan entre ellos en cuanto a posibles donaciones.

16. Hallar el m.c.d. de dos números utilizando conjuntos.

17. De una persona se sabe que es "hombre y está casado, pero no vive en Madrid". De otra, que "está casada o que vive en Madrid, pero no las dos cosas a la vez". ¿De quién tenemos más información?.

18. Empleando un diagrama de Carroll, dí cuántas personas juegan al fútbol en un grupo de 50, sabiendo que 20 juegan al tenis, 10 al fútbol y al tenis y 5 no juegan ni al fútbol ni al tenis.

19. En un grupo de personas se sabe que 20 practican el tenis, 10 el futbol y el tenis y 5 de ellos no practican ni el futbol ni el tenis. ¿Cuántos de ellos practican futbol?

20. De una persona se sabe que "juega al fútbol o nada, pero no ambas cosas a la vez, aunque es seguro que anda en bici". De otra, que "o juega al fútbol, o nada y anda en bici". ¿De quién tenemos más información?.

21. A una reunión de la jerarquía católica en Roma acuden 25 personas, que se dividen en:
    * 20 Arzobispos.
    * 12 Cardenales.
    * 17 Italianos.
    * 8 Arzobispos que son cardenales.
    * 11 Cardenales italianos.
    * 12 Arzobispos italianos.

    ¿Cuántos Arzobispos que son cardenales e italianos había?

22. Los conjuntos A, B, C y D cumplen lo siguiente: todos los elementos de A son elementos de C; el conjunto B tiene elementos comunes con A y D tiene elementos comunes con C pero no con A ni con B. Dibuja los conjuntos mediante un diagrama de Venn.

23. En una clase hay 100 alumnos. Conociendo los siguientes datos, calcula el número de alumnos que no han aprobado ninguna de las dos asignaturas:
    * Hay dos asignaturas, matemáticas y física.
    * 54 alumnos han aprobado matemáticas.
    * 75 alumnos han aprobado física.
    * 40 alumnos han aprobado las dos asignaturas.

24. En una escuela con 120 alumnos se practican tres deportes: atletismo, baloncesto y fútbol. Se sabe que 15 alumnos practican los tres deportes, 23 alumnos el fútbol y el baloncesto; 26 alumnos fútbol y atletismo; 16 alumnos atletismo y baloncesto; 61 alumnos fútbol; 64 baloncesto y 37 atletismo. ¿Cuántos alumnos no practican ningún deporte?

25. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacios?:

    $A=\{x \mid x \neq x\}$

    $B=\{x \mid x^2 = 9 \text{ y } 2x = 4\}$

    $C=\{x \mid x - x = 0\}$

26. Dado un conjunto que se expresa por medio de una definición, generalmente añadiéndole un adjetivo a la definición, se consigue un subconjunto del conjunto inicial. Por ejemplo, “los libros de una estantería”, o “los libros rojos de una estantería”; el segundo es un subconjunto del primero. Pon otros dos ejemplos.

1.d. Evolución de la Enseñanza de las Matemáticas. El currículum de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma Vasca.

Como indica Kilpatrick **(1)**, las raíces de la educación matemática, como un campo más de la actividad humana, se remontan a varios miles de años:

* Ya los escribas sumerios (*) del 3.000 a.C. habían sistematizado las matemáticas enseñadas en las escuelas y habían desarrollado métodos para enseñar el valor posicional, las tablas para calcular y las fracciones sexagesimales.

* Sócrates (siglo V a.C.), según se relata en el "Menón" de Platón **(2)**, empleó el método de descubrimiento a través de preguntas a un joven esclavo, para hacerle ver que el área de un cuadrado construido sobre la diagonal de otro, es doble que la de éste.

* A comienzos del XIX, Pestalozzi, Fröbel y Herbart **(3)**, entre otros, proponen métodos de enseñanza basados en experiencias concretas y metas educativas relativas al desarrollo de facultades mentales que influyeran en la enseñanza de las matemáticas, desde preescolar hasta secundaria.

* En 1821, en EE.UU., Colburn publica un texto de aritmética, basado en la pedagogía de Pestalozzi, que permitía el descubrimiento de reglas por inducción sobre ejemplos concretos.

Continúa Kilpatrick **(4)** diciendo que, sin embargo, fue sólo desde finales del XIX cuando diferentes países empezaron a regular la preparación de los profesores de matemáticas y cuando la educación matemática surge como un campo profesional.

En Francia, la Escuela Normal Superior, establecida en 1810 por Napoleón, se mantuvo, sin apenas cambios, hasta la 2ª guerra mundial. Los profesores de enseñanza primaria de muchos países se forman en instituciones pedagógicas diferenciadas, llamadas colleges, institutos, seminarios o escuelas normales, que eran centros de enseñanza secundaria, no de enseñanza superior. El término "normal" procede del francés, con el significado de modelo o regla (norma); los futuros profesores recibían reglas para enseñar.

En EE.UU., sin embargo, las escuelas normales comenzaron a transformarse en centros de profesores, en un movimiento acelerado, a partir de 1920.

A medida que en los diferentes países aparecen sistemas escolares nacionales y se universalizan las enseñanzas primaria y secundaria, se necesita una mayor provisión de profesorado cualificado. En diferentes países, la educación matemática llegó a ser reconocida como materia universitaria.

La primera sociedad de profesores de Matemáticas se fundó en Gran Bretaña en 1871. A ella pertenecían maestros y colaboraban profesores de Universidad. Su objetivo era explorar otros enfoques de la Geometría diferentes al de Euclides.

(1) *KILPATRICK,J. y otros.- "Educación matemática e investigación". Síntesis. Madrid, 1994. Pág. 35.*

(*) *Los sumerios habitaron Mesopotamia (la Babilonia bíblica), región que abarcaba lo que en la actualidad es el E de Siria, SE de Turquía y la mayor parte de Irak. Situada entre los ríos Tigris y Eúfrates, su nombre, de origen griego, significa "entre ríos". (mesos = medio; patamnís = río).*

(2) *PLATON.- "Obras completas". Medina y Navarro ed. Madrid, 1871. Pág. 307 y sig.*

(3) *Pestalozzi, Johann Heinrich (1746/1827). Reformador suizo, cuyas ideas sentaron las bases de la moderna educación elemental. Propone que el niño sea guiado para aprender a través de la práctica y la observación. Defendía un desarrollo integral del alumno más que la implantación de conocimientos.*

Fröbel, Friedrich (1782/1852). Educador alemán creador de los jardines de infancia ("kindergarten"). Trabajó con Pestalozzi de 1806 a 1810. Sus ideas se centraban en animar el desarrollo natural de los niños a través de la actividad y del juego.

Herbart, Johann Friedrich (1776/1841). Creía que la pedagogía debía basarse en la psicología (para tener un conocimiento suficiente de la mente) y en la ética (como la base que determina los fines sociales de la educación).

(4) *KILPATRICK,J. y otros.- "Educación matemática e investigación". Síntesis. Madrid, 1994. Págs. 17 y siguientes.*

En varios países (EE.UU., Italia, Francia,...), aparecen asociaciones semejantes entre esa época y comienzos de siglo. La expansión de los sistemas educativos en Europa y EE.UU., así como la aparición de nuevas tecnologías, que piden otros planteamientos educativos, conducen a la creación de una Comisión Internacional sobre Educación Matemática, constituida en Roma en 1908 y que llevó a cabo un importante trabajo hasta el comienzo de la 1ª Guerra Mundial (1914), en que casi desapareció. El trabajo de esta 1ª época parece ser que fue más encaminado a estudiar la forma de presentar la materia, teniendo poca consideración los aspectos psicológicos del aprendizaje de las Matemáticas.

Tras la 2ª Guerra Mundial, la enseñanza secundaria se va universalizando; ello plantea nuevos problemas en la enseñanza de las Matemáticas, que requieren la colaboración de profesionales ajenos a este campo, como psicólogos y pedagogos. En esta época merecen ser destacados dos autores: por una parte, Piaget (etapas de desarrollo intelectual, construcción de la matemática a partir de experiencias concretas, ...); por otra parte, el matrimonio van Hiele (niveles para el aprendizaje de la Geometría).

En 1950 se crea una Comisión Internacional para el estudio de la mejora de la enseñanza de las Matemáticas, cuyos fundadores son el matemático francés Choquet, el psicólogo suizo Piaget y el pedagogo británico Gattegno. La Comisión publicó dos libros: "La Enseñanza de las Matemáticas" (1955) (Aguilar. Madrid, 1965) y "El Material para la Enseñanza de las Matemáticas" (1958).

En 1959, la OCDE organizó un Seminario de 10 días que se conoce como el "Coloquio de Royaumont", por la ciudad francesa en que tuvo lugar y en el que el matemático francés J. Dieudonné pronunció una conferencia considerada por muchos determinante en la enseñanza de las Matemáticas, pues en ella esbozó un nuevo programa para secundaria, basado en el estructuralismo bourbakista **(1)** y en la que lanzó su muy famoso e histórico grito de "¡Abajo Euclides!".

En 1960 se organiza, también por la OCDE, una reunión en Dubrovnik (Yugoslavia), en la que se elaboraron un programa y unas líneas metodológicas para secundaria, recogidos en la publicación "Programa Moderno de Matemáticas", de la OCDE.

Durante los años 1960/70, las "Matemáticas Modernas" se extenderán por todos los países. Resulta curiosa la siguiente cita, de 1978, tomada de la revista “Cambio 16” **(2)**:

"... los periodistas argentinos se han hecho eco de un tema soprendente: la discusión sobre si las matemáticas modernas son o no subversivas.

En la provincia de Córdoba, las autoridades académicas han declarado que, efectivamente, son subversivas, porque a través de ellas se reniega de los postulados de la lógica formal y se abre un camino peligroso para la penetración de la subversión.

Además de calificar de típicamente marxista el vocablo "vector", las autoridades académicas sostienen que desde que el matemático Dieudonné lanzó el grito: "¡Abajo Euclides!", las matemáticas tienen riesgo de convertirse en un arma peligrosa al servicio de las ideas más revolucionarias y subversivas.

El novelista Ernesto Sábato ha terciado en la polémica para señalar que "renegar de las matemáticas modernas sería volver, en todos los órdenes, e incluso en el militar, al tiempo de las lanzas y de los sables, dado que equivaldría a renegar de los misiles y computadores"".

(*“Cambio 16”. Nº 366. 10-12-1978*).

Sin embargo, en el periodo 1965/70, posteriores al fracaso que supuso que la Unión Soviética lanzara el primer vuelo tripulado al espacio (Yuri Gagarin, 12-4-1961; John Glenn, 20-2-1962), en EE.UU. comienza un proceso de alejamiento de la matemática moderna y se vuelve a una lista de contenidos a aprender en la escuela.

En 1970 aparece el libro de Morris Kline "El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?".

(1) *“Nicolas Bourbaki” era el pseudónimo de un grupo de matemáticos, sobre todo franceses, aparecido a mediados de los años 30 del siglo XX, que tomó sobre sí la ingente tarea de fundamentar todas las matemáticas sobre la base de la teoría de conjuntos*.

(2) *Revista española que tuvo un destacado papel en la transición política de los años 70 del siglo XX*.

En 1980 se hace en EE.UU. una 1ª encuesta a escala nacional para determinar el nivel matemático de los alumnos (en secundaria). Se proponen varios problemas a 70.000 alumnos. Uno de ellos, el llamado "problema de la limonada", se hizo famoso:

"La limonada cuesta 0,95 €/botella. La botella es de 56 cm3. En la feria de la escuela, Roberto vendió vasos de 8 cm3 a 0,20 €/unidad. ¿Cuánto dinero ganó la escuela por botella?".

Los resultados fueron decepcionantes:

		Previsión	Realidad
70.000 alumnos.	60% de 12/13 años	50% éxito	11%
	40% de 16/17 años	80% éxito	29%

Otro problema: "La relación entre hombres y mujeres era de 4M=5H. Si había 20 mujeres, ¿cuántos hombres había?". (Los resultados fueron también malos).

En 1982, en el País de Gales, el parlamento pide a Cockroft que haga su informe **(1)** sobre la situación de la enseñanza de las matemáticas en Inglaterra y Gales.

Como ejemplo, se pueden citar los párrafos 34 y 243 del libro de Cockroft:

34. "Lo más importante de todo es la necesidad de tener la suficiente seguridad como para hacer un uso efectivo de cualquier destreza y conocimiento matemático que se posea, ya sea poco o mucho".

243. "La enseñanza de las Matemáticas, en todos los niveles, debe incluir:

- Exposición por parte del profesor.
- Discusión entre le profesor y los alumnos, y entre estos últimos.
- Trabajo práctico apropiado.
- Consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas.
- Resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las Matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana.
- Realización de trabajos de investigación.

Al establecer esta lista, somos conscientes de que no estamos diciendo nada que no se haya afirmado muchas veces con anterioridad. De hecho, han aparecido ya, por lo menos implícitamente, en diversas informaciones oficiales, publicaciones del Departamento de Educación y Ciencia, ponencias de la Inspección Escolar, y revistas y publicaciones de asociaciones matemáticas profesionales. Con todo, somos también conscientes de que, aun cuando hay aulas en las que la enseñanza incluye todos los elementos aludidos, quedan muchas otras en las que no es así".

En los años posteriores, la preocupación en los diferentes países se centró en dos aspectos principales:

1. Acomodar la enseñanza de la Matemática al desarrollo psicológico de los alumnos. Aparición de gran variedad de material didáctico.

2. Acomodar los contenidos al importante desarrollo habido, tanto en el terreno tecnológico como en los medios de comunicación (Matemática más instrumental que formal). Abandono definitivo de la llamada "matemática moderna".

Así mismo, se ha dado un gran aumento del número de congresos y sociedades de profesores de Matemáticas. La "didáctica de la matemática" aparece como un área de conocimiento independiente.

(1) *COCKROFT,D.- "Las matemáticas sí cuentan". MEC. Madrid, 1985*.

En cuanto a España, se pueden señalar, esquemáticamente, algunos hechos y fechas reseñables: **(1)**.

Empecemos por el siguiente cuadro que muestra el porcentaje de analfabetismo en diferentes años **(2)**:

INDICE DE LA POBLACION QUE SABE LEER Y ESCRIBIR (%)

1803	5,96	1900	33,4
1841	9,21	1910	49,4
1860	19,27	1920	56,8
1877	28,49	1930	67,6
1887	28,49	1950	84,4

Se ve cómo, hasta bien entrado el siglo XX, los índices de analfabetismo eran bastante elevados, no existiendo un Ministerio de Educación hasta el año 1900 cuando, por ejemplo, Francia lo tenía desde 1828.

17-7-1857: Las Cortes aprueban la Ley de Bases autorizando al gobierno a elaborar una Ley de Instrucción Pública.

9-9-1857: Reinando Isabel II, se promulga dicha Ley, que será conocida como Ley Moyano, por el ministro de fomento que la elaboró, Claudio Moyano. Veamos algunas de sus características, con especial incidencia en lo que se refiere a las matemáticas:

* Divide la primera enseñanza en elemental y superior.

- La elemental comprende ... "principios de aritmética, con el sistema legal de medidas, pesos y monedas".

- La superior, "además de una prudente (sic!) ampliación" de las matemáticas de la enseñanza elemental, "principios de geometría, dibujo lineal y agrimensura". Estos estudios, en el caso de las niñas, se omitían, reemplazándose por "labores propias del sexo" (sic!) y "elementos de dibujo aplicado a las mismas labores".

* La 1ª enseñanza elemental era obligatoria desde los 6 a los 9 años, "a no ser que se les proporcione suficientemente esta clase de instrucción en sus casas o en establecimientos particulares".

* "Se dará gratuitamente en las Escuelas Públicas a los niños cuyos padres, tutores o encargados no puedan pagarla, mediante certificación expedida al efecto por el respectivo cura párroco y visada por el alcalde del pueblo".

* "Los estudios de 1ª enseñanza no están sujetos a determinado número de cursos; las lecciones durarán todo el año, disminuyéndose en la canícula el número de horas de clase".

* En cuanto a la 2ª enseñanza, se divide en estudios generales y estudios de aplicación a las profesiones industriales. Los primeros se dividían, a su vez, en dos periodos: un primero de 2 años y un segundo de 4.
- En el 1º, había "ejercicios de lectura, escritura, aritmética y dibujo".
- En el 2º, "elementos de aritmética, álgebra y geometría"; ... "elementos de psicología y lógica"
- En los estudios de aplicación aparecía la "aritmética mercantil".

* "Para principiar los estudios generales de 2ª enseñanza, se necesita haber cumplido 9 años y aprobar un examen".

* Para pasar a los estudios de aplicación, 10 años y examen.

(1) *Se pueden consultar, entre otros:*
KILPATRICK,J./RICO,L./SIERRA,M.- "Educación matemática e investigación". Síntesis. Madrid, 1994.
ANÓNIMO.- "Compilación legislativa de instrucción pública (Edición oficial)". Vol. I.
(2) *SIMÓN SEGURA, F.- "Manual de historia económica mundial y de España". (Pág. 396).*

* No llegaron a publicarse programas, quedando éstos bajo la responsabilidad de editores y especialistas, que editaban manuales basados en la tradición y que actualizaban según criterios propios.

Por ejemplo, "el programa del libro "Aritmética de niños para uso de las escuelas del Reino", editado en 1813, se mantiene, básicamente, en la mayor parte de los libros de Aritmética editados con anterioridad a 1931" (Kilpatrick et Al. Pág. 105).

Sobre el ambiente en las aulas de matemáticas a principios del siglo XX, se puede leer la siguiente cita:

"*El padre Pinillas es el profesor de Matemáticas. Pero ha aprendido las Matemáticas cuando yo. Cuando un cura(...) está a punto de cantar misa o acaba de cantarla le mandan a uno de los colegios y allí empieza a dar clase a los párvulos para enseñar a leer. Cuando ya ha terminado sus estudios de la carrera de cura, se pone a estudiar para enseñar otras cosas, y a medida que aprende le van pasando de clase hasta que llega a las últimas. Cuando al padre Pinillas le hicieron profesor de Matemáticas estudiaba en su cuarto los mismos libros que nosotros para poder darnos la lección. Los curas no necesitan ser maestros para enseñar. Así que el rector manda a un cura que se encargue de la clase de Matemáticas o de otra, y él se las compone como puede. Por esto, una vez ocurrió que yo, que tengo mucha facilidad para las matemáticas, sabía resolver un problema que él no podía resolver. Entonces le dio mucha rabia y estuvo enfadado conmigo cuatro o cinco días*". (Kilpatrick et Al. Pág. 105).

<u>Romanones (1901)</u>:

* Establece que el Estado pague el sueldo de los maestros.
* Divide la enseñanza primaria en párvulos, elemental y superior.
* Obligatoriedad de la enseñanza elemental y superior para todos los españoles.
* Aumenta en 3 años la escolaridad obligatoria (de 9 a 12).
* Establece un nuevo plan de estudios, de carácter enciclopédico, con 12 materias distintas, entre las que figuran "aritmética" y "nociones de geometría".

El "Plan Romanones" estuvo vigente hasta el final de la II República y, al igual que pasó con la "Ley Moyano", los programas no llegaron a publicarse.

<u>II República</u>: (Puede verse la pág. 113 del libro citado anteriormente)

En 1931, aparece un plan de estudios para la formación de maestros, que eleva los estudios de magisterio al nivel universitario. En él, aparece, en primer curso, una asignatura titulada "metodología de las matemáticas", con 2 partes: una 1ª de estudios de psicología del niño respecto al aprendizaje de las matemáticas y cuestiones de metodología. Una 2ª, dedicada al estudio de una didáctica específica y de los programas escolares; aparecían, además, cuestiones de historia de las matemáticas.

En este plan también se estableció un sistema de prácticas en escuelas anejas.

<u>Plan 1953</u>: (Reformado en 1957).

Primaria: 4 cursos de enseñanza elemental (6/10 años)
2 de perfeccionamiento (10/12 años) (Se empezaba un camino diferente al del bachillerato).
3 de iniciación profesional (12/15 años)

Bachillerato de 6 cursos: 4 de elemental (15% de matemáticas por curso).
2 de superior (letras y ciencias) (25% de mate. en 5º y 12% en 6º).
Preu (Preuniversitario)

- Aumentan los contenidos de matemáticas.
- Se defiende la repetición, ejercicios constantes de los mecanismos de cálculo, aprendizaje escalonado.
- Se dan normas sobre enunciados de problemas y su resolución.

Resta:

11. $\frac{1}{3}$ de $\frac{15}{24}$ 17. $\frac{2}{25}$ de $\frac{3}{5}$ 23. $6\frac{1}{2}$ de $7\frac{1}{4}$

12. $\frac{9}{20}$ de $\frac{14}{15}$ 18. $\frac{3}{10}$ de $\frac{20}{30}$ 24. $\frac{1}{30}$ de $\frac{7}{30}$

13. $2\frac{5}{84}$ de $8\frac{20}{36}$ 19. $5\frac{3}{4}$ de $8\frac{1}{2}$ 25. $\frac{3}{11}$ de $\frac{21}{22}$

14. $3\frac{5}{9}$ de $8\frac{1}{8}$ 20. $\frac{1}{7}$ de $\frac{1}{6}$ 26. $\frac{3}{7}$ de $\frac{13}{14}$

15. $\frac{2}{3}$ de $\frac{8}{9}$ 21. $\frac{3}{5}$ de $\frac{29}{30}$ 27. $15\frac{3}{10}$ de $20\frac{7}{8}$

16. $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ 22. $8\frac{2}{3}$ de $9\frac{3}{8}$ 28. $6\frac{1}{4}$ de $7\frac{1}{3}$

Efectúa:

29. $\frac{3}{4} \times \frac{16}{27}$ 38. $2\frac{5}{12} \times 3$ 47. $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$

30. $\frac{14}{15} \times \frac{9}{28}$ 39. $16 \times 7\frac{2}{3}$ 48. $\frac{7}{15} : \frac{21}{5}$

31. $\frac{6}{11} \times \frac{22}{9}$ 40. $8 \times 3\frac{5}{12}$ 49. $\frac{8}{9} : \frac{40}{27}$

32. $\frac{8}{25} \times \frac{15}{16}$ 41. $10 \times 1\frac{3}{4}$ 50. $6\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$

33. $\frac{28}{27} \times \frac{18}{35}$ 42. $25 \times 3\frac{4}{15}$ 51. $8\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$

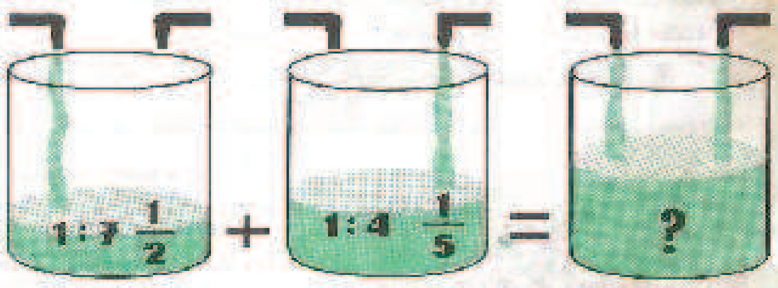
34. $\frac{42}{126} \times \frac{5}{63}$ 43. $3\frac{1}{2} \times 4\frac{2}{3}$ 52. $2\frac{1}{4} : \frac{5}{6}$

Página del libro de Matemáticas de 2º de Bachillerato (equivalente al actual 6º de Primaria), de la editorial SM. Año 1966. Autores: MARCOS,C./MARTÍNEZ,J.

... pesetas. ¿Cuánto cuesta cada billete?

36. La longitud de la circunferencia es aproximadamente los $\frac{22}{7}$ de su diámetro. Hallar el diámetro de una circunferencia que tiene 1584 m de longitud.

37. Una fuente llena un estanque en $7\frac{1}{2}$ horas, y otra en $4\frac{1}{5}$ horas. ¿Qué parte del depósito llena cada una en una hora? Manando las dos fuentes, ¿qué parte del estanque llenarán en una hora? ¿Cuánto tardarán las dos fuentes en llenar el estanque?



38. Un obrero hace $5\frac{2}{3}$ m de una obra cada día. ¿Cuánto tardará en hacer 34 metros?

39. ¿Cuántas veces está contenido medio día en $7\frac{1}{2}$ días?

40. ¿Cuántas veces $7\frac{1}{2}$ mm caben en 3 dm?

41. ¿Cuántas veces 33 toneladas contiene $1\frac{5}{8}$ toneladas?

42. La circunferencia de una rueda mide $2\frac{2}{3}$ metros; ¿cuántas vueltas dará para recorrer 42 m?

Página del libro de Matemáticas de 1º de Bachillerato (equivalente al actual 5º de Primaria), de la editorial SM. Año 1966. Autores: MARCOS,C./MARTÍNEZ,J. Aparece un problema muy famoso de la época: el llenado de depósitos, mencionado por A. Sopeña en "El florido pensil".

Ley General de Educación de 1970: ("Ley Villar Palasí").

* Preescolar: de 2 a 6 años. No obligatorio.

* EGB (Enseñanza General Básica): de 6 a 14 años. Obligatoria y gratuita. Dividida en 1ª y 2ª etapa.

* Bachillerato (BUP, Bachillerato Unificado Polivalente): de 14 a 17 años. Unificado (conducía a un título único) y polivalente (pues comprendía, junto a las materias comunes y las optativas, una actividad técnico-profesional).

* COU. (Curso de Orientación Universitaria)

- Extensión a toda la población y gratuidad -----> Creación de nuevos centros y dotación suficiente de profesorado.

- Matemáticas: 1ª etapa de EGB: introducción de elementos de la teoría intuitiva de conjuntos para llegar a la expresión numérica. 2ª etapa de EGB: Profundización en el formalismo matemático.

- Se pretendía una ambiciosa reforma, que se correspondió con una reforma en la formación inicial de los maestros en las escuelas de magisterio. La falta de criterios propios y de especialistas en matemáticas llevaron a un caos metodológico.

- Contenidos: prioridad a la teoría de conjuntos y estructuras algebraicas. Abandono del cálculo y de la geometría intuitiva.

Programas renovados (1981/1982): Los contenidos se organizan en bloques temáticos (conjuntos y correspondencias; números y operaciones; medida; geometría y topología), con niveles mínimos y actividades sugeridas, no obligatorias.

Tratan de seguir una línea piagetiana:

Ciclo inicial (6/8 años) ----> paso del pensamiento prelógico a las operaciones concretas.
Ciclo medio (8/11 años) ---> periodo de las operaciones concretas.
Ciclo superior (11/14 años) ---> pensamiento hipotético-deductivo.

L.O.G.S.E. (1990).

La LOGSE (Ley de Ordenación General del Sistema Educativo), Ley Orgánica **(*)** 1/1990, de 3 de Octubre, BOE de 4 de Octubre de 1990, supuso la sustitución del diseño educativo vigente, que databa del año 1970. Entre sus innovaciones se pueden destacar:

1. Distingue dos tipos de enseñanza: de régimen especial → Enseñanzas artísticas
→ Enseñanzas de idiomas.

de régimen general → Educ. infantil
→ Educ. primaria.
→ Educ. secundaria → E.S.O.
→ Bachillerato
→ F.P. de grado medio.
→ F.P. de grado superior.
→ Educ. universitaria. Con leyes específicas.

2. Derecho a permanecer, cursando la enseñanza básica (Primaria y ESO) hasta los 18 años.

(*) *El art. 81 de la Constitución define como Leyes Orgánicas "las relativas al desarrollo de los derechos fundamentales y de las libertades públicas, las que aprueben los Estatutos de Autonomía y el régimen electoral general y las demás previstas en la Constitución". Su aprobación, modificación o derogación exigirá mayoría absoluta del Congreso, en una votación final sobre el conjunto del proyecto*.

3. Educ. infantil → carácter voluntario.
→ 2 ciclos → menos de 3 años.
→ de 3 a 6 años.

4. Educ. primaria → 6 cursos académicos.
→ Finalidad (en matemáticas): "Aplicar a las situaciones de su vida cotidiana operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales" (Art. 13.c)
→ 3 ciclos de 2 cursos cada uno.
→Se organiza en áreas, "obligatorias y con carácter global e integrador". Una de ellas es "Matemáticas" (art. 14).
→Impartida por maestros que tendrán competencia en todas las áreas de este nivel. Música, educ. física e idiomas extranjeros impartidas por maestros con la especialización correspondiente (art. 16)

5. Número máximo de alumnos para la educ. primaria: 25 (Disposición adicional 3ª-3-a)

Con posterioridad a la LOGSE, se redactan unos documentos que desembocan en los DCB (Diseño Curricular Base), que, a su vez, desembocan en el DEM (Decreto de Enseñanzas Mínimas), de 1991, que regula la formación común mínima de todos los alumnos en el territorio nacional y que, según el artículo 4.2. de la LOGSE, "los contenidos básicos de las enseñanzas mínimas, en ningún caso requerirán más del 55% de los horarios escolares para las Comunidades Autónomas que tengan lengua oficial distinta del castellano".

A partir de ahí, cada Autonomía emite su propio DCB (1992), que incluye una parte de cumplimiento obligatorio (DEM) y otra de carácter orientativo.

Posteriormente, aparece el DDC (Decreto de Desarrollo Curricular), en 1994, con carácter obligatorio dentro de la Comunidad Autónoma y que marca el mínimo exigido a todos los Centros de esa Comunidad, aunque, posteriormente, cada Centro pueda añadir otros contenidos.

En lo que respecta a la enseñanza de la matemática, en el DCB de educación primaria, aparecen 4 bloques de contenido:

1. Números y operaciones: significados y estrategias.
2. La medida. Información cuantitativa sobre los objetos y el tiempo.
3. Formas geométricas y situación en el espacio.
4. Organización de la información: gráficos e iniciación a la estadística.

En 2006 se publica una nueva ley (L.O.E., Ley Orgánica de Educación), en la que se introducen los conceptos de competencia, de competencias básicas y de evaluaciones diagnósticas (ver anexo).

En cuanto al llamado "**curriculum vasco**" (BOPV. Suplemento al nº 218. Martes 13/11/2007. También puede consultarse en: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-2459/es/contenidos/informacion/dif10_curriculum_berria/es_5495/adjuntos/iv_eranskina_05_matematika.pdf), desarrolla la LOE y establece, para la educación primaria, los siguientes bloques de contenido, repetidos para cada uno de los tres ciclos:

1. Números y operaciones.
2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes.
3. Geometría.
4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.
5. Resolución de problemas.
6. Contenidos comunes.

Como puede verse, la novedad principal es la aparición de dos nuevos bloques de contenido. Respecto al primero de ellos, se afirma que "la resolución de problemas actúa como eje central, que recorre transversalmente todos los bloques y, por ello, hay que dedicarle una especial atención". En cuanto al bloque de contenidos comunes, "hace referencia expresa, entre otros, a los aspectos relativos al propio lenguaje matemático, a la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación, y a los contenidos de tipo actitudinal".

A continuación, como anexo, se presentan algunos hechos destacables de este decreto que establece el curriculum de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma del País Vasco.

<u>ANEXO</u>.

Educación, Universidades e Investigación

DECRETO 175/2007, de 16 de octubre, por el que se establece el currículo de la Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco.

Artículo 7.– Competencias básicas.

1.– Se entiende por competencias básicas la combinación integrada de conocimientos, destrezas y habilidades, actitudes y valores adecuados al contexto, que precisa todo el alumnado que cursa la Educación Básica y que debe alcanzar para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa y la integración social.
2.– El currículo de la Educación Básica incluye las siguientes competencias básicas:
a) Competencia en cultura científica, tecnológica y de la salud.
b) Competencia para aprender a aprender.
c) Competencia matemática.
d) Competencia en comunicación lingüística.
e) Competencia en el tratamiento de la información y competencia digital.
f) Competencia social y ciudadana.
g) Competencia en cultura humanística y artística.
h) Competencia para la autonomía e iniciativa personal.
3.– Las competencias básicas se adquieren mediante el trabajo en las distintas áreas de conocimiento y materias, así como en todo tipo de experiencias que tienen lugar en contextos tanto escolares como extraescolares, y a través de la organización y funcionamiento de los centros, las actividades docentes, las formas de relación que se establezcan entre los integrantes de la comunidad educativa y las actividades complementarias y extraescolares que se programen.

Artículo 9.– Currículo.

1.– A los efectos de lo dispuesto en este Decreto, se entiende por currículo las competencias básicas, objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación que regulan las áreas y materias de la Educación Básica.

Artículo 36.– Evaluación de diagnóstico.

1.– Al menos al finalizar el segundo ciclo de Educación Primaria y el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria se realizará una evaluación de diagnóstico. No tendrá efectos académicos sino carácter formativo y orientador para los centros e informativo para las familias y para el conjunto de la comunidad educativa.
2.– El Instituto Vasco de Evaluación e Investigación educativa - Irakas-Sistema Ebaluatu eta Ikertzeko Erakundea proporcionará a los centros los modelos y apoyos pertinentes, a fin de que todos ellos puedan realizar de modo adecuado estas evaluaciones.
3.– Los centros y la Administración Educativa tendrán en cuenta la información proveniente de estas evaluaciones para, entre otros fines, organizar las medidas y programas necesarios dirigidos a mejorar la atención del alumnado y a garantizar que alcance las correspondientes competencias básicas. Así mismo, estos resultados permitirán, junto con la evaluación de los procesos de enseñanza y la práctica docente, analizar, valorar y reorientar, si procede, las actuaciones desarrolladas en los cursos previos.

MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN

La Matemática es la ciencia que se ocupa de describir y analizar las cantidades, el espacio y las formas, los cambios y relaciones, así como la incertidumbre. Si miramos a nuestro alrededor vemos que esos componentes están presentes en todos los aspectos de la vida de las personas, en su trabajo, en su quehacer diario, en los medios de comunicación, etc.

Las matemáticas, tanto histórica como socialmente, forman parte de nuestra cultura y los individuos deben ser capaces de apreciarlas y comprenderlas. Es evidente, que en nuestra sociedad, dentro de los distintos ámbitos profesionales, es preciso un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas que las que se manejaban hace tan sólo unos años. La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo; en la información que se maneja cada vez aparecen con más frecuencia tablas, gráficos y fórmulas que demandan conocimientos matemáticos para su correcta interpretación. Por ello, los ciudadanos deben estar preparados para adaptarse con eficacia a los continuos cambios que se generan.

Presentan unas características que se deben destacar para comprenderlas y saber cómo aplicarlas.

Las matemáticas son universales: Los resultados que se obtienen son aceptados por toda la comunidad internacional, lo que no quiere decir que los métodos que se han utilizado históricamente sean iguales: lo que sí son universales son las actividades, muchas entroncadas con la cultura de los pueblos, que han impulsado el conocimiento matemático. De esta manera hablamos de: contar, localizar, medir, explicar, jugar, etc.

La Matemática es una ciencia viva. Su conocimiento no está fosilizado, además de una herencia recibida es una ciencia que hay que construir. Un reto interesante es el contextualizar adecuadamente los nuevos contenidos que se presentan.

Las matemáticas son útiles. Miremos donde miremos, las matemáticas están ahí, las veamos o no. Se utilizan en la ciencia, en la tecnología, la comunicación, la economía y tantos otros campos. Son útiles porque nos sirven para reconocer, interpretar y resolver los problemas que aparecen en la vida cotidiana. Además de proporcionarnos un poderoso lenguaje con el que podemos comunicarnos con precisión. Dentro de estas utilidades es necesario resaltar su importancia en relación con los medios de comunicación en los que los análisis cuantitativos (datos estadísticos, precios, índices diversos, hipotecas, etc.) aparecen continuamente en todo tipo de información.

Las matemáticas son una ciencia de patrones y relaciones. Entender y utilizar esos patrones constituye una gran parte de la habilidad o competencia matemática. A medida que se relacionen ideas matemáticas con experiencias cotidianas y situaciones del mundo real, nos daremos cuenta que esas ideas son verdaderamente útiles y poderosas.

Las matemáticas y los problemas. La resolución de problemas es una cuestión de gran importancia para el avance de las matemáticas y también para su comprensión y aprendizaje. El saber hacer, en Matemáticas, tiene mucho que ver con la habilidad de resolver problemas, de encontrar pruebas, de criticar argumentos, de usar el lenguaje matemático con cierta fluidez, de reconocer conceptos matemáticos en situaciones concretas, de saber aguantar una determinada dosis de ansiedad, pero también de estar dispuesto a disfrutar con el camino emprendido. La capacidad para resolver problemas es una de las habilidades básicas que los estudiantes deben tener a lo largo de su vida, y deberán usarla frecuentemente cuando dejen la escuela.

Las matemáticas y las tecnologías de la información y la comunicación. Tanto la investigación como la experiencia apoyan el potencial que tiene el uso adecuado e inteligente de las calculadoras y los ordenadores. Su uso mejora el desarrollo cognitivo en aspectos que incluyen: sentido numérico, desarrollo conceptual, resolución de problemas y visualización. En definitiva, constituyen una herramienta útil para la enseñanza de las matemáticas.

Además, son clave en la creación del pensamiento racional, pues es el área de conocimiento mejor abonada para el desarrollo del razonamiento que siempre está en la base de cualquier actividad matemática. Necesario para el proceso de aprendizaje de los contenidos y estrategias propias de las matemáticas y, además, esencial para adquirir y desarrollar estrategias generales de aprendizaje. Dichas estrategias, referidas a cómo se aprende, son las que garantizarán un aprendizaje a lo largo de toda la vida cuando sea necesario cambiar de actividad profesional o adquirir nuevos conocimientos. Dentro de estas estrategias para toda la vida podemos citar como la más importante las referidas a la Resolución de Problemas.

Las matemáticas poseen un papel no solo instrumental o aplicativo, sino también formativo. Instrumental por su relación con otras disciplinas que necesitan de ella para crear, interpretar o analizar los modelos explicativos de los fenómenos que estudian. Se trata por tanto de un instrumento imprescindible con el que acceder a las distintas informaciones (numérica, gráfica, estadística, geométrica, relativa al azar, etc.) presentes en un mundo en permanente evolución y cada vez más tecnificado. Formativo, pues contribuye al desarrollo intelectual del alumnado, fomentando capacidades tales como la abstracción, la generalización, el pensamiento reflexivo, el razonamiento lógico, etc. Sin olvidar el necesario dominio algorítmico y la memorización de resultados y procedimientos básicos. El trabajo adecuado en esta línea, contribuye a la creación de estructuras mentales y hábitos de trabajo, cuya utilidad e importancia no se limita al ámbito de las matemáticas

Concretando las matemáticas a la Educación Primaria, conviene señalar algunas características interesantes para su desarrollo:

- Preponderancia de la componente intuitiva frente a la abstracción y formalización, así como el uso de estrategias personales frente a las “más académicas”.
- Utilización de distintos ámbitos de experiencias del alumnado como fuente de actividades matemáticas.
- Utilización de materiales manipulables e instrumentos de medida.
- Uso racional de la calculadora y el ordenador.
- Importancia del trabajo en grupo como base del aprendizaje.
- Desarrollo de todos los contenidos desde el primer curso, incidiendo especialmente en la Resolución de Problemas y los contenidos geométricos en consonancia con el desarrollo de los sentidos.
- Fomentar el gusto y la necesidad de un lenguaje claro y adecuado para comunicar sus ideas, razonamientos, argumentos, etc.

Los contenidos se han distribuido también por Ciclos, agrupados en seis bloques: Números y Operaciones; Medida; Geometría; Tratamiento de la Información, Azar y Probabilidad; Resolución de Problemas y Contenidos comunes. La enseñanza de las Matemáticas atenderá a esta configuración cíclica de los contenidos, de manera que estén siempre relacionados y se puedan construir unos sobre otros. La resolución de problemas actúa como eje central, que recorre transversalmente todos los bloques y por ello hay que dedicarle una especial atención.

En el bloque relativo a Números y Operaciones se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones. Es importante resaltar que para lograr esta competencia no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito; se precisa también desarrollar estrategias de cálculo mental y aproximativo, y actuar con confianza ante los números y las cantidades; utilizarlos siempre que sea pertinente e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos.

Primer ciclo

Contenidos

Bloque 1. Números y operaciones

1. Números naturales y alfabetización numérica
– Significado y utilidad de los números en la vida cotidiana (contar, medir, ordenar, expresar cantidades, comprar, jugar…comunicarnos).
– La comunicación y los números. Interpretación de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana (escaparates con precios, folletos publicitarios...).
– Sistema de numeración decimal. Dominio funcional de las reglas de formación de los números y del valor de posición de números hasta tres cifras.
– Utilización de los números en situaciones reales: lectura y escritura, ordenación, comparación, representación en la recta numérica, descomposición, redondeo y utilización en juegos.
– Números ordinales. Utilización en contextos reales.

2. Operaciones
– Significado de las operaciones de sumar (situaciones de juntar o añadir) y restar (situaciones de separar o quitar) y su utilidad en la vida cotidiana. Iniciación a la multiplicación como suma de sumandos iguales y para calcular número de veces.
– Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo de sumas y restas.

3. Estrategias de cálculo
– Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos de sumas y restas: manipulación y recuento, utilización de los dedos, recta numérica, juegos…
– Calculo mental automático: construcción y memorización de las tablas de sumar y restar de hasta 10 más 10.
– Sentido numérico:
. Elaboración y utilización de estrategias personales y académicas de cálculo mental: descomposición y composición, sumar y/o restar 1, 10 y 100 a cualquier número, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas.
. Cálculo aproximado. Utilización de diferentes estrategias para estimar y redondear el resultado de un cálculo.
. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos mentales.
– Estrategias de cálculo escrito:
. Realización de algoritmos no académicos de sumas y restas, por medio de descomposiciones numéricas y otras estrategias personales.
. Cálculo de sumas utilizando el algoritmo académico.
. Cálculo de restas sin llevadas utilizando el algoritmo académico.
. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos escritos.

Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes

1. Significado y utilidad de la medición en la vida cotidiana (medidas corporales, tallas, objetos, recetas, recipientes…).
2. Reconocimiento e interpretación de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana relacionados con las medidas y sus magnitudes. Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y transmitir informaciones sobre sencillas mediciones.
3. Longitud, peso/masa y capacidad
– Comparación de objetos según longitud, peso/masa o capacidad, de manera directa o indirecta.
– Medición con instrumentos y estrategias no convencionales (pasos, pies, cuerdas, piedras, botes…), y convencionales (regla, metro, balanzas, recipientes). Construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones.
– Utilización de unidades usuales e instrumentos convencionales para medir objetos y distancias del entorno.

– Estimación de resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades...) en situaciones de la vida cotidiana.
– Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la realización de medidas exactas y aproximadas.
4. Medida del tiempo
– Unidades de medida del tiempo: el tiempo cíclico y los intervalos de tiempo (día, semana, mes, estaciones, año). Lectura del reloj, las horas enteras, las medias.
– Selección y utilización de la unidad apropiada para determinar la duración de un intervalo de tiempo.
5. Sistema monetario. Identificación del valor de las distintas monedas y billetes en relación a precios de artículos cotidianos.

Bloque 3. Geometría

1. La situación en el espacio, distancias y giros
– Descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia.
– Uso de vocabulario geométrico para describir itinerarios: líneas abiertas y cerradas; rectas y curvas.
– Interpretación y descripción verbal de croquis de itinerarios.
– Elaboración de croquis de itinerarios y realización de los mismos.
– Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre relaciones espaciales.
2. Formas planas y espaciales
– Las figuras y sus elementos. Identificación de figuras planas en objetos y espacios cotidianos.
– Identificación de los cuerpos geométricos en objetos familiares. Descripción de su forma, utilizando el vocabulario geométrico básico.
– Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos con criterios elementales.
– Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
3. Regularidades y simetrías
– Búsqueda de elementos de regularidad en figuras y cuerpos a partir de la manipulación de objetos. Simetrías corporales.

Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad

1. Gráficos y tablas
– Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos (diagrama de barras) y textos numéricos expresados en tablas de datos relativos a fenómenos cercanos.
– Técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos. Utilización en contextos familiares y cercanos. Técnicas elementales de observación. Tablas de datos.
2. Carácter aleatorio de algunas experiencias
– Acercamiento intuitivo a fenómenos aleatorios sencillos. Distinción entre lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización de algunas expresiones relacionadas con el azar.

Bloque 5. Resolución de problemas

1. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen la suma y la resta.
2. Resolución de diferentes tipos de problemas numéricos de una operación con sumas y restas, referidas a situaciones reales sencillas de cambio, combinación, igualación y comparación.
3. Elementos de un problema (enunciado, datos, pregunta, solución), y dificultades a superar (comprensión lingüística, datos numéricos, codificación y expresión matemáticas, resolución, comprobación de la solución, comunicación oral del proceso seguido).
4. Planteamientos y estrategias para comprender y resolver problemas de sumas y restas:
– Problemas orales, gráficos y escritos.
– Resolución en grupo, en parejas, individual.

– Resolución mental, con calculadora y con el algoritmo de la operación.
– Problemas con datos que sobran, que faltan, con varias soluciones…
– Invención de problemas y comunicación a los compañeros.
– Explicación oral del proceso seguido en la resolución de problemas.
5. Resolución de problemas referidos a situaciones abiertas e investigaciones matemáticas sencillas sobre números, cálculos, medidas y geometría.
6. Desarrollo de estrategias personales para resolver problemas e investigaciones.

Bloque 6: Contenidos comunes

– Precisión y claridad para expresar cantidades, relaciones numéricas, ordinales sencillos, comparaciones, clasificaciones, unidades de medida sencillas, orientación en el espacio, orientación en el tiempo…
– Utilización de un lenguaje adecuado para expresar situaciones aditivas sencillas.
– Símbolos y expresión matemática de operaciones de suma y resta.
– Recursos didácticos y tecnologías de la información y la comunicación
– Utilización de materiales manipulativos didácticos variados que faciliten la comprensión de los contenidos matemáticos: cartas, ábacos, escaparates, figuras geométricas…
– Calculadora. Pautas de uso. Utilización para la generación de series, composición y descomposición de números, para hacer cálculos, aprender estrategias mentales y resolver problemas.
– Utilización de recursos informáticos para la realización de actividades y la comprensión de contenidos matemáticos.
– Disposición favorable para conocer y utilizar diferentes contenidos matemáticos para obtener y expresar información, para la interpretación de mensajes y para resolver problemas en situaciones reales de la vida cotidiana.
– Interés por la presentación ordenada y limpia de los cálculos y sus resultados, y cuidado en la realización de medidas.
– Iniciativa, participación y colaboración activa en el trabajo cooperativo para investigar, resolver e inventar problemas, respetando el trabajo de los demás.
– Confianza en las propias posibilidades y espíritu de superación de los retos y errores asociados al aprendizaje matemático

Segundo ciclo

Contenidos

Bloque 1. Números y operaciones

1. Números naturales y fracciones. Alfabetización numérica

– Significado y utilidad de los números naturales y fracciones en la vida cotidiana.

– Interpretación de textos numéricos y expresiones de la vida cotidiana relacionadas con los números (folletos publicitarios, catálogos de precios…).

– Sistema de numeración decimal. Reglas de formación y valor de posición de números de hasta seis cifras. Equivalencias y dominio formal.

– Utilización de los números en situaciones reales: lectura y escritura, ordenación y comparación (notación), representación en la recta numérica, descomposición, redondeo, juegos.

– Números fraccionarios para expresar particiones y relaciones en contextos reales. Utilización del vocabulario apropiado.

– Comparación entre fracciones sencillas y entre números naturales y fracciones sencillas mediante ordenación y representación en la recta numérica.

2. Operaciones

– Significado de las operaciones de multiplicar y dividir y su utilidad en la vida cotidiana. Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo.

– Utilización en situaciones de la vida cotidiana de la multiplicación como suma abreviada, en disposiciones rectangulares y problemas combinatorios.

– Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar y como operación inversa de la multiplicación.

3. Estrategias de cálculo

– Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con multiplicaciones y divisiones sencillas: representaciones gráficas, repetición de medidas, repartos de dinero, juegos…

– Cálculo mental automático: construcción y memorización de las tablas de multiplicar.

– Sentido numérico:

. Elaboración y utilización de estrategias personales y académicas de cálculo mental con sumas y restas y multiplicaciones y divisiones. Descomposición aditiva y multiplicativa de los números.

. Elaboración y utilización de diferentes estrategias para realizar cálculos aproximados. Estimación del resultado de una operación entre dos números, valorando si la respuesta es razonable.

. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos mentales.

– Estrategias de cálculo escrito:

. Realización de algoritmos no académicos de multiplicaciones y divisiones, por medio de descomposiciones numéricas y otras estrategias personales.

. Cálculo de sumas, restas, multiplicaciones por dos cifras y divisiones por una cifra utilizando algoritmos académicos.

. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos escritos.

Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes

1. Significado y utilidad de la medición en la vida cotidiana.

– Reconocimiento e interpretación de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana relacionados con las medidas y sus magnitudes.

– Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y transmitir informaciones sobre mediciones.

2. Longitud, peso/masa y capacidad

– Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales en contextos cotidianos. Construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones.

– Introducción al sistema métrico decimal. Unidades de medida convencionales: múltiplos y submúltiplos de uso cotidiano, utilización en contextos reales. Elección de la unidad más adecuada para la expresión de una medida en función del orden de magnitud.

– Comparación y ordenación de unidades y cantidades de una misma magnitud.

– Elaboración y utilización de estrategias personales para medir.

– Estimación de medidas de objetos de la vida cotidiana.

– Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

3. Medida del tiempo. Unidades de medida del tiempo: lectura en el reloj analógico y digital.

4. Sistema monetario. Reconocimiento y utilización de las monedas y billetes de curso legal y establecimiento de equivalencias.

Bloque 3. Geometría

1. La situación en el espacio, distancias, ángulos y giros

– Elaboración y utilización de códigos diversos para describir la situación de un objeto en el espacio en situaciones cercanas al alumnado.

– Representación elemental de espacios conocidos: planos y maquetas. Lectura e interpretación de mapas y planos sencillos.

– Descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico. Ejes de coordenadas.

– Las líneas como recorrido: rectas y curvas, intersección de rectas y rectas paralelas.

2. Formas planas y espaciales

– Identificación de figuras planas y espaciales en la vida cotidiana.

– Clasificación de polígonos. Lados y vértices.

– La circunferencia y el círculo.

– Los cuerpos geométricos: cubos, esferas, prismas, pirámides y cilindros. Aristas y caras.

– Descripción de la forma de objetos utilizando el vocabulario geométrico básico.

– Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos y de cuerpos geométricos a partir de un desarrollo. Exploración de formas geométricas elementales.

– Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.

– Comparación y clasificación de ángulos.

3. Regularidades y simetrías.

– Transformaciones métricas: traslaciones y simetrías. Simetrías corporales y espejos.

Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad

1. Gráficos y tablas

– Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos.

– Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.

– Lectura e interpretación de textos numéricos en forma de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana.

– Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.

– Elaboración de tablas de datos obtenidos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares.

– Elaboración de gráficos sencillos con datos relativos a objetos, fenómenos y situaciones del entorno.

2. Carácter aleatorio de algunas experiencias

– Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto.

– Introducción al lenguaje del azar. Utilización de un primer lenguaje adecuado para describir situaciones y experiencias de azar del entorno.

Bloque 5. Resolución de problemas

1. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.

2. Resolución de problemas en los que intervengan diferentes magnitudes y unidades de medida (longitudes, pesos, dinero…), con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, y

referidas a situaciones reales de cambio, comparación, igualación, repetición de medidas y escalares sencillos.

3. Elementos de un problema (enunciado, datos, pregunta, solución), y dificultades a superar (comprensión lingüística, datos numéricos, codificación y expresión matemáticas, resolución, comprobación de la solución, comunicación oral del proceso seguido).

4. Planteamientos y estrategias para comprender y resolver problemas:

– Problemas orales, gráficos y escritos.

– Resolución en grupo, en parejas, individual.

– Resolución mental, con calculadora y con el algoritmo.

– Problemas con datos que sobran, que faltan, con varias soluciones, de recuento sistemático…

– Invención de problemas y comunicación a los compañeros.

– Explicación oral del proceso seguido en la resolución de problemas.

5. Resolución de situaciones problemáticas abiertas:

– Investigaciones matemáticas sencillas sobre números, cálculos, medidas, geometría y tratamiento de la información.

– Planteamiento de pequeños proyectos de trabajo. Aplicación e interrelación de diferentes conocimientos matemáticos. Trabajo cooperativo.

6. Estrategias heurísticas: aproximación mediante ensayo-error, reformular el problema.

7. Desarrollo de estrategias personales para resolver problemas, investigaciones y pequeños proyectos de trabajo.

Bloque 6: Contenidos comunes

Lenguaje matemático

– Precisión y claridad para expresar números y relaciones, unidades de medida sencillas, orientación en el espacio, orientación en el tiempo, figuras y cuerpos geométricos, gráficas…

– Utilización de un lenguaje adecuado para expresar situaciones aditivas y multiplicativas sencillas.

– Símbolos y expresión matemática de operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y expresión de fracciones sencillas.

– Recursos didácticos y tecnologías de la información y la comunicación

– Utilización de materiales didácticos variados que faciliten la comprensión de los contenidos matemáticos: cartas, textos numéricos, cintas métricas, balanzas, pesas, recipientes graduados, figuras geométricas…

– Calculadora:

. Pautas de uso. Utilización para hacer cálculos y aprender estrategias mentales de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

. Utilización de la calculadora en la resolución de problemas de la vida cotidiana, referidos a diferentes situaciones matemáticas y decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos.

– Utilización de recursos informáticos para la realización de actividades y la comprensión de los diferentes contenidos matemáticos.

Actitudes

– Disposición favorable para conocer y utilizar diferentes contenidos matemáticos para interpretar y comunicar información y resolver problemas de la vida cotidiana.

– Interés por la presentación limpia, ordenada y clara de cálculos, resultados, medidas, construcciones geométricas, gráficas y procesos de resolución.

– Interés y gusto por compartir puntos de vista, investigaciones, procesos de resolución y resultados obtenidos, respetando los puntos de vista de los compañeros. Colaboración activa y responsable en el trabajo en equipo.

– Confianza en las propias posibilidades, constancia y espíritu de superación de los retos y errores asociados al aprendizaje matemático. Iniciativa y disposición para desarrollar aprendizajes autónomos.

Tercer ciclo

Contenidos

Bloque 1. Números y operaciones

1. Números naturales, enteros, decimales y fracciones. Porcentajes. Alfabetización numérica

– Significado y utilidad de los números naturales, enteros, decimales y fraccionarios y de los porcentajes en la vida cotidiana.

– Interpretación de textos numéricos y expresiones de la vida cotidiana relacionadas con los distintos tipos de números.

– Reglas de formación de los números naturales y decimales y valor de posición. Equivalencias y dominio formal. Lectura y escritura, ordenación y comparación (notación) … y uso de números naturales de más de seis cifras y números con dos decimales en diferentes contextos reales.

– Números fraccionarios. Obtención de fracciones equivalentes. Utilización en contextos reales.

– Números positivos y negativos. Utilización en contextos reales.

– Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes (redes numéricas básicas).

– Ordenación de números naturales, de enteros, de decimales, de fracciones y de porcentajes por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros.

– Sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en la actualidad.

2. Operaciones

– Potencia como producto de factores iguales. Cuadrados y cubos.

– Jerarquía de las operaciones y usos del paréntesis.

3. Estrategias de cálculo

– Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos sencillos con números decimales, fracciones y porcentajes: recta numérica, representaciones gráficas…

– Sentido numérico:

. Elaboración y utilización de estrategias personales y académicas de cálculo mental relacionadas con números naturales, decimales, fracciones y porcentajes (redes numéricas). Series numéricas.

. Utilización de la tabla de multiplicar para identificar múltiplos y divisores.

. Elaboración y utilización de diferentes estrategias para realizar cálculos aproximados con los distintos tipos de números. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de respuestas numéricas razonables.

. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos mentales.

– Estrategias de cálculo escrito:

. Utilización de los algoritmos académicos de suma, resta, multiplicación y división por dos cifras con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas.

. Cálculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales. Utilización de las equivalencias numéricas (redes numéricas básicas).

. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos escritos.

Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes

1. Significado y utilidad de la medición. Reconocimiento e interpretación de textos numéricos y utilización de la medición y las medidas para resolver problemas y comprender y transmitir informaciones. Utilización del vocabulario adecuado.

2. Longitud, peso/masa, capacidad y superficie

– Desarrollo de estrategias personales para medir figuras de manera exacta y aproximada.

– Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales.

– Equivalencias entre unidades de una misma magnitud.

– Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida en función del orden de magnitud.

– Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en mediciones y estimaciones.

– Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición. Utilización de unidades de superficie.

– Cálculo de perímetros y áreas de figuras elementales: rectángulos, cuadrados y triángulos.

3. Medida del tiempo

– Unidades de medida del tiempo y sus relaciones. La precisión con los minutos y los segundos.

– Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos, en situaciones reales.

4. Medida de ángulos. El ángulo como medida de un giro o abertura. Medida de ángulos y uso de instrumentos convencionales para medir ángulos.

5. Sistema monetario. Utilización del sistema monetario aplicando equivalencias, operaciones y cambios.

6. Unidades de información: byte, kilobyte (Kb), megabyte (Mb), gigabyte (Gb). Interpretación en contextos reales.

Bloque 3. Geometría

1. La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros

– Ángulos en distintas posiciones.

– Sistema de coordenadas cartesianas. Representación y lectura de puntos. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros...

– La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.

– Lectura, interpretación, construcción y reproducción de planos, maquetas y mapas utilizando escalas.

– Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para la construcción y exploración de formas geométricas.

2. Formas planas y espaciales

– Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo.

– Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.

– Construcción de modelos de figuras planas y espaciales utilizando diversos materiales.

3. Regularidades y simetrías

– Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos.

– Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.

– Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.

Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad

1. Gráficos y tablas

– Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Tablas de doble entrada y tablas de frecuencia.

– Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos: diagrama de barras, pictogramas, polígono de frecuencias, diagrama de sectores.

– Obtención y utilización de información para la realización de gráficos y tablas de datos relativos a objetos, fenómenos y situaciones del entorno.

– La media aritmética, la moda, la mediana y el rango, aplicación a situaciones familiares.

– Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos.

2. Carácter aleatorio de algunas experiencias

– Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

– Formulación y comprobación a nivel intuitivo de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

Bloque 5. Resolución de problemas

1. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.

2. Resolución de problemas de la vida cotidiana en los que intervengan diferentes magnitudes y unidades de medida (longitudes, pesos, capacidades, tiempos, dinero…), con números naturales, decimales, fracciones y porcentajes.

3. Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales y relaciones entre los números (redes numéricas básicas), explicando oralmente el significado de los datos, la situación planteada, el proceso, los cálculos realizados y las soluciones obtenidas, y formulando razonamientos para argumentar sobre la validez de una solución identificando, en su caso, los errores.

4. Diferentes planteamientos y estrategias para comprender y resolver problemas: lectura comentada; orales, gráficos y escritos; con datos que sobran, con varias soluciones, de recuento sistemático; completar, transformar, inventar. Comunicación a los compañeros y explicación oral del proceso seguido.

5. Resolución de situaciones problemáticas abiertas:

– Investigaciones matemáticas sencillas sobre números, cálculos, medidas, geometría y tratamiento de la información.

– Planteamiento de proyectos de trabajo. Aplicación e interrelación de diferentes conocimientos matemáticos. Trabajo cooperativo.

6. Estrategias heurísticas: aproximar mediante ensayo-error, estimar el resultado, reformular el problema, utilizar tablas, relacionar con problemas afines, realizar esquemas y gráficos, empezar por el final.

7. Desarrollo de estrategias personales para resolver problemas, investigaciones y proyectos de trabajo, y decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones, valorando el grado de error admisible.

Bloque 6: Contenidos comunes

Lenguaje matemático

– Precisión y claridad para expresar números y relaciones, equivalencias, unidades de medida, orientación en el espacio y ángulos, figuras y cuerpos geométricos, gráficas, situaciones de azar…

– Utilización de un lenguaje adecuado para expresar situaciones aditivas y multiplicativas con distintos tipos de números y porcentajes.

– Símbolos y expresión matemática de operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y expresión de fracciones, números decimales y enteros y porcentajes.

Recursos didácticos y tecnologías de la información y la comunicación

– Utilización de materiales didácticos variados que faciliten la comprensión de los contenidos matemáticos: textos numéricos, cintas métricas, balanzas, pesas, recipientes graduados, figuras y cuerpos geométricos, dados…

– Calculadora:

. Utilización de la calculadora para realizar cálculos y aprender estrategias mentales con las distintas operaciones y números.

. Utilización de la calculadora en la resolución de problemas de la vida cotidiana, referidos a diferentes situaciones matemáticas y decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos.

– Utilización de recursos informáticos para la realización de actividades y la comprensión de los diferentes contenidos matemáticos.

– Utilización de la calculadora y los recursos informáticos en el tratamiento estadístico de la información.

Actitudes

– Interés por realización y la presentación limpia, ordenada, clara y precisa de cálculos, resultados, medidas, construcciones geométricas, gráficas, tablas y procesos de resolución.

– Valoración de la necesidad de reflexionar, razonar, perseverar y compartir explicaciones, experiencias, procesos de resolución y resultados para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas, incluido equivocarse.

– Colaboración activa y responsable en el trabajo en equipo, manifestando iniciativa para resolver problemas que implican la aplicación de los contenidos estudiados.

– Confianza en las propias posibilidades y autonomía personal para superar las equivocaciones, los retos y los trabajos matemáticos relativos a los diferentes contenidos.

<u>CUESTIONES</u>:

1. ¿En que año se publica el decreto por el que se establece el currículo de la Educación Básica de la CAV?

2. ¿Qué enseñanzas comprende la Educación Básica?

3. ¿Qué y cuáles son las Competencias Básicas? ¿Es la Matemática una de ellas?

4. Da una definición de Currículo

5. ¿Qué son las evaluaciones diagnósticas, quién las realiza y en qué curso de Primaria se efectúan? ¿Cuál es su finalidad?

6. Da una definición de las Matemáticas

7. ¿Las matemáticas forman parte de nuestra cultura? ¿Por qué?

8. Indica tres características de las Matemáticas y explícalas en dos líneas.

9. ¿Qué es “el saber hacer” en Matemáticas? Explícalo.

10. ¿Cómo se entiende el uso de las calculadoras y los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas?

11. ¿Qué es el “pensamiento racional” y cómo contribuyen las Matemáticas en su formación?

12. ¿Qué quiere decir que las Matemáticas tienen un papel “Instrumental”? ¿Y “Formativo”?

13. Señala algunas de las características de la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Primaria.

14. ¿Cuáles son los bloques de contenido? ¿Cuántos son? ¿Son comunes a todos los cursos? ¿Qué quiere decir que la enseñanza de las Matemáticas debe ser cíclica?

15. ¿Qué es el cálculo mental? ¿Está su estudio superado al no ser necesario pues disponemos de calculadoras?

16. Comenta (pero no copies) los contenidos incluidos en cada bloque de contenidos del primer ciclo.

BIBLIOGRAFÍA.

Alsina, C. “Enseñar matemáticas”. Grao. 1996.

Anónimo. "Compilación legislativa de instrucción pública (Edición oficial)". Vol. I.

Cockroft, D. "Las matemáticas sí cuentan". MEC. Madrid, 1985.

Courant, R./Robbins, H. "¨Qué es la Matemática?. Una exposición elemental de sus ideas y métodos". Aguilar. Madrid,1955.

Coxeter, H.S.M. "Fundamentos de Geometría". Limusa-Wiley. México,1971.

Diaz Godino, J. y otros. "Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y pro...". Síntesis. Madrid, 1988.

Dickson y otros. "El aprendizaje de las Matemáticas". MEC. Labor. Madrid, 1991.

González Urbaneja, P.M. “Platón y la academia de Atenas”. Nivola. Madrid, 2006

Hocquenghem, M.L. et al. “Histoire des Mathématiques pour les collèges”. CEDIC. París, 1980.

Ifrah, G. “Las cifras. Historia de una gran invención. Alianza. Madrid, 1987.

Johnson, R. "Estadística Elemental". Trillas. México, 1976.

Kasner, E./Newman, J. “Matemáticas e imaginación”. Salvat. Barcelona, 1987

Kilpatrick, J. y otros. "Educación matemática e investigación". Síntesis. Madrid, 1994.

Kline, M. “Matemáticas para los estudiantes de humanidades”. Fondo de Cultura Económica. México, 2000.

Livio, M. “La proporción aúrea. La historia de phi …”. Ariel. Barcelona, 2006.

Mora, M. “Los inicios de la teoría de la probabilidad. Siglos XVI y XVII. UPV. Bilbao, 1989.

Paulos, J. A. “El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias”. Tusquets editores. Barcelona, 2000.

Platon. "Obras completas". Medina y Navarro ed. Madrid, 1871.

R.A.E. “Diccionario de la Lengua Española”. 21-a Edición. Madrid, 1.992.

Simón Segura, F. “Manual de historia económica mundial y de España”. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid, 1991.

Sopeña, A. "EL florido pensil". Crítica. Barcelona, 1994.

Stacey, K./Groves, S. “Resolver problemas: estrategias”. Narcea. Madrid, 1999.

Varios. "Area de conocimiento: Didáctica de la matemática". Síntesis. Madrid, 1991.

TEMA 2. Resolución de problemas.

2.a. Distinción entre problema y ejercicio.

"Es generalmente admitido que la resolución de problemas tiene como finalidad el desarrollo del pensamiento y el razonamiento lógico, pero es significativo el número de escolares que, realizando la actividad presentada, no muestran un desarrollo acorde con la finalidad propuesta. De estas observaciones podemos deducir que, o bien la resolución de problemas no implica, en el alumno, el desarrollo del pensamiento y del razonamiento lógico, o bien que lo que se resuelve no son problemas". **(1)**.

Esta cita sirve de introducción para intentar responder a la pregunta de qué es un problema y qué no lo es. En el mismo libro, un poco más adelante, se encuentra una definición sencilla y rotunda: "un problema es una situación que no se sabe resolver cuando se presenta". Siguiendo la misma argumentación, lo importante de esa definición sería la relación alumno-problema que establece; la situación problemática como tal se daría en el sujeto: lo que es un problema para un niño de seis años puede no serlo para otro de doce, o para un adulto.

Si, en cambio, ante una cuestión planteada se conoce un camino para su resolución, aplicando herramientas previamente aprendidas, estaríamos ante un ejercicio.

Características de los ejercicios	Características de los problemas
Se ve claramente qué hay que hacer.	Suponen un reto.
La finalidad es la aplicación mecánica de algoritmos.	La finalidad es ahondar en los conocimientos y experiencias que se poseen, para rescatar aquellos que son útiles para llegar a la solución esperada.
Se resuelven en un tiempo relativamente corto.	Requieren más tiempo para su resolución.
No se establecen lazos especiales entre el ejercicio y la persona que lo resuelve.	La persona que se implica en la resolución lo hace emocionalmente. El bloqueo inicial, debido a que la situación le desconcierta, dará paso a la voluntariedad y perseverancia por encontrar la solución y, por último, al grado de satisfacción una vez que esta se ha conseguido
Generalmente tienen una sola solución.	Pueden tener una o más soluciones y las vías para llegar a ellas pueden ser variadas.
Son muy numerosos en los libros de texto.	Suelen ser escasos en los libros de texto.

Ejemplo de ejercicio: "Hállese el resultado de siguiente suma: 7/4 + 1/12 + 3/5 + 9/20"

Ejemplo de problema: "¿Cuántos números menores que 1.000 hay en los que la suma de sus cifras sea 7?". También cualquiera de los propuestos en las páginas que siguen.

La resolución de problemas tiene gran importancia, no sólo en la enseñanza de las matemáticas, sino como técnica general utilizada en muchas otras disciplinas:

"La capacidad para plantear y resolver problemas se encuentra en la base de cualquier disciplina científica; suele ser un reto para el individuo. La actividad principal de las matemáticas consiste en la resolución de problemas –cualquier matemático estaría de acuerdo con esta afirmación–, aunque tengan poco que ver las nociones propias de los problemas matemáticos y las que subyacen a la concepción de problema escolar". **(2)**

Puede verse también lo que sobre el tema se dice en:

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RetosMatematicos/Problemas/Ficheros/importancia.pdf

(1) *FERNÁNDEZ BRAVO, J.A.- "Técnicas creativas para la resol. de problemas matemáticos". Pág.12.*
(2) *CHAMORRO, M. C. (2003). Didáctica de la matemática en Enseñanza Primaria. UPV-EHU. Pág. 274-275.*

2.b. Pautas para la resolución de un problema.

Se suele hablar de cinco fases en la resolución de un problema:

- Comprender el problema.
- Elaborar un plan para su resolución.
- Reflexionar sobre la solución obtenida.
- Redactar la solución.
- Comunicar la solución.

Comprensión del problema.

La lectura del enunciado de un problema tiene gran importancia y por lo tanto se debe efectuar atentamente, al tiempo que se reflexiona sobre el problema, construyendo la imagen mental asociada a la situación planteada en el problema; hay que saber exactamente qué se pide y cuáles son las condiciones del problema.

La comprensión implica un cambio de representación: el alumno pasa, de una representación inadecuada e incompleta del problema, a otra, completa y adecuada.

El enunciado de un problema es un escrito matemático en el que se utilizan códigos especiales que hay que descifrar; para esto se necesita entrenamiento. De hecho, se acepta que el enunciado no debe dejar al descubierto todos los aspectos del problema, que esos aspectos son también parte del problema y forman parte de la tarea a realizar. Los datos internos del problema se tienen que decodificar e integrar en la representación mental que del problema tiene el estudiante.

Sirva, como ejemplo de un enunciado que requiere una lectura atenta, el siguiente:

El monstruo del lago Ness.
"La longitud del monstruo del lago Ness es de 20 m. de largo y la mitad de su propia longitud, pero no mide 30 m. de largo. ¿Cuántos metros mide de largo?" **(1)**

Y este otro famoso enunciado con una redacción absurda:
El problema de la edad del capitán.
"En un barco van 26 ovejas y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán del barco?"

Elaborar un plan para su resolución.

Más adelante se comentarán algunas estrategias posibles para la resolución de problemas aunque, naturalmente, no agotan todas las posibilidades y siempre quedará un campo para las iniciativas propias. Esas estrategias son fundamentales para conseguir resolver el problema y por lo tanto la elaboración del plan se apoya en el empleo adecuado de las estrategias.

Reflexionar sobre la solución obtenida.

Hay que comprobar si la solución obtenida tiene sentido y si responde a lo que el problema planteaba. Así mismo, hay que fijarse en el proceso seguido para la resolución: de él podemos aprender y nos puede ser útil para otros problemas.

Redactar la resolución.

Es importante hacer explícito todo el proceso de resolución, redactándolo de forma clara y ordenada, de manera que pueda ser comprendido por otra persona.

Comunicar la solución.

El objetivo de esta fase es efectuar el contraste de todo el proceso. Los alumnos se cuentan entre sí las ideas que les han surgido, los caminos fallidos, las estrategias utilizadas, las operaciones realizadas,…etc. De esta manera se fomenta el trabajo cooperativo, el interés por la investigación, las competencias creativa y comunicativa y se impulsa la autonomía y el disfrute del trabajo realizado. La comunicación puede ser tanto escrita como verbal y en ella se utilizará de forma progresiva el lenguaje matemático.

(1) *STACEY,K./GROVES,S.- "Resolver problemas: estrategias". Narcea. Madrid, 1999. Pág. 57.*

2.c. Estrategias de resolución de problemas.

Hay muchos modelos para la resolución de problemas, algunos de ellos de corte más matemático y otros de corte más psicológico; entre los primeros tenemos los propuestos por Polya y Schoenfelde; entre los segundos tenemos el método denominado IDEAL debido a Bransford y Steinen, o la propuesta de gestión mental de De la Granderie. También hay muchos métodos de resolución, tales como los de Mason, Burton y Stacey o el de Fernández Bravo para la Enseñanza Primaria.

A esos modelos y métodos les son comunes las estrategias de resolución. *Una estrategia es un camino posible para resolver un problema*; eso sí, las estrategias suelen ser fructíferas pues suelen ser útiles para la resolución de muchos problemas.

La resolución de problemas mediante el empleo de estrategias desarrolla el pensamiento lateral (pensamiento divergente), fomenta el pensamiento creativo y ayuda en la obtención de rendimiento memorístico. Algunas estrategias para la resolución de problemas son las siguientes:

Hacer un esquema, dibujo, tabla o diagrama.

En la resolución de problemas la organización es importante y suele ser la clave para encontrar la forma adecuada de resolución y, a veces, fundamental para llegar a una buena solución.

a) Un pastor construye en su prado una cerca en forma de hexágono regular de 5 m. de lado. El pastor ata la oveja, cada día, en un vértice distinto de la cerca, con una cuerda de 2,5 m. de longitud y, el 7º día, la ata en el centro con la misma cuerda. La oveja come cada día todo el pasto que está a su alcance. Se pide:
¿Qué superficie de pasto se come la oveja cada día?.
¿Qué superficie se queda sin pastar después de los 7 días?.

b) Si en una clase de 30 niños hay 11 que llevan gafas, 9 jersey rojo y 15 no llevan ni gafas ni jersey rojo, ¿Cuántos llevan las dos cosas?.

c) En tu bolsillo tienes las siguientes 5 monedas: 1 céntimo, 5 céntimos, 20 céntimos, 50 céntimos y 1 €. ¿Cuántas cantidades distintas se pueden formar?
(Ayuda: Haz un diagrama de árbol. Cada moneda estará, o no, en cada rama del árbol).

Estudiar todos los casos posibles.

a) Se tienen dos fichas de cartón en las que se ha escrito un número en cada una de sus dos caras. Tirándolas al aire y sumando los números que quedan a la vista, se pueden obtener los siguientes resultados: 36, 41, 50, 55.
Se hace una tirada al aire y los dos números que quedan a la vista son 25 y 30. ¿Cuáles son los dos números que han quedado ocultos?

b) Cuatro hombres, uno de los cuales había cometido un crimen, hacen las siguientes afirmaciones al ser interrogados por la policía:
Arturo: David lo hizo.
David: Antonio lo hizo.
Gustavo: Yo no lo hice.
Antonio: David mintió cuando dijo que lo hice.

Si sólo una de estas afirmaciones fuera cierta, ¿quién sería el culpable?. ¿Y si sólo una fuera falsa?

c) ¿Es cierto qué en un tablero de ajedrez hay 204 cuadrados?

Elegir una buena notación.

Tenemos 3 cajas iguales y 5 guantes de la mano izquierda, todos ellos iguales. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir en las tres cajas?"
(Indicación: si los guantes los representamos por A y las cajas por B, la secuencia BAA BA BAA, nos indica que en la primera caja hay dos guantes, en la segunda un guante y en la tercera dos guantes).

Considerar casos particulares.

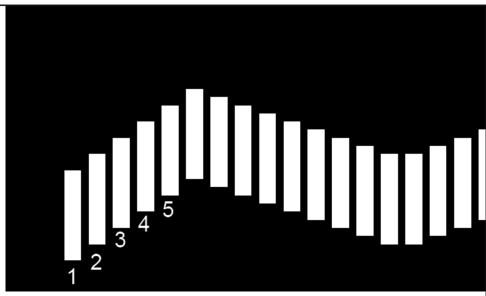
Empezar por lo fácil. Resolver un problema más simple. Descomponerlo en problemas más sencillos.

¿Cuál es el resultado de sumar los n primeros números impares?

<u>Aprovechar las regularidades (inducción)</u>.

La Inducción y la Deducción son dos potentes métodos usados en la Ciencia y, en particular en Matemáticas.

Inducción: Sea P(n) una afirmación **referida** a un numero natural n. Por ejemplo**, e**n una fila de piezas de **d**omin**ó,** P(n) = “la ficha que ocupa el lugar n se caerá”**.**
P(1) = “cae la ficha 1”
P(2) = “cae la ficha 2”
P(3) = “cae la ficha 3”
……………………………
P(k) = “cae la ficha k”
……………………………
En una cola de personas: P(n) = “el amigo que ocupa el lugar n conoce un secreto”
P(1) = “el amigo 1 conoce el secreto”
P(2) = “el amigo 2 conoce el secreto”
P(3) = “el amigo 3 conoce el secreto”
……………………………
P(k) = “el amigo k conoce el secreto”
……………………………

Ej. “El genio de la botella”**. (1)**

El relato de Robert Louis Stevenson titulado “El diablo de la botella” nos presenta una versión distinta de nuestra estrechez de miras. El genio encerrado en la botella está dispuesto a satisfacer cada uno de nuestros antojos románticos y nuestros caprichos financieros. Se nos da la posibilidad de comprar esa botella, con su sorprendente inquilino, por una cantidad que hemos de fijar nosotros mismos. Sin embargo, existe una limitación: una vez hayamos acabado con la botella, hay que venderla a otra persona a un precio estrictamente menor que el de compra. Si no somos capaces de venderla a alguien por un precio menor, perderemos todo lo que poseemos y sufriremos penalidades implacables e insoportables. ¿Cuánto pagaríamos por esa botella?

Desde luego, no se puede pagar 1 céntimo, porque entonces no podríamos venderla por un precio menor.

Tampoco se pueden pagar 2 cts. Porque no encontraríamos a nadie dispuesto a comprarla por 1 cts., porque entonces no podría venderla.

El mismo razonamiento sirve para un posible precio de 3 cts., pues la persona a quien tendríamos que vender la botella por 2 cts. Argumentaría que no encontraría a nadie a quien venderla por 1 cts. Análogamente para los precios de 4 cts., 5 cts., 6 cts., etc.

La inducción matemática permite formalizar el razonamiento, que demuestra, sin vuelta de hoja, que no se puede comprar el genio de la botella por ninguna cantidad.

Sin embargo, casi con toda seguridad, Vd. estaría dispuesto a comprar la botella por 1.000 €. Yo lo haría. ¿En qué punto deja de ser convincente el argumento contrario a la compra de la botella?

(1) *PAULOS, J.A.- “Un matemático invierte en la bolsa” (2004). Pág. 120*.

Deducir y sacar conclusiones (Deducción).

Averigüe una palabra de cinco letras que tiene en común, con cada una de las anteriores, tantas letras como indica el número que se da al lado. Puede haber más de una solución.

F	I	R	M	A	0
F	I	R	M	E	1
F	O	R	M	A	1
F	U	R	I	A	1
F	R	A	S	E	2
F	A	R	O	L	2

Tantear (ensayo y error).

a) En un bolsillo tenemos monedas de 5, 20 y 50 cts. En total, 12 monedas, con un valor de 2,85 cts. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?.

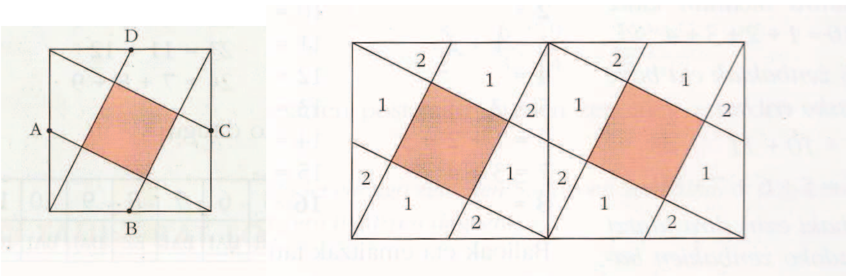
b) Calcular un número tal que al elevarlo al cuadrado y sumarle el número buscado de como resultado 132.

Empezar un problema desde atrás.

Tres personas tienen varias monedas en la mano con las que juegan al siguiente juego: cada una arroja una moneda al aire; si dos de ellas consiguen el mismo resultado y la tercera no, esta última debe dar a las otras dos una cantidad igual a la que en ese momento del juego dispone cada una de ellas. Después de tres jugadas la situación del juego es: cada una ha perdido una sola vez y todas tienen la misma cantidad de 240€. ¿Cuánto dinero tenía cada una en el momento de iniciarse el juego?

Sacar partido de la simetría.

Calcula cuál es el área sombreada de la figura, sabiendo qué el lado del cuadrado grande es l = 9 cm y que A, B, C, y D son los puntos medios de los lados del cuadrado.



Demostración por reducción al absurdo.

Para demostrar la veracidad de algo que estamos buscando, a veces resulta más sencillo suponer que no es cierto y deducir consecuencias de esta apreciación. Se llega así a una contradicción.

a) Demostrar que el conjunto vacío ∅ es subconjunto de cualquier otro conjunto X.
Si no fuera así, debería existir al menos un elemento del conjunto ∅ que no perteneciera al conjunto X. Pero el conjunto vacío ∅ no tiene ningún elemento y por lo tanto esta última suposición no es posible, es un absurdo, luego el conjunto vacío no contiene elementos que no estén en X y por lo tanto ∅ está incluido en X.

b) Se tiene un tablero de ajedrez (8x8) cuyas casillas miden todas 1cm x 1cm, y se cuenta además con muchas piezas de dominó de dimensiones 2cm *x* 1cm. Nótese que podemos colocar algunas de estas piezas de manera que cada una de ellas cubra dos casillas del tablero de ajedrez. Claramente, haciendo esto, el tablero puede ser cubierto totalmente (sin que ninguna pieza quede con un trozo fuera del tablero). ¿Podría todavía ser cubierto si se elimina la casilla en una de las esquinas del tablero? ¿Y si se eliminan las dos casillas de dos esquinas opuestas?

Principio del palomar.

Se basa en la siguiente idea: "*Si 20 palomas se meten en 19 huecos, necesariamente en algún hueco debe de haber más de una paloma*"

¿Cuántas veces se debe lanzar un solo dado para obtener la misma puntuación por lo menos dos veces?
(Los casos posibles (huecos) son 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6) y las veces que se debe lanzar como mínimo serán por tanto 7).

Juegos y problemas lógicos.

Un pastor, con una enorme col, una enorme oveja y un enorme lobo, llegan a un río en el que hay una diminuta barca en la que no caben mas que el pastor y una de sus pertenencias. Si deja al lobo y a la oveja solos, el lobo .se come a la oveja. Y si deja a la oveja y a la col sin vigilancia, ya sabemos lo que pasará con la col ... eso sí, el lobo no es vegetariano. Quiere pasar a todos al otro lado del río. ¿Cómo lo hará?

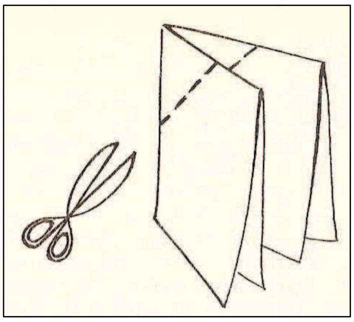
Hacer estimaciones.

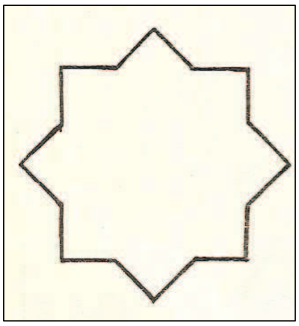
¿Cómo harías una estimación de lo extenso que es tu vocabulario, es decir, del número de palabras cuyo significado conoces? **(1)**.

2.d. Problemas referidos a situaciones abiertas.

Aunque debamos conocer las estrategias para resolver problemas, hay muchas más que las que hemos mencionado y, además en los problemas las estrategias no se presentan en estado puro. Quiere esto decir que un problema, a veces, se pude resolver mediante más de una estrategia (de diferentes formas), o que, a veces, interviene más de una estrategia en la resolución de un único problema. Además, los problemas no se nos presentan agrupados por la estrategia de resolución a la que puedan pertenecer, porque descubrir la estrategia forma parte del abordaje que efectuemos del problema y de su resolución.

1) Tienes un folio. Lo doblas por la mitad y vuelves a doblar lo que resulta, formando dos partes iguales. Con unas tijeras haces un corte como el que se indica en la figura. Al desdoblar, ¿qué figura te saldrá? (Piénsalo antes de cortar).
   ¿Qué cortes tendrás que hacer para que te salgan otras figuras que se te ocurran? ¿Y para un hexágono? ¿Y para un "octógono estrellado"? **(2)**.





(1) *TATTERSALL, G.- "Cómo los números pueden cambiar tu vida"*.
(2) *CORBALÁN/GAIRÍN.- "Problemas a mí-2". Pág. 23*.

2) La palabra “capicúa”, de origen catalán (cap = cabeza y cua = cola) designa a aquellos números cuya cabeza y cola son iguales, es decir, que da lo mismo leerlos de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. ¿Sabrías decir cuantos números capicúas hay?. Vete rellenando, para ello, la siguiente tabla:

	De 0 a 9	De 10 a 99	De 100 a 999	De 1000 a 9999	De 10000 a 99999
Nº de capicúas					
Total acumulado					

Análogamente, a las palabras “capicúas” se las llama palíndromos (del gr. palin: de nuevo y dromos: carrera), es decir, palabras o frases que se deletrean igual empezando por la izquierda o por la derecha, como por ejemplo, sus, radar, salas, anilina, dábale arroz a la zorra el abad, etc. ¿Sabrías decir algunos palíndromos de 3 letras?. **(1)**.

3) ¿Cuántos números menores que 1000 tienen la suma de sus dígitos igual a 7?

4) El ajedrez es un juego antiquísimo inventado en la India y que lleva ligadas muchas leyendas. Consta de un tablero con 64 casillas blancas y negras alternadas (llamadas *escaques*) y 32 figuras (llamadas *trebejos*). Su inventor, Seta, fue llamado por el rey Sheram, maravillado por el juego. A fin de recompensarle, le propuso que pidiera cualquier cosa que se le ocurriera. Tras pedir un periodo de reflexión, Seta se presentó al día siguiente, maravillando al rey con su modesta petición: “Soberano, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero”.

“¿Un simple grano de trigo?” – contestó admirado el rey.
“Sí, Soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32; por la séptima, 64; ...”
Basta – interrumpió irritado el rey -. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo. Pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad. Al pedirme tan mísera recompensa, menosprecias, irreverente, mi benevolencia. Retírate. Mis servidores te sacarán un saco con el trigo que solicitas.
Seta sonrió, abandonó la sala y quedó esperando a la puerta del palacio.

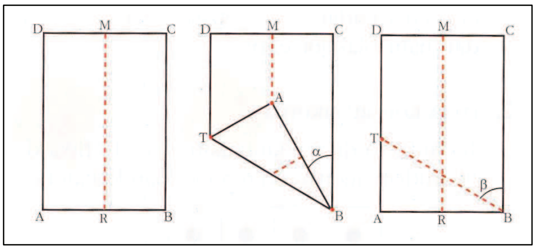
El tiempo pasó. Al día siguiente, el matemático mayor del reino pidió audiencia al rey.
“En todos tus graneros no existe la cantidad de trigo que exige Seta. Si deseas entregar la recompensa prometida, ordena que todos los reinos de la Tierra se conviertan en labrantíos, manda desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve que cubren los lejanos desiertos del norte. Que todo el espacio sea totalmente sembrado de trigo y ordena que toda la cosecha obtenida sea entregada a Seta.

El rey escuchaba, lleno de asombro, las palabras del viejo sabio.
“Dime cuál es esa cifra tan monstruosa” – dijo reflexionando.
“¡Oh, Soberano! Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince”.

Representa, en cifras, la cantidad anterior.
Sabiendo que un meridiano terrestre mide 40.000 km., halla el radio de la Tierra.
Halla la superficie de la Tierra y elimina la parte cubierta por agua.
Sabiendo que un metro cúbico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos de trigo y suponiendo que toda la Tierra se cubriera de trigo con una capa uniforme, ¿cuál sería la altura alcanzada por esta capa?. **(2)**.

(1) *CORBALÁN, F.- “La Matemática aplicada a la vida cotidiana (Cap. 4)”. Graó. Barcelona, 1997*.
(2) *PERELMAN, Y.- “Matemáticas recreativas”. Martínez Roca. Barcelona, 1982. Pág. 52*.
OUAKNIN, M.A.- “El misterio de las cifras”. Robinbook. Barcelona, 2006. Pág. 24 (Cap. I).

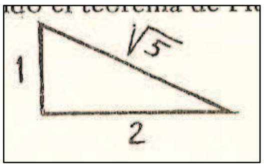
5) Toma hojas de papel rectangular y, mediante pliegues, construye ángulos de 180º, 90º, 45º y 22º30'. Toma otra hoja y haz, con ella, lo siguiente:



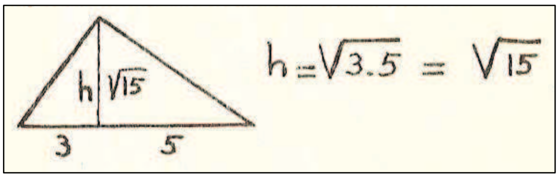
¿Cuánto valen los ángulos α y β?
¿Podrías construir, con la hoja de papel, un triángulo equilátero?.

6) Hay varias maneras de calcular una raíz cuadrada. Entre ellas, está el empleo de propiedades geométricas que nos permiten ver, gráficamente, el valor de esa raíz.

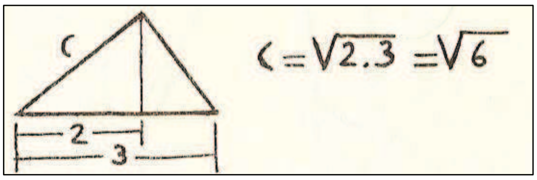
Mediante el Teorema de Pitágoras:



Utilizando el Teorema de la altura:



Mediante el Teorema del cateto:



Se pide hallar, con cada uno de estos procedimientos, el modo de calcular √n, siendo n un número cualquiera. Para ello, se debe decir la manera de construir los triángulos rectángulos que se necesitan. **(1)**.

7) Tenemos un mecano. Cogemos cuatro barras iguales y las unimos sin apretar mucho los tornillos, de manera que nos resulte un rombo articulado, que varía al ir empujándolo entre las manos.

En todos los rombos que resultan hay algunas magnitudes que permanecen constantes y otras que varían. Di, entre las siguientes, lo que ocurre con cada una de ellas:
a) Perímetro; b) Área; c) la suma de los ángulos; d) el ángulo que forman las diagonales; e) la suma de las longitudes de las diagonales. **(2)**.

8) Una empresa fabrica cajas de cartón de tres tamaños distintos: pequeño, mediano y grande; y en dos colores: marrón y azul. En su almacén hay el doble de cajas pequeñas que de medianas y el doble de medianas que de grandes. Además, todas las cajas grandes son marrones, y hay tantas cajas medianas de color azul como pequeñas de color marrón. ¿Hay más o menos cajas marrones que azules?.

(1) *CORBALÁN/GAIRÍN.- "Problemas a mí-2". Pág. 39.*
(2) *CORBALÁN/GAIRÍN.- "Problemas a mí-2". Pág. 43.*

9) Nos mudamos de casa. Andamos atareados con el jaleo que supone empaquetar y transportar los muebles. Por suerte, la nueva casa es mucho más amplia y con luz a raudales. Pero tiene un ¿pequeño? Inconveniente: a la entrada hay un pasillo de un metro de ancho que hace un recodo en ángulo recto; a lo mejor los muebles no pasan por ahí. Y no es cosa de llegar allí con los muebles y, si pasan, bien, y si no, se tiran y ya está. Se trata de poder calcular cuál es la mayor longitud de un mueble que podrá pasar por el pasillo. **(1)**.

10) El tamaño de los televisores se mide en pulgadas ("). Así, cuando decimos que un televisor es de 20", queremos decir que la pantalla, que es rectangular, tiene 20" de diagonal. Además, las dimensiones de la pantalla están en la relación 3/4. Con todo ello, estás en condiciones de hallar las dimensiones, en centímetros, de tu tele, sabiendo el número de pulgadas.
(NOTA: La pulgada es una unidad de longitud anglosajona que equivale a 2,54 cm.). **(2)**.

11) Tres amigas americanas, Pat, Betty y Anne han pasado las últimas vacaciones en España. A la vuelta, contándoles sus idas y venidas a sus compañeras, les dijeron entre otras cosas lo siguiente:
- Pat: estuvimos en Marbella, no fuimos a Granada, pero lo pasamos muy bien en la Costa Brava.
- Betty: primero fuimos a Marbella y después a Granada. No estuvimos ni en la Costa Brava, ni en Torremolinos
- Anne: no fuimos a Marbella. Nos gustó mucho la Costa Brava.

Resulta que cada una mintió una vez y sólo una, respecto a los lugares que manifestaron haber visitado. ¿Podrías deducir dónde estuvieron realmente?

Sol: estuvieron: Costa. Brava, Marbella, Granada. No estuvieron: Torremolinos.

12) Una botella y su tapón valen 5 euros y 25 céntimos. La botella vale 5 euros más que su tapón. ¿Cuánto vale éste?

13) Tenemos una bicicleta con 2 platos y 5 piñones. Los platos son de 40 y 50 dientes; los piñones, de 10, 12, 15, 20 y 25 dientes. Podemos tener, así, 10 marchas diferentes. La más corta (que utilizaremos para subir cuestas o ir despacio), la obtendremos con el plato más pequeño y el piñón más grande; lo contrario ocurrirá con la marcha más larga. Si las ruedas de la bicicleta tienen 80 cm. de diámetro, ¿cuánto avanzaremos, con una pedalada, en cada una de las 10 marchas?.

Ahora que ya conoces el funcionamiento de las marchas, tal vez seas capaz de resolver una cuestión que se plantearon los ciclistas en una etapa contra reloj. Debían recorrer 10 km. en total, de los cuales, 5 eran una larga bajada en la que podían utilizar la marcha más larga, y otros 5 km. eran, por el contrario, una subida bastante pronunciada en la que debían usar la marcha más corta. ¿Cuantas pedaladas tenían que dar en total? ¿Significa esto que todos los ciclistas dan el mismo número de pedaladas a lo largo de una carrera?. **(3)**.

14) En un almacén puedes conseguir un descuento del 20%, pero, al mismo tiempo, tienes que pagar unos impuestos del 15%. ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

15) Una cuadrilla de amigos fueron a cenar. Unos pidieron un menú de 9 € y los otros de 13 €. Sabiendo que gastaron en total 1000 € y que el número de los que eligieron el 2º menú es menor que el de los que eligieron el 1º, ¿cuántos amigos fueron a cenar?. Sol: 43 y 13. **(4)**.

(1) *CORBALÁN, F. "La matemática aplicada a la vida cotidiana". Pág. 98*.
(2) *CORBALÁN/GAIRÍN.- "Problemas a mí-2". Pág. 47*.
(3) *CORBALAN,F./GAIRIN,J.M.- "Problemas a mí". Vol. 1. Pág. 19*.
(4) *Ibaizabal. 1º DBHO pág. 80*.

2.e. Problemas escolares.

Si se les pregunta a los alumnos qué es lo que entienden por "problema" nos podemos encontrar con alguna de las siguientes respuestas:

- Es algo que se resuelve mediante operaciones.
- Es un número que sirve para adivinar las preguntas sobre los números que aparecen en las frases.
- Es algo difícil que hay que resolver y que ayuda a pensar.

Los problemas escolares tienen como característica principal la estructura matemática que se crea entre el enunciado y la resolución. El enunciado describe una situación y, según la estructura matemática con la que se resuelva, el problema será de uno u otro tipo. Hay que tener en cuenta que cualquiera que sea el problema escolar, los niños de esas edades en la resolución de problemas, no sólo deben movilizar competencias cognitivas, sino que también son importantes la motivación y el componente afectivo.

2.e.1. Protocolo.

Hay varios protocolos utilizados en la resolución y presentación de problemas, todos parecidos y cuyo objetivo es que el alumno trabaje y presente el proceso de resolución del problema de forma sistemática y ordenada. Nosotros presentamos dos protocolos muy conocidos y fáciles de utilizar.

Primero: Por un lado se presentan los datos del problema y por otro, se expresa la operación a realizar, poniendo al lado de ésta el cálculo que le corresponde, y escribiendo, por fin, el resultado. De la siguiente manera:

Datos:	
Expresión de la operación	**Cálculo**
Resultado:	

Segundo: La resolución de un problema se expresará mediante los siguientes pasos:
- Esquema
- Planteamiento-Organización- Operaciones
- Comprobación del resultado

Esquema	**Planteamiento**	**Comprobación del resultado**
- Datos conocidos - ¿Qué nos piden? - ¿Puedo hacer un dibujo que me ayude a comprenderlo?	- ¿Cómo organizo los datos? - ¿Qué pasos puedo dar para obtener resultados? - Cálculos - Resaltar el resultado	- ¿Está completa la respuesta? - ¿Puede haber más soluciones? - ¿Tiene sentido lo que he hecho y obtenido?

Resuelve, ajustándote al protocolo, el siguiente ejemplo de problema escolar:

"Un fabricante de pinceles los empaqueta en cajas de 24. Si le han encargado 15 cajas y cada pincel vale 7€ ¿cuánto le costará el encargo?"

Tarea didáctica: Compara los dos protocolos y señala los aspectos más interesantes de cada uno de ellos.

2.e.2. Tipos de problemas en Enseñanza Primaria.

2.e.2.1. Problemas aritméticos.

En un problema aritmético se describe una situación o suceso cotidiano mediante un enunciado que contiene aspectos cuantitativos. Para resolver el problema se deben hacer inferencias en las que se utiliza el lenguaje de las matemáticas.

En la medida en que las matemáticas son un lenguaje, los datos de un problema se deben traducir a ese lenguaje, pasando así de la situación descrita en el problema a una estructura numérica.

■ **De primer nivel**.

✓ *Adiciones y sustracciones*.

Se llaman de primer nivel porque en su resolución sólo se necesita una operación de estructura aditiva (o de resta). Pueden ser de diferentes tipos:

- *Cambio*. Partiendo de una situación inicial y mediante un cambio positivo o negativo que se produce en esa situación inicial se llega a una situación final. Es una situación dinámica y sólo se hace referencia a un tipo de unidad.

La incógnita puede aparecer en tres posiciones:

Situación inicial = x　　　　cambio = x　　　　situación final = x

Según donde aparezca la incógnita y según que el cambio sea positivo o negativo se tienen seis tipos de problemas distintos.

Ej. 1. "El día 1 de abril conté el dinero que tenía en la hucha y eran 17 €. Hoy es el último día del mes y tengo 28 €. ¿Cuánto dinero he ahorrado durante este mes?".

Inicio = 17€, cambio = x €, final = 28€. Estructura: A − H = x

Ej. 2. "Miren tiene 4 peras y le da 2 a Jone. ¿Cuántas peras tiene Miren ahora?".

Inicio = 4 peras, cambio = 2 peras, final = x. Estructura: H + A = x

- *Combinación*. Se unen los elementos de dos conjuntos que no cambian. Se combinan dos cantidades para obtener una tercera. La situación es estática.

$$M_1 \longleftrightarrow M_2$$

Se puede preguntar bien sobre el total, o sobre cada una de sus componentes, surgiendo así dos categorías. En cada categoría la operación a realizar es diferente.

1. *Ej*. "Los autobuses de una ciudad son de uno de los dos colores siguientes: amarillos o verdes. En el tiempo que hemos estado esperando en la parada hemos visto pasar 7 autobuses verdes y 6 amarillos. ¿Cuántos autobuses han pasado en total?".

2. *Ej*. "A una sesión de cine asistieron 153 personas. Si la sala tiene 185 butacas, ¿cuántos asientos se encontraban vacíos?".

- *Comparación*. Se comparan dos cantidades entre sí, mediante las expresiones "más que" o "menos que". Según el tipo de comparación (positiva o negativa) y según la posición de la incógnita (la cantidad más grande, la menor, o la comparación misma), surgen seis tipos de problemas. La situación es estática.

Ej. 1. "Miren y Javier están haciendo una colección de cromos de animales. Miren tiene 187 cromos, tiene 46 más que Javier. ¿Cuántos cromos tiene Javier?".

Ej. 2. "Miren tiene 4 peras y Jone 7. ¿Cuántas peras más tiene Miren que Jone?".

✓ *Multiplicaciones y divisiones*.

En los problemas de sumas y restas aparece un único tipo de elementos. En los problemas de multiplicaciones los elementos son de dos tipos: bolsas y canicas, botellas de leche y precio de la botella, baldas y juguetes,…

- *Problemas de razón*.

Son problemas de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se resuelven mediante un producto, una división, una proporción o una regla de tres. Intervienen cuatro variables.

Ej. 1. "Tenemos siete bolsas con canicas y en cada bolsa hay 5 canicas. ¿Cuántas canicas tenemos?"
Ej. 2. "Una bolsa que contiene 3 kilos de patatas cuesta 4,5 €. ¿Cuánto costarán 5 kilos de patatas?"
Ej. 3. "Compré 6 botellas de leche y pagué 4,80 €. ¿Cuánto vale cada botella?"
Ej. 4. "Por un jamón entero pagamos 152 €. El precio del jamón de esta clase es de 19 €/kilo. ¿Cuánto pesa el jamón que hemos comprado?"

Todos estos problemas se pueden expresar mediante tablas:

Nº Bolsas	**Nº Canicas**
7	?
1	5

Kilos de Patatas	**Precio**
3	4,5
5	?

Botellas de Leche	**Precio**
1	?
6	4,80

Kilos de Jamón	**Precio**
1	19
?	152

El ejemplo 1 se puede resolver de dos formas distintas:
- 5 canicas x 7 = 5 canicas + 5 canicas + 5 canicas + 5 canicas + 5 canicas + 5 canicas + 5 canicas = 35 canicas.
- 7 bolsas x 5 canicas/bolsa = 35 canicas

Los dos procedimientos son equivalentes, pero en el primero el operador (número de bolsas=7) es un escalar aditivo; en el segundo, el operador (5 canicas/bolsa) tiene dimensión.

En ejemplo 4 la resolución más sencilla consiste en efectuar restas sucesivas:

Kilos de jamón	**Resto de precios**
1	152-19 = 133
2	133-19 = 114
3	114-19 = 95
4	95–19 = 76
5	76-19 = 57
6	57-19 = 38
7	38-19 = 19
8	19-19 = 0

- *Factor n*. Es un caso especial de los problemas de razones. Para efectuar la comparación se utiliza un coeficiente multiplicador (la razón).
Ej. "Unos zapatos cuestan 72 €. Un balón de baloncesto cuesta 8 veces menos. ¿Cuánto cuesta el balón?".

- *Problemas de combinación* (*Producto cartesiano*).

Tenemos dos tipos de elementos que se combinan, mediante el producto cartesiano, para obtener otro elemento compuesto de los dos anteriores.
Ej. "Combinando mis pantalones y camisas me puedo vestir de 24 formas diferentes. Tengo 4 pantalones. ¿Cuántas camisas tengo?"

■ **De segundo nivel**.

En este tipo de problemas se debe realizar más de una operación, que además puede pertenecer a diferentes campos conceptuales (por ejemplo, restas y multiplicaciones).

Ej. *1.* "Una señora lleva en la cartera 300 €. Entra a una tienda de ropa y compra 3 pantalones que le cuestan 72 € cada uno y 2 camisetas a 15 € la unidad. ¿Cuánto dinero valen los tres pantalones? ¿Cuánto paga por las camisetas? ¿Cuánto dinero gasta la señora en la tienda? ¿Cuánto dinero le quedará en la cartera al salir?".

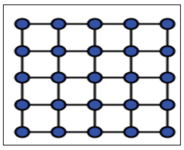
Ej. 2. "Un comerciante vendió 300 botellas de aceite a 1,10 € cada una. En la venta ganó 140 €. ¿Cuál fue el precio de venta de cada botella?".

Ej. 3. "Una pieza de ¾ de kilo de solomillo de vaca cuesta 21 €. ¿Cuánto habremos pagado por 2 kilogramos de ese tipo de carne?".

2.e.2.2. Problemas geométricos.

La sola utilización de la geometría estática como elemento de aprendizaje crea conflictos didácticos que se tratan de superar con el uso de la geometría dinámica, bien con la manipulación de materiales, o con programas informáticos del tipo "Geogebra", donde las figuras tienen movimiento, siendo más sencillo y motivador, para el alumno, comprobar y generalizar las propiedades de las figuras.

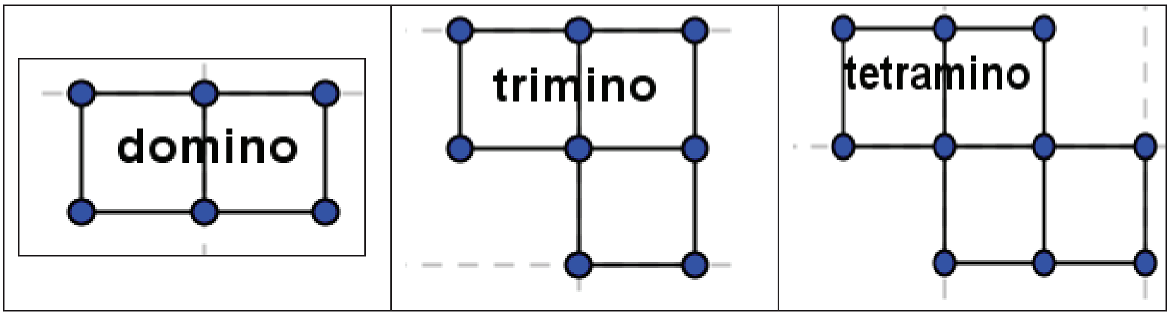
- *Geoplano*: Ej. ¿Cuál es el número máximo de cuadrados que se pueden construir en un geoplano de medidas 5 x 5?.



En la siguiente dirección de Internet se encuentra un denominado "geoplano inteligente": http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

- *Poliminós*.

En la enseñanza elemental, la Geometría ha tenido desde siempre un carácter deductivo. Pero, hoy en día, se intenta reforzar su aspecto inductivo. Los poliminós se construyen partiendo de cuadrados: a los de dos cuadrados se les denomina dominós; a los de tres, triminós; a los de cuatro, tetraminós,…etc. Los poliminós fueron creados por Golomb, que los introdujo en 1954, en un artículo titulado "Chester Board and Polyominoes".



Ejercicio: Construye todos los triminós que haya. Partiendo de ellos y añadiéndoles otro cuadrado construye todos los tetraminós. Partiendo de estos últimos construye todos los pentaminós (son 12). Construir todos los hexaminós es bastante más difícil pues son 35 en total.

Con este tipo de problemas, además de trabajar el aspecto inductivo de la geometría, se les plantea a los alumnos un tipo de problemas abiertos y de pensamiento divergente. La familia de figuras geométricas se puede mover, girar, reflejar, y utilizar para embaldosar el suelo mediante traslaciones; Mediante la composición de diferentes figuras, se pueden plantear también rompecabezas geométricos.

Son numerosos los ejercicios que se pueden plantear con los pentaminós, algunos de los cuales se pueden encontrar en la siguiente dirección:

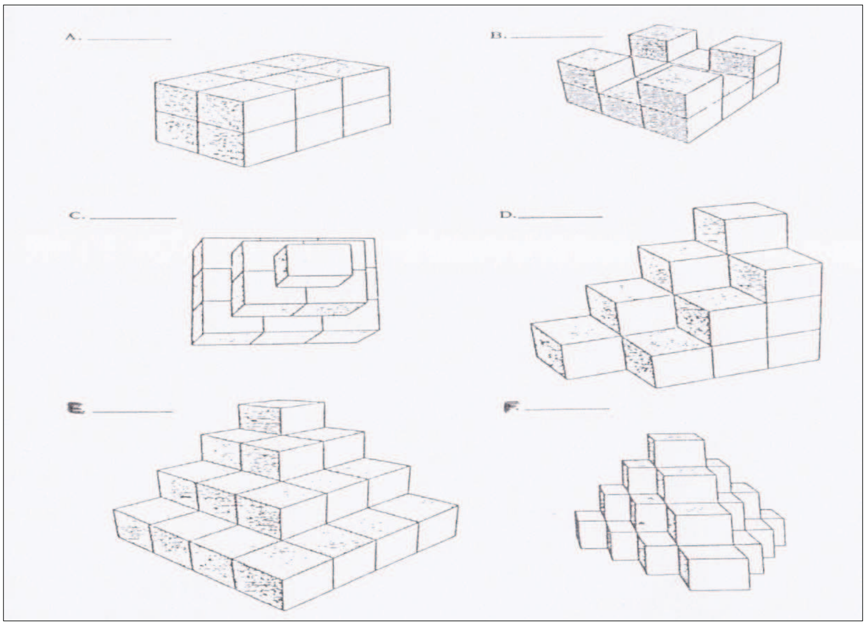
http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

2.e.2.3. Problemas de razonamiento lógico

Ej. "Amparo y Luis, son, por parte de madre, los abuelos de Olga. Mario, padre de Enrique, es hermano de Álvaro y marido de Sonia. Diego y Matías son los tíos de Susana. María y Antonio son los suegros de Sonia. Con todos esos datos construye el árbol genealógico de la familia.

2.e.2.4. Problemas de recuento sistemático

Ej. "¿Cuántos bloques hay en cada construcción? Explica como lo haces".



2.e.3. <u>Dificultad de los problemas escolares</u>.

Una interpretación del carácter diferente que tienen las sumas y las restas aparece en el libro "*Obabakoak", de Bernardo Atxaga*: "*Según Harris, además, las sumas suelen dar lugar a cuentos con final feliz. Los originados por restas, en cambio, suelen tener finales trágicos*".

La dificultad de un problema depende de muchos factores y es un concepto relativo. Pero las investigaciones han probado que hay ciertas características que hacen que un problema sea más o menos difícil.

- La primera dificultad es, desde luego, *no entender el problema*, bien porque los alumnos no entienden el lenguaje utilizado, o bien porque la situación que se les plantea no les resulta próxima.
- También se ha comprobado que los problemas de *combinación* son más fáciles que los de *cambio* y que los de *comparación*.
- De la misma manera, se ha comprobado también que los problemas cuya estructura es del tipo **"a + b = ?"** son más sencillos que aquellos cuya estructura es **"? + b = c"**.
- Otros factores que influyen en la dificultad de los problemas son los siguientes:
  - El tamaño del problema.
  - La complejidad gramatical.
  - Los datos y su situación dentro del enunciado.
  - El número de operaciones

Examinemos algunos de estos factores:

- *<u>El tamaño del problema</u>*.

"Dificultad creciente según el número de frases del enunciado y su tamaño"

Tres frases cortas	Dos frases cortas	Una frase
→ →	→ →	→

Ej. 1: “70 niños se ponen en fila. En cada fila hay 7 niños. ¿Cuántas filas hay?”
Ej. 2: “Setenta niños se colocan en filas de a siete. ¿Cuántas filas hay?”
Ej. 3: “¿Cuántas filas hay colocándose 70 niños en filas de a siete?”

- *Complejidad gramatical*.

Dificultad creciente según el número de palabras clave del enunciado (adjetivos y verbos).

Términos matemáticos: añadir, juntar, quitar, restar, repetir, dividir	**Lenguaje usual (no de la terminología matemática): llenar, entrar, coger, rebajar, comprar, perder**
→ → →	→ →

Ej. 1: “Pedro tenía 20 canicas. Le han quitado 7. ¿Cuántas tiene?”
Ej. 2: “Pedro tenía 20 canicas. Ha perdido 7. ¿Cuántas tiene ahora?”
Ej. 3: “Un librero ha recibido 48 libros. Quiere repartirlos en 7 estanterías todas iguales. ¿Cuántos libros colocará en cada estantería?”
Ej. 4: “Un librero ha comprado 48 libros. Quiere colocarlos en estanterías de forma que todas tengan el mismo número de libros. ¿Cuántos libros colocará en cada estantería?”

- *El orden de presentación de los datos del problema*.

Dificultad creciente según coincidan, o no, con el orden en que son utilizados para las operaciones.

Mismo orden que las operaciones	**Orden distinto**
→ → →	→ →

Ej. 1: “Pedro se ha ido al cine con 30 € y ahora tiene 18 €, ¿cuánto se ha gastado?”
Ej. 2: “Pedro tiene ahora 18 € y antes tenía 30 €. ¿Cuánto se ha gastado?”

Es decir, los alumnos encuentran menos dificultades cuando las situaciones que se presentan en el enunciado están ordenadas en el tiempo.

De todas estas dificultades se derivan unos *errores tipo*, siendo aquéllos en que los alumnos suelen incurrir con mayor frecuencia los siguientes:
- Por encima de todo conseguir una solución, realizando cualquier tipo de operación, aunque no tenga sentido.
- Realizar las operaciones del problema mediante una aplicación automática de los conectores semánticos (palabras clave) del problema.
- Utilizar todos los datos que aparecen en el problema, aunque sean datos de carácter superfluo.
- Utilizar el último procedimiento que se ha explicado en clase.

Por ejemplo, en una investigación realizada en Suiza con 101 niños, se planteó el siguiente problema: *“Un pastor tiene 125 ovejas y 5 perros. ¿Cuál es la edad del pastor?”*

Sólo un alumno respondió diciendo que es un problema irresoluble; el resto dio algún tipo de solución numérica. Entre ellos, hubo uno, que planteó todas las operaciones posibles que se podían realizar con los datos del problema, eliminó los resultados que le parecían ilógicos y eligió el que le pareció más coherente, de la siguiente forma:

125 x 5 = 625, no
125 + 5 = 130, no
125 – 5 = 120, no
125 : 5 = 25, ésta, sí.

Parece que se puede concluir que existe la creencia de que todos los problemas que aparecen en los libros de texto se tienen que resolver mediante algún tipo de cálculo aritmético. O incluso de que las soluciones que no contienen números son erróneas.

“La esencia de las Matemáticas está en los razonamientos y no en los números”

Se puede encontrar un antecedente de este problema en el siguiente, muy famoso, que Flaubert propuso a su hermana Caroline en una carta: "Puesto que estudias geometría y trigonometría voy a proponerte un problema: Un barco navega en el océano. Salió de Boston con un cargamento de lana. Desplaza 200 toneladas. Se dirige hacia Le Havre. El palo mayor se quebró; el camarero de la cabina está en el puente; a bordo hay doce pasajeros. El viento sopla en la dirección ENE. El reloj marca las tres y cuarto. Es el mes de mayo. ¿Qué edad tiene el capitán?". **(1)**.

Por supuesto, el problema, además de tener un montón de datos situados en un determinado contexto, plantea una pregunta que no tiene ninguna relación con ninguno de ellos y convierte por tanto al problema en irresoluble.

2.e.4. <u>Elaboración de enunciados</u>.

En este apartado vamos a mostrar, mediante ejemplos, algunas técnicas que existen para la resolución de problemas escolares. Mediante el empleo de esas técnicas se intenta que la resolución de problemas sea algo más que la mera aplicación de un automatismo y no se limite, por tanto, a la aplicación de un procedimiento o rutina, sino que se le planteen al alumno situaciones en las que antes de actuar debe pensar, ya sea porque para entender el enunciado se tiene que convertir en elemento activo de la comprensión, ya sea porque se le plantean situaciones incompletas que debe, usando su creatividad, finalizar, o bien porque debe comprender, representar y reflexionar sobre problemas planteados en un contexto. Son, cómo no, herramientas didácticas que, aplicadas secuencialmente, resultan de gran ayuda en el planteamiento, comprensión y resolución de problemas.

2.e.4.1. Comprensión del enunciado

Al trabajar los enunciados, lo que se busca es facilitar y profundizar en la comprensión de los problemas. Esto no se consigue con la sola lectura del enunciado, aunque sea repetidas veces, o con remarcar cuáles son los datos y las preguntas que plantea el enunciado. Todo eso ayuda, pero lo que aquí se propone, es un trabajo sistemático que lleve a conseguir una comprensión más activa y completa del enunciado. Se plantearán, para ello, enunciados incompletos, que habrá que completar, en un determinado sentido; puede ser que falten datos, o que no se hayan planteado las preguntas, o que haya que realizar alguna operación lógica con el enunciado, o que, en fin, tal vez haya que construir un enunciado que responda a determinadas condiciones.

- *<u>Situaciones cualitativas en las que no aparecen números</u>*.

  Son las primeras situaciones en las que se pone al alumno frente a una situación abierta y, aunque pueda parecer al principio que para poder resolver el problema falte algo, el objetivo es, precisamente, trabajar las diferentes formas de entender el problema, lo que se demanda, las formas de plantearlo y, si acaso, completar y detallar el enunciado.

  Ej. "Un cuaderno cuesta más que un rotulador. Si tienes dinero suficiente para comprar dos rotuladores, ¿podrás comprar un cuaderno?".

  Tarea: Plantea diferentes interpretaciones del problema. ¿Qué condiciones se deben dar para que el problema tenga solución? Plantea una variación del problema.

- *<u>Poner los datos que corresponden al enunciado</u>*.

  Por un lado, el enunciado está incompleto y se debe completar con los datos que se facilitan, colocándolos en el texto de forma coherente, dando sentido al enunciado, para lo cual habrá que razonar debidamente.

  Ej. "He comprado un cuaderno y un rotulador; el rotulador es más barato. ¿Cuánto dinero me han devuelto? (Datos: 7€, 3€, 4€; ponlos tú mismo dentro del enunciado)"
  Tarea: Pon otro ejemplo sacado de un contexto diferente.

- *<u>Dadas las preguntas redactar el enunciado</u>*.

  De nuevo queremos reescribir el enunciado, resolviendo el problema empezando por el final. Se trata de problemas abiertos y por lo tanto habrá que utilizar la creatividad, el lenguaje y la comunicación.

(1) *Puig, L. y Cerdán, F.- "Problemas aritméticos escolares". (1988). Madrid. Síntesis. Pág. 39.*

Ej. "¿Cuántos minutos tuvo que esperar Juan más que Marta? ¿Y cuántos minutos esperó Marta menos que a Irene?"
Tarea: Escribe al menos dos enunciados diferentes que sirvan para completar las preguntas planteadas.

- *Partiendo del enunciado plantear las preguntas*.

Aquí también estamos frente a un enunciado incompleto, porque las preguntas son parte de él. Este apartado puede presentar muchas modalidades, que responden a las diferentes condiciones a las que deben responder las preguntas a plantear.

Ej. Dos libros de igual precio cuestan 8€ más que una calculadora. He comprado los dos libros y la calculadora, he entregado un billete de 50 € y me han devuelto 6 €.
a)¿ ? (respuesta: 44 €)
b)¿ ? (respuesta: 26 €)
c)¿ ? (respuesta: libro)
d)¿ ? (respuesta: No)

Tarea: Antes de hacer nada examina las respuestas que se proponen y relaciónalas con el tipo de preguntas y con las operaciones a realizar. Propón el mismo ejercicio introduciendo alguna variación, bien en el enunciado, en los datos, o en las preguntas. Propón otro ejercicio diferente en el que haya que escribir las preguntas.

- *Utilizar operaciones lógicas con las expresiones del enunciado.*

Mediante los conectores lógicos puede cambiarse el enunciado de tal forma que se obtenga un problema totalmente diferente. Este segundo problema tendrá una solución diferente de la del primero. De esta forma profundizamos en la comprensión de los enunciados y de los problemas.
Ej. "Ane gastó más dinero que Irati. Irati gastó más dinero que Jaione. ¿Quién de las tres gastó más dinero? Ordénalas de mayor a menor en relación al gasto".
Ej. "Juan y Pedro son dos amigos a los que les gusta el cine. Siempre van los miércoles. Siguen las siguientes normas para decidir si van al cine o no:

- Si hace bueno no va ninguno de los dos
- Si llueve van los dos
- Si está nublado solo va Juan y Pedro va al polideportivo

El precio del cine es 5 €, y al polideportivo se accede abonando 3 €. Se sabe que este último miércoles gastaron entre los dos 8 €. ¿A qué actividades acudieron y cuál fue el tiempo que hizo?.

Tarea: Plantea el segundo ejemplo negando todas las frases y conectores lógicos que aparecen en el enunciado, pero manteniendo la coherencia del problema. Construye el enunciado que resultaría.

- *Comunicación del proceso seguido en el problema*.

La última fase de la resolución de un problema es la comunicación, que puede ser tanto escrita como oral. En matemáticas, los procesos de pensamiento, las representaciones del problema, los bloqueos y, en última instancia, todo lo que haya ocurrido durante la resolución del problema, al expresarlo de forma oral, delante de los compañeros, facilita la comprensión del proceso en su conjunto y favorece la competencia comunicativa.

Por ejemplo, son muy apropiados para este fin los problemas geométricos en los que se pide que se describa una determinada figura, o que se describa el itinerario seguido por una tortuga en un plano para ir de un punto a otro.

Tarea: "Plantear una situación didáctica en la que aparezca un esquema realizado en una hoja que contenga un itinerario (puede ser una figura poligonal recorrida en un determinado sentido, u otra figura geométrica). Ahora se deben dar oralmente al resto de compañeros del grupo, sin que vean la imagen, las instrucciones precisas y necesarias para que reproduzcan la imagen y el itinerario. Después, se deben comparar las figuras realizadas por cada uno con la original. Analizar los defectos y dificultades habidos en la comunicación y en las instrucciones dadas. Analiza la necesidad de precisión y claridad, que la distancia entre emisor y receptor hacen que sean necesarias"

2.e.4.2. Enunciado y resolución

- *Enunciar el problema que corresponde a una solución dada de antemano*.

  Tarea: "Inventar el enunciado de un problema cuya solución esté dada por la siguiente expresión aritmética: 3 x (16 - 4) : 4 = caballos".

  Es similar a la estrategia de "resolver un problema empezando por atrás". Se debe idear un contexto para el problema, tal vez no sea preciso respetar el orden de las operaciones, pero es totalmente necesario construir a la vez la solución y el enunciado.

- *Cambiar algunos datos del enunciado cumpliendo ciertas condiciones*.

  Por medio de esta técnica se remarca la importancia de los datos del problema. Antes de cambiar los datos se debe resolver el problema y una vez efectuados los cambios se comprenderá mejor la relación existente entre estos y la solución.

  Tarea: "Lara tiene 25 € y su abuelo le da otros 12 € más. Lara gasta en comprar cromos 7 €. ¿Cuánto dinero le queda?" Cambia dos datos del enunciado sin que cambie la solución. Cambiar todos los datos del enunciado manteniendo la misma solución. ¿Podría cambiarse un único dato del enunciado sin que cambie la solución?"

- *Encontrar entre varios problemas dados el que corresponda a una determinada solución*.

  Tarea: "Entre los siguientes problemas, ¿cuál de ellos se resuelve mediante la operación 25 – 9 + 4?".

  1. problema: Mi hermano mayor tiene 25 años y yo 9. Cuando yo nací en mi casa eran otros cuatro hermanos. ¿Cuántos años tenemos entre todos los hermanos?

  Propón tú otros tres problemas con sentido y dados dentro de un contexto, uno de los cuales se resuelva mediante la operación dada. Controla los datos de cada problema y las operaciones de cada solución"

- *Partiendo de la solución completar los datos que faltan en el enunciado*.

  Es otra variante que puede favorecer también la mejor comprensión de la relación existente entre enunciado y solución. Es conveniente cambiar los números de la solución para que así, los datos del enunciado también cambien.

  Tarea: "Maialen ha ido a comprar gominolas. Las gominolas vienen en bolsas de______. Ha comprado ______ bolsas, pero ____ estaban vacías. ¿Cuántas gominolas tiene?".

  4– 1 = 3 3 x 6 = 18; 18 gominolas

  Rellena, partiendo de la solución, los datos que faltan en el enunciado. Inventa otras dos posibles soluciones y, partiendo de ellas, rellena los datos del enunciado.

- *De entre varias soluciones, elegir la correcta*.

  Tarea: "Receta para preparar Macedonia de frutas para 4 personas:

  - 6 peras
  - 2 manzanas
  - 1/2 kg de fresas
  - 3 melocotones
  - 1 plátano

  Si la macedonia fuera para seis personas, ¿cuánto se debería utilizar de cada ingrediente?

1. solución	2. solución	3. solución
6 + 6 = 12 peras 2 + 6 = 8 peras ½ Kg para seis, 3 kg 3 + 6 = 9 melocotones 1 + 6 = 7 plátanos	6 x 3/2 = 9 peras 2 x 3/2 = 3 manzanas 0,5 kg x 3/2 = 0,75 kg de fresas 3 x 3/2 = 4,5 melocotones 1 x 3/2 = 1,5 plátanos	6 – 4 = 2 6 + 2 = 8 peras 2 + 2 = 4 manzanas ½ kg x 2 = 1 kg de fresas 3 + 2 = 5 melocotones 1 + 2 = 3 plátanos

¿Cuál es la solución correcta?"

Se puede seguir una serie de pasos coherentes para realizar la tarea; por ejemplo, analizar los datos de cada solución y eliminar las soluciones sin sentido; reconocer, comparando las soluciones, ciertos datos que carezcan de sentido; señalar las incongruencias que puedan existir desde un punto de vista lógico-matemático. De este modo, intenta comprender la lógica que subyace a cada una de las soluciones y señala cuáles pueden ser los modelos didácticos que llevan a un razonamiento equivocado.

- *Trabajar la creatividad*.

Es claro que, para la comprensión activa de los problemas aritméticos, las técnicas que se pueden presentar se podrían alargar hasta el infinito, sin más que introducir pequeñas variaciones entre ellas, que conducirían a plantear situaciones diferentes. De todas formas, algunas situaciones son más cerradas que otras y admiten una única solución, aunque eso sí, haya que pensar activamente antes de obtener la solución. En este apartado se quiere liberar la creatividad, para que se puedan construir diferentes enunciados del problema.

Planteamos un escenario y el alumno debe plantear otros tres. Aquí está el nuestro:

"Inventa una situación, sabiendo que la solución es 45, partiendo de esta pregunta: ¿cuántas canicas tienen entre tres amigos?"

2.e.4.3. Problemas contextualizados.

Para que la enseñanza de la matemática sea significativa, los problemas se deben extraer de situaciones que sean próximas al alumno, de situaciones cotidianas o de situaciones en las que se apliquen las matemáticas. Es decir, los problemas además de no ser simples ejercicios, deben tener un significado para el alumno, algo que les resulte parte de su entorno, algo práctico que sea un reto que consideran importante resolver.

Ej. "Una persona tiene que comprar 14 yogures para toda la semana. En el supermercado encuentra dos ofertas: yogures puestos en packs de 8, de los cuales hay que llevar al menos 5 packs y yogures puestos en packs de 4, de los cuales no hay un número mínimo a llevar. Los yogures tienen la misma duración. El precio de un pack de 8 yogures es 3,50 € y el pack de 4 yogures cuesta 2,20 €. El comprador quiere ahorrar el máximo dinero posible, pero también, estar el máximo de tiempo posible sin volver por el supermercado. ¿Qué yogures debería comprar?.

Tarea didáctica: Presentar el problema en otro contexto, o con otro tipo de redacción. El contexto puede ser cambiado haciendo que sea más o menos próximo al alumno. Por ejemplo, en lugar de una compra de yogures en el supermercado, podría ser una compra en la librería o un pedido realizado en una farmacia. También se puede cambiar el modo formal de presentación del problema, por ejemplo, introduciendo material manipulativo (yogures y packs reales), o una representación gráfica (un dibujo) y, por fin, mediante una representación simbólica (símbolos matemáticos).

2.e.5. <u>Actividades propuestas</u>.

2.e.5.1. Problemas aritméticos

1. "En las jornadas de teatro de Santurtzi, por cada dos entradas que se compren te regalan una tercera. Teniendo en cuenta esa oferta, completa la siguiente tabla:

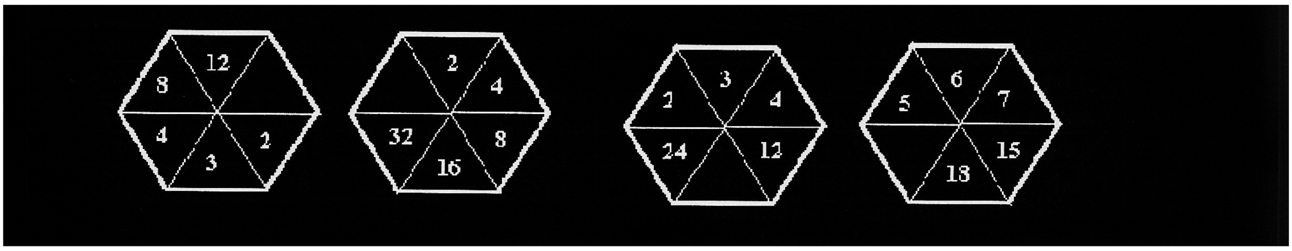
Pagas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Llevas										

¿Cómo clasificarías didácticamente este ejercicio? ¿Cuál es el concepto matemático que aflora a través de este ejercicio?

2. "Hay dos pueblos en los que por tradición se lanzan cohetes cada cierto tiempo; en el primero se lanzan cada diez días y en el segundo cada doce. Si en los dos pueblos se lanzaron cohetes el 1 de agosto, ¿cuándo volverán a coincidir?"

El problema se resuelve como aplicación de un concepto matemático. ¿Cuál es ese concepto? ¿Sería adecuado, en este caso, la resolución mediante una tabla de valores?

3. Se propone la siguiente actividad en un aula de Educación Primaria: *Escribir en cada hexágono el número que falta*



- Realiza la actividad y explica cómo has encontrado los números.
- ¿Cuál es, en tú opinión, el objetivo de esta actividad?

4. “En una clase hay más chicas que chicos. En total hay 15 alumnos. ¿Cuántas chicas hay en esa clase? ¿Qué le debes añadir al enunciado para qué tenga solución única? ¿En este último caso, que tipo de problema es? ¿Puedes redactarlo de una forma más compacta haciendo que cambie su nivel de dificultad?”
(trabajar los enunciados)

5. “Escribe el enunciado de un problema que tenga los siguientes elementos: datos necesarios, datos innecesarios, datos implícitos y explícitos, conectores semánticos directos e inversos, preguntas. Resuelve el problema. Cambia el enunciado para que sea más corto. Clasifica el problema y su nivel de dificultad. Cambia el enunciado contextualizándolo, aunque sea más largo. El problema debe responder al sentido común y tener coherencia.
(trabajar los enunciados)

6. “La suma de dos números es 11; ¿cuál será la solución que obtengamos sumando tres números?”. Este puede ser el enunciado de un problema; reflexiona sobre su solución y plantea otros dos enunciados semejantes. ¿Cuál es el objetivo didáctico que se persigue con este ejercicio?

7. “El camión que abastece al comedor de la escuela realiza 3 viajes de ida y vuelta diarios desde la empresa hasta la escuela. La empresa está situada a 12 km de la escuela. En el primer viaje ha traído 200 bocadillos y 50 l. de leche. En el segundo viaje trae comida para 250 personas y en el tercero se lleva las sobras del día y los envases. Un viaje de ida y vuelta del camión cuesta 80 €”.
Partiendo de esta enunciado, y completándolo si fuera necesario, plantea las cuestiones del problema. Entre esas cuestiones pon una que no tenga solución y otra que ya esté contestada en el propio enunciado. Las cuestiones deben tener sentido.
(partiendo del enunciado construir las cuestiones)

8. “La catedral de Sevilla se comenzó el año 1402 y finalizó en 1519. Es de planta rectangular. La catedral de Santiago de Compostela se comenzó en el año 1075 y se finalizó en 1128”
Busca los datos correspondientes a la catedral de Bilbao. Plantea tres cuestiones que tengan una solución numérica y otras tres en la que la respuesta sea alfanumérica (una frase con o sin números)
(Por ejemplo, las soluciones podrían ser: 117 años, 636 meses, más de un siglo, no, la catedral de Santiago, no se puede responder con los datos que nos dan)
(plantear las cuestiones)

9. “Voy a ir a la frutería a comprar dos kilos de naranjas y un kilo de manzanas o tres kilos de peras. El kilo de naranjas cuesta 1,20 €, el de manzanas 0,99 € y el de peras 1,99 €. He comprado dos tipos de fruta y al pagar me han devuelto cambios. ¿Cuánto dinero he gastado?”
Discute y resuelve el problema. Completa el enunciado si crees que es necesario. Intercambia entre sí los conectores lógicos, escribe el nuevo enunciado y vuelve a contestar a las mismas preguntas anteriores. Compara las soluciones.
(intercambiar conjunción por disyunción y comparar las soluciones)

10. En este ejercicio los datos del enunciado están mal colocados; tú debes colocarlos bien para que el problema tenga sentido: “He ido a comprar un regalo con 15 €. Una muñeca vale 8 €, un juego de segunda mano 7 € y una excavadora 24 €. He comprado dos cosas y todavía me ha sobrado dinero. ¿Qué he comprado?

11. "Jone ha invitado a seis amigas a su cumpleaños. Han comido entre todas 42 bombones. ¿Cuántos bombones han comido cada una? Solución 7"
En este enunciado debe haber algún dato erróneo para que la solución sea 7. ¿Cuál es ese dato?

12. Dadas las cuestiones y las soluciones correspondientes debes escribir el enunciado.
¿Cuántos litros de vino hay en tres barricas? 290 l; ¿Cuántos litros de vino tiene de más la barrica A que la barrica C? 10 l; Entre dos de esas barricas tienen 200 l, ¿cuáles son esas barricas? B y C.

13. "Propón un problema partiendo de una solución dada en el que aparezcan las cuatro operaciones elementales y situado dentro de un contexto que tenga significado"

14. Tenemos una tabla con cuatro casillas, en cada una de las cuales se debe escribir un enunciado que corresponda a una de las operaciones dadas. ¿Qué objetivo didáctico puedes plantear con este ejercicio?

19 x 6 9 x 25 36 x 6 11 x 7

Cuestión:	Cuestión:
El resultado es un número	Cuestión:

15. En este ejercicio se trabaja la creatividad. Debes escribir un enunciado de acuerdo con unas condiciones dadas: "Inventa un problema que se resuelva con las operaciones + y –, sabiendo que la solución es 340 y en el que uno de los datos del enunciado sea redundante". ¿Crees adecuado el ejercicio para trabajar la creatividad? Si no es así ¿cómo lo plantearías?

16. "Inventa un problema con sentido y contextualizado en el que aparezcan las palabras "doble, calefacción, mayo" en el enunciado y en la/las pregunta/s las palabras "mes, día, electricidad". Plantea otras dos actividades similares a esta. ¿Cuál puede ser el objetivo didáctico de estas actividades?

17. Supongamos que tenemos la siguiente situación: "los tutores del ciclo superior quieren organizar una excursión con los alumnos. En ese ciclo hay 10 aulas con el siguiente número de alumnos:

5º curso	25	23	24	20	18
6º curso	24	23	24	25	12

Hay que contratar los autobuses necesarios para la excursión. Pueden ser pequeños, de 20 plazas, o grandes, de 50 plazas (no se cuentan los profesores que van acompañando al conductor). El alquiler diario de un autobús pequeño es 150 € y el de uno grande de 200 €. Además los alumnos de diferentes niveles no deben ir juntos"

- Construye las cuestiones pertinentes para este problema.
- Utiliza dos representaciones que puedan ayudar en la comprensión del problema.
- Resuelve el problema indicando la representación simbólica utilizada.
- Reescribe el enunciado, construyendo un problema semejante pero diferente.

(problemas contextualizados)

18. "En la escuela durante el recreo los alumnos se intercambian cromos —de futbolistas y de "vehículos del futuro"— y también pulseras y pendientes hechos por los propios alumnos en la clase de manualidades. El cambio es distinto cada día (como con el euro). La tasa de cambio funcionaba hoy de la manera siguiente:

Intercambio de cromos	**Intercambio de manualidades**
A cambio de 3 cromos de futbolistas se entregan 4 cromos de vehículos del futuro	Por dos pares de pendientes se entregan una pulsera

Alaitz tiene 8 pulseras y 12 cromos de futbolistas que le ha dado una amiga. Si los intercambia, ¿cuántos pendientes y cromos de vehículos del futuro podrá conseguir?"
Tarea: simula mediante manipulación la situación, escenifica, resuelve el problema gráficamente y por fin resuélvelo simbólicamente. Cambia las tasas de cambio y los datos necesarios y plantea nuevas preguntas; plantea cuestiones límite que requieran de discusión.
Escribe otro problema del mismo tipo pero extraído de un contexto totalmente diferente.

19. "Kepa sacó 24 fotos en cada uno de los tres primeros días de vacaciones. De todas ellas 6 eran de baja calidad. Los siguientes dos días sacó 12 fotos cada día, de las cuales 3 eran muy oscuras y por lo tanto de escaso valor. Kepa quiere elegir las cinco mejores fotografías de cada día y hacer un montaje

para colgarlo en una aplicación de internet. Esa aplicación tiene unas limitaciones técnicas: se pueden colgar un máximo de 10 páginas con fotos, teniendo cada página un máximo de 6 fotografías. ¿Podrá colocar las fotografías seleccionadas en la aplicación? ¿Y todas las fotografías, salvo las de baja calidad? ¿Y todas las fotografías?

- Realiza las operaciones necesarias apropiadas para resolver la situación.
- Borra los datos que no sean necesarios. Si todos lo son, añade datos redundantes.
- Si hay datos implícitos conviértelos en explícitos; si no los hay, reescribe el enunciado para que los haya.

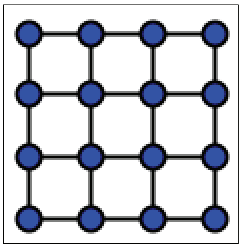
20. El objetivo didáctico del siguiente problema es utilizar la estrategia de ensayo-error. “He comprado 50 pasteles de fruta y chocolate. Los de fruta cuestan 2 € y los de chocolate 3 €. En total he gastado 133 €. ¿Cuántos he comprado de cada clase?”

¿Se presta el enunciado a interpretación? Escribe el enunciado de dos maneras diferentes: una más sintética y la otra más explicativa. Resuelve el problema de más de una manera. Utiliza representaciones gráficas y simbólicas. Aparte del objetivo señalado, puedes indicar otros objetivos didácticos que se trabajen con el problema.

21. “Ane y Ekaitz tienen 16 m. de tela para hacer los disfraces de carnaval. Ane necesita 6 m. más que Ekaitz. ¿Cuántos metros de tela necesita cada uno? Haz una representación gráfica de la situación y construye la solución razonando sobre la representación.

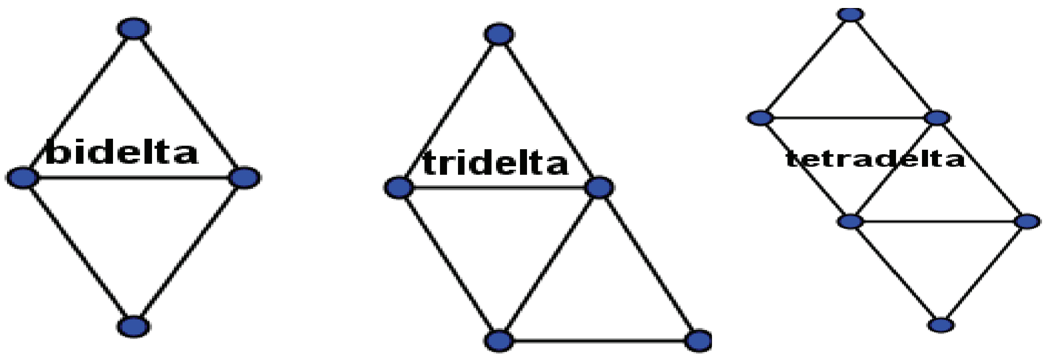
2.e.5.2. Problemas geométricos

1. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden dibujar en el siguiente geoplano 4 x 4?.



2. Polideltas

El elemento básico de los polideltas son los triángulos equiláteros. Los formados por dos triángulos se llaman bideltas, los de tres trideltas,….

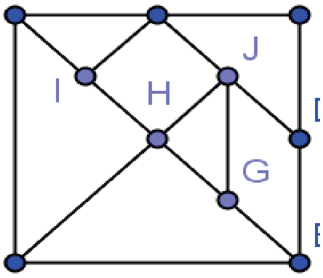


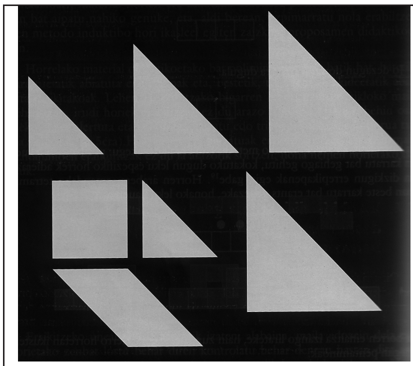
Dibuja un penta y un hexadelta y calcula cuántos hexadeltas se pueden construir.

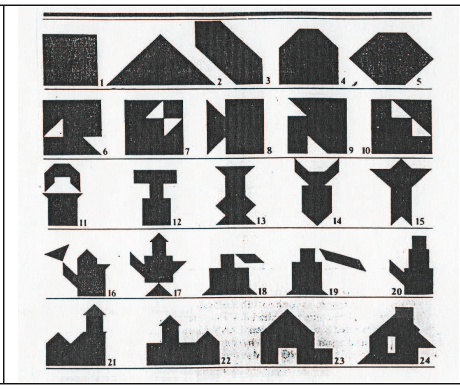
En la siguiente dirección puedes profundizar y realizar más actividades sobre polideltas: http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

3. Tangram

El Tangram es un puzle que se consigue al partir, de una determinada manera, una figura plana en varios trozos. Uniendo las diversas piezas del puzle se puede reconstruir la imagen plana inicial y, lo que es más interesante, muchas otras figuras. Hay muchos modelos de Tangram, pero el primero y más famoso es de origen chino, y se obtiene descomponiendo un cuadrado en las siguientes 7 piezas: un cuadrado, un paralelogramo y 5 triángulos rectángulos de áreas diferentes. El fundamento del juego consiste en partir de las piezas componentes y construir figuras de igual área. Además de ser un juego entretenido, permite trabajar la percepción y la imaginación.



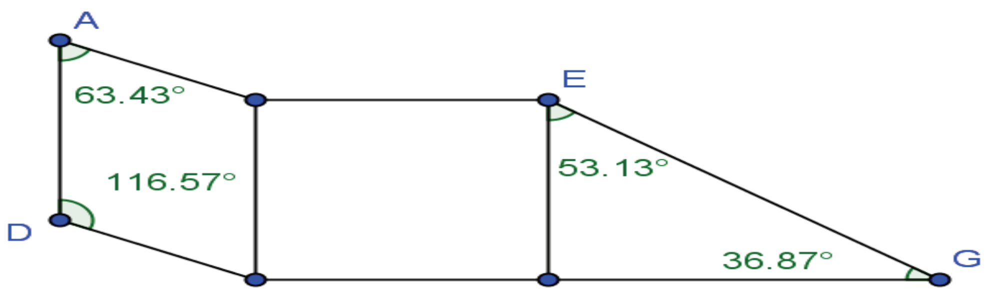




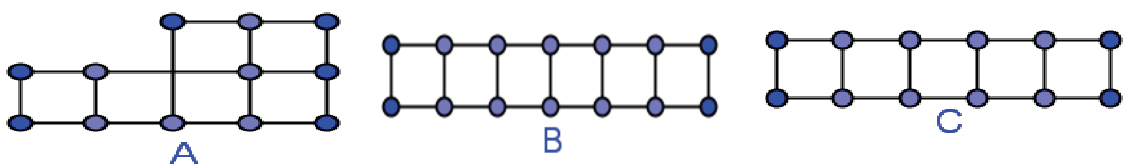
Encuentra la semejanza que existe entre las piezas básicas del tangram y estudia alguna de sus características. En parte derecha de la figura hay varias figuras que se pueden obtener partiendo de las piezas básicas del Tangram. Construye algunas de ellas.

4.Dictado de figuras.

Para trabajar el lenguaje geométrico y la comunicación mediante instrucciones precisas, se plantea una situación en la que un alumno dibuja una figura que debe describir verbalmente a otro que no la ha visto de la manera más precisa posible para que este último pueda reproducir la figura original. Después, se comparan las dos figuras y se analizan las dificultades que surgen en la comunicación. Practica esto con tu compañero, describiéndole con un lenguaje geométrico sencillo, pero preciso, la siguiente figura:



5. “Perímetro y área: los poliminós se pueden clasificar según el área y el perímetro. Después se pueden relacionar el área y el perímetro de cada poliminó. En la figura, los poliminós A y B tienen la misma área pero distinto perímetro y los poliminós A y C tienen el mismo perímetro pero distinta área”



Clasifica todos los tetraminós según el área y el perímetro. Encuentra la relación existente entre área y perímetro.

6. Área y volumen

Un día de frío, una persona mayor y un niño están al aire libre. Ambas van igualmente vestidas. ¿Cuál de las dos tendrá más frío? ¿Por qué? (Téngase en cuenta que todo objeto irradia el calor a través de su superficie). (*PERELMAN,Y.- "Matemáticas recreativas". Activ. 81. Colecc. "Muy interesante"*).

2.e.5.3. Otro tipo de actividades

1. "El tío de Tomas le dijo que si era capaz de encontrar la única moneda de oro que había mezclada con otras 23 de bronce se la regalaría. Las monedas eran iguales de forma, pero las de bronce pesaban algo menos que la de oro. Utilizando una balanza y en tres pesadas, ¿serías capaz de encontrar la moneda de oro?"

2. Máquinas y balanzas

Con balanzas y máquinas aparecen en los libros actividades muy interesantes, por una parte porque suelen venir acompañadas de una figura o un diagrama y por otra parte porque son adecuadas para trabajar conceptos de aritmética y lógica.

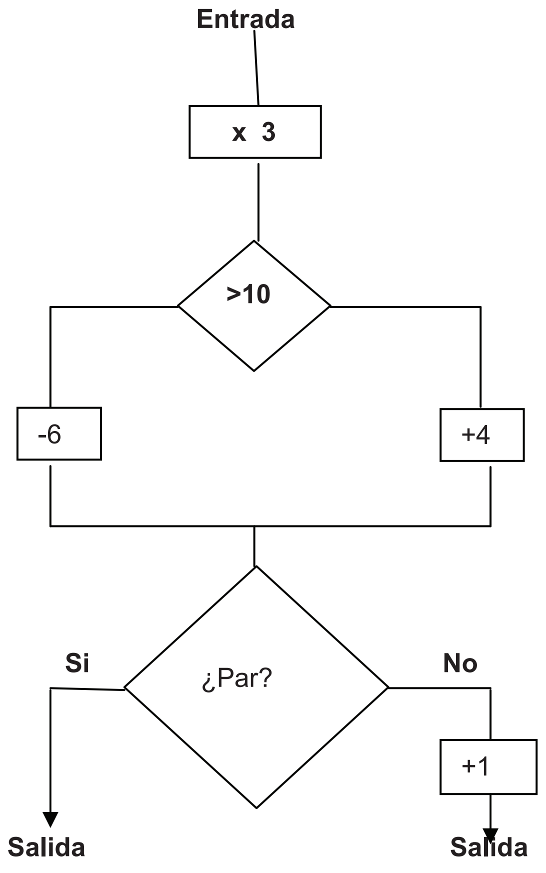
- Las máquinas pueden ser de dos tipos: *operadoras y controladoras*; las operadoras están relacionadas con las operaciones de la aritmética y son por lo tanto una representación simbólica del cálculo. Su estructura es:

Entrada → operación → salida

Las controladoras pueden incluir operaciones u otros conceptos, pero siempre se debe efectuar una comparación en relación a un criterio dado y según sea la respuesta se sigue por caminos diferentes. Su estructura es:

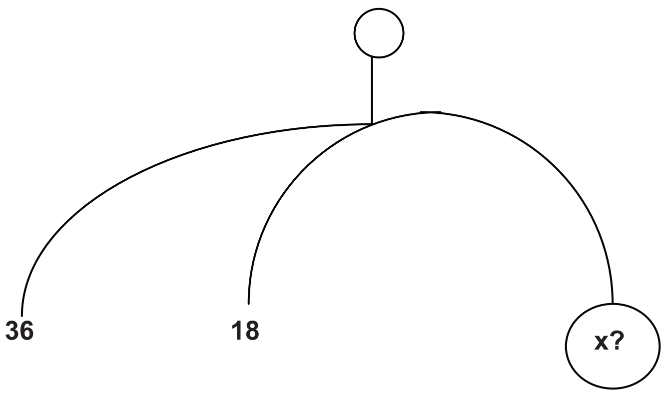
Entrada → comparación → salida

Ej.



Tarea didáctica: Construye una máquina de cada tipo y analiza los usos didácticos que pueden tener.

- Balanzas o colgantes



¿Cuál es el objetivo didáctico de esta balanza? Construye otras dos, distintas de la anterior, por la forma y por el tipo de operación que representen.

2.f. La Resolución de Problemas y el desarrollo de las Competencias Básicas.

Se entiende por competencia matemática *"la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral"*.

En esta sección se aportan ejemplos de actividades propuestas en los libros de texto de Primaria, que pueden ser apropiadas para ir consiguiendo cada una de las competencias básicas. Se analizan también, competencia por competencia, las características comunes y el tipo de actividades matemáticas que facilitan el logro de esa competencia.

- *Competencia en cultura científica, tecnológica y de la salud*.

En el logro de esta competencia son interesantes actividades matemáticas en las que se utilice la calculadora o se traten ejemplos contextualizados extraídos de la medicina o de la higiene (dependiendo del curso); también los que aportan información sobre determinados hechos científicos o relacionados con otros campos del saber.

Ej. "¿Ya sabías que los recién nacidos tienen 350 huesos, y los adultos solo 206. Esto es así porque al nacer muchos de nuestros huesos están separados y se fusionan con la edad. ¿Cuál es el hueso más largo de nuestro cuerpo?.

Alrededor de esta actividad se puede plantear la búsqueda de información complementaria, efectuar alguna clasificación y realizar alguna comparación de medidas. Aunque la utilización de las matemáticas sea elemental, los alumnos pueden llegar a asimilar su valor, y el de los números y medidas en general, para precisar la información que queramos dar en cualquier campo de la ciencia, para poder efectuar comparaciones y como consecuencia de esto último, realizar clasificaciones, ten importantes en el campo de las ciencias naturales.
Tarea didáctica: Encuentra o diseña otras actividades matemáticas que ayuden en el logro de esta competencia. Te pueden servir actividades relacionadas con la nutrición o con la medida del tiempo (calendario), pero también otras. Di, ¿en qué y cómo ayudan en el logro de la competencia?

- *Competencia para aprender a aprender*.

Para desarrollar esta competencia parecen muy adecuados los ejercicios de lógica, que ayudan a estructurar el pensamiento y enseñan el razonamiento, tan importantes los dos para poder acceder al aprendizaje de cualquier materia de una forma más efectiva y autónoma. Además los ejercicios en los que aparecen representaciones icónicas, esquemas, diagramas o máquinas ayudan en la asimilación de los conceptos nuevos de cualquier campo del saber. En concreto las actividades con máquinas reúnen todas las características tanto gráficas, como lógicas que ayudan a configurar la representación mental de un problema.

Ej. "*Máquinas*. Pueden ser operadoras o controladoras. Las operadoras efectúan operaciones (aritméticas o de otro tipo más complejas) y tienen la siguiente estructura: entrada – operación – salida. Las máquinas controladoras sirven para verificar si un objeto cumple determinadas condiciones y según sea la respuesta tomar una u otra decisión (se denominan por ello también, árboles de decisión). Su estructura es: entrada – comparación – salida (si o no)".

Pon un ejemplo de cada tipo de máquina y explica como ayudan a aprender el concepto concreto para el que se han diseñado. Utiliza también conceptos que no sean del campo de las matemáticas.

Tarea didáctica: Buscar otras actividades, bien de lógica, o bien en las que se incluyan o haya que hacer esquemas o diagramas y en las que el uso del razonamiento lógico y de la deducción ayuden en la consecución del resultado esperado. Explica cómo ayudan esas actividades en el desarrollo de esta competencia.

- *Competencia matemática*.

Esta es, evidentemente, la competencia más fácil de desarrollar desde las propias matemáticas. Se consigue "*mediante todos los ejercicios*" pero, sobre todo en Primaria, se tiende a señalar los ejercicios de aritmética como los más apropiados, ¿o simplemente asociados?, con el logro de la competencia matemática.

Ej. "¿Qué medirías en centímetros: la altura de una casa, la altura de la papelera de la clase, la anchura de un libro o la distancia entre dos ciudades?.

Al hacer estimaciones, o al dar soluciones aproximadas (medidas), utilizamos las matemáticas prácticas que se necesitan para resolver los problemas de la vida real. Estamos aplicando las matemáticas, que es uno de los principales valores por el cual son reconocidas.

Tarea didáctica: Busca otras actividades que no sean de aritmética y que consideres interesantes para la consecución de esta competencia. Elige actividades con sentido, situadas en un contexto y próximas al alumno.

- *Competencia en comunicación lingüística*.

En principio, parece una competencia difícil de lograr desde las matemáticas. Tradicionalmente, en las clases de matemáticas el aspecto lingüístico se limitaba a la redacción de los problemas, con un lenguaje un tanto especializado. Se ha reprochado a las matemáticas escolares que, aunque lo importante sea saber "hacer", los alumnos "hacían" pero no tenían oportunidades para expresar verbalmente aquello que habían hecho. Hoy en día, por fortuna, esta situación está completamente superada y son muchos los ejercicios en los que se da la oportunidad, y se pide, al alumno, que cuente lo que ha hecho, el proceso seguido, las dificultades que ha encontrado, e incluso sus estados de ánimo ante la tarea, bien a toda la clase o delante de un grupo pequeño en el que esté trabajando. Hay varios tipos de actividades apropiadas, tales como la realización o lectura de comics, teatralizar actividades, o lectura e interpretación de diversos tipos de planos (de ciudades, de búsqueda de tesoros,… etc.).

Algunos ejemplos:
- Utilización de la tortuga para realizar itinerarios (orientación, coordenadas).
- Comics.
- Rellenar los espacios vacios de un texto con determinados términos y siguiendo algún tipo de instrucciones.
- Teatralización de historia y situaciones.

Ej. "Expresa verbalmente cómo darías la respuesta en kilómetros y en metros", "expresar verbalmente, en un determinado problema, por qué puede ser interesante hacer un dibujo", "describir en un plano el itinerario que unos turistas han realizado" "Leer el enunciado de un problema y, a continuación, completarlo con cuestiones planteadas también de manera verbal".

- Competencia en el tratamiento de la información y competencia digital.

Es ésta una competencia que se trabaja en matemáticas desde el principio de cualquier curso o libro de texto, a través de numerosas actividades como, por ejemplo: empleo de gráficos estadísticos extraídos de un contexto determinado, actividades que tienen como objetivo el empleo inteligente de la calculadora, o actividades relacionadas con la búsqueda de información en Internet o de páginas web interesantes porque aportan información para la actividad o para las clases de matemáticas en general.

Ej. "En un gráfico de puntos, poner los postres que de cada tipo se han preferido en el comedor de la escuela, o el número de visitas que un dentista tiene a la semana".

Tarea didáctica: Encuentra o diseña una actividad relacionada con el tratamiento de la información y otra relacionada con la tecnología digital. Analiza el tipo de actividades que se pueden presentar para potenciar el uso de la tecnología digital y cita algunos recursos interesantes de internet que se puedan utilizar con este objetivo.

Tarea didáctica: En general, aunque haya excepciones, se debe utilizar la calculadora en el aula de una forma inteligente y no meramente como instrumento de cálculo. Cita cuatro actividades que se te ocurran, que se puedan realizar con la calculadora y que sean del tipo "empleo inteligente". ¿Dónde y para qué usarías la calculadora de forma sistemática?

- Competencia social y ciudadana.

Esta competencia se trabaja también de diversas formas, que podemos encontrar en numerosas actividades sacadas de la vida diaria; por ejemplo, cuando se citan los antecedentes ancestrales del sistema de numeración o cuando se emplea el sistema de unidades monetarias o la medida del tiempo mediante el calendario. Pero hay otras posibilidades, tales como el aprendizaje de medidas y pesos o el empleo de mapas, planos y orientación; a través de ellas se fomenta la competencia social y ciudadana en el alumno.

Ej. "Ámsterdam tiene 743.086 habitantes, Luxemburgo 84.832 y Berlín 3.404.037. ¿Cuántas personas viven en Ámsterdam? ¿Y en Berlín? ¿Cuál de las tres ciudades tiene mayor número de habitantes? ¿Y el menor?.

Tarea didáctica: Busca o diseña algunas actividades interesantes para desarrollar esta competencia desde las matemáticas. Busca 2 actividades para cada ciclo de Primaria. Esas actividades deben ser próximas al entorno del alumno y representativas de otras muchas posibles.

- Competencia en cultura humanística y artística.

En el desarrollo de esta competencia se pueden utilizar la mayoría de los ejercicios de geometría, pero sobre todo los relacionados con las formas geométricas observadas en elementos artísticos existentes en las ciudades o las derivadas de la naturaleza.

Ej. Dibuja algunos elementos decorativos para la Navidad teniendo en cuenta su simetría.

Tarea didáctica: ¿Para qué ciclo puede ser adecuada la actividad anterior? Encuentra objetos o formas geométricas que aparezcan en alguna construcción y prepara con ellos dos actividades adecuadas para el desarrollo de esta competencia.

- Competencia para la autonomía e iniciativa personal.

Aquí debemos señalar las actividades abiertas en las que se fomenta el trabajo cooperativo entre alumnos y la elaboración de informes o trabajos personales o grupales. Esas actividades responden al esquema: "investiga-crea-redacta". Por ejemplo, las siguientes:

- Salir a la calle y realizar una encuesta.
- Revista de matemáticas.
- Mediciones en situaciones reales.
- Dibujar figuras con regla y compás.

Tarea didáctica: Diseña una actividad relacionada con los ejemplos anteriores. Escribe el texto de la actividad, señala su objetivo; el alumno debe buscar información y estructurarla para realizar y presentar un trabajo. Se señalarán las fuentes utilizadas y se presentará la actividad a toda la clase.

Tarea didáctica: Encuentra las definiciones de “pensamiento divergente (o lateral)” y “pensamiento convergente”. ¿Por qué resulta de utilidad la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento divergente? ¿Con qué tipo de actividades se puede desarrollar el pensamiento convergente?.

BIBLIOGRAFÍA.

CALLEJO,M.L.- “La resolución de problemas en un club matemático”. Narcea. Madrid,1990.
CORBALAN,F.- “La Matemática aplicada a la vida cotidiana”. Grao. Barcelona,1995.
CORBALAN,F./GAIRIN,J.M.- “Problemas a mí 1.Cosas de números”. Edinumen. Madrid,1986.
CORBALAN,F./GAIRIN,J.M.- “Problemas a mí 2. Figuras planas.”. Edinumen. Madrid,1987.
CORBALAN,F./GAIRIN,J.M.- “Problemas a mí 3. Juegos matemáticos.”. Edinumen. Madrid,1988.
FERNÁNDEZ BRAVO, J.A.- “Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos”. Wolters Kluber. Bilbao, 2008.
GARCIA SOLANO,R.- “Confeccion y Resolución de Problemas en la Enseñanza Primaria”. Escuela Española. Madrid,1990.
GRUPO CERO.- “De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de Mate.”. Grupo Cero. Valencia,1984.
GUZMAN,M. de.- “Cuentos con cuentas”. Labor. Barcelona,1987.
MASON,J. et AL.- “Pensar matemáticamente”. Labor. Barcelona,1988.
NATI.COUNC.TEACH.MATHE .- “Sugerencias para resolver problemas”. Trillas. México,1979.
PERALES, F.J.- “Resolución de problemas”. Síntesis. Madrid, 2000.
POLYA,G.- “Cómo Plantear y Resolver Problemas”. Trillas. México,1981.
STACEY,K./GROVES,S.- “Resolver problemas. Estrategias”. Narcea. Madrid,1999.
SEGARRA, LLUÍS. Problemotes. Colección de problemas matemáticos para todas las edades. Ed. Graó. Madrid, 2004.

TEMA 3. Nuevas tecnologías y herramientas de visualización matemática.

3.a. La enseñanza de las Matemáticas y las TICs.

3.a.1. La competencia digital.

El concepto de sociedad del conocimiento trasciende al ámbito educativo, es un concepto de uso generalizado al que también se le denomina “sociedad red” o “sociedad de la información”.

La sociedad de la información y del conocimiento está impregnando a todos los estamentos de la sociedad y a los ciudadanos, sobre todo a los más jóvenes, en todas sus actividades profesionales y sociales, desde el trabajo, el consumo, la comunicación, hasta el ocio y la forma de relacionarse.

Esta sociedad del conocimiento supone que en el sistema educativo se hayan producido los siguientes cambios:

- Modificar el papel y la práctica del profesor. El profesor pasa a ser un asesor, facilitador del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- El alumno no es un reproductor de conocimientos, sino que es un usuario inteligente y crítico de la información.
- En la escuela se deben poder crear entornos virtuales de aprendizaje, facilitadores del aprendizaje individual y colaborativo.

Algunos datos sobre tecnologías digitales son los siguientes:

- Google España: 100 millones de visitas al día.
- Wikipedia: 13 millones de artículos, 680 millones de visitas, traducida a 200 idiomas.
- Blogs: en la web alrededor de 200 millones.
- Youtube: al día se visionan más de 100 millones de vídeos; desde su nacimiento se han visto más de 100.000 años de vídeo.
- A finales de 2010 las redes sociales contaban con más de 1.000 millones de usuarios en todo el mundo

3.a.2. Las TICs en la enseñanza de las matemáticas.

Las matemáticas tienen una antigüedad de 4000-5000 años pero el currículo práctico que se enseña en las escuelas se ha mantenido más o menos estable a lo largo del tiempo. Es conocido el dicho de que “de la escuela se sale sabiendo cinco cosas: las cuatro reglas y la regla de tres”, y el currículo real, el impartido, sigue siendo bastante estable: mucha aritmética, cálculo, bastante álgebra y análisis, poca geometría y casi nada de estadística y probabilidad.

El NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) considera que lo básico en matemáticas y por lo tanto aquello que se debiera trabajar en la escuela es:

1. Resolución de Problemas.
2. Cuantificar situaciones y razonar acerca de los números.
3. Realizar operaciones con una cierta soltura utilizando recursos.
4. Poseer competencia en el tema de la medida.
5. Resolución de problemas geométricos en contextos.
6. Razonamiento proporcional.
7. Símbolos para comunicarse.
8. Tablas y gráficos. Lenguaje funcional.
9. Incertidumbre.
10. Lenguaje algebraico.
11. TICs.

Se puede consultar el siguiente video en el que el matemático estadounidense Arthur Benjamin habla sobre la relevancia de las diferentes partes de las matemáticas y remarca como más importantes la Probabilidad y la Estadística:

http://www.ted.com/talks/arthur_benjamin_s_formula_for_changing_math_education.html (inglés)
http://www.youtube.com/watch?v=9O6dYmqthF0 (castellano)

Los conocimientos, las herramientas y las formas de usar y comunicar las matemáticas están evolucionando continuamente. Las exigencias de nuestra sociedad hacen que la capacidad de entender y usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo abra cada vez más oportunidades.

La informática y las matemáticas están, desde el mismo nacimiento de la primera, interrelacionadas. La informática aporta soluciones a las matemáticas y a la inversa. El indudable impacto que las TICs tienen en la escuela hace que sean un reto sin marcha atrás, también en la enseñanza de las matemáticas.

Se puede ver al respecto el siguiente video de Antonio Pérez (director del ITE y creador de audiovisuales de matemáticas) en el que se presenta la charla ofrecida en el Berritzegune de Sestao sobre matemáticas y TICs:

http://platea.pntic.mec.es/aperez4/matetic/matetic.html

3.b. Software educativo para la enseñanza de las matemáticas.

3.b.1. Logo.

Logo es un lenguaje de programación de alto nivel, en parte funcional, en parte estructurado; de muy fácil aprendizaje, razón por la cual suele ser el lenguaje de programación preferido para trabajar con niños y jóvenes. Fue diseñado con fines didácticos por Bobrow, Feurzeig y Papert los cuales se basaron en las características del lenguaje Lisp. Papert desarrolló un enfoque basado en su experiencia con Piaget a principios de los sesenta. Fundamentalmente consiste en presentar a los niños retos intelectuales que puedan ser resueltos mediante el desarrollo de programas en Logo. El proceso de revisión manual de los errores contribuye a que el niño desarrolle habilidades metacognitivas al poner en práctica procesos de autocorrección. Es conocido por poder manejar con facilidad gráficas, tortuga, listas, archivos y recursividad.

La "tortuga", es una tortuga virtual a la que se le dan instrucciones para crear dibujos. En algunas versiones la tortuga es un triángulo, en otras tiene la figura de una tortuga vista desde arriba. El tipo de instrucciones son por ejemplo: Avanza 100, Girar a la derecha 90, Girar a la izquierda 30.

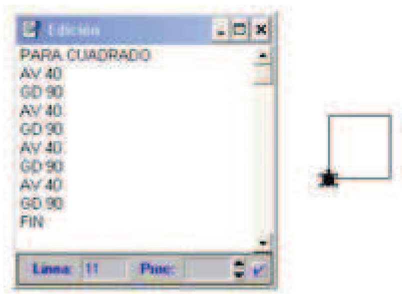
Una secuencia de instrucciones en Logo puede constituirse en un rudimentario programa, usándose como un bloque. Esta característica modular y reutilizable de las instrucciones hace que Logo sea muy flexible, recursivo, y apto para trabajarse en forma de módulos.

Existen diferentes versiones de Logo, por ejemplo la versión Logo libre llamada "Mswlogo", o el programa comercial "WinLogo" (creado en 1993).

Las órdenes más sencillas son las relacionadas con el dibujo, algunas de las cuales se recogen en el siguiente cuadro:

Sintaxis	Abreviatura	Ejemplo	Explicación
avanza *num*	**av** *num*	av 20	la tortuga avanza 20 pasos dibujando una línea de esa distancia en la dirección de su cabeza
retrocede *num*	**re** *num*	re 35	la tortuga retrocede 35 pasos dibujando una línea de esa distancia en la dirección de su cola
giraderecha *gra*	**gd** *gra*	gd 72	Gira su posición hacia la derecha 72 grados
giraizquierda *gra*	**gi** *gra*	gi 23	Gira su posición hacia la izquierda 23 grados
subelápiz	sl	sl	Levanta la punta del lápiz para que la tortuga no dibuje
bajalápiz	bl	bl	Baja la punta del lápiz para que la tortuga pueda dibujar
pongrosor *num*	pong *num*	pong 4	Pone el valor del grosor del lápiz entre 1 y 10
poncolorlápiz *num*	poncl *num*	poncl 7	Pone el color del lápiz de 0 a 256
borrapantalla	bp	bp	Borra la pantalla de gráficos y coloca la tortuga en el centro con rumbo 0
ponrumbo *gra*	-	ponrumbo 45	Sitúa la tortuga con un rumbo de 45 grados contados a partir de la vertical y hacia la derecha
goma	-	goma	La tortuga se comporta como un borrador en vez de como un lapicero
ocultatortuga	ot	ot	Hace invisible la tortuga
muestratortuga	mt	mt	Hace visible la tortuga
rellena	-	rellena	Rellena una figura cerrada del color de la tortuga siempre que ésta esté dentro de la figura

Con estas primitivas ya podemos realizar cualquier dibujo en la ventana de Gráficos. Un ejemplo: el programa CUADRADO dibuja un cuadrado de lado 40 tal como aparece en la imagen:



3.b.2. Geometría Dinámica.

En geometría se han producido avances importantes. Se denominan "geometría dinámica" a algunos programas de gran potencial para la enseñanza – aprendizaje de la geometría, que permiten, en forma sencilla, construir objetos geométricos y luego trasladarlos, girarlos, y estudiar en ellos aspectos tales como, simetría o proporciones. Se pueden ver y manipular los objetos matemáticos, salvando algunas de las dificultades que habitualmente surgen en el estudio de la geometría clásica, como la rigidez, la dificultad en la construcción, la falta de visión del problema en su conjunto, etcétera. La herramienta de animación permite poner en movimiento simultáneamente varios elementos de una construcción para así poder explorar las propiedades de una figura al actuar sobre sus elementos variables, favoreciendo así el desarrollo de los conceptos matemáticos, permitiendo visualizar, experimentar, consultar propiedades, simular, descubrir regularidades, etcétera. Con este tipo de programas el alumno pasa de la exploración a la comprensión.

Algunos elementos comunes a los programas de geometría dinámica son:

- Construir figuras geométricas en el plano o el espacio, combinando los objetos fundamentales de la geometría: puntos, rectas, segmentos, circunferencias, planos, sólidos, transformaciones...
- Conectar geometría y algebra, midiendo longitudes, ángulos, áreas, volúmenes... .Se puede acceder a esos datos numéricos directamente sobre la figura para utilizarlos en cálculos o en expresiones algebraicas.
- Explorar las propiedades de una figura actuando sobre sus elementos variables. Observando los efectos de las deformaciones, reducciones y agrandamientos dinámicos, se pueden establecer conjeturas sobre sus propiedades que posteriormente se verifican mediante la manipulación de la figura.
- Facilitan la introducción y la asimilación de nuevas nociones, favorecen la iniciación en la demostración de teoremas y ayudan a modelizar situaciones reales.
- Las construcciones se pueden integrar en páginas Web.

3.b.3. Cabri.

A principios de los años 80, Cabri-Graph es concebido por el equipo EIAH del Laboratorio Leibniz, en Grenoble, Francia, para trabajar teoría de gráficas. Unos años más tarde, se pensó en un paquete que permitiera crear, modificar y manipular figuras geométricas en tiempo real; Cabri-Géomètre fue desarrollado por el investigador Jean-Marie Laborde, y contó con la colaboración de Frank Bellemain. Posteriormente, se incluyó este programa en algunas calculadoras que se denominan calculadoras geométricas.

Con Cabri algunos temas de geometría, como por ejemplo las transformaciones en el plano, los lugares geométricos, la resolución gráfica de problemas, pueden ser tratados sin exigir grandes conocimientos matemáticos, favoreciendo una metodología en la que el alumnado participa de forma activa en su aprendizaje, haciendo hincapié en la importancia de que realicen sus propios descubrimientos. Por ejemplo, es posible medir las figuras, representar las ecuaciones que les corresponden, comprobar sus propiedades geométricas y realizar cálculos vinculados a sus propiedades.

El Cabri 3D tiene herramientas de visualización tridimensional tales como:

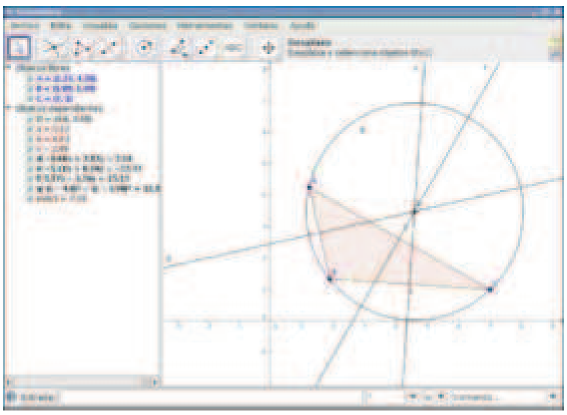
- Girar alrededor de la escena, pasando de manera continua de un ángulo de vista a otro. Apreciar el efecto de profundidad.
- Visualizar las diferentes representaciones y perspectivas de una misma figura: las 3 vistas del dibujo técnico, la perspectiva caballera, …

3.b.4. Geogebra.

GeoGebra es un software matemático libre interactivo, diseñado para la educación y para la enseñanza de las matemáticas. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad Atlantic de Florida.

GeoGebra es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico", de ahí su nombre “geogebra”, pero además las últimas versiones también disponen de hoja de cálculo.

Con GeoGebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas... etc.; mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos. Todo lo trazado es modificable en forma dinámica: es decir que si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B pasa a ajustarse y actualizarse para mantener las relaciones correspondientes con A.



Desde la página web oficial de geogebra se pueden descargar tanto el programa como el manual: http://www.geogebra.org/

La última versión 4.0 incluye mejoras tales como: seleccionar un punto en el interior de un objeto, incluir botones y campos de texto editables, herramientas para dibujar a mano alzada (lápiz), dibujar polígonos rígidos o polilíneas. También se añade la capacidad para representar funciones de más de una variable, logaritmos y además incluye una versión para estudiantes de Primaria llamada GeoGebraPrim.

Está en preparación la versión tridimensional del programa que permitirá dibujar planos, pirámides, cilindros y esferas.

3.c. Recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas.

3.c.1. Proyectos del ITE (Instituto de Tecnologías Educativas).

El Instituto de Tecnologías Educativas es un organismo del. Ministerio de Educación y Ciencia que viene trabajando en los últimos años diversos proyectos para la integración de las tecnologías de la información en el mundo educativo.

Entre sus objetivos se encuentra el de facilitar el "acceso a materiales digitales educativos" y en relación con las matemáticas el de aportar una "forma diferente y creativa de aprender y enseñar matemáticas con las nuevas herramientas digitales"

Algunos de los proyectos impulsados por el ITE para la enseñanza de las matemáticas son, o han sido, los siguientes:

- Proyecto Descartes
- Proyecto PI: Pizarra Interactiva (Enseñanza Primaria)
- Proyecto CANALS: 150 actividades para Infantil y Primaria de Antonia Canals
- Premios de materiales curriculares
- Proyecto Agrega: 140.000 objetos digitales con 4 niveles de agregación
- Proyecto Gauss
- Red social de publicación de buenas prácticas y de intercambio de experiencias, materiales, denominado "Buenas prácticas".
- Acceso a software libre

<u>Proyecto Gauss</u>.

Cabe destacar el Proyecto Gauss de enseñanza de las matemáticas, que dispone de más de 500 actividades y está integrado en un proyecto más ambicioso denominado Escuela 2.0. Su estructura es la siguiente:

- Base del proyecto Geogebra
- Materiales introductorios
- Foro de usuarios
- Materiales de aprendizaje
- Recursos complementarios
- Formación del profesorado
- Lista de correo para acceder a toda la información actualizada sobre Geogebra
- Las actividades se pueden poner en página web.

Los principios que rigen el proyecto son:

- Se aprende haciendo
- Matemáticas útiles y matemáticas que presentan modelos
- Estrategias concretas ligadas a un contexto; ciertos aspectos se generalizan para obtener un conocimiento más formal y sintetizado
- Conectividad: conexión entre conceptos y combinación de procedimientos
- Comunicación: discusión de ideas e informe escrito
- Orientación: objetivos a medio y largo plazo

Se trata de crear escenarios ricos para que la manipulación permita hacer y aprender matemáticas (variar, observar, explorar). Los escenarios son versátiles y proceden de diversos contextos. El problema que siempre se ha planteado con este tipo de materiales estructurados ha sido la interacción entre el alumno y los materiales; por ejemplo si en Google se escribe "matemáticas interactivas" surgen una serie de direcciones que en realidad tienen poco de interactivas.

Pasemos a describir someramente el proyecto. Si nos centramos en Primaria se divide en tres bloques cada uno de los cuales con varias secciones:

- Aritmética: números naturales, patrones, números decimales, cálculo mental.
- Geometría: acertijos, procedimientos, medir, ángulos, polígonos, escalas y planos, curvas, simetrías, cuerpos.
- Estadística y probabilidad: recuento, medidas, estimación.

3.d. Las actividades.

Una actividad es un ítem didáctico, también denominado objeto digital. Vienen acompañadas de un cuestionario que dirige la acción del alumno y que le aporta información para realizarla. Contienen dos botones, uno para obtener instrucciones de uso y el otro para obtener información complementaria. Cada actividad tiene asociado un nivel orientativo. Todo es abierto, las actividades se pueden cambiar, traducir el texto de la actividad a otro idioma y cambiar la construcción de Geogebra en la que se sustenta. Tienen licencia creative common, en la que los cambios están permitidos siempre que se cite el objeto original.

Para Primaria hay unas 150 actividades, algunas de ellas enlazadas con otras de la ESO (se indica con el signo + escrito al lado de la actividad).

Ejemplos de actividades:

- Conseguir con plegado alguna figura que se indica
- Estudiar determinados puntos importantes del triángulo
- Se ofrecen varias figuras (8) que parecen cuadrados, pero al manipularlas se ve que solo una de ellas lo es realmente
- Reloj para estudiar la divisibilidad
- Actividades en las que se pueden manejar escuadra, cartabón y transportadores
- Matemáticas que hay detrás del funcionamiento de un paraguas, o de una cinta de cassette
- Interpretación de la solución de un problema
- Matecuentos: problemas planteados dentro de una historia. Ponle cuento a las cuentas.

Por ejemplo, con la actividad denominada "Polígonos estrellados", se presenta un polígono estrellado de cinco puntas y se le proponen al alumno cuatro acciones:

1. Medir con transportador los ángulos de las puntas
2. Sumarlos para ver que se obtiene 180º
3. Repetirlo con otra disposición
4. Análisis: conjeturas, conclusiones

La segunda parte de la actividad consiste en la comunicación de lo realizado y observado mediante la escritura de un informe.

Dentro de la sección denominada "Recursos complementarios" hay muchas construcciones sueltas y actividades por niveles que se inician desde Infantil.

Algunos interrogantes:

En las aplicaciones interactivas para Primaria no se suele tratar el currículo por bloques de contenidos sino por actividades (centros de interés). Esto hace que surjan algunos interrogantes prácticos que plantea la enseñanza, de las matemáticas o de cualquier otra materia, como los siguientes:

¿Dónde está el equilibrio entre libro de texto y trabajo mediante TICs?

Tratamiento que se le da a la dispersión de conocimientos.

¿Saben los alumnos, después de realizar investigaciones, qué es lo que han aprendido? (Fijación de aprendizajes en el método de investigación).

3.e. Páginas web.

3.e.1 Divulgamat. http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RetosMatematicos/index.asp

Algunas de las secciones que contiene son las siguientes:

- Retos Matemáticos: El problema de la quincena (Santi Fernandez)
- Historia de las Matemáticas: Biografías de matemáticos ilustres, obras clave en la historia de las matemáticas, historia de las matemáticas a través de la imagen, biografías y caricaturas de matemáticos españoles, catálogo de autores y libros de matemáticas en la España del siglo XVI y siglo XIX
- El humor gráfico matemático
- Publicaciones de divulgación: libros de divulgación matemática, videos didácticos, matemáticas en los medios de comunicación,..
- Textos on-line: mujeres y matemáticas, 13 retratos; Día escolar de las matemáticas,…
- Exposiciones virtuales: fotografía y matemáticas, arte y matemáticas,…
- Cultura y matemáticas: papiroflexia y matemáticas, música y matemáticas, teatro y matemáticas, cine y matemáticas, literatura y matemáticas,…
- Recursos en Internet: Didácticos, Internet y matemáticas para educación primaria

3.e.2. Matemáticas en tu mundo. http://catedu.es/matematicas_mundo/

Algunas de las secciones que contiene son las siguientes:

- Matemáticas en: Arte, cine, deportes, poesía, sociedad, …
- Fotografías matemáticas: fractales, espirales, mosaicos, naturaleza,…
- Humor: chistes, matemáticos y otros gremios, gazapos, humor gráfico, Prensa insólita
- Multimedia: Power-point y Vídeos
- Redes sociales: Eduardo Punset entrevista a un matemático (video)
- Cine: Matemáticos en la intimidad, matemáticas en el cine y series de televisión (un regalo para el aula)

3.e.3. Recursos de matemáticas en internet. http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html

Algunas de las secciones que contiene son las siguientes:

- Matemático del día.
- Recursos clasificados por nivel educativo: infantil, primaria,…
- Legislación educativa
- Enlaces diversos

3.e.4. Matemáticas (página web de Antonio Perez). http://platea.pntic.mec.es/aperez4/
Proyecto Gauss: actividades de primaria y secundaria con Geogebra
Escuela 2.0
Matemáticas y TIC: entrevista Berritzegune de Sestao (http://platea.pntic.mec.es/aperez4/)
Series matemáticas en videos: La aventura del saber, Más por menos
Historia de los principales símbolos matemáticos

Página web de Manuel Sada sobre Geogebra
En está página se encuentran múltiples ejemplos de las posibilidades didácticas que el geogebra ofrece para el aprendizaje de la geometría.
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm

3.e.5. Otros.

Página de la UNESCO, con una exposición de temas matemáticos
http://www.experiencingmaths.org/

Recursos catalogados y comentados por profesores de todos los niveles y áreas educativas:
http://www.educacontic.es/

Página del número Pi http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm

Página de la RSME (Real sociedad matemática española)
http://www.rsme.es/component/option,com_weblinks/catid,43/Itemid,23/

Página de Godino, J. Matemáticas para Maestros.
http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.html
www.ugr.es/jgodino

Página de educared
http://www.educared.net/

Página del NCTM
www.nctm.org

Maths Thesaurus
http://thesaurus.maths.org

3.e.6. Base de datos multilingüe (actualmente 9 idiomas) en red.

De acceso libre, contiene más de 4000 conceptos Matemáticos con más de 14000 conexiones-relaciones entre ellos. La versión inglesa se desarrolla en la Universidad de Cambridge. La versión española se desarrolla en la Universidad de Cantabria.

3.e.7. Libros de texto digitales.

Hoy en día, la mayoría de las editoriales han puesto, todos o algunos de sus materiales educativos, en formato digital; esto hace que, en mayor o menor medida, se permita la interactividad con el alumno, e incluso el diseño personalizado del libro de texto al ir incorporando en él elementos nuevos desarrollados por el propio alumno. Bien es verdad que todavía es un mercado incipiente y no supone más del 2% del mercado editorial en 2011, sin embargo, es una opción de futuro, adoptada ya en algunos países y materializada mediante convenios firmados con diversas editoriales para su elaboración.

Algunas editoriales que disponen de textos digitales son:

Digital-text

Disponen de materiales para 5º y 6º de Primaria de varias materias, entre ellas para matemáticas. En la página web se puede consultar alguna muestra de los materiales.
http://www.digital-text.com/

Asociación nacional de editores (ANELE)

Si se efectúa una consulta de la producción digital de las editoriales asociadas, para la materia de matemáticas y enseñanza de tipo general, aparecen 95 títulos, tanto de primaria como de secundaria.
http://anele.org/

ITE (Instituto de tecnologías educativas).

En WikiDidáctica, dentro de la sección de Buenas prácticas, se encuentran diversos materiales, entre ellos algunos de matemáticas, para Primaria, que los denominan “objeto digital interactivo”. Están en la siguiente dirección:

http://recursostic.educacion.es/buenaspracticas20/apls/MediaWiki/index.php/P%C3%A1gina_Principal
http://recursostic.educacion.es/buenaspracticas20/apls/MediaWiki/index.php/Categor%C3%ADas_de_materia
http://recursostic.educacion.es/buenaspracticas20/apls/MediaWiki/index.php/Categor%C3%ADas_de_Matem%C3%A1ticas_en_Primaria
(en la última dirección están los de matemáticas)

Actividades.

1. Comprobar que las páginas web seleccionadas existen y disponen de las secciones señaladas. Si no es así, señalar las diferencias. Señalar también las especificidades de cada una de ellas. Hacer una comparación y un análisis crítico de las páginas en relación a su utilidad didáctica para la enseñanza de la materia en Primaria.

2. Buscar otras páginas web, en diferentes idiomas, que puedan ser interesantes. Señalar sus características y sus especificidades.

3. Los recursos aportados por el ITE son, como habrás podido observar, numerosísimos y difíciles de clasificar. Dentro de ellos hay proyectos específicos, materiales, blogs,…etc. Te proponemos que los analices en profundidad, los clasifiques y selecciones los que sean interesantes para la enseñanza primaria.

4. Respecto de los libros digitales, analizar las muestras que puedas encontrar de textos de primaria y señala sus principales características y las diferencias y ventajas e inconvenientes que tienen con respecto a los textos en papel. ¿Son realmente interactivos?

5. En Logo, hacer, mediante el dibujo gráfico, dándole a la tortuga las instrucciones adecuadas, algunos polígonos de tres, cuatro, cinco y seis lados.

6. En algunos libros de texto la tortuga se utiliza para introducir la orientación en el plano. Busca alguna actividad preparada con este fin y transcríbela a Logo. Diseña alguna otra actividad con este mismo propósito. ¿Qué otras posibilidades didácticas le ves a la utilización de Logo?

7. Señala los principales elementos que constituyen el programa Geogebra. Indica como se pueden realizar algunas construcciones elementales (polígono, mediatriz,…). Analiza las diferentes aplicaciones didácticas preparadas para primaria y señala sus potencialidades didácticas.

8. Busca y clasifica varias páginas que consideres interesantes relacionadas con Geogebra.

9. Expresa tu opinión, escribiendo un pequeño informe con pros y contras, sobre la conocida creencia de que “La informática y las TICs están bien como elemento motivador y de apoyo, pero siempre acompañando al libro de texto”