PRÁCTICAS para el APRENDIZAJE de la ECONOMETRÍA AVANZADA

M. Victoria Esteban, Juan Modroño
Susan Orbe y Marta Regúlez

Dpto. Economía Aplicada III (Econometría y Estadística)
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
UPV/EHU

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

www.argitalpenak.ehu.es
ISBN: 978-84-9860-743-7

ISBN: 978-84-9860-743-7

Prácticas para el Aprendizaje de la ECONOMETRÍA AVANZADA

Dra. María Victoria Esteban González
Dr. Juan Ignacio Modroño Herrán
Dra. Susan Orbe Mandaluniz
Dra. Marta Regúlez Castillo

Departamento Economía Aplicada III (Econometría y Estadística)

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

Contenido

Presentación

En este libro, los autores han recolectado y ordenado el material docente que han ido elaborado a lo largo de los últimos cursos académicos para la asignatura de Econometría de la Licenciatura en Economía en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la UPV/EHU. Los autores han colaborado en distintos Proyectos de Innovación Docente que han permitido desarrollar la asignatura con aprovechamiento de las TICs. Los autores han participado, entre otras actividades, en programas de innovación docente impulsados desde el Vicerrectorado de Calidad e Innovación Docente de la UPV/EHU para adaptar las asignaturas impartidas al crédito ECTS y aplicar nuevas metodologías docentes.

El sistema de docencia que actualmente se impulsa desde el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) tiene como ejes fundamentales el proceso de enseñanza-aprendizaje y la adquisición de competencias específicas de una materia y de competencias transversales. Este hecho implica un nuevo diseño y organización de los contenidos de la asignatura para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje y la adquisición de conocimientos y destrezas. En los últimos cursos académicos la metodología docente se ha basado en clases magistrales, clases prácticas de aula y de ordenador, seminarios y talleres. La evaluación continua conlleva la realización de diversas actividades en clase. Estas incluyen, test rápidos, preguntas cortas sobre conceptos teóricos y prácticos tanto para realizar a mano como en el ordenador. Del resultado obtenido de estas actividades se deduce si el estudiante ha adquirido cierto nivel de competencias tanto específicas como transversales.

El material que se proporciona, convenientemente revisado y organizado es el núcleo de este libro. Los posibles usos de este material son variados. Por una parte, se proporciona material docente para la autoevaluación del estudiante o bien material que el docente puede usar para la evaluación de ciertos aspectos de la materia en las clases prácticas y en los seminarios organizados. Por tanto, el material está destinado a apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de una asignatura de Econometría Avanzada de los Grados en Economía, Administración y Dirección de Empresas, Marketing, Fiscalidad y Administración Pública, y Finanzas y Seguros así como de las Licenciaturas en Economía y Administración y Dirección de Empresas, ambas en extinción. Así mismo sirven de apoyo a estudiantes de master como por ejemplo el Master Universitario en

Economía: Instrumentos del Análisis económico o el Máster Universitario en Banca y Finanzas Cuantitativas.

Por otro lado, sirve de apoyo como material de autoevaluación para aquellos estudiantes que cursan las licenciaturas en extinción. No obstante, en ningún caso deben utilizarse como sustituto de libros que abarcan conceptos teóricos y prácticos.

Este libro se organiza en cuatro partes. La primera parte está dedicada resumir someramente qué tópicos se estudian en Econometría Avanzada. Entre ellos cabe citar la introducción del concepto de perturbaciones no esféricas junto con los conceptos de heterocedasticidad y autocorrelación, la importancia de la existencia de regresores estocásticos en la matriz de regresores y la inclusión de la variable endógena retardada como regresor del modelo. En este breve resumen se establece la nomenclatura que se utiliza en el resto del libro. La segunda parte presenta una colección de cincuenta y cinco enunciados de ejercicios, desarrollados en el mismo orden de los tópicos y con dificultad creciente. Los ejercicios E1 a E5 estudian el concepto de perturbaciones no esféricas. Los ejercicios E6 a E24 abordan el problema de heterocedasticidad mientras que el problema de autocorrelación se estudia en los ejercicios E25 a E34. De E35 a E55 se dedican a la existencia de regresores estocásticos. La tercera parte presenta veintiséis prácticas que desarrollan los contenidos de Econometría Avanzada pormenorizadamente, permitiendo un aprendizaje autónomo por parte del alumno mientras que en la cuarta parte se muestran sus soluciones detalladas. Finalmente se selecciona material bibliográfico útil para el aprendizaje de los conceptos de Econometría.

La resolución de los ejercicios propuestos requiere conocer aspectos teóricos y prácticos de la econometría a un nivel avanzado y que el alumno deba realizar las operaciones necesarias con calculadora o bien empleando el ordenador con un software adecuado. En particular, los autores recomendamos Gretl[1], un software libre especialmente dirigido hacia la práctica de la econometría y la estadística que presenta una curva de aprendizaje plana. Ha sido elaborado por Allin Cottrell (Universidad Wake Forest) y existen versiones en inglés, castellano y euskera, además de en otros idiomas. Junto con el programa se pueden cargar los datos utilizados como ejemplos de aplicaciones econométricas en los siguientes libros de texto: Davidson y Mackinnon (2004), Greene (2008), Gujarati (1997), Hill et al (2001), Ramanathan (2002), Stock y Watson (2003), Verbeek (2008), Wooldridge (2003). Al instalar Gretl automáticamente se cargan los datos utilizados en Ramanathan (2002) y Greene (2008). El resto se pueden descargar de la página:

$$http://gretl.sourceforge.net/gretl\_data.html$$

en la opción *textbook datasets*. Este curso se estructura sobre casos prácticos presentados principalmente en Ramanathan (2002) y en Wooldridge (2003) y ejercicios a resolver con

[1] Acrónimo de Gnu Regression, Econometric and Time Series (Biblioteca Gnu de Regresión Econometría y Series Temporales).

ayuda de Gretl.

Gretl también da acceso a bases de datos muy amplias, tanto de organismos públicos, como el Banco de España, como de ejemplos recogidos en textos de Econometría. En la página

$$http://gretl.sourceforge.net/gretl\_espanol.html$$

se encuentra la información en castellano relativa a la instalación y manejo del programa.

Parte I

Econometría Avanzada

Los contenidos de Econometría Avanzada profundizan en el estudio de la materia abordando distintos tópicos relacionados con la relajación de alguna de las hipótesis básicas sobre la perturbación, los regresores y la dinámica del modelo. Esteban y Regúlez (2010) es un complemento teórico-práctico a este material ya que se desarrollan detalladamente los conceptos que se trabajan con esta colección de ejercicios. Para repasar o fijar conceptos básicos de la econometría se puede consultar Fernández y González (2009) o bien González y Orbe (2012). Para recordar el manejo del programa Gretl se puede consultar Esteban et al (2008) o Esteban, Modroño y Regúlez (2011).

La notación utilizada en esta publicación se corresponde en su mayoría con la usada en González y Orbe (2012). Sin embargo, merece la pena dedicar un tiempo a contextualizar los conceptos que van a desarrollarse en relación a la estimación e inferencia del modelo de regresión lineal general. Este tema introductorio pretende limitar el marco del trabajo.

Escribimos el Modelo de Regresión Lineal General:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \ldots + \beta_K X_{Kt} + u_t \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{1}$$

donde explicamos el comportamiento de la variable endógena Y con un conjunto de variables exógenas o ficticias, $X_{2t}, X_{3t}, \ldots, X_{KT}$ siendo K el número de coeficientes a estimar. La variable aleatoria u se denomina perturbación o error y no es observable. Recoge todo aquello del comportamiento de la variable endógena que no es recogido por las variables exógenas. Los coeficientes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ son los parámetros desconocidos de la relación y son los que queremos determinar. Para obtener valores factibles del promedio de Y a partir de una muestra de tamaño T, podemos utilizar una estimación por punto o una estimación por intervalo. Un estimador del vector de parámetros $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K)$ es una función de la muestra luego es una variable aleatoria.

En general se supone que se cumplen las siguientes hipótesis:

- *Sobre la relación:* lineal en los coeficientes, o linealizable, además de correctamente especificada.

- *Sobre los coeficientes:* se supone que son constantes a lo largo del periodo muestral.

- *Sobre los regresores:* Suponemos que $X = (\vec{1}, X_2, X_3, \ldots, X_K)$ es una matriz de regresores que no son realizaciones de variables aleatorias (en adelante v.a.), es decir, son regresores no estocásticos. Este supuesto se puede entender como un análisis condicionado a unos valores dados de las variables explicativas[2]. Además, sobre los regresores suponemos también que la matriz X es de rango completo por columnas, $rg(X) = K$.

[2] En ocasiones este tipo de análisis no será posible y tendremos que considerar que X es una matriz estocástica.

- <u>*Sobre las perturbaciones u*</u> se supone que:
  - Media cero, $E(u_t) = 0 \quad \forall t$,
  - Varianza constante $E(u_t^2) = \sigma^2 \quad \forall t$, es decir, son homocedásticas.
  - Covarianzas cero, $E(u_t u_s) = 0 \quad \forall t, s \quad t \neq s$ luego son no autocorreladas.
  - Distribución normal, $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Las T-ecuaciones recogidas en (1) dan lugar a la siguiente expresión matricial del MRLG:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \ldots & X_{K1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \ldots & X_{K2} \\ 1 & X_{23} & X_{33} & \ldots & X_{K3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2T} & X_{3T} & \ldots & X_{KT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_T \end{bmatrix}$$

$$\underset{(T\times 1)}{Y} = \underset{(T\times K)}{X} \quad \underset{(K\times 1)}{\beta} + \underset{(T\times 1)}{u}$$

Las hipótesis establecidas sobre la perturbación nos definen el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas siguientes:

$$E(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad E(uu') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_T.$$

Matricialmente escribimos el modelo junto con los supuestos sobre la perturbación:

$$Y = X\beta + u \qquad u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_T).$$

Para lograr nuestro objetivo de estimar los coeficientes $\beta_1, \ldots, \beta_K$ desconocidos proponemos utilizar el criterio de estimación Mínimo Cuadrático Ordinario, MCO, donde se minimiza la Suma de Cuadrados Residual del modelo. Matricialmente el criterio se escribe:

$$\underset{\hat{\beta}}{Min}\ \hat{u}'\,\hat{u} = \underset{\hat{\beta}}{Min}\ (Y - X\hat{\beta})'\,(Y - X\hat{\beta}).$$

Las ecuaciones normales que se obtienen de las condiciones de primer orden son:

$$(X'X)\hat{\beta} = X'Y$$

a partir las cuales derivamos el estimador de los parámetros β:

$$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'Y).$$

Además, en general, la varianza de la perturbación será desconocida. Como estimador de proponemos:

$$\hat{\sigma}^2_{MCO} = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-K}.$$

Bajo las hipótesis establecidas el estimador MCO del vector de parámetros desconocidos β es un estimador lineal en la perturbación ya que lo único aleatorio de su expresión es el vector de perturbaciones. Es insesgado ya que la perturbación es de media cero y es de varianza mínima en muestras finitas ya que $E(uu') = \sigma^2 I_T$. En muestras grandes o asintóticas es consistente. El estimador propuesto para σ^2 es insesgado y consistente.

Dado que el estimador MCO es lineal en la perturbación sigue la misma distribución que ésta. Si conocemos la distribución de la perturbación y es normal, el estimador MCO en muestras finitas tiene distribución conocida normal

$$\hat{\beta}_{MCO} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$$

siendo posible derivar estadísticos de contraste válidos, los habituales estadísticos con distribución conocida t-Student y F-Snedecor respectivamente.

Así contrastamos q restricciones lineales bajo $H_0 : R\beta = r$ versus $H_a : R\beta \neq r$ con el estadístico:

$$F = (R\hat{\beta} - r)' \, [\, R\,\widehat{V}(\hat{\beta})\,R'\,]^{-1}\,(R\hat{\beta} - r)\,/\,q \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T-K).$$

Si $q = 1$ puede emplearse un estadístico más simple que se distribuye como una t-Student:

$$t = \frac{R\hat{\beta} - r}{\sqrt{R\,\widehat{V}(\hat{\beta})R'}} \overset{H_0}{\sim} t(T-K).$$

Las distribuciones tabuladas de estos estadísticos nos permiten estadísticamente, distinguir a un nivel de significación elegido si aceptar o no la hipótesis nula dado el valor del estadístico obtenido en la muestra. Si $F > \mathcal{F}(q, T-K)_\alpha$ se rechaza la hipótesis nula para un nivel de significatividad α dado. O si $t > t(T-K)_{\frac{\alpha}{2}}$ se rechaza la hipótesis nula para un nivel de significatividad α dado.

Sin embargo, cuando el estimador no es lineal en u o cuando aún siéndolo la distribución de u es desconocida, no es posible derivar la distribución en muestras finitas del estimador MCO. Es en este escenario si podemos obtener la distribución asintótica del estimador, podremos derivar estadísticos de contraste válidos asintóticamente.

Si estamos interesados es realizar contrastes de hipótesis de la forma $H_0 : R\beta = r$ en el modelo de regresión lineal $Y = X\beta + u$ con $u \sim ID(0, \sigma^2 I_T)$ y se cumple que la matriz $\text{plim}\frac{X'X}{T} = Q$ es finita, simétrica, definida positiva y no singular, podemos realizar inferencia asintótica válida con el estadístico:

$$(R\hat{\beta}_{MCO} - r)'[\,R\hat{V}(\hat{\beta}_{MCO})R'\,]^{-1}(R\hat{\beta}_{MCO} - r) \xrightarrow{d} \mathcal{X}^2(q).$$

Si el tamaño de muestra es suficientemente grande podemos utilizar este estadístico y aproximar su distribución por la distribución asintótica $\mathcal{X}^2(q)$. Rechazaremos la hipótesis nula si el valor del estadístico obtenido para la muestra utilizada es mayor que un valor crítico, elegido un valor de significación α.

Por ejemplo, en el caso de la significatividad individual, $q = 1$, se tiene:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{i,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Para un nivel de significación elegido α, rechazaremos la hipótesis nula si el valor obtenido dada nuestra muestra de este estadístico es mayor que el valor crítico $\mathcal{N}(0,1)_{\frac{\alpha}{2}}$.

Dada esta base, la econometría avanzada se preocupa por analizar la relajación de las hipótesis básicas sobre la perturbación, los regresores y la dinámica del modelo y estudiar las propiedades del estimador MCO cuando se relajan las hipótesis básicas.

Comenzaremos relajando hipótesis sobre el comportamiento de la perturbación. En vez de suponer que u es homocedástica y no autocorrelada consideramos la posibilidad de que su varianza no sea constante es decir sea heterocedástica, $E(u_t) = \sigma_t^2$, y/o que las covarianzas no sean todas cero, es decir que esté autocorrelada $E(u_t, u_s) \neq 0$, $\forall\, t, s \;\; t \neq s$ es decir $E(uu') = \sigma^2\Omega$ tal que

$$E(uu') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{T1} & \sigma_{T2} & \cdots & \sigma_T^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1T} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{T1} & w_{T2} & \cdots & w_{TT} \end{bmatrix} = \sigma^2\Omega$$

donde

$$\begin{array}{rcl} Var(u_t) & = & \sigma_t^2 = \sigma^2 w_{tt}, \quad t = 1, ..., T. \\ Cov(u_t, u_s) & = & \sigma_{ts} = \sigma_{st} \;=\; \sigma^2 w_{ts}, \quad t \neq s. \end{array}$$

En este escenario el estimador MCO en muestras finitas sigue siendo lineal e insesgado, pero no es de varianza mínima. En muestras grandes o asintóticas es consistente. Para obtener estimadores eficientes cuando $E(uu') = \sigma^2\Omega$ siendo Ω conocida estimamos por Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG), $\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$. El estimador de MCG es un estimador lineal, insesgado y de varianza mínima entre los todos aquellos estimadores lineales e insesgados, en muestras grandes es consistente y eficiente asintóticamente. Bajo el supuesto de normalidad de las perturbaciones, $u \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma^2\Omega)$, tenemos que

$$\hat{\beta}_{MCG} \sim \mathcal{N}(\beta,\, \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1})$$

y podemos realizar inferencia de la forma habitual. Como estimador insesgado de σ^2 proponemos $\hat{\sigma}^2_{MCG} = \frac{\hat{u}'_{MCG}\,\Omega^{-1}\,\hat{u}_{MCG}}{T-K}$ siendo $\hat{u}_{MCG} = Y - X\hat{\beta}_{MCG}$.

Cuando Ω es desconocida el estimador MCG no es directamente calculable ya que en su expresión aparece esta matriz. La solución habitual es sustituir Ω por un estimador suyo. Este es el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles, MCGF:

$$\hat{\beta}_{MCGF} \;=\; (X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\widehat{\Omega}^{-1}Y. \tag{2}$$

El estimador MCGF en muestras finitas es un estimador no lineal y sesgado en general, su distribución en muestras finitas no es conocida. En muestras grandes, bajo ciertas condiciones de regularidad, y en principio, si $\widehat{\Omega}$ es un estimador consistente de Ω, el estimador MCGF es consistente, asintóticamente eficiente y tiene distribución asintótica conocida válida para realizar inferencia asintótica. Un estimador consistente de $V(\hat{\beta}_{MCGF})$ es

$$\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCGF}) = \hat{\sigma}^2_{MCGF}(X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}$$

siendo

$$\hat{\sigma}^2_{MCGF} = \frac{\hat{u}'_{MCGF}\,\widehat{\Omega}^{-1}\,\hat{u}_{MCGF}}{T-K} \qquad \text{con} \qquad \hat{u}_{MCGF} = Y - X\hat{\beta}_{MCGF}.$$

Una situación diferente se produce si relajamos el supuesto de que los regresores son no estocásticos, por ejemplo suponemos que al menos una de las variables incluidas en la matriz de regresores X es estocástica o se incluyen retardos de la variable endógena como regresores. En este marco de trabajo el estimador MCO del vector de coeficientes desconocidos β no es lineal en la perturbación ya que es una combinación no lineal de la matriz de regresores estocástica junto con el vector de variables aleatorias u. En este caso la media y varianza del estimador $\hat{\beta}$ dependen de la relación entre X y u, es decir, de su distribución conjunta. Bajo ciertos supuestos el estimador seguirá siendo insesgado y de varianza mínima pero su distribución en muestras finitas será desconocida ya que al ser $\hat{\beta}_{MCO}$ no lineal en u no podemos garantizar que tenga una distribución normal incluso en el caso en que u lo fuera. En esta situación debemos centrarnos en las propiedades asintóticas del estimador y si este es consistente y tiene distribución asintótica conocida podremos hacer inferencia asintótica.

Si se cumplen las condiciones requeridas por el Teorema de Mann-Wald el estimador de MCO es consistente y tiene distribución asintótica conocida con la que realizar inferencia asintótica. Sin embargo hay muchas situaciones en que los requisitos del teorema no se cumplen. Por ejemplo si X_i y u están correladas, $E(X'u) \neq 0$, el estimador MCO no será consistente. Un estimador consistente en ese caso es el Estimador de Variables Instrumentales, VI:

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'Y.$$

El estimador es no lineal y sesgado en muestras finitas pero si la matriz de instrumentos Z está bien definida el estimador es consistente. Su distribución asintótica es:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_{VI} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma^2\, Q_{ZX}^{-1}\; Q_{ZZ}\; (Q_{ZX}^{-1})'\right).$$

En general se utiliza como estimador de la matriz de covarianzas asintótica del estimador de variables instrumentales a:

$$\widehat{V}(\hat{\beta}_{VI}) = \hat{\sigma}^2_{VI}\,(Z'X)^{-1}\,Z'Z\,((Z'X)^{-1})',$$

siendo el estimador

$$\hat{\sigma}^2_{VI} = \frac{(Y - X\hat{\beta}_{VI})'\,(Y - X\hat{\beta}_{VI})}{T - K}$$

un estimador consistente de σ^2.

Parte II

Ejercicios Propuestos

Ejercicio E1.

Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, 2, \ldots, 25$ donde $E(u_t) = 0 \ \forall t$, $E(u_t^2) = t$ y $E(u_t u_s) = 0 \ \ \forall t \neq s$. Completa:

$$E(u) = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{bmatrix} \qquad\qquad E(uu') = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

¿Qué características presentan las perturbaciones de este modelo?

Ejercicio E2.

Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, 2, \ldots, 25$ donde $E(u_t) = 0 \ \forall t$, $E(u_t^2) = \sigma_u^2 \ \forall t$, $E(u_t u_{t-1}) = 2$ y $E(u_t u_{t-j}) = 0 \ \forall j > 1$. Completa:

$$E(u) = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{bmatrix} \qquad\qquad E(uu') = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

¿Qué características presentan las perturbaciones de este modelo?

Ejercicio E3.

Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ donde $E(u_t^2) = t X_t^2$.

1. Conociendo tres observaciones de Y_t y X_t obtén por MCO y en forma matricial, las estimaciones de β_1 y β_2 del modelo anterior.

t	1	2	3	4	5
Y_t	1	1	0	-1	-1
X_t	1	-1	1	1	1

Ahora además, se conoce:

$$\begin{array}{ll} E(u_1u_3) = E(u_3u_1) = \ \ 1 & E(u_1u_2) = E(u_2u_1) = E(u_2u_3) = E(u_3u_2) = 0 \\ E(u_1u_4) = E(u_4u_1) = -1 & E(u_1u_5) = E(u_5u_1) = E(u_2u_5) = E(u_5u_2) = 0 \\ E(u_3u_5) = E(u_5u_3) = \ \ 1 & E(u_3u_4) = E(u_4u_3) = E(u_4u_5) = E(u_5u_4) = 0 \\ E(u_2u_4) = E(u_4u_2) = \ \ 1 & \end{array}$$

2. Dadas las observaciones de X e Y y la información sobre $E(u_t u_s)$, calcula la matriz de varianzas y covarianzas del estimador MCO.

3. Dada la información anterior, ¿qué propiedades tiene el estimador Mínimo Cuadrático Ordinario?

4. ¿Conoces un estimador con mejores propiedades? ¿Cuál es? ¿Qué propiedades tiene? Escribe su matriz de varianzas y covarianzas. No la estimes, escribe su fórmula y explica qué son cada uno de sus elementos.

5. Si en el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ se cumple: $E(u_t^2) = tX_t^2$ y $E(u_t u_s) = 0 \ \forall t, s \ t \neq s$.

   a) Escribe el modelo transformado que corrija este problema y demuestra que sus perturbaciones tienen varianza constante.
   b) Utilizando cálculo matricial, estima los parámetros del modelo transformado por el método de MCO.

Ejercicio E4.

Considera el siguiente modelo de regresión general:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, \ldots, 500$$

donde X_2 y X_3 son no estocásticas y $u_t \sim NID(0, \sigma_t^2)$ con $\sigma_t^2 = \sigma^2 t^2$.

1. Escribe $E(u)$ y $E(uu')$.

2. Obtén la matriz de varianzas y covarianzas de Y.

Se ha estimado el modelo por mínimos cuadrados generalizados, obteniéndose las siguientes estimaciones:

$$\hat{\beta}_{MCG} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \widehat{V}(\hat{\beta}_{MCG}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Realiza los contrastes de las siguientes hipótesis:

   a) $\beta_1 = 0$.
   b) $\beta_2 + 2\beta_3 = 1$.
   c) $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 + 2\beta_3 = 1$.

Ejercicio E5.

Un investigador A quiere explicar los gastos de los estudiantes con el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad i = 1, \ldots, N \tag{E5.1}$$

siendo Y los gastos del estudiante i y X los ingresos del estudiante i. En el Modelo E5.1 se cumplen todas las hipótesis básicas, especialmente

$$\begin{array}{ll} E(u_i) = 0 & \forall i, \\ Var(u_i) = \sigma_u^2 & \forall i, \\ E(u_i u_h) = 0 & \forall i \neq h. \end{array}$$

Otro investigador B dice que es mejor agrupar los datos de cada clase, para simplificar los cálculos, y estimar los parámetros con los datos agrupados. En total los alumnos están divididos en 8 clases y el número de alumnos en cada clase es n_1, n_2, ..., n_8. El investigador B utilizará por tanto 8 observaciones de cada variable, cada una correspondiente a una clase, cuya definición es:

$$\overline{Y}_j = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} Y_k}{n_j} \qquad \overline{X}_j = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} X_k}{n_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, 8.$$

El modelo que plantea es el siguiente:

$$\overline{Y}_j = \beta_1 + \beta_2 \overline{X}_j + v_j \qquad j = 1, 2, \ldots, 8.$$

1. ¿Cuáles son la media y la varianza de la perturbación v_j?
2. Los dos investigadores desean estimar sus modelos por mínimos cuadrados ordinarios. ¿Te parece adecuado en ambos casos? ¿Por qué?
3. ¿Cómo cambiarían tus conclusiones del apartado anterior si el número de alumnos fuera el mismo en todas las clases?

Ejercicio E6.

Sea el modelo $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad i = 1, \ldots, N$ donde $Var(u_i) = a\, Z_i^2$, siendo a un parámetro desconocido. De las siguientes opciones señala lo que sea cierto. A los estimadores de MCG de este modelo se les llama también estimadores de Mínimos Cuadrados Ponderados porque:

a) se pondera la influencia que la variable X tiene en Y.

b) se da más importancia a aquellas observaciones con un valor grande de Z.

c) en $Var(u_i)$ el término Z_i^2 está ponderado por a.

d) se da más importancia a aquellas observaciones con un valor pequeño de Z.

e) todo falso.

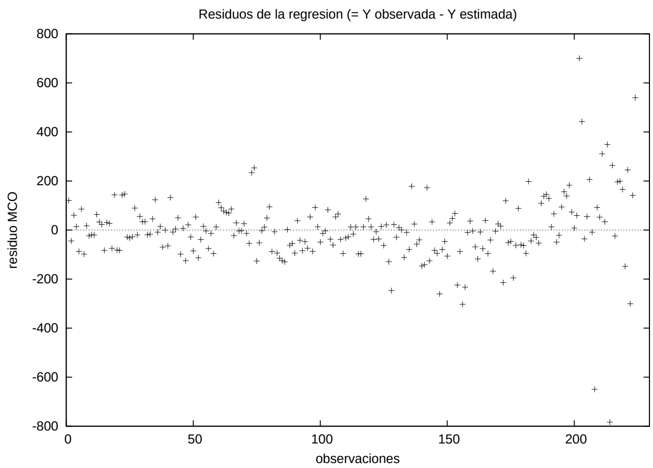
Ejercicio E7.

Sea el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + u_i \qquad i = 1, \ldots, 224$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica. Se ha estimado por MCO obteniéndose la Figura 1 para los residuos de la regresión:

Figura 1: Gráficos de residuos MCO



Interpreta el gráfico anterior. ¿Crees que las perturbaciones del modelo tienen algún problema? ¿Cuál? Razónalo.

Ejercicio E8.

En el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

donde X_{2t} y X_{3t} son variables no estocásticas y se cumple:

$$E(u_t) = 0 \quad \forall t \ , \ E(u_t^2) = \frac{1}{X_{3t}^2} \quad \forall t \ \text{ y } E(u_t, u_s) = 0 \quad \forall t \neq s.$$

1. Explica cómo obtendrías un estimador de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ que sea lineal, insesgado y eficiente. Razona tu respuesta.

2. Escribe el modelo transformado en el que las perturbaciones sean homocedásticas. Busca la distribución de estas perturbaciones transformadas.

3. En el caso de que T=4, escribe la matriz de regresores, X, del modelo transformado sabiendo que:

t	1	2	3	4
X_{2t}	0	1	1	2
X_{3t}	3	0,5	1	1

4. Suponiendo que σ_t^2 no es conocida, escribe el estadístico y todos sus elementos así como la regla de decisión para realizar el contraste $H_0 : \beta_2 = 0$ basándote en el estimador MCO de β_2.

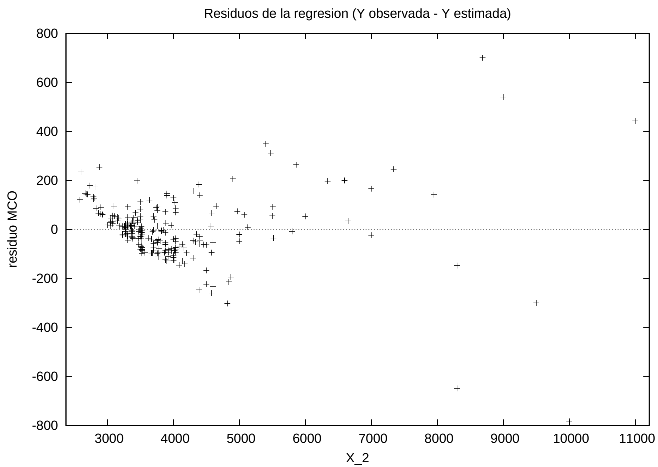
Ejercicio E9.

Sea el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + u_i \qquad i = 1, \ldots, 224$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica. Se ha estimado por MCO obteniéndose la Figura 2 para los residuos de la regresión:

Figura 2: Gráficos de residuos MCO



1. Interpreta el gráfico anterior. ¿Crees que las perturbaciones del modelo tienen algún problema? ¿Cuál? Razónalo.

Ejercicio E10.

Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \quad t = 1, \ldots, 4$ donde X_t es una variable no estocástica, se cumple $E(u_t^2) = tX_t^2$ y $E(u_t u_s) = 0 \quad \forall t, s \quad t \neq s$, tal que:

t	1	2	3	4
Y_t	2	1	-1	-3
X_t	1	-1	0	1

1. Escribe la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación $E(uu')$.
2. Escribe el modelo transformado con perturbaciones esféricas y demuestra que sus perturbaciones tienen varianza constante.
3. En el modelo transformado, escribe la matriz de regresores y el vector de valores de la variable endógena.
4. Estima, utilizando cálculo matricial, los parámetros del modelo transformado.

Ejercicio E11.

En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \quad t = 1, \ldots, T$ siendo X_t una variable no estocástica y $u_t \sim NID(0, b\,t^2)$ donde b es un parámetro desconocido.

1. ¿Qué método de estimación utilizarías para estimar el parámetro β_2 del modelo de la forma más eficiente?
   a) VI.
   b) MCO en el modelo original.
   c) MCGF en el modelo original.
   d) MCG en el modelo original.
   e) MC2E en el modelo original.
2. ¿Cuál es el modelo transformado que has de utilizar para que se cumplan todas las hipótesis básicas?
   a) $\frac{Y_t}{t} = \beta_1 \frac{1}{t} + \beta_2 \frac{X_t}{t} + \frac{u_t}{t}$.
   b) $\frac{Y_t}{t^2} = \beta_1 \frac{1}{t^2} + \beta_2 \frac{X_t}{t^2} + \frac{u_t}{t^2}$.
   c) $tY_t = \beta_1 t + \beta_2 t X_t + t u_t$.
   d) $t^2 Y_t = \beta_1 t^2 + \beta_2 t^2 X_t + t^2 u_t$.
   e) $\frac{Y_t}{\sqrt{t}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{t}} + \beta_2 \frac{X_t}{\sqrt{t}} + \frac{u_t}{\sqrt{t}}$.

3. ¿Cuál es la varianza de la perturbación en el modelo transformado?

   a) b^2 b) $1/b$ c) 1 d) b e) $1/b^2$

4. La matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$ es:

   a) $\sigma^2(X'X)^{-1}$.
   b) $\sigma^2(X'\Omega X)^{-1}$.
   c) $\sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$.
   d) $\sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$.
   e) $\sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega^{-1}X(X'X)^{-1}$.

5. Los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$:

   a) no son lineales.
   b) no son insesgados.
   c) no son los de mínima varianza.
   d) no son consistentes.
   e) no son normales.

Ejercicio E12.

Sea el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}^2 + u_i \qquad i = 1, \ldots, 150$$

con X_{2i} y X_{3i} no estocásticas. Para contrastar que $Var(u_i) = a\,Z_i^2$, siendo a una constante desconocida, es correcto aplicar los contrastes:

a) no el de Goldfeld y Quandt pero sí el de Hausman.

b) no el de Goldfeld y Quandt pero sí el de $R\beta = r$.

c) sí el de Goldfeld y Quandt y sí el de Breusch y Pagan.

d) no el de Goldfeld y Quandt y no el de Hausman.

e) no el de Goldfeld y Quandt y no el de Breusch y Pagan.

Ejercicio E13.

Sea el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + u_i \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{E13.1}$$

Se sospecha que en este modelo $Var(u_i) = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1i} + \alpha_2 Z_{2i}$. Para llevar a cabo el contraste de heterocedasticidad se estima el modelo por MCO, se obtienen los residuos $\hat{u}_i$ y con ellos se estiman las dos regresiones siguientes:

$$\hat{u}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1i} + \alpha_2 Z_{2i} + \varepsilon_i \tag{A}$$

$$\frac{\hat{u}_i^2}{\hat{u}'\hat{u}/N} = \gamma_0 + \gamma_1 Z_{1i} + \gamma_2 Z_{2i} + \epsilon_i \tag{B}$$

de los que se obtienen sus sumas de cuadrados explicadas SCE_A y SCE_B, sus sumas de cuadrados residuales SCR_A y SCR_B y sus coeficientes de determinación R_A^2 y R_B^2 respectivamente. El estadístico para llevar a cabo el contraste y su distribución asintótica adecuada son:

a) $SCE_B/2$ y $\mathcal{X}_2^2$.

b) $SCE_A/2$ y $\mathcal{X}_3^2$.

c) $N \times SCR_A$ y $\mathcal{X}_2^2$.

d) $N \times SCR_B$ y $\mathcal{X}_3^2$.

e) $N \times R_B^2$ y $\mathcal{X}_2^2$.

Ejercicio E14.

¿Cuándo es más apropiado estimar por MCO en lugar de estimar por MCG o MCGF si existe heterocedasticidad?

a) siempre.

b) nunca.

c) si $Var(u_t)$ es conocida.

d) si $Var(u_t)$ es desconocida pero estimable.

e) si $Var(u_t)$ es desconocida y no estimable.

Ejercicio E15.

Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t \qquad u_t \sim NID(0\,,\,\sigma^2 t) \qquad t = 1, \ldots, 50$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica.

1. Completa las siguientes matrices:

$$E(u) = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{bmatrix} \qquad\qquad E(uu') = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

2. ¿Es constante la varianza de la perturbación a lo largo de la muestra ? ¿De qué depende?

3. ¿Por qué método estimarías los coeficientes del modelo? Razona tu decisión en base a las propiedades del estimador.

4. Si quisieras estimar el modelo por MCP, ¿cómo debes ponderar las observaciones? Escribe la ponderación que utilizarías.

5. Escribe el correspondiente modelo transformado con perturbaciones esféricas y obtén la varianza de la perturbación de dicho modelo.

6. Escribe explícitamente la fórmula del estimador que has propuesto en el primer apartado e indica cómo son cada uno de sus componentes.

Ejercicio E16.

En el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i \qquad u_i \sim NID(0\,,\,\sigma^2 X_{2i}^2) \qquad i = 1, \ldots, 224$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica. Para cada una de las siguientes especificaciones de σ_i^2:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_{2i}^2 \qquad (A)$$
$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_{2i} \qquad (B)$$
$$\sigma_i^2 = \sigma^2 \tfrac{1}{X_{2i}} \qquad (C)$$
$$\sigma_i^2 = \sigma^2(\alpha_1 + \alpha_2 X_{2i}) \qquad (D)$$

1. Completa las siguientes matrices:

$$E(u) = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{bmatrix} \qquad E(uu') = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

2. ¿Es constante la varianza de la perturbación a lo largo de la muestra ? ¿De qué depende?

3. ¿Por qué método estimarías los coeficientes del modelo? Razona tu decisión en base a las propiedades del estimador.

4. Si quisieras estimar el modelo por MCP, ¿cómo debes ponderar las observaciones? Escribe la ponderación que utilizarías.

5. Escribe el correspondiente modelo transformado con perturbaciones esféricas y obtén la varianza de la perturbación de dicho modelo.

6. Escribe explícitamente la fórmula del estimador que has propuesto en el segundo apartado e indica cómo son cada uno de sus componentes.

Ejercicio E17.

Sea el modelo:

$$Y = X\beta + u$$

donde X es una matriz de regresores no estocásticos y $u \sim (0, \sigma^2\Omega)$ siendo $\Omega \neq I$ y conocida.

1. ¿Son las perturbaciones no esféricas? ¿Por qué?

2. ¿Qué implicaciones tiene en el estimador MCO que $E(uu') = \sigma^2\Omega,\ \Omega \neq I$?

3. ¿Por qué método estimarías los coeficientes del modelo? Razona tu decisión en base a sus propiedades.

4. ¿Cambiaría tu respuesta si Ω no fuera conocida? ¿Cómo estimarías en ese caso?

Ejercicio E18.

Sea el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \qquad u_i \sim (0, \sigma_i^2) \qquad i = 1, \ldots, 10$$

con X_2, y X_3 no estocásticas. Indica para cada uno de los siguientes modelos transformados cuál sería la forma funcional que se supone para σ_i^2 y escribe la correspondiente matriz de varianzas y covarianzas de u_i bajo el supuesto de que $Cov(u_i, u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$:

1. $\frac{Y_i}{X_{2i}} = \beta_1 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_2 + \beta_3 \frac{X_{3i}}{X_{2i}} + \frac{u_i}{X_{2i}}$.
2. $Y_i X_{3i} = \beta_1 X_{3i} + \beta_2 X_{2i} X_{3i} + \beta_3 X_{3i}^2 + u_i X_{3i}$.
3. $\frac{Y_i}{\sqrt{X_{3i}}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_{3i}}} + \beta_2 \frac{X_{2i}}{\sqrt{X_{3i}}} + \beta_3 \sqrt{X_{3i}} + \frac{u_i}{\sqrt{X_{3i}}}$.

Ejercicio E19.

Sea el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, N \tag{E19.1}$$

donde X_i es no estocástica, $E(u_i) = 0$, $E(u_i^2) = \sigma^2[1 + 2X_i]^2 \quad \forall i$ y $E(u_i u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.

1. Escribe la matriz de varianzas y covarianzas del vector de perturbaciones.
2. Escribe el modelo transformado correspondiente al estimador MCG y demuestra las propiedades de la perturbación del modelo que propongas.
3. Explica cómo estimarías los parámetros del modelo transformado. ¿Qué propiedades tienen tus estimadores?
4. Utilizando el estimador MCG y suponiendo normalidad de u_i, explica cómo realizarías el contraste $H_0 : \beta_2 = 1$. Explica claramente qué son cada uno de los elementos del estadístico de contraste.
5. El estimador MCO de los parámetros del Modelo E19.1 es ineficiente. Muestra cómo utilizarías este estimador para contrastar la $H_0 : \beta_2 = 1$ de forma tal que tu contraste sea válido. Explica claramente qué son cada uno de los elementos del estadístico de contraste.
6. ¿Son ambos contrastes equivalentes o preferirías alguno de los dos? Razona tú respuesta.

Ejercicio E20.

Con una muestra de 15 países se desea estimar el efecto que un aumento en las cotizaciones de la Seguridad Social tendría sobre la parte de las cotizaciones a cargo de los trabajadores. La información, correspondiente al año 1982, de las cotizaciones a la Seguridad Social (CSS) y la parte correspondiente a los trabajadores (CSST), en ambos casos como porcentaje del total de ingresos fiscales se presenta en las dos primeras columnas de la siguiente tabla:

	CSS	CSST	$\hat{u}$
Austria	31,9	13,5	
Bélgica	29,8	10,1	-0,08327
Dinamarca	2,8	1,5	-2,97434
Francia	43,2	11,5	
Alemania	36,2	16,1	
Irlanda	15,0	5,4	-1,65393
Italia	47,2	7,1	
Japón	30,4	10,7	0,38986
Luxemburgo	28,0	11,2	1,39732
Países Bajos	41,6	18,0	
Portugal	28,5	10,8	0,89160
España	46,5	10,3	
Suiza	31,0	10,2	-0,23700
Reino Unido	16,9	7,6	0,14433
EE.UU.	27,7	10,8	1,06076

Consideramos el siguiente modelo:

$$CSST_i = \beta_1 + \beta_2 CSS_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, 15. \tag{E20.1}$$

Los resultados de la estimación del modelo anterior por MCO con la muestra de los 15 países son los siguientes:

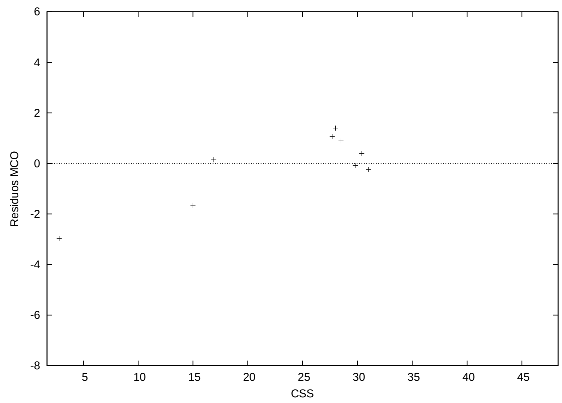
$$\underset{(t-estad.)}{\widehat{CSST}_i} = \underset{(1,69)}{3,8823} + \underset{(3,01)}{0,211442} CSS_i. \tag{A}$$

$$\bar{R}^2 = 0,365 \qquad SCR = 132,7767.$$

1. Fíjate en la tabla, en la tercera columna se muestran los residuos MCO. Indica la forma general de obtener $\hat{u}_i$. A continuación completa los que faltan en la misma tabla y en el gráfico recogido en la Figura 3.

2. Una vez completado el gráfico comenta si crees que puede existir algún problema razonando tu respuesta.

Figura 3: CSS_i *versus residuos MCO*



3. Con la siguiente información lleva a cabo el contraste de Goldfeld y Quandt. Debes de completar la información que falta y señalar claramente todos los elementos del contraste, incluidas la hipótesis nula y la alternativa.

   - Primera submuestra

$$\widehat{CSST}_i = 0,463351 + 0,374431 CSS_i$$

$CSST_i$	1,5					
CSS_i	2,8					
$\hat{u}_1$	-0,011759		0,808758		0,25257	

   - Segunda submuestra

$$\widehat{CSST}_i = 28,9928 - 0,395203 CSS_i$$

$CSST_i$	13,5					
CSS_i	31,9					
$\hat{u}_2$		1,413507		-0,420075		-3,239264

4. Dada la evidencia obtenida en los apartados anteriores y con la siguiente información, estima eficientemente los coeficientes del modelo. Explica cómo se obtiene este estimador y qué supuestos se están haciendo para que este estimador sea eficiente.

Se dispone de la siguiente información:

	$CSST_i/CSS_i$	$1/CSS_i$	$Constante_i = 1$
$CSST_i/CSS_i$	2,12814	0,3672255	5,47296
$1/CSS_i$		0,1463262	0,8374455
$Constante_i = 1$			15

donde por ejemplo $\sum CSST_i/CSS_i = 5,47296$.

5. Con el estimador que has propuesto en el apartado anterior contrasta la hipótesis nula de que un aumento en las cotizaciones de la Seguridad Social recaería totalmente sobre los trabajadores, esto es $H_0 : \beta_2 = 1$. Indica todos los supuestos necesarios para que sea válido el contraste.

Ejercicio E21.

Considera el siguiente modelo de regresión:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

donde X_i es no estocástica, $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, $E(u_i u_j) = 0$ para $i \neq j$ y σ_i^2 es una función creciente con X_i.

1. ¿Qué problema existe en el modelo anterior? ¿Cómo podría detectarse? Explica en detalle el contraste que propones.

2. ¿Qué consecuencias tiene en los contrastes de hipótesis sobre β_1 y β_2 utilizar en los estadísticos t o F el estimador $\frac{\sum_i \hat{u}_i^2}{N-2}(X'X)^{-1}$? Razona tu respuesta.

Se dispone de una muestra de 800 observaciones con la siguiente información:

$$\begin{array}{llll}
\sum_i X_i = 330 & \sum_i X_i^2 = 144 & \sum_i \frac{1}{X_i} = 2058 & \sum_i \frac{1}{X_i^2} = 5683 \\
\sum_i \frac{1}{\sqrt{X_i}} = 1273 & \sum_i Y_i = 2672 & \sum_i Y_i^2 = 9576 & \\
\sum_i X_i Y_i = 1108 & \sum_i \frac{Y_i}{X_i} = 6835 & \sum_i \frac{Y_i}{X_i^2} = 18755 & \sum_i \frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = 4239 \\
\sum_i \hat{u}_i^2 = 660 & \sum_i \hat{u}_i^2 X_i^2 = 160 & \sum_i \hat{u}_i^2 X_i = 309 &
\end{array}$$

donde $\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$ son los residuos resultantes de estimar los parámetros β_1 y β_2 por mínimos cuadrados ordinarios.

3. Obtener las estimaciones de β_1 y β_2 por MCO.

4. Si se ha utilizado el estimador de White, ¿cómo se ha obtenido la siguiente estimación de la matriz de varianzas y covarianzas del estimador MCO de β_1 y β_2? Indica explícitamente todos los pasos que se han realizado hasta llegar a este resultado.

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{MCO})_W = \begin{bmatrix} 0,04 & -0,11 \\ -0,11 & 0,28 \end{bmatrix}$$

5. Utilizando las estimaciones obtenidas en los apartados 3) y 4), contrasta $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $H_a : \beta_2 \neq 0$.

6. Suponiendo que $\sigma_i^2 = 4X_i^2$, ¿cómo obtendrías un estimador eficiente de β_1 y β_2? Explica en detalle el procedimiento de estimación.

7. Estima eficientemente β_1 y β_2 y su matriz de varianzas y covarianzas.

8. Contrasta $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $H_a : \beta_2 \neq 0$ utilizando el estimador eficiente de β_2.

9. ¿Podrían dar conclusiones distintas los contrastes realizados en 5) y 8)? ¿Por qué?

Ejercicio E22.

Se dispone de una base de datos sobre el precio de venta y distintas características de 224 viviendas pertenecientes a dos áreas residenciales del condado de *Orange* en California (USA), *Dove Canyon* y *Coto de Caza* [3]. Dove Canyon es una zona de viviendas relativamente pequeñas construidas alrededor de un campo de golf. Coto de Caza es un área de mayor nivel de vida aunque más rural con viviendas más grandes. Las variables que se consideran son:

salepric	:	precio de venta de la vivienda en miles de dólares.
sqft	:	tamaño de la vivienda en pies cuadrados.
age	:	edad de la vivienda en años.
city	:	1 si está en Coto de Caza, 0 si está en Dove Canyon.

A continuación se muestran los resultados de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios de un modelo para el precio de venta de la vivienda utilizando esa base de datos:

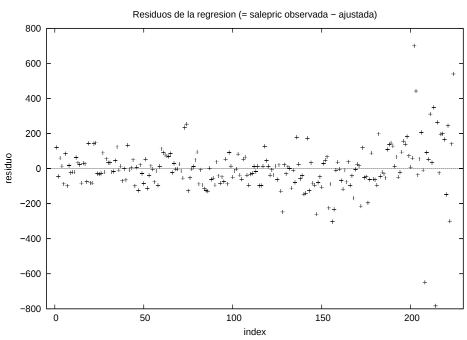
[3] Fuente: Ramanathan, Ramu (2002) *Introductory econometrics with applications.*

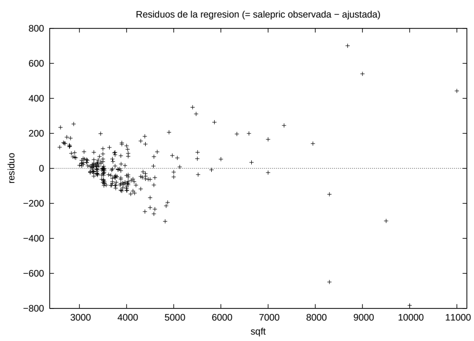
Resultados A: estimaciones MCO utilizando las 224 observaciones 1–224
Variable dependiente: salepric

	Coeficiente	Desv. típica	estadístico t	valor p
const	-440,3100	35,3203	-12,4663	0,0000
sqft	0,2520	0,0081	30,9047	0,0000
age	3,6980	3,0241	1,2228	0,2227
city	91,8038	21,7494	4,2210	0,0000

Media de la var. dependiente	642,929	R^2	0,8609
Suma de cuadrados de los residuos	4,27804e+06	$F(3,220)$	453,8840
Desviación típica de la regresión ($\hat{\sigma}$)	139,4480		

1. Escribe el modelo teórico que se ha estimado y comenta los resultados obtenidos en términos de bondad de ajuste, significatividad y signos de los coeficientes estimados.
2. Analiza de forma razonada la información que te proporcionan los siguientes gráficos y la regresión auxiliar. Si realizas algún contraste, indica todos los elementos del mismo. ¿Cuál de los gráficos es más informativo y por qué?





$$\frac{\widehat{\hat{u}_i^{\,2}}}{SCR_A/224} = \underset{(-10{,}387)}{-5,94184} + \underset{(12{,}727)}{0,00172457}\,\text{sqft}_i.$$
$$N = 224 \quad R^2 = 0,421826 \quad SCR = 1478,52.$$

A continuación se muestran los resultados de la estimación por MCO utilizando un estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes consistente aunque exista heterocedasticidad.

Resultados B: estimaciones MCO utilizando las 224 observaciones 1–224
Variable dependiente: salepric
Desviaciones típicas robustas ante heterocedasticidad, variante HC3

	Coeficiente	Desv. típica	estadístico t	valor p
const	-440,3100	110,8800	-3,9711	0,0001
sqft	0,2520	0,0279	9,0120	0,0000
age	3,6980	5,1672	0,7157	0,4750
city	91,8038	26,3997	3,4774	0,0006

Media de la var. dependiente	642,9290	R^2	0,8609
Suma de cuadrados de los residuos	4,27804e+06	$F(3,220)$	161,819
Desviación típica de la regresión ($\hat{\sigma}$)	139,4480		

3. ¿En que varían los resultados mostrados ahora (Resultados B) con los primeros (Resultados A)? ¿Por qué? ¿Cuáles son fiables y para qué? Explica razonadamente.

Por último se muestran los resultados de la estimación por Mínimos Cuadrados Generalizados o Ponderados utilizando como variable de ponderación el inverso del cuadrado del tamaño de la vivienda esto es, $\frac{1}{sqft^2}$.

Resultados C: estimaciones MC.Ponderados utilizando las 224 observaciones 1–224
Variable dependiente: salepric
Variable utilizada como ponderación: $\dfrac{1}{sqft^2}$

	Coeficiente	Desv. típica	estadístico t	valor p
const	-285,2000	37,2121	-7,6643	0,0000
sqft	0,2155	0,0095	22,4752	0,0000
age	-0,5492	2,2800	-0,2409	0,8098
city	110,7800	15,6896	7,0607	0,0000

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuadrados de los residuos	0,15074
R^2	0,79881
$F(3,220)$	291,17700

Estadísticos basados en los datos originales:

Suma de cuadrados de los residuos	4,73514e+06
Desviación típica de la regresión ($\hat{\sigma}$)	146,708

4. ¿Qué se quiere decir con datos ponderados y datos originales? ¿Por qué se utiliza como variable de ponderación el inverso de $sqft^2$? Explica razonadamente.

5. Escribe la expresión explícita del estimador de MCG utilizando como variable de ponderación el inverso del cuadrado del tamaño de la vivienda.

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \end{bmatrix}_{MCG} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

6. ¿Qué resultados de los tres A, B, ó C te parecen mejores? ¿Por qué?

Ejercicio E23.

Se desea analizar la siguiente la relación entre los gastos agregados en sanidad, Y_i y la renta agregada, X_i, ambos en billones de dólares, para 51 estados norteamericanos[4]:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i. \tag{E23.1}$$

Los resultados de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios son los siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{Y}_i & = & 0,3256 & + & 0,1420 & X_i & R^2 = 0,999. \\ (\widehat{desv}(\hat{\beta})) & & (0,3197) & & (0,0019) & & \\ (\widehat{desv}(\hat{\beta})_W) & & (0,2577) & & (0,0031) & & \end{array}$$

$$\frac{\hat{u}_i^2}{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{T}} = 0,113 + 0,008X_i + \hat{\epsilon}_i \qquad R^2 = 0,3269 \qquad SCE = 55,89.$$

La Figura 4 muestra los residuos frente a la renta agregada.

1. Explica cómo crees que se han calculado los residuos. Interpréta el gráfico de residuos.

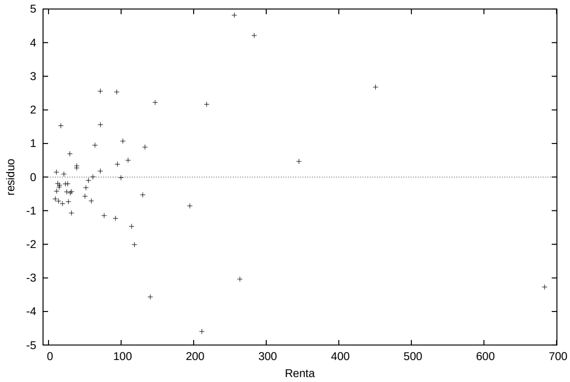
2. Teniendo en cuenta la Figura 4 realiza el contraste que consideres oportuno.

3. Explica, razonando tu respuesta, qué estadístico utilizarías para contrastar la significatividad de la variable renta. Realiza el contraste detallando todos sus elementos.

4. A la vista de los resultados de la estimación del Modelo E23.1 el investigador estima de nuevo el modelo suponiendo la siguiente estructura para la varianza de la perturbación: $Var(u_i) = \sigma^2 X_i$. Se obtienen los siguientes resultados:

[4]Fuente: Ramanathan, R. (2002), *Introductory econometrics with applications.*

Figura 4: Residuos MCO frente a la Renta



Estimaciones MC.Ponderados utilizando las 51 observaciones 1–51
Variable dependiente: gasto sanitario
Variable utilizada como ponderación: 1/renta

	Coeficiente	Desv. típica	estadístico t	valor p
const	0,1045	0,1624	0,6432	0,5231
renta	0,1442	0,0025	55,5126	0,0000

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuadrados de los residuos	1,145344	R^2	0,984348
Desviación típica de los residuos	0,152887	Adjusted R^2	0,984029

a) Razona la forma funcional escogida para la varianza de la perturbación. Explica cómo crees que se han obtenido las estimaciones.

b) Suponiendo normalidad en la perturbación, contrasta la significatividad de la variable renta.

5. El investigador no se siente conforme con la forma funcional escogida para $Var(u_i)$ y propone reestimar el Modelo E23.1 suponiendo que $Var(u_i) = a + bX_i$, donde a y b son desconocidos.

   a) Explica detalladamente cómo estimarías los coeficientes del Modelo E23.1 bajo este supuesto.

   b) Suponiendo $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{a} + \hat{b}X_i$. Realiza dicha estimación con la siguiente información muestral:

$$\sum \hat{u}_i^2 = 148,699 \quad \sum \hat{u}_i^2 X_i = 34945,67 \quad \sum (X_i/\hat{\sigma}_i)^2 = 196420,998$$
$$\sum (1/\hat{\sigma}_i)^2 = 34,738 \quad \sum (Y_i/\hat{\sigma}_i{}^2) = 236,139 \quad \sum (Y_i X_i/\hat{\sigma}_i{}^2) = 28484,578$$
$$\sum (X_i/\hat{\sigma}_i{}^2) = 1608,337 \quad \sum (Y_i^2/\hat{\sigma}_i{}^2) = 4168,919$$

c) Contrasta la significatividad de la variable explicativa.

6. ¿Qué comentarías sobre la validez de los contrastes realizados en los apartados 3), 4.b) y 5.c)?

Ejercicio E24.

Se dispone de datos anuales del consumo (C) y renta (R) de USA desde 1950 hasta 1985. Para analizar la proporción de renta que se dedica al consumo se propone el modelo $C_t = \alpha + \beta R_t + u_t$, donde u_t sigue una distribución normal. Al estimar el modelo por MCO se obtienen los siguientes resultados:

$$\underset{(t-stad.)}{\widehat{\mathrm{C}}_t} = \underset{(1{,}181)}{11,374} + \underset{(153{,}603)}{0,898}\ \mathrm{R}_t.$$

$$T = 36 \quad \bar{R}^2 = 0,998 \quad \sum \hat{u}_t^2 = 12044,2.$$

1. Para analizar si se ha mantenido constante la dispersión de las perturbaciones a lo largo del tiempo se han realizado dos regresiones:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{C}}_t &= 6,719 + 0,909\mathrm{R}_t & \sum \hat{u}_t^2 = 405,369 \quad t = 1950, ..., 1963. \\
\widehat{\mathrm{C}}_t &= -187,162 + 0,99\mathrm{R}_t & \sum \hat{u}_t^2 = 3709,55 \quad t = 1972, ..., 1985.
\end{aligned}$$

   Utiliza estos resultados para contrastar si las perturbaciones del modelo considerado han mantenido constante su dispersión. Explica claramente todos los pasos del contraste.

2. Asimismo, se desea contrastar la posibilidad de que la dispersión de las perturbaciones dependa de R. Utiliza una de las siguientes regresiones para realizar dicho contraste. Explica claramente todos los elementos del contraste realizado.

$$\frac{\hat{u}_t^2}{334,561} = 1,345 + 0,345R_t + 0,581C_t + \hat{w}_t \qquad R^2 = 0,890 \quad \sum \hat{w}_t^2 = 4,515 \qquad (A)$$

$$\hat{u}_t = 7,205 + 0,014R_t + 0,546\hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t \qquad R^2 = 0,329 \quad \sum \hat{w}_t^2 = 19,455 \qquad (B)$$

$$\hat{u}_t^2 = -3,305 + 0,953R_t + \hat{w}_t \qquad R^2 = 0,129 \quad \sum \hat{w}_t^2 = 9,315 \qquad (C)$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{334,561} = -1,272 + 0,001R_t + \hat{w}_t \qquad R^2 = 0,189 \quad \sum \hat{w}_t^2 = 94,651 \qquad (D)$$

3. Teniendo en cuenta que la renta ha mantenido una tendencia creciente durante los años considerados en la muestra y los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores, dibuja en un gráfico el comportamiento que esperas que tengan los residuos MCO frente a R.

4. Supón ahora que $Var(u_t) = \gamma_0 + \gamma_1 R_t$, donde γ_0 y γ_1 son constantes desconocidas. Explica detalladamente cómo contrastarías la hipótesis de que de cada dólar en que se incrementa la renta se espera que 90 céntimos se dediquen al consumo.

Ejercicio E25.

Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim NID(0\,,\,\sigma^2) \quad t = 1, \ldots, 15$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica.

1. ¿Es constante la varianza de la perturbación a lo largo de la muestra si $|\rho| < 1$?

2. Escribe la matriz de varianzas y covarianzas del vector de perturbaciones.

3. Si $\rho = 0$, ¿por qué método estimarías eficientemente los coeficientes del modelo? Razona tu decisión en base a las propiedades del estimador.

Ejercicio E26.

Al estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, \ldots, 73$$

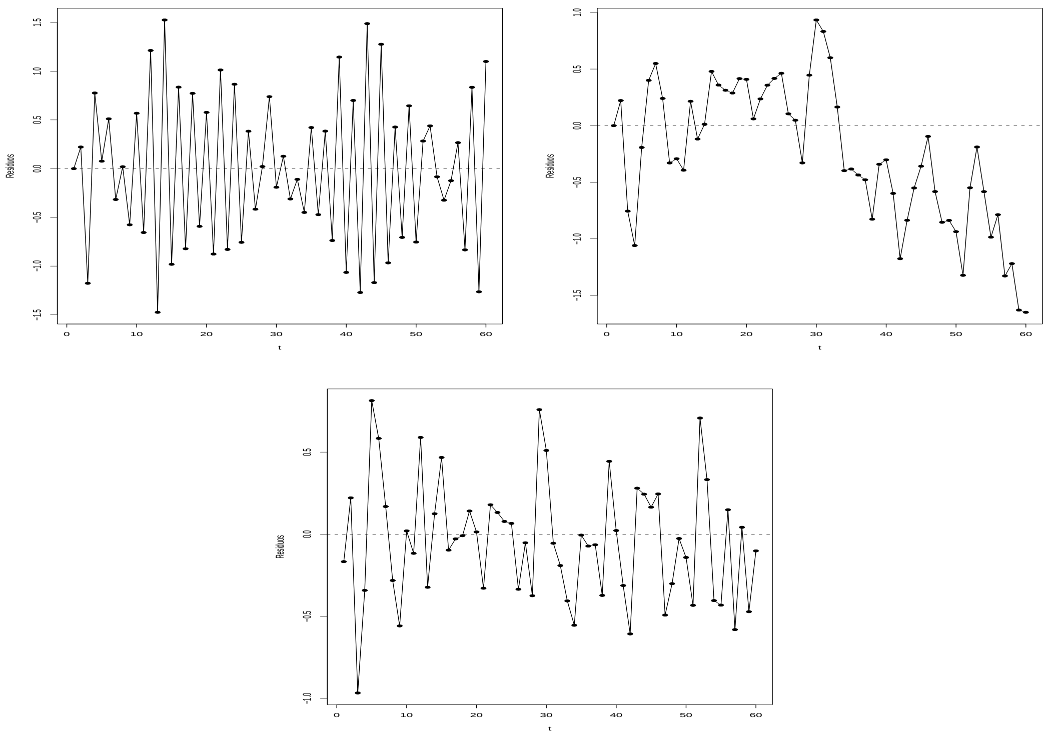
donde la matriz de regresores X es no estocástica, se ha obtenido un valor del estadístico Durbin-Watson igual a 0,468.

1. Escribe la fórmula del estadístico de Durbin Watson.

2. ¿Hay evidencia de autocorrelación en el término de perturbación del modelo?

3. De los gráficos de residuos recogidos en la Figura 5 indica cuál o cuáles es compatible con el resultado obtenido en el apartado anterior y junto a él las razones de por qué lo eliges.

Figura 5: Gráficos de residuos



Ejercicio E27.

Al estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, \ldots, 73$$

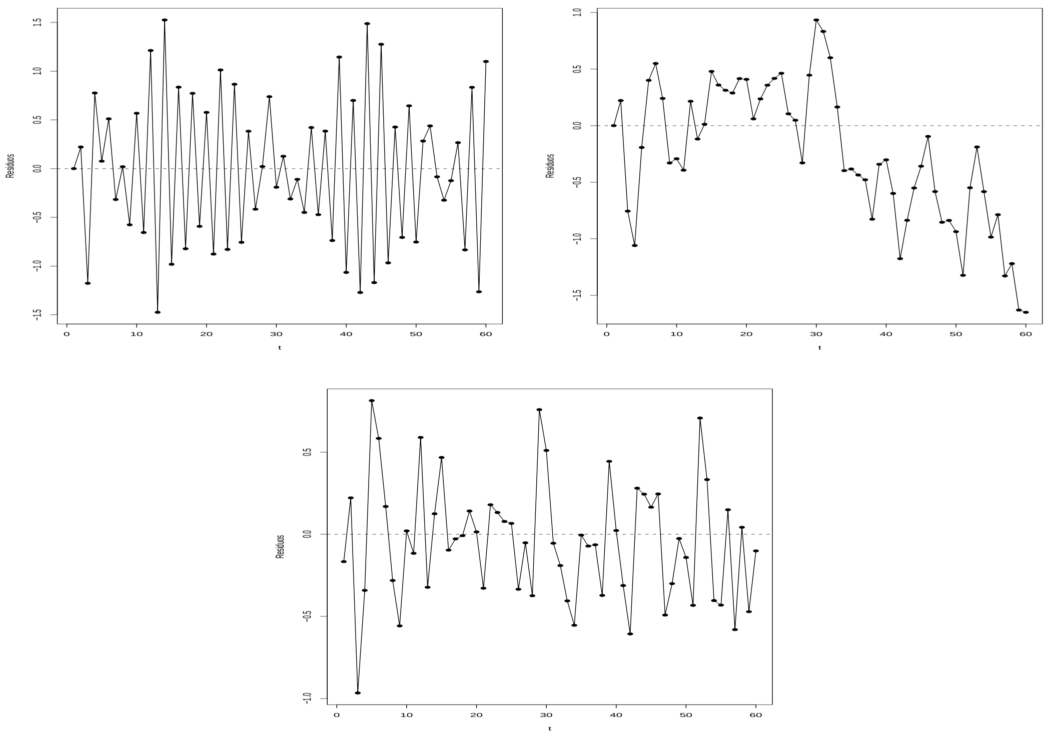
donde la matriz de regresores X es no estocástica, se ha obtenido un valor del estadístico de Breusch-Godfrey: BG(1)= $0,247$.

1. Escribe la regresión auxiliar y el estadístico de Breusch Godfrey para contrastar la existencia de un proceso AR(1) o MA(1) en el término de perturbación.

2. Dado el valor muestral del estadístico, ¿hay evidencia de autocorrelación en el término de perturbación del modelo? ¿Por qué?

3. De los siguientes gráficos de residuos recogidos en la Figura 6 indica cuál (o cuáles) es compatible con el resultado obtenido en el apartado anterior y junto a él las razones de por qué lo eliges.

Figura 6: Gráficos de residuos



Ejercicio E28.

Al estimar el modelo:

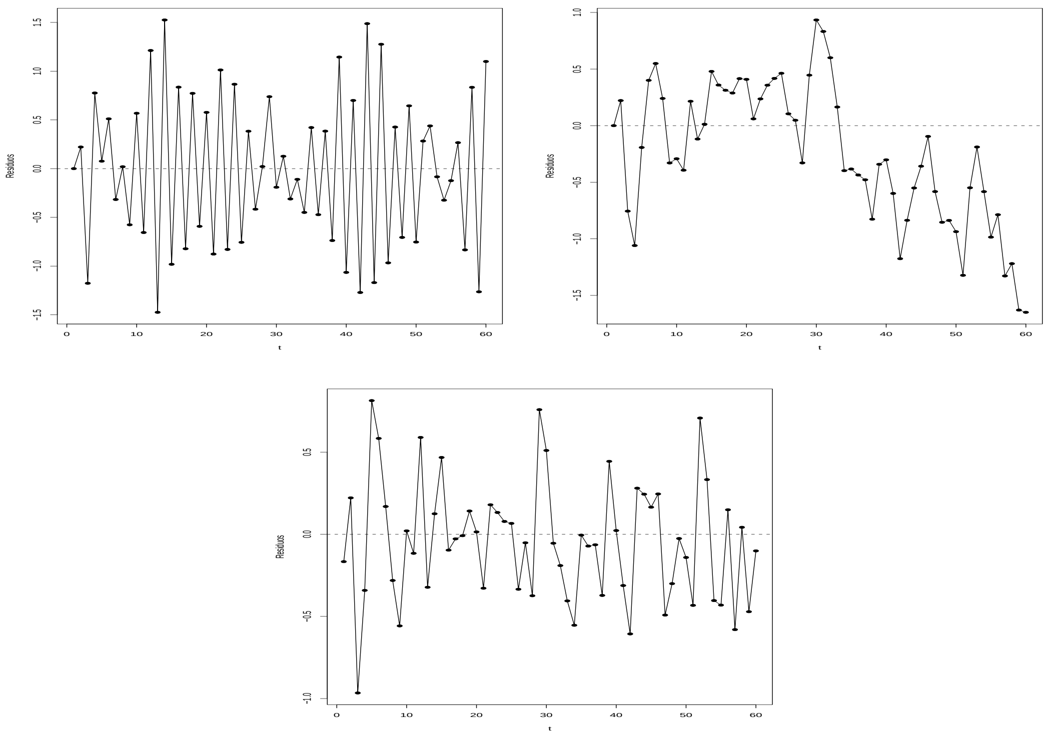
$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, \ldots, 75 \tag{E28.1}$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica, se ha obtenido un valor del estadístico Durbin-Watson igual a 2,684.

1. De los siguientes gráficos de residuos recogidos en la Figura 7 indica cuál (o cuáles) es compatible con la estructura de la perturbación del Modelo E28.1 y explica las razones de por qué lo eliges.

2. Supongamos que deseamos llevar a cabo el contraste con el estadístico de Breusch-Godfrey. Escribe la hipótesis nula y la alternativa, el estadístico de contraste junto con su distribución y explica cómo se obtienen los elementos de dicho estadístico.

Figura 7: Gráficos de residuos



Ejercicio E29.

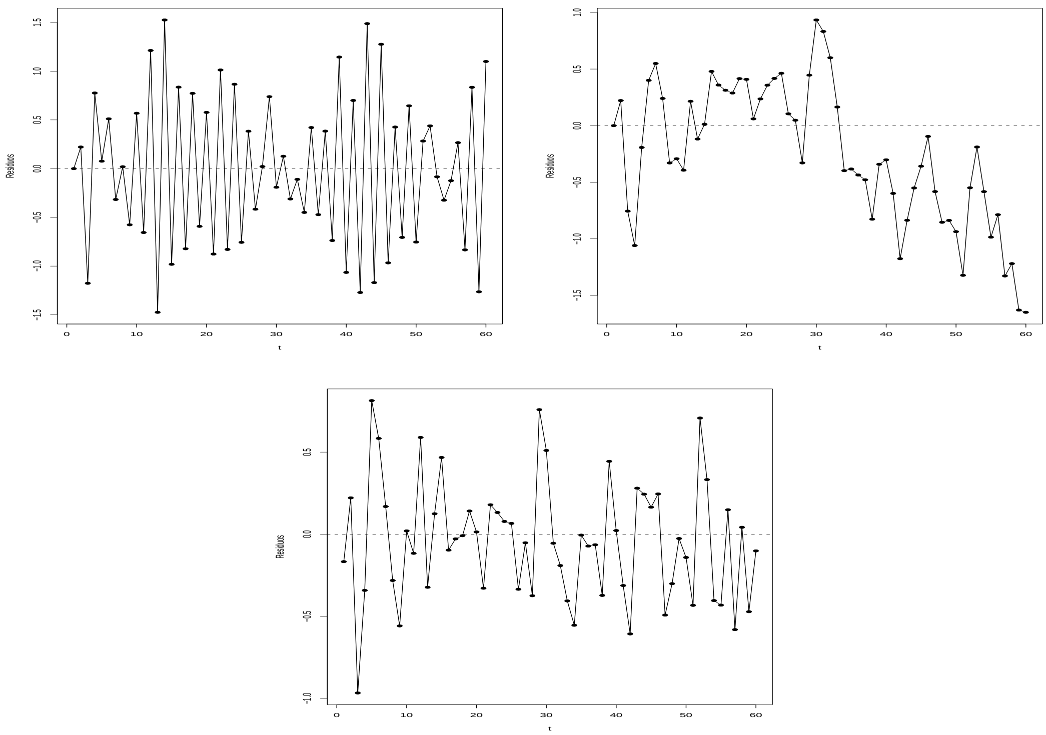
Al estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, \ldots, 50 \tag{E29.1}$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica, se ha obtenido un valor del estadístico Durbin-Watson igual a 2,1474.

1. Escribe la fórmula del estadístico de Durbin Watson.
2. ¿Hay evidencia de autocorrelación en el término de perturbación del modelo?
3. De los siguientes gráficos de residuos recogidos en la Figura 8 indica cuál (o cuáles) es compatible con la estructura de la perturbación del Modelo E29.1 y explica las razones de por qué lo eliges.

Figura 8: Gráficos de residuos



Ejercicio E30.

Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad u_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon_t \sim NID(0\,,\,\sigma^2) \quad t = 1, \ldots, 15$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica.

1. ¿Es constante la varianza de la perturbación a lo largo de la muestra?
2. Escribe la matriz de varianzas y covarianzas del vector de perturbaciones.
3. Si $\theta = 0$, ¿por qué método estimarías eficientemente los coeficientes del modelo? Razona tu decisión en base a las propiedades del estimador.

Ejercicio E31.

Se propone el siguiente modelo para la oferta de café en Colombia:

$$\ln(Q_t) = \alpha + \beta \ln(P_t) + u_t \tag{E31.1}$$

donde Q es el área dedicada a la plantación de café y P es el precio del producto en el mercado. Se dispone de 34 observaciones anuales de Q y P. La estimación MCO es:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{\ln(Q_t)}} = \underset{(0{,}20)}{5,1} + \underset{(0{,}23)}{0,85} \ln(P_t) \qquad R^2 = 0,86.$$

Se han realizado las siguientes regresiones basadas en los residuos MCO, $\hat{u}$:

$$\begin{array}{rcllll}
\hat{u}_t &=& -0,02 + 0,012 \ln(P_t) + 0,34\hat{u}_{t-1} & R^2 = 0,116 & SCR = 2,7 & (A)\\
\hat{u}_t &=& -0,38 + 0,01t - 0,18 \ln(P_t) + 0,32\hat{u}_{t-1} & R^2 = 0,13 & SCR = 2,61 & (B)\\
\hat{e}_t^2 &=& 1,32 - 0,02t & R^2 = 0,023 & SCR = 46,48 & (C)\\
\hat{e}_t^2 &=& 5,20 - 0,1t + 1,74 \ln(P_t) & R^2 = 0,10 & SCR = 42,76 & (D)\\
\hat{e}_t^2 &=& 5,74 - 0,11t + 1,87 \ln(P_t) - 0,18v_{t-1} & R^2 = 0,13 & SCR = 41,21 & (E)\\
\hat{e}_t &=& -0,22 + 0,01t & R^2 = 0,001 & SCR = 378,62 & (F)\\
\hat{e}_t &=& -3,59 + 0,08t - 1,51 \ln(P_t) & R^2 = 0,009 & SCR = 375,82 & (G)\\
\hat{e}_t &=& 0,51 - 0,009t + 0,17 \ln(P_t) - 0,18e_{t-1} & R^2 = 0,13 & SCR = 0,33 & (H)
\end{array}$$

con $\hat{e}_t = \hat{u}_t/\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}^2 = \sum_t \hat{u}_t^2/34$.

1. Contrasta si existe autocorrelación en el modelo. Indica claramente la hipótesis nula y la alternativa, la regresión auxiliar utilizada, el estadístico de contraste y su distribución bajo la hipótesis nula.

Posteriormente se han obtenido las siguientes estimaciones por MCGF:

$$\begin{array}{lll}
\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{\ln(Q_t)}} = \underset{(0{,}16)}{5,98} + \underset{(0{,}13)}{0,89} \ln(P_t) & SCR = 3,052 \quad \hat\sigma_t = 0,30/\sqrt{t} & (I)\\
\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{\ln(Q_t)}} = \underset{(0{,}3)}{5,82} + \underset{(0{,}9)}{1,21} \ln(P_t) & SCR = 5,620 \quad \hat\sigma_t = 5,066 \times t & (J)\\
\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{\ln(Q_t)}} = \underset{(0{,}22)}{6,04} + \underset{(0{,}11)}{0,91} \ln(P_t) & SCR = 2,642 \quad \hat{u}_t = 0,34\hat{u}_{t-1} + e_t & (K)\\
\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{\ln(Q_t)}} = \underset{(0{,}28)}{6,21} + \underset{(0{,}15)}{0,96} \ln(P_t) & SCR = 2,532 \quad \hat{u}_t = 0,36\hat{u}_{t-1} + 0,002\hat{u}_{t-2} + e_t & (L)
\end{array}$$

2. Interesa saber si la elasticidad-precio es cero. Explica cómo lo contrastarías indicando claramente el estimador que utilizas y cómo se ha obtenido. Utiliza la información anterior para realizar el contraste.

Ejercicio E32.

Al estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, \dots, 50$$

donde la matriz de regresores X es no estocástica, se ha obtenido un valor del estadístico de Breusch-Godfrey, BG(1)= 5,31.

1. Escribe la regresión auxiliar y el estadístico de Breusch Godfrey para contrastar la existencia de un proceso AR(1) o MA(1) en el término de perturbación.
2. Dado el valor muestral del estadístico, ¿hay evidencia de autocorrelación en el término de perturbación del modelo? ¿Por qué?

Ejercicio E33.

Se dispone de observaciones anuales de las variables Consumo (C) y Renta (R) para un país. Los datos se muestran en las primeras columnas de la siguiente tabla:

Obs.	C	R	$\widehat{C}$	$\hat{u}$
1	8,547	11,0	8,0483680	0,498632
2	8,942	13,5	9,7986580	-0,856658
3	10,497	14,0	10,148716	0,348284
4	10,173	14,9	10,778820	-0,605820
5	11,997	15,1	10,918843	1,078157
6	10,729	18,0	12,949180	-2,220180
7	12,750	18,8	13,509273	-0,759273
8	15,611	19,1	13,719307	1,891693
9	13,545	21,0	15,049528	-1,504528
10	17,843	21,2	15,189551	
11	21,610	34,0	24,151036	
12	25,473	34,3	24,361070	
13	24,434	35,0	24,851152	
14	28,274	38,0	26,951500	

Los resultados de la estimación por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios de la función de consumo:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + u_t \tag{E33.1}$$

se muestran a continuación:

$$\underset{(t-estad.)}{\hat{C}_t} = \underset{(0,31)}{0,347092} + \underset{(14,61)}{0,700116} R_t. \qquad (A)$$

$$\bar{R}^2 = 0,942 \qquad\qquad SCR = 30,6381.$$

1. La última columna de la tabla anterior muestra los residuos de la estimación anterior, complétala y dibuja la serie temporal de residuos. A la vista del gráfico comenta razonadamente si existe algún problema.

2. Obtén el valor del estadístico de Durbin y Watson y realiza el contraste para el cuál está diseñado. Indica todos los elementos del contraste incluyendo la hipótesis nula y la alternativa.

3. Utilizando la siguiente información realiza el contraste de Breusch y Godfrey. Indica todos los elementos del contraste incluyendo la hipótesis nula y la alternativa.

$$\underset{(t-estad.)}{\hat{u}_t} = \underset{(-0,603)}{-0,5679} + \underset{(0,0385)}{0,0198} R_t \underset{(-3,338)}{-0,75} \hat{u}_{t-1} + \hat{\omega}_t \qquad R^2 = 0,433.$$

4. Dada la evidencia obtenida en los apartados anteriores, qué consecuencias tiene en:

   a) Las propiedades para muestras finitas del estimador de los coeficientes del modelo. Razona y demuestra tu respuesta.

   b) La inferencia utilizando los estadísticos t mostrados en la ecuación (A). Razona tu respuesta.

5. ¿Cambiaría tu respuesta del apartado anterior si el problema detectado fuera consecuencia de omitir alguna variable relevante? Razona tu respuesta.

6. Considera la siguiente información y completa lo que falta:

$\hat{\rho}$	-0,99	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1
SCR^*	15,9	14,8	14,2	14,1	14,7	15,8	17,5	19,9	22,8	26,2	30,3	34,9

siendo

$$SCR^* = \sum_{t=....}^{t=....} (Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^*)^2$$

$Y_t^* = C_t - \hat{\rho} C_{t-1};$ $\qquad X_{1t}^* = ...;$ $\qquad X_{2t}^* = ...$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

a) ¿Qué método de estimación se está utilizando?

b) ¿Cómo obtendrías las estimaciones finales de β_1 y β_2 por este método? Indica el valor elegido de $\hat{\rho}$ razonando tu elección y la fórmula para obtener el estimador de β_1 y β_2. ¿Qué propiedades tienen los estimadores obtenidos de estos parámetros?

c) ¿Cómo contrastarías $H_0 : \beta_2 = 1$? Indica todos los elementos del estadístico de contraste, así como la regla de decisión.

d) Explica las diferencias entre el método anterior y el de Cochrane-Orcutt.

Ejercicio E34.

Se desea estimar una función de producción tipo Cobb-Douglas para el sector agrícola y ganadero en los Estados Unidos. Para ello se dispone de una base de datos[5] anuales para el periodo de 1948 a 1993 sobre los siguientes índices con base en el año 1982:

- Y_t = Índice de la producción agrícola y ganadera (en logaritmos).
- L_t = Índice de utilización del factor trabajo (en logaritmos).
- EX_t = Índice del tamaño de la explotación (en logaritmos).
- K_t = Índice del gasto en maquinaria (en logaritmos).

Se especifica el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + \beta_3 EX_t + \beta_4 K_t + u_t. \tag{E34.1}$$

Los resultados de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios son los siguientes:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}))}{\hat{Y}_t} = \underset{(1{,}286)}{4,112} - \underset{(0{,}039)}{0,739}\, L_t + \underset{(0{,}377)}{1,063}\, EX_t - \underset{(0{,}077)}{0,233}\, K_t \tag{A}$$

$$R^2 = 0,974 \qquad DW = 1,304$$

[5]Fuente: Rammanathan, R. (2002), *Introductory econometrics with applications.*

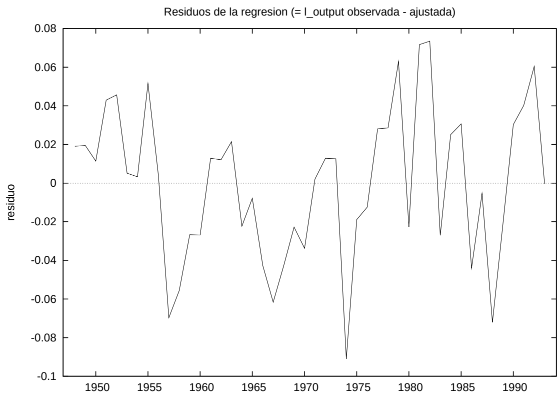
Junto con la regresión auxiliar:

$$\hat{u}_t = -0,3215 - 0,0068L_t + 0,084EX_t - 0,007K_t + 0,349\hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t. \qquad (B)$$

$$R^2 = 0,1225.$$

La Figura 9 muestra la serie temporal de los residuos.

Figura 9: Residuos MCO Modelo 1



1. Explica cómo crees que se han calculado los residuos y para qué se ha dibujado la Figura 9. Interpreta el gráfico y comenta si hay evidencia de algún problema.

2. Realiza los contrastes de autocorrelación que consideres oportunos utilizando toda la información ofrecida. Explica detalladamente.

3. Explica, razonando tu respuesta, si es fiable contrastar la significatividad del factor trabajo utilizando la información proporcionada en (A). ¿Cómo se debería modificar el estadístico si se sigue utilizando el estimador MCO para estimar el coeficiente β_2?

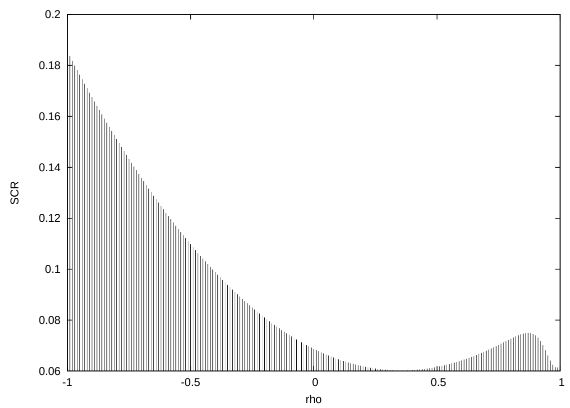
A la vista de los resultados de la estimación del Modelo E34.1 el investigador estima de nuevo la función de producción por el método de Hildreth y Lu. Los resultados utilizando el programa Gretl son los siguientes:

Estimaciones Hildreth-Lu utilizando las 45 observaciones 1949-1993
Variable dependiente: Y

	Coeficiente	Desv. típica	estadístico t	valor p
const	3,7025	1,3055	2,8360	0,0070
L	-0,7414	0,0434	-17,0581	0,0001
EX	1,1472	0,3785	3,0300	0,0042
K	-0,2246	0,0906	-2,4790	0,0173

4. Explica razonadamente qué muestra la Figura 10. ¿Qué quiere decir que la SCR sea mínima para rho = 0,35?

Figura 10: Hildreth-Lu. La SCR es mínima para rho = 0,35



5. Explica cómo se han obtenido las estimaciones de los coeficientes.

Utilizando los resultados de la estimación por Hildreth y Lu y sabiendo que la estimación de la matriz de covarianzas de los coeficientes es:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{HL}) = \begin{bmatrix} 1,70446 & 0,03642 & -0,47824 & 0,07057 \\ 0,03642 & 0,00189 & -0,012883 & 0,00307 \\ -0,47824 & -0,01283 & 0,143331 & -0,02647 \\ 0,07057 & 0,00307 & -0,02647 & 0,00827 \end{bmatrix}$$

6. Contrasta la hipótesis nula $H_0 : \beta_3 = 2\beta_4$. Explica todos los elementos del contraste.

Ejercicio E35.

Considera un modelo que relaciona la variable consumo (C) con la renta (R) tal que $C_t = \beta R_t + u_t$ donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$, $R_t = W_t + \epsilon_t$ siendo W la riqueza y $\epsilon_t \sim (0, \sigma_\epsilon^2)$. Entonces:

1. El estimador MCO de β es:

   a) $\hat{\beta}_{MCO} = \dfrac{\sum(R_t - \bar{R})(C_t - \bar{C})}{\sum(R_t - \bar{R})^2}$.

   b) $\hat{\beta}_{MCO} = \dfrac{\sum R_t C_t}{\sum R_t^2}$.

   c) $\hat{\beta}_{MCO} = \dfrac{\sum R_t C_t}{\sum C_t^2}$.

   d) $\hat{\beta}_{MCO} = \dfrac{\sum(R_t - \bar{R})(C_t - \bar{C})}{\sum(C_t - \bar{C})^2}$.

2. El estimador VI de β es:

   a) $\hat{\beta}_{VI} = \dfrac{\sum R_t C_t}{\sum W_t^2}$.

   b) $\hat{\beta}_{VI} = \dfrac{\sum W_t C_t}{\sum W_t^2}$.

   c) $\hat{\beta}_{VI} = \dfrac{\sum W_t C_t}{\sum R_t W_t}$.

   d) $\hat{\beta}_{VI} = \dfrac{\sum R_t C_t}{\sum W_t R_t}$.

3. Si se obtiene que $\hat{\beta}_{VI} = 0{,}87$, entonces la función de regresión muestral es:

   a) $C_t = \alpha + \beta W_t + u_t$.

   b) $\widehat{C}_t = 0{,}87 W_t$.

   c) $C_t = \alpha + \beta R_t + u_t$.

   d) $\widehat{C}_t = 0{,}87 R_t$.

   e) $\widehat{C}_t = 0{,}87 R_t + u_t$.

   f) $\widehat{C}_t = 0{,}87 W_t + u_t$.

Ejercicio E36.

Considera un modelo que relaciona las ventas de un determinado bien (V) con su precio de venta (P) tal que $V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t$ donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$, $P_t = C_t + \epsilon_t$ siendo $\epsilon_t \sim (0, \sigma_\epsilon^2)$, C el coste estimado de producción del bien y $E(u_t \epsilon_t) \neq 0$. Entonces:

1. La matriz de datos del modelo es:

   a) $X = \begin{pmatrix} 1 & P_1 \\ 1 & P_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_T \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1 & C_1 \\ 1 & C_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & C_T \end{pmatrix}$

   c) $X = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_T \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_T \end{pmatrix}$

2. La expresión del estimador MCO es:

$$\widehat{\beta}_{MCO} = \left(\qquad\qquad\qquad \right)^{-1} \left(\qquad\qquad \right)$$

3. El estimador $\widehat{\beta}_{MCO}$:

   a) es siempre lineal en u.
   b) es lineal en u si X y u son independientes.
   c) es lineal en u si $E(P_t u_t) = 0$.
   d) es lineal en u si C no es aleatoria.
   e) no es lineal en u porque P es aleatoria.
   f) no es lineal en u porque X y u son independientes.
   g) no es lineal en u porque $E(P_t u_t) = 0$.
   h) no es lineal en u porque C no es aleatoria.

4. El estimador $\widehat{\beta}_{MCO}$:

   a) es siempre insesgado.
   b) es insesgado porque X y u son independientes.
   c) es insesgado porque $E(P_t u_t) = 0$.

d) no es insesgado porque $E(u_t) = 0$.

e) no es insesgado porque $E(P_t u_t) \neq 0$.

f) no es insesgado porque X es aleatoria.

5. El estimador $\widehat{\beta}_{MCO}$:

a) es siempre consistente.

b) es consistente porque P y u son independientes.

c) es consistente porque $E(P_t u_t) = 0$.

d) no es consistente porque P y C son dependientes.

f) no es consistente porque $E(P_t u_t) \neq 0$.

g) no es consistente porque P es aleatoria.

6. La matriz de instrumentos es:

a) $Z = \begin{pmatrix} 1 & P_1 \\ 1 & P_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_T \end{pmatrix}$ b) $Z = \begin{pmatrix} 1 & C_1 \\ 1 & C_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & C_T \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_T \end{pmatrix}$ d) $Z = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_T \end{pmatrix}$

7. La expresión del estimador VI es:

$$\widehat{\beta}_{VI} = \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)^{-1} \left(\qquad\qquad\qquad \right)$$

8. El estimador $\widehat{\beta}_{VI}$:

a) es siempre lineal en u.

b) es lineal en u porque X y u son independientes.

c) es lineal en u porque C no es aleatoria.

d) no es lineal en u porque $E(P_t u_t) \neq 0$.

e) no es lineal en u porque $E(C_t P_t) \neq 0$.

9. El estimador $\widehat{\beta}_{VI}$:

a) es siempre insesgado.
b) es insesgado porque $E(P_t u_t) = 0$.
c) es insesgado porque $E(u_t) = 0$.
d) no es insesgado porque $E(P_t C_t) \neq 0$.
e) no es insesgado porque $E(P_t u_t) \neq 0$.
f) no es insesgado porque X es aleatoria.

10. El estimador $\widehat{\beta}_{VI}$:

    a) es consistente porque X y Z son independientes.
    b) es consistente porque $E(C_t u_t) = 0$.
    c) no es consistente porque X y Z son dependientes.
    d) no es consistente porque $E(P_t u_t) \neq 0$.
    e) no es consistente porque X es aleatoria.

Ejercicio E37.

En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$, con X_t es no estocástica, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ $|\rho| < 1$ y $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon)$.

1. ¿Por qué es no lineal el estimador de $\hat{\beta}_{MCO}$?
2. Razona la relación entre las variables Y_{t-1} y u_t y completa $E(Y_{t-1}u_t) = \ldots\ldots\ldots$
3. Propón un estimador consistente de los coeficientes $\beta_i \quad i = 1, 2, 3$.

    a) Nombre:
    b) Expresión matemática:
    c) Comenta razonadamente cuáles son sus propiedades:

Ejercicio E38.

Elige la respuesta correcta:

1. Si $X_t = t$:

    a) X_t es una variable no aleatoria. b) X_t es una variable aleatoria.

2. Si $X_t = 5 + v_t \qquad v_t \sim iid(0, \sigma_v^2)$:

   a) X_t es una variable no aleatoria. b) X_t es una variable aleatoria.

3. Sea $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X_t una variable no estocástica:

   a) $E(X_t u_t) = 0$. b) $E(X_t u_t) \neq 0$.

4. Sea $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X_t una variable estocástica independiente de $u_t \quad \forall t$:

   a) $E(X_t u_t) = 0$. b) $E(X_t u_t) \neq 0$.

5. Sean $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$, X_t una variable estocástica y además la correlación entre X_t y u_t no es cero:

   a) $E(X_t u_t) = 0$. b) $E(X_t u_t) \neq 0$.

Ejercicio E39.

En el MRLG $Y = X\beta + u$ con $u \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X matriz de regresores estocástica independiente de u. Marca lo que sea cierto:

1. $\hat{\beta}_{MCO} = \beta + (X'X)^{-1}(X'u)$:

   a) es lineal en u. b) es no lineal en u.

2. $\hat{\beta}_{MCO} = \beta + (X'X)^{-1}(X'u)$:

   a) es insesgado. b) es sesgado.

3. $\hat{\beta}_{MCO} = \beta + (X'X)^{-1}(X'u)$:

   a) tiene distribución conocida en muestras finitas.

   b) no tiene distribución conocida en muestras finitas.

Ejercicio E40.

Dado el modelo $Y_t = \beta X_t + u_t$ donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X_t no es estocástica. El económetra no observa la variable X_t. Se dispone de observaciones de otra variable, X_t^* que puede aproximarse a X_t, esto es:

$$X_t^* = X_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

donde $E(\varepsilon_t u_t) = 0 \qquad \forall t$.

1. Demostrar que si se utiliza X_t^* en lugar de X_t, para estimar β por MCO en el modelo:
$$Y_t = \beta X_t^* + v_t \qquad t = 1, ..., T$$
el estimador MCO de β no será consistente.

2. ¿Qué método de estimación puedes utilizar para obtener un estimador de β consistente? Escribe la fórmula del estimador que propones y las condiciones bajo las cuales este estimador es consistente.

Ejercicio E41.

Sea el siguiente modelo:
$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{E41.1}$$
donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$; X_2 y Z son variables fijas y $X_{1t} = \gamma Z_t + \eta_t$ con $\eta_t \sim iid(0, \sigma_\eta^2)$.

1. ¿Cuándo estimarías el modelo por el método de Variables Instrumentales utilizando la variable Z_t como instrumento para la variable X_{1t}? ¿Por qué? ¿Crea problemas la variable X_{2t}? ¿Por qué?

A partir de una muestra de 52 observaciones se han obtenido los siguientes productos cruzados:

	Y_t	X_{1t}	X_{2t}	Z_t
Y_t	100	80	-60	60
X_{1t}		100	-40	-10
X_{2t}			80	50
Z_t				40

por ejemplo $\sum X_{1t}X_{2t} = -40$.

2. Siendo Z_t el instrumento para X_{1t}, estima los parámetros β_1 y β_2 del modelo utilizando el método de Variables Instrumentales.

Los resultados de estimar por MCO el modelo han sido:
$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{Y}_t} = \underset{(0,077)}{0,625\, X_{1t}} - \underset{(0,086)}{0,4375\, X_{2t}}.$$

3. Contrasta la $H_0 : E(X_{1t}u_t) = 0$ sabiendo que:
$$\widehat{Var}(\hat\beta_{VI}) = \begin{pmatrix} 2,1166 & 1,0583 \\ 1,0583 & 1,2254 \end{pmatrix}$$
Como conclusión del resultado del contraste ¿cuál es el método adecuado para estimar el Modelo E41.1? ¿Qué propiedades tienen dichos estimadores?

Ejercicio E42.

Se quiere estimar el modelo

$$Y_t = \beta X_{1t} + u_t \qquad u_t \sim iid(0, \sigma^2) \tag{E42.1}$$

y se sabe que X_{1t} se determina con Y_t ya que $X_{1t} = Y_t + X_{2t}$ donde $E(X_{2t}u_t) = 0\, \forall t$.

1. Suponiendo que $\beta \neq 1$, demuestra que $E(X_{1t}u_t) = (1-\beta)^{-1}\sigma^2$.
2. ¿Qué implicaciones tiene este hecho en el estimador de β aplicando el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios a al Modelo E42.1? Razona la respuesta.
3. Escribe explícitamente la fórmula de un estimador de β alternativo para este modelo concreto razonando por qué lo escogerías.

Si se dispone de una muestra de 60 observaciones donde se han obtenido los siguientes productos cruzados:

	Y_t	X_{1t}	X_{2t}
Y_t	100	40	-60
X_{1t}		80	40
X_{2t}			100

por ejemplo $\sum Y_t X_{2t} = -60$.

4. Obtén la estimación de β por el método propuesto en el apartado anterior y por el método de MCO.
5. Contrasta al nivel de significación del 5 % la $H_0 : \beta = 0$ suponiendo que $\sigma^2 = 1$.
6. Si el investigador ignorara que $X_{1t} = Y_t + X_{2t}$, ¿Cómo podría darse cuenta de que $E(X_{1t}u_t) \neq 0$? Explica y realiza el contraste suponiendo $\sigma^2 = 1$.

Ejercicio E43.

Un agrónomo desea estimar la relación entre el rendimiento de trigo (Y) y la cantidad utilizada de abono (X^*). Para ello dispone de datos sobre el rendimiento y la cantidad de abono (X) declarada por el productor que puede no coincidir con la cantidad utilizada (X^*). Al mismo tiempo, conoce la variable de gasto efectivo en la compra de abono (Z), que cree es exógena, independiente del error de medida en la cantidad de abono declarada y está, al tiempo, correlacionada con la cantidad de abono que se utiliza. Se dispone de 20 observaciones, de las que se obtienen los siguientes valores:

$\sum_{i=1}^{20} X_i = 492,78 \qquad \sum_{i=1}^{20} Z_i = 284,4 \qquad \sum_{i=1}^{20} Z_i X_i = 7369,5$
$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 434,94 \qquad \sum_{i=1}^{20} Z_i Y_i = 6472,8$

1. Escribe el modelo adecuado y explica con claridad el método de estimación a utilizar y las razones que te llevan a elegirlo.

2. Estima por un procedimiento consistente la relación entre Y y X^*.

Ejercicio E44.

Se quiere estimar el modelo $Y_t = \beta X_t + u_t$ y se sospecha que puede haber factores no observables recogidos en u_t que estén correlacionados con X_t.

1. Si esta sospecha fuese cierta, ¿qué implicaciones tendría en las propiedades del estimador de β por MCO? Razona formalmente la respuesta.

2. ¿Bajo qué condiciones X_{t-1} sería un buen instrumento para X_t a la hora de obtener un estimador de β por Variables Instrumentales? Razona formalmente la respuesta.

Se dispone de una muestra de 60 observaciones donde se han obtenido los siguientes productos cruzados:

	Y_t	X_t	X_{t-1}
Y_t	50	20	-30
X_t		40	20
X_{t-1}			50

por ejemplo $\sum Y_t X_{t-1} = -30$.

3. Usando la variable X_{t-1} como instrumento de X_t, obtén la estimación de β por el método de Variables Instrumentales.

4. ¿Qué hubiera ocurrido si $\sum X_t X_{t-1} = 0$?

5. Suponiendo que $u_t \sim iid(0, 1)$, contrasta la $H_0 : E(X_t u_t) = 0$ explicando detalladamente el procedimiento de contraste utilizado.

Ejercicio E45.

Sea el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad t = 1, 2, \dots, T \tag{E45.1}$$

donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y $X_t = \gamma Z_t + \eta_t$ con $\eta_t \sim iid(0, \sigma_\eta^2)$.

1. ¿Cuándo estimarías el modelo por el método de Variables Instrumentales utilizando la variable Z_t como instrumento para la variable X_t? ¿Por qué?

A partir de una muestra de 52 observaciones se han obtenido los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} \sum X_t = 20 & \sum X_t Y_t = 70 & \sum X_t^2 = 1300 \\ \sum Y_t = 50 & \sum Z_t Y_t = 90 & \sum Z_t^2 = 1000 \\ \sum Z_t = 30 & \sum X_t Z_t = 40 & \end{array}$$

3. Siendo Z_t el instrumento para X_t, estima los parámetros β_1 y β_2 del modelo utilizando el método de Variables Instrumentales.

Los resultados de estimar por MCO el modelo han sido:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}))}{\widehat{Y}_t} = \underset{(0,43)}{0,946} + \underset{(0,027)}{0,039}\, X_t.$$

4. Contrasta la $H_0 : E(X_t u_t) = 0$ sabiendo que:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{VI}) = \begin{pmatrix} 0,018 & -0,44 \\ -0,44 & 1,20 \end{pmatrix}$$

Como conclusión del resultado del contraste ¿cuál es el método adecuado para estimar el Modelo E45.1? ¿Qué propiedades tienen dichos estimadores?

Ejercicio E46.

Considera la siguiente relación:

$$Y_{1t} = \beta_1 Y_{2t} + \beta_2 X_{1t} + u_t \qquad \text{(E46.1)}$$

donde X_{1t} es una variable fija y se cree que la variable Y_{2t} puede estar correlacionada con el término de perturbación u_t que se supone ruido blanco, es decir, $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$. Por otro lado se sabe que

$$Y_{2t} = \gamma X_{2t} + \varepsilon_t \qquad \text{(E46.2)}$$

donde X_{2t} es un regresor fijo y $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Una muestra de 25 observaciones da lugar a las siguientes sumas de cuadrados y de productos cruzados:

	Y_{1t}	Y_{2t}	X_{1t}	X_{2t}
Y_{1t}	100	80	-60	60
Y_{2t}	80	100	-40	-10
X_{1t}	-60	-40	80	50
X_{2t}	60	-10	50	40

donde por ejemplo $\sum Y_{1t}X_{1t} = -60$ y $\sum Y_{1t}^2 = 100$.

1. Obtén la estimación de β_1 y β_2 en la ecuación (E46.1) por Mínimos Cuadrados Ordinarios.
2. Bajo el supuesto de que $E(Y_{2t}u_t) \neq 0$, define un estimador consistente de β_1 y β_2. Escribe formalmente las condiciones que te aseguran esta propiedad y razona si se darían en este caso.
3. Obtén la estimación de β_1 y β_2 con el estimador propuesto en el apartado anterior.
4. Bajo el supuesto de $\sigma_u^2 = 1$, utiliza el contraste de Hausman para comprobar si hay evidencia de que Y_{2t} y u_t están correlacionadas. Explica el procedimiento de contraste, incluyendo la hipótesis nula y alternativa.
5. Dado el resultado del contraste del apartado anterior, ¿qué estimador es preferible en este caso? ¿Por qué?

Ejercicio E47.

Se quiere evaluar el rendimiento de la educación en términos del siguiente modelo

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 EDU_i + w_i \qquad i = 1, ..., N$$

donde Y_i y EDU_i son las ganancias salariales anuales (en decenas de miles de euros) y el nivel de educación de un individuo respectivamente. Además $E(EDU_i w_i) = 0$ para todo i y w_i es un ruido blanco.

Se dispone de una muestra de 1000 individuos. Sin embargo, se mide el nivel de educación a través de la variable observada, años de estudio, S_i, que está medida con error, tal que $S_i = EDU_i + \varepsilon_i$ donde ε_i es un ruido blanco independiente de EDU_i y de w_i.

Utilizando el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios en base a la información muestral disponible, se han obtenido los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}))}{\hat{Y}_i} = \underset{(0{,}078)}{2,431} + \underset{(0{,}0046)}{0,03332}\, S_i.$$

1. Interpreta qué indica la estimación obtenida para el parámetro β_2.

2. Explica en detalle qué propiedades tendrá el estimador MCO de β_1 y β_2 si se ha utilizado la medida de educación disponible S_i en lugar de EDU_i en el modelo. Razona tu respuesta.

Disponemos de una variable adicional P_i, que mide los años de educación del padre de ese individuo i. Para la muestra de 1000 individuos se tiene la siguiente información:

$\sum_i Y_i = 2988,232$ $\sum_i S_i = 16707$ $\sum_i Y_i S_i = 50071,6$ $\sum_i S_i^2 = 283539$
$\sum_i P_i = 14343$ $\sum_i Y_i P_i = 42914,7$ $\sum_i P_i S_i = 240466$ $\sum_i P_i^2 = 206469$
$\sum_i Y_i^2 = 9028,9$

3. Propón un estimador consistente alternativo al de MCO razonando bajo qué condiciones sería consistente y cuál será su distribución asintótica. Razona tu respuesta.

4. Calcula la estimación de β_1 y β_2 en base al estimador propuesto en el apartado anterior.

5. Si se ha utilizado un estimador consistente, ¿cómo se ha obtenido la siguiente estimación de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica del estimador propuesto en el tercer apartado? Indica todos los pasos que se han realizado hasta llegar a este resultado.

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = \frac{98,88}{998} \begin{bmatrix} 0,2984084 & -0,0178 \\ -0,0178 & 0,001065 \end{bmatrix}$$

6. Utilizando el estimador propuesto en el tercer apartado, contrasta la hipótesis de que un año adicional de educación supone un incremento medio en las ganancias salariales anuales de 720 euros. Escribe la hipótesis nula, la alternativa y todos los elementos del contraste.

7. Lleva a cabo el contraste de Hausman para analizar si es o no importante el problema de error de medida. Escribe la hipótesis nula, la alternativa y todos los elementos del contraste.

8. Indica de manera razonada cuál de los dos estimadores elegirías teniendo en cuenta el resultado del contraste de Hausman.

Ejercicio E48.

Considera estimar el parámetro β en la siguiente ecuación:

$$Y_{1t} = \beta Y_{2t} + u_{1t} \qquad u_{1t} \sim NID(0, \sigma_1^2). \tag{E48.1}$$

Se sabe que Y_{1t} e Y_{2t} se determinan simultáneamente ya que:

$$Y_{2t} = \alpha_1 Y_{1t} + \alpha_2 X_t + u_{2t} \qquad u_{2t} \sim NID(0, \sigma_2^2) \tag{E48.2}$$

donde X_t es una variable exógena, independiente de u_{1s} y de u_{2s} para todo t y s.

1. Obtén la expresión del estimador de β por el método de Variables Instrumentales utilizando como instrumento X_t.
2. ¿Es este estimador lineal? ¿Es insesgado? ¿Por qué?
3. ¿Es consistente? ¿Por qué?
4. ¿Conoces su distribución? ¿Y la asintótica? ¿Por qué?
5. ¿Cambiaría alguna de tus respuestas a los apartados anteriores si $\alpha_2 = 0$? Razona tu respuesta.

Para una muestra de tamaño $T = 1000$ se obtiene la siguiente información muestral:

$$\begin{array}{lll} \sum_t Y_{2t}^2 = 42 & \sum_t Y_{1t}Y_{2t} = 5 & \sum_t Y_{2t}X_t = 12 \\ \sum_t X_t^2 = 10 & \sum_t X_t Y_{1t} = 3 & \sum_t Y_{1t}^2 = 11 \end{array}$$

6. Utilizando un estimador consistente de σ_1^2 cuya estimación es $\hat{\sigma}_1^2 = 0,01$, utiliza el contraste de Hausman para determinar si hay evidencia o no de que Y_{2t} sea una variable endógena. Explica en detalle todo el proceso.

Ejercicio E49.

Se propone la siguiente especificación para la función de demanda de vino de un país:

$$Q_t = \beta P_t + u_t$$

donde $u_t \sim iid(0, 0{,}0921)$. Dado que el precio P se determina simultáneamente con la cantidad Q, se sospecha que P pueda estar correlacionada con u. Se dispone de datos de un índice de costes de almacenamiento, S, que se determina exógenamente, por lo que se considera independiente de u.

Dados los siguientes datos trimestrales para los años 1955-1975:

$$\sum P_tQ_t = 1{,}78 \qquad \sum S_t^2 = 2{,}1417$$
$$\sum P_t^2 = 0{,}507 \qquad \sum P_tS_t = 0{,}50$$
$$\sum S_tQ_t = 2{,}754$$

1. Utiliza el contraste de Hausman para contrastar esa sospecha, explicando el funcionamiento del contraste.

2. Dado el resultado del contraste, ¿qué estimador de β elegirías? ¿Por qué?

Ejercicio E50.

En el modelo $Y_t = \beta X_t + u_t$ donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X no es estocástica, el económetra no observa la variable X. Se dispone de observaciones de otra variable, X^* que puede aproximarse a X, esto es:

$$X_t^* = X_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad \text{donde} \quad E(\varepsilon_t u_t) = 0 \qquad \forall t.$$

1. Demuestra que si se utiliza X_t^* en lugar de X_t, para estimar β por MCO en el modelo:
$$Y_t = \beta X_t^* + v_t \qquad t = 1, ..., T$$
el estimador MCO de β no será consistente.

2. ¿Qué método de estimación puedes utilizar para obtener un estimador de β consistente?

3. Escribe la fórmula del estimador que propones y las condiciones bajo las cuales este estimador es consistente.

Ejercicio E51.

Un investigador quiere analizar el comportamiento del mercado de perfumes en un pais, en función de los precios, (P), y de los gastos realizados en publicidad, (A).

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 A_t^* + u_t \quad u_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad t = 1, \ldots, 100 \qquad \text{(E51.1)}$$

donde V_t es la cantidad vendida de perfume en el trimestre t.

1. Como consecuencia de la ocultación de datos por parte de las empresas, se observa que la variable "gastos en publicidad" utilizada en (A), es solamente una aproximación de los verdaderos gastos de publicidad, A^* esto es, $A_t = A_t^* + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$, ϵ_t y u_t independientes. Por esta razón, la estimación Mínimo Cuadrática del modelo viene dado por:

$$\widehat{V}_t = \underset{(9871)}{25727} - \underset{(0,33)}{0,96}\, P_t + \underset{(0,4)}{1,36}\, A_t \qquad (A)$$

¿qué podemos decir sobre los resultados presentados en (A)?

2. Supongamos que lo anterior es cierto. Sin embargo, se tiene la certeza de que los gastos de publicidad reales no observables, A_t^*, son una función creciente en el tiempo del tipo:

$$A_t^* = 0,05\, t + \eta_t \quad \eta_t \sim iid(0, \sigma_\eta^2)$$

donde η_t y u_t son independientes. Si se tiene en cuenta esta información, ¿cuál sería tu modelo a estimar? ¿qué propiedades tiene el estimador MCO en este nuevo modelo?

Ejercicio E52.

En el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad \text{(E52.1)}$$

donde X_{2t} es una variable no estocástica, X_{3t} es una variable estocástica independiente de u_t y $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$

1. Enuncia el teorema de Mann y Wald aplicándolo a la ecuación E52.1. Recuerda que tienes que incluir las condiciones para que sea aplicable e indica claramente qué resultados produce. Demuestra las implicaciones que tiene este teorema para el estimador de MCO de los parámetros del modelo.

2. En la ecuación E52.1 indica cómo contrastarías la hipótesis de significatividad conjunta de los regresores. Escribe la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y su distribución, así como la regla de decisión. Indica claramente cómo se obtienen cada uno de los elementos del estadístico de contraste.

Ejercicio E53.

Sea $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + u_t \quad t = 1, 2, \ldots, T$, donde $u_t \sim iid(0, \frac{1}{20})$ y se dispone de los siguientes datos:

t	1	2	3	4	5	6	Suma
Y_t	5,0	4,0	3,5	4,0	4,5	5,0	26,0
X_t^*	6,0	7,0	6,0	7,0	8,0	8,0	42,0

1. ¿Qué ocurre si la variable X_t^* es una variable medida con error, donde definimos $X_t^* = X_t + \varepsilon_t$? (Ayuda: partiendo del modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + w_t$, X_t sería una variable no observable y w_t y ε_t son perturbaciones independientes).

2. Si sólo se sospecha que X_t^* está medida con error, ¿cómo contrastarías si el estimador MCO es consistente? Realiza el contraste sabiendo que la correlación entre X_t^* y X_{t-1}^* es 0,429 y que X_{t-1}^* no está correlacionada con u_t.

3. Suponiendo que del apartado anterior deduces que el estimador MCO es inconsistente, contrasta si la variable X_t^* es significativa. No tengas en cuenta que T es pequeño.

Ejercicio E54.

Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad u_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

donde X_2 es una variable fija y X_3 es una variable estocástica. Denotamos por β al vector de parámetros desconocidos.

1. ¿Por qué el estimador de β MCO no es lineal?

2. ¿Qué supuesto te garantiza que el estimador de β por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios sea insesgado? Demuéstralo.

3. Si X_3 es estocástica y no independiente de u pero $E(X_{3t}u_t) = 0, \forall t$, ¿es el estimador de β por MCO consistente? Demuéstralo e indica los supuestos adicionales que te sean necesarios.

4. Si X_{3t} es estocástica pero se satisface el Teorema de Mann y Wald ¿podemos hacer inferencia sobre β a pesar de no conocer la distribución de u? Razona tu respuesta.

Ejercicio E55.

Supón que el ahorro de una persona depende de su *renta permanente* mediante la relación:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + v_i \tag{E55.1}$$

donde Y es el ahorro anual y R es la renta permanente anual de un trabajador. No es posible observar la renta permanente R, por lo que el modelo de regresión a estimar es:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \tag{E55.2}$$

siendo X_i la renta anual de un trabajador, que se utiliza como aproximación a R_i. Los resultados de la estimación MCO con datos de 50 individuos en el año 1999 son:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}_{MCO} = \begin{pmatrix} 4,34 \\ -0,856 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}^2_{MCO}(X'X)^{-1} = 1,023 \times \begin{pmatrix} 0,7165 & -0,009 \\ & 0,0001 \end{pmatrix}$$

1. La teoría económica mantiene que la relación renta permanente y ahorro es positiva. Sin embargo, la estimación MCO de la pendiente β es negativa. ¿Crees que puede existir algún problema que da lugar a esta aparente contradicción? Razona tu respuesta.

Posteriormente se estima el modelo E55.2 mediante Variables Instrumentales. La variable instrumental utilizada es el promedio de la ingresos obtenidos en los 10 años previos (1989-98) que obviamente, está muy relacionada con la renta permanente y también con la renta anual actual. Los resultados son:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}_{VI} = \begin{pmatrix} 0,988 \\ 0,039 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}^2_{VI}(Z'X)^{-1}Z'Z(X'Z)^{-1} = 1,3595 \times \begin{pmatrix} 1,7088 & -0,0223 \\ & 0,0003 \end{pmatrix}$$

2. ¿Cuál es la fórmula de $\hat{\beta}_{VI}$? ¿Y de $\hat{\sigma}^2_{VI}$?

3. Realiza el contraste de Hausman. Relaciona estos nuevos resultados con tu respuesta del primer apartado.

Parte III

Prácticas de Autoevaluación

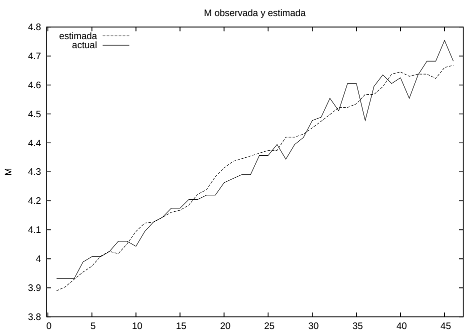
PRÁCTICA P1.

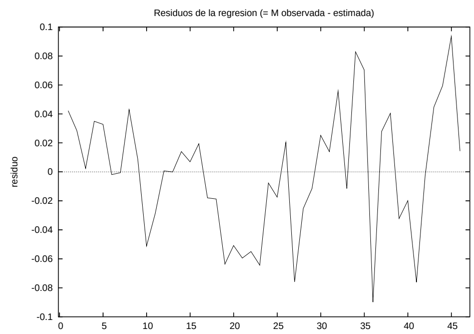
Una empresa familiar dedicada al arreglo de coches siniestrados, encarga a una gestoría un estudio sobre la relación existente entre el número de trabajadores, L, y los beneficios anuales obtenidos medidos en miles de euros, M, durante los últimos 46 años. El gestor le propone la siguiente relación:

$$M_t = \alpha_1 + \alpha_2 L_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{P1.1}$$

donde supone que la variable L es no estocástica y la perturbación sigue una distribución normal de media cero. Los resultados de la estimación MCO son los siguientes:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{M}_t} = \underset{(0{,}0843)}{7,4408} - \underset{(0{,}0170)}{0,6310}\, L_t \qquad R^2 = 0,968 \qquad DW = 1,333 \qquad t = 1, \ldots, 46.$$





Además se dispone de las siguientes regresiones auxiliares:

$$\frac{\hat u_t^2}{\hat u'\hat u} = 0,7734 + 0,1225 L_t + \hat\xi_{1t} \qquad SCR = 45,8741 \quad R^2 = 0,1209 \tag{A}$$

$$\frac{\hat u_t^2}{(\hat u'\hat u/46)} = 0,1740 + 0,0351\, t + \hat\xi_{2t} \qquad SCR = 60,5979 \quad R^2 = 0,1418 \tag{B}$$

$$\frac{\hat u_t}{(\hat u'\hat u/46)} = 0,2232 - 0,3517\, t + 2,4571 L_t + \hat\xi_{3t} \qquad SCR = 36,3244 \quad R^2 = 0,2187 \tag{C}$$

$$\hat u_t = 0,2992 \hat u_{t-1} + 0,0464 \hat u_{t-2} + \hat\xi_{4t} \qquad SCR = 0,0733 \quad R^2 = 0,1010 \tag{D}$$

1. Interpreta el coeficiente α_2, ¿cuál es el signo que esperas?
2. Comenta los gráficos. ¿Crees que el Modelo P1.1 cumple todas las hipótesis básicas?

3. Basándote en la información proporcionada, ¿qué supuestos sobre la perturbación podrías contrastar? Realiza los posibles contrastes indicando todos los elementos necesarios.

No satisfecho con los resultados, el gestor procede a estimar el modelo alternativo:

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + \beta_3 L_t^2 + v_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{P1.2}$$

cuyos resultados aparecen en la siguiente tabla:

Modelo P1.2: estimaciones MCO utilizando las 46 observaciones 1948–1993
Variable dependiente: M

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	421,905	21,0849	20,0098	0,0000
L	-72,228	4,71511	-15,3185	0,0000
L^2	0,00048	8,99e-05	5,3887	0,0000

Media de la var. dependiente	78,0652	R^2	0,962685
D.T. de la variable dependiente	18,9975	$\bar{R}^2$ corregido	0,960949
Suma de cuadrados de los residuos	606,028	$F(2, 43)$	554,674

4. ¿Qué pretende recoger el nuevo término incluido?

Además se dispone de los siguientes resultados:

Modelo A: estimaciones MCO utilizando las 46 observaciones 1–46

Variable dependiente: $\dfrac{\hat{v}_t^2}{(\hat{v}'\hat{v})/46}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-0,132741	0,391608	-0,3390	0,7362
t	0,048201	0,014509	3,3222	0,0018

Media de la var. dependiente	1,00000	R^2	0,200538
Suma de cuadrados de los residuos	75,0956	Grados de libertad	44
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	1,30641	Estad. de Durbin–Watson	2,08620

Modelo B: estimaciones MCO utilizando las 45 observaciones 2–46
Variable dependiente: $\hat{v}_t$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-0,14495	1,26964	-0,1142	0,9097
L	0,058395	0,513785	0,1137	0,9101
L^2	-0,005853	0,051741	-0,1131	0,9105
$\hat{v}_{t-1}$	0,194001	0,153777	1,2616	0,2142

Media de la var. dependiente	-8,41529e-05	R^2	0,0374139
Suma de cuadrados de los residuos	0,0680212	F(3,41)	0,531197
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	0,0407315	Estad. de Durbin–Watson	1,97476

5. Basándote en la información contenida en las dos tablas anteriores:

   a) ¿Qué concluyes sobre las características de la perturbación?

   b) ¿A qué se debe la contradicción que se obtiene entre los apartados 3 y 5.a)?

6. A la vista de los resultados obtenidos en la estimación del Modelo P1.2, ¿qué concluyes sobre el estimador de MCO y las desviaciones estimadas mostradas?

Otro de los socios de la gestoría presenta los siguientes resultados obtenidos empleando otro estimador alternativo.

Modelo C: estimaciones MC.Ponderados utilizando las 46 observaciones 1948–1993
Variable dependiente: M
Variable utilizada como ponderación: $\frac{1}{t^2}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	147,113	4,21100	34,9355	0,0000
L	-0,66613	0,04048	-16,4551	0,0000
L^2	0,001152	9,35e-05	12,3170	0,0000

7. Escribe el modelo que se ha estimado e indica cuáles son los supuestos sobre la perturbación que se han asumido. ¿Cuál es el método de estimación que se ha empleado? Escribe la fórmula matricial del estimador indicando cada uno de sus componentes.

8. Dado el supuesto realizado sobre la varianza de v, ¿cuál es el correspondiente modelo transformado con perturbaciones esféricas? Demuéstralo. Para este modelo, indica cuáles son los pasos necesarios para estimar los coeficientes y el valor de éstas.

9. ¿Cómo contrastarías si el número de trabajadores de la empresa es relevante para determinar el beneficio medio anual?

PRÁCTICA P2.

Se dispone de 62 observaciones sobre los terremotos registrados en Alaska durante el periodo 1969-1978[6] para las siguientes características:

Y: El logaritmo de la amplitud de onda en metros por segundo (m/sg).

X^*: El logaritmo de la amplitud del cuerpo longitudinal de la onda en m/sg.

W: El logaritmo de la traza máxima de amplitud de onda a corta distancia en m/sg.

Se quiere estimar cuál es el efecto sobre Y de la velocidad de amplitud del cuerpo de la onda de un terremoto, X, mediante el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + v_t \qquad v_t \sim NID(0, \sigma_v^2). \tag{P2.1}$$

La tecnología existente no permite obtener directamente el valor de la variable no estocástica X_t por lo que se aproxima mediante $X_t^* = X_t + e_t$, donde X_t^* es la variable observada y $e_t \sim \text{NID}(0, \sigma_e^2)$ es el error de medida. Además, la perturbación del modelo, v, y el error de medida, e, son independientes. Se han obtenido los siguientes resultados a partir del estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{Y_t} = \underset{(0{,}780)}{-1{,}491} + \underset{(0{,}149)}{1{,}261}\, X_t^* + \hat{u}_t\,, \qquad SCR = 17,242.$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,118 & -0,403 \\ -0,403 & 0,077 \end{bmatrix}^{-1}$$

1. Obtén paso a paso cada uno de los siguientes valores:

$$u_t =$$
$$E(u_t) =$$
$$Var(u_t) =$$
$$Cov(u_t, u_s) =$$
$$E(X_t^* u_t) =$$

2. Razona las propiedades en muestras finitas y asintóticas del estimador MCO.

[6]Fuente: Fuller, W.A. (1987), *Measurement Error Models.*

El modelo anterior ha sido reestimado por Variables Instrumentales (VI). Para ello se ha utilizado como instrumento para el regresor X_t^*, la variable W_t cuya medición se puede realizar con exactitud. Se han obtenido los siguientes resultados.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{VI}))}{Y_t} = \underset{(1{,}114)}{-4{,}287} + \underset{(0{,}213)}{1{,}797}\, X_t^* + \hat{u}_t\,, \qquad SCR = 20{,}961.$$

3. Escribe explícitamente la fórmula del estimador de VI y su expresión en términos de sumatorios.

4. Escribe explícitamente las condiciones necesarias para que el estimador de VI sea consistente.

5. Lleva a cabo el contraste de Hausman para analizar si es o no importante el problema de error de medida. Escribe la hipótesis nula, la alternativa y todos los elementos del contraste, así como su conclusión.

6. Contrasta la hipótesis de que, en media, la amplitud del cuerpo longitudinal de la onda recogida en un sismógrafo no es relevante sobre la amplitud de la onda.

PRÁCTICA P3.

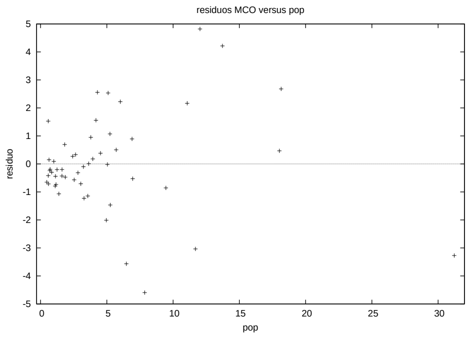
El Departamento de Sanidad de E.E.U.U. quiere estudiar la relación entre el gasto sanitario agregado en billones de dólares (exphlth), la renta personal disponible agregada también en billones de dólares (income), el porcentaje de población que supera los 65 años en el año 2005 (seniors) y la población en millones (pop). Para ello encarga un estudio a dos becarios de la facultad de Económicas de Harvard poniendo a su disposición datos del año 2005 para dichas variables sobre 51 estados americanos y los siguientes resultados[7]:

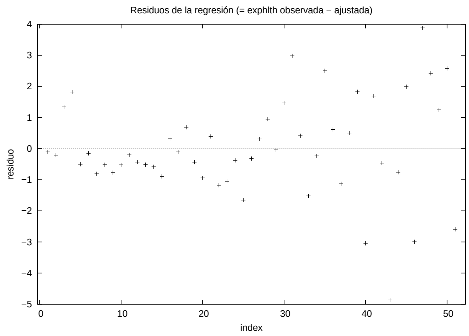
Modelo P3.1: estimaciones MCO utilizando las 51 observaciones de 1–51
Variable dependiente: exphlth

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-3,55153	1,40710	-2,524	0,014965
income	0,142035	0,001840	77,186	$<$ 0,00001
seniors	0,305816	0,108449	2,820	0,006962

Media de la var. dependiente	15,2649	R^2	0,992026
Suma de cuadrados de los residuos	127,565	$F(2,48)$	2985,94

Estad. de Breusch-Pagan para la varianza en función de POP = 15,13





El Becario A supone que las variables income, seniors y pop son no estocásticas y que la perturbación sigue una distribución normal. Concluye que tanto la renta como el porcentaje de población mayor de 65 años son variables individualmente significativas para explicar el gasto sanitario. Los resultados que presenta son los siguientes:

Modelo Becario A: estimaciones MCO utilizando las 51 observaciones de 1–51
Variable dependiente: exphlth
Desviaciones típicas robustas a heterocedasticidad, variante HC3

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-3,55153	1,57010	-2,262	0,028265
income	0,142035	0,002645	53,684	0,00001
seniors	0,305816	0,121408	2,519	0,015157

Media de la var. dependiente	15,2649	R^2	0,992026
D.T. de la variable dependiente	17,8877	$\bar{R}^2$ corregido	0,991694
Suma de cuadrados de los residuos	127,565	$F(2,48)$	1451,55

1. ¿Qué modelo está estimando el Becario A? Analiza la información proporcionada en los gráficos y realiza los contrastes que consideres oportunos.

2. ¿Qué supuestos está realizando sobre la media, la varianza y las covarianzas de la perturbación?, ¿qué método de estimación está utilizando?

3. ¿Estás de acuerdo con sus conclusiones sobre la significatividad individual de las variables? Realiza los contrastes que creas oportunos para justificar tus argumentos.

Al mismo tiempo el Becario B, que también supone que las variables income, seniors y pop son no estocásticas y que la perturbación sigue una distribución normal llega a las mismas conclusiones sobre la significatividad individual de las variables. Los resultados que presenta se muestran a continuación:

[7]Fuente: Ramanathan, Ramu (2002), *Introductory Econometrics with Applications.*

Modelo Becario B: estimaciones MC.Ponderados utilizando las 51 observaciones 1-51
Variable dependiente: exphlth
Variable utilizada como ponderación: $\dfrac{1}{pop^2}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-1,12626	0,408314	-2,758	0,008196
income	0,142343	0,004933	28,849	$< 0,00001$
seniors	0,106763	0,033061	3,229	0,002242

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuadrados de los residuos	12,3508
R^2	0,947736
Estadístico F (2, 48)	435,207

4. ¿Qué modelo está estimando el Becario B?, ¿qué supuesto está realizando sobre la varianza de la perturbación?, ¿qué método de estimación está utilizando?

5. ¿Estás de acuerdo con sus conclusiones sobre la significatividad individual de las variables? Realiza los contrastes que creas oportunos para justificar tus argumentos.

6. Valora el comportamiento de ambos investigadores. ¿Cuál te parece más adecuado?

PRÁCTICA P4.

Un agricultor quiere conocer la relación que existe entre la cantidad de fresas recolectadas en sus tierras, Q, medida en kilogramos, y el número de jornaleros contratados, L. Para ello encarga un estudio sobre la relación entre ambas variables a un económetra, quien especifica el siguiente modelo:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + u_t \qquad t = 1970, \ldots, 2004 \tag{P4.1}$$

donde L es no estocástica y u_t sigue una distribución normal. La estimación MCO presenta los siguientes resultados:

$$\underset{\text{(t-estad)}}{\widehat{Q}_t} = \underset{(36{,}62)}{1115,93} - \underset{(-14{,}20)}{2,4462}\, L_t \qquad R^2 = 0,8594 \qquad DW = 0,3210 \qquad T = 35.$$

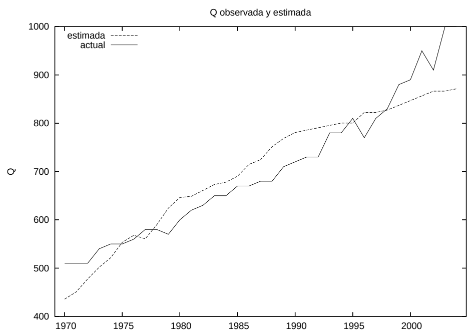
Además se dispone de la siguiente información adicional, donde $\hat{u}_t$ son los residuos obtenidos del Modelo P4.1:

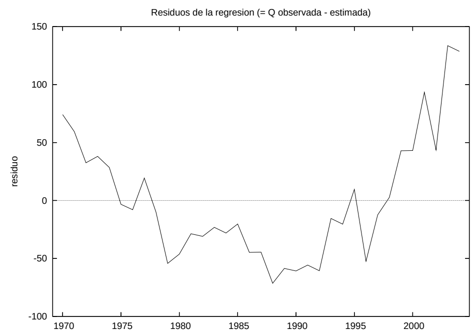
$$\hat{u}_t = 31,25 - 0,1814L_t + 0,8958\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{1t} \quad SCR = 26981,8 \quad R^2 = 0,7041 \qquad (A)$$

$$\hat{u}_t = 1,1397 + 0,8958\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{2t} \quad SCR = 29807,6 \quad R^2 = 0,6731 \qquad (B)$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{u}'\hat{u}/35)} = 0,4432 + 2,2378L_t + \hat{\zeta}_{3t} \quad SCR = 70,4985 \quad R^2 = 0,0427 \qquad (C)$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{u}'\hat{u}/35)} = 1,7899 + 0,9955\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{4t} \quad SCR = 55,2297 \quad R^2 = 0,0577 \qquad (D)$$





1. ¿La muestra se compone de datos de sección cruzada o datos temporales?, ¿por qué?
2. Interpreta el coeficiente β_2, ¿cuál es el signo que esperas?
3. Comenta el gráfico que representa los valores reales y los ajustados de la variable endógena. ¿Crees que se trata de un buen ajuste? Comenta el gráfico de los residuos. A la vista de ambos gráficos, ¿crees que el modelo cumple todas las hipótesis básicas?
4. Basándote en la información proporcionada verifica si las perturbaciones cumplen las hipótesis básicas.
5. Dada la evidencia encontrada explica cuáles son las consecuencias sobre el estimador MCO de los coeficientes y la fiabilidad de los estadísticos mostrados.

A la vista de los resultados obtenidos en los contrastes anteriores el económetra estima la relación (P4.1) empleando otro estimador que cree más adecuado al contexto. Los resultados que obtiene son los siguientes:

Estimador alternativo: estimaciones Cochrane–Orcutt utilizando las 34 observaciones 1971–2004
Variable dependiente: Q
iteración final $\hat{\rho}$ = 0,976619

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	1456,54	186,561	7,8073	0,0000
L	2,74197	1,13652	2,4126	0,0217

6. ¿Qué método de estimación se está empleando? Especifica detalladamente todos los pasos que se han de llevar a cabo para obtener las estimaciones anteriores. ¿Por qué es más adecuado que el anterior? Razona tu respuesta basándote en las propiedades del estimador.

En una conversación con el agricultor, éste le comenta que en general a una buena cosecha, le suceden buenas cosechas y que cuando se obtiene una mala cosecha es muy probable que las siguientes sean malas también. Esto hace reflexionar al económetra porque pudiera ser que la cantidad de fresas recogidas en la temporada anterior influyera en la cosecha actual. En base a su sospecha el económetra especifica y estima el siguiente modelo:

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 L_t + \alpha_3 Q_{t-1} + w_t. \tag{P4.2}$$

Resultados de la estimación:

Modelo P4.2: estimaciones MCO utilizando las 34 observaciones 1971–2004
Variable dependiente: Q

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	90,9866	99,9536	0,9103	0,3697
L	-0,23035	0,01154	-1,9948	0,0470
Q_{t-1}	0,94463	0,08989	10,5085	0,0000

Estadístico de Durbin-Watson = 3,10304

Además se dispone de las siguientes regresiones auxiliares:

$$\hat{w}_t = 21,32 - 0,1766L_t + 0,8788\hat{w}_{t-1} + \hat{\eta}_{1t} \qquad (E)$$
$$SCR = 25671,3 \qquad R^2 = 0,4734$$

$$\hat{w}_t = 1,7943 + 0,2398\hat{w}_{t-1} + 0,5647Q_{t-1} + \hat{\eta}_{2t} \qquad (F)$$
$$SCR = 23398,1 \qquad R^2 = 0,4767$$

$$\hat{w}_t = -255,47 + 0,579406L_t + 0,231059Q_{t-1} - 0,804475\hat{w}_{t-1} + \hat{\eta}_{3t} \qquad (G)$$
$$SCR = 10958,4 \qquad R^2 = 0,4869$$

$$\frac{\hat{w}_t^2}{(\hat{w}'\hat{w}/34)} = 0,4432 + 2,2378L_t + \hat{\eta}_{4t} \qquad (H)$$
$$SCR = 77,8328 \qquad R^2 = 0,05665$$

$$\frac{\hat{w}_t}{(\hat{w}'\hat{w}/34)} = 3,9229 + 2,2552\hat{w}_{t-1} + 0,3463Q_{t-1} + \hat{\eta}_{5t} \qquad (I)$$
$$SCR = 50,0805 \qquad R^2 = 0,0064$$

7. Realiza los contrastes que creas oportunos y calcula o razona las siguientes igualdades:

$$E(w_t) =$$
$$E(w_t^2) =$$
$$Cov(w_t, w_s) =$$
$$E(L_t w_t) =$$
$$E(Q_{t-1} w_t) =$$
$$E(\hat{\beta}_{MCO}) =$$

8. ¿Qué puedes decir sobre el Teorema de Mann y Wald y la consistencia de estimador MCO?

9. Para poder comprobar que la cosecha de la temporada anterior es un factor que determina la cosecha actual se ha obtenido la siguiente estimación con un estimador consistente, asintóticamente eficiente y válido para hacer inferencia del Modelo P4.2:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\alpha}))}{\overbrace{Q_t - \hat{\rho}Q_{t-1}}^{Q_t^*}} = 25,28\underbrace{(1-\hat{\rho})}_{X_t^*} + \underset{(0{,}125)}{0,064}\underbrace{(L_t - \hat{\rho}L_{t-1})}_{L_t^*} + \underset{(0{,}048)}{1,067}(Q_{t-1} - \hat{\rho}Q_{t-2}) + \hat{\epsilon}_t$$

$$R^2 = 0,981 \qquad DW = 1,98$$

donde ϵ_t es un ruido blanco tal que $\epsilon_t = w_t - \rho w_{t-1}$, siendo w_t las perturbaciones del Modelo P4.2.

Completa y/o realiza lo siguiente:

a) $\epsilon_t \sim (\qquad , \qquad)$

b)
$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{bmatrix}_{\cdots\cdots} = \begin{bmatrix} 25,28 \\ 0,064 \\ 1,067 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

c) ¿Cuál es el estimador consistente de ρ empleado? Describe todos los elementos y las condiciones que te garantizan la consistencia del parámetro ρ estimado.

d) ¿Es cierto que la cosecha de la temporada anterior es un factor que determina la cosecha actual? ¿Qué implicaciones tiene el resultado?

PRÁCTICA P5.

Una consultora americana tiene firmado un contrato para realizar un estudio sobre la relación entre el número de patentes y los gastos en Investigación y Desarrollo (RD) en Estados Unidos. Para ello dispone de datos anuales para los años 1960 a 1993 de las siguientes variables[8]:

- PATENTS: número de patentes, en miles de unidades, (rango 84,5-189,4).
- RD: gastos en investigación y desarrollo, en billones de dólares de 1992, (rango 57,94-166,7)

En primer lugar se considera estimar por MCO un modelo simple:

$$PATENTS_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, 34 \tag{P5.1}$$

obteniendo los siguientes resultados de estimación:

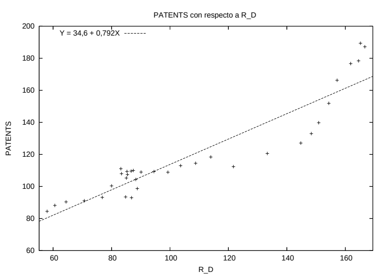
Modelo P5.1: estimaciones MCO utilizando las 34 observaciones de 1–34
Variable dependiente: PATENTS

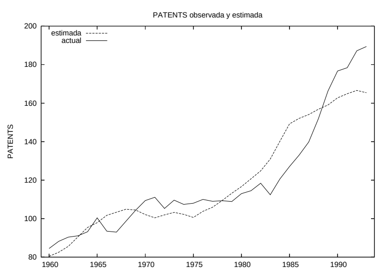
Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	34,5711	6,35787	5,4375	0,0000
RD	0,79193	0,05670	13,9662	0,0000

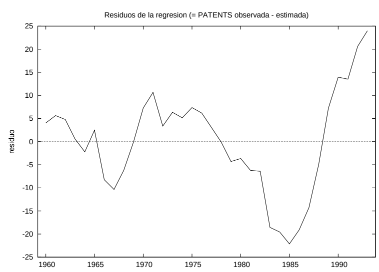
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	11,1724
R-cuadrado	0,85906
Estadístico de Durbin–Watson	0,23395

1. Interpreta el coeficiente estimado que acompaña a la variable RD. ¿Tiene el signo esperado?, ¿es una variable significativa?

2. Comenta detalladamente los tres gráficos proporcionados.







¿Qué problema parece existir en el modelo anterior? Razónalo con detalle y comenta las posibles consecuencias sobre los resultados mostrados y los obtenidos en el apartado anterior.

[8]Fuente: Ramanathan, Ramu (2002): *Introductory Econometrics with Applications.*

Después de probar con diversas especificaciones la consultora decide elegir de entre las siguientes:

$$\begin{aligned} PATENTS_t &= \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_t^2 + u_{1t}, \\ PATENTS_t &= \alpha_1 + \alpha_2 RD_t + \alpha_3 RD_{t-4} + \alpha_4 RD_t^2 + u_{2t}. \end{aligned}$$

3. ¿Son estos dos modelos lineales?, ¿por qué? ¿Son ambos modelos dinámicos?, ¿por qué?

4. Escribe la matriz de datos que corresponde a cada modelo.

Los resultados de la estimación de las dos especificaciones alternativas son:

MODELO A:

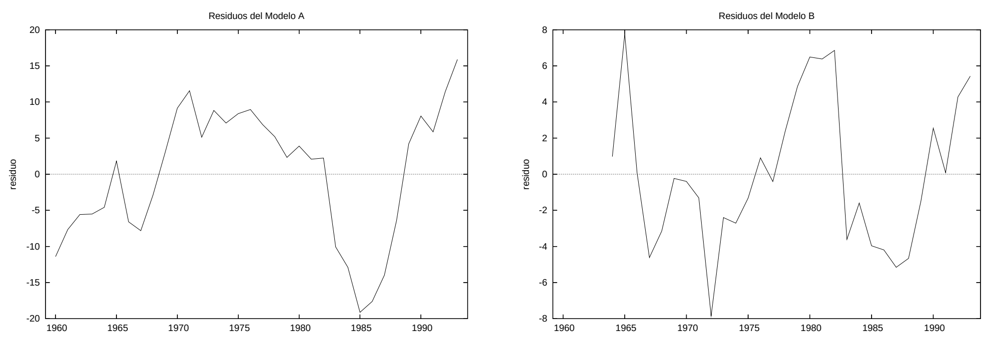
$$\begin{array}{lccccc} \widehat{PATENTS}_t & = & 121,575 & - \; 0,852 \; RD_t + & 0,00706 \; RD_t^2 \\ (\widehat{desv}(\hat\beta)) & & (23,243) & (0,429) & (0,00183) \\ (\widehat{desv}(\hat\beta))_{NW} & & (27,615) & (0,503) & (0,002) \end{array}$$

$R^2 = 0,904$ $\quad DW = 0,284$ $\quad BG(4) = 27,171$

MODELO B:

$$\begin{array}{lcccccc} \widehat{PATENTS}_t & = & 135,887 & - \; 1,789 \; RD_t + & 0,813 \; RD_{t-4} + & 0,00790 \; RD_t^2 \\ (\widehat{desv}(\hat\beta)) & & (22,493) & (0,356) & (0,097) & (0,001) \\ (\widehat{desv}(\hat\beta))_{NW} & & (30,555) & (0,475) & (0,120) & (0,002) \end{array}$$

$R^2 = 0,979$ $\quad DW = 0,842$ $\quad BG(4) = 11,974$



5. ¿Crees que los gráficos de los residuos reflejan algún problema? Contrástalo.

6. ¿Por qué crees que han utilizado el estimador de Newey-West para la obtención de las desviaciones típicas?, ¿te parece razonable su uso en las dos especificaciones?

7. Utilizando toda la información proporcionada, ¿cuál crees que puede ser la mejor especificación para determinar el número de patentes? Razona tu respuesta. ¿Es el modelo escogido un modelo con dinámica?

PRÁCTICA P6.

Una empresa quiere analizar el precio (P) de las viviendas en un determinado país en función del tipo de interés (I) y del Producto Interior Bruto (PIB). Para ello se dispone de datos trimestrales correspondientes al periodo 1963-1985. Los resultados de la estimación son los siguientes:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}))}{\widehat{P}_t} = \underset{(3{,}128)}{-5,3174} + \underset{(0{,}469)}{1,864}\, PIB_t - \underset{(0{,}295)}{0,890}\, I_t. \tag{P6.1}$$
$$SCR = 0,516 \qquad R^2 = 0,478$$

El analista de la empresa, tras observar los residuos, sospecha que la varianza de las perturbaciones al principio de la muestra son menores que los correspondientes al final de la muestra. Por ello propone dos posibles especificaciones:

$$Var(u_t) = \delta\ t^2 \quad \delta > 0 \tag{A}$$

$$Var(u_t) = \gamma_1 + \gamma_2 D_t \qquad \gamma_1, \gamma_2 > 0 \tag{B}$$

donde la variable ficticia D_t toma valor uno para las observaciones comprendidas en el periodo 1963-1975 y cero en caso contrario.

1. ¿Qué pretenden recoger las ecuaciones (A) y (B)?, ¿en qué se diferencian? Escribe la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación asociada a cada una de las propuestas. (Supón que $E(u_t u_s) = 0 \quad t \neq s$.)

2. ¿Podrías verificar la sospecha del analista con el contraste de Hausman? Razónalo.

Al final el analista se decide por una de las especificaciones y obtiene los siguientes resultados:

Modelo: estimaciones M.C.Ponderados utilizando las observaciones 1976:1–1985:4
Variable dependiente: P
Variable utilizada como ponderación: $1/t^4$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-9,3955	3,83947	-2,4471	0,0443
PIB	2,42845	0,511158	4,7509	0,0021
I	-1,0789	0,182560	-5,9103	0,0006

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuadrados de los residuos	0,000142
R^2	0,837967

3. Escribe el modelo que ha estimado el analista. Especifica las hipótesis necesarias sobre la perturbación para que la ponderación empleada sea la adecuada. Demuestra tus afirmaciones.

4. Escribe detalladamente la expresión del estimador empleado.

$$\widehat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad \right]^{-1} \left[\qquad\qquad \right]$$

5. Si la especificación adecuada para la varianza fuese la recogida en la ecuación (B), ¿qué consecuencias tendría sobre las estimaciones de Mínimos Cuadrados Ponderados mostradas? En este caso, ¿cómo estimarías los coeficientes del modelo?, ¿por qué?

PRÁCTICA P7.

El director de una empresa desea estudiar la función de demanda de silicona para la construcción de equipamientos. Para ello dispone de una muestra de datos mensuales[9] desde 1983:1 hasta 1990:5 sobre los galones producidos de silicona (Q) y el precio por galón en dólares (P). Con estos datos se estima el siguiente modelo:

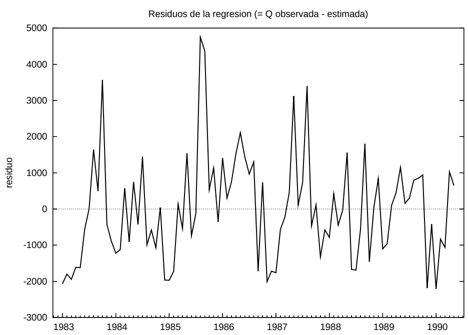
$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t. \tag{P7.1}$$

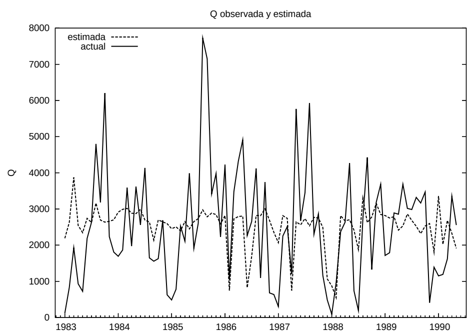
Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Modelo P7.1: estimaciones MCO utilizando las 89 observaciones 1983:01–1990:05
Variable dependiente: Q

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	5962,05	955,810	6,2377	0,0000
P	-381,09	104,766	-3,6376	0,0005

Suma de cuadrados de los residuos	1,87000e+08
R^2	0,132013
Estadístico de Durbin–Watson	1,32875
Estadístico de Breusch-Godfrey, BG(1)	9,52





1. ¿Qué hipótesis se están asumiendo sobre la perturbación del modelo para que los estadísticos-t anteriores tengan validez?, ¿y sobre la variable explicativa? Razónalas.

2. Indica cómo y para qué se ha calculado el valor “Estadístico de Durbin-Watson = 1,32875”. Dado el valor de este estadístico, ¿son creíbles las hipótesis asumidas para la perturbación en el apartado anterior?

[9]Fuente: Ramanathan, Ramu (2002): *Introductory Econometrics with Applications.*

El director, tras analizar los resultados de la estimación y los gráficos disponibles decide proponer este nuevo modelo:

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 Q_{t-1} + v_t. \tag{P7.2}$$

3. ¿Qué razones crees que han llevado al director a proponer el nuevo modelo? Razónalo en base a los gráficos y todos los resultados disponibles.

Los conocimientos de econometría del director son limitados y no confía en tomar la decisión adecuada sobre el método de estimación, por lo que duda entre dos alternativas. Los resultados de la primera alternativa son los siguientes:

Alternativa I: estimaciones MC2E utilizando las 88 observaciones 1983:02–1990:05
Variable dependiente: Q
Instrumentos: P_1

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	6056,46	1363,59	4,4415	0,0000
P	-375,74	109,814	-3,4216	0,0006
Q_1	-0,04702	0,2853	-0,1648	0,8691

Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	1489,92
R^2	0,10143
Estadístico de Durbin–Watson	1,26492
Estadístico de Hausman	1,7694

4. Dados los resultados de la primera alternativa:

   a) ¿Qué método de estimación ha utilizado? ¿Por qué crees que ha propuesto este estimador? ¿Qué propiedades tiene el estimador empleado? Explica con detalle tus afirmaciones.

   b) Escribe explícitamente la fórmula del estimador.

Los resultados de la segunda alternativa son los siguientes:

Alternativa II: estimaciones MCO utilizando las 88 observaciones 1983:02–1990:05
Variable dependiente: Q

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	4971,54	967,433	5,1389	0,0000
P	-346,23	100,532	-3,4440	0,0009
Q_1	0,2767	0,09564	2,8937	0,0048

Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	1398,62
R^2	0,20656
$F(2, 85)$	11,0645
Estadístico de Durbin–Watson	2,00214
Estadístico de Breusch-Godfrey, BG(1)	0,04984

5. Dados los resultados de la segunda alternativa:

   a) ¿Qué método de estimación ha utilizado? Escribe explícitamente la fórmula.

   b) Enuncia el teorema de Mann y Wald y verifica si se satisfacen sus condiciones en este caso. Indica las propiedades del estimador. ¿Cuál de los dos métodos de estimación te parece la más adecuada?, ¿por qué?

6. Contrasta si el modelo que determina la producción de silicona es estático.

PRÁCTICA P8.

La inmobiliaria BOSHOUSE ha contratado a un gestor para que le asesore en su política de fijación de precios. Para ello le presenta la siguiente información[10] obtenida con 88 observaciones sobre precios de venta y sus determinantes correspondientes a hogares situados en Boston y su área de influencia. Las variables disponibles son: precio de la vivienda en miles de dólares (price), tamaño de la parcela en pies cuadrados (lotsize), tamaño de la vivienda en pies cuadrados (sqrft) y número de dormitorios (bdrms). El analista propone dos especificaciones alternativas para determinar el precio de la vivienda. Los resultados de la primera especificación se muestran a continuación:

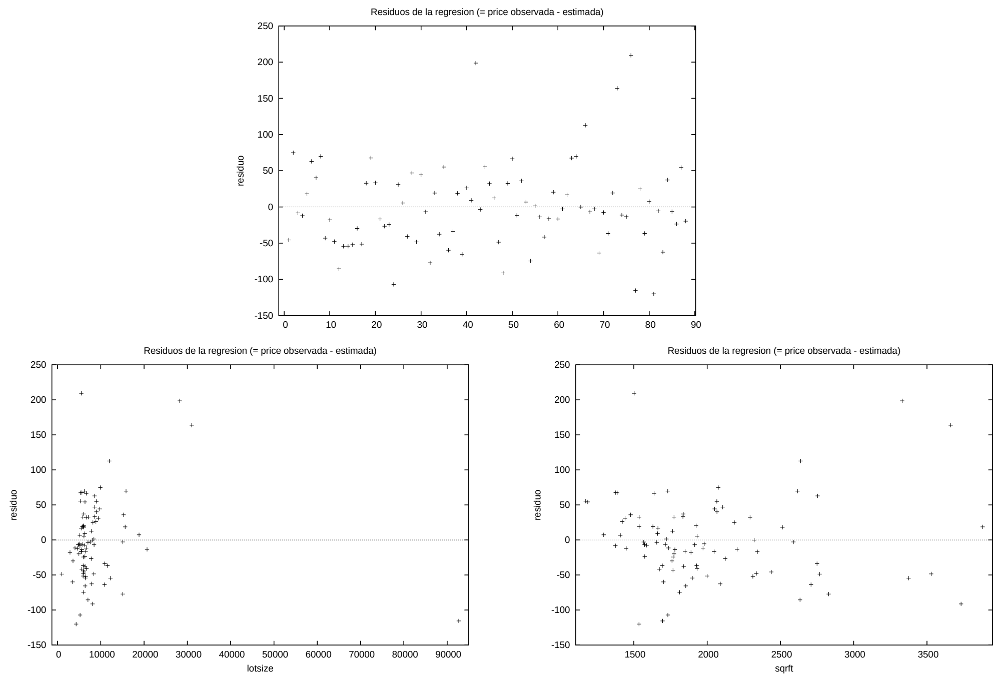
Especificación 1: estimaciones MCO utilizando las 88 observaciones 1–88
Variable dependiente: price

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-21,770	29,4750	-0,7386	0,4622
lotsize	0,0020	0,00064	3,2201	0,0018
sqrft	0,1227	0,01323	9,2751	0,0000
bdrms	13,8525	9,01015	1,5374	0,1279

D.T. de la variable dependiente	102,713
Suma de cuadrados de los residuos	300724
R^2	0,67236
$F(3, 84)$	57,4602
Breusch-Pagan: h(γ_0 + γ_1 lotsize + γ_2 sqrft)	27,97

1. ¿Qué modelo está estimando la empresa? Interpreta los dos primeros coeficientes estimados del modelo.

[10]Fuente: Wooldridge, Jeffrey M. (2003), *Introductory Econometrics.*



2. Interpreta la información contenida en los gráficos y realiza los contrastes que creas oportunos. ¿Cuáles son las propiedades del estimador MCO? Razona tus afirmaciones.

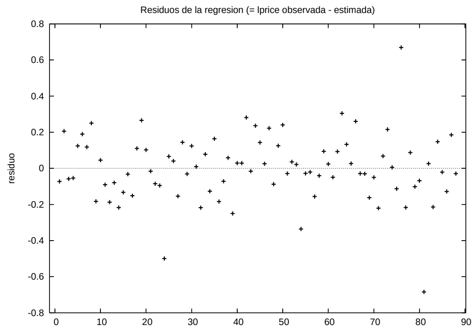
3. Dados los resultados obtenidos, propón una estructura para la matriz de varianzas y covarianzas. ¿Cómo la estimarías?

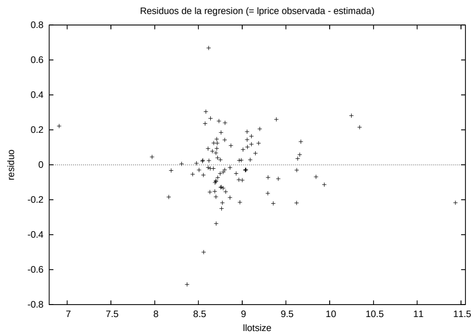
Los resultados de la segunda especificación se muestran a continuación:

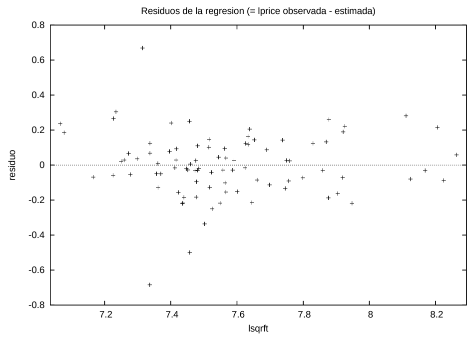
Especificación 2: estimaciones MCO utilizando las 88 observaciones 1–88
Variable dependiente: ln(price)

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-1,2970	0,651284	-1,9915	0,0497
ln(lotsize)	0,16796	0,03828	4,3877	0,0000
ln(sqrft)	0,70023	0,09286	7,5403	0,0000
bdrms	0,03695	0,02753	1,3424	0,1831

D.T. de la variable dependiente	0,30357
Suma de cuadrados de los residuos	2,86256
R^2	0,64296
$F(3, 84)$	50,4237
Breusch-Pagan: h(γ_0 + γ_1 ln(lotsize) + γ_2 ln(sqrft))	4,66







4. ¿Qué modelo está estimando la empresa? ¿Recogen los coeficientes lo mismo que en la especificación anterior? Razona tu respuesta.

5. Interpreta la información contenida en los gráficos y realiza los contrastes que creas oportunos. ¿Cuáles son las propiedades del estimador MCO? Razona tus afirmaciones.

6. Dados los resultados obtenidos, propón una estructura para la matriz de varianzas y covarianzas. ¿Cómo la estimarías?

7. ¿Cuál de las dos especificaciones te parece más adecuada para determinar el precio de la vivienda?, ¿por qué?

PRÁCTICA P9.

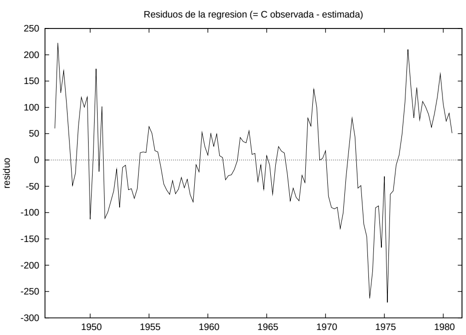
Un estudiante pretende medir la relación que existe entre el consumo y la renta en Estados Unidos para el periodo 1947:01-1980:4. Para ello dispone de datos trimestrales[11] del consumo per capita (C, medido en dólares con año base 1982) y de la renta disponible per capita (RD, medido en dólares con año base 1982).

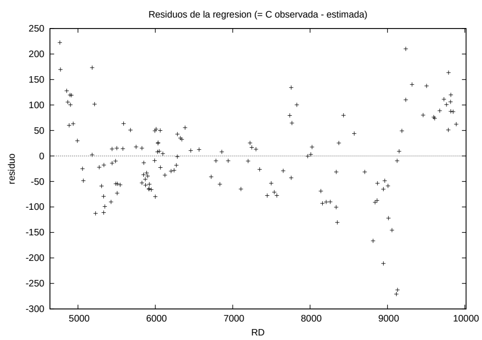
El estudiante comienza estimando un modelo de regresión simple que relaciona estas dos variables de forma lineal obteniendo los siguientes resultados y gráficos de residuos:

Modelo P9.1: estimaciones MCO utilizando las 136 observaciones 1947:1–1980:4
Variable dependiente: C

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	325,972	32,8874	9,9117	0,0000
RD	0,861635	0,004548	189,449	0,0000

Suma de cuadrados de los residuos	966548
R^2	0,996280
Estadístico de Durbin–Watson	0,630575





PRIMERA PARTE.

1. Escribe el modelo que se ha propuesto y la recta de regresión muestral.

2. Interpreta el coeficiente estimado 0,861635.

3. Comenta los dos gráficos proporcionados.

[11]Fuente: de R.C. Hill, W.E. Griffiths y G.G. Judge, (2001), *Undergraduate Econometrics.*

En base a los resultados obtenidos el estudiante decide estimar una segunda especificación:

Modelo P9.2: estimaciones MCO utilizando las 136 observaciones 1947:1–1980:4
Variable dependiente: C

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	1203,56	176,573	6,8162	0,0000
RD	0,609486	0,0501581	12,1513	0,0000
sq_RD	1,722e-05	3,413e-06	5,0446	0,0000

Suma de cuadrados de los residuos	811311
R^2	0,99687
$F(2, 133)$	21232,5
Estadístico de Durbin–Watson	0,74439

4. Escribe el modelo de regresión lineal general propuesto. ¿Es el modelo dinámico?
5. Explica detalladamente cuál es la diferencia entre la especificación del Modelo P9.1 y la del Modelo P9.2. ¿Por qué crees que ha estimado este segundo modelo?
6. Si la renta disponible per capita aumentara en un dólar, ¿cuál es la variación estimada sobre el consumo per capita?
7. ¿Qué supuestos sobre la perturbación son necesarios para que el estimador MCO sea el de mínima varianza?, ¿se cumplen estos supuestos?

SEGUNDA PARTE.

El estudiante reflexiona sobre la posible relación entre las variables de interés y llega a la conclusión de que probablemente el consumo esté determinado por el consumo realizado en el periodo anterior:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_t^2 + \beta_4 C_{t-1} + w_t. \tag{P9.3}$$

Los resultados de estimación que obtiene se muestran a continuación:

Modelo P9.3: estimaciones MCO utilizando las 135 observaciones 1947:2–1980:4
Variable dependiente: C

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	120,419	141,412	0,8515	0,3960
RD	0,211371	0,044291	4,7723	0,0000
sq_RD	7,630e-07	2,554e-06	0,2987	0,7656
C_1	0,745746	0,055172	13,5165	0,0000

Suma de cuadrados de los residuos	338799
R^2	0,99867
Estadístico de Durbin–Watson	1,57884

1. ¿Es el modelo dinámico?

2. ¿Qué supuestos sobre las variables explicativas son necesarios para que el estimador MCO sea insesgado?, ¿se cumplen estos supuestos? Razona tu respuesta.

El estudiante quiere analizar más detenidamente los resultados obtenidos para el Modelo P9.3 por lo que decide estimar la siguiente regresión auxiliar:

Regresión Auxiliar: estimaciones MCO utilizando las 131 observaciones 1948:2–1980:4
Variable dependiente: uhat

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	133,639	140,457	0,9515	0,3432
RD	0,081230	0,0472794	1,7181	0,0883
sq_RD	1,928e-06	2,515e-06	0,7665	0,4449
C_1	-0,126831	0,0581626	-2,1806	0,0311
uhat_1	0,173421	0,0906443	1,9132	0,0580
uhat_2	0,345921	0,0933133	3,7071	0,0003
uhat_3	0,112459	0,0949148	1,1848	0,2384
uhat_4	-0,106228	0,0933740	-1,1377	0,2575

Suma de cuadrados de los residuos	277978
R^2	0,16121
Estadístico de Durbin–Watson	1,93769

3. ¿Para qué le sirve al estudiante los resultados de la estimación de esta regresión auxiliar?, ¿qué es lo que pretende contrastar? ¿Cuál es la conclusión que obtiene? Contrástalo.

4. Dados los resultados obtenidos en la regresión auxiliar, ¿cuáles son las propiedades del estimador empleado en el Modelo P9.3? Razona tu respuesta.

TERCERA PARTE.

El estudiante parece estar seguro de la especificación del modelo que quiere estimar es la misma que analiza en la segunda parte, es decir

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_t^2 + \beta_4 C_{t-1} + w_t,$$

sin embargo no tiene claro el estimador que debería emplear. A continuación el estudiante presenta los resultados que obtiene al estimar el modelo de dos formas alternativas:

Alternativa 1: estimaciones Hildreth–Lu utilizando las 134 observaciones 1947:3–1980:4
Variable dependiente: C
$\hat{\rho} = 0{,}3$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	269,668	130,288	2,0698	0,0405
RD	0,289198	0,0600934	4,8125	0,0000
sq_RD	2,998e-06	3,394e-06	0,8833	0,3787
C_1	0,617666	0,0669645	9,2238	0,0000

Estadísticos basados en los datos rho-diferenciados:

Suma de cuadrados de los residuos	311220
R^2	0,998772

1. ¿Qué método de estimación ha utilizado? Escribe explícitamente la fórmula del estimador en base al modelo transformado.

$$SCR^* = \sum_{t=....}^{t=....} \left(Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^* - \hat{\beta}_3 X_{3t}^* - \hat{\beta}_4 X_{4t}^* \right)^2$$

$Y_t^* =$ ....; $X_{1t}^* =$ ....; $X_{2t}^* =$ ....;
$X_{3t}^* =$ ....; $X_{4t}^* =$ ....

$$\widehat{\beta}_{..........} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad \right]^{-1} \left[\qquad\qquad \right]$$

Escribe el proceso elegido por el estudiante para modelizar la dinámica de la perturbación:

2. Dados los resultados de estimación mostrados, ¿cuál es la estructura para la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación que está proponiendo el estudiante en esta Alternativa 1?

$$E(uu') = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

3. Basándote en el resultado del contraste realizado en el tercer apartado de la segunda parte, ¿te parece adecuada la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación que ha empleado en la Alternativa 1? En consecuencia, ¿cuáles son las propiedades del estimador empleado?

Alternativa 2: estimaciones MC2E utilizando las 135 observaciones 1947:2–1980:4
Variable dependiente: C
Instrumentos: RD_1 sq_RD_1.

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	710,641	247,667	2,8693	0,0041
RD	0,428764	0,0851963	5,0327	0,0000
sq_RD	9,730e-06	4,106e-06	2,3696	0,0178
C_1	0,338883	0,141450	2,3958	0,0166

Suma de cuadrados de los residuos	479442
Estadístico de Durbin–Watson	0,95037

Contraste de Hausman – Hipótesis nula: Los estimadores de MCO son consistentes
Estadístico de contraste asintótico: $\mathcal{X}_1^2 = 17{,}3525$ con valor p = 3,10497e-005

4. Explica qué significa la indicación: "Instrumentos: RD_1 sq_RD_1"

5. Realiza el contraste de Hausman. ¿Te sorprende el resultado que obtienes?, ¿es coherente con los resultados obtenidos en la segunda parte?, ¿por qué?

6. ¿Qué método de estimación ha utilizado? Escribe explícitamente la fórmula del estimador y la Función de Regresión Muestral (FRM).

$$\widehat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \left[\qquad\qquad\qquad \right]^{-1} \left[\qquad\qquad \right]$$

FRM: ____

7. ¿Cuáles son las propiedades del estimador empleado? ¿Qué condiciones son necesarias para que este estimador sea consistente?

8. Si tuvieras que escoger entre las alternativas de estimación empleadas para estimar el Modelo P9.3, ¿cuál escogerías? Razona tu respuesta.

PRÁCTICA P10.

La cadena de supermercados ALIMENTAX S.A. quiere determinar una política de expansión dentro de su comunidad autónoma y para ello ha encargado a su gerente el estudio de la función de consumo en dicha comunidad. Se dispone de una muestra anual[12] de 1959 a 1994 de observaciones sobre las siguientes variables:

C: Consumo real en billones de dólares.
W: Salario real en billones de dólares.
P: Rentas no salariales, medida en términos reales, en billones de dólares.

El gerente estima por mínimos cuadrados ordinarios el siguiente modelo:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 W_t + \beta_3 P_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{P10.1}$$

con los siguientes resultados:

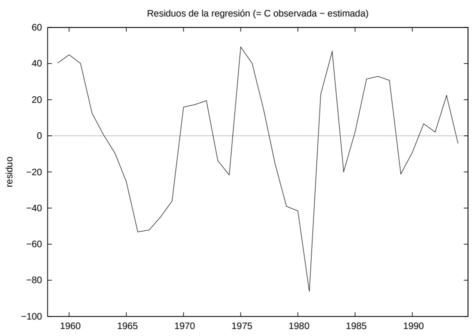
Modelo P10.1: estimaciones MCO utilizando las 36 observaciones 1959–1994
Variable dependiente: C

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-222,15	19,5527	-11,3620	0,0000
W	0,69326	0,032606	21,2615	0,0000
P	0,73591	0,048821	15,0735	0,0000

Suma de cuadrados de los residuos	38976,5	R^2	0,998754
$F(2, 33)$	13230,3	Estad. de Durbin–Watson	0,969426
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,494451	BG(1)	9,621

PRIMERA PARTE.

1. ¿Qué quiere decir que las variables están medidas en términos reales?
2. Interpreta el parámetro β_2.
3. Comenta el gráfico de residuos.



[12]Fuente: Ramanathan, Ramu (2002), *Introductory Econometrics with Applications.*

4. ¿Se cumplen todas las hipótesis básicas sobre la perturbación? Analiza todos los resultados mostrados y completa las matrices que aparecen a continuación de acuerdo con el contraste o contrastes realizados:

$$E(u) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \qquad E(uu') = \ldots\ldots \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

5. Suponiendo que W y P son no estocásticas, razona las propiedades que tiene el estimador MCO de los coeficientes del Modelo P10.1.

SEGUNDA PARTE.

El gerente está preocupado por la especificación del modelo por lo que decide estudiar dos especificaciones alternativas.

La primera de ellas es:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 W_t + \beta_3 W_{t-1} + \beta_4 P_t + v_t. \tag{P10.2}$$

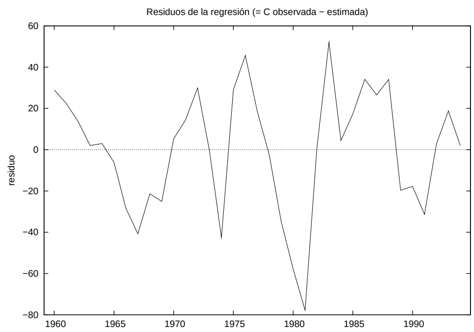
Los resultados para esta especificación son:

Modelo P10.2: estimaciones MCO utilizando las 35 observaciones 1960–1994
Variable dependiente: C

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-223,32	21,9777	-10,1613	0,0000
W	0,61883	0,113718	5,4418	0,0000
W_1	0,083983	0,108643	0,7730	0,4454
P	0,725303	0,049403	14,6813	0,0000

Suma de cuadrados de los residuos	36407,3
R^2	0,99875
$F(3, 31)$	8284,4
Estadístico de Durbin–Watson	0,94951
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,49348

1. Comenta las siguientes afirmaciones razonando si son ciertas o falsas y por qué:



a) "El estimador MCO empleado en el Modelo P10.2 es no lineal".

b) "La matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes estimados por MCO en el Modelo P10.2 es $V(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$. Realiza los contrastes que consideres oportunos.

A continuación se muestra la segunda especificación:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 W_t + \beta_3 P_t + \beta_4 C_{t-1} + w_t \qquad \text{(P10.3)}$$

para la cual se dispone de los siguientes resultados:

Modelo P10.3
Alternativa 1: estimaciones MCO utilizando las 35 observaciones 1960–1994
Variable dependiente: C

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-155,77	33,1278	-4,7021	0,0001
W	0,513348	0,0766851	6,6942	0,0000
P	0,535774	0,0835316	6,4140	0,0000
C_1	0,270081	0,100359	2,6911	0,0114

Suma de cuadrados de los residuos	30081,4
R^2	0,99897
Estadístico de Durbin–Watson	1,00858
BG(1)	8,70434
BG(4)	12,0405
Hausman	11,7299

2. Dados todos los resultados de la estimación anterior, ¿qué puedes decir sobre la validez de los contrastes de significatividad mostrados?

TERCERA PARTE.

A la vista de los resultados de la estimación del Modelo P10.3, el gerente reestima el modelo de forma alternativa obteniendo los siguientes resultados:

Modelo P10.3
Alternativa 2: estimaciones MC2E utilizando las 35 observaciones 1960–1994
Variable dependiente: C
Instrumentos: W_1

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-202,33	38,7791	-5,2177	0,0000
W	0,632776	0,091810	6,8922	0,0000
P	0,655223	0,098125	6,6774	0,0000
C_1	0,099882	0,122778	0,8135	0,4159

Suma de cuadrados de los residuos	32872,3
$F(3, 31)$	9176,48
Estadístico de Durbin–Watson	0,99324

1. Dado el método de estimación utilizado, completa:

$$\widehat{\beta}_{\dots\dots\dots\dots} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad \right]^{-1} \left[\qquad\qquad \right]$$

2. ¿Por qué ha utilizado el gerente dicho método de estimación?

Se dispone además de los siguientes resultados:

Modelo P10.3
Alternativa 3: estimaciones MC2E utilizando las 35 observaciones 1960–1994
Variable dependiente: C
Instrumentos: W_1 P_1

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-207,24	38,3003	-5,4111	0,0000
W	0,645366	0,090326	7,1448	0,0000
P	0,667815	0,096854	6,8950	0,0000
C_1	0,081940	0,120362	0,6808	0,4960

Suma de cuadrados de los residuos	33491,7
$F(3,31)$	9006,56
Estadístico de Durbin–Watson	0,99542
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,47342

3. Explica qué significa la indicación: Instrumentos: W_1 P_1.
4. Describe paso a paso el proceso llevado a cabo por el gerente para obtener estos resultados. ¿En qué se diferencia este estimador con el empleado en la Alternativa 2 del Modelo P10.3?
5. De los tres resultados de estimación alternativos mostrados para el Modelo P10.3, ¿con cuál te quedarías? Razona tu respuesta.

PRÁCTICA P11.

La muestra de datos necesaria para realizar esta prueba se encuentra en los archivos de muestra de Gretl y corresponde a Ramanathan data8-2.gdt. En este fichero vas a encontrar la siguiente información sobre renta personal agregada y gasto en transporte urbano (1993) para los estados de EEUU.

EXPTRAV: Gasto en transporte en billones de dólares (Rango 0,708 - 42,48).

INCOME: Renta Personal en billones de dólares (Rango 9,3 - 683,5).

POP: Población, en millones, (Rango 0,47 - 31,217).

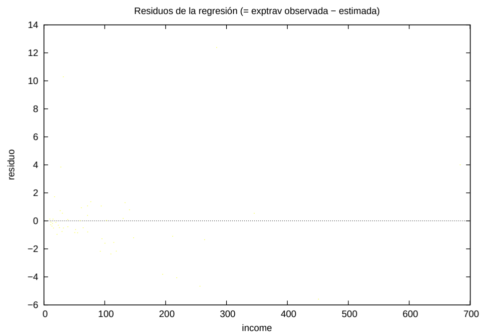
1. Estima por MCO un modelo que relacione el gasto en transporte con la renta personal incluyendo un término independiente. Completa:
   a) El modelo a estimar es:
   b) Los resultados de la estimación son:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{EXPTRAV}_i} = \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad} + \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad}$$

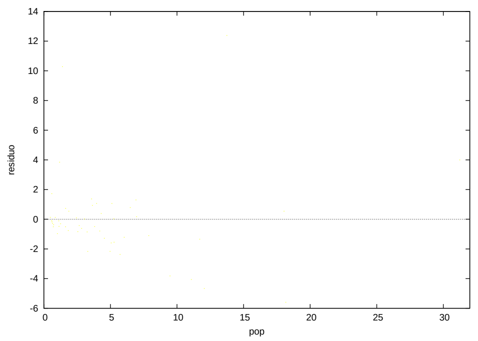
$R^2 =$ $\qquad$ $SCR =$ $\qquad$ $N =$

i	1	2	3	4	
$\hat{u}_{MCO,i}$					

c) Dibuja e interpreta los gráficos:
- Residuos MCO frente a la variable INCOME.



-Residuos MCO frente a la variable POP.



2. Supongamos que creemos que $Var(u_i) = \sigma^2 POP_i$. Realiza el contraste:

   a) Escribe la hipótesis nula, la alternativa y el estadístico de contraste que vas a utilizar junto con su distribución. Indica claramente de dónde salen cada uno de los elementos de este estadístico.

   b) Completa:
   Valor muestral del estadístico:
   Valor crítico para un nivel de significación ($\alpha = 5\,\%$) :
   Aplicación de la regla de decisión:

   c) A la vista del resultado del contraste anterior, ¿son las perturbaciones del modelo esféricas? Escribe la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación.

   d) Completa la siguiente expresión para el estimador eficiente de los coeficientes del modelo propuesto en 1.a) bajo el supuesto de que $var(u_i) = \sigma^2 POP_i$:

$$\hat{\beta}_{......} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad \right]^{-1} \left[\qquad\qquad \right]$$

3. Aplica el método de estimación que has propuesto en el apartado anterior.
    a) Escribe la función de regresión muestral que hayas obtenido.
    b) Contrasta la significatividad de la variable renta.
4. Estima eficientemente los coeficientes del siguiente modelo:

$$EXPTRAV_i = \beta_1 + \beta_2 INCOME_i + u_i \qquad u_i \sim (0, \alpha_1 + \alpha_2 POP_i^2 + \alpha_3 POP_i^3).$$

    a) Resultados de la estimación:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{......}))}{\widehat{EXPTRAV}_i} = \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad} + \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad}$$

$$\widehat{Var(u_i)} = \qquad + \qquad\qquad +$$

    b) Contrasta la significatividad de la variable renta.
    c) Explica la diferencia entre el contraste realizado en el apartado 3.b) y el realizado en el apartado 4.b).

PRÁCTICA P12.

Considera el siguiente modelo de regresión:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, N \qquad \text{(P12.1)}$$

donde X_i es estocástica, $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $E(u_i u_j) = 0$ para $i \neq j$ y donde $E(X_i u_i) = 0,9$.

1. ¿Qué problema existe en el modelo anterior? ¿Cómo podría detectarse? Explica en detalle el contraste que propones y las consecuencias de rechazar o no la nula.
2. ¿Qué consecuencias tiene en los contrastes de hipótesis sobre β_1 y β_2 la utilización del estimador MCO y el de VI? Razona tu respuesta en cada caso.

Se dispone de una muestra de 500 observaciones que da lugar a las siguientes sumas de cuadrados y de productos cruzados[13]:

[13] Fuente: de R.C. Hill, W.E. Griffiths y G.G. Judge, (2001), *Undergraduate Econometrics.*

	1	Y_i	X_i	Z_{1i}
1	500	1530,17	14,48	-0,23
Y_i		7163,54	1551,83	448,79
X_i			1037,57	451,24
Z_{1i}				509,40

donde a modo de ejemplo $\sum Y_iX_i = 1551,83$ y $\sum Y_i = 1530,17$.

3. Utilizando la información muestral dada, completa todos los elementos dentro de las matrices para la obtención de las estimaciones de β_1 y β_2 por VI, considerando como único instrumento a Z_1:

$$\widehat{\beta}_{VI} = \left[\quad \quad \quad \quad \quad \quad \right]^{-1} \left[\quad \quad \right] = \left[\begin{array}{c} 3,03 \\ \\ 0,996 \end{array} \right]$$

Dada la siguiente estimación de la matriz de varianzas y covarianzas del anterior estimador VI de β_1 y β_2:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{VI}) = \left[\begin{array}{cc} 0{,}00203608 & -0{,}000074 \\ & 0{,}00254410 \end{array} \right]$$

completa la ecuación del modelo estimado:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{VI}))}{\hat{Y}_i} = \underset{(\quad\quad\quad)}{} \quad \ldots \quad \underset{(\quad\quad\quad)}{}$$

4. ¿Bajo qué condiciones es consistente el estimador VI del apartado anterior? ¿Es un estimador asintóticamente eficiente? Razona tu respuesta.

5. Escribe el estadístico de contraste y su distribución para contrastar:
$H_0 : \beta_1 = 3 \quad \beta_2 = 1$.
Realiza el contraste basándote en la siguiente información:

Conjunto de restricciones
1: b[const] = 3
2: b[X] = 1
Valor muestral del estadístico de contraste: $\mathcal{X}^2(2) = 0,49022$, con valor-p $= 0,78261$.

Se ha considerado un estimador alternativo al utilizado en el tercer apartado obteniéndose los siguientes resultados en Gretl.

Modelo P12.1: estimaciones MC2E utilizando las 500 observaciones 1–500
Variable dependiente: Y
Instrumentos: const Z1 Z2

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	3,03113	0,0445796	67,9936	0,0000
X	1,00899	0,0448997	22,4721	0,0000

6. Explica paso a paso la obtención de este estimador. ¿Es mejor que el anterior? Razona tu respuesta.

PRÁCTICA P13.

Una agencia de viajes de Chicago quiere analizar si hay diferencias significativas entre las familias en la elección del destino de vacaciones que se encuentra más o menos alejado de su lugar de residencia, en función del número de hijos pequeños en la familia. Para ello dispone de una muestra de 200 familias de esta ciudad entrevistadas en el año 2007[14]. A continuación se muestra el primer modelo especificado:

$$Miles_i = \beta_1 + \beta_2 Income_i + \beta_3 age_i + \beta_4 kids_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, 200 \qquad \text{(P13.1)}$$

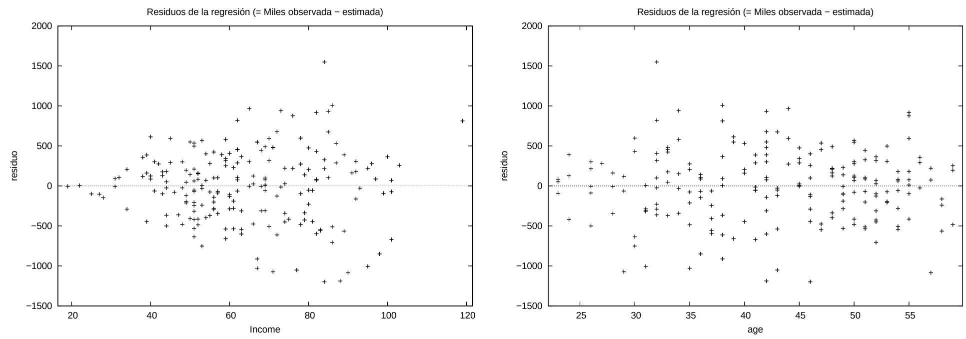
donde $Miles$ son las millas recorridas por una familia en las vacaciones de ese año, $Income$ es la renta familiar anual en miles de dólares, age es la edad media de los adultos en la familia y $kids$ el número de hijos menores de 16 años existentes en la familia.

Una primera estimación del modelo por MCO produce los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{Miles}_i} &= \underset{(169{,}8)}{-391,55} + \underset{(1{,}80)}{14,201}\,Income_i + \underset{(3{,}757)}{15,741}\,age_i \underset{(27{,}13)}{-81,826}\,kids_i. \\
R^2 &= 0,340605 \qquad SCR = 40099000
\end{aligned}$$

1. ¿Qué te sugieren los gráficos? Comenta detalladamente cada uno de ellos.
2. Después de agrupar las observaciones de todas las variables en dos grupos en función de un ordenamiento decreciente de la variable $Income$ y estimar el Modelo P13.1 anterior por MCO separadamente para cada grupo, se obtienen las siguientes resultados:

[14]Fuente: de R.C. Hill, W.E. Griffiths y G.G. Judge, (2001), *Undergraduate Econometrics.*



Primera submuestra: estimaciones MCO utilizando las 80 observaciones 1–80
Variable dependiente: Miles

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-129,22	615,610	-0,2099	0,8343
Income	13,1490	6,14562	2,1396	0,0356
age	13,3666	7,59215	1,7606	0,0823
kids	-114,18	52,9888	-2,1549	0,0343

Suma de cuadrados de los residuos	2,42765e+07
R^2	0,116112

Segunda submuestra: estimaciones MCO utilizando las 80 observaciones 121–200
Variable dependiente: Miles

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-339,64	220,160	-1,5427	0,1271
Income	9,68801	4,01043	2,4157	0,0181
age	18,6511	3,87408	4,8143	0,0000
kids	-66,026	29,8963	-2,2085	0,0302

Suma de cuadrados de los residuos	7,04816e+06
R^2	0,308962

Realiza un contraste para verificar si lo que sugieren los gráficos es estadísticamente significativo. Debes señalar claramente todos los elementos del contraste incluidas la hipótesis nula y la alternativa.

3. Si el contraste realizado te diera que rechazas la hipótesis nula, ¿qué cambiarías de los resultados de estimación del Modelo P13.1 si no quisieras cambiar el método de estimación de los coeficientes? ¿Por qué y para qué lo harías? Explica detalladamente.

Se ha utilizado un método alternativo de estimación a MCO para mejorar en términos de eficiencia la estimación de los coeficientes β. Utilizando el software Gretl se han obtenido los siguientes resultados:

Estimaciones MC.Ponderados utilizando las 200 observaciones 1–200
Variable dependiente: Miles
Variable utilizada como ponderación: $\frac{1}{Income}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-408,37	145,717	-2,8025	0,0056
Income	13,9705	1,64821	8,4762	0,0000
age	16,3483	3,42222	4,7771	0,0000
kids	-78,363	24,7355	-3,1680	0,0018

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuadrados de los residuos	580616,
R^2	0,390722
$F(3, 196)$	41,8975

Estadísticos basados en los datos originales:

Media de la var. dependiente	1054,23
Suma de cuadrados de los residuos	4,01134e+07

4. Completa las siguientes expresiones sobre el término de perturbación del modelo y el método de estimación utilizado en la obtención de los resultados presentados.

$$E(u_i) = \qquad\qquad E(u_i^2) = \qquad\qquad E(u_iu_j) =$$

$$\underbrace{E(uu')}_{(\ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots)} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

`Criterio de estimación:`........ $SCR = \sum_{i=\ldots.}^{i=\ldots.} (Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^* - \hat{\beta}_3 X_{3i}^* - \hat{\beta}_4 X_{4i}^*)^2$

$Y_i^* =$ ....; $X_{1i}^* =$ ....; $X_{2i}^* =$ ....;

$X_{3i}^* =$ ....; $X_{4i}^* =$ ....;

$$\hat{\beta}_{\dots} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right]^{-1} \left[\qquad\qquad \right]$$

5. Si tuvieras que contrastar $H_0 : \beta_2 = 10$, ¿cómo lo harías? Razona y explica tu respuesta.

PRÁCTICA P14.

En el fichero de datos inv.gdt[15] se recoge información para los años 1974 a 2003 de las siguientes variables:

I : Inversión real en billones de dólares (Rango 11,53 - 31,18).

GNP : Producto Nacional Bruto real en billones de dólares (Rango 8,58 - 33,86).

R : Tipo de interés (Rango 18,12 - 15,82).

1. Estima por MCO un modelo que relacione la Inversión real con el Producto Nacional Bruto real y el tipo de interés incluyendo un término independiente. Completa:

   a) El modelo a estimar es:

   b) Los resultados de la estimación son:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{I}_t} = \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad} \; \underset{(\qquad\qquad)}{\dots} \; \underset{(\qquad\qquad)}{\dots}$$

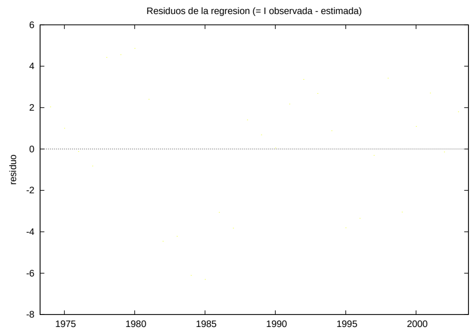
$R^2 =$ $\qquad\qquad$ $SCR =$ $\qquad\qquad$ $T =$

t	2000	2001	2002	2003
$\hat{u}_{MCO,t}$				

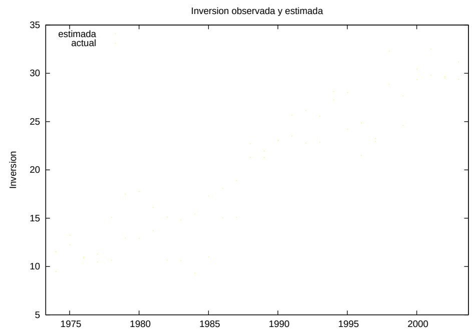
[15]Fuente: de R.C. Hill, W.E. Griffiths y G.G. Judge, (2001), *Undergraduate Econometrics.*

c) Dibuja e interpreta los gráficos:

- Serie temporal de los residuos MCO.



- Gráfico de las series de Inversión observada y estimada.



2. Se considera que u_t puede seguir un proceso AR(p) o MA(p) con p hasta de segundo orden. Realiza el contraste oportuno.

a) Escribe la hipótesis nula, la alternativa y el estadístico de contraste que vas a utilizar junto con su distribución bajo la hipótesis nula. Indica claramente de dónde salen cada uno de los elementos de este estadístico.

b) Completa:

Regresión auxiliar obtenida:

...... = ...

$R^2 =$

Valor muestral del estadístico:
Valor crítico para un nivel de significación ($\alpha = 5\,\%$):
Aplica la regla de decisión:

c) A la vista de los resultados del contraste anterior, ¿son las perturbaciones de modelo esféricas? ¿Por qué?

3. Considera el método de Hildreth-Lu bajo el supuesto de que u_t sigue un proceso AR(1).

   a) Completa las siguientes expresiones.

$$u_t = \qquad\qquad\qquad + \quad \epsilon_t \qquad\qquad \epsilon_t \sim ....(\qquad , \qquad)$$

$$\underbrace{E(uu')}_{(........\times.......)} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\text{Criterio de estimación: .... } SCR = \sum_{t=....}^{t=....} \{(Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^* - \hat{\beta}_3 X_{3t}^*\}^2$$

$$Y_t^* = ...; \qquad X_{1t}^* = ...; \qquad X_{2t}^* = ...; \qquad X_{3t}^* = ...;$$

$$\hat{\beta}_{...} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

   b) Dibuja el gráfico de SCR y completa la función de regresión muestral obtenida para la estimación de ρ y el valor mínimo de la función criterio.

$$\hat{\rho} = \qquad\qquad\qquad\qquad \text{valor mínimo de } SCR =$$

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{HL}))}{..........} = \underset{(\qquad\qquad)}{} \quad \underset{(\qquad\qquad)}{...} \quad \underset{(\qquad\qquad)}{...}$$

   c) Contrasta la significatividad del tipo de interés.

4. Obtén las desviaciones típicas de los coeficientes estimados por MCO robustas a la posible existencia de autocorrelación.

   a) Escribe aquí los resultados de la estimación:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO})_{robustas})}{\widehat{I_t}} = \underset{(\qquad\qquad)}{} \quad \underset{(\qquad\qquad)}{...} \quad \underset{(\qquad\qquad)}{...}$$

   ¿Para qué sirven? Explica detalladamente.

b) Contrasta la significatividad del tipo de interés.

c) Explica la diferencia entre el contraste realizado en el apartado 3.c) y el realizado en el apartado 4.b). ¿Cambia el resultado? ¿Con cuál te quedarías? Razona en detalle tu elección.

PRÁCTICA P15.

Un estudiante pretende medir la relación que existe entre inventarios y las ventas de la industria manufacturera de EE.UU para el periodo de 1950 a 1991, ambos años inclusive. Para ello dispone de datos anuales[16] sobre las variables $VENTAS$ e $INVENTARIOS$ ambas medidas en millones de dólares. Se considera a la variable $VENTAS$ no estocástica. El estudiante propone la siguiente especificación:

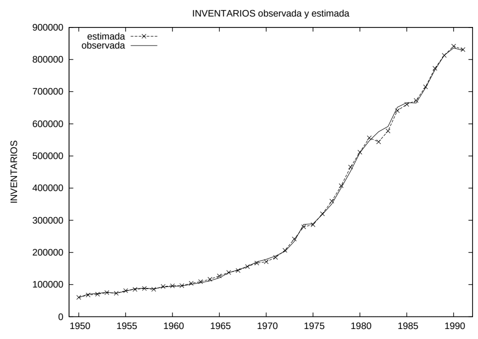
$$INVENTARIOS_t = \beta_1 + \beta_2 VENTAS_t + \beta_3\, t + u_t \qquad t = 1, \ldots, 42. \qquad \text{(P15.1)}$$

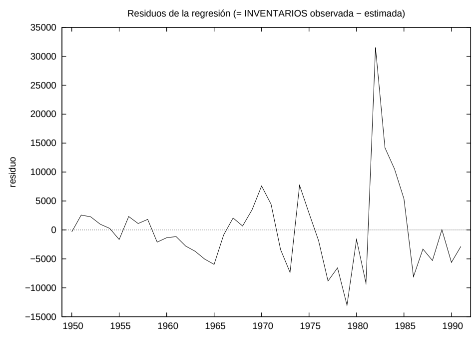
La estimación por MCO de la relación anterior proporciona los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta_{MCO}))}{\widehat{INVENTARIOS}_t} = \underset{(2774{,}17)}{433{,}951} + \underset{(0{,}019)}{1{,}543}\, VENTAS_t + \underset{(269{,}107)}{158{,}805}\, t$$

$$R^2 = 0{,}9992 \qquad SCR = 2{,}202257 \times 10^9 \qquad DW = 1{,}3755 \qquad BG(1) = 4{,}061$$

junto con los gráficos siguientes:





PRIMERA PARTE.

1. Interpreta los dos gráficos mostrados.

[16]Fuente: Ramanathan, Ramu (2002):*Introductory Econometrics with Applications.*

2. ¿Crees que la perturbación del modelo puede presentar algún problema? Realiza el contraste o contrastes que sean pertinentes.

3. ¿Por qué crees que el estudiante ha introducido la variable tendencia (t) como regresor en el modelo?

SEGUNDA PARTE.

El estudiante, preocupado por los resultados obtenidos en la estimación de la especificación anterior, decide probar una método de estimación alternativo cuyos resultados son los siguientes:

Realizando el cálculo iterativo de rho...

ITERACIÓN	RHO	SCR
1	0,31149	1,9874e+009
2	0,31600	1,98735e+009
final	0,31616	

Estimaciones Cochrane–Orcutt utilizando las 41 observaciones 1951–1991
Variable dependiente: INVENTARIOS
$\hat{\rho} = 0{,}316161$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	34,3714	4413,71	0,0078	0,9938
VENTAS	1,53759	0,02891	53,1693	0,0000
t	229,763	410,642	0,5595	0,5791

Estadísticos basados en los datos rho-diferenciados:

Suma de cuadrados de los residuos	1,98735e+09
$\bar{R}^2$ corregido	0,99922
$F(2, 38)$	12476,9
Estadístico de Durbin–Watson	2,05018
Coef. de autocorr. de primer orden.	-0,02752

4. Ayuda al estudiante a decidir entre las dos estimaciones de la especificación (P15.1). ¿Cuál de las dos elegirías y por qué? Razona detalladamente tu respuesta en base a las propiedades de los estimadores y la inferencia realizada en el segundo apartado.

TERCERA PARTE.

El estudiante considera ahora la inclusión de la variable $INVENTARIOS_{t-1}$ en el modelo y estima la siguiente ecuación:

$$INVENTARIOS_t = \beta_1 + \beta_2 VENTAS_t + \beta_3\, t + \beta_4 INVENTARIOS_{t-1} + v_t$$
$$t = 2, \ldots, 42 \qquad \text{(P15.2)}$$

donde v_t es una variable aleatoria con distribución normal. Los resultados de la estimación de la ecuación (P15.2) son los siguientes:

Estimaciones MCO utilizando las 41 observaciones 1951–1991
Variable dependiente: INVENTARIOS

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-156,95	2750,01	-0,0571	0,9548
VENTAS	1,24389	0,09509	13,0803	0,0000
t	320,931	265,446	1,2090	0,2343
INVENTARIOS_1	0,19374	0,06025	3,2154	0,0027

Suma de cuadrados de los residuos	1,72144e+09
$\bar{R}^2$ corregido	0,999308
$F(3, 37)$	19248,1
Estadístico de Durbin–Watson	1,59811
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,17208
BG(1)	1,28520

5. Escribe la matriz de regresores del modelo que se ha estimado.

6. Contrasta la existencia de un proceso autorregresivo de orden uno en la perturbación. Escribe la hipótesis nula y la alternativa, el estadístico de contraste y su distribución indicando cómo se obtienen cada uno de sus elementos.

7. ¿Debería el estudiante estimar la especificación P15.2 con el estimador de Variables Instrumentales utilizando como instrumento para la variable $INVENTARIOS_{t-1}$ a la variable $VENTAS_{t-1}$? Razona tu respuesta.

8. ¿Qué puedes decir sobre la significatividad de la variable ventas?

9. ¿Cuál de las dos especificaciones alternativas consideradas en las ecuaciones (P15.1) y (P15.2) elegirías tú para estudiar la evolución de la variable $INVENTARIOS$? ¿Cómo estimarías la especificación elegida?

PRÁCTICA P16.

Sea el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, 51 \tag{P16.1}$$

donde X_i es no estocástica, $E(u_i) = 0 \quad \forall i$, $E(u_i^2) = \sigma^2 Z_i \quad \forall i$ y $E(u_i u_j) = 0 \quad i \neq j$.

1. Escribe la matriz de varianzas y covarianzas del vector de perturbaciones.
2. Escribe la ecuación del correspondiente modelo transformado con perturbaciones esféricas. Demuestra que sus perturbaciones son homocedásticas.
3. Completa la expresión del criterio de estimación utilizado en el apartado anterior:

$$min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{51} \ldots\ldots (Y_i - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$$

4. Estima los coeficientes del modelo con la siguiente información muestral utilizando el estimador eficiente:

$$\begin{array}{lll} \sum(X_i^2/Z_i) = 196420,998 & \sum(X_i/Z_i) = 1608,337 & \sum(1/Z_i) = 34,738 \\ \sum(Y_i^2/Z_i) = 4168,919 & \sum(Y_iX_i/Z_i) = 28484,578 & \sum(Y_i/Z_i) = 236,139 \end{array}$$

PRÁCTICA P17.

Un estudiante está realizando su proyecto de fin de carrera sobre la demanda de pescado en el Fulton Fish Market, un mercado localizado en Nueva York y que opera desde hace 150 años. Para ello dispone de una muestra de 111 observaciones de datos diarios, desde el 2 de diciembre de 1991 al 8 de mayo de 1992, sobre las siguientes variables:

lquan	=	Cantidad de merluza vendida en libras (en logaritmos).
lprice	=	Precio de merluza por libra (en logaritmos).
mon	=	1 en lunes 0 en otro caso.
tue	=	1 en martes 0 en otro caso.
wed	=	1 en miércoles 0 en otro caso.
thu	=	1 en jueves 0 en otro caso.
stormy	=	1 si ese día hizo mucho viento y oleaje, 0 en otro caso.

La especificación para la ecuación de demanda es la siguiente:

$$lquan_t = \beta_1 + \beta_2 lprice_t + \beta_3 mon_t + \beta_4 tue_t + \beta_5 wed_t + \beta_6 thu_t + u_t \qquad \text{(P17.1)}$$

y los resultados de la estimación por MCO se muestran a continuación:

Ecuación de demanda: estimaciones MCO
Variable dependiente: lquan

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	8,60689	0,143043	60,1698	0,0000
lprice	-0,562550	0,168213	-3,3443	0,0011
mon	0,014316	0,202647	0,0706	0,9438
tue	-0,516242	0,197690	-2,6114	0,0103
wed	-0,555373	0,202319	-2,7450	0,0071
thu	0,081621	0,197817	0,4126	0,6807

Suma de cuadrados de los residuos	47,1672
R^2	0,22048

El estudiante en su proyecto se cuestiona si, al ser un modelo en el que el precio y la cantidad se determinan conjuntamente en equilibrio entre oferta y demanda, la variable *lprice* pueda ser endógena, y estar correlacionada con el error de la ecuación. Por ello realiza la siguiente estimación:

Ecuación de demanda: estimaciones MC2E
Variable dependiente: lquan
Instrumentos: stormy

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	8,50591	0,166167	51,1890	0,0000
lprice	-1,1194	0,428645	-2,6115	0,0090
mon	-0,02540	0,214774	-0,1183	0,9059
tue	-0,53076	0,208000	-2,5518	0,0107
wed	-0,56635	0,212755	-2,6620	0,0078
thu	0,10926	0,208787	0,5233	0,6007

1. Explica en detalle como se han obtenido las estimaciones MC2E mostradas. Escribe de forma explícita cada una de las matrices que intervienen en la expresión del estimador.

2. Escribe y explica las condiciones tanto para poder obtener el estimador MC2E como para que éste sea consistente.

3. Contrasta la sospecha del estudiante. Escribe la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y su distribución bajo la hipótesis nula.

4. A la luz del resultado del contraste, ¿qué estimador elegirías? Razona tu respuesta en términos de las propiedades de los estimadores.

5. Contrasta la hipótesis nula de que una variación porcentual unitaria en el precio de la merluza se traduce en una variación porcentual unitaria en la cantidad demandada de merluza en ese mercado.

PRÁCTICA P18.

PRIMERA PARTE.

El fichero de datos necesario para la realización de esta prueba se encuentra en los archivos de muestra de Gretl y corresponde a Gujarati Table12-9.gdt. Son datos del periodo 1950 a 1991 de las siguientes variables:

SALES = Ventas de la industria manufacturera en EE.UU, en millones de dólares.

INVENTS = Inventarios de la industria manufacturera en EE.UU, en millones de dólares.

1. Estima por MCO el siguiente modelo y completa utilizando los resultados obtenidos con Gretl:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{INVENTS}_t} = \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad} + \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad} SALES_t$$

$R^2 =$ $SCR =$ $T =$

$DW =$ $\widehat{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) =$

Coeficiente de correlación entre $INVENTS$ y $SALES$ =

Año t	1950	1951	1952
Residuo $\hat{u}_t$			

2. Se considera que u_t puede seguir un proceso AR(p) o MA(p) con p hasta de orden dos. Realiza el contraste de Breusch-Godfrey.

a) Escribe la hipótesis nula y la alternativa del contraste.

b) Aplica el contraste y completa:

Regresión auxiliar obtenida:

...... = ...

$R^2 =$

Estadístico y distribución bajo la hipótesis nula:
Valor muestral del estadístico =
Aplica la regla de decisión para un nivel de significación ($\alpha = 5\,\%$)

3. Estima de nuevo los coeficientes del modelo por MCO pero obtén desviaciones típicas de los coeficientes estimados robustas a la posible existencia de autocorrelación.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO})..........)}{\widehat{I}_t} = \underset{(\qquad\qquad)}{\ldots} \quad \underset{(\qquad\qquad)}{} SALES_t.$$

¿Para qué sirven las desviaciones típicas así obtenidas? ¿Cuando son de utilidad? Explica detalladamente.

4. Contrasta la hipótesis conjunta de que en media si las ventas son cero no hay inventarios y de que un aumento en el nivel de ventas de un millón de dólares aumentaría los inventarios en 2 millones y medio de dólares. Escribe la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y su distribución bajo la nula.

5. Considera el método de Cochrane-Orcutt bajo el supuesto de que u_t sigue un proceso AR(1). Completa la función de regresión muestral obtenida, la estimación de ρ y el valor mínimo de la función criterio. Explica en detalle cómo se han obtenido las estimaciones.

$\hat{\rho} =$ valor mínimo de $SCR =$

SEGUNDA PARTE.

El estudiante preocupado por los resultados obtenidos en la estimación de la especificación anterior decide probar con otras especificaciones alternativas.

El estudiante considera la inclusión de la variable $t = 1, 2, \ldots, 42$ en el modelo y estima la siguiente ecuación:

$$INVENTS_t = \beta_1 + \beta_2 SALES_t + \beta_3\, t + u_t \qquad t = 1, \ldots, 42 \tag{P18.2}$$

obteniendo los siguientes resultados (Estimación 1):

Modelo P18.2: estimaciones MCO utilizando las 42 observaciones 1950–1991
Variable dependiente: INVENTS

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	433,951	2774,17	0,1564	0,8765
SALES	1,54340	0,01980	77,9117	0,0000
t	158,805	269,107	0,5901	0,5585

Suma de cuadrados de los residuos	2,20257e+09
R^2	0,99920
$F(2, 39)$	24356,1
Estadístico de Durbin–Watson	1,37559
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,31148

Modelo P18.2: estimaciones MCO utilizando las 42 observaciones 1950–1991
Variable dependiente: INVENTS
Desviaciones típicas robustas a autocorrelación

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	433,951	1143,38	0,3795	0,7064
SALES	1,54340	0,01361	113,370	0,0000
t	158,805	169,225	0,9384	0,3538

Suma de cuadrados de los residuos	2,20257e+09
R^2	0,999200
$F(2, 39)$	18497,7
Estadístico de Durbin–Watson	1,37559
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,311486

1. ¿Por qué crees que el estudiante ha introducido la variable tendencia (t) como regresor en el modelo? ¿Es relevante incluirla? ¿Por qué crees que se obtiene ese resultado? Obtén y utiliza los gráficos y contrastes que consideres oportunos. Razona tu respuesta.

Asimismo, obtiene la siguiente estimación (Estimación 2):

Realizando el cálculo iterativo de rho...

ITERACIÓN	RHO	SCR
1	0,31149	1,9874e+009
2	0,31600	1,98735e+009
final	0,31616	

Modelo P18.2: estimaciones Cochrane–Orcutt utilizando las 41 observaciones 1951–1991
Variable dependiente: INVENTS
$\hat{\rho} = 0{,}316161$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	34,3714	4413,71	0,0078	0,9938
SALES	1,53759	0,02891	53,1693	0,0000
t	229,763	410,642	0,5595	0,5791

Estadísticos basados en los datos rho-diferenciados:

Suma de cuadrados de los residuos	1,98735e+09
R^2	0,999261
$F(2, 38)$	12476,9
Estadístico de Durbin–Watson	2,05018
Coef. de autocorr. de primer orden.	-0,02752

2. Ayuda al estudiante a decidir sobre la fiabilidad de los distintos resultados de estimación mostrados del Modelo P18.2. Razona tu respuesta en base a la información proporcionada.

El estudiante considera la inclusión de las variables tiempo, t, e $INVENTS_{t-1}$ en el modelo y estima la siguiente ecuación:

$$INVENTS_t = \beta_1 + \beta_2 SALES_t + \beta_3\, t + \beta_4 INVENTS_{t-1} + v_t \quad t = 2, \ldots, 42 \qquad \text{(P18.3)}$$

obteniendo los siguientes resultados:

Modelo P18.3: estimaciones MCO utilizando las 41 observaciones 1951–1991
Variable dependiente: INVENTS

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-156,95	2750,01	-0,0571	0,9548
SALES	1,24389	0,095096	13,0803	0,0000
t	320,931	265,446	1,2090	0,2343
INVENTS_1	0,193747	0,060256	3,2154	0,002

Suma de cuadrados de los residuos	1,72144e+09
R^2	0,99936
$F(3, 37)$	19248,1
Estadístico de Durbin–Watson	1,5981
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,17208
BG(1)	1,28520

3. Escribe la matriz de regresores del modelo estimado.

Finalmente el estudiante considera:

$$INVENTS_t = \beta_1 + \beta_2 SALES_t + \beta_3 SALES_{t-1} + w_t \qquad t = 2, \ldots, 42. \qquad \text{(P18.4)}$$

4. Estima esta especificación por MCO y completa utilizando los resultados obtenidos con Gretl:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta_{MCO}))}{\widehat{INVENTS}_t} = \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad} + \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad} SALES_t + \underset{(\qquad\qquad)}{\qquad\qquad} SALES_{t-1}.$$

$$R^2 = \qquad\qquad DW = \qquad\qquad T =$$

5. Contrasta la significatividad de la variable $SALES$ en aquel modelo que consideres más adecuado. Justifica tu elección de modelo y resultados para la realización del contraste, utilizando toda la información proporcionada y obtenida. A su vez, explica todos los elementos del contraste.

PRÁCTICA P19.

Un investigador dispone de una base de datos anuales[17], para el período de 1948 a 1993, de los siguientes índices agrarios de EEUU, todos ellos con base 1982:

output	=	producción agrícola (Rango 51 - 116).
labor	=	mano de obra agrícola (Rango 81 - 278).
land	=	superficie utilizada en la producción agrícola (Rango 89 - 102).
machines	=	maquinaria (duradera) (Rango 38 - 102).

El objetivo del investigador es determinar la función de producción agraria, para ello especifica el siguiente modelo de regresión lineal:

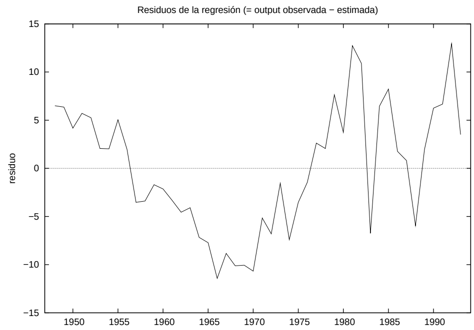
$$output_t = \beta_1 + \beta_2 labor_t + \beta_3 land_t + \beta_4 machines_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, T \qquad \text{(P19.1)}$$

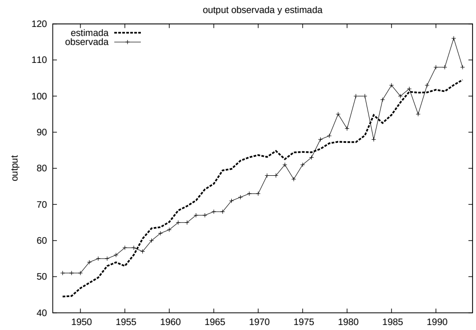
en el que se considera que los regresores son no estocásticos. Los resultados obtenidos de la estimación MCO son los que se muestran a continuación:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{output}_t} = \underset{(40{,}194)}{181,201} - \underset{(0{,}038)}{0,307}\, labor_t - \underset{(0{,}564)}{0,517}\, land_t - \underset{(0{,}169)}{0,096}\, machines_t.$$

$$R^2 = 0,884 \qquad DW = 0,612 \qquad SCR = 1885,08 \qquad T = 46$$

[17]Fuente: Ramanathan, Ramu (2002): *Introductory Econometrics with Applications.*





1. Explica cómo se han calculado los residuos y para qué sirven los gráficos. Interpreta ambos gráficos y señala si existe alguna evidencia de que la perturbación del modelo no cumpla alguna de las hipótesis básicas, justificando tu respuesta.

2. Realiza algún contraste basándote en la información disponible, para cualquier problema detectado en el apartado anterior. Explica detalladamente todos los elementos que intervengan.

3. Con respecto a los contrastes de significatividad individual de las variables explicativas del Modelo P19.1:

   a) ¿Es fiable realizarlos utilizando la información disponible? ¿Por qué?

   b) ¿Sería posible llevarlos a cabo si no tuviésemos otra opción que la de estimar los coeficientes del modelo por MCO? Explica cómo lo harías en caso afirmativo.

Viendo los resultados obtenidos el investigador decide estimar el mismo modelo por el método de Cochrane-Orcutt (CO). A continuación se muestran los resultados obtenidos:

Modelo P19.1: Estimaciones Cochrane–Orcutt utilizando las 45 observaciones 1949–1993
Variable dependiente: output
$\hat{\rho} = 0.791585$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	54,3902	30,3065	1,7947	0,0801
labor	0,40468	0,064974	6,2284	0,0000
land	1,07276	0,374129	2,8673	0,0065
machines	0,28743	0,200003	1,4372	0,1583

Estadísticos basados en los datos rho-diferenciados:

R^2	0.957590	R^2 corregido	0.954487
$F(3,41)$	12.99460	Valor p (de F)	4.18e–06
$\hat{\rho}$	−0.184791	Durbin–Watson	2.339505

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{CO}) = \begin{bmatrix} 918,486 & 0,175515 & -9,59451 & -0,06293 \\ 0,17551 & 0,004221 & -0,00963 & 0,00270 \\ -9,59451 & -0,009632 & 0,13997 & -0,03490 \\ -0,06293 & 0,002702 & -0,03490 & 0,04000 \end{bmatrix}$$

4. ¿Cuándo estás dispuesto a aplicar este método de estimación? En particular, ¿consideras adecuado utilizar este método en las circunstancias actuales? Responde razonadamente.

5. Describe detalladamente cómo obtener las estimaciones de los coeficientes del Modelo P19.1 utilizando el método del apartado anterior.

6. Con la información disponible, realiza el siguiente contraste $H_0 : \beta_2 = \beta_3$. Escribe la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste junto con su distribución y realiza el contraste. ¿Cómo interpretas el resultado?

A continuación el investigador introduce un retardo de la variable endógena como variable explicativa en el modelo inicial, con la pretensión de recoger la influencia de la producción agrícola del año anterior:

$$output_t = \beta_1 + \beta_2 labor_t + \beta_3 land_t + \beta_4 machines_t + \beta_5 output_{t-1} + v_t \quad t = 2, \ldots, T. \quad \text{(P19.2)}$$

Estimado el modelo por MCO (Alternativa A) se obtienen los siguientes resultados:

Modelo P19.2: Estimaciones MCO utilizando las 45 observaciones 1949–1993
Variable dependiente: output

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	26,6869	33,4166	0,7986	0,4292
labor	0,086818	0,035671	2,4339	0,0195
land	0,669440	0,364984	1,8342	0,0741
machines	0,171581	0,101356	1,6929	0,0983
output_1	0,853551	0,097967	8,7126	0,0000

R^2	0.959224	R^2 corregido	0.955146
$F(4,40)$	235.2394	Valor p (de F)	3.26e–27
$\hat{\rho}$	−0.299970	h de Durbin	−2.617899
$BG(1)$	6,199	Valor p (de $BG(1)$)	0.0128

7. Utilizando esta información, explica detalladamente la validez del siguiente estadístico de contraste
$$\frac{\hat{\beta}_{5,MCO} - 0}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{5,MCO})} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{N}(0,1)$$
para argumentar a favor de incluir en el modelo el retardo de la variable endógena como variable explicativa.

Alternativamente se ha obtenido la siguiente estimación (Alternativa B) de los coeficientes del Modelo P19.2 con un estimador consistente y asintóticamente eficiente:

$$\begin{aligned}\underbrace{output_t - \hat{\rho}\ output_{t-1}}_{Q_t^*} = {} & -27,47\underbrace{(1-\hat{\rho})}_{X_t^*} - \underset{(0{,}028)}{0,058}\ \underbrace{(labor_t - \hat{\rho}\ labor_{t-1})}_{LB_t^*} \\ & + \underset{(0{,}304)}{0,546}\ \underbrace{(land_t - \hat{\rho}\ land_{t-1})}_{LN_t^*} - \underset{(0{,}081)}{0,130}\ \underbrace{(machines_t - \hat{\rho}\ machines_{t-1})}_{MA_t^*} \\ & + \underset{(0{,}076)}{0,925}\ \underbrace{(output_{t-1} - \hat{\rho}\ output_{t-2})}_{Q_{t-1}^*} + \hat{\epsilon}_t \\ & R^2 = 0,976 \qquad DW = 2,30\end{aligned}$$

siendo ϵ_t es un ruido blanco tal que $\epsilon_t = v_t - \rho v_{t-1}$ y v_t son las perturbaciones del Modelo P19.2.

8. Completa y/o realiza lo siguiente:

   a) $\epsilon_t \sim \ldots\ldots(\quad , \quad)$.

   b) ¿Cuál es el método de estimación que se ha utilizado?

   c) Escribe la expresión matricial del estimador utilizado:
$$\begin{bmatrix} -27,47 \\ -0,058 \\ 0,546 \\ -0,130 \\ 0,925 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

   d) ¿Cuál es el estimador consistente de ρ empleado? Describe todos los elementos y las condiciones que te garantizan la consistencia del parámetro ρ estimado.

9. Utilizando la información contenida en la ecuación correspondiente al modelo estimado de la Alternativa B, explica detalladamente la validez del siguiente estadístico de contraste
$$\frac{\hat{\beta}_5 - 0}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_5)} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{N}(0,1)$$
para argumentar a favor de incluir en el modelo el retardo de la variable endógena como variable explicativa. Finalmente, ¿incluirías dicha variable en el modelo?

10. ¿Cuál es el estimador óptimo, dada toda la información de que dispones, para los parámetros de la ecuación (P19.2)? Razona tu respuesta detalladamente en relación a todas las alternativas posibles.

PRÁCTICA P20.

Los datos del fichero EAEF01.gdt corresponden a 540 individuos y contienen información sobre educación, trabajo, ingresos y otras características personales[18]. En particular, se dispone de las variables siguientes:

- EARN = Ingresos por hora trabajada, en dólares.
- FEM = 1 si el individuo es mujer, 0 si es hombre.
- S = Años de escolarización.
- EX = Experiencia laboral, en años.
- H = Número de horas trabajadas, por semana.

1. Estima por MCO el siguiente modelo para los ingresos, completando la estimación con la salida que se obtiene de Gretl:
$$\text{EARN}_i = \beta_1 + \beta_2\text{FEM}_i + \beta_3\text{S}_i + \beta_4\text{EX}_i + \beta_5\text{H}_i + u_i \qquad \text{(P20.1)}$$

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{\text{EARN}}_i} = \underset{(\qquad)}{\ldots} \; \underset{(\qquad)}{\ldots}\,\text{FEM}_i \; \underset{(\qquad)}{\ldots}\,\text{S}_i$$
$$\underset{(\qquad)}{\ldots}\,\text{EX}_i \; \underset{(\qquad)}{\ldots}\,\text{H}_i$$

$R^2 =$ $\qquad$ $SCR =$ $\qquad$ $\widehat{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) =$

[18]Fuente: Dougherty, C. (2002): *Introduction to Econometrics.*

	EARN_i	$\hat{u}_i$	$\widehat{\text{EARN}}_i$
$i = 1$			
$i = 2$			
$i = 3$			

2. Dibuja y comenta los gráficos de residuos siguientes:

   a) Residuos $\hat{u}$ frente a EX.

   b) Residuos $\hat{u}$ frente a S.

   c) Residuos al cuadrado $\hat{u}^2$ frente a S.

3. Realiza el contraste de Goldfeld y Quandt para el supuesto de que $Var(u_i) = f(S_i)$, siendo $f()$ una función creciente. Para ello, selecciona, por un lado, los valores de S_i estrictamente menores a 13 y, por otro, los valores de S_i estrictamente mayores a 14 y rellena los espacios en blanco a continuación:

   a) Regresión auxiliar estimada ($S_i < 13$):

   b) Regresión auxiliar estimada ($S_i > 14$):

   c) Hipótesis nula y alternativa. Estadístico de contraste y distribución bajo la hipótesis nula:

   d) Valor muestral del estadístico y resultado del contraste, con indicación del nivel de significación:

   e) Comenta el resultado del contraste y razona sobre las consecuencias que tiene sobre el estimador MCO obtenido en el Modelo P20.1.

   f) Obtén la estimación MCO con desviaciones típicas robustas al problema planteado. Completa la expresión del estimador de White:

   $$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{MCO})_{......} = \qquad \text{..}$$

   Completa la ecuación estimada:

   $$\underset{(\widehat{desv}......)}{\widehat{\text{EARN}}_i} = \underset{(\qquad)}{} \underset{(\qquad)}{...} \text{FEM}_i \underset{(\qquad)}{...} \text{S}_i$$

   $$\underset{(\qquad)}{...} \text{EX}_i \underset{(\qquad)}{...} \text{H}_i$$

4. Si se considera que $E(u_i)^2 = aS_i^2$ siendo a una constante ($a > 0$).

   a) Explica detalladamente cómo se calcula el estimador eficiente de los coeficientes $\beta_1, ..., \beta_5$ del Modelo P20.1.

   b) Completa el criterio de estimación:

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{...}^{...} ......(\text{EARN}_i - ....)^2.$$

   c) Obtén los datos ponderados correspondientes a las variables del Modelo P20.1 correspondientes al estimador del apartado 4*a*) anterior.

Variables						
$i = 1$						
$i = 2$						
$i = 540$						

   d) Estima el modelo propuesto dado el criterio anterior y escribe los resultados:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{.....}))}{\widehat{\text{EARN}}_i} = \underset{(\qquad)}{...} \; \underset{(\qquad)}{\text{FEM}_i} \; ... \; \underset{(\qquad)}{\text{S}_i}$$

$$\underset{(\qquad)}{...} \; \text{EX}_i \; \underset{(\qquad)}{...} \; \text{H}_i$$

5. Dado el siguiente modelo estimado:

Estimaciones MC.Ponderados utilizando las 540 observaciones 1–540
Variable dependiente: EARN
Variable utilizada como ponderación: S^2

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	−13,3666	6,01825	−2,2210	0,0268
FEM	−8,4725	1,31630	−6,4366	0,0000
S	2,7514	0,25600	10,7466	0,0000
EX	0,3994	0,16408	2,4344	0,0152
H	−0,1746	0,07151	−2,4429	0,0149

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuad. residuos	21920498	D.T. de la regresión	202.4176
R^2	0.244486	$F(4, 535)$	43.28177

¿Te parece adecuada la ponderación utilizada? ¿Qué puedes decir acerca de la fiabilidad de los resultados? ¿Y la de los estadísticos de contraste mostrados? Razona.

6. Se han obtenido los siguientes resultados de estimación:

Estimaciones MC.Ponderados utilizando las 540 observaciones 1–540
Variable dependiente: EARN
Variable utilizada como ponderación: $\frac{1}{\hat{\sigma}_i^2}$

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	−12,4753	3,91126	−3,1896	0,0015
FEM	−5,88712	1,05219	−5,5951	0,0000
S	2,16409	0,18660	11,5961	0,0000
EX	0,37988	0,10906	3,4831	0,0005
H	−0,02190	0,05610	−0,3903	0,6964

Donde

$$\widehat{\sigma}_i^2 = -\underset{(1{,}36103)}{(0{,}81621)} - \underset{(0{,}693963)}{(0{,}19953)}\,\mathrm{FEM}_i + \underset{(0{,}252441)}{(0{,}040627)}\,\mathrm{S}_i + \underset{(0{,}0771288)}{(0{,}024420)}\,\mathrm{EX}_i.$$

¿Qué método de estimación se está utilizando? ¿Cuál es la diferencia con respecto al utilizado en el quinto apartado? Describe paso a paso el proceso para obtener las estimaciones.

7. Si tuvieras que escoger entre las alternativas de estimación empleadas para estimar el Modelo P20.1, ¿cuál escogerías? Razona tu respuesta.

8. Contrasta la hipótesis de que los años de experiencia es una variable determinante para los ingresos. ¿Ocurre lo mismo con el número de horas semanales trabajadas?

PRÁCTICA P21.

Un estudiante pretende estudiar los determinantes del consumo de gasolina en U.S. Dispone de observaciones anuales de 1960 a 1995 sobre las siguientes variables[19]:

G: Consumo de gasolina total, en U.S., gasto total dividido por su índice de precios.
Pg: Índice de precios de la gasolina.
R: Renta disponible, per cápita.
Ps: Índice de precios agregado del consumo de servicios.

Las variables Pg, R y Ps son no estocásticas. El estudiante propone la especificación:

$$G_t = \beta_1 + \beta_2 Pg_t + \beta_3 R_t + \beta_4 Ps_t + \beta_5 G_{t-1} + u_t \qquad t = 2, \ldots, 36. \qquad \text{(P21.1)}$$

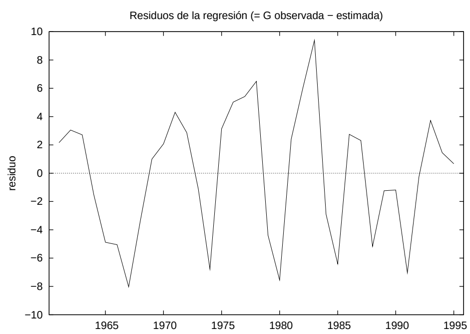
La estimación por MCO de la relación anterior proporciona los siguientes resultados:

Modelo P21.1: estimación A, MCO, usando las observaciones 1961–1995 ($T = 35$)
Variable dependiente: G

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	−74,0572	14,2697	−5,1898	0,0000
Pg	−10,4532	1,6032	−6,5202	0,0000
R	0,0288	0,0042	6,9039	0,0000
Ps	−13,6499	6,2770	−2,1746	0,0377
G_1	0,3148	0,0968	3,2506	0,0028

Suma de cuad. residuos	699,5137	$\hat{\rho}$	0,344683
R^2	0,9913	R^2 corregido	0,9901
$F(4, 30)$	850,5202	Valor p (de F)	2,11e–30
Durbin-Watson	0,8345	Breusch-Godfrey, BG(1)	4,3412

Además se dispone del siguiente gráfico:



[19]Fuente: Greene, W. H. (1999): *Análisis Econométrico.*

1. Interpreta el gráfico mostrado.
2. ¿Crees que la perturbación del modelo puede presentar algún problema? Realiza el contraste o contrastes que sean pertinentes especificando todos sus elementos.
3. ¿Por qué es no lineal el estimador utilizado?
4. Explica razonadamente si $E(G_{t-1}u_t)$ es cero o distinto de cero.
5. ¿Qué puedes decir de la consistencia del estimador empleado? ¿cómo es plim $\hat{\beta}_{MCO}$?

Después de analizar los resultados anteriores el estudiante decide reestimar el Modelo P21.1 por un método alternativo. Sus resultados son los siguientes:

Modelo P21.1: estimación B, MC2E, usando las observaciones 1961–1995 ($T = 35$)
Variable dependiente: G
Instrumentos: const Pg Pg_1 R R_1 Ps Ps_1

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	−96,9409	17,3909	−5,5742	0,0000
Pg	−11,4022	1,7501	−6,5151	0,0000
R	0,0370	0,0054	6,8914	0,0000
Ps	−20,8719	7,2126	−2,8938	0,0038
G_1	0,1126	0,1271	0,8858	0,3757

R^2	0,9900	R^2 corregido	0,9887
$F(4,30)$	740,4683	Valor p (de F)	1,65e–29
$\hat{\rho}$	0,4905	Durbin–Watson	0,9975
		Contraste de Hausman	6,0594

6. ¿Qué método de estimación está utilizando el estudiante? ¿Qué quiere decir "Instrumentos: const Pg Pg_1 R R_1 Ps Ps_1"? Razona si los instrumentos son adecuados.
7. ¿Cómo se han obtenido las estimaciones?

Alternativamente se ha obtenido la siguiente estimación C:

$$\begin{aligned}\underbrace{G_t - \hat{\rho}\, G_{t-1}}_{G_t^*} = -87,41\, \underbrace{(1-\hat{\rho})}_{X_t^*} &- \underset{(2,227)}{12,51}\, \underbrace{(Pg_t - \hat{\rho}\, Pg_{t-1})}_{Pg_t^*} + \underset{(0,004)}{0,034}\, \underbrace{(R_t - \hat{\rho}\, R_{t-1})}_{R_t^*} \\ &- \underset{(10,139)}{13,92}\, \underbrace{(Ps_t - \hat{\rho}\, Ps_{t-1})}_{Ps_t^*} + \underset{(0,103)}{0,175}\, \underbrace{(G_{t-1} - \hat{\rho}\, G_{t-2})}_{G_{t-1}^*} + \hat{\epsilon}_t \\ &R^2 = 0,968 \qquad DW = 2,30\end{aligned}$$

con ϵ_t ruido blanco tal que $\epsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$ y u_t son las perturbaciones del Modelo P21.1.

8. Completa y/o realiza lo siguiente:

   a) $\epsilon_t \sim \ldots\ldots(\quad , \quad)$.

   b) ¿Cuál es el método de estimación que se ha utilizado en el Modelo P21.1 para que el estimador de β sea consistente y asintóticamente eficiente? Razona tu respuesta.

9. Utilizando la información contenida en la ecuación de la Estimación C, explica detalladamente la validez del siguiente estadístico de contraste

$$\frac{\hat{\beta}_5 - 0}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_5)} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{N}(0,1)$$

   para argumentar a favor de incluir en el modelo el retardo de la variable endógena como variable explicativa. Finalmente, ¿incluirías dicha variable en el modelo?

PRÁCTICA P22.

Se quiere analizar la evolución de los salarios anuales de los profesores, $SALARY$ en función de su antigüedad como doctores, $YEARS$. Para ello se dispone de una muestra para el año 1995 correspondiente a 222 profesores de siete universidades de EE.UU y se especifica el siguiente modelo[20]:

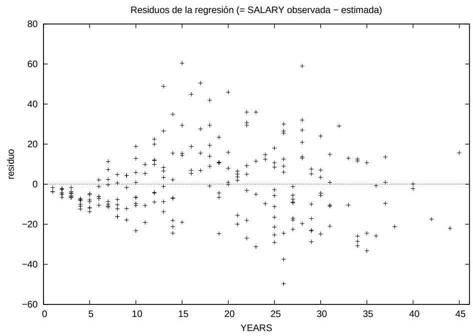
$$SALARY_i = \beta_1 + \beta_2 YEARS_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, 222. \tag{P22.1}$$

Una primera estimación del modelo por MCO proporciona los siguientes resultados:

$$\begin{array}{rcllll}
\widehat{SALARY}_i & = & 52,2375 & + & 1,4911 \; YEARS_i & \qquad R^2 = 0,4393. \\
\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}) & & (2,3728) & & (0,1135) & \\
\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO})_W & & (1,6376) & & (0,0958) & \\
\frac{\widehat{\hat{u}_i^2}}{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{N}} & = & \multicolumn{3}{l}{0,395 + 0,0334\, YEARS_i + \hat{\epsilon}_i} & \qquad SCE = 27,98.
\end{array}$$

Junto con el gráfico de residuos MCO frente a la variable $YEARS$.

[20] Fuente: Ramanathan, R. (2002): *Introductory Econometrics with Applications.*



1. Contrasta adecuadamente la significatividad de la variable $YEARS$.

Se ha utilizado un método de estimación alternativo a MCO, basándose en supuestos que se suponen adecuados.

Modelo P22.1: estimaciones MC.Ponderados utilizando las 222 observaciones 1–222
Variable dependiente: SALARY
Variable utilizada como ponderación: $1/YEARS^2$

	Coeficiente	Desv. típica	estadístico t	valor p
const	47,5961	0,5000	95,1985	0,0000
YEARS	1,7469	0,0917	19,0517	0,0000

Estadísticos basados en los datos ponderados:

SCR	261,1782	R^2	0,6226
$F(1,220)$	362,9679	P-value(F)	1,89e–48

2. ¿Te parece razonable la ponderación utilizada?

3. Completa las siguientes matrices, bajo los supuestos que está realizando el analista sobre el comportamiento de la perturbación del Modelo P22.1 al estimar por Mínimos Cuadrados Ponderados.

$$E(u) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \qquad E(uu') = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

4. ¿Qué se quiere conseguir con este método de estimación? ¿De qué depende que el estimador obtenido sea eficiente dentro de los lineales e insesgados? Razona tu respuesta.

PRÁCTICA P23.

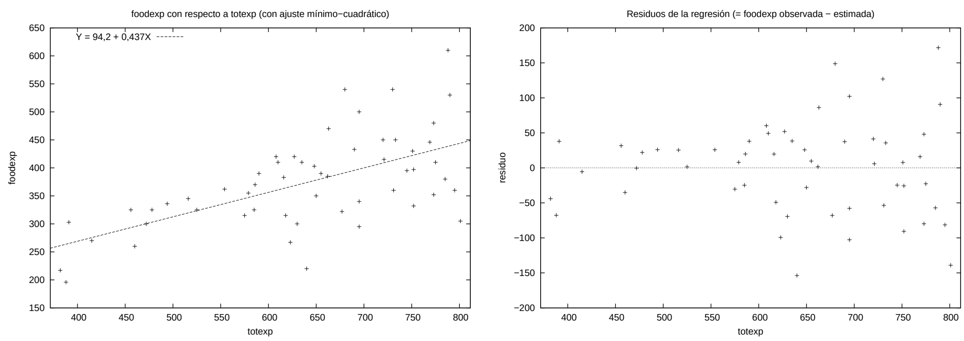
La Fundación Vicente Ferrer quiere analizar la dependencia del gasto en alimentación con respecto al gasto total en 55 familias de la India[21]. Para ello encarga el estudio a un analista el cual dispone de observaciones para el año 1970 de las variables $foodexp$, gasto en alimentación en rupias, y $totexp$ gasto familiar total, en rupias. El analista estima por MCO la ecuación:

$$foodexp_i = \beta_1 + \beta_2\, totexp_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, 55. \tag{P23.1}$$

Los resultados de dicha estimación son los siguientes:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta))}{\widehat{foodexp}_i} = \underset{(50{,}8563)}{94{,}2088} + \underset{(0{,}0783)}{0{,}4368}\, totexp_i \qquad SCR = 236893{,}6 \quad R^2 = 0{,}3698.$$

Además tras ordenar la muestra en función creciente de los valores de la variable $totexp$ se han realizado dos regresiones, como la del Modelo P23.1, separadamente con las primeras y últimas 18 observaciones obteniéndose las siguientes sumas de cuadrados de los residuos: $SCR_1 = 16127{,}92$ y $SCR_2 = 103821{,}1$.



1. Interpreta los dos gráficos anteriores. ¿Cumple la perturbación del modelo todas las hipótesis básicas? Realiza el contraste o contrastes que consideres oportuno.

2. ¿Es válido el valor estadístico-t $= 5{,}577$ para contrastar la significatividad de la variable $totexp$? Razona tu respuesta.

El analista propone una estimación alternativa del modelo y presenta los siguientes resultados obtenidos con el software Gretl:

[21] Fuente: Mukherjee, Ch.; White, H and M. Wuyts, (1998): *Econometrics and Data Analysis for Developing Countries*, Routledge, New York.

Modelo P23.1: estimaciones MC.Ponderados utilizando las 55 observaciones 1–55
Variable dependiente: foodexp
Variable utilizada como ponderación: 1/totexp

	Coeficiente	Desv. típica	estadístico t	valor p
const	85,3217	43,7746	1,9491	0,0566
totexp	0,4507	0,0698	6,4528	0,0000

Estadísticos basados en los datos ponderados:

SCR	347,0674		
R^2	0,4400	Adjusted R^2	0,4294
$F(1, 53)$	41,6392	P-value(F)	3,42e–08

3. Escribe el correspondiente modelo transformado y demuestra que las perturbaciones son esféricas, si el peso especificado se corresponde con la expresión correcta para $Var(u_i)$.

4. *a*) ¿Te parece razonable la ponderación utilizada?

   b) ¿Qué se quiere conseguir con este método de estimación? ¿De qué depende que el estimador obtenido sea eficiente dentro de los lineales e insesgados? Razona tu respuesta.

El analista no está satisfecho con los resultados anteriores y contempla la posibilidad de que la relación entre las variables no sea una relación lineal sino exponencial tal que $foodexp_i = exp\{\alpha_1 + \alpha_2\, totexp_i + v_i\}$ y estima por MCO el modelo:

$$Ln(foodexp)_i = \alpha_1 + \alpha_2\, totexp_i + v_i \qquad i = 1, \ldots, 55. \tag{P23.2}$$

Obteniendo los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}))}{\widehat{Ln(foodexp)}_i} = \underset{(0,1363)}{5,1080} + \underset{(0,0002)}{0,0012}\, totexp_i \quad SCR = 1,7018 \quad R^2 = 0,3952.$$

$$\frac{\hat{v}_i^2}{\frac{\hat{v}'\hat{v}}{N}} = -0,2074 + 0,0019\, totexp_i.$$

$$SCT = 115,31 \quad SCR = 112,7172 \quad R^2 = 0,0226.$$

5. ¿Presenta el Modelo P23.2 el mismo problema de incumplimiento de hipótesis que el Modelo P23.1? Justifica tu respuesta mediante un contraste. Explica detalladamente lo que haces y por qué lo haces.

6. Tras reflexionar sobre todos los resultados el analista propone a la organización estimar el Modelo P23.2 por MCO. ¿Es correcta su elección? Razona tu respuesta.

7. ¿Recoge α_2 en el Modelo P23.2 el mismo efecto que β_2 en el Modelo P23.1? ¿En qué se diferencian ambas especificaciones?

PRÁCTICA P24.

Se quiere estimar el modelo:

$$Ln(wage)_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + v_i \qquad v_i \sim NID(0, \sigma_v^2) \qquad E(exper_i v_i) = 0 \; \forall i \quad \text{(P24.1)}$$

donde

wage	salario por hora, en centavos, en 1976.
exper	experiencia laboral en 1976. Variable no estocástica.

Sin embargo se utiliza como variable para medir la experiencia a la variable *educ*, años de escolarización de individuo en 1976. Esta es una variable observable que se define: $educ_i = exper_i + \epsilon_i$, donde ϵ_i es un ruido blanco independiente de $exper_i$ y de v_i. En base a la información disponible se han obtenido los siguientes resultados utilizando el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios para una muestra de 3010 individuos:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{Ln(wage)}_i} = \underset{(0{,}0388)}{5,5708} + \underset{(0{,}0028)}{0,0520}\, educ_i. \qquad \text{(P24.2)}$$

1. Razona las propiedades en muestras finitas y asintóticas del estimador MCO.

Se dispone de una variable adicional *near* variable ficticia con valor 1 si el individuo i vivió cerca de la universidad al menos durante 4 años. Para la muestra de 3010 individuos se tiene la siguiente información:

$$\begin{array}{lll} \sum near_i^2 = 2053 & \sum Ln(wage)_i\, educ_i = 251114,3746 & \sum educ_i^2 = 551079 \\ \sum educ_i = 39923 & \sum Ln(wage)_i\, near_i = 12957,3066 & \sum Ln(wage)_i^2 = 118616,3629 \\ \sum near_i = 2053 & \sum educ_i\, near_i = 27771 & \sum Ln(wage)_i = 18848,1140 \end{array}$$

2. Propón un estimador alternativo al de MCO razonando bajo qué condiciones éste sería consistente. Indica su distribución asintótica.

3. Evalúa en la muestra el estimador propuesto en el apartado anterior.

La siguiente matriz ha sido estimada mediante un estimador consistente de la matriz de de varianzas y covarianzas asintótica del estimador propuesto en el segundo apartado. Completa teóricamente la siguiente expresión:

$$\widehat{V}(\hat{\beta}) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{932,7808}{3008}\begin{bmatrix} 0{,}3925 & -0{,}0296 \\ -0{,}0296 & 2{,}2291e-03 \end{bmatrix}$$

4. Contrasta la importancia del problema de error de medida y en función del mismo indica razonadamente cuál de los dos estimadores propuestos elegirías.

5. Contrasta adecuadamente si la experiencia es una variable significativa.

PRÁCTICA P25.

En el fichero greene7-8.gdt se dispone de observaciones anuales en el período de 1960 a 1995 sobre las siguientes variables[22]:

C:	Consumo de gasolina en U.S., gasto total dividido por su índice de precios.
Pg:	Índice de precios de la gasolina.
R:	Renta disponible, per cápita.

Se considera a las variables Pg y R no estocásticas. Se propone la siguiente especificación en logaritmos (denotados por L) de la función de consumo de gasolina:

$$LC_t = \beta_1 + \beta_2 LPg_t + \beta_3 LR_t + \beta_4 LC_{t-1} + u_t \qquad t = 1, \ldots, 42. \qquad \text{(P25.1)}$$

1. Estima por MCO el Modelo P25.1. Completa:

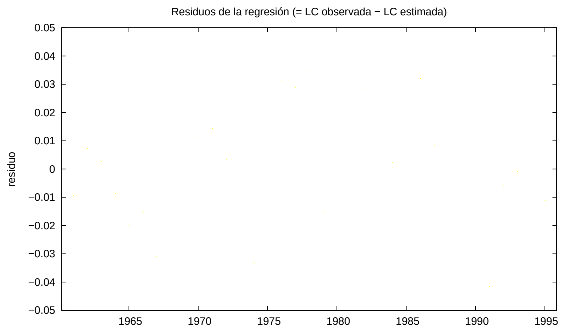
$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{LC}_t} = \underset{(\qquad)}{} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots}$$

2. Demuestra las propiedades para muestras finitas del estimador empleado. ¿Qué significa muestras finitas en este contexto?

3. Dibuja y comenta el gráfico de residuos frente al tiempo:

4. ¿Crees que la perturbación del modelo puede presentar algún problema? Realiza el contraste o contrastes que sean pertinentes especificando todos sus elementos.

[22]Fuente: Greene, W. H. (1999): *Análisis Econométrico*.



a) Escribe la hipótesis nula, la alternativa y el estadístico de contraste que vas a utilizar junto con su distribución bajo la hipótesis nula. Indica claramente de donde salen cada uno de los elementos de este estadístico.

b) Aplícalo a los datos del archivo y completa:

Regresión auxiliar obtenida:

...... = ...

Valor muestral del estadístico =

Valor crítico para un nivel de significación ($\alpha = 5\,\%$)=

Aplica la regla de decisión:

5. Explica razonadamente si $E(LC_{t-1}u_t)$ es cero o distinto de cero.

6. ¿Cómo es $\text{plim}\,\hat{\beta}_{MCO}$?¿Qué puedes decir de la consistencia del estimador empleado?¿Y de su distribución asintótica?

7. Reestima el Modelo P25.1 por el método de Variables Instrumentales, utilizando como instrumentos además del término constante, LR_t y LPg_t, a las variables retardadas LPg_{t-1} y LR_{t-1}. Completa:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MC2E}))}{\widehat{LC}_t} \quad = \quad \underset{(\qquad)}{} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots}$$

a) ¿Cómo se soluciona el tener un número mayor de instrumentos de los estrictamente necesarios? Explica en este caso lo realizado.

b) Completa la matriz de instrumentos utilizada y la fórmula del estimador utilizado.

$$Z = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

c) ¿Consideras que los instrumentos utilizados son adecuados? Razona tu respuesta.

d) ¿Son adecuadas las desviaciones típicas mostradas para realizar inferencia válida? ¿Es un estimador asintóticamente eficiente?

8. Utiliza el método de Hildreth-Lu para estimar los parámetros β del modelo. Completa:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{HL}))}{\widehat{LC}_t} = \underset{(\qquad)}{} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots} \quad \underset{(\qquad)}{\cdots}$$

a) ¿Es este estimador consistente y asintóticamente eficiente? ¿Adolece del mismo problema que el estimador de Cochrane-Orcutt? ¿Cómo modificarías este último? Razona tu respuesta.

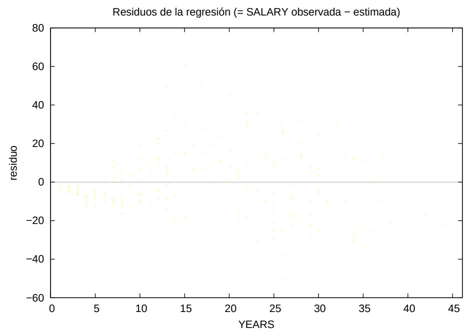
b) Contrasta la hipótesis de que la elasticidad renta es igual a la unidad. Escribe la hipótesis nula, la alternativa y el estadístico de contraste que utiliza Gretl para obtener el resultado mostrado. Realiza el contraste.

PRÁCTICA P26.

Se quiere analizar la evolución de los salarios anuales de los profesores, $SALARY$ en función de su antigüedad como doctores, $YEARS$. Para ello se dispone de una muestra para el año 1995 correspondiente a 222 profesores de siete universidades de EE.UU. Los datos se recogen en el fichero data3-11.gdt[23]. Se especifica el siguiente modelo:

$$SALARY_i = \beta_1 + \beta_2 YEARS_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, 222.$$

1. Estima por MCO el modelo. Dibuja y comenta el gráfico de residuos frente a YEARS.



2. Contrasta adecuadamente la significatividad de la variable $YEARS$ utilizando el estimador MCO. Realiza el análisis previo que consideres oportuno y escribe todos los resultados utilizados para realizar el contraste, así como la expresión de los estadísticos utilizados y su distribución bajo H_0.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO})\ldots\ldots\ldots)}{\widehat{SALARY}_i} = \underset{(\qquad\qquad)}{} \cdots \underset{(\qquad\qquad)}{}$$

3. Utiliza un método de estimación alternativo a MCO con el que se quiera ganar eficiencia asintótica tal que, basándote en el supuesto de que la varianza de la perturbación es una función de YEARS, requiera de la modelización y estimación de ésta. Explica todos los pasos utilizados, razonando todos ellos y mostrando al menos los siguientes resultados:

   a) Forma funcional propuesta $Var(u_i) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

[23] Fuente: Ramanathan, R. (2002): *Introductory Econometrics with Applications.*

b)

$$\text{Criterio de estimación:} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{i=\ldots.}^{i=\ldots.} (Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^*)^2.$$

$$Y_i^* = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad X_{1i}^* = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$X_{2i}^* = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\hat{\beta}_{\ldots\ldots} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

c) Regresión auxiliar:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d) Función de regresión muestral obtenida:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCGF}))}{\widehat{SALARY}_i} = \underset{(\qquad\qquad)}{} \quad \cdots \quad \underset{(\qquad\qquad)}{}$$

Parte IV

Soluciones a las Prácticas

Solución PRÁCTICA P1.

1. $\alpha_2 = \frac{\partial E(M_t)}{\partial L_t}$; α_2 mide la variación esperada en los beneficios anuales cuando se contrata a un nuevo trabajador. Esperaríamos signo positivo.

2. • Gráfico M observada y estimada: $\widehat{M}$ no parece ajustarse suficientemente bien a la variable observada M, quedan demasiados picos sin recoger, además el problema parece agudizarse a partir de la observación 25.
   • Gráfico de los residuos: El gráfico de los residuos muestra rachas de residuos positivos seguidas de rachas de residuos negativos indicativas de un comportamiento no aleatorio. Esta estructura puede ser compatible con un proceso autorregresivo de primer orden y parámetro positivo en la perturbación (habría que realizar el contraste correspondiente). También es compatible con una mala especificación del modelo, dado el mal ajuste de $\widehat{M}$ a M podríamos pensar que hay un problema de omisión de variable relevante que justifique ambos gráficos. Por otro lado la dispersión de los residuos parece aumentar al final de la muestra lo que puede ser indicativo de la existencia de heterocedasticidad en la perturbación. Este problema también debe ser debidamente contrastado.

3. • Contraste sobre heterocedasticidad. Con la regresión auxiliar (B) podemos llevar a cabo el contraste de Breusch-Pagan para el supuesto de que la varianza de la perturbación depende del tiempo.

$$\begin{array}{l} H_0 : Var(u_t) = \sigma^2 \\ H_a : Var(u_t) = f(\alpha_1 + \alpha_2 \times t) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \overset{H_0,d}{\longrightarrow} \mathcal{X}^2(p)$$

   donde la SCE corresponde a la regresión auxiliar (B).

$$\begin{aligned} SEC &= \frac{SCR}{1-R^2} - SCR = \frac{60{,}5979}{1-0{,}1418} - 60{,}5979 = 10{,}01025 \\ BP &= \frac{10{,}01025}{2} = 5{,}0062 > 3{,}84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}\,, \end{aligned}$$

   por lo tanto rechazamos la hipótesis nula al 5 % de significatividad. Var$(u_t) = \sigma_t^2$ depende del tiempo.

   • Contraste de autocorrelación. Con el estadístico de Durbin y Watson podemos contrastar la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden para $\rho > 0$ en u_t.

$$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{array} \qquad en \quad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2).$$

Dado que $DW = 1,333 > 1,48 = d_L(T = 46, k' = 1, \alpha = 0,05)$ rechazamos la hipótesis nula al 5 % de significatividad. Por lo tanto, o bien $u_t \sim \text{AR}(1)$ con $\rho > 0$, o bien hay un problema de mala especificación en la relación P1.1.

4. Se ha incluido el término L^2 siendo el modelo a estimar $M_t = \alpha_1 + \alpha_2\, L_t + \alpha_3\, L_t^2 + v_t$, se está pensando que M y L tienen una relación cuadrática, lo cual será cierto si L^2 es relevante para M.

5. *a*) • Con los resultados del Modelo A podemos contrastar la dependencia de la varianza de la perturbación con respecto al tiempo.

$$\begin{array}{l} H_0 : Var(v_t) = \sigma^2 \\ H_a : Var(v_t) = f(\alpha_1 + \alpha_2 \times t) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(p).$$

Dado que $BP = \frac{SCE}{2} = \left(\frac{75{,}0956}{1-0{,}200538} - 75{,}0956\right)/2 = 9{,}4185 > 3{,}84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}$, rechazamos la H_0 al 5 % de significatividad por lo que $\text{Var}(v_t)$ es función del tiempo. Por lo tanto existe heterocedasticidad.

• Con los resultados del Modelo B podemos contrastar la existencia de autocorrelación en la perturbación con el estadístico de Breusch-Godfrey.

$$\begin{array}{ll} H_0 : & v_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2) \\ H_a : & \left\{ \begin{array}{l} v_t = \rho_1 v_{t-1} + \epsilon_t \\ v_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{array} \right. \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1)$$

donde el R^2 corresponde a la regresión $\hat{v}_t^2 = \delta_1 + \delta_2\, L_t + \delta_3\, L_t^2 + \delta_4\, \hat{v}_{t-1} + \xi_t$. Como $TR^2 = 46 \times 0{,}0374139 = 1{,}721 < 3{,}84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}$, no rechazamos la H_0 al 5 % de significatividad y u_t no está autocorrelacionada.

b) No existe contradicción, se están realizando los contrastes sobre modelos diferentes. Lo que indican los resultados es que la inclusión de L^2 corrige el problema de autocorrelación, por lo que Modelo P1.1 estaba mal especificado, aunque en Modelo P1.2 v_t sigue teniendo varianza no constante.

6. En el Modelo P1.2 el estimador MCO es lineal en la perturbación dado que la matriz de regresores es no estocástica, es insesgado ya que $E(v_t) = 0\,\forall\, t$, pero no es de varianza mínima ya que no tiene en cuenta la heterocedasticidad. Las desviaciones típicas estimadas no son válidas para hacer inferencia, porque no se han calculado estimando la correspondiente matriz de covarianzas, $\text{Var}(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma^2\,(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$, sino que se ha empleado $\hat{\sigma}_v^2\,(X'X)^{-1}$ donde $(X'X)^{-1} \neq (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$ y siendo $\hat{\sigma}_v^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T-K}$ un estimador sesgado e inconsistente de σ_v^2.

7. El modelo que se estima es $M_t = \alpha_1 + \alpha_2\, L_t + \alpha_3\, L_t^2 + v_t$. Se está suponiendo que $v_t \sim iid\,(0, \sigma_v^2 t^2)$ y se estima por Mínimos Cuadrados Ponderados, es decir, MCG para heterocedasticidad: $\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$, donde

$$Y = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{46} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & L_1 & L_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & L_{46} & L_{46}^2 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 2^2 & & & \\ & & 3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 46^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 2116 \end{pmatrix}$$

8. Suponiendo que $\mathrm{Var}(v_t) = \sigma_v^2 t^2$, el modelo transformado es:

$$\frac{M_t}{t} = \frac{\alpha_1}{t} + \alpha_2 \frac{L_t}{t} + \alpha_3 \frac{L_t^2}{t} + \underbrace{\frac{v_t}{t}}_{v_t^*},$$

donde:

$E(v_t^*) = 0\ \forall\, t;$

$\mathrm{Var}(v_t)^* = E\left(\frac{v_t}{t}\right)^2 = \frac{E(v_t^2)}{t^2} = \frac{\sigma_v^2 t^2}{t^2} = \sigma_v^2\ \forall\, t$; y

$\mathrm{Cov}(v_t^*, v_s^*) = 0\ \forall\, t \neq s.$

El modelo transformado se estima por MCO,

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}Y^* = \begin{pmatrix} 147{,}113 \\ -0{,}666 \\ 0{,}001 \end{pmatrix},$$

siendo

$$Y^* = \begin{pmatrix} \frac{M_1}{1} \\ \frac{M_2}{2} \\ \vdots \\ \frac{M_{46}}{46} \end{pmatrix} \qquad X^* = \begin{pmatrix} 1 & L_1 & L_1^2 \\ 1/2 & L_2/2 & L_2^2/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/46 & L_{46}/46 & L_{46}^2/46 \end{pmatrix}$$

9. Contrastamos:

   $H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

   $H_a : \alpha_2 \neq 0$ y/o $\alpha_3 \neq 0$

$$F = \frac{(R\hat{\beta} - r)'[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r)/q}{\hat{\sigma}_v^2} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}(q, T-K)$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad q = 2 \qquad \hat{\sigma}_v^2 = \frac{\hat{v}'\Omega^{-1}\hat{v}}{46-3},$$

$\hat{\beta}$ es el estimador MCG y se ha usado $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{MCG}) = \hat{\sigma}_v^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \hat{\sigma}_{v^*}^2(X^{*\prime}X^*)^{-1}$. Si el valor del estadístico es mayor que $\mathcal{F}(q, T-K)_\alpha$ rechazamos la H_0 para un α dado y concluiríamos que el número de trabajadores es relevante.

Solución PRÁCTICA P2.

1. Modelo estimable: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + (v_t - \beta_2 e_t)$

   - $u_t = v_t - \beta_2 e_t$

   - $E(u_t) = E(v_t) - \beta_2 E(e_t) = 0 - \beta_2 \times 0 = 0 \,\forall\, t$

   - $Var(u_t) = E(u_t - E(u_t))^2 = E(u_t^2) = E(v_t - \beta_2 e_t)^2 = \sigma_v^2 + \beta_2^2\sigma_e^2$

     ya que $E(v_t^2) = \sigma_v^2$, $E(e_t^2) = \sigma_e^2$ y $E(v_t e_t) = 0$ por ser e y v independientes.

   - $Cov(u_t, u_s) = E((u_t - E(u_t))(u_s - E(u_s))) = E(u_t, u_s) = E(v_t - \beta_2 e_t, u_s - \beta_2 u_s) = 0$,

     ya que v_t y e_t no están autocorrelacionadas y son independientes.

   - $E(X_t^* u_t) = E(X_t + e_t, u_t) = E(X_t u_t) + E(e_t u_t) = E(e_t(v_t - \beta_2 e_t)) = -\beta_2\sigma_e^2$.

     ya que $E(u_t) = 0$, X_t es fija, $E(e_t v_t) = 0$ y $E(e_t^2) = \sigma_e^2$.

2. $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$ es una combinación no lineal de u_t y X_t^*, ya que X_t^* es estocástica. Es sesgado por que X_t^* y u_t no son independientes. En muestras finitas no tiene distribución conocida. En muestras grandes no es consistente, ya que $E(X_t^* u_t) \neq 0$,

$$plim\, \hat{\beta} = \beta + plim\left(\frac{1}{T}X'X\right)^{-1} plim \underbrace{\left(\frac{1}{T}X'u\right)}_{\neq 0} \neq \beta.$$

3. $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'Y$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}_{VI} = \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^{62} X_t^* \\ \sum_{t=1}^{62} W_t & \sum_{t=1}^{62} W_t X_t^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{62} Y_t \\ \sum_{t=1}^{62} W_t Y_t \end{pmatrix}$$

siendo

$$X = \begin{pmatrix} 1 & X_1^* \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{62}^* \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & W_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & W_{62} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{62} \end{pmatrix}.$$

4. Para que $\hat{\beta}_{VI}$ sea consistente basta, en general, con que el instrumento sea adecuado, en este caso: que $(Z'X)$ sea de rango completo; $E(W_t u_t) = 0$ y que $E(W_t X_t^*) \neq 0$. Estas condiciones garantizan que $plim\left(\frac{1}{T}Z'u\right) = 0$, con lo que $plim\,\hat{\beta}_{VI} = \beta$.

5.

$$\begin{array}{l} H_0 : E(X_t^* u_t) = 0 \\ H_a : E(X_t^* u_t) \neq 0 \end{array} \qquad H = \frac{\left(\hat{\beta}_2^{VI} - \hat{\beta}_2^{MCO}\right)^2}{\widehat{Var}(\hat{\beta}_2^{VI}) - \widehat{Var}(\hat{\beta}_2^{MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(p).$$

Dado que $\hat{\beta}_2^{VI} = 1{,}797$; $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2^{VI}) = (0{,}213)^2 = 0{,}045369$; $\hat{\beta}_2^{MCO} = 1{,}261$; y que $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2^{MCO}) = \hat{\sigma}_{VI}^2 \times a_{22} = \frac{20{,}961}{62-2} \times 0{,}077 = 0{,}026899$, se tiene

$$H = \frac{(1{,}797 - 1{,}261)^2}{0{,}045369 - 0{,}026899} = \frac{0{,}287296}{0{,}01847} = 15{,}55 > 3{,}84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}$$

por tanto rechazamos la H_0 al 5 % de significatividad y el problema de errores en variables es importante ya que como $E(X_t^* u_t) \neq 0$, el estimador MCO no es consistente.

6.

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,VI}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,VI})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

Como $\frac{1{,}797}{0{,}213} = 8{,}4366 > 1{,}96 = \mathcal{N}(0,1)_{\frac{0{,}05}{2}}$, rechazamos la H_0 al 5 % de significatividad y la variable amplitud del cuerpo longitudinal de la onda es relevante para explicar la amplitud de onda.

Solución PRÁCTICA P3.

1. $EXPHLTH_i = \beta_1 + \beta_2 INCOME_i + \beta_3 SENIORS_i + u_i \, , i = 1, ..., 51.$

   • Gráfico $\hat{u}^*_{MCO}$ versus POP. En el gráfico se observa un aumento en la dispersión de los residuos a medida que aumenta la población. Es un gráfico típico de un análisis de heterocedasticidad donde se dibuja los residuos $\hat{u}^*_{i,MCO}$ frente a la variable exógena POP. El gráfico indica que Var(u) depende de POP de forma creciente. Lógicamente, antes de concluir, hay que realizar el contraste correspondiente con el estadístico de Breusch-Pagan:

   $$\begin{array}{l} H_0 : Var(u_t) = \sigma^2 \\ H_a : Var(u_t) = f(\alpha_1 + \alpha_2 POP_i) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(p).$$

   Dado que $BP = 15{,}13 > 3{,}84 = \mathcal{X}^2(p)_{0{,}05}$, rechazamos la H_0 al 5 % de significatividad y la varianza de la perturbación es una función creciente de la población.

   • Gráfico de $\hat{u}^*_{MCO}$ a lo largo de la muestra. En este gráfico se aprecia un incremento de la varianza de los residuos a partir de la observación 25, lo que también puede ser indicativo de que la varianza no sea constante sino heterocedástica, es decir, Var$(u_i) = \sigma^2_i$.

2. El becario sabe, por el contraste de Breusch-Pagan que Var$(u_i) = \sigma^2_i$, siendo una función de la variable población. Sin embargo no conoce la forma funcional de σ^2_i y prefiere no aventurarse en sus suposiciones, por ello opta por estimar el modelo por MCO estimando Var$(\hat{\beta}_{MCO})$ de manera consistente frente a heterocedasticidad. En concreto, ha usado el estimador de la matriz de varianzas de White: $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_{MCO})_W = (X'X)^{-1}X'SX(X'X)^{-1}$, siendo

   $$S = \begin{pmatrix} \hat{u}^2_{1,MCO} & & & 0 \\ & \hat{u}^2_{2,MCO} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{u}^2_{51,MCO} \end{pmatrix}.$$

3. El Becario A contrasta:

   $$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array} \qquad t_i = \frac{\hat{\beta}_{i,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})_W} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1) \qquad i = 2, 3.$$

   • Para INCOME: $t_2 = 53{,}684 > 1{,}96 = \mathcal{N}(0,1)_{0{,}05/2}$, se rechaza la H_0 al 5 % de significatividad. La renta personal es individualmente significativa.

• Para SENIORS: $t_3 = 2{,}516 > 1{,}96 = \mathcal{N}(0,1)_{0{,}05/2}$, se rechaza la H_0 al 5 % de significatividad y el porcentaje de población que supera los 65 años es individualmente significativo.
Por tanto, sí estoy de acuerdo con las conclusiones del becario A.

4. $EXPHLTH_i = \beta_1 + \beta_2 INCOME_i + \beta_3 SENIORS_i + u_i \quad i = 1, ..., 51.$

   Supone que $\text{Var}(u_i) = \sigma^2 POP_i^2$, por tanto estima por Mínimos Cuadrados Ponderados, esto es, MCG para heterocedasticidad: $\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$ y $\text{Var}(\hat{\beta}_{MCG}) = \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$, donde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \text{INCOME}_1 & \text{SENIORS}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \text{INCOME}_{51} & \text{SENIORS}_{51} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \text{EXPHLTH}_1 \\ \vdots \\ \text{EXPHLTH}_{51} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \text{POP}_1^2 & & & 0 \\ & \text{POP}_1^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \text{POP}_{51}^2 \end{pmatrix}$$

   y un estimador insesgado de σ^2 es: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'_{MCG}\hat{u}_{MCG}}{T-K}$.

   De forma equivalente, se podría estimar por MCO el modelo transformado:

$$\frac{\text{EXPHLTH}_i}{\text{POP}_i} = \beta_1 \frac{1}{\text{POP}_i} + \beta_2 \frac{\text{INCOME}_i}{\text{POP}_i} + \beta_3 \frac{\text{SENIORS}_i}{\text{POP}_i} + u_i^* \,,$$

   donde $u_i^* = \frac{u_i}{POP_i} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

5. El Becario B contrasta:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array} \qquad t_i = \frac{\hat{\beta}_{i,MCG}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCG})} \overset{H_0}{\sim} t(T-K) \qquad i = 2, 3.$$

   • Para INCOME: $t_2 = 28{,}849 > 2{,}01 = t(51-3)_{0{,}025}$, se rechaza la H_0 al 5 % de significatividad. La renta personal es individualmente significativa.
   • Para SENIORS: $t_3 = 3{,}229 > 2{,}01 = t(51-3)_{0{,}025}$, se rechaza la H_0 al 5 % de significatividad y la variable SENIORS es individualmente significativa.

   Por tanto, sí estoy de acuerdo con las conclusiones del Becario B.

6. Ambos becarios son consistentes con sus supuestos. El Becario A sabe que $\text{Var}(u_i)$ depende de la variable población y dado que desconoce la forma funcional de ésta, opta por estimar por MCO, que es consistente y estimar $\text{Var}(\hat{\beta}_{MCO})$ de forma robusta frente a heterocedasticidad. Por ello puede realizar inferencia asintótica válida. El

Becario B se aventura con el supuesto $\text{Var}(u_i) = \sigma^2 POP_i^2$, que es consistente con los gráficos mostrados, estima por MCG y realiza inferencia, que será válida en muestras finitas si y sólo si su supuesto sobre $\text{Var}(u_i)$ es correcto. El becario A actúa de forma más conservadora.

Solución PRÁCTICA P4.

1. Son datos de serie temporal, muestran la evolución de las variables cantidad de fresas recolectadas (Q) y número de jornaleros (L) a lo largo de un periodo de tiempo, de 1970 a 2004, disponiendo de $T = 35$ observaciones muestrales.

2. $\beta_2 = \frac{\partial E(Q_t)}{\partial L_t}$, β_2 mide la variación en la cantidad de fresas recolectadas, en kilogramos, por contratar a un jornalero más. Esperaríamos signo positivo.

3. • Gráfico Q observada y estimada. $\hat{Q}$ no se ajusta bien a Q, hasta 1975 y de 1998 en adelante se subestiman los valores reales mientras que en el resto del periodo se sobreestima la variable Q_t.

   • Gráfico $\hat{u}_{MCO}$ en el tiempo. Se observa un grupo de residuos positivos hasta 1975 seguidos de un grupo de residuos negativos para volver a ser positivos desde 1998 en adelante. Refleja el mismo comportamiento que el gráfico Q versus $\hat{Q}$ ya que $\hat{u}_{t,MCO} = Q_t - \hat{Q}_t$. El comportamiento de los residuos puede ser indicativo de que exista un proceso autorregresivo de primer orden, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t\,, \quad \epsilon_t \sim iid\,(0, \sigma^2_\epsilon)\,,$ $|\rho| < 1$ con $\rho > 0$, o bien, dado el mal ajuste, puede indicar un problema de mala especificación del modelo que origina la estructura de los residuos.

4. • Contraste de heterocedasticidad:

$$\begin{array}{l} H_0 : Var(u_t) = \sigma^2 \\ H_a : Var(u_t) = f(\alpha_1 + \alpha_2 L_t) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(p)$$

   donde SCE es la suma de cuadrados explicada de la regresión auxiliar (C). Como $BP = \left(\frac{SCR}{1-R^2} - SCR\right)/2 = 1{,}57 < 3{,}84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$, no se rechaza la H_0 al 5 % de significatividad por lo que $\text{Var}(u_t)$ no es función de L_t.

   • Contraste de autocorrelación. Podemos llevarlo a cabo por medio del estadístico de Durbin-Watson o con el de Breusch-Godfrey basándonos en la regresión auxiliar

(A).

$$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{array} \qquad en \quad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon).$$

Dado que $DW = 0{,}3210 > 1{,}40 = d_L(T = 35, k' = 1, \alpha = 0,05)$ se rechaza la H_0 con un nivel de significatividad del 5 % por lo que concluimos que u_t sigue un proceso AR(1) con $\rho > 0$.

5. En el Modelo P4.1 la perturbación sigue un proceso autorregresivo de primer orden. El estimador MCO es lineal en la perturbación ya que la matriz de regresores es no estocástica, es insesgado ya que $E(u_t) = 0 \ \forall\, t$ y L es no estocástica. Sin embargo su varianza, $\text{Var}(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma^2 (X'X)^{-1} X' \Omega^{-1} X (X'X)^{-1}$ no es la mínima. En muestras grandes, se puede demostrar en base al teorema de Mann y Wald que es consistente. Los estadísticos mostrados están calculados en base a $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_{MCO})$ obtenida como $\hat{\sigma}^2_u (X'X)^{-1}$ donde $(X'X)^{-1} \neq (X'X)^{-1} X' \Omega^{-1} X (X'X)^{-1}$ y $\hat{\sigma}^2_u = \frac{\sum \hat{u}^2_{t,MCO}}{T-K}$ es un estimador sesgado e inconsistente por lo que la inferencia a partir de los estadísticos t y F habituales no es válida.

6. Dado que el parámetro ρ en $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t\,, \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon)$ es desconocido, el económetra estima por MCGF utilizando el procedimiento iterativo de Cochrane-Orcutt. Para ello estima en primer lugar la ecuación P4.1 por MCO y guarda $\hat{u}_{t,MCO} = Q_t - \hat{Q}_t = Q_t - 1115{,}93 - 2{,}446 L_t$. Con $\hat{u}_{t,MCO}$ estima el parámetro ρ en la ecuación $\hat{u}_{t,MCO} = \rho \hat{u}_{t-1,MCO} + \eta_t$ mediante el estimador consistente $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_{t,MCO} \hat{u}_{t-1,MCO}}{\sum_{t=2}^T \hat{u}^2_{t-1,MCO}}$. En un segundo paso, estima por MCO el siguiente modelo transformado: $Q_t - \hat{\rho} Q_{t-1} = \beta_1 (1 - \hat{\rho}) + \beta_2 (L_t - \hat{\rho} L_{t-1}) + \epsilon_t\,,\ t = 2, ..., 34$. A partir de las nuevas estimaciones de β_1 y β_2 se vuelven a calcular los residuos para estimar un nuevo valor de ρ y así sucesivamente. El proceso de estimación ha sido iterado hasta alcanzar un grado de convergencia prefijado de antemano, por ejemplo $|\hat{\rho}^{i+1} - \hat{\rho}^i| < 0{,}001$ obteniendo así estimadores de MCGF consistentes ya que $\hat{\rho}$ es consistente, asintóticamente eficientes y válidos para hacer inferencia.

   La iteración final proporciona el valor $\hat{\rho} = 0{,}976619$ y los $\hat{\beta}_{MCGF}$ alcanzados para ella que han sido mostrados en el enunciado. El estimador MCGF tiene en cuenta la autocorrelación en u_t, por lo que es eficiente asintóticamente, mejorando a MCO, que no lo es.

7. Dado el resultado del contraste, w_t está autocorrelacionada. Suponiendo que

$$w_t = \rho w_{t-1} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim iid\,(0, \sigma^2_\epsilon) \qquad |\rho| < 1.$$

   $E(w_t) = 0 \quad \forall\, t.$

   $E(w^2_t) = \sigma^2_w = \sigma^2_\epsilon / (1 - \rho^2) \quad \forall\, t.$

   $Cov(w_t, w_s) = \rho^s \sigma^2_w \neq 0$, ya que w_t está autocorrelacionada.

$E(L_t w_t) = L_t E(w_t) = 0$, ya que L_t es no estocástica.

$E(Q_{t-1} w_t) \neq 0$, porque w_t está autocorrelacionada.

$E(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta + E\left[(X'X)^{-1}X'u\right] \neq \beta$ y por tanto sesgado, ya que Q_{t-1} y w_t no son independientes $\forall t$.

8. El Teorema de Mann y Wald no se puede aplicar debido a dos razones: por un lado la perturbación está autocorrelacionada y por otro $E(Q_{t-1} w_t) \neq 0$. Por esta última desigualdad podemos mostrar que el estimador MCO no es consistente:

$$plim \hat{\beta}_{MCO} = \beta + \underbrace{plim\left(\frac{1}{T}X'X\right)}_{Q^{-1}} \underbrace{plim\left(\frac{1}{T}X'u\right)}_{\neq 0} \neq \beta.$$

9. a) $\epsilon_t \sim (0, \sigma^2_\epsilon)$.

   b) $$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{bmatrix}_{MCGF} = \begin{bmatrix} 25,28 \\ 0,064 \\ 1,067 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=3}^T X_t^{*2} & \sum_{t=3}^T X_t^* L_t^* & \sum_{t=3}^T X_t^* Q_{t-1}^* \\ \sum_{t=3}^T X_t^* L_t^* & \sum_{t=3}^T L_t^{*2} & \sum_{t=3}^T L_t^* Q_{t-1}^* \\ \sum_{t=3}^T Q_{t-1}^* X_t^* & \sum_{t=3}^T Q_{t-1}^* L_t^* & \sum_{t=3}^T Q_{t-1}^{*2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=3}^T Q_t^* X_t^* \\ \sum_{t=3}^T Q_t^* L_t^* \\ \sum_{t=3}^T Q_t^* Q_{t-1}^* \end{bmatrix}$$

   c) Dado que MCO es inconsistente se estima ρ usando los residuos de VI. Así se estima (P4.2) por VI y ρ en la regresión auxiliar $\hat{u}_t^{VI} = \rho \hat{u}_{t-1}^{VI} + \eta_t$ empleando el estimador $\hat{\rho}_{VI} = \frac{\sum_{t=2}^{34} \hat{u}_t^{VI} \hat{u}_{t-1}^{VI}}{\sum_{t=2}^{34} \hat{u}_{VI,t-1}^2}$. Este estimador será consistente si el estimador VI de los coeficientes lo es para lo cual es necesario que Z_t, el instrumento para Q_{t-1}, cumpla que $E(Z_t u_t) = 0$, $E(Z_t Q_{t-1}) \neq 0$ y que $Z'X$ sea de rango completo, con lo que garantizamos que $plim \frac{1}{T} Z'u = 0$ y por tanto $plim \hat{\beta}_{VI} = \beta$.

   d)
$$\begin{array}{l} H_0 : \alpha_3 = 0 \\ H_a : \alpha_3 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\alpha}_{3,MCGF}}{\widehat{desv}(\hat{\alpha}_{3,MCGF})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

   Dado que $t = \frac{1{,}067}{0{,}048} = 22{,}22 > 1{,}96 = \mathcal{N}(0{,}1)_{\frac{0{,}05}{2}}$, se rechaza la H_0 al 5 % de significatividad. Q_{t-1} es una variable relevante, con lo que el Modelo P4.1 está mal especificado puesto que omite la variable relevante Q_{t-1}.

Solución PRÁCTICA P5.

1. La estimación obtenida para el coeficiente que acompaña a la variable RD, número de patentes medido en miles de unidades, es de 0,791935. Esto quiere decir que, dada la muestra y el modelo propuesto, ante un incremento en un billón de dólares en I+D, el incremento medio en el número de patentes que se estima es de 791 unidades. El signo es positivo y en principio es el esperado ya que a mayor inversión en investigación y desarrollo, mayor se espera sean los inventos que finalmente deriven en un mayor número de patentes.

   Suponiendo que $u_t \sim NID(0, \sigma^2)$, contrastamos

   $$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCO})} \overset{H_0}{\sim} t(N-K).$$

   Como $|t| = \left|\frac{0{,}791935}{0{,}0567036}\right| = 13,9662 > 2,042 = t(34-2)_{\frac{0,05}{2}}$ rechazamos la hipótesis nula $\beta_2 = 0$ frente a la alternativa $\beta_2 \neq 0$ al nivel de significación del 5 %. Por tanto, la variable RD es significativa.

2. • Comentario al gráfico PATENTS sobre RD. El gráfico muestra la nube de puntos y la recta de regresión ajustada por MCO. Se aprecia que para valores bajos de RD el ajuste o relación lineal es mejor que para valores altos. A partir de 120 billones de dólares de gasto en investigación y desarrollo, la relación parece ser no lineal, quizás cuadrática en RD.

   • Comentario al gráfico PATENTS observada y estimada. El gráfico muestra la evolución temporal de las observaciones de la variable PATENTS y de la predicción que hace el modelo estimado de esta variable, dadas las observaciones de RD durante el periodo muestral considerado. El ajuste es mejor al principio de la muestra que al final. También se observan periodos alternos donde el modelo bien subestima (1960-1963, 1969-1978, 1989-1993) o bien sobreestima (1964-1968, 1979-1988) el número de patentes.

   • Comentario al gráfico de residuos MCO a lo largo del tiempo. En este gráfico se muestra la serie de residuos. Esta serie captura la alternancia que se observaba en el gráfico anterior. Cuando el modelo subestima PATENTS se obtienen grupos de residuos positivos, que se alternan con grupos de residuos negativos cuando la serie ajustada está por encima de la observada. Hay un comportamiento cíclico que además aumenta en variabilidad debido al peor ajuste a medida que nos acercamos a los últimos periodos.

   A partir de los gráficos se intuye que la relación entre PATENTS y RD puede no ser lineal. El gráfico de residuos es compatible también con la existencia de autocorrelación positiva en el término de perturbación. Esto puede ser debido bien a factores que no se han incluido o una mala forma funcional en la relación entre PATENTS y RD. Si los factores omitidos no son relevantes tal que E(u) = 0 pero el término de perturbación sigue un AR(p) o MA(q), entonces el estimador MCO de los parámetros del modelo seguiría siendo insesgado pero no es de mínima varianza. Además la inferencia realizada con los estadísticos t o F mostrados en los resultados no sería fiable si se utilizaran las desviaciones típicas mostradas para realizar los contrastes de significatividad. Esto es así porque, en presencia de autocorrelación, el estimador utilizado de la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}_{MCO}$, $\hat{V}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$, es un estimador sesgado e inconsistente de $V(\hat{\beta}_{MCO}) = (X'X)^{-1}X'\Sigma X(X'X)^{-1}$ si $\Sigma \neq \sigma^2 I$ que sería la expresión de la matriz de varianzas y covarianzas en el caso de haber autocorrelación. Por lo tanto las desviaciones típicas y los estadísticos t mostrados no serían fiables, ni siquiera para muestras grandes.

3. Ambos modelos son lineales en los parámetros sin embargo no lo son en las variables explicativas ya que incluyen la variable RD_t^2, que recoge una relación cuadrática entre PATENTS y RD. El Modelo P5.2 es dinámico ya que incluye el regresor RD_{t-4}. Por otro lado, ambos modelos podrían presentar dinámica a través de sus respectivos términos de perturbación si éstos presentan autocorrelación. De esto último no podemos afirmar nada ya que no tenemos información suficiente para ello.

4.

$$\underset{((34\times 3))}{X_{(\text{P5.2})}} = \begin{bmatrix} 1 & RD_1 & RD_1^2 \\ 1 & RD_2 & RD_2^2 \\ 1 & RD_3 & RD_3^2 \\ \\ \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & RD_{34} & RD_{34}^2 \end{bmatrix} \qquad \underset{((30\times 4))}{X_{(\text{P5.2})}} = \begin{bmatrix} 1 & RD_5 & RD_1 & RD_5^2 \\ 1 & RD_6 & RD_2 & RD_6^2 \\ 1 & RD_7 & RD_3 & RD_7^2 \\ \\ \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & RD_{34} & RD_{30} & RD_{34}^2 \end{bmatrix}$$

5. Ambos gráficos son compatibles con la existencia de un proceso autorregresivo en la perturbación correspondiente. En los dos gráficos se muestra un agrupamiento de residuos del mismo signo seguidos, especialmente más pronunciado en el correspondiente al Modelo A. En el gráfico del Modelo B no es tan evidente ya que parte de la dinámica en el modelo viene capturada por el regresor RD_{t-4}.

- Procedemos a realizar el contraste de Durbin-Watson.

$$\begin{matrix} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{matrix} \qquad en \quad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$$

Modelo A:

Como $DW = 0{,}284 < 1,229 = d_L(T = 31, k' = 3, \alpha = 0,05)$, se rechaza H_0 al nivel de significación del 5 % frente a la alternativa de un proceso autorregresivo de orden uno, $AR(1)$, con coeficiente ρ positivo.

Modelo B:

Como $DW = 0{,}842 < 1,229 = d_L(T = 31, k' = 3, \alpha = 0,05)$, se rechaza H_0 al nivel de significación del 5 % frente a la alternativa de un proceso autorregresivo de orden uno, $AR(1)$, con coeficiente ρ positivo.

- Procedemos a realizar el Contraste de Breusch-Godfrey.

$$
\begin{array}{ll}
H_0: & u_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2) \\
H_a: & \left\{ \begin{array}{l} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \epsilon_t \\ u_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \theta_3 \epsilon_{t-3} + \theta_4 \epsilon_{t-4} + \epsilon_t \end{array} \right.
\end{array}
\quad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(4)
$$

El valor muestral del estadístico BG en ambos modelos es mayor que el valor crítico al 5 % que es $\mathcal{X}^2(1)_{0{,}05} = 9,48$. Se rechaza H_0 al nivel de significación del 5 % y por lo tanto, ambos contrastes confirman que el término de perturbación de ambos modelos presenta autocorrelación al menos de orden uno significativa.

6. El estimador de Newey y West estima consistentemente la matriz de varianzas y covarianzas del estimador MCO de los coeficientes, $V(\hat{\beta}_{MCO}) = (X'X)^{-1}X'\Sigma X(X'X)^{-1}$, sin necesidad de especificar el proceso de autocorrelación que sigue la perturbación del modelo. Esto es muy ventajoso en situaciones como ésta en la que no está claro el proceso y orden del mismo. Si queremos seguir utilizando el estimador MCO y que la inferencia sea válida, al menos para muestras grandes, debemos utilizar un estimador consistente de $V(\hat{\beta}_{MCO})$ aún cuando $\Sigma \neq \sigma^2 I$. De esta forma, el estadístico t-Student empleado habitualmente para contrastar la significatividad individual utilizando el estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ convergerá bajo la hipótesis nula a la distribución $\mathcal{N}(0,1)$ si se emplea un estimador consistente para su matriz de varianzas y covarianzas. Es razonable su utilización en ambas especificaciones ya que hemos detectado el mismo problema en ambas. Si supiéramos el proceso seguido por la perturbación, lo adecuado sería estimar por MCGF, ya que se ganaría en eficiencia, al menos asintóticamente.

7. Partiendo de la base de que tanto en el Modelo A como en el B la perturbación está autocorrelada y que no tenemos resultados de la estimación de los modelos por MCGF, hemos de juzgar la especificación de ambos utilizando el estimador MCO de β y $V(\hat{\beta}_{MCO})_{NW}$ para que la inferencia sea válida. Contrastamos la significatividad individual de las variables:

$$
\begin{array}{l} H_0: \beta_i = 0 \\ H_a: \beta_i \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{i,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})_{NW}} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).
$$

Si al realizar el contraste $|t| > 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{\frac{0{,}05}{2}}$ rechazamos la hipótesis nula al nivel de significación del 5 %.

En el Modelo A, la variable RD no es significativa ($|t| = 1,694 < 1,96$) pero sí lo es RD_t^2 ($|t| = 3,5 > 1,96$). En el Modelo B, todas las variables son significativas RD_t ($|t| = 3,76 > 1,96$), RD_{t-4} ($|t| = 6,775 > 1,96$) y RD_t^2 ($|t| = 3,5 > 1,96$). De acuerdo con los resultados de los contrastes de significatividad, la variable RD_{t-4} parece ser relevante para explicar el número de patentes. Esta variable se ha omitido en el Modelo A, por lo que parece mejor la especificación del Modelo B. El Modelo B es un modelo dinámico tanto en su parte sistemática, dado que incluye RD_{t-4}, como en la parte de la perturbación porque ésta presenta autocorrelación en el tiempo.

Solución PRÁCTICA P6.

1. Las ecuaciones (A) y (B) pretenden recoger la estructura de la varianza de la perturbación del modelo de forma que varíe con el tiempo. Cada ecuación propone una forma funcional concreta para modelizar la varianza de u_t en función del tiempo, es decir, la heterocedasticidad. Se diferencian en que la ecuación (A) propone que la varianza de u_t crezca de forma continua con el tiempo, mientras que la (B) recoge dos períodos de tiempo diferenciados: dentro de cada período la varianza se mantiene constante pero en el primer periodo (1963-1975), $\sigma_1^2 = \gamma_1 + \gamma_2$ es mayor que en el segundo (1976-1985), $\sigma_2^2 = \gamma_1$ (notar que $\gamma_2 > 0$). Por lo tanto, la varianza decrece en el tiempo. La ecuación (A) recoge mejor la sospecha.

$$E(uu')_{(A)} = \Sigma_{(A)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_T^2 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 1^4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 92^4 \end{bmatrix} = \delta\Omega_{(A)}$$

$$E(uu')_{(B)} = \Sigma_{(B)} = \begin{bmatrix} \gamma_1+\gamma_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1+\gamma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \gamma_1+\gamma_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

2. El contraste de Hausman no es adecuado para verificar la sospecha del analista ya que no es un contraste de heterocedasticidad. El contraste de Hausman está diseñado para contrastar en un modelo $Y = X\beta + u$, la hipótesis $H_0 : E(X'u) = 0$ frente a la alternativa $H_a : E(X'u) \neq 0$. Esto es, si el término de perturbación u está o no correlacionado con algún(os) de los regresores en X. Para contrastar la sospecha del analista habría que utilizar un contraste del tipo:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_T^2 \text{ donde } \sigma_t^2 = var(u_t) \text{ (homocedasticidad)} \\ H_a &: var(u_t) = \sigma_t^2 \text{ función decreciente en el tiempo (heterocedasticidad)} \end{aligned}$$

por ejemplo el contraste de Goldfeld y Quandt.

3. Dado el modelo:

$$P_t = \beta_1 + \beta_2 PIB_t + \beta_3 I_t + u_t \quad t = 1, \ldots, T$$

donde $E(u_t) = 0$, $E(u_t^2) = \delta t^4$, $E(u_t u_s) = 0 \quad t \neq s$ y suponiendo PIB e I regresores fijos, la función de regresión poblacional que ha estimado el analista es:

$$E(P_t) = \beta_1 + \beta_2 PIB_t + \beta_3 I_t \quad t = 1, \ldots, T.$$

El método utilizado por el analista es el de Mínimos Cuadrados Generalizados o Ponderados. El criterio de estimación es minimizar la suma de cuadrados residual del modelo transformado:

$$\frac{P_t}{t^2} = \beta_1 \frac{1}{t^2} + \beta_2 \frac{PIB_t}{t^2} + \beta_3 \frac{I_t}{t^2} + \frac{u_t}{t^2} \quad t = 1, \ldots, T$$

tal que en él se satisfagan las hipótesis básicas:
$E(\frac{u_t}{t^2}) = \frac{E(u_t)}{t^2} = 0$,
$E(\frac{u_t^2}{t^4}) = \frac{1}{t^2} E(u_t^2) = \delta \frac{t^4}{t^4} = \delta$,

$E(\frac{u_t u_s}{t^2 s^2}) = \frac{E(u_t u_s)}{t^2 s^2} = 0 \quad t \neq s$.
En particular, la varianza del término de error del modelo transformado es constante para todo t. En estas condiciones, el estimador obtenido es lineal, insesgado y eficiente.

4.

$$\widehat{\beta}_{MCG} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T \frac{1}{t^4} & \sum_{t=1}^T \frac{PIB_t}{t^4} & \sum_{t=1}^T \frac{I_t}{t^4} \\ \sum_{t=1}^T \frac{PIB_t}{t^4} & \sum_{t=1}^T \frac{PIB_t^2}{t^4} & \sum_{t=1}^T \frac{PIB_t I_t}{t^4} \\ \sum_{t=1}^T \frac{I_t}{t^4} & \sum_{t=1}^T \frac{PIB_t I_t}{t^4} & \sum_{t=1}^T \frac{I_t^2}{t^4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T \frac{P_t}{t^4} \\ \sum_{t=1}^T \frac{PIB_t P_t}{t^4} \\ \sum_{t=1}^T \frac{I_t P_t}{t^4} \end{bmatrix}$$

5. Si lo que ocurre en el modelo propuesto es que $E(u) = 0$, $E(uu') = \Sigma_{(\mathrm{B})}$ pero equivocadamente se ha considerado que $E(uu')$ fuera como en (A), $\Sigma_{(\mathrm{A})} = \delta\Omega_{(\mathrm{A})}$. Entonces, el estimador obtenido por el analista es:
   $\widehat{\beta}^{(A)}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})} X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y = \beta + (X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})} X)^{-1}X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})} u.$
   Este estimador, si $E(u) = 0$ y X es fija seguirá siendo lineal e insesgado:
   $$E(\widehat{\beta}^{(A)}_{MCG}) = \beta + (X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}X)^{-1}X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}E(u) = \beta$$
   pero ya no es eficiente ya que su matriz de varianzas y covarianzas es:
   $$\begin{aligned} Var(\widehat{\beta}^{(A)}_{MCG}) &= (X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}X)^{-1}X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}E(uu')\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}X(X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}X)^{-1} \\ &= (X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}X)^{-1}X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}\Sigma_{(\mathrm{B})}\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}X(X'\Omega^{-1}_{(\mathrm{A})}X)^{-1}. \end{aligned}$$
   El estimador eficiente de β sería:
   $$\widehat{\beta}^{(B)}_{MCG} = (X'\Sigma^{-1}_{(\mathrm{B})}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}_{(\mathrm{B})}Y$$
   tal que:
   $$E(\widehat{\beta}^{(B)}_{MCG}) = \beta \qquad Var(\widehat{\beta}^{(B)}_{MCG}) = (X'\Sigma^{-1}_{(\mathrm{B})}X)^{-1}$$
   Este estimador requiere conocer $\Sigma_{(\mathrm{B})}$, es decir los valores poblacionales de los parámetros γ_1 y γ_2. Si no se conocen estos parámetros, se puede considerar el estimador de β por MCG Factibles
   $$\widehat{\beta}^{(B)}_{MCGF} = (X'\hat{\Sigma}^{-1}_{(\mathrm{B})}X)^{-1}X'\hat{\Sigma}^{-1}_{(\mathrm{B})}Y$$
   donde previamente se han estimado consistentemente γ_1 y γ_2. Una forma de obtener estas estimaciones de forma consistente es a través de la siguiente regresión auxiliar:
   $$\hat{u}_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 D_t + \varepsilon_t \qquad t = 1, \ldots, T$$
   usando los residuos $\hat{u}_t$ de estimar el modelo por MCO. Posteriormente se obtiene $\widehat{\beta}^{(B)}_{MCG}$ aplicando MCO al modelo transformado:
   $$\frac{P_t}{\hat{\sigma}_t^2} = \beta_1\frac{1}{\hat{\sigma}_t^2} + \beta_2\frac{PIB_t}{\hat{\sigma}_t^2} + \beta_3\frac{I_t}{\hat{\sigma}_t^2} + \frac{u_t}{\hat{\sigma}_t^2} \quad t = 1, \ldots, T$$
   donde $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 D_t$. El estimador así obtenido es no lineal, porque depende de forma no lineal de $\hat{\sigma}_t^2$ que es una variable aleatoria, lo que dificulta conocer sus propiedades para muestras finitas. Pero será consistente y asintóticamente eficiente.

Solución PRÁCTICA P7.

1. El estadístico $t_i = \frac{\hat{\beta}_i}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_i)}$ se distribuye como una t-Student con 87 grados de libertad bajo $H_0 : \beta_i = 0$ si se satisfacen los siguientes supuestos:

   - $E(u_t) = 0 \quad \forall t.$
   - $E(u_t^2) = \sigma^2 \quad \forall t.$
   - $E(u_t u_s) = 0 \quad \forall t \neq s.$
   - u_t sigue una distribución normal tal que $u_t \sim NID(0, \sigma^2)$.
   - La variable explicativa P es un regresor fijo o no estocástico.

   Bajo estos supuestos los p-valores mostrados son comparables con el nivel nominal de significación elegido α, tal que se rechazará la hipótesis nula si el valor-p es más pequeño que α y no se rechaza en caso contrario. Si relajamos el supuesto de normalidad y/o el de variable explicativa fija, siendo esta estocástica pero mantenemos el resto de supuestos y además $plim \frac{1}{T} X'X = Q_X$ finita y definida positiva, entonces $t_i \xrightarrow{d, H_0} \mathcal{N}(0,1)$ y los estadísticos anteriores tendrán validez asintótica.

2. El valor del estadístico de Durbin-Watson se ha calculado utilizando los residuos $\hat{u}_t \quad t = 1, \ldots, T$ provenientes de estimar por MCO el Modelo P7.1. La expresión del estadístico es:
$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}.$$
   Se ha calculado para contrastar la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden y signo positivo en la perturbación del Modelo P7.1:
$$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{array} \qquad en \quad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2).$$
   Como $DW = 1,328 < 1,679 = d_L(T = 89, k' = 1, \alpha = 0,05)$, se rechaza H_0 al 5 % y por tanto hay evidencia de autocorrelación por lo que no es creíble el supuesto $E(u_t u_s) = 0 \, \forall t \neq s$.

3. El Modelo P7.1 es un modelo estático, a pesar de que las variables explicativas son individualmente significativas el R^2 es muy bajo. El estadístico Durbin-Watson en la especificación P7.1 era significativo, el estadístico de Breusch-Godfrey $BG(1) = 9,52$ es significativo ya que es mayor que el valor crítico $\mathcal{X}^2(1)_{0,05} = 3,84$ y por lo tanto indica la evidencia de existencia de autocorrelación de al menos hasta orden uno. Todo esto parece indicar que existe bastante dinámica sin recoger que está en el término de error. En los gráficos también parece que el ajuste del Modelo P7.1 casi

no recoge las fluctuaciones de la variable endógena, como se muestra en el gráfico de Q observada y estimada. El gráfico de los residuos muestra lo que el ajuste del Modelo P7.1 deja sin explicar de Q_t para el periodo t : 1983 : 02, ..., 1990 : 05. Hay grupos de residuos seguidos del mismo signo lo que reafirma la existencia de autocorrelación en la perturbación. Una posibilidad de recoger esta dinámica en la perturbación es especificar un modelo dinámico introduciendo como regresor a la variable endógena retardada, Q_{t-1}.

4. Dados los resultados de la primera alternativa:

   a) El método de estimación utilizado es Mínimos Cuadrados en 2 Etapas, que es un Método de Variables Instrumentales. Lo ha propuesto por si existe correlación entre el regresor dinámico y la perturbación, es decir por si $E(Q_{t-1}v_t) \neq 0$, ya que si esto es así el estimador MCO es inconsistente mientras que el estimador de VI si ha utilizado un instrumento adecuado para Q_{t-1} será consistente. En este caso está utilizando como instrumento para Q_{t-1} a la variable P_{t-1} para el periodo $t = 1983 : 02, \ldots, 1990 : 05$.
   La expresión del estimador es $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'Y$ donde la matriz de instrumentos Z, la matriz de regresores X y el vector Y son:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & P_2 & P_1 \\ 1 & P_3 & P_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_T & P_{T-1} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & P_2 & Q_1 \\ 1 & P_3 & Q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_T & Q_{T-1} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_T \end{bmatrix}.$$

   El estimador de VI es un estimador no lineal generalmente sesgado y no se conocen sus propiedades en muestras grandes (dado que X es estocástica por incluir Q_{t-1}). Si se cumplen:
   i) $v_t \sim iid(0, \sigma^2)$,
   ii) $E(Z'v) = 0$, y
   iii) $plim\frac{1}{T}Z'Z = Q_{ZZ}$ finita y definida positiva
   como resultado obtenemos $plim\frac{1}{T}Z'v = 0$. Si además $plim\frac{1}{T}Z'X = Q_{ZX}$ es finita e invertible entonces $\hat{\beta}_{VI} \xrightarrow{p} \beta$ es consistente y es asintóticamente normal $\sqrt{T}(\hat{\beta}_{VI} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 Q_{ZX}^{-1} Q_{ZZ} Q_{XZ}^{-1})$. Para comprobar si su sospecha es o no aceptable podría utilizar el estadístico de Hausman.

   b)

$$\widehat{\beta}_{MC2E} = \begin{bmatrix} 88 & \sum_{t=2}^T P_t & \sum_{t=2}^T Q_{t-1} \\ \sum_{t=2}^T P_t & \sum_{t=2}^T P_t^2 & \sum_{t=2}^T P_t Q_{t-1} \\ \sum_{t=2}^T P_{t-1} & \sum_{t=2}^T P_{t-1} P_t & \sum_{t=2}^T P_{t-1} Q_{t-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^T Q_{t-1} \\ \sum_{t=2}^T P_t Q_t \\ \sum_{t=2}^T P_{t-1} Q_t \end{bmatrix}$$

5. *a*) Se está estimando por Mínimos Cuadrados Ordinarios:

$$\widehat{\beta}_{MCO} = \begin{bmatrix} 88 & \sum_{t=2}^{T} P_t & \sum_{t=2}^{T} Q_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{T} P_t & \sum_{t=2}^{T} P_t^2 & \sum_{t=2}^{T} P_t Q_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{T} Q_{t-1} & \sum_{t=2}^{T} P_t Q_{t-1} & \sum_{t=2}^{T} Q_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^{T} Q_t \\ \sum_{t=2}^{T} P_t Q_t \\ \sum_{t=2}^{T} Q_{t-1} Q_t \end{bmatrix}$$

b) Teorema de Mann y Wald: Sea X una matrix $(T \times K)$ y u un vector $(T \times 1)$ tal que si se verifica:

a) $E(v) = 0$,
b) $E(vv') = \sigma^2 I_T$,
c) $E(X'v) = 0$,
d) $plim \frac{1}{T} X'X = Q_{XX}$ finita.

Se producen los siguientes resultados:

1) $plim \frac{1}{T} X'v = 0$,
2) $\frac{1}{\sqrt{T}} X'v \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 Q_{XX})$

Vamos a comprobar que no existe autocorrelación, dado que el estadístico de Durbin-Watson no es fiable porque existe un regresor estocástico, Q_{t-1}, utilizaremos la información muestral sobre el estadístico de Breusch-Godfrey:

$$\begin{array}{ll} H_0: & v_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2) \\ H_a: & \begin{cases} v_t = \rho_1 v_{t-1} + \epsilon_t \\ v_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{cases} \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1)$$

Como $BG(1) = 0,04984 < \mathcal{X}^2(1)_{0,05} = 3,84$, no se rechaza H_0 a un nivel de significación del 5 %. Por tanto, en principio se cumplen los supuestos a), b) y c) del teorema de Mann-Wald porque v_t es un ruido blanco ($E(v_t v_s) = 0 \ \forall t \neq s$) de modo que $E(Q_{t-1} v_t) = 0$. Aceptado el supuesto d) y teniendo los resultados (1) y (2), el estimador MCO, $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1} X'Y$, en Modelo P7.2 aunque no sea lineal por ser X estocástica y posiblemente sea sesgado ya que X y u no son independientes, es un estimador consistente, $\hat{\beta}_{MCO} \xrightarrow{p} \beta$, y asintóticamente eficiente $\sqrt{T}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 Q_{XX}^{-1})$ luego MCO en el Modelo P7.2 es consistente al igual que VI o MC2E pero es más eficiente asintóticamente, luego es más adecuado hacer MCO en el Modelo P7.2.

6. Dado el apartado anterior, usaremos los resultados de la segunda alternativa para realizar el contraste:

$$\begin{array}{l} H_0: \alpha_3 = 0 \\ H_a: \alpha_3 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\alpha}_3}{\widehat{desv}(\hat{\alpha}_3)} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

Dado que $|t| = 2,8937 > \mathcal{N}(0,1)_{0,05/2} = 1,96$, se rechaza H_0 al 5 % y por tanto el modelo que determina la producción de silicona es dinámico.

Solución PRÁCTICA P8.

1. El modelo a estimar es:

$$price_i = \beta_1 + \beta_2 lotsize_i + \beta_3 sqrft_i + \beta_4 bdrms_i + u_i \quad i = 1, \ldots, 88.$$

• $\hat{\beta}_1 = E(price_i / lotsize_i = sqrft_i = bdrms = 0)$ recoge el precio medio estimado de una vivienda en miles de dólares cuando su superficie, la superficie de la parcela y el número de habitaciones es cero.
• $\hat{\beta}_2 = \frac{\partial \widehat{E(price_i)}}{\partial lotsize_i} = 0,00206771$ miles de dólares. Incremento esperado estimado en el valor medio de una vivienda por pie cuadrado que aumenta el tamaño de su parcela, ceteris paribus.

2. En el gráfico 1 se muestra la evolución de los residuos MCO para las observaciones de la muestra. Podemos observar un incremento en la variabilidad de las últimas 40 observaciones. Los gráficos 2 y 3 muestran la evolución de los residuos frente a las variables explicativas *lotsize* y *sqrft*, para ambas variables se observa un incremento en la variabilidad de los residuos para valores muy altos de la variable explicativa. Todo ello podría estar indicando la existencia de heterocedasticidad. Vamos a contrastar esta posibilidad con el estadístico de Breusch-Pagan:

$$\begin{array}{l} H_0 : Var(u_i) = \sigma^2 \\ H_a : Var(u_i) = f(\gamma_0 + \gamma_1 lotsize_i + \gamma_2 sqrft_i) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(p).$$

Dado que $BP = 27,97 > 5,99 = \mathcal{X}^2(2)_{0,05}$ rechazamos H_0 para un nivel de significatividad $\alpha = 5\,\%$ y por tanto $Var(u_i) = \sigma_i^2$, es decir existe heterocedasticidad.

Las propiedades del estimador MCO:

Suponiendo que la matriz de regresores del modelo, X, es no estocástica y que la perturbación tiene media cero, el estimador MCO es lineal en u_i e insesgado. Dado que $E(uu') \neq \sigma^2 I_N$ el estimador no será de varianza mínima, $E(uu') = (X'X)^{-1}X' \sum X(X'X)^{-1}$. En muestras grandes es consistente aunque no es eficiente asintóticamente.

3. Supongamos $Var(u_i) = f(lotsize_i, sqrft_i) = \gamma_0 + \gamma_1 lotsize_i + \gamma_2 sqrft_i$ donde γ_0, γ_1 y γ_2 son parámetros desconocidos. Supongamos también que $cov(u_i, u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$. Así,

$$V(u) = E(uu') = \begin{bmatrix} \gamma_0 + \gamma_1 lotsize_1 + \gamma_2 sqrft_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \gamma_0 + \gamma_1 lotsize_{88} + \gamma_2 sqrft_{88} \end{bmatrix}$$

Podemos estimar los parámetros desconocidos en $Var(u_i)$ estimando por MCO la siguiente regresión auxiliar:

$$\hat{u}^2_{i,MCO} = \gamma_0 + \gamma_1 lotsize_i + \gamma_2 sqrft_i + \eta_i \qquad i = 1, \ldots, 88$$

donde $\hat{u}^2_{i,MCO}$ son los residuos MCO obtenidos de estimar por MCO el modelo propuesto en el primer apartado:

$$\hat{u}_{i,MCO} = price_i - \widehat{price}_i = price_i + 21,77 - 0,00206\, lotsize_i - 0,122\, sqrft_i - 13,8525\, bdrms_i.$$

La regresión auxiliar se estima por MCO, $\hat{\gamma} = (X'X)^{-1}X'Y$, donde:

$$\hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_0 \\ \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & lotsize_1 & sqrft_1 \\ 1 & lotsize_2 & sqrft_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & lotsize_{88} & sqrft_{88} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} \hat{u}^2_{1,MCO} \\ \hat{u}^2_{2,MCO} \\ \vdots \\ \hat{u}^2_{88,MCO} \end{bmatrix}$$

4. El modelo a estimar en este caso es:

$$ln(price)_i = \delta_1 + \delta_2 ln(lotsize)_i + \delta_3 ln(sqrft)_i + \delta_4 bdrms_i + v_i \quad i = 1, \ldots, 88.$$

En esencia $\hat{\delta}_1$ y $\hat{\delta}_2$ recogen lo mismo que $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ salvo que las variables se miden en logaritmos, pero esto influye en su interpretación. $\hat{\delta}_1$ recoge el valor medio estimado de una vivienda (en logaritmos) cuando las variables explicativas (en logaritmos) son cero y $\hat{\delta}_2$ mide la elasticidad estimada del precio de la vivienda con respecto a la superficie de la parcela manteniendo constantes el resto de las características de la vivienda. Recoge la variación porcentual en el precio de la vivienda al variar un 1 % la superficie de la parcela, ceteris paribus.

5. En este contexto los gráficos de residuos muestran una dispersión constante cuando miramos a la evolución de la muestra así como cuando los enfrentamos a las variables explicativas. En este caso no parece haber razones fundadas para sospechar la existencia de heterocedasticidad. Aún así vamos a comprobarlo con el contraste de Breusch-Pagan:

$$\begin{array}{l} H_0 : Var(v_i) = \sigma^2 \\ H_a : Var(v_i) = f(\gamma_0 + \gamma_1 ln(lotsize)_i + \gamma_2 ln(sqrft)_i) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(p).$$

Como $BP = 4,66 < 5,84 = \mathcal{X}^2(2)_{0,05}$, no rechazamos H_0 para $\alpha = 5\,\%$ y concluimos que no existe heterocedaticidad.

Propiedades del estimador MCO:

Bajo el supuesto de que la matriz de regresores de esta nueva especificación, X es no estocástica y $E(v_i) = 0 \quad \forall i$ el estimador MCO es lineal en la perturbación e insesgado. Dado que $E(v_i^2) = \sigma^2 \quad \forall i$ y si además $E(v_i v_j) = 0 \; \forall i, j$ es decir, $E(vv') = \sigma^2 I_{88}$ es el estimador de varianza mínima. Si $v \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_N)$ entonces $\hat{\beta}_{MCO} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$. En muestras grandes el estimador MCO es consistente y asintóticamente eficiente.

6. Suponiendo $E(v_i v_j) = 0 \; \forall i \neq j$ y dado que $E(u_i^2) = \sigma^2 \; \forall i$:

$$E(vv') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

donde solamente hay un elemento desconocido σ^2. Podemos estimar σ^2 con el siguiente estimador insesgado y consistente

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{v}'_{MCO} \hat{v}_{MCO}}{N - K}$$

con $N = 88$ y $K = 3$, siendo $\hat{v}_{MCO}$ los residuos MCO obtenidos de estimar el modelo de la segunda especificación.

7. Sin duda la segunda especificación ya que la perturbación no tiene varianza heterocedástica mientras que la primera sí la tiene. Además parece que la razón de la heterocedasticidad en la primera especificación se debe a una mala forma funcional del modelo ya que al tomar logaritmos ha desaparecido. Además las variables $ln(lotsize)$ y $ln(sqrft)$ son significativas como podemos verificar a continuación:

$$\begin{array}{l} H_0 : \delta_i = 0 \\ H_a : \delta_i \neq 0 \end{array} \qquad t_i = \frac{\hat{\delta}_i}{\widehat{desv}(\hat{\delta}_i)} \overset{H_0}{\sim} t(N - K) \qquad i = 2, 3.$$

En ambos contrastes, rechazamos la H_0 ya que $|t_2| = 4,38 > 1,96$ y $|t_3| = 7,54 > 1,96$ para $\alpha = 5\,\%$ por lo que ambas variables son significativas. La variable número de dormitorios no es significativa, sería adecuado ver qué ocurre en el modelo al omitirla, aún así dado que es irrelevante la inferencia realizada es válida.

Solución PRÁCTICA P9.

PRIMERA PARTE.

1.
$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + u_t \quad t = 1, \ldots, T.$$
$$\widehat{C}_t = 325,972 + 0,861635 RD_t \quad t = 1, \ldots, 136.$$

2. $\dfrac{\partial \hat{C}_t}{\partial RD_t} = 0,861635$. Si la renta disponible per capita aumenta en un dólar, se estima que el consumo per capita aumenta en 0,86163 dólares en media.

3. • El gráfico de la serie temporal de los residuos muestra grupos de residuos seguidos del mismo signo, siendo positivos especialmente al principio de la muestra (1947-1952) y al final (1977-1980). Estos residuos también presentan mayor valor en esos mismos años, siendo la dispersión de los residuos menor en los años centrales de la muestra (1955-1970).

   • Por otro lado el gráfico de los residuos sobre la renta disponible, RD, es un gráfico de dispersión en el que se pueden apreciar dos fenómenos:

   i. Parece existir una relación cuadrática en media entre los residuos y RD.

   ii. La dispersión de estos residuos es menor para valores centrales de la renta disponible entre (6.000-8.000\$) que en los extremos (5.000-6.000\$) y (9.000-10.000\$).

4.
$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_t^2 + v_t \quad t = 1, \ldots, T.$$

   No, en principio el modelo es estático ya que no tenemos ningún retardo de la variable endógena C ni de la variable explicativa RD en el modelo. Pudiera ser que la perturbación tuviera un comportamiento dinámico en el caso de que presentara autocorrelación.

5. La diferencia entre los dos modelos estimados radica en la parte sistemática. En el Modelo P9.1 se especifica una relación lineal entre la variable endógena C y la variable explicativa RD. En el Modelo P9.2 se propone una relación cuadrática. La razón de proponer una relación cuadrática se debe a la forma cuadrática que se aprecia en los residuos, sobre todo en la gráfica en la que se representan los residuos MCO frente a la variable RD.

6. $\dfrac{\partial \widehat{E(C_t)}}{\partial RD_t} = \widehat{\beta}_2 + 2\widehat{\beta}_3 RD_t = 0,609486 + 3,44418\ 10^{-6} RD_t$. Si la renta disponible per capita aumenta en un dólar, se estima que el consumo per capita aumenta en $0,609486 + 3,44418\ 10^{-6} RD_t$ dólares en media. Por tanto, esta variación no se

mantiene constante a lo largo de la muestra sino que depende de la renta per capita del momento de tiempo en el que se está.

7. El teorema de Gauss Markov indica que el estimador MCO, $\widehat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$ será el de mínima varianza entre todos los estimadores lineales e insesgados siempre que la media de las perturbaciones sea cero, $E(v_t) = 0 \; \forall t$, la varianza de las perturbaciones sea constante, $Var(v_t) = \sigma^2 \; \forall t$, y no haya autocorrelación, $Cov(v_t, v_s) = 0 \quad \forall t \neq s$.
   Para confirmar que en nuestro caso las perturbaciones son esféricas vamos a utilizar el estadístico de Durbin y Watson para contrastar si las perturbaciones siguen un proceso autorregresivo de primer orden:

$$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{array} \qquad en \quad v_t = \rho v_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2).$$

   Como $DW = 0,744390 < 1,63 = d_L(T = 136,\, k' = 2,\, \alpha = 0,05)$ se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación. En consecuencia no se cumple el supuesto de que $Cov(v_t, v_s) = 0 \; t \neq s$ ya que hay evidencia de autocorrelación en la perturbación. Por tanto, podemos concluir que el estimador MCO no es de mínima varianza y su matriz de varianzas y covarianzas es $V(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$.
   En cuanto al contraste de la hipótesis de homocedasticidad, $Var(v_t) = \sigma^2 \; \forall t$, no es posible realizarlo con la información proporcionada. De todas formas, lo anterior impide ya que las hipótesis básicas sobre la perturbación se cumplan.

SEGUNDA PARTE.

1. En este caso tenemos el primer retardo de la variable endógena como variable explicativa, por lo tanto el modelo sí es dinámico.

2. El estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ es insesgado si $E(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta$. Dado que:

$$E(\widehat{\beta}_{MCO}) = \beta + E[(X'X)^{-1}X'v] = \beta.$$

   El estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ será insesgado si y solo si $E[(X'X)^{-1}X'v] = 0$. Esto se satisface si se cumple la condición i) o la condición ii) especificadas a continuación:

   i) Si X es fija y $E(v) = 0 \quad \forall t$.

   ii) Si X es estocástica e independiente del vector v.

En el Modelo P9.3 la matriz X es estocástica ya que incluye como regresor a la variable aleatoria $C_{t-1} \quad t = 2, \ldots, T$. Además $C_{t-1} \quad t = 2, \ldots, T$ no es independiente de $w_t \quad t = 2, \ldots, T$ por lo que X y w no son independientes y $E[(X'X)^{-1}X'w] \neq 0$ luego $E(\widehat{\beta}_{MCO}) \neq \beta$. Por tanto el estimador MCO en el Modelo P9.3 no será insesgado.

3. Los resultados anteriores corresponden a la estimación por MCO de la regresión auxiliar para el contraste de existencia de autocorrelación de Breusch-Godfrey. La regresión auxiliar que se ha estimado es:

$$\hat{w}_t = \alpha_0 + \alpha_1 RD_t + \alpha_2 RD_t^2 + \alpha_3 C_{t-1} + \alpha_4 \hat{w}_{t-1} + \alpha_5 \hat{w}_{t-2} + \alpha_6 \hat{w}_{t-3} + \alpha_7 \hat{w}_{t-4} + \epsilon_t.$$

Dado que el número de retardos de los residuos es cuatro, se contrasta la existencia de autocorrelación de cuarto orden. Así:

$$\begin{array}{ll} H_0: & w_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2) \\ H_a: & \left\{ \begin{array}{l} w_t = \rho_1 w_{t-1} + \rho_2 w_{t-2} + \rho_3 w_{t-3} + \rho_4 w_{t-4} + \epsilon_t \\ w_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \theta_3 \epsilon_{t-3} + \theta_4 \epsilon_{t-4} + \epsilon_t \end{array} \right. \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(4).$$

Siendo R^2 el coeficiente de determinación de la estimación MCO de la regresión auxiliar. Como $T \times R^2 = (136-1) \times 0,161219 = 21,7645 > 9,48 = \mathcal{X}^2(4)_{0,05}$ se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación. La perturbación sigue un proceso AR(4) o MA(4) o bien alguno de orden inferior.

4. El Modelo P9.3 es un modelo con variable endógena retardada como regresor y además presenta autocorrelación en la perturbación. El estimador MCO empleado en este contexto es no lineal porque X es estocástica, no es insesgado ya que la matriz de datos X y el vector de perturbaciones u no son independientes, no es de mínima varianza porque en la estimación de los coeficientes no se tiene en cuenta la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación y finalmente, tampoco es consistente porque $E(C_{t-1}w_t) \neq 0$ debido a que las perturbaciones presentan autocorrelación por lo que $plim\, \frac{X'w}{T} \neq 0$ y $plim\, \hat{\beta}_{MCO} \neq \beta$.

TERCERA PARTE.

1. El estudiante está estimando por el método de Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles utilizando el estimador de Hildreth-Lu.

$$SCR^* = \sum_{t=3}^{t=136} \left(Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^* - \hat{\beta}_3 X_{3t}^* - \hat{\beta}_4 X_{4t}^* \right)^2$$

$Y_t^* = C_t - 0,3C_{t-1}$; $\quad X_{1t}^* = 1 - 0,3 = 0,7$; $\quad X_{2t}^* = RD_t - 0,3RD_{t-1}$;

$X_{3t}^* = RD_t^2 - 0,3RD_{t-1}^2$; $\quad X_{4t}^* = C_{t-1} - 0,3C_{t-2}$

$$\widehat{\beta}_{MCGF} = \begin{bmatrix} \sum_{t=3}^{136}(X_{1t}^*)^2 & 0,7\sum_{t=3}^{136} X_{2t}^* & 0,7\sum_{t=3}^{136} X_{3t}^* & 0,7\sum_{t=3}^{136} X_{4t}^* \\ 0,7\sum_{t=3}^{136} X_{2t}^* & \sum_{t=3}^{136}(X_{2t}^*)^2 & \sum_{t=3}^{136} X_{2t}^* X_{3t}^* & \sum_{t=3}^{136} X_{2t}^* X_{4t}^* \\ 0,7\sum_{t=3}^{136} X_{3t}^* & \sum_{t=3}^{136} X_{2t}^* X_{3t}^* & \sum_{t=3}^{136}(X_{3t}^*)^2 & \sum_{t=3}^{136} X_{3t}^* X_{4t}^* \\ 0,7\sum_{t=3}^{136} X_{4t}^* & \sum_{t=3}^{136} X_{2t}^* X_{4t}^* & \sum_{t=3}^{136} X_{3t}^* X_{4t}^* & \sum_{t=3}^{136}(X_{4t}^*)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,7\sum_{t=3}^{136} Y_t^* \\ \sum_{t=3}^{136} Y_t^* X_{2t}^* \\ \sum_{t=3}^{136} Y_t^* X_{3t}^* \\ \sum_{t=3}^{136} Y_t^* X_{4t}^* \end{bmatrix}$$

El proceso elegido por el estudiante para modelizar la dinámica de la perturbación es un proceso autorregresivo de primer orden AR(1) tal que:

$$w_t = \rho w_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

2. El modelo se ha estimado suponiendo que las perturbaciones siguen un proceso autorregresivo de primer orden, AR(1), por lo que:

$$E(ww') = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{135} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{134} \\ \rho^2 & \rho & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \rho \\ \rho^{135} & \rho^{134} & \dots & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

3. En el tercer apartado de la Segunda Parte hemos contrastado mediante el contraste de Breusch-Godfrey la existencia de autocorrelación de cuarto orden. Como resultado del contraste, sabemos que la perturbación está autocorrelacionada pero no podemos afirmar si se trata de un proceso AR(4) o MA(4) o bien si el orden es menor que cuatro. En el método de estimación empleado en la Alternativa 1 se ha supuesto que la perturbación sigue un proceso autorregresivo de primer orden. Sin embargo, dados los resultados del contraste realizado no podemos afirmar que la perturbación siga un AR(1). Por tanto el estimador empleado para la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación no es consistente, $plim\,\widehat{\Omega} \neq \Omega$ y en consecuencia el estimador MCGF empleado tampoco es consistente, $plim\,\widehat{\beta}_{MCGF} \neq \beta$.

4. Significa que en la estimación de los coeficientes por el método de Variables Instrumentales, se ha empleado la combinación de las variables RD_{t-1} y RD_{t-1}^2 como instrumento de la variable C_{t-1}.

5. Contraste de Hausman:

$$\begin{array}{l} H_0 : E(C_{t-1}w_t) = 0 \\ H_a : E(C_{t-1}w_t) \neq 0 \end{array} \qquad H = \frac{\left(\hat{\beta}_4^{VI} - \hat{\beta}_4^{MCO}\right)^2}{\widehat{Var}(\hat{\beta}_4^{VI}) - \widehat{Var}(\hat{\beta}_4^{MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1).$$

Si nos fijamos en el estadístico de Hausman que nos proporciona Gretl, tenemos que $H = 17,3525 > 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$ por lo que rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación del 5 %. Es decir, rechazamos que $E(C_{t-1}w_t) = 0$ por lo que el retardo de la variable endógena y la perturbación están correlacionados. En consecuencia sabemos que el estimador MCO no es consistente, (en muestras pequeñas no se tienen buenas propiedades) y que el estimador de VI es consistente.
Este resultado es coherente con el resultado que obteníamos en el contraste de autocorrelación, ya que sabemos que si la perturbación está autocorrelacionada entonces

$$E(C_{t-1}w_t) = E(C_{t-2}w_t) + E(w_{t-1}w_t) = ... \neq 0.$$

En el caso que estamos analizando, modelo de regresión con variable endógena retardada como variable explicativa, el contraste de autocorrelación y el contraste de Hausman nos proporcionan la misma información.

6. Se está estimando por Variables Instrumentales, $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}(Z'Y)$:

$$\widehat{\beta}_{MC2E} = \begin{bmatrix} 135 & \sum_{t=2}^{136} RD_t & \sum_{t=2}^{136} RD_t^2 & \sum_{t=2}^{136} C_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{136} RD_t & \sum_{t=2}^{136} RD_t^2 & \sum_{t=2}^{136} RD_t^3 & \sum_{t=2}^{136} RD_tC_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{136} RD_t^2 & \sum_{t=2}^{136} RD_t^3 & \sum_{t=2}^{136} RD_t^4 & \sum_{t=2}^{136} RD_t^2C_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{136} Z_t & \sum_{t=2}^{136} Z_tRD_t & \sum_{t=2}^{136} Z_tRD_t^2 & \sum_{t=2}^{136} Z_tC_{t-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^{136} C_t \\ \sum_{t=2}^{136} RD_tC_t \\ \sum_{t=2}^{136} RD_t^2C_t \\ \sum_{t=2}^{136} Z_tC_t \end{bmatrix}$$

El instrumento Z_t se obtiene de estimar por MCO la siguiente regresión auxiliar:

$$C_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 RD_{t-1} + \alpha_2 RD_{t-1}^2 + e_t$$

de forma que $Z_t = \hat{\alpha}_0^{MCO} + \hat{\alpha}_1^{MCO} RD_{t-1} + \hat{\alpha}_2^{MCO} RD_{t-1}^2$.

$$FRM: \quad \widehat{C}_t = 710,641 + 0,428764 RD_t + 9,73003 \times 10^{-06} RD_t^2 + 0,338883 C_{t-1}.$$

7. El estimador MC2E solamente posee propiedades asintóticas deseables. Es consistente siempre que los instrumentos empleados se hayan escogido de manera adecuada. En nuestro caso:

   a) Dado que $C_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 RD_{t-1} + \beta_3 RD_{t-1}^2 + \beta_4 C_{t-2} + w_{t-1}$, los términos RD_{t-1} y RD_{t-1}^2 están correlacionados con C_{t-1} por lo que la matriz $Z'X$ es de rango completo, $rango(Z'X) = 4$, luego no es singular, $\exists (Z'X)^{-1}$.

   b) Como la variable RD es no estocástica, entonces se cumple $E(RD_{t-1}w_t) = 0$ y $E(RD_{t-1}^2 w_t) = 0$ por tanto $plim\ \frac{Z'w}{T} = 0$ lo cual garantiza la consistencia del estimador.

c) En cuanto a la eficiencia, podemos decir que mejoramos en eficiencia respecto a un estimador de VI que hubiera empleado un sólo instrumento (RD_{t-1} ó RD^2_{t-1}) ya que se está empleando la combinación de los instrumentos disponibles RD_{t-1} y RD^2_{t-1}. Sin embargo, no debemos olvidar que la perturbación está autocorrelacionada y que no se ha tenido en cuenta este hecho en el método de estimación.

8. El estimador empleado en la Alternativa 1 es el de MCGF suponiendo que las perturbaciones siguen un proceso autorregresivo de primer orden. Como se ha comentado anteriormente, no tenemos evidencia muestral de que esto sea así. Del contraste de autocorrelación realizado se concluye que la perturbación está autocorrelacionada pero no podríamos afirmar que se trate precisamente de un proceso AR(1). Esto significa que el estimador de Ω basado en el estimador de Hildreth-Lu de ρ no sea consistente y que por tanto el estimador MCGF de los coeficientes del modelo no sea consistente.
   El estimador de MC2E empleado en la Alternativa 2, no tiene en cuenta el hecho de que la perturbación esté autocorrelacionada pero sin embargo se trata de un estimador consistente como hemos podido ver en el apartado anterior.
   En consecuencia, si tuviera que escoger entre estos dos métodos de estimación, escogería el de MC2E porque garantiza la consistencia. Sin embargo el estimador más eficiente sería el de MCGF para el cual estimaríamos los elementos de Ω empleando los residuos $\hat{w}_t^{VI}$.

Solución PRÁCTICA P10.

PRIMERA PARTE.

1. Quiere decir que están divididas por el IPC de esta forma se descuenta el efecto de la inflación.

2. $\beta_2 = \frac{\partial E(C_t)}{\partial W_t}$, luego mide la variación esperada en el consumo real medio cuando el salario real varía en una unidad.

3. En el gráfico anterior se muestra la evolución de los residuos a lo largo del tiempo. Los tres primeros residuos son positivos, le siguen seis residuos negativos, de 1964 a 1969, para a continuación volver a encontrar un grupo de residuos positivos seguido de un grupo de residuos negativos y así sucesivamente. Este gráfico de residuos es compatible con la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden con parámetro $\rho > 0$ en la perturbación.

4. Contrastamos la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden en la perturbación con parámetro $\rho > 0$ con el estadístico de Durbin-Watson, para el cual $T = 36$ y $k' = 2$. Contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{array} \qquad en \quad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2).$$

$DW = 0,9694 < 1,35 = d_L(T = 36, k' = 2, \alpha = 0,05)$, luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$. Por tanto concluimos que u_t está autocorrelada siguiendo el proceso propuesto o bien hay un problema de mala especificación del modelo.
También podríamos haberlo realizado con el estadístico de Breusch-Godfrey donde contrastamos:

$$\begin{array}{ll} H_0 : & u_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2) \\ H_a : & \left\{ \begin{array}{l} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \epsilon_t \\ u_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{array} \right. \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1)$$

donde $BG = 9,621 > 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$ luego rechazamos la hipótesis nula para $\alpha = 5\,\%$ y concluimos que la perturbación está autocorrelada, bien sigue un proceso autorregresivo de primer orden o bien sigue un proceso de medias móviles de orden uno.
Para $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad$ con $\quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$ tenemos:

$$E(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad E(uu') = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \rho \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \dots & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \Omega.$$

5. Definimos el estimador: $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y = \beta + (X'X)^{-1}X'u$:

   a) El estimador MCO es lineal en u dado que X matriz de regresores es no estocástica.

   b) El estimador MCO es insesgado ya que X es no estocástica y $E(u_t) = 0 \quad \forall t$. Demostración: $E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1}X'E(u) = \beta + (X'X)^{-1}X' \times 0 = \beta$.

   c) $V(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \neq \sigma^2(X'X)^{-1}$ y no mínima, luego el estimador no es eficiente.

   d) $plim\, \hat{\beta} = \beta$ siempre que $plim\, \frac{1}{T}(X'X) = Q$ y que $\exists\ plim \frac{1}{T}(X'\Omega X)$, luego el estimador es consistente.

SEGUNDA PARTE.

1. *a*) FALSO. En el modelo anterior W_t y P_t son regresores no estocásticos al igual que lo es el primer retardo de $W_t(W_{t-1})$, lo único aleatorio en la expresión del estimador MCO $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y = \beta + (X'X)^{-1}X'v$ es la perturbación y por tanto el estimador es lineal en la perturbación.

   b) La matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes estimados por MCO es $V(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ si las perturbaciones son esféricas es decir, homocedásticas y no autocorreladas. Sobre la varianza no podemos hacer contrastes pues carecemos de información, por lo tanto supondremos homocedasticidad. Sobre las covarianzas si tenemos información y podemos contrastar si son o no cero con el estadístico de Durbin-Watson. Contrastamos:

   $$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{array} \qquad en \quad v_t = \rho v_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon).$$

   $DW = 0,9495 < 1,28 = d_L(T = 35, k' = 3, \alpha = 0,05)$, luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$. Por tanto concluimos que u_t está autocorrelada siguiendo el proceso propuesto o bien hay un problema de mala especificación del modelo. Si verdaderamente u_t está autocorrelada $V(\hat{\beta}_{MCO}) \neq \sigma^2(X'X)^{-1}$ tal que $V(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$ luego la afirmación es falsa.

2. Con los resultados mostrados podemos contrastar la existencia de autocorrelación en w_t. Contrastamos la existencia de autocorrelación de orden 4 con el estadístico de Breusch-Godfrey:

   $$\begin{array}{ll} H_0 : & w_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon) \\ H_a : & \left\{ \begin{array}{l} w_t = \rho_1 w_{t-1} + \rho_2 w_{t-2} + \rho_3 w_{t-3} + \rho_4 w_{t-4} + \epsilon_t \\ w_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \theta_3 \epsilon_{t-3} + \theta_4 \epsilon_{t-4} + \epsilon_t \end{array} \right. \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(4)$$

   $BG(4) = 12,040 > 9,040 = \mathcal{X}^2(4)_{0,05}$ por tanto rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$, w_t esta autocorrelada, bien sigue un proceso autorregresivo de cuarto orden bien sigue un proceso de medias móviles de orden cuatro. Por tanto el estimador MCO no es consistente ya que $E(C_{t-1}w_t) \neq 0$ como muestra el estadístico de Hausman, $H = 11,7299 > 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$. Dado que el estimador no es consistente los resultados de la estimación mostrados no son correctos y concretamente los estadísticos-t mostrados no son válidos para hacer inferencia.

TERCERA PARTE.

1.

$$\hat{\beta}_{VI} = \begin{bmatrix} (T-1) & \sum_2^T W_t & \sum_2^T P_t & \sum_2^T C_{t-1} \\ \sum_2^T W_t & \sum_2^T W_t^2 & \sum_2^T W_t P_t & \sum_2^T W_t C_{t-1} \\ \sum_2^T P_t & \sum_2^T P_t W_t & \sum_2^T P_t^2 & \sum_2^T P_t C_{t-1} \\ \sum_2^T W_{t-1} & \sum_2^T W_{t-1} W_t & \sum_2^T W_{t-1} P_t & \sum_2^T W_{t-1} C_{t-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_2^T C_t \\ \sum_2^T C_t W_t \\ \sum_2^T C_t P_t \\ \sum_2^T C_t W_{t-1} \end{bmatrix}$$

2. Dado que el estimador MCO es inconsistente el gerente propone un método de estimación consistente: Variables Instrumentales (VI). Este estimador es consistente si el instrumento Z_t es adecuado. En este caso $Z_t = W_{t-1}$ es el instrumento para C_{t-1} tal que $rango(Z'X) = 4$, luego $\exists (Z'X)^{-1}$. Además el instrumento W_{t-1} está correlacionado con C_{t-1}, $E(C_{t-1}W_{t-1}) \neq 0$ ya que en $(t-1)$ el modelo se puede escribir $C_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 W_{t-1} + \beta_3 P_{t-1} + \beta_4 C_{t-2} + w_{t-1}$, e incorrelacionado con u_t ya que W_{t-1} es un regresor no estocástico: $E(W_{t-1}w_t) = W_{t-1}E(w_t) = 0$, por lo tanto $plim \frac{1}{T} Z'w = 0$, luego el estimador de VI es consistente.

3. Quiere decir que Gretl está estimando por Variables Instrumentales utilizando la combinación de dos instrumentos W_{t-1} y P_{t-1} para fijar el instrumento Z_t. Dado que W_t y P_t son regresores no estocásticos los retardos de ambas variables son buenos instrumentos, ambos incorrelacionados con la perturbación y correlacionados, vía el modelo, con la variable para la que hacen de instrumento.

4. En la Alternativa 3 de la especificación P10.3 se está estimando por Variables Instrumentales, así
$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'Y.$$
C_{t-1} es el regresor estocástico correlacionado con u_t que necesita instrumento. En la regresión P10.3 W_t y P_t son no estocásticas luego los retardos W_{t-1} y P_{t-1} son instrumentos adecuados. Ambos están incorrelacionados con u_t y correlacionados con la variable para la cual hacen de instrumento: C_{t-1}. Dado que la eficiencia del estimador de Variables Instrumentales depende del instrumento elegido la opción válida es combinar los posibles instrumentos mediante una regresión auxiliar. Su estimación nos proporciona el instrumento para el cual el estimador además de consistente es eficiente asintóticamente, siempre y cuando w_t no esté autocorrelada. La regresión auxiliar que estimamos por MCO para determinar el instrumento Z_t para C_{t-1} es: $C_{t-1} = \gamma_0 + \gamma_1 W_{t-1} + \gamma_2 P_{t-1} + \eta_t$ y definimos $Z_t = \widehat{C}_{t-1}$. Una vez obtenido el instrumento se estima el Modelo P10.3 por VI con:
$$Z = [\overrightarrow{1}\ W_t\ P_t\ \hat{C}_{t-1}],$$
$$X = [\overrightarrow{1}\ W_t\ P_t\ C_{t-1}].$$

Este estimador así conformado recibe el nombre de Mínimos Cuadrados en 2 Etapas (MC2E). Precisamente la diferencia entre los resultados de las alternativas 3 y 2 es que en el primero se utiliza la combinación de dos instrumentos para obtener el mejor instrumento posible y con él el estimador más eficiente asintóticamente mientras que en el resultado presentado en la Alternativa 2 solo se utiliza un instrumento.

5. Elegiría el resultado mostrado en la alternativa 3. El resultado en la alternativa 1 no es adecuado en ningún caso dado que el estimador utilizado no es consistente. En los resultados para las alternativas 2 y 3 el estimador utilizado es consistente y en el resultado mostrado en la alternativa 3 el instrumento mejora la eficiencia del estimador. Claro todo esto siempre y cuando la perturbación no esté autocorrelada. En este caso como en el resultado de la alternativa 1 lo está lo que sabemos es que VI no es el mejor estimador posible ya que no corrige el problema.

Solución PRÁCTICA P11.

1. *a*) El modelo que me han pedido que estime es:

   Modelo P11.1 $\quad EXPTRAV_i = \beta_1 + \beta_2 INCOME_i + u_i \quad i = 1, \ldots, 51.$

   b) Los resultados de la estimación son:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{EXPTRAV}_i} = \underset{(0,535515)}{0,498120} + \underset{(0,003293)}{0,0555731} \cdot INCOME_i$$

$R^2 = 0,853199 \qquad SCR = 417,11 \qquad N = 51$

i	1	2	3	4
$\hat{u}_{MCO,i}$	$0,12705$	$-0,09054$	$1,72058$	$-0,18003$

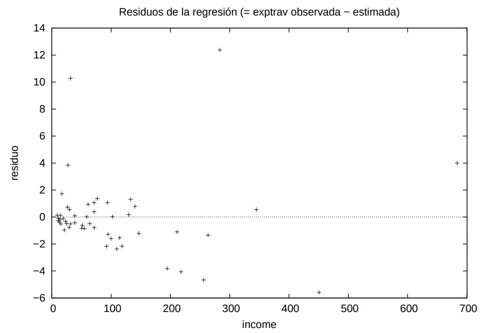
- Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Modelo P11.1: estimaciones MCO utilizando las 51 observaciones 1–51
Variable dependiente: exptrav

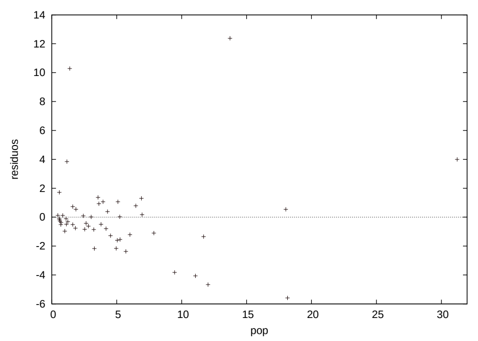
Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	0,498120	0,535515	0,9302	0,3568
income	0,0555731	0,00329311	16,8756	0,0000

Media de la var. dependiente	6,34071
Suma de cuadrados de los residuos	417,110
R^2	0,853199
Grados de libertad	49

c) • Residuos MCO frente a la variable $INCOME$. El gráfico muestra los pares $(INCOME_i, \hat{u}_{MCO,i})$. Para valores de $INCOME$ en el intervalo $(0, 100)$ vemos una alta concentración de observaciones donde la dispersión de los residuos permanece más o menos constante salvo en dos observaciones. En adelante al valor 100 y a medida que $INCOME$ toma valores mayores aumenta la dispersión en los residuos y la concentración desaparece.



• Residuos MCO frente a la variable POP. El gráfico muestra los pares $(POP_i, \hat{u}_{MCO,i})$. Para valores de POP en el intervalo $(0, 5)$ vemos una alta concentración de observaciones donde la dispersión de los residuos permanece más o menos constante salvo en dos observaciones. En adelante al valor 5 y a medida que POP toma valores mayores aumenta la dispersión en los residuos y la concentración desaparece. Este gráfico replica la forma del comentado anteriormente.



2. a) Podemos hacer el contraste con dos estadísticos alternativos Goldfeld-Quandt

o Breusch-Pagan, elegimos éste último.

$$H_0 : Var(u_i) = \sigma^2 \quad \forall i \qquad\qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(1)$$
$$H_a : Var(u_i) = \sigma_i^2 = f(\alpha_1 + \alpha_2 POP_i)$$

donde SCE es la Suma de Cuadrados explicada resultante de estimar por MCO la siguiente regresión auxiliar:

$$\frac{\hat{u}^2_{MCO,i}}{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{N}} = \alpha_1 + \alpha_2 POP_i + w_i$$

siendo $\hat{u}_{MCO,i}$ los residuos MCO resultantes de la estimación por MCO del Modelo P11.1; N=51 es el tamaño muestral disponible y $p = 1$ dado que se supone que únicamente influye en la varianza de la perturbación la variable POP.

b) Valor muestral del estadístico: $BG = \frac{37{,}6677}{2} = 18,83$.
Valor crítico para un nivel de significación ($\alpha = 5\,\%$): $3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}$.
Aplicación de la regla de decisión: $18,83 > 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}$ luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$ y concluimos que la varianza de la perturbación es heterocedástica: $Var(u_i) = \sigma_i^2$ y depende de la variable POP.

• Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Estimaciones MCO utilizando las 51 observaciones 1–51

Variable dependiente: enorm=$\frac{\hat{u}^2_{MCO,i}}{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{N}}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	0,224504	0,582730	0,3853	0,7017
pop	0,153424	0,0772343	1,9865	0,0526

Media de la var. dependiente	1,00000
Suma de cuadrados de los residuos	467,738
R^2	0,0745298
Grados de libertad	49

• Si realizamos el contraste con el estadístico de Goldfeld y Quandt:
Una vez ordenadas las observaciones de EXPTRAV e INCOME en función de un ordenamiento ascendiente de POP realizamos las regresiones en la submuestras y obtenemos:

Primera submuestra: estimaciones MCO utilizando las 17 observaciones 1–17
Variable dependiente: exptrav

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-1,7650	1,79369	-0,9841	0,3407
income	0,2046	0,08409	2,4332	0,0279

Suma de cuadrados de los residuos	97,4775
R^2	0,28299
Grados de libertad	15

Segunda submuestra: estimaciones MCO utilizando las 17 observaciones 35–51
Variable dependiente: exptrav

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-0,763340	1,86259	-0,4098	0,6877
income	0,0597051	0,00685590	8,7086	0,0000

Suma de cuadrados de los residuos	261,550
R^2	0,83487
Grados de libertad	15

Aplicación:
Valor muestral del estadístico $= GQ = \frac{261,55}{97,4775} = 2,6831$.
Valor crítico para un nivel de significación $(\alpha = 5\,\%) : 2,40345 = F(15,15)_{(0,05)}$.
Aplicación de la regla de decisión: $2,6831 > 2,40345$ luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$ y concluimos que la varianza de la perturbación es heterocedástica: $Var(u_i) = \sigma_i^2$ y depende de la variable POP.

c) No lo son, ya que la varianza no es constante sino heterocedástica. Para el supuesto $Var(u_i) = \sigma^2 POP_i$ y suponiendo $Cov(u_i, u_j) = 0 \quad \forall\, i \neq j$ tenemos:

$$E(uu') = \sigma^2 \begin{bmatrix} POP_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & POP_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & POP_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & POP_{51} \end{bmatrix}$$

d)

$$\hat{\beta}_{MCG} = \begin{bmatrix} \sum_1^{51} \frac{1}{POP_i} & \sum_1^{51} \frac{INCOME_i}{POP_i} \\ \sum_1^{51} \frac{INCOME_i}{POP_i} & \sum_1^{51} \frac{INCOME_i^2}{POP_i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_1^{51} \frac{EXPTRAV_i}{POP_i} \\ \sum_1^{51} \frac{INCOME_i EXPTRAV_i}{POP_i} \end{bmatrix}$$

3. *a*)

$$\widehat{EXPTRAV}_i = 0,908653 + 0,0518243 \cdot INCOME_i.$$

• Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Estimaciones MC.Ponderados utilizando las 51 observaciones 1–51
Variable dependiente: exptrav
Variable utilizada como ponderación: pond=1/pop

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	0,908653	0,371637	2,4450	0,0181
income	0,0518243	0,00574371	9,0228	0,0000

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuadrados de los residuos	120,425
R^2	0,62426
Grados de libertad	49

b) Contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,MCG}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCG})} \overset{H_0}{\sim} t(N-)$$

donde suponemos que la perturbación sigue una distribución normal. En el output de Gretl obtenemos el valor del estadístico $t = 9,023$ y su valor-p $0,00001 < 0,05$ luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$ y concluimos que la variable $INCOME$ es una variable significativa.

4. *a*)

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCGF}))}{\widehat{EXPTRAV}_i} = \underset{(0,401128)}{0,861597} + \underset{(0,00511585)}{0,0544227} \cdot INCOME_i \qquad i = 1, \ldots, 51.$$

$$\widehat{Var(u_i)} = 1,54767 + 0,265871 \cdot POP_i^2 - 0,00810207 \cdot POP_i^3.$$

• Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:
Para la regresión auxiliar siguiente:

$$\hat{u}^2_{MCO,i} = \alpha_1 + \alpha_2 POP_i^2 + \alpha_3 POP_i^3 + \eta_i \qquad i = 1, \ldots, 51.$$

Estimaciones MCO utilizando las 51 observaciones 1–51
Variable dependiente: $usq1 = \hat{u}^2_{MCO}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	1,54767	4,22101	0,3667	0,7155
sq_pop	0,265871	0,103385	2,5717	0,0133
pop3	-0,008102	0,003532	-2,2934	0,0262

Suma de cuadrados de los residuos	29243,7
R^2	0,13497
$F(2, 48)$	3,74473
valor p para $F()$	0,03081

De la regresión auxiliar obtenemos $\widehat{Var}(u_i) \quad i = 1, \ldots, 51.$

- Para el modelo estimado por MCGF:

Estimaciones MC.Ponderados utilizando las 51 observaciones 1–51
Variable dependiente: exptrav
Variable utilizada como ponderación: $pond2 = \frac{1}{\widehat{Var}(u_i)}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	0,861597	0,401128	2,1479	0,0367
income	0,054422	0,005115	10,6380	0,0000

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuadrados de los residuos	76,7310
R^2	0,69784
Grados de libertad	49

Estadísticos basados en los datos originales:

Media de la var. dependiente	6,34071
Suma de cuadrados de los residuos	421,149

b) Contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,MCGF}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCGF})} \overset{d,H_0}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, 1).$$

En el output de Gretl obtenemos el valor del estadístico $t = 10,638$ y su valor-p $0,00001 < 0,05$ luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$ y concluimos que la variable $INCOME$ es una variable significativa.

c) En ambos casos contrastamos la misma hipótesis por lo que el estadístico es el mismo pero aplicado al estimador derivado de las propiedades de u_i en cada caso. En el caso de que $Var(u_i) = \sigma^2 POP_i$ la varianza es heterocedástica pero conocida por lo que estimamos el modelo por Mínimos Cuadrados Generalizados. Bajo el supuesto de normalidad este estimador tiene una distribución exacta en muestras finitas válida para hacer inferencia, en muestras finitas.
En el caso en que $Var(u_i) = \alpha_1 + \alpha_2 POP_i^2 + \alpha_3 POP_i^3$ la varianza de la perturbación también es heterocedástica pero en este caso estimamos por Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles ya que la forma funcional de la varianza incluye parámetros desconocidos (α_1, α_2 y α_3). El estimador MCGF es consistente si la forma funcional de la varianza es estimada consistentemente, además tiene una distribución asintótica conocida y válida para hacer inferencia asintótica.
Por ello la diferencia entre los contrastes es la distribución del estadístico. En 3.b) el contraste se realiza en muestras finitas con una distribución t-student, mientras que en 4.b) el contraste es asintótico aproximando su distribución a una distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Cada uno en su contexto y dados sus supuestos son perfectamente válidos.

Solución PRÁCTICA P12.

1. El problema que existe es que $E(X_i u_i) = 0,9$ implica que el regresor está correlacionado con el término de perturbación del modelo. Esto tiene como consecuencia que si se utiliza el método de MCO para estimar los coeficientes β_1 y β_2, el estimador resultante además de sesgado será inconsistente. Por lo tanto la inferencia utilizando estadísticos basados en este estimador será errónea. Se puede emplear el contraste de Hausman para contrastar la existencia de correlación entre el regresor y la perturbación.
El contraste compara dos estimadores de β_2, el estimador de MCO y el de Variables Instrumentales VI. El estimador MCO es consistente y asintóticamente eficiente bajo H_0 pero inconsistente bajo H_a. En cambio, el estimador de VI es consistente bajo H_0 y H_a. El estadístico de contraste es:

$$\begin{array}{l} H_0 : E(X_i u_i) = 0 \\ H_a : E(X_i u_i) \neq 0 \end{array} \qquad H = \frac{\left(\hat{\beta}_2^{VI} - \hat{\beta}_2^{MCO}\right)^2}{\widehat{Var}(\hat{\beta}_2^{VI}) - \widehat{Var}(\hat{\beta}_2^{MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1).$$

Donde $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{2,MCO})$ y $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{2,VI})$ son estimadores consistentes, bajo la hipótesis nula, de las respectivas varianzas. Si el valor muestral del estadístico es mayor que el valor crítico a un nivel de significación elegido, el contraste ha detectado correctamente el problema y lo adecuado será utilizar el estimador VI. Si por el contrario, el contraste no tiene la suficiente potencia como para rechazar la hipótesis nula, entonces podemos aceptar erróneamente que el regresor y la perturbación no están correlacionados. Esto haría quedarnos con el estimador MCO creyendo que además de consistente fuera más eficiente asintóticamente que VI cuando no es cierto, ya que en la población X_i y u_i sí están correlacionados tal que $E(X_i u_i) = 0,9$ por lo que MCO será inconsistente.

2. Si se utiliza el estimador MCO para construir los estadísticos t y F usuales, la inferencia será errónea ya que estos estadísticos no seguirán las distribuciones asintóticas $\mathcal{N}(0,1)$ y $\mathcal{X}^2$ respectivamente. En cambio, si se utiliza el estimador de Variables Instrumentales VI, como se satisface que

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{VI} - \beta) = \left(\frac{Z'X}{N}\right)^{-1} \frac{Z'u}{\sqrt{N}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_u^2 Q_{zx}^{-1} Q_z [Q_{zx}^{-1}]')$$

donde σ_u^2, Q_z y Q_{zx}^{-1} se estiman consistentemente mediante $\hat{\sigma}_{VI}^2$, $(\frac{Z'Z}{N})$ y $(\frac{Z'X}{N})^{-1}$ respectivamente, los contrastes basados en VI tienen validez asintótica. En particular para contrastar q restricciones lineales:

$$H_0 : R\beta = r$$
$$H_a : R\beta \neq r$$

se utiliza el estadístico:

$$(R\,\hat{\beta}_{VI} - r)'[R\,\hat{\sigma}_{VI}^2\,(Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}\,R']^{-1}(R\hat{\beta}_{VI} - r) \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(q)$$

y la regla de decisión es rechazar la hipótesis nula a un nivel de significación elegido si el valor muestral del estadístico es mayor que el valor crítico en tablas.

3.

$$\widehat{\beta}_{VI} = \begin{bmatrix} 500 & 14,48 \\ -0,23 & 451,24 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1530,17 \\ 448,79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,03 \\ 0,996 \end{bmatrix}.$$

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{VI}))}{\hat{Y}_i} = \underset{(0{,}045123)}{3,03} + \underset{(0{,}05044)}{0,996}\; X_i.$$

4. El estimador de Variables Instrumentales se define:

$$\hat{\beta}_{VI} = \beta + (Z'X)^{-1}Z'u.$$

Será consistente, es decir,

$$plim\hat{\beta}_{VI} = \beta + \underbrace{plim\left(\frac{Z'X}{N}\right)^{-1}}_{=Q_{zx}^{-1}} \times \underbrace{plim\frac{Z'u}{N}}_{\text{por el T}^{\text{a}}\text{ Mann-Wald }=0} = \beta$$

si se cumplen los supuestos del teorema de Mann-Wald en términos de la matriz de instrumentos Z y el vector de perturbaciones u:

a) el rango de $(Z'X)$ debe ser completo.

b) $E(Z_{1i}u_i) = 0$ incorrelación entre instrumento y perturbación.

c) $plim\frac{Z'Z}{N} = Q_z$ finita, simétrica y no singular.

No se puede asegurar que, dada una matriz de instrumentos Z, el estimador sea asintóticamente eficiente ya que pueden existir otros estimadores consistentes con menor varianza asintótica. Por ejemplo, si hay otra matriz de instrumentos Z^* tal que esos instrumentos estén más correlacionados con los regresores del modelo, el estimador VI que utiliza esa matriz de instrumentos Z^* será más eficiente asintóticamente que el que usa Z.

5. El estadístico de contraste y distribución son:

$$(R\,\hat{\beta}_{VI} - r)'[R\,\hat{\sigma}^2_{VI}(Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}\,R']^{-1}(R\,\hat{\beta}_{VI} - r) \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(2)$$

donde:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad r = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}^2_{VI} = \frac{\hat{u}'_{VI}\hat{u}_{VI}}{500}$$

siendo $\hat{u}_{VI} = Y - X\hat{\beta}_{VI}$.

Considerando el valor-p obtenido, dado que el valor $p = 0,782617 > 0,05$ no se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significación del 5 %. De igual forma, si comparamos el valor muestral del estadístico de contraste con el valor crítico en tablas obtenemos que $0,490224 < 5,99 = \mathcal{X}^2(2)_{0,05}$, luego no se rechaza la hipótesis nula al 5 % de significación.

6. Este estimador, conocido con el nombre de estimador de Mínimos Cuadrados en 2 Etapas (MC2E), también pertenece a la clase de estimadores de Variables Instrumentales. En este caso se utilizan dos instrumentos además de la constante por lo que hay más instrumentos que regresores. El estimador MC2E combina todos ellos de forma óptima, tal que el estimador de VI obtenido es más eficiente asintóticamente que aquél que utiliza solamente un subconjunto de ellos, por ejemplo el anteriormente obtenido. La forma de obtener este estimador es la siguiente:

- Se realiza la regresión MCO de X_i sobre todos los instrumentos y se obtiene:

$$\hat{X}_i = \hat{\alpha}_{1,MCO} + \hat{\alpha}_{2,MCO} Z_{1i} + \hat{\alpha}_{3,MCO} Z_{2i} \quad i = 1, \ldots, 500.$$

- El estimador MC2E es el estimador de VI que utiliza como matriz de instrumentos

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & \hat{X}_1 \\ 1 & \hat{X}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \hat{X}_{500} \end{bmatrix} \qquad \hat{\beta}_{MC2E} = (Z'X)^{-1} Z'Y.$$

Solución PRÁCTICA P13.

1. El gráfico de los residuos sobre la variable *Income* muestra que la dispersión de éstos alrededor de su media muestral, que es cero, aumenta a mayor valor de *income*. En el gráfico de los residuos sobre la variable *age* no se aprecia de forma significativa que la dispersión de los residuos en función de *age* no sea constante. Por lo tanto, esto sugiere que en el modelo la varianza de la perturbación cambia en función creciente de *income* pero no de *age*.

2. En función de la información disponible podemos realizar el contraste de Goldfeld y Quandt.
   $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_N^2$ donde $\sigma_i^2 = var(u_i)$ $\longrightarrow$ Homocedasticidad.
   $H_a : \sigma_i^2 = f(Income_i)$ función creciente con Income. $\longrightarrow$ Heterocedasticidad.

   La muestra se ha ordenado en función de un ordenamiento decreciente de la variable *Income* por lo que la primera submuestra corresponde al grupo de mayores valores para la variable *Income* y la segunda submuestra al grupo de menores valores de la variable *Income*. El estadístico de contraste es:

$$GQ = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}(76, 76)$$

   siendo

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{80} \hat{u}_{1i}^2}{80 - 4} \text{ en la primera submuestra,}$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{80} \hat{u}_{2i}^2}{80 - 4} \text{ en la segunda submuestra.}$$

El valor muestral del estadístico en este caso es $GQ = 24276500/7048160 = 3,44$ que es mayor que el valor crítico $\mathcal{F}(76,76)_{0,05} \cong 1,4$ por lo que se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad a favor de la alternativa de varianza creciente con Income.

3. Si se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad y hay evidencia de heterocedasticidad, el estimador utilizado para estimar la matriz de varianzas y covarianzas del estimador $\hat{\beta}_{MCO}$, $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}_u^2(X'X)^{-1}$, no es consistente. Como consecuencia, los estadísticos t y F de contrastes de restricciones lineales utilizando $\hat{\beta}_{MCO}$ y $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{MCO})$ no tienen las distribuciones usuales, por lo que la inferencia será errónea. Luego lo que hay que cambiar son las desviaciones típicas utilizando un estimador consistente de $V(\hat{\beta}_{MCO})$ robusto a la existencia de heterocedasticidad. Este estimador por ejemplo puede ser el propuesto por White:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{MCO})_W = (X'X)^{-1}X'SX(X'X)^{-1}$$

$$S = \begin{bmatrix} \hat{u}_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{u}_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{u}_{200}^2 \end{bmatrix}$$

donde $\hat{u}_i$ son los residuos MCO. De esta forma podemos hacer inferencia válida en muestras grandes utilizando los siguientes estadísticos y distribuciones asintóticas:

- Para contrastar una restricción lineal:

$$\frac{R\hat{\beta}_{MCO} - r}{\sqrt{R(X'X)^{-1}X'SX(X'X)^{-1}R'}} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

- Para contrastar q restricciones lineales:

$$(R\hat{\beta}_{MCO} - r)'[R(X'X)^{-1}X'SX(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}_{MCO} - r) \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(q).$$

4.

$$E(u_i) = 0 \qquad E(u_i^2) = \sigma^2 Income_i \qquad E(u_i u_j) = 0$$

$$\underbrace{E(uu')}_{(200\times200)} = \sigma^2 \begin{bmatrix} Income_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Income_2 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Income_3 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & Income_{200} \end{bmatrix}$$

`Criterio de estimación:` $Min\ SCR = \sum_{i=1}^{i=200} (Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^* - \hat{\beta}_3 X_{3i}^* - \hat{\beta}_4 X_{4i}^*)^2$

$$Y_i^* = \frac{Miles_i}{\sqrt{Income_i}};\ X_{1i}^* = \frac{1}{\sqrt{Income_i}};\ X_{2i}^* = \sqrt{Income_i};$$

$$X_{3i}^* = \frac{age_i}{\sqrt{Income_i}};\ X_{4i}^* = \frac{kids_i}{\sqrt{Income_i}};$$

$$\hat{\beta}_{MCG} = \begin{bmatrix} \sum X_{1i}^{*2} & \sum X_{1i}^* X_{2i}^* & \sum X_{1i}^* X_{3i}^* & \sum X_{1i}^* X_{4i}^* \\ \sum X_{1i}^* X_{2i}^* & \sum X_{2i}^{*2} & \sum X_{2i}^* X_{3i}^* & \sum X_{2i}^* X_{4i}^* \\ \sum X_{1i}^* X_{3i}^* & \sum X_{2i}^* X_{3i}^* & \sum X_{3i}^{*2} & \sum X_{3i}^* X_{4i}^* \\ \sum X_{1i}^* X_{4i}^* & \sum X_{2i}^* X_{4i}^* & \sum X_{3i}^* X_{4i}^* & \sum X_{4i}^{*2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i^* X_{1i}^* \\ \sum Y_i^* X_{2i}^* \\ \sum Y_i^* X_{3i}^* \\ \sum Y_i^* X_{4i}^* \end{bmatrix}$$

5. Considerando que el estimador MCG es más eficiente que el estimador MCO, suponiendo que la modelización de la varianza del término de perturbación es adecuada, podemos utilizar los resultados obtenidos por MCG para realizar el contraste. Suponiendo normalidad en la distribución del término de perturbación, contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 10 \\ H_a : \beta_2 \neq 10 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,MCG} - 10}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCG})} \overset{H_0}{\sim} t(200-4)$$

Solución PRÁCTICA P14.

1. a) Modelo P14.1 $\quad I_t = \beta_1 + \beta_2 GNP_t + \beta_3 R_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, 30.$

   b) $$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{I_t}} = \underset{(2{,}51089)}{6,22494} + \underset{(0{,}0717905)}{0,769911}\, GNP_t - \underset{(0{,}126416)}{0,184196}\, R_t.$$

$$R^2 = 0,816282 \quad SCR = 299,336 \quad T = 30.$$

t	2000	2001	2002	2003
$\hat{u}_{MCO,t}$	1,094203	2,702973	-0,142711	1,799846

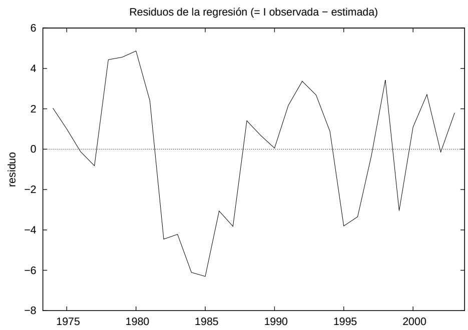
- Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Modelo P14.1: estimaciones MCO utilizando las 30 observaciones 1974–2003
Variable dependiente: I

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	6,22494	2,51089	2,4792	0,0197
GNP	0,769911	0,071790	10,7244	0,0000
R	-0,184196	0,126416	-1,4571	0,1566

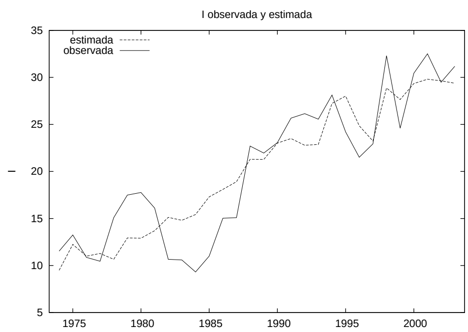
Suma de cuadrados de los residuos	299,336
R^2	0,816282
$F(2, 27)$	59,9822
Estadístico de Durbin–Watson	0,852153

c) • Serie temporal de los residuos MCO.



En el gráfico se muestra la evolución de los residuos ($\hat{u}_t = I_t - \hat{I}_t$) obtenidos a lo largo del periodo muestral considerado $t = 1974, \ldots, 2003$. Como es de esperar, ya que hay término constante en la regresión, oscilan alrededor de su media muestral igual a cero. Se puede observar que especialmente de 1973 a 1995 se van alternando en ciclos grupos de residuos seguidos del mismo signo, siendo menos evidente al final de la muestra.

• Gráfico de las series de Inversión observada y estimada.



En este gráfico se representa la evolución en el periodo muestral considerado, de los valores observados de la variable Inversión I_t y de la Inversión estimada $\hat{I}_t$ que predice el modelo ajustado, dados los valores observados de las variables explicativas. El modelo estimado no recoge bien los ciclos de expansión y recesión observados en la Inversión, especialmente en los años 1977-1982, y 1982-1988, siendo los observados mucho más pronunciados que los generados por el modelo ajustado. Esto explica los ciclos observados en el gráfico de la serie temporal de los residuos. Este hecho sugiere que el término de perturbación del modelo pueda recoger factores correlacionados en el tiempo tal que presente autocorrelación positiva al menos hasta de orden uno, pudiendo ser también de mayor orden.

2. *a*) El contraste a utilizar es el de Breusch-Godfrey. Contrastamos:

$$H_0 : \quad u_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$$
$$H_a : \begin{cases} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t \\ u_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \epsilon_t \end{cases} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(2).$$

Donde R^2 es el coeficiente de determinación obtenido en la estimación MCO de la siguiente regresión auxiliar:

$$\hat{u}_t = \gamma_1 + \gamma_2 GNP_t + \gamma_3 R_t + \gamma_4 \hat{u}_{t-1} + \gamma_5 \hat{u}_{t-2} + w_t$$

donde $\hat{u}_t$ son los residuos MCO obtenidos en la estimación MCO del Modelo P14.1. T es el número de observaciones disponibles de la regresión auxiliar. Comparamos TR^2 con el valor crítico de la distribución $\mathcal{X}^2(2)$ al nivel de significación prefijado α, rechazando la hipótesis nula si supera dicho valor.

b) Regresión auxiliar obtenida:

$$\widehat{\hat{u}_t} = 1,82088 - 0,00234482 GNP_t - 0,127743 R_t + 0,716243 \hat{u}_{t-1} - 0,178517 \hat{u}_{t-2}.$$

$R^2 = 0,361424$.
Valor muestral del estadístico $= (28 \times 0,361424) = 10,119885$.
Valor crítico para un nivel de significación ($\alpha = 5\,\%$)$= 5,99146$.
Aplica la regla de decisión: Dado que $10,119885 > 5,99146$ se rechaza la hipótesis nula para un nivel de significación del 5 %. Existe evidencia de autocorrelación al menos hasta de orden 2.

• Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Estimaciones MCO utilizando las 28 observaciones 1976–2003
Variable dependiente: uhat

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	1,82088	2,42502	0,7509	0,4603
GNP	-0,00234	0,067167	-0,0349	0,9725
R	-0,127743	0,118703	-1,0762	0,2930
uhat_1	0,716243	0,219487	3,2633	0,0034
uhat_2	-0,178517	0,212598	-0,8397	0,4097

Media de la var. dependiente	-0,10857
Suma de cuadrados de los residuos	187,646
R^2	0,36142
$F(4, 23)$	3,25442
valor p para $F()$	0,02966
Estadístico de Durbin–Watson	1,87976
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,03928

c) Las perturbaciones no son esféricas ya que esto implica que no presenten autocorrelación cosa que hemos rechazado con el contraste anterior.

3. *a*) Para $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon)$ tenemos:

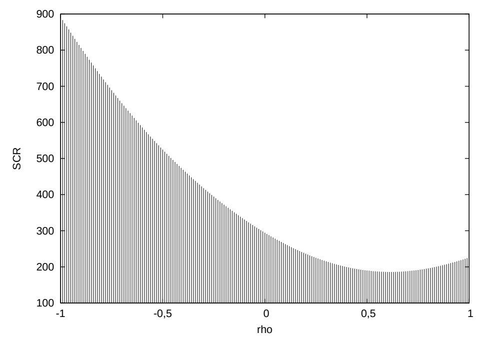
$$E(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{(30\times30)}{E(uu')} = \sigma^2_u \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{29} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{28} \\ \rho^2 & \rho & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \rho \\ \rho^{29} & \rho^{28} & \dots & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2_u \Omega.$$

$$\text{Criterio de estimación:} Min\ SCR = \sum_{t=2}^{t=30} \{(Y^*_t - \hat\beta_1 X^*_{1t} - \hat\beta_2 X^*_{2t} - \hat\beta_3 X^*_{3t}\}^2$$

$$Y^*_t = I_t - \hat\rho I_{t-1}; \quad X^*_{1t} = 1 - \hat\rho; \quad X^*_{2t} = GNP_t - \hat\rho;\ GNP_{t-1} \quad X^*_{3t} = R_t - \hat\rho R_{t-1};$$

$$\hat\beta_{HL} = \begin{bmatrix} \sum X^{*2}_{1t} & \sum X^*_{1t} X^*_{2t} & \sum X^*_{1t} X^*_{3t} \\ \sum X^*_{1t} X^*_{2t} & \sum X^{*2}_{2t} & \sum X^*_{2t} X^*_{3t} \\ \sum X^*_{1t} X^*_{3t} & \sum X^*_{2t} X^*_{3t} & \sum X^{*2}_{3t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y^*_t X^*_{1t} \\ \sum Y^*_t X^*_{2t} \\ \sum Y^*_t X^*_{3t} \end{bmatrix}$$

b) El gráfico de la SCR es:



$\hat{\rho} = 0,61$ valor mínimo de SCR= 185,970

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{HL}))}{\hat{I}_t} = \underset{(3{,}62292)}{7,31954} + \underset{(0{,}142836)}{0,785198} GNP_t - \underset{(0{,}0788497)}{0,295541} R_t.$$

- Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

La SCR es mínima para rho = 0,61
Estimaciones Hildreth–Lu utilizando las 29 observaciones 1975–2003
Variable dependiente: I
$\hat{\rho}$ = 0,61

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	7,31954	3,62292	2,0203	0,0538
GNP	0,785198	0,142836	5,4972	0,0000
R	-0,295541	0,0788497	-3,7482	0,0009

Estadísticos basados en los datos rho-diferenciados:

Suma de cuadrados de los residuos	185,970
R^2	0,88011
$F(2, 26)$	20,1010
Estadístico de Durbin–Watson	1,60240
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,19328

c) Utilizando los resultados anteriores de la estimación por Hildreth-Lu podemos realizar el contraste:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_3 = 0 \\ H_a : \beta_3 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{3,HL}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{3,HL})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

En el output de Gretl obtenemos el valor del estadístico, que en valor absoluto supera el valor crítico, $|t| = 3,7482 > 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0{,}025}$, por lo que su valor-p es menor que el nivel de significación $\alpha = 0,05$, $(0,0009 < 0,05)$. Luego rechazamos la hipótesis nula y concluimos que el tipo de interés es una variable significativa, al 5 % de significación.

4. *a*)

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO})_{robustas})}{\widehat{I_t}} = \underset{(\ 2{,}04053\ )}{6,22494} + \underset{(0{,}0722822)}{0,769911}\, GNP_t - \underset{(0{,}114826)}{0,184196}\, R_t.$$

Las desviaciones robustas bajo autocorrelación (ó de Newey-West) sirven para poder realizar contrastes de restricciones sobre β utilizando el estimador de los coeficientes por MCO aunque exista autocorrelación.

- Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Estimaciones MCO utilizando las 30 observaciones 1974–2003
Variable dependiente: I
Desviaciones típicas HAC, con ancho de banda 2 (Kernel de Bartlett)

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	6,22494	2,04053	3,0507	0,0051
GNP	0,769911	0,0722822	10,6515	0,0000
R	-0,184196	0,114826	-1,6041	0,1203

Media de la var. dependiente	20,2220
Suma de cuadrados de los residuos	299,336
R^2	0,81628
$F(2,27)$	63,0264
Estadístico de Durbin–Watson	0,85215
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,56772

b) Utilizando los resultados del apartado anterior podemos realizar el contraste:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_3 = 0 \\ H_a : \beta_3 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{3,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{3,MCO})_{robustas}} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

En el output de Gretl obtenemos el valor del estadístico, que en valor absoluto no supera el valor crítico, $|t| = 1,6041 < 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0,025}$, por lo que su valor-p es mayor que el nivel de significación $\alpha = 5\,\%$, $(0,1203 > 0,05)$. En este caso no rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$ por lo que no habría evidencia para concluir que el tipo de interés es una variable significativa.

c) El resultado del contraste es distinto, ya que en el apartado 3.c) se rechaza la hipótesis nula por lo que la variable tipo de interés es una variable significativa, mientras que en el apartado 4.b) no se llega a rechazar la hipótesis nula. La diferencia entre ambos contrastes está en el estimador utilizado para construir el estadístico. El del apartado 3.c) utiliza el estimador de Hildreth-Lu que es un estimador de MCGF y es asintóticamente más eficiente que el estimador MCO utilizado en el apartado 4.b). Si consideramos que el proceso AR(1) es el adecuado a la dinámica de la perturbación me quedaría con los resultados del apartado 3.c). Evidencia a favor de que AR(1) es el proceso adecuado tenemos en la regresión auxiliar del segundo apartado donde se aprecia que el retardo de orden dos en los residuos, $\hat{u}_{t-2}$, no es significativo para $\alpha = 5\,\%$.

Solución PRÁCTICA P15.

PRIMERA PARTE.

1. En el gráfico de la izquierda se muestra la evolución a lo largo del tiempo de la variable $INVENTARIOS$ junto con su estimación, $\widehat{INVENTARIOS}$. Se puede observar que el ajuste es bastante bueno salvo alrededor del año 70 donde se subestima a la variable; lo mismo ocurre en los años 74-75 y 81-84. En el gráfico de la derecha se muestra la evolución de los residuos MCO a lo largo del tiempo. Se observa un aumento de la variabilidad sobre todo del año 1965 en adelante, más acusada entre 1980-1985. De igual forma se observan grupos de residuos de un signo seguidos de grupos de residuos de signo contrario, por ejemplo de 1960 al 66 los residuos son negativos mientras que de 1967 a 1972 son positivos. En esencia ambos gráficos reflejan la misma información ya que en el gráfico de la izquierda, para cada t podemos obtener $INVENTARIOS_t - \widehat{INVENTARIOS}_t = \hat{u}_t^{MCO}$.

2. El comportamiento de los residuos a lo largo del tiempo puede ser compatible con la existencia de un proceso autorregresivo de orden uno con coeficiente de correlación positivo en la perturbación. Vamos a realizar el contraste de Durbin y Watson para comprobar si las perturbaciones siguen un proceso autorregresivo de primer orden:

$$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{array} \qquad en \quad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon).$$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{42} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{42} \hat{u}_t^2} = 1,3755.$$

Como $DW = 1,3755 < 1,4073 = d_L(T = 42, k' = 2, \alpha = 0,05)$ se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación o bien el modelo está mal especificado.
También podríamos haber realizado el contraste utilizando el estadístico de Breusch-Godfrey, así:

$$\begin{array}{ll} H_0 : & u_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon) \\ H_a : & \left\{ \begin{array}{l} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \epsilon_t \\ u_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{array} \right. \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d, H_0} \mathcal{X}^2(1).$$

Como $TR^2 = 4,061 > 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$ se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación para $\alpha = 5\,\%$. La perturbación sigue un proceso AR(1) o MA(1). En consecuencia no se cumple el supuesto de que $Cov(u_t u_s) = 0 \; t \neq s$ ya que hay evidencia de autocorrelación en la perturbación. Además dada la apariencia del gráfico de residuos podríamos pensar que un proceso razonable para la perturbación es el proceso autorregresivo de orden uno, con $\rho > 0$.
Con respecto a la varianza de la perturbación no disponemos de información para realizar un contraste sobre si es o no constante.

3. En el gráfico de la izquierda se aprecia que la variable $INVENTARIOS$ tiene una fuerte tendencia creciente. Por ello el estudiante puede sentirse inclinado a introducir la variable t en el modelo intentando así recoger esa tendencia mediante la inclusión como regresor en la parte sistemática del modelo a la variable $t = 1, 2, 3, \ldots$.

SEGUNDA PARTE.

4. En la estimación por MCO del Modelo P15.1 se ha detectado la existencia de autocorrelación en la perturbación mediante el estadístico de Durbin-Watson y el de Breusch-Godfrey. Por tanto, podemos concluir que el estimador MCO empleado aún siendo lineal, insesgado y consistente no es de mínima varianza y su matriz de varianzas y covarianzas es $V(\hat{\beta}^{MCO}) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$.
Los estadísticos-t mostrados han sido obtenidos mediante la expresión $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ donde $(X'X)^{-1} \neq (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$ y $\hat{\sigma}^2$ es un estimador sesgado e inconsistente. Por todo ello los estadísticos mostrados no son válidos para realizar inferencia en base a ellos ya que:

$$\frac{\hat{\beta}_{i,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})} \not\sim t(T-K) \qquad \text{ni siquiera} \qquad \xrightarrow{d,H_o} \mathcal{N}(0,1).$$

Para obtener un estimador eficiente el criterio de estimación debe tener en cuenta que la perturbación está autocorrelada, así debemos estimar los coeficientes de la relación P15.1 por MCGF. Este estimador aunque no lineal y sesgado en general, es consistente si el coeficiente ρ en el proceso autorregresivo es estimado consistentemente, además es eficiente asintóticamente y tiene distribución asintótica válida para hacer inferencia en muestras grandes.
Los segundos resultados de estimación mostrados corresponden al estimador MCGF obtenido mediante el proceso iterativo de Cochrane-Orcutt, luego tiene las propiedades adecuadas. Por ello deberíamos quedarnos con esta segunda estimación, que permite hacer inferencia asintótica válida.

TERCERA PARTE.

5. La matriz de regresores es:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & VENTAS_2 & 2 & INVENTARIOS_1 \\ 1 & VENTAS_3 & 3 & INVENTARIOS_2 \\ 1 & VENTAS_4 & 4 & INVENTARIOS_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & VENTAS_{42} & 42 & INVENTARIOS_{41} \end{bmatrix}$$

6. En este caso en la matriz de regresores se incluye a la variable endógena retardada luego X es una matriz estocástica y no es fiable realizar el contraste con el estadístico de DW, debemos realizarlo utilizando el estadístico de Breusch-Godfrey, donde:

$$\begin{array}{ll} H_0: & v_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon) \\ H_a: & \begin{cases} v_t = \rho_1 v_{t-1} + \epsilon_t \\ v_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{cases} \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1).$$

Donde R^2 es el coeficiente de determinación obtenido de estimar por MCO la siguiente regresión auxiliar:

$$\hat{v}_t^{MCO} = \delta_1 + \delta_2 VENTAS_t + \delta_3 t + \delta_4 INVENTARIOS_{t-1} + \delta_5 \hat{v}_{t-1}^{MCO} + \eta_t$$

siendo $\hat{v}_t^{MCO}$ los residuos MCO obtenidos en P15.2.
Como $TR^2 = 1,2852 < 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$ no se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación. La perturbación no está autocorrelada.

7. No debería ya que en el modelo anterior la perturbación no esta autocorrelada, por tanto $E(INVENTARIOS_{t-1}\ v_t) = 0$ las variables son incorrelacionadas aunque no son independientes. Por tanto $E(X'v) = 0$ ya que el resto de variables son no estocásticas ($E(VENTAS_t\ v_t) = E(t\, v_t) = E(v_t) = 0$).
El estimador MCO es una combinación no lineal de X matriz de regresores estocástica y la perturbación, además es sesgado ya que X y u no son independientes, pero es consistente. Se cumple el teorema de Mann y Wald, y $plim \frac{1}{T}(X'v) = 0$ lo que implica que el estimador es consistente $plim \hat{\beta}_{MCO} = \beta$. Además es eficiente asintóticamente.
En esta situación si se estima por Variables Instrumentales utilizando la variable $VENTAS_{t-1}$ como instrumento para la variable $INVENTARIOS_{t-1}$ obtendríamos un estimador consistente ya que al ser $VENTAS_t$ un regresor no estocástico $E(VENTAS_{t-1} v_t) = 0 \Rightarrow plim \frac{1}{T} Z'v = 0$ sin embargo el estimador no es eficiente asintóticamente ya que al no estar v_t autocorrelada el mejor instrumento para $INVENTARIOS_{t-1}$ es ella misma.

8. Dado que el estimador MCO es consistente, asintóticamente eficiente y asintóticamente normal podemos realizar inferencia asintótica válida utilizando su distribución asintótica. Así contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0: \beta_2 = 0 \\ H_a: \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_2}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

Dado que $|t| = 13,08 > 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0,025}$ se rechaza la H_0 para $\alpha = 5\,\%$ y concluimos que la variable $VENTAS$ es significativa.

9. La diferencia entre las especificaciones P15.1 y P15.2 es la inclusión en esta última de la variable $INVENTARIOS_{t-1}$. Dado que esta variable es significativa en

los resultados de la estimación mostrados $(3,21 > 1,96)$ y también lo es la variable $VENTAS_t$, como se ha visto en el apartado anterior, elegiríamos esta última especificación ya que incluye una variable relevante que se omite en la anterior. Así estimamos mediante el estimador de MCO los coeficientes de la ecuación P15.2. Por otra parte la variable t no es relevante en ninguna de las dos especificaciones alternativas.

Solución PRÁCTICA P16.

1. En el modelo las perturbaciones son heterocedásticas, su varianza no es constante para todos los individuos, sin embargo no existe correlación entre perturbaciones de distintos individuos, por lo que:

$$E(uu') = \sigma^2 \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_{51} \end{bmatrix}$$

2. El correspondiente modelo transformado es:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{Z_i}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{Z_i}} + \beta_2 \frac{X_i}{\sqrt{Z_i}} + \frac{u_i}{\sqrt{Z_i}} \qquad i = 1, 2, \dots, 51$$

donde

$$\begin{aligned} &E\left(\tfrac{u_i}{\sqrt{Z_i}}\right) = \tfrac{E(u_i)}{\sqrt{Z_i}} = 0 \quad \forall i, \\ &Var\left(\tfrac{u_i}{\sqrt{Z_i}}\right) = E\left(\tfrac{u_i}{\sqrt{Z_i}} - E\left(\tfrac{u_i}{\sqrt{Z_i}}\right)\right)^2 = \tfrac{E(u_i^2)}{Z_i} = \tfrac{\sigma^2 Z_i}{Z_i} = \sigma^2 \quad \forall i, \\ &Cov\left(\tfrac{u_i}{\sqrt{Z_i}} \tfrac{u_j}{\sqrt{Z_j}}\right) = E\left(\tfrac{u_i}{\sqrt{Z_i}} \tfrac{u_j}{\sqrt{Z_j}}\right) = \tfrac{E(u_i u_j)}{Z_i Z_j} = 0 \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$

3.
$$\min_{\hat\beta} \sum_{i=1}^{51} \frac{1}{Z_i}(Y_i - \hat\beta_1 - \hat\beta_2 X_i)^2.$$

4. El estimador eficiente es MCG (ó MCP). Para obtener las estimaciones vamos a estimar por MCO el correspondiente modelo transformado propuesto en el segundo apartado. El estimador se define como $\hat{\beta}_{MCP} = (X^{\star\prime} X^{\star})^{-1} X^{\star\prime} Y^{\star}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}_{MCP} &= \begin{bmatrix} \sum \frac{1}{Z_i} & \sum \frac{X_i}{Z_i} \\ \\ \sum \frac{X_i}{Z_i} & \sum \frac{X_i^2}{Z_i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum \frac{Y_i}{Z_i} \\ \\ \sum \frac{Y_i X_i}{Z_i} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 34,738 & 1608,334 \\ 1608,334 & 196420,998 \end{bmatrix}^{1} \begin{bmatrix} 236,139 \\ 28484,578 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,13465 \\ 0,1439 \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{Y}_i = 0,13465 + 0,1439 X_i.
\end{aligned}
$$

Solución PRÁCTICA P17.

1. En este caso sólo hay instrumento *stormy* disponible para la estimación MC2E, en un modelo donde hay una sola variable explicativa que puede estar correlacionada con la perturbación, *lprice*. Por lo tanto el estimador MC2E es un simple estimador de VI donde el instrumento para *lprice* es simplemente la variable *stormy*, sin necesidad de realizar ninguna regresión auxiliar. El estimador se calcula como $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'Y$ donde

$$
Z = \begin{bmatrix} 1 & stormy_1 & mon_1 & \cdots & thu_1 \\ 1 & stormy_2 & mon_2 & \cdots & thu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & stormy_{111} & mon_{111} & \cdots & thu_{111} \end{bmatrix}
$$

$$
X = \begin{bmatrix} 1 & lprice_1 & mon_1 & \cdots & thu_1 \\ 1 & lprice_2 & mon_2 & \cdots & thu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & lprice_{111} & mon_{111} & \cdots & thu_{111} \end{bmatrix}
$$

   e Y es el vector de dimensión (111×1) que contiene las observaciones de la variable *lquan*.

2. El estimador MC2E a partir de un sólo instrumento para $lprice_t$ necesita:

1) que éste no sea una variable explicativa del modelo para poder ser calculado. Si no fuera así, la matriz Z sería de rango deficiente, la matriz $Z'X$ también, $rango(Z'X) < 6 = K$, por lo que no existiría la inversa y no podría obtenerse el estimador VI.
2) que el instrumento esté incorrelacionado con la perturbación, lo que incluye el caso de que no sea estocástico, como en este caso que es una variable ficticia. De no ser así, en el límite $plim\frac{Z'u}{T} \neq 0$ y el estimador VI ya no sería consistente.
3) que Z esté correlacionada con X tal que $plim\frac{1}{T}Z'X = Q_{ZX}$ exista y sea invertible. Cuanto mayor sea esa correlación entre Z y X tanto más se verá reducida la varianza de los estimadores.

3. El contraste puede realizarse mediante el contraste de Hausman. En este caso:

$$\begin{array}{l} H_0 : E(lprice_t u_t) = 0 \\ H_a : E(lprice_t u_t) \neq 0 \end{array} \qquad H = \frac{\left(\hat{\beta}_2^{VI} - \hat{\beta}_2^{MCO}\right)^2}{\widehat{Var}(\hat{\beta}_2^{VI}) - \widehat{Var}(\hat{\beta}_2^{MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1).$$

Donde el parámetro asociado a la variable *lprice* es β_2. En este caso,

$$H = \frac{(-0{,}562550 - (-1{,}1194))^2}{0{,}428645^2 - 0{,}168213^2} = 1{,}995 < 3{,}84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}$$

por lo que no se rechaza la H_0 y no hay evidencia estadística de correlación entre la variable explicativa *lprice* y el término de error.

4. Dado el resultado anterior, el estimador MCO es consistente y, por el teorema de Mann-Wald, asintóticamente normal y asintóticamente eficiente si no hay evidencia de autocorrelación. El estimador VI es consistente y asintóticamente normal, pero no es eficiente asintóticamente, por lo que en este caso será preferible el estimador MCO.

5. Dado que las variables cuantitativas del modelo endógena y exógena están medidas en logaritmos, β_2 es una elasticidad y por tanto recoge la variación porcentual en el precio ante una variación porcentual en la cantidad. Contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 1 \\ H_a : \beta_2 \neq 1 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,MCO} - 1}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

Como el contraste es de dos colas,

$$|t| = \left| \frac{-0{,}562550 - 1}{0{,}168213} \right| = 9{,}2891 > 1{,}96 = \mathcal{N}(0,1)_{0{,}05/2}.$$

Por lo que se rechaza la hipótesis planteada a un nivel de significación del 5 %.

Nota: Dado que la ecuación es una ecuación de demanda, es también admisible y tiene más sentido económico, plantear la $H_0 : \beta_2 = -1$ frente a $H_a : \beta_2 \neq -1$. En este caso, $|t| = 2{,}3443$ y de igual manera se rechaza la hipótesis nula.

Solución PRÁCTICA P18.

PRIMERA PARTE.

1. Modelo P18.1:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{INVENTS}_t} = \underset{(1806{,}70)}{1668,67} + \underset{(0{,}00698487)}{1,55433}\ SALES_t$$

$$R^2 = 0,9992 \qquad SCR = 2,22224 \times 10^9 \qquad T = 42$$

$$DW = 1,37467 \qquad \widehat{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -9,73227$$

Coeficiente de correlación entre $INVENTS$ y $SALES = 0,9996$

Año t	1950	1951	1952
Residuo $\hat{u}_t$	-1837,57	1183,82	1012,20

- Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Modelo P18.1: estimaciones MCO utilizando las 42 observaciones 1950–1991
Variable dependiente: INVENTS

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	1668,67	1806,70	0,9236	0,3612
SALES	1,55433	0,006984	222,528	0,0000

Media de la var. dependiente	311725,
Suma de cuadrados de los residuos	$2{,}22224\times10^9$
R^2	0,999193
Grados de libertad	40
Estadístico de Durbin–Watson	1,37467
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,31100

Matriz de covarianzas de los coeficientes

const	SALES	
$3,26415 \times 10^6$	$-9,7322$	const
	$4,87883 \times 10^{-5}$	SALES

Coeficientes de correlación, usando las observaciones 1950 - 1991
valor crítico al 5 % (a dos colas) = 0,3044 para n = 42

SALES	INVENTS	
1,0000	0,9996	SALES
	1,0000	INVENTS

2. a) El contraste a utilizar es el de Breusch-Godfrey. Las hipótesis son:

$$H_0: \quad u_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon)$$
$$H_a: \begin{cases} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t \\ u_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \epsilon_t \end{cases} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(2).$$

b) Aplicación del contraste:
Regresión auxiliar obtenida:

$$\widehat{u}_t = 90,048 - 0,00062\ SALES_t + 0,287394\hat{u}_{t-1} + 0,08407\hat{u}_{t-1} \quad t = 3, \dots, 42.$$

$$R^2 = 0,103545.$$

Estadístico y distribución bajo la hipótesis nula:

$$TR^2 \overset{d,H_0}{\to} \mathcal{X}^2(2)$$

donde T es el número de observaciones disponibles de la regresión auxiliar.
Valor muestral del estadístico: $40 \times 0,103545 = 4,1418$.
Aplica la regla de decisión para un nivel de significación ($\alpha = 5\,\%$):
Valor crítico para un nivel de significación($\alpha = 5\,\%$)$= 5,99146$. Dado que $4,1418 < 5,99146$ no se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación frente una alternativa de autocorrelación hasta de orden 2.

• Los resultados de la regresión auxiliar estimada son:

Regresión auxiliar: estimaciones MCO utilizando las 40 observaciones 1952–1991
Variable dependiente: uhat1

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	90,0480	1890,47	0,0476	0,9623
SALES	-0,000627	0,007152	-0,0878	0,9306
uhat1_1	0,287394	0,166034	1,7309	0,0920
uhat1_2	0,084071	0,167925	0,5007	0,6197

R^2= 0,103545

3.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO})_{robustas})}{\widehat{I}_t} = \underset{(1094,77)}{1668,67} + \underset{(0,00830171)}{1,55433}\ SALES_t.$$

• Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Modelo P18.1: estimaciones MCO utilizando las 42 observaciones 1950–1991
Variable dependiente: INVENTS
Desviaciones típicas HAC, con ancho de banda 2 (Kernel de Bartlett)

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	1668,67	1094,77	1,5242	0,1353
SALES	1,55433	0,008301	187,230	0,0000

Media de la var. dependiente	311725,1
Suma de cuadrados de los residuos	2,22224e+09
R^2	0,99919
Grados de libertad	40
Estadístico de Durbin–Watson	1,37467
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,31100

Las desviaciones típicas así obtenidas sirven para poder realizar contrastes de restricciones sobre β utilizando el estimador de los coeficientes por MCO aunque exista autocorrelación. Es de utilidad cuando es difícil proponer un proceso adecuado para modelizar la autocorrelación ya que permite obtener una matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes estimados por MCO robusta a autocorrelación y por tanto válida para realizar inferencia en muestras grandes.
Los estadísticos basados en el estimador de β por MCO y un estimador consistente de su matriz de varianzas y covarianzas $\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO})_{NW}$ como es el utilizado, el estimador de Newey West, son:

- Para $q \geq 1$, el estadístico:

$$(R\hat{\beta}_{MCO} - r)'[R\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO})_{NW}R']^{-1}(R\hat{\beta}_{MCO} - r) \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(q).$$

- Para $q = 1$, el estadístico:

$$\frac{R\hat{\beta}_{MCO} - r}{\sqrt{R\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO})_{NW}R'}} \xrightarrow{d,H_o} \mathcal{N}(0,1).$$

El estimador de $V(\hat{\beta}_{MCO})$ dado por la expresión $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$, es un estimador sesgado e inconsistente si hay autocorrelación. Por lo tanto, no serán fiables los contrastes basados en él.

4. En el apartado anterior no se ha rechazado la hipótesis nula de no autocorrelación, sin embargo utilizando el estadístico de Durbin-Watson obtenido en el primer apartado parece que hay evidencia de autocorrelación de orden uno positiva ya que $DW = 1,37267 < d_L = 1,44$, donde $d_L = 1,44$ es la cota inferior en las tablas para $T = 40$ y $k' = 1$ al $5\,\%$ de significación. Luego viendo el resultado del contraste de Breusch-Godfrey y el de Durbin-Watson juntos parece que el proceso más adecuado

puede ser un AR(1). Por todo ello es necesario hacer el contraste pedido utilizando las desviaciones robustas a autocorrelación ya que en otro caso el contraste no es válido. Contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 2,5 \\ H_a : \beta_1 \neq 0 \quad y, o \quad \beta_2 \neq 2,5 \end{array}$$

con el estadístico

$$(R\hat{\beta}_{MCO} - r)'[R\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO})_{NW}R']^{-1}(R\hat{\beta}_{MCO} - r) \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(2)$$

siendo

$$R = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \qquad\qquad r = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2,5 \end{array}\right]$$

En el output de Gretl obtenemos el valor muestral del estadístico $9272,21$, con valor $p = 4,55217e - 054$. En este caso dado el valor-p$<$ 0,05 rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$.

- Output de Gretl correspondiente:

Conjunto de restricciones:

1: b[const] = 0
2: b[SALES] = 2,5

Estadístico de contraste:
F robusto$(2, 40) = 9272,21$, con valor p $= 4,55217e - 054$

Estimaciones restringidas

	coeficiente	desv. típica	estadístico t	valor p
const	1,48945E-010	0,000000	NA	NA
SALES	2,50000	0,000000	NA	NA

Desviación típica de la regresión = 243430.

5.

$$\hat{\rho} = 0,312612 \qquad \text{valor mínimo de} \quad SCR = 2,00370\text{e+09}$$

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{CO}))}{\widehat{INVENTS}_t} = \underset{(2598,93)}{2010,46} + \underset{(0,00969585)}{1,55283} \; SALES_t.$$

El modelo de interés a estimar es el recogido en el apartado 1:

$$INVENTS_t = \beta_1 + \beta_2 SALES_t + u_t \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2).$$

El modelo transformado tal que el error es un ruido blanco se puede escribir como:

$$INVENTS_t - \rho INVENTS_{t-1} = \beta_1 (1-\rho) + \beta_2 (SALES_t - \rho SALES_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad t = 2, ..., T$$

pero no se conoce el valor poblacional del parámetro ρ.

• Procedimiento de Cochrane-Orcutt:

a) Obtener $\hat{\rho}$ de la regresión MCO en:

$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + v_t \qquad t = 2, \ldots, T.$$

Como residuos iniciales tomamos los correspondientes a estimar por MCO el modelo de interés. El estimador de ρ es:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_2^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_2^T \hat{u}_{t-1}^2}.$$

b) Estimar por MCO β en el modelo transformado:

$$INVENTS_t - \hat{\rho}\, INVENTS_{t-1} = \beta_1(1-\hat{\rho}) + \beta_2(SALES_t - \hat{\rho}\, SALES_{t-1}) + w_t \qquad t = 2, \ldots, T.$$

Podemos iterar el proceso entre estas dos etapas utilizando en la primera etapa los residuos obtenidos de sustituir en el modelo de interés las estimaciones de los parámetros β, obtenidos en la segunda etapa. Pararemos el proceso iterativo cuando se alcance un criterio de convergencia, por ejemplo en términos de la suma de cuadrados residual de la segunda etapa.

• Los resultados de la estimación por Cochrane-Orcutt aparecen en el output de Gretl siguiente:

Modelo P18.1: Estimaciones Cochrane–Orcutt utilizando las 41 observaciones 1951–1991
Variable dependiente: INVENTS
$\hat{\rho} = 0{,}312612$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	2010,46	2598,93	0,7736	0,4438
SALES	1,55283	0,00969	160,154	0,0000

Estadísticos basados en los datos rho-diferenciados:

Suma de cuadrados de los residuos	2,00370e+09
R^2	0,9992
Grados de libertad	39
Estadístico de Durbin–Watson	2,04780
Coef. de autocorr. de primer orden.	-0,0247

SEGUNDA PARTE.

1. El estudiante ha incluido como regresor la variable $t = 1, 2, .., 42$ para recoger una posible tendencia lineal determinista, o evolución creciente en el tiempo, en la serie temporal de $INVENTS$.
   Para analizar la significatividad de esta variable mirando al estadístico t asociado a su coeficiente en la salida de Gretl mostrada, tenemos que tener en cuenta si hay evidencia de autocorrelación en el término de error.
   El valor del estadístico de Durbin-Watson $DW = 1,37559$ es menor que la cota inferior $d_L = 1,39$ para $T = 40$ y $k' = 2$, al 5 % de significación. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula de que el término de perturbación sea un ruido blanco frente a la alternativa de que siga un proceso AR(1) con coeficiente ρ positivo. Esto implica que el contraste de significatividad tiene validez utilizando las desviaciones típicas robustas a autocorrelación, pero no lo tiene usando la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}_{MCO}$ habitual.
   Dado que el valor muestral del estadístico t, en valor absoluto, es igual a $0,9384$ con un valor p de $0,3538$, al nivel de significación del 5 % no se rechaza la hipótesis nula de que el coeficiente β_3 sea igual a cero. Por lo tanto, la variable t no es significativa. Este resultado se debe a que la serie $SALES$ recoge bien la tendencia creciente de la serie $INVENTS$ por lo que ya no aporta nada la variable t.

2. En los resultados de la Estimación 1 del Modelo P18.2 se ha detectado autocorrelación. Si el problema detectado no es consecuencia de una mala especificación del modelo, tal que $E(u) = 0$, pero $E(uu') = \Sigma$, siendo $\Sigma \neq \sigma^2 I$, entonces el estimador de los coeficientes por MCO utilizado, aunque lineal e insesgado, no es eficiente, ni siquiera en muestras grandes o asintóticamente. Además la inferencia utilizando el estimador $\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ de su matriz de varianzas y covarianzas no es fiable. Esto se puede solventar utilizando las desviaciones típicas robustas a autocorrelación, pero no se mejora en eficiencia, ya que el estimador de los coeficientes β sigue siendo el mismo, MCO.
   Un estimador alternativo es el que se muestra en la Estimación 2, el estimador de Cochrane-Orcutt. Bajo el supuesto de que el término de error sigue un proceso AR(1), aunque en muestras finitas no se conocen sus propiedades porque no es lineal, en muestras grandes es consistente y eficiente asintóticamente. Esto hace que estos resultados puedan ser más adecuados, en términos de ganar precisión en la estimación, si consideramos acertado el Modelo P18.2 junto a que el término de error siga un AR(1), es decir:

$$INVENTS_t = \beta_1 + \beta_2 SALES_t + \beta_3\, t + u_t \qquad t = 1, \ldots, 42.$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t. \qquad |\rho| < 1 \qquad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon).$$

3.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & SALES_2 & 2 & INVENTS_1 \\ 1 & SALES_3 & 3 & INVENTS_2 \\ 1 & SALES_4 & 4 & INVENTS_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & SALES_{41} & 41 & INVENTS_{40} \\ 1 & SALES_{42} & 42 & INVENTS_{41} \end{bmatrix}$$

4.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{INVENTS}_t} = \underset{(1818{,}34)}{2578,48} + \underset{(0{,}101224)}{1,32764}\, SALES_t + \underset{(0{,}105483)}{0,236481}\, SALES_{t-1}.$$

$$R^2 = 0,999271 \qquad DW = 1,19478 \qquad T = 41.$$

- Los resultados anteriores han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Modelo P18.4: estimaciones MCO utilizando las 41 observaciones 1951–1991
Variable dependiente: INVENTS

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	2578,48	1818,34	1,4180	0,1643
SALES	1,32764	0,101224	13,1159	0,0000
SALES_1	0,236481	0,105483	2,2419	0,0309

Media de la var. dependiente	317869,
Suma de cuadrados de los residuos	1,95952e+09
R^2	0,99927
$F(2, 38)$	26047,2
Estadístico de Durbin–Watson	1,19478
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,39591

5. El Modelo P18.2 es un modelo estático en la parte sistemática donde hay evidencia de autocorrelación en el término de error. En el Modelo P18.3 y el Modelo P18.4 la dinámica entra de forma explícita en la parte sistemática del modelo incluyendo como regresores en el Modelo P18.3 a la variable endógena retardada $INVENTS_{t-1}$ y en el Modelo P18.4 a la variable exógena retardada $SALES_{t-1}$.
   En el Modelo P18.3 el valor muestral del estadístico del contraste de Breusch-Godfrey $BG(1) = 1,285206$ es menor que el valor crítico $\mathcal{X}^2(1)_{0,05} = 3,84$ por lo que no se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación. Además, la variable $INVENTS_{t-1}$ es significativa, ya que el valor muestral del estadístico $t = 3,2154$ es mayor que el valor crítico $1,96$ en la distribución asintótica $\mathcal{N}(0,1)$ al $5\,\%$ de significación. Por lo tanto, parece ser relevante como variable explicativa en el modelo.

Por otro lado, en el Modelo P18.4 la matriz de regresores no es estocástica por lo que podemos usar el estadístico de DW para realizar el contraste sobre la existencia o no de un proceso AR(1) en la perturbación. Dado que el valor del estadístico de Durbin-Watson $DW = 1,19478$ es menor que el valor de la cota inferior $d_L = 1,39$ para $T = 40$ y $k' = 2$, al 5 % de significación se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación. El estimador MCO aplicado no es de varianza mínima y la inferencia realizada en base a él no es válida. No es adecuado realizar el contraste de significatividad de la variable $SALES$ con los resultados mostrados dado que las desviaciones típicas mostradas no son fiables para realizar inferencia, ya que no son robustas a autocorrelación.

En el Modelo P18.2 puede haber un problema de omisión de variable relevante, dado que el incluir $INVENTS_{t-1}$ es relevante, por lo que el estimador de los coeficientes por MCO no sería consistente y la inferencia no sería adecuada, aún teniendo desviaciones robustas a autocorrelación.

En consecuencia, parece que la especificación más adecuada es la del Modelo P18.3 utilizando los resultados de estimar por MCO, ya que el estimador será consistente y asintóticamente eficiente. Aunque no se conoce su distribución exacta, dado que es un estimador no lineal, podemos basar la inferencia en su distribución asintótica. Así,

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

El valor muestral del estadístico es $t = 13,0803$, mayor que el valor crítico de la distribución para un nivel de significatividad del 5 %, esto es $1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0,025}$. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y la variable $SALES$ es significativa.

Solución PRÁCTICA P19.

1. Los residuos, en cada momento t, han sido calculados como:

   $$\hat{u}_{MCO,t} = output_t - \widehat{output}_t = output_t - 181,201 + 0,307 labor_t + 0,517 land_t + 0,096 machines_t$$

   Los gráficos que se muestran sirven para analizar, a la izquierda, el comportamiento de los residuos y por tanto ver si hay sospechas de que no se cumpla alguna hipótesis básica supuesta para el comportamiento de la perturbación. Y a la derecha, ver si el modelo muestra un buen ajuste o no y por lo tanto si podría haber problemas de mala especificación o no, además de la relación con t.

• En el gráfico de la derecha se muestra la evolución de la variable $output_t$ observada y estimada. El ajuste no parece ser muy bueno, en especial de 1958 a 1976, donde de forma sistemática el ajuste predice un mayor output que el realmente observado.
• El gráfico de la izquierda muestra la evolución de los residuos MCO a lo largo del tiempo. Por tanto muestra la misma información que el gráfico anterior puesto que $\hat{u}_{MCO,t} = output_t - \widehat{output}_t$. Para los períodos de 1948 a 1957 y de 1976 a 1993 vemos grupos de residuos positivos mientras que de 1958 a 1976 los residuos son negativos. Este comportamiento es compatible con la existencia de un proceso autorregresivo de orden uno y parámetro de correlación positivo en la perturbación o bien con problemas de mala especificación en el modelo.
Por otra parte los residuos aparecen centrados en torno a su media muestral, cero, como era de esperar al tener el modelo término constante. Con respecto a la estabilidad de la varianza aparentemente la varianza residual es constante para el período y no tenemos razones para sospechar, por tanto, que la varianza de la perturbación vaya a ser heterocedástica. En principio, de los gráficos mostrados, podemos concluir que la única hipótesis básica sobre la perturbación que parece no cumplirse es $E(u_t u_s) = 0 \quad \forall \quad t \neq s$.

2. Dado que en el apartado anterior hemos concluido que podría no cumplirse la hipótesis básica de covarianzas cero entre perturbaciones de distinto momento del tiempo, $E(u_t u_s) = 0 \quad \forall \quad t \neq s$, vamos a contrastar esta posibilidad con el estadístico de Durbin-Watson:

$$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_a : \rho > 0 \end{array} \qquad en \quad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1 \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2).$$

Dado que $DW = 0,612 < 1,38 = d_L(T = 46, k' = 3, \alpha = 0,05)$ se rechaza la hipótesis nula de que el término de perturbación sea un ruido blanco frente a la alternativa de que siga un proceso AR(1) con coeficiente ρ positivo.
Con respecto a los elementos que intervienen en el contraste, el estadístico de Durbin-Watson se define como:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

siendo $\hat{u}_t$ los residuos obtenidos de estimar la ecuación (P19.1) por MCO. $k' = 3$ es el número de regresores del Modelo P19.1 excepto el término independiente y $T = 46$ es el tamaño muestral utilizado para estimar el modelo.

3. a) No, no es fiable ya que al existir autocorrelación en u_t el estimador de MCO a pesar de ser lineal, insesgado y consistente no es eficiente. Las desviaciones estimadas presentadas en los resultados de la estimación se han obtenido en $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$ donde se acumulan dos errores. Por un lado, bajo autocorrelación la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}_{MCO}$ es

$\sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$ y tal que $(X'X)^{-1} \neq (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$. Por otro lado, bajo autocorrelación $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-K}$ es un estimador sesgado e inconsistente de σ^2. Por todo ello el estadístico para contrastar:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array}$$

definido como $\frac{\hat{\beta}_{i,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})}$ no sigue la distribución t-student habitual. La inferencia realizada en base a dicho estadístico no es válida y los estadísticos mostrados de la estimación MCO de la ecuación (P19.1) no son fiables.

b) Si sería posible llevarlos a cabo. Como se ha dicho en el apartado anterior el estimador MCO es consistente en muestras grandes y por tanto podríamos realizar inferencia asintótica con él. Bastaría con utilizar un estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}_{MCO}$ robusto a la existencia de autocorrelación en las perturbaciones. Este estimador es el estimador de Newey-West de $V(\hat{\beta}_{MCO})$. La manera correcta de realizar los contrastes de significatividad es la siguiente. Contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_a : \beta_i \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{i,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})_{NW}} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

Con la regla de decisión: si el valor absoluto del estadístico calculado es mayor que el valor de la $\mathcal{N}(0,1)_{\frac{\alpha}{2}}$, para un nivel de significatividad α dado, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la variable es significativa para ese nivel de significatividad.

4. El método de estimación de Cochrane-Orcutt es un método de Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles, que debe utilizarse para el caso en que la perturbación de un modelo cualesquiera esté autocorrelada y no se conozca el valor del coeficiente de autocorrelación. El presentado en los resultados corresponde a la estimación por MCGF del Modelo P19.1 suponiendo que $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon)$ siendo ρ desconocido.
Es un método totalmente indicado para este caso ya que en el segundo apartado habíamos detectado en la perturbación la existencia de un proceso AR(1) con coeficiente de correlación de primer orden, ρ positivo y desconocido. En estas circunstancias, mientras que el método de MCO nos proporciona estimadores lineales, insesgados, consistentes y no de varianza mínima, el estimador MCGF obtenido mediante el método de Cochrane-Orcutt nos proporciona estimadores que en muestras finitas son no lineales y sesgados pero en muestras grandes son consistentes, asintóticamente eficientes y asintóticamente normales por lo que son válidos para hacer inferencia asintótica.

5. El estimador de MCGF presentado se obtiene estimando por MCO el siguiente modelo transformado:

$$\begin{aligned} output_t - \hat{\rho}\, output_{t-1} = (1-\hat{\rho})\beta_1 + \beta_2(labor_t - \hat{\rho}\, labor_{t-1}) + \beta_3(land_t - \hat{\rho}\, land_{t-1}) \\ +\beta_4(machines_t - \hat{\rho}\, machines_{t-1}) + (u_t - \hat{\rho}\, u_{t-1}) \\ t = 2, \ldots, T. \end{aligned}$$

   Donde $\hat{\rho}$ se obtiene de estimar por MCO la siguiente ecuación:

$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \omega_t \qquad t = 2, \ldots, T,$$

$$\hat{\rho}_{MCO} = \frac{\sum \hat{u}_{t,MCO}\; \hat{u}_{t-1,MCO}}{\sum \hat{u}^2_{t-1,MCO}}$$

   siendo $\hat{u}_{t,MCO}$ los residuos de estimar por MCO la ecuación (P19.1).
   El proceso de estimación anterior se itera hasta que dos estimaciones consecutivas de ρ alcanzan un grado de convergencia prefijado de antemano.
   La forma de iterar el proceso es la siguiente: con $\hat{\beta}_{i,MCGF} \quad i = 1, \ldots, 4$ se generan unos nuevos residuos que son utilizados para estimar ρ. Este nuevo estimador $\hat{\rho}$ se utiliza para obtener nuevas estimaciones de $\hat{\beta}_{i,MCGF} \quad i = 1, \ldots, 4$ y así sucesivamente hasta alcanzar el grado de convergencia prefijado de antemano, por ejemplo $|\hat{\rho}^{i+1} - \hat{\rho}^{i}| < 0{,}001$ obteniendo así estimadores de MCGF consistentes ya que $\hat{\rho}$ es consistente, asintóticamente eficientes y válidos para hacer inferencia.

6. Contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 - \beta_3 = 0 \\ H_a : \beta_2 - \beta_3 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,CO} - \hat{\beta}_{3,CO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)_{CO}} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

   Estadístico calculado:

$$\frac{-0,40468 - 1,07276}{\sqrt{0,004221 + 0,13997 - 2 \times (-0,00963)}} = \frac{-1,4774}{\sqrt{0,1635}} = -3,6537.$$

   Regla de decisión: $|-3,6537| > 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0{,}05/2}$ luego rechazamos la hipótesis nula para $\alpha = 5\,\%$. El factor capital y el factor trabajo no influyen en la misma medida en la producción agrícola.

7. Para que el estadístico de contraste sea válido para contrastar la significatividad de la variable debe de estar bien definido. En este caso como el estadístico considerado es asintótico y se define en base al estimador MCO este estimador debe ser consistente, asintóticamente eficiente y asintóticamente normal para que el estadístico sea válido.
   Dado que el modelo incluye como regresor un retardo de la variable endógena lo que

debe ocurrir en el modelo es que no exista autocorrelación en la perturbación. Si esto es así $E(output_{t-1}\ v_t) = 0$ y se cumplen las condiciones del Teorema de Mann y Wald por lo que el estimador MCO sería consistente y asintóticamente eficiente. Su distribución asintótica sería una Normal y por lo tanto el estadístico propuesto sería válido para realizar el contraste de significatividad de la variable correspondiente.
Como consecuencia vamos a contrastar la existencia de autocorrelación en la perturbaciones del Modelo P19.2. Dado que se incluye como regresor a $output_{t-1}$ utilizaremos el estadístico de Breusch-Godfrey ya que el estadístico de Durbin-Watson no es válido con regresores estocásticos. Contrastamos:

$$\begin{array}{ll} H_0: & v_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon) \\ H_a: & \left\{ \begin{array}{l} v_t = \rho_1 v_{t-1} + \epsilon_t \\ v_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{array} \right. \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1).$$

Donde R^2 y T son respectivamente, el coeficiente de determinación y el número de observaciones disponibles de la siguiente regresión auxiliar:

$$\hat{v}_{t,MCO} = \delta_1 + \delta_2\ labor_t + \delta_3\ land_t + \delta_4\ machines_t + \alpha_1\ \hat{v}_{t-1,MCO} + \eta_t.$$

Dado que $BG(1) = 6,199 > 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$ rechazamos la hipótesis nula para $\alpha = 5\,\%$ y concluimos que existe autocorrelación en la perturbación del Modelo P19.2. Por tanto, $E(output_{t-1} v_t) \neq 0$, luego $E(X'v) \neq 0$, el estimador MCO no es consistente ni asintóticamente eficiente y la inferencia realizada en base a los resultados de la estimación presentados no es válida.

8. a) $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon)$.

   b) El método de estimación que se ha utilizado es Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles.

   c) Expresión matricial del estimador utilizado:

$$\begin{bmatrix} -27,47 \\ -0,058 \\ 0,546 \\ -0,130 \\ 0,925 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_3^T X_t^{*2} & \sum_3^T X_t^* LB_t^* & \sum_3^T X_t^* LN_t^* & \sum_3^T X_t^* MA_t^* & \sum_3^T X_t^* Q_{t-1}^* \\ \sum_3^T X_t^* LB_t^* & \sum_3^T LB_t^{*2} & \sum_3^T LB_t^* LN_t^* & \sum_3^T LB_t^* MA_t^* & \sum_3^T LB_t^* Q_{t-1}^* \\ \sum_3^T X_t^* LN_t^* & \sum_3^T LB_t^* LN_t^* & \sum_3^T LN_t^{*2} & \sum_3^T LN_t^* MA_t^* & \sum_3^T LN_t^* Q_{t-1}^* \\ \sum_3^T X_t^* MA_t^* & \sum_3^T LB_t^* MA_t^* & \sum_3^T LN_t^* MA_t^* & \sum_3^T MA_t^{*2} & \sum_3^T MA_t^* Q_{t-1}^* \\ \sum_3^T X_t^* Q_{t-1}^* & \sum_3^T LB_t^* Q_{t-1}^* & \sum_3^T LN_t^* Q_{t-1}^* & \sum_3^T MA_t^* Q_{t-1}^* & \sum_3^T Q_{t-1}^{*2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_3^T Q_t^* X_t^* \\ \sum_3^T Q_t^* LB_t^* \\ \sum_3^T Q_t^* LN_t^* \\ \sum_3^T Q_t^* MA_t^* \\ \sum_3^T Q_t^* Q_{t-1}^* \end{bmatrix}$$

   d) La consistencia del estimador de MCGF anterior depende de que $\hat{\rho}$ sea consistente. Este estimador es consistente si le obtenemos de estimar por MCO la ecuación: $\hat{v}_{t,VI} = \rho \hat{v}_{t-1,VI} + \xi_t$ donde $\hat{v}_{t,VI}$ son los residuos de estimar por Variables Instrumentales la ecuación (P19.2) y el estimador de ρ se define:

$$\hat{\rho}_{VI} = \frac{\sum \hat{v}_{t,VI}\ \hat{v}_{t-1,VI}}{\sum \hat{v}_{t-1,VI}^2}.$$

La consistencia del estimador $\hat{\rho}$ proviene del método de estimación utilizado para obtener los residuos, VI. El estimador de VI es consistente si se utiliza un instrumento Z_t, instrumento para $output_{t-1}$, tal que:

- Z_t no sea un regresor original del modelo para que el rango de la matriz $(Z'X)$ sea completo y $\exists (Z'X)^{-1}$,
- $E(Z_t\ v_t) = 0$,
- $E(Z_t\ output_{t-1}) \neq 0$.

de forma que $plim \frac{Z'v}{T} = 0 \Longrightarrow plim \hat{\beta}_{VI} = \beta$.
Por ejemplo $Z_t = labor_{t-1}, land_{t-1}, machines_{t-1},$ o una combinación lineal de ellos.

9. El estimador utilizado en la alternativa B, MCGF, es un estimador no lineal y sesgado en muestras finitas pero en muestras grandes es consistente, asintóticamente eficiente y asintóticamente normal por tanto válido para hacer inferencia asintótica. El estadístico propuesto es adecuado para contrastar $H_0 : \beta_5 = 0$ versus $H_a : \beta_5 \neq 0$. Dados los resultados presentados, el valor muestral del estadístico en valor absoluto es $\frac{0{,}925}{0{,}076} = 12,17 > 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0{,}025}$ luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significatividad del 5 %. La variable es individualmente significativa, luego la incluiría en el modelo.

10. El estimador óptimo es el utilizado en la alternativa B, es decir, Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles donde se estima por Mínimos Cuadrados Ordinarios el modelo transformado utilizando como estimador consistente de ρ al propuesto en el apartado 8.d).
Esto es así porque en la ecuación (P19.2) la perturbación está autocorrelada y como consecuencia el estimador MCO es inconsistente. Si hubiésemos estimado (P19.2) por VI con un instrumento adecuado que cumpliese las condiciones descritas en 8.d) habríamos obtenido un estimador consistente pero no sería asintóticamente eficiente ni nos sería útil para hacer inferencia ni tan siquiera inferencia asintótica. En cambio el estimador de MCGF propuesto es consistente, asintóticamente eficiente ya que tiene en cuenta que las perturbaciones son autocorreladas y tiene distribución asintótica Normal que puede ser utilizada para hacer inferencia asintótica.

Solución PRÁCTICA P20.

1.

$$\begin{array}{rlll}\widehat{\text{EARN}}_i & = -17,8361 & -\ 6,74458\,\text{FEM}_i & +\ 2,61304\,\text{S}_i \\ (\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO})) & \quad (5{,}05978) & \quad (1{,}15363) & \quad (0{,}22688) \\ & & +0,488736\,\text{EX}_i & -\ 0,07523\,\text{H}_i \\ & & \quad (0{,}1369) & \quad (0{,}06531)\end{array}$$

$R^2 = 0,24746$ $\qquad SCR = 86479,7$ $\qquad \widehat{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0,0096428$

	EARN_i	$\hat{u}_i$	$\widehat{\text{EARN}}_i$
$i = 1$	6,5	12,6593	-6,1593
$i = 2$	14	5,86819	8,13181
$i = 3$	25	15,62693	9,37307

- Estos resultados han sido obtenidos con el siguiente output de Gretl:

Modelo P20.1: Estimaciones MCO utilizando las 540 observaciones 1–540
Variable dependiente: EARN

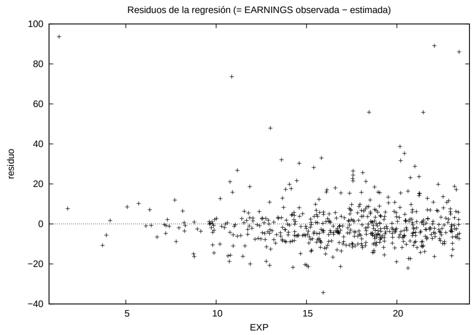
Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-17,836	5,05978	-3,5251	0,0005
FEM	-6,7445	1,15363	-5,8464	0,0000
S	2,6130	0,22688	11,5173	0,0000
EX	0,4887	0,13692	3,5694	0,0004
H	-0,0752	0,06531	-1,1518	0,2499

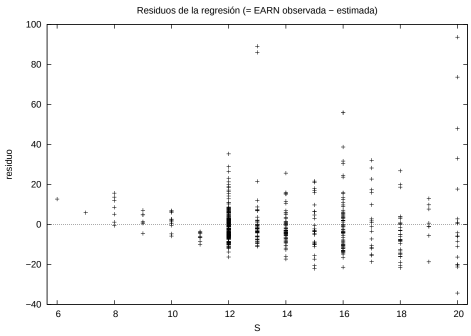
Media de la var. dependiente	19,7192
Suma de cuadrados de los residuos	86479,7
R^2	0,24746
$F(4, 535)$	43,9813

2. Dibuja y comenta los gráficos de residuos siguientes:

   a) Residuos $\hat{u}$ frente a EX:
   El gráfico muestra la evolución de los residuos MCO frente a la variable exógena EX, es decir los pares $(\hat{u}_{i,MCO}, EX_i)$. Se observa que la dispersión de los residuos aumenta conforme aumentan los valores de la variable EX, lo que puede ser un indicio de que la varianza de la perturbación no es constante sino creciente con EX.

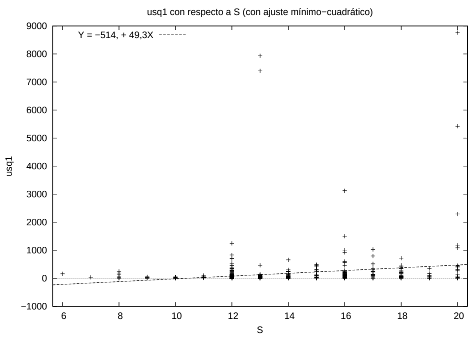
   b) Residuos $\hat{u}$ frente a S:





El gráfico muestra la evolución de los residuos MCO frente a la variable exógena S, es decir los pares $(\hat{u}_{i,MCO}, \mathrm{S}_i)$. Se observa que la dispersión de los residuos varía según el valor de la variable S incluso aumenta conforme aumentan sus valores, sobre todo para $\mathrm{S}_i = 12,\ 16$ y 20. Este comportamiento puede ser un indicio de que la varianza de la perturbación no es constante sino creciente con S.

c) Residuos al cuadrado $\hat{u}^2$ frente a S:



Este gráfico muestra la misma información que el anterior salvo por el hecho de que los residuos MCO se toman al cuadrado y que además Gretl muestra el ajuste MCO, indicativo de que existe relación lineal entre las variables. La dispersión de los residuos aumenta según aumenta el valor de la variable años de escolarización.

3. *a*) Regresión auxiliar estimada ($S_i < 13$):

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta_{MCO}))}{\widehat{\text{EARN}}_i} = \underset{(5{,}79352)}{-13,5924} - \underset{(0{,}915533)}{1,89755}\,\text{FEM}_i + \underset{(0{,}433637)}{1,21163}\,\text{S}_i + \underset{(0{,}09954)}{0,550971}\,\text{EX}_i - \underset{(0{,}054985)}{0,135032}\,\text{H}_i.$$

SCR= 12270,7 $\quad T$= 265 $\quad K$= 5 $\quad R^2 = 0,21583$.

b) Regresión auxiliar estimada ($S_i > 14$):

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat\beta_{MCO}))}{\widehat{\text{EARN}}_i} = \underset{(20{,}2547)}{-9,5421} - \underset{(2{,}77205)}{10,7646}\,\text{FEM}_i + \underset{(0{,}958196)}{2,74256}\,\text{S}_i + \underset{(0{,}410542)}{0,255251}\,\text{EX}_i - \underset{(0{,}136223)}{0,187013}\,\text{H}_i.$$

SCR= 49641,1 $\quad T$= 171 $\quad K$= 5 $\quad R^2 = 0,14262$.

c) Contrastamos:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

Siendo σ_1^2 la varianza de la perturbación al principio de la muestra, es decir para $S_i < 13$ y σ_2^2 la varianza de la perturbación al final de la muestra, es decir para $S_i > 14$.
Estadístico de contraste y distribución bajo la hipótesis nula:

$$GQ = \frac{SCR_2/(N_2 - K)}{SCR_1/(N_1 - K)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}(N_2 - K, N_1 - K).$$

Siendo SCR_1 la Suma de Cuadrados Residual de la ecuación estimada con $S_i < 13$ y SCR_2 la Suma de Cuadrados Residual de la ecuación estimada con $S_i > 14$.

d) Estadístico calculado:

$$GQ = \frac{49641,1/(171-5)}{12270,7/(265-5)} = \frac{299,042}{47,195} = 6,3363.$$

Resultado del Contraste: $6,3363 > 1,25 = \mathcal{F}(166,260)_{0,05}$ luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel se significación $\alpha = 5\,\%$, la varianza de la perturbación no es constante si no creciente con S_i.
Utilizando el valor-p tenemos $1,03844e - 039 < 0{,}05$ luego rechazamos la hipótesis nula con la misma conclusión anterior, lógicamente.

e) Como resultado del contraste se ha concluido que la varianza de la perturbación en (P20.1) no es constante. En estas circunstancias el estimador de MCO en muestras finitas es lineal ya que la matriz de regresores no es estocástica. Es insesgado ya que $E(u_i) = 0 \quad \forall i$ pero no es de varianza mínima, ahora $V(\hat{\beta}_{MCO}) = (X'X)^{-1}X'\Sigma X(X'X)^{-1}$. En muestras grandes es consistente.

La implementación del contraste de Goldfeld y Quandt necesita de los siguientes resultados:

- Resultados de la estimación MCO para la muestra donde $S_i < 13$:

Estimaciones MCO utilizando las 265 observaciones 1–265
Variable dependiente: EARN

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-13,592	5,79352	-2,3461	0,0197
FEM	-1,8975	0,915533	-2,0726	0,0392
S	1,21163	0,433637	2,7941	0,0056
EX	0,550971	0,0995461	5,5348	0,0000
H	0,135032	0,0549850	2,4558	0,0147

Media de la var. dependiente	14,9502
Suma de cuadrados de los residuos	12270,7
R^2	0,215834
$F(4, 260)$	17,8906

- Resultados de la estimación MCO para la muestra donde $S_i > 14$:

Estimaciones MCO utilizando las 171 observaciones 370–540
Variable dependiente: EARN

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-9,5421	20,2547	-0,4711	0,6382
FEM	-10,764	2,77205	-3,8833	0,0001
S	2,74256	0,958196	2,8622	0,0047
EX	0,255251	0,410542	0,6217	0,5350
H	-0,187013	0,136223	-1,3729	0,1716

Media de la var. dependiente	27,4454
Suma de cuadrados de los residuos	49641,1
R^2	0,142619
$F(4, 166)$	6,90320
valor p para $F()$	3,64684e-05

f) $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{MCO})_W = (X'X)^{-1}X'SX(X'X)^{-1}$ siendo $S = diag(\hat{u}_1^2, \ldots, \hat{u}_{540}^2)$.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO})_W)}{\widehat{\text{EARN}}_i} = \underset{(6{,}27427)}{-17,8361} - \underset{(1{,}45167)}{6,74458}\,\text{FEM}_i + \underset{(0{,}291455)}{2,61304}\,\text{S}_i + \underset{(0{,}178898)}{0,488736}\,\text{EX}_i - \underset{(0{,}110907)}{0,07523}\,\text{H}_i.$$

4. Si se considera que $E(u_i)^2 = aS_i^2$ siendo a una constante ($a > 0$).

   a) Dado que suponemos $E(u_i)^2 = aS_i^2 \Longrightarrow E(uu') = a\Omega$ con Ω conocida luego estimaremos el modelo por Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP). Para obtener los estimadores podemos aplicar directamente el estimador MCP definido como: $\hat{\beta}_{MCP} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$ o alternativamente estimar por MCO el siguiente modelo transformado:

$$\frac{\text{EARN}_i}{S_i} = \beta_1\frac{1}{S_i} + \beta_2\frac{\text{FEM}_i}{S_i} + \beta_3 + \beta_4\frac{\text{EX}_i}{S_i} + \beta_5\frac{\text{H}_i}{S_i} + \frac{u_i}{S_i}$$

   donde $\frac{u_i}{S_i} \sim iii(0, a)$.

   b)

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{540} \frac{1}{S_i^2}\,(\text{EARN}_i - \beta_1 - \beta_2\text{FEM}_i - \beta_3\text{S}_i - \beta_4\text{EX}_i - \beta_5\text{H}_i)^2.$$

   c) Los valores correspondientes a la tabla son:

Variables	$\frac{EARN_i}{S_i}$	$\frac{1}{S_i}$	$\frac{FEM_i}{S_i}$	1	$\frac{EX_i}{S_i}$	$\frac{H_i}{S_i}$
$i = 1$	1,083333	0,1666667	0,1666667	1	1,705128	5
$i = 2$	2	0,1428571	0	1	3,343407	7,142857
$i = 540$	1,6	0,05	0,05	1	0,488462	1

   d)

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCP}))}{\widehat{\text{EARN}}_i} \quad \underset{(4{,}24787)}{-16,5068} - \underset{(1{,}02120)}{5,37333}\,\text{FEM}_i + \underset{(0{,}202473)}{2,24069}\,\text{S}_i + \underset{(0{,}115116)}{0,490289}\,\text{EX}_i - \underset{(0{,}0591535)}{0,0035554}\,\text{H}_i.$$

5. Si la ponderación utilizada es S_i^2 se está suponiendo que $Var(u_i) = \frac{1}{S_i^2}$ es decir que la varianza de la perturbación decrece con la variable S_i y además más que proporcionalmente. Esto es contrario a lo observado en el gráfico de residuos MCO frente a S_i y contrario a lo detectado con el estadístico de GQ donde concluíamos que la varianza de la perturbación era creciente con la variable S_i, por tanto no es una ponderación adecuada.
   Dado que estamos especificando $E(uu')$ de forma errónea el estimador aplicado, MCP no tendrá las propiedades que se le suponen. En particular, sigue

siendo lineal e insesgado en muestras finitas ya que se mantiene que la matriz de regresores del modelo es no estocástica y que la media de la perturbación es cero $\forall i$. Sin embargo no será de varianza mínima ya que esta propiedad se alcanza para la verdadera $E(uu')$ y con esta ponderación no lo estamos consiguiendo ya que no es la correcta.
En cuanto a los resultados mostrados no son correctos. Los correctos serían los obtenidos para la verdadera $E(uu')$ por tanto utilizarlos para obtener conclusiones estadísticas no es adecuado. En particular la inferencia no es válida ya que que se obtiene en base a un estimador de MCP con Ω incorrecta (Ω_*) y $\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCP}) = \hat{\sigma}^2(X'\Omega_*^{-1}X)^{-1}$ no es un estimador insesgado y consistente de $V(\hat{\beta}_{MCP}) = \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$.

6. Se está estimando por MCGF como se muestra en los resultados de la estimación ya que aparece la ponderación estimada.
La diferencia entre el estimador de MCGF utilizado aquí y el de MCP utilizado en el quinto apartado es precisamente que en este caso la forma funcional que se supone para la varianza de la perturbación incluye parámetros desconocidos que han de ser estimados, consistentemente. La forma funcional que se supone para la varianza de la perturbación viene dada por la ponderación, así se supone que $Var(u_i) = \sigma_i^2$ donde la regresión auxiliar determina la forma de σ_i^2. Se supone que $\sigma_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 FEM_i + \alpha_3 S_i + \alpha_4 EX_i$ con $\alpha_i \quad i = 1, \ldots, 4$ desconocidos.
Para obtener el estimador de MCGF basta que apliquemos el estimador de MCO al siguiente modelo transformado:

$$\frac{\text{EARN}_i}{\hat{\sigma}_i} = \beta_1 \frac{1}{\hat{\sigma}_i} + \beta_2 \frac{\text{FEM}_i}{\hat{\sigma}_i} + \beta_3 \frac{S_i}{\hat{\sigma}_i} + \beta_4 \frac{\text{EX}_i}{\hat{\sigma}_i} + \beta_5 \frac{\text{H}_i}{\hat{\sigma}_i} + u_i^*$$

con $u_i^* \sim iii(0,1)$
Siendo $\hat{\sigma}_i^2$ un estimador consistente de σ_i^2. El estimador consistente de los parámetros $\alpha_i \quad i = 1, \ldots, 4$ desconocidos podemos obtenerlo estimando previamente por MCO la siguiente ecuación auxiliar:

$$\hat{u}_{i,MCO}^2 = \alpha_1 + \alpha_2 FEM_i + \alpha_3 S_i + \alpha_4 EX_i + \omega_i \qquad i = 1, \ldots, 540.$$

Donde $\hat{u}_{i,MCO}$ son los residuos de estimar el Modelo P20.1 por MCO. Una vez estimada la regresión obtenemos $\hat{\sigma}_i^2 = \widehat{\hat{u}_i^2}$ para finalmente aplicar el estimador de MCGF.

7. Dado que las propiedades de los estimadores de MCP y MCGF dependen de que se haya determinado de forma correcta $Var(u_i)$ y esto no está muy claro con la información presentada, nos quedaríamos con la estimación de los coeficientes por MCO y su matriz de varianzas y covarianzas la estimaría por White.
Entre MCP y MCGF este último sería preferido ya que dados los gráficos de

residuos iniciales podemos pensar que la varianza depende tanto de la variable S_i como de EX_i, además también depende de FEM_i por lo que la última estimación presentada, MCGF, es más adecuada.
Sin embargo, si se tiene en cuenta el gráfico de residuos frente a la variable H_i también podríamos pensar que dicha variable debería incluirse en la forma funcional de la varianza, ya que dicho gráfico muestra un incremento de la variabilidad de los residuos a medida que aumenta H_i. En este caso el estimador de MCGF calculado no tendría las propiedades que se le suponen.
Ante la dificultad de determinar $Var(u_i)$ sería más adecuado no realizar supuestos que lleven a conclusiones erróneas y estimar por MCO utilizando un estimador robusto a heterocedasticidad para su matriz de varianzas y covarianzas. En este caso podríamos realizar inferencia asintótica válida.

8. Contrastamos:

$$\begin{array}{l} \beta_i = 0 \\ \beta_i \neq 0 \quad i = 4, 5 \end{array} \qquad t_i = \frac{\hat{\beta}_{i,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})_W} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

• Para la variable EX_i:
$|3,48| > 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0,025}$
luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significatividad del 5 % y concluimos que la variable es individualmente significativa para determinar el nivel de ingresos de un individuo.
• Para la variable H_i:
$|-0,039| < 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0,025}$
luego no rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significatividad del 5 % y concluimos que la variable no es individualmente significativa para determinar el nivel de ingresos de un individuo.

Solución PRÁCTICA P21.

1. El gráfico muestra la evolución de los residuos a lo largo del tiempo. Los residuos están centrados en torno a su media, cero, como corresponde a un modelo con término independiente. Se puede observar agrupamientos de residuos del mismo signo seguidos de agrupamientos de residuos de signo contrario, alternándose a lo largo de toda la muestra. Este comportamiento es compatible con la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden y signo positivo en la perturbación. Con respecto a la dispersión de los residuos, esta es más o menos constante.

2. A la vista del gráfico debemos pensar en contrastar la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden en la perturbación. Para ello disponemos del valor de dos estadísticos. El estadístico de Durbin-Watson no es válido en presencia de regresores estocásticos mientras el estadístico de Breusch-Godfrey sí, utilizaremos este último. Las hipótesis nula y alternativa son:

$$\begin{array}{ll} H_0: & u_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon) \\ H_a: & \left\{ \begin{array}{l} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \epsilon_t \\ u_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{array} \right. \end{array} \qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1).$$

   Como $TR^2 = 4{,}34 > 3{,}84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}$ se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación para $\alpha = 5\,\%$. La perturbación sigue un proceso AR(1) o MA(1). En consecuencia, no se cumple el supuesto de que $Cov(u_t, u_s) = 0 \; t \neq s$ ya que hay evidencia de autocorrelación en la perturbación. Además, dada la apariencia del gráfico de residuos, podríamos pensar que un proceso razonable para la perturbación es el proceso autorregresivo de orden uno, con $\rho > 0$, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ y $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon)$.
   Con respecto a la varianza de la perturbación no disponemos de información para realizar un contraste sobre si es o no constante.

3. Porque la matriz de regresores $X = [\vec{1} \;\; Pg_t \;\; R_t \;\; Ps_t \;\; G_{t-1}]$ es estocástica ya que incluye a la variable aleatoria G_{t-1}. Luego $\hat{\beta}_{MCO} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$ es combinación no lineal de X estocástica y u vector de variables aleatorias.

4. G_{t-1} y u_t no son independientes ya que G_{t-1} es función de $u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots$ y todos sus retardos. Además la perturbación sigue un proceso AR(1), que implica que $E(u_t u_{t-1}) \neq 0$. Luego u_t también es función de u_{t-1} por lo que G_{t-1} y u_t están correlacionados: $E(G_{t-1}u_t) \neq 0$.

5. En este caso no se cumple el teorema de Mann y Wald ya que por un lado la perturbación no es esférica y por otro $E(G_{t-1}u_t) \neq 0 \Longrightarrow E(X'u) \neq 0$.
   El estimador de MCO es inconsistente ya que: $E(X'u) \neq 0 \Rightarrow plim\frac{X'u}{T} \neq 0$ luego:

$$\begin{aligned} plim\hat{\beta}_{MCO} &= \beta + \underbrace{plim\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}}_{Q^{-1}} \underbrace{plim\frac{X'u}{T}}_{\neq 0} \neq \beta. \end{aligned}$$

6. El método de estimación utilizado es Variables Instrumentales, este estimador se define: $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'Y$. En esta situación hay más instrumentos que variables que lo necesitan luego se está aplicando VI implementando el estimador de Mínimos Cuadrados en 2 Etapas.
   La lista *const Pg Pg_1 R R_1 Ps Ps_1* es la lista de instrumentos utilizados. Indica que para instrumentos de G_{t-1} disponemos de los primeros retardos de los tres regresores no estocásticos *Pg_1 R_1 Ps_1* y *const Pg R Ps* actúan como

instrumentos de las propias variables.
Los instrumentos son adecuados si:

i) El rango de la matriz $(Z'X)$ es completo lo que garantiza que $\exists(Z'X)^{-1}$. En este caso se cumple ya que no hay colinealidad exacta en las columnas de Z ni en las de X luego $|Z'X| \neq 0$.

ii) Están incorrelados con la perturbación y lo están ya que son retardos de regresores no estocásticos y $E(u_t) = 0 \; \forall t$:

$$\begin{aligned} E(Pg_{t-1}u_t) &= Pg_{t-1}E(u_t) = 0, \\ E(R_{t-1}u_t) &= R_{t-1}E(u_t) = 0, \\ E(Ps_{t-1}u_t) &= Ps_{t-1}E(u_t) = 0. \end{aligned}$$

iii) Están correlacionados con la variable para la cual hacen de instrumento, lo cual es de esperar si notamos que

$$G_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 Pg_{t-1} + \beta_3 R_{t-1} + \beta_4 Ps_{t-1} + \beta_5 G_{t-2} + u_{t-1}$$

luego es sensato pensar que:

$$E(Pg_{t-1}G_{t-1}) \neq 0, \qquad E(R_{t-1}G_{t-1}) \neq 0, \qquad E(Ps_{t-1}G_{t-1}) \neq 0.$$

Dado que se cumplen i), ii) y iii) los instrumentos son adecuados.

7. El método de estimación utilizado es Variables Instrumentales, cuyo estimador se define así: $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'Y$. Dado que hay más instrumentos que variables que lo necesitan, se genera el instrumento más correlacionado con G_{t-1} mediante la estimación por MCO de la siguiente regresión auxiliar:

$$G_{t-1} = \gamma_1 + \gamma_2 Pg_t + \gamma_3 R_t + \gamma_4 Ps_t + \gamma_5 Pg_{t-1} + \gamma_6 R_{t-1} + \gamma_7 Ps_{t-1} + \eta_t.$$

A continuación se utiliza a $\widehat{G}_{t-1,MCO}$ como instrumento para G_{t-1} y se estima el Modelo P21.1 por VI donde:

$$\begin{aligned} X &= [\vec{1} \;\; Pg_t \;\; R_t \;\; Ps_t \;\; G_{t-1}] \\ Z &= [\vec{1} \;\; Pg_t \;\; R_t \;\; Ps_t \;\; \widehat{G}_{t-1,MCO}] \\ Y &= [G_t] \end{aligned}$$

8. *a*) $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2_\epsilon)$.

   b) Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles y se está presentando el modelo transformado bajo el supuesto de que $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$, indicándose claramente qué parámetro ρ está estimado, $\hat{\rho}$.

   El estimador de MCGF puede haber sido conseguido tanto por el método de Cochrane-Orcutt como por el proceso de Hildreth-Lu.

• Utilizando el proceso de Cochrane-Orcutt: Como nos dicen que el estimador de MCGF es consistente el estimador de ρ es el obtenido estimando por MCO el modelo:

$$\hat{u}_{t,VI} = \rho \hat{u}_{t-1,VI} + \xi_t$$

donde $\hat{u}_{t,VI}$ son los residuos obtenidos de la estimación de VI propuesta en el apartado 7 y el estimador de ρ es:

$$\hat{\rho}_{VI} = \frac{\sum \hat{u}_{t,VI}\hat{u}_{t-1,VI}}{\sum \hat{u}^2_{t-1,VI}}.$$

A continuación se estima por MCO el modelo transformado utilizando $\hat{\rho}_{VI}$ como estimador de ρ,

$$(G_t - \hat{\rho}_{VI}\, G_{t-1}) = \beta_1(1-\hat{\rho}_{VI}) + \beta_2(Pg_t - \hat{\rho}_{VI}\, Pg_{t-1}) + \beta_3(R_t - \hat{\rho}_{VI}\, R_{t-1}) + \beta_4(Ps_t - \hat{\rho}_{VI}\, Ps_{t-1}) + \beta_5(G_{t-1} - \hat{\rho}_{VI}\, G_{t-2}) + \epsilon_t$$

luego $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{VI}$.

A partir de las nuevas estimaciones de β_1 y β_2 se vuelven a calcular los residuos para estimar un nuevo valor de ρ y así sucesivamente. El proceso de estimación ha sido iterado hasta alcanzar un grado de convergencia prefijado de antemano, por ejemplo $|\hat{\rho}^{i+1} - \hat{\rho}^i| < 0{,}001$ obteniendo así estimadores de MCGF consistentes ya que $\hat{\rho}$ es consistente, asintóticamente eficientes y válidos para hacer inferencia.

• Alternativamente utilizando el proceso de Hildreth-Lu: En este caso se particiona el recorrido (-1,1) de valores posibles de ρ en n-particiones equidistantes, ρ_i. Se estima por MCO el modelo transformado para cada ρ_i:

$$(G_t - \hat{\rho}_i\, G_{t-1}) = \beta_1(1-\hat{\rho}_i) + \beta_2(Pg_t - \hat{\rho}_i\, Pg_{t-1}) + \beta_3(R_t - \hat{\rho}_i\, R_{t-1}) + \beta_4(Ps_t - \hat{\rho}_i\, Ps_{t-1}) + \beta_5(G_{t-1} - \hat{\rho}_i\, G_{t-2}) + \varepsilon_t$$

y se toma como estimación final de ρ y $\beta_i \quad i = 1, \ldots, 5$ a la obtenida para la estimación con menor SCR.

9. El estimador de MCGF utilizado es no lineal y sesgado pero sin embargo, al considerar las propiedades asintóticas, se tiene que es consistente y asintóticamente eficiente, además de tener una distribución asintótica conocida válida para hacer inferencia asintótica. Por tanto el estadístico propuesto es válido para contrastar la significatividad del retardo de la variable endógena. Dados los resultados mostrados:

$$\left| \frac{\hat{\beta}_5 - 0}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_5)} \right| = \frac{0{,}175}{0{,}103} = 1{,}69 < 1{,}96 = \mathcal{N}(0,1)_{0{,}025}$$

luego no rechazamos la hipótesis nula para $\alpha = 5\,\%$ y la variable no es significativa por lo que no debemos incluirla como regresor en el modelo.

Solución PRÁCTICA P22.

1. El gráfico de los residuos frente a la variable $YEARS$ muestra como la dispersión de éstos aumenta conforme aumentan los valores de la variable $YEARS$. Podemos sospechar que la varianza de la perturbación no es constante sino creciente con la variable $YEARS$. En caso de que exista heterocedasticidad el estimador MCO no es de varianza mínima y los estadísticos-t mostrados no son válidos para hacer inferencia ya que están calculados en base a $\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$, estimador sesgado e inconsistente de $V(\hat{\beta}_{MCO})$. Luego debemos contrastar si la varianza de la perturbación es o no constante. Se nos proporciona la regresión auxiliar del contraste de Breusch-Pagan para el supuesto de que $Var(u_i) = f(\alpha_1 + \alpha_2 YEARS_i)$ y con ella realizamos el contraste:

$$\begin{array}{l} H_0 : Var(u_i) = \sigma^2 \ \ \forall i \\ H_0 : Var(u_i) = \sigma_i^2 = f(\alpha_1 + \alpha_2 YEARS_i) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(p).$$

   $BP = 13{,}99 > 3{,}84 = \mathcal{X}^2(1)_{0{,}05}$, rechazamos la hipótesis nula para $\alpha = 5\,\%$ y, por tanto, debemos considerar que $Var(u_i) = \sigma_i^2$. Luego para hacer el contraste pedido debemos usar un estimador consistente de $V(\hat{\beta}_{MCO})$, como es el estimador de White, $\hat{V}(\hat{\beta}_{MCO})_W$, para que el estadístico esté bien definido. Así contrastamos

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCO})_W} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

   El valor muestral del estadístico es $\left|\frac{1{,}4911}{0{,}0958}\right| = 15{,}5647 > 1{,}96 = \mathcal{N}(0,1)_{0{,}025}$ luego se rechaza la hipótesis nula y la variable $YEARS$ es significativa.

2. Se usa como ponderación a $1/YEARS_i^2$ lo que implica que se está suponiendo $Var(u_i) = \sigma^2 YEARS_i^2$. Si nos fijamos en el gráfico la dispersión de los residuos aumenta conforme aumentan los valores de YEARS y para las últimas observaciones, vuelve a reducirse, tal y como implica la forma funcional elegida para la varianza de la perturbación, que es cuadrática.

3.

$$E(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad E(uu') = \sigma^2 \begin{bmatrix} YEARS_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & YEARS_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & YEARS_{222}^2 \end{bmatrix}$$

4. El método de estimación utilizado es Mínimos Cuadrados Ponderados, es decir Mínimos Cuadrados Generalizados para el caso de heterocedasticidad. Este método de estimación permite obtener estimadores de los parámetros de interés lineales e insesgados con varianza mínima bajo el supuesto de perturbaciones no esféricas. Luego se pretende reducir la varianza de los estimadores frente a la obtenida con MCO, que bajo perturbaciones no esféricas no es un estimador de varianza mínima.
   Para que el estimador de MCG sea lineal e insesgado es necesario que la matriz de regresores sea no estocástica y que $E(u_i) = 0 \; \forall i$ y para que la varianza sea mínima es necesario que $E(uu') = \sigma^2\Omega$ con Ω conocida y tal que la forma funcional supuesta para $Var(u_i)$ sea correcta, adecuada a la información muestral disponible, conocida y no dependa de ningún parámetro desconocido salvo en todo caso por un factor de escala.

Solución PRÁCTICA P23.

1. El gráfico de la izquierda muestra la relación entre la variable endógena y la exógena, dibuja los pares $(totexp_i, foodexp_i)$. Muestra como la dispersión de la variable endógena $foodexp$ aumenta conforme aumentan los valores de la variable exógena $totexp$. Bajo el supuesto de regresores no estocásticos esto supone que $Var(foodexp_i) = Var(u_i)$, luego la varianza de u_i no sería constante sino función creciente con $totexp$. Además se muestra el ajuste mínimo cuadrático. Con respecto a éste podemos observar como hasta valores de $totexp$ de aproximadamente 600 rupias el ajuste minimocuadrático es bueno sin embargo en adelante, cuando aumenta la dispersión en $foodexp$ de forma considerable el ajuste ya no es bueno y el incremento en el valor y dispersión de los residuos es considerable.
   El gráfico de la derecha muestra los residuos MCO frente a $totexp$, es decir, el diagrama de dispersión para los pares $(totexp_i,\; \hat{u}_{i,MCO})$. Se puede observar como la dispersión de los residuos aumenta conforme aumentan los valores de $totexp$ sobre todo del valor 600 en adelante para $totexp$. Ambos gráficos muestran la misma información y arrojan la misma sospecha, que la varianza de u_i no es constante sino creciente con $totexp$. Podemos usar el contraste de Goldfeld y Quandt cuyos datos nos proporcionan en el enunciado para contrastar esta sospecha:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{array}\right\} \qquad GQ = \frac{\hat{u}_2'\hat{u}_2/N_2 - K}{\hat{u}_1'\hat{u}_1/N_1 - K} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}(N_2 - K,\, N_1 - K)$$

   donde $\hat{u}_i'\hat{u}_i \quad i = 1, 2$ es la SCR_i obtenida de regresar por MCO el Modelo P23.1 en las primeras y últimas 18 observaciones de la muestra ordenada en función creciente de *totexp*. Por tanto, $K = 2, N_1 = N_2 = 18$.

$$GQ = \frac{103821,1/18-2}{16127,92/18-2} = 6,43 > 2,33 = \mathcal{F}(16,16)_{0,05}$$

luego rechazamos la hipótesis nula un nivel de significatividad $\alpha = 5\,\%$ y consideramos que $Var(u_i) = \sigma_i^2 = f(totexp_i)\ f' > 0$. No se cumple una de las hipótesis básicas sobre la perturbación del modelo. La perturbación no es homocedástica sino heterocedástica, es decir, la varianza no es constante. Por lo demás, podemos pensar que $E(u_i) = 0\ \forall i$ y no podemos contrastar la existencia de autocorrelación, luego mantendremos el supuesto inicial de que $E(u_i u_j) = 0\ \ \forall i, j\ i \neq j$.

2. No. El estimador MCO bajo heterocedasticidad no es de varianza mínima dado que $u \sim (0, \sigma^2\Omega)$ por lo que $V(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$. Los estadísticos-t mostrados están calculados en base a la expresión $\frac{\hat{\beta}_{i,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})}$ donde $\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})$ se busca en el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}_{MCO}$ calculado como $\hat{V}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ que es sesgado e inconsistente si u_i es heterocedástica. Por tanto los estadísticos-t mostrados no siguen la distribución t-Student habitual y por tanto no son válidos para hacer inferencia.

3. De la estimación de MCP se deriva que el supuesto que hace el analista sobre la varianza de la perturbación es $Var(u_i) = \sigma^2\, totexp_i\ \ i = 1, \ldots, 55$ dado que toma como variable de ponderación a $1/totexp_i$. El modelo transformado correspondiente es:

$$\frac{foodexp_i}{\sqrt{totexp_i}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{totexp_i}} + \beta_2\sqrt{totexp_i} + \frac{u_i}{\sqrt{totexp_i}} \quad i = 1, \ldots, 55.$$

Las propiedades de la perturbación del modelo transformado son:

$$E\left(\frac{u_i}{\sqrt{totexp_i}}\right) = \frac{E(u_i)}{\sqrt{totexp_i}} = 0 \quad \forall i,$$
$$Var\left(\frac{u_i}{\sqrt{totexp_i}}\right) = E\left(\frac{u_i}{\sqrt{totexp_i}} - 0\right)^2 = \frac{E(u_i)^2}{(\sqrt{totexp_i})^2} = \frac{\sigma^2 totexp_i}{totexp_i} = \sigma^2 \quad \forall i,$$
$$Cov\left(\frac{u_i}{\sqrt{totexp_i}}, \frac{u_j}{\sqrt{totexp_j}}\right) = \frac{E(u_i u_j)}{\sqrt{totexp_i}\sqrt{totexp_j}} = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j.$$

4. *a*) Se usa como ponderación a $1/totexp_i$ lo que implica que se está suponiendo $Var(u_i) = \sigma^2 totexp_i$. Si nos fijamos en el gráfico la dispersión de los residuos aumenta conforme aumentan los valores de *totexp* y sobretodo a partir del valor 550 para *totexp* y la forma funcional elegida para la varianza de la perturbación recoge este crecimiento. Por tanto sí parece adecuada.

b) El método de estimación utilizado es Mínimos Cuadrados Ponderados, es decir Mínimos Cuadrados Generalizados para el caso de heterocedasticidad. Este método de estimación permite obtener estimadores de los parámetros de interés lineales e insesgados con varianza mínima bajo el supuesto de perturbaciones no esféricas. Luego se pretende reducir la varianza de los estimadores frente a la obtenida con MCO, que bajo perturbaciones no esféricas no es un estimador de varianza mínima.
Para que el estimador de MCG sea lineal e insesgado es necesario que la matriz de regresores sea no estocástica y que $E(u_i) = 0 \; \forall i$ y para que la varianza sea mínima es necesario que $E(uu') = \sigma^2\Omega$ con Ω conocida y tal que la forma funcional supuesta para $Var(u_i)$ sea correcta. Asimismo, ha de ser adecuada a la información muestral disponible, conocida y no depender de ningún parámetro desconocido salvo, en todo caso, por un factor de escala.

5. En el Modelo P23.1 la perturbación es heterocedástica luego el supuesto que debemos contrastar en el Modelo P23.2 es la existencia de homocedasticidad en la perturbación v_i. Para ello utilizaremos el contraste de Breusch-Pagan ya que disponemos de información sobre él en la ecuación auxiliar estimada donde $\hat{v}_i$ son los residuos MCO de la regresión MCO del Modelo P23.2.

$$\begin{array}{l} H_0 : E(v_i^2) = \sigma^2 \; \forall i \\ H_a : E(v_i^2) = f(\alpha_1 + \alpha_2 totexp_i) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(p)$$

siendo SCE la correspondiente a la regresión auxiliar mostrada,

$$SCE = SCT - SCR = 115,31 - 112,7172 = 2,60105.$$

$BP = 1,30 < 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$ luego no rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación del 5 % y $E(v_i^2) = \sigma^2 \; \forall i$. Por tanto, la perturbación tiene varianza constante luego en el Modelo P23.2 se cumplen las hipótesis básica sobre v_i ya que además podemos suponer $E(v_i) = 0 \; \forall i$ y $E(v_i v_j) = 0 \; \forall i, j \;\; i \neq j$.

6. Sí. En el Modelo P23.1 la varianza de la perturbación no es constante sin embargo en el Modelo P23.2 sí lo es. La diferencia entre ambos modelos es el cambio en la forma funcional en la relación entre las dos variables, luego la razón de la existencia de heterocedasticidad en el Modelo P23.1 parece deberse a una mala especificación de la forma funcional entre las variables $foodexp$ y *totexp* que no es lineal como se supone en el Modelo P23.1, sino exponencial como se recoge en el Modelo P23.2. Además como en este modelo la perturbación es esférica y suponemos al regresor no estocástico, el estimador adecuado es MCO. Este estimador es lineal, insesgado y de varianza mínima que permite hacer inferencia en muestras finitas con los estadísticos t con distribución t-Student y F con distribución F-Snedecor habituales si la distribución de la perturbación es conocida y normal.

Sin embargo si hubiese elegido estimar el Modelo P23.1 por MCP estaría imponiendo una mala forma funcional en la relación entre la variable endógena y exógena y su estimación no sería adecuada.

7. No, no recogen el mismo efecto. En el Modelo P23.1 se especifica una relación lineal luego la pendiente recoge el cambio esperado en el gasto realizado en alimentación cuando el gasto total se incrementa en una rupia, $\beta_2 = \dfrac{\partial E(foodexp_i)}{\partial totexp_i}$.
Sin embargo en el Modelo P23.2 se especifica una relación exponencial por lo que el coeficiente de pendiente α_2 se interpreta como una semielasticidad ya que

$$\alpha_2 = \frac{\partial E(Ln(foodexp_i))}{\partial totexp_i} = \frac{\partial foodexp_i}{\partial totexp_i} \times \frac{1}{foodexp_i}.$$

En este caso un aumento de una rupia en el gasto total implica un aumento porcentual del $100\alpha_2\,\%$ en el gasto en alimentación.

Solución PRÁCTICA P24.

1. El modelo de interés tiene como regresor una variable no observable *exper* y se utiliza como aproximación a la misma a la variable *educ* luego el modelo estimable es:

$$Ln(wage)_i = \beta_1 + \beta_2(educ_i - \epsilon_i) + v_i.$$
$$Ln(wage)_i = \beta_1 + \beta_2\, educ_i + \underbrace{(v_i - \beta_2\epsilon_i)}_{u_i} \quad \text{Modelo P24.2}$$

La perturbación del modelo es esférica y tal que $u_i \sim iid(0, \sigma_v^2 + \beta_2^2\sigma_\epsilon^2)$. El modelo tiene un regresor estocástico: $educ_i$ ya que éste depende de la variable aleatoria ϵ_i. Estudiamos la relación entre el regresor estocástico y la perturbación del modelo estimable:

$$\begin{aligned} E(educ_i u_i) = E[(exper_i + \epsilon_i)u_i] &= E(exper_i u_i) + E(\epsilon_i u_i) = \\ &= E(exper_i u_i) + E[\epsilon_i(v_i - \beta_2\epsilon_i)] = \\ &= exper_i E(u_i) + E(\epsilon_i v_i) - \beta_2 E(\epsilon_i^2) = \\ &= exper_i \times 0 \;+\; 0 - \beta_2\sigma_\epsilon^2 = -\beta_2\sigma_\epsilon^2 \neq 0 \end{aligned}$$

luego el regresor estocástico y la perturbación del modelo a estimar están correlacionados.

El estimador de MCO en muestras finitas es no lineal en u ya que la matriz de regresores es estocástica al incluir el regresor estocástico *educ*. Además es sesgado ya que el regresor estocástico no es independiente de u sino que está correlacionado con ella, $E(educ_i u_i) = -\beta_2 \sigma_\epsilon^2 \neq 0$. En muestras grandes el estimador es inconsistente. El teorema de Mann y Wald no se cumple ya que $E(X'u) \neq 0$, además $plim \frac{X'u}{N} \neq 0$ luego $plim \hat{\beta}_{MCO} = \beta + Q^{-1} \times plim \frac{X'u}{N} = \beta +$ [sesgo asintótico] $\neq \beta$ luego el estimador es inconsistente.

2. Un estimador alternativo al de MCO y consistente es el de Variables Instrumentales. El estimador VI se define $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'Y$ y su distribución asintótica es

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{VI} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 Q_{ZX}^{-1} Q_{ZZ} (Q_{ZX}^{-1})').$$

El estimador de VI es no lineal y sesgado pero consistente si el instrumento utilizado es adecuado.
En este ejemplo podemos utilizar como instrumento para la variable *educ* a la variable *near*. En este caso el instrumento es adecuado ya que el rango de $(Z'X)$ es completo lo que permite calcular la inversa $(Z'X)^{-1}$, además $E(near_i u_i) = 0$ ya que *near* es una variable no estocástica por ser una variable ficticia y $E(u_i) = 0 \ \forall i$ por lo que $E(near_i u_i) = near_i E(u_i) = 0$. Además, podemos suponer que $E(near_i educ_i) \neq 0$. Luego $plim \frac{Z'u}{N} = 0 \Longrightarrow plim \hat{\beta}_{VI} = \beta$.

3.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}_{VI} &= \begin{bmatrix} N & \sum educ_i \\ \sum near_i & \sum educ_i near_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Ln(wage)_i \\ \sum Ln(wage)_i near_i \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3010 & 39923 \\ 2053 & 27771 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18848,1140 \\ 12957,3066 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{1628791} \begin{bmatrix} 27771 & -39923 \\ -2053 & 3010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18848,1140 \\ 12957,3066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,767 \\ 0,1881 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Para contrastar la importancia del error de medida utilizamos el contraste de Hausman:

$$\begin{array}{l} H_0 : E(educ_i u_i) = 0 \\ H_a : E(educ_i u_i) \neq 0 \end{array} \qquad H = \frac{\left(\hat{\beta}_2^{VI} - \hat{\beta}_2^{MCO}\right)^2}{\widehat{Var}(\hat{\beta}_2^{VI}) - \widehat{Var}(\hat{\beta}_2^{MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1).$$

$$H = \frac{(0,1881 - 0,052)^2}{0,0007104 - 0,00000784} = \frac{0,018523}{0,00070256} = 26,36 > 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$$

luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significatividad del 5 %. El problema de error de medida es importante, $E(educ_i u_i) \neq 0$ y el modelo debe ser estimado por VI que es consistente mientras que si utilizamos MCO el estimador es inconsistente.

5. Podemos realizar el siguiente contraste:

$$\begin{array}{l} H_0: \beta_2 = 0 \\ H_a: \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,VI}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,VI})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

Evaluado en la muestra:

$$\left| \frac{0,1881}{\sqrt{0,3101 \times 2,2291 \cdot 10^{-3}}} \right| = 7,153 > 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0,025}$$

luego rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación del 5 % y la variable experiencia es significativa.

Solución PRÁCTICA P25.

1.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCO}))}{\widehat{LC}_t} = \underset{(0,7697)}{-4,7862} - \underset{(0,01696)}{0,1067}\, LPg_t + \underset{(0,1271)}{0,8101}\, LR_t + \underset{(0,0791)}{0,5345}\, LC_{t-1}.$$

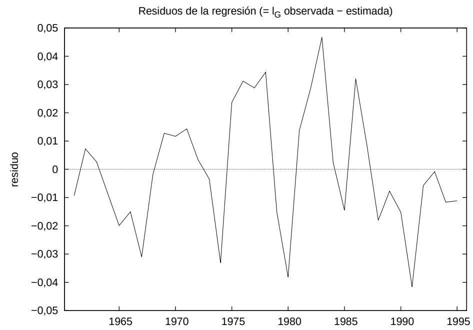
2. En este contexto, muestras finitas significa obtener las propiedades del estimador (media, varianza, distribución) dado un tamaño muestral T. En el modelo aparece como regresor la variable endógena retardada, LC_{t-1} por lo que la matriz de regresores X es estocástica y no es independiente del vector de perturbaciones u. Esto implica que el estimador MCO tiene las siguientes propiedades para muestras finitas:

   a) No lineal, ya que es una función no lineal de la matriz X que es estocástica o aleatoria, y el vector u: $\hat{\beta}_{MCO} = \beta + (X'X)^{-1} X'u$.

   b) Sesgado, ya que la matriz X no es independiente del vector u. Esto implica que

   $$E(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta + E\left[(X'X)^{-1}(X'u)\right] \neq \beta$$

   ya que $E\left[(X'X)^{-1}(X'u)\right]$ depende de la distribución conjunta de X y u y no tiene porqué ser cero, aún cuando $E(u) = 0$.



c) No conocemos en general la expresión del sesgo, ni de la matriz de varianzas y covarianzas, así como tampoco su distribución exacta.

3. Gráfico de residuos MCO frente al tiempo:

   El gráfico muestra la evolución de los residuos a lo largo del tiempo. Los residuos están centrados en torno a su media, cero, como corresponde a un modelo con término independiente. Se puede observar agrupamientos de residuos del mismo signo seguidos de agrupamientos de residuos de signo contrario, alternándose a lo largo de toda la muestra. Este comportamiento es compatible con la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden y signo positivo en la perturbación. Con respecto a la dispersión de los residuos, esta es más o menos constante.

4. A la vista del gráfico debemos pensar en contrastar la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden en la perturbación. Para ello disponemos del valor de dos estadísticos. El estadístico de Durbin-Watson no es válido en presencia de regresores estocásticos como LC_{t-1} mientras el estadístico de Breusch-Godfrey sí, por lo que utilizaremos este último:

   a)
$$H_0: \quad u_t = \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\epsilon) \qquad\qquad BG = T \times R^2 \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{X}^2(1)$$
$$H_a: \quad \begin{cases} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \epsilon_t \\ u_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{cases}$$

   donde R^2 es el coeficiente de determinación obtenido de la estimación MCO de la siguiente regresión auxiliar
$$\hat{u}_t = \alpha_1 + \alpha_2 LPg_t + \alpha_3 LR_t + \alpha_4 LC_{t-1} + \alpha_5 \hat{u}_{t-1} + v_t.$$

   b) Regresión auxiliar estimada:
$$\widehat{\hat{u}_t} \;=\; -0,3708 - 0,0034\, LPg_t + 0,0716\, LR_t - 0,0519\, LC_{t-1} + 0,3871\, \hat{u}_{t-1}.$$
$$R^2 = 0,1341 \qquad t = 1961, \ldots, 1995$$

Valor muestral del estadístico $= TR^2 = 35 \times 0,1341 = 4,6935$.
Valor crítico para un nivel de significación ($\alpha = 5\,\%$) $= 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$.
Aplicación de la regla de decisión:
Como $TR^2 = 4,6935 > 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$ se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación frente a la alternativa de que la perturbación sigue un proceso AR(1) o MA(1).

5. LC_{t-1} y u_t no son independientes, ya que LC_{t-1} es función de $u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots$ y todos sus retardos. Del resultado del contraste realizado en el apartado anterior junto con el gráfico de residuos podemos concluir que la perturbación sigue un proceso AR(1) luego $E(u_t u_{t-1}) \neq 0$. Por tanto u_t también es función de u_{t-1} por lo que LC_{t-1} y u_t están correlacionados: $E(LC_{t-1}u_t) \neq 0$.

6. En este caso no se cumple el teorema de Mann y Wald ya que, por un lado, la perturbación no es esférica y, por otro, $E(LC_{t-1}u_t) \neq 0 \Longrightarrow E(X'u) \neq 0$.
El estimador de MCO es inconsistente ya que: $E(X'u) \neq 0 \Rightarrow plim\frac{X'u}{T} \neq 0$ luego:

$$\begin{aligned} plim\hat{\beta}_{MCO} &= \beta + \underbrace{plim\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}}_{Q^{-1}} \underbrace{plim\frac{X'u}{T}}_{\neq 0} = \\ &= \beta + \quad Q^{-1} \quad \neq 0 \quad \neq \beta. \end{aligned}$$

En cuanto a la distribución asintótica, dado que el Teorema de Mann y Wald no se satisface, no tenemos el resultado $\frac{X'u}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 Q)$, por lo que tampoco se satisface que

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_u^2 Q^{-1}).$$

7.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MC2E}))}{\widehat{LC}_t} = \underset{(1{,}0614)}{-6,8528} - \underset{(0{,}0207)}{0,1306}\, LPg_t + \underset{(0{,}1811)}{1,1875}\, LR_t + \underset{(0{,}1157)}{0,2821}\, LC_{t-1}.$$

a) El método de estimación utilizado es MC2E que es un estimador de Variables Instrumentales. En esta situación hay más instrumentos que variables que lo necesitan. La lista de instrumentos utilizados es 1, LPg_t, LPg_{t-1}, LR_t, LR_{t-1}. Esta lista indica que como instrumentos para LC_{t-1} disponemos de los primeros retardos de los dos regresores no estocásticos LPg_{t-1} , LR_{t-1} y el resto de instrumentos 1 , LPg_t , LR_t actúan como instrumentos de sí mismos.
Dado que hay más instrumentos que variables que lo necesitan se genera el instrumento más correlado con LC_{t-1} mediante la estimación por MCO de la siguiente regresión auxiliar:

$$LC_{t-1} = \gamma_1 + \gamma_2 LPg_t + \gamma_3 LR_t + \gamma_4 LPg_{t-1} + \gamma_5 LR_{t-1} + \eta_t.$$

A continuación se utiliza a $\widehat{LC}_{t-1}$ como instrumento para LC_{t-1} y estima por VI

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'Y$$

donde:

$$\begin{aligned} X &= [\vec{1}\ \ L\vec{P}g_t\ \ L\vec{R}_t\ \ L\vec{C}_{t-1}] \\ Z &= [\vec{1}\ \ L\vec{P}g_t\ \ L\vec{R}_t\ \ \vec{\widehat{LC}}_{t-1}] \\ Y &= [L\vec{C}_t] \end{aligned}$$

donde $\vec{\ }$ denota un vector columna. De esta forma, la matriz $(Z'X)$ es cuadrada, de rango completo y $\exists (Z'X)^{-1}$ ya que no hay colinealidad exacta en las columnas de Z ni en las de X, lo que permite que $|Z'X| \neq 0$ y exista la inversa.

b)

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & LPg_2 & LR_2 & \widehat{LC}_1 \\ 1 & LPg_3 & LR_3 & \widehat{LC}_2 \\ 1 & LPg_4 & LR_4 & \widehat{LC}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & LPg_{35} & LR_{35} & \widehat{LC}_{34} \\ 1 & LPg_{36} & LR_{36} & \widehat{LC}_{35} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\beta}_{MC2E} = \begin{bmatrix} 35 & \sum_{t=2}^{36} LPg_t & \sum_{t=2}^{36} LR_t & \sum_{t=2}^{36} LC_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{36} LPg_t & \sum_{t=2}^{36} LPg_t^2 & \sum_{t=2}^{36} LPg_t LR_t & \sum_{t=2}^{36} LPg_t LC_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{36} LR_t & \sum_{t=2}^{36} LR_t LPg_t & \sum_{t=2}^{36} LR_t^2 & \sum_{t=2}^{36} LR_t LC_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{36} \widehat{LC}_{t-1} & \sum_{t=2}^{36} \widehat{LC}_{t-1} LPg_t & \sum_{t=2}^{36} \widehat{LC}_{t-1} LR_t & \sum_{t=2}^{36} \widehat{LC}_{t-1} LC_{t-1} \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^{36} LC_t \\ \sum_{t=2}^{36} LPg_t LC_t \\ \sum_{t=2}^{36} LC_t LR_t \\ \sum_{t=2}^{36} \widehat{LC}_{t-1} LC_t \end{bmatrix}$$

c) Los instrumentos son adecuados si:

i) El rango de la matriz $(Z'X)$ es completo lo que implica que $\exists (Z'X)^{-1}$. En este caso se cumple ya que no hay colinealidad exacta en las columnas de Z ni en las de X luego $|Z'X| \neq 0$.

ii) Están incorrelados con la perturbación y lo están ya que son retardos de regresores no estocásticos y $E(u_t) = 0 \; \forall t$:

$$E(LPg_{t-1}u_t) = LPg_{t-1}E(u_t) = 0,$$
$$E(LR_{t-1}u_t) = LR_{t-1}E(u_t) = 0.$$

iii) Están correlacionados con la variable para la cual hacen de instrumento, lo cual es de esperar si notamos que

$$LC_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 LPg_{t-1} + \beta_3 LR_{t-1} + \beta_4 LC_{t-2} + u_{t-1}$$

luego es sensato pensar que:

$$E(LPg_{t-1}LC_{t-1}) \neq 0, \qquad E(LR_{t-1}LC_{t-1}) \neq 0.$$

Dado que se cumplen i), ii) y iii) los instrumentos son adecuados.

d) Las desviaciones típicas mostradas no son adecuadas porque provienen de un estimador consistente de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica de $\widehat{\beta}_{MC2E}$ bajo el supuesto de que las perturbaciones son un ruido blanco, es decir, que no presenten autocorrelación. Este supuesto, como hemos visto en el cuarto apartado, se rechaza frente a la alternativa de autocorrelación. Por esa razón, $\widehat{\beta}_{MC2E}$ tampoco es asintóticamente eficiente, sino simplemente consistente.

8.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{HL}))}{\widehat{LC}_t} = \underset{(0{,}0833)}{-0,4272} - \underset{(0{,}0324)}{0,2317}\, LPg_t + \underset{(0{,}2197)}{0,6430}\, LR_t + \underset{(0{,}0888)}{0,1090}\, LC_{t-1}.$$

a) El estimador de Hildreth-Lu es un estimador de MCGF que tiene en cuenta el proceso de autocorrelación en el término de perturbación. Dado que la estimación del parámetro ρ se basa en una red de búsqueda, el estimador de β es un estimador consistente y asintóticamente eficiente. En cambio, el procedimiento de Cochrane-Orcutt parte de un estimador de ρ inicial utilizando los residuos MCO, por lo que no es consistente y tampoco lo es el estimador de β así obtenido. La modificación sería utilizar los residuos de estimar por VI el vector β para obtener el estimador inicial del parámetro ρ. Este estimador sí será consistente y el estimador de β basado en él también, además de asintóticamente eficiente.

b) Contrastamos:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_3 = 1 \\ H_a : \beta_3 \neq 1 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{3,HL} - 1}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{3,HL})} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

El resultado obtenido mediante Gretl es:

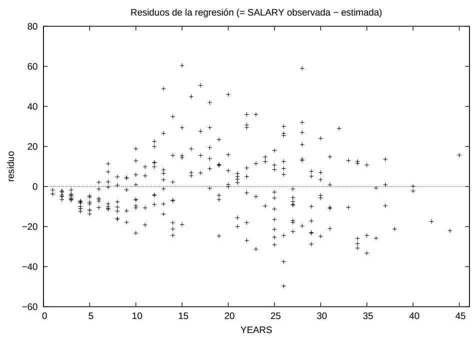
Estadístico de contraste: $F(1,30) = 2,64066$, con valor p $= 0,114621$.

Dado que se trata de un contraste de una única restricción, este estadístico F es el cuadrado del estadístico t, y su distribución asintótica bajo la hipótesis nula es una $\mathcal{X}^2(1)$:

$$F = \left(\frac{\hat{\beta}_{3,HL} - 1}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{3,HL})} \right)^2 = \left(\frac{0,6430 - 1}{0,2197} \right)^2 = 2,6404 < 3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$$

por lo que se rechaza la hipótesis nula de que la elasticidad renta es igual a la unidad.

Solución PRÁCTICA P26.



1. El gráfico de los residuos frente a la variable $YEARS$ muestra como la dispersión de estos aumenta conforme aumentan los valores de la variable $YEARS$ especialmente hasta el valor de $YEARS = 35$ donde comienza a decrecer. Podemos sospechar que la varianza de la perturbación no es constante sino función de la variable $YEARS$.

2. Como hemos comentado en el apartado anterior, el gráfico de residuos sugiere la existencia de heterocedasticidad, por lo que el estimador MCO no es de varianza mínima y los estadísticos-t para hacer inferencia, si están calculados en base a $\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$, no son válidos ya que éste último sería un estimador sesgado e inconsistente de $V(\hat{\beta}_{MCO})$.

   Debemos contrastar si la varianza de la perturbación es o no constante. Utilizamos el contraste de Breusch-Pagan para el supuesto de que $Var(u_i) = f(\alpha_1 + \alpha_2 YEARS_i)$ y con él realizamos el contraste:

   $$\begin{array}{l} H_0 : Var(u_i) = \sigma^2 \ \forall i \\ H_a : Var(u_i) = \sigma_i^2 = f(\alpha_1 + \alpha_2 YEARS_i) \end{array} \qquad BP = \frac{SCE}{2} \xrightarrow{H_0,d} \mathcal{X}^2(p).$$

La regresión auxiliar estimada es:

$$\frac{\widehat{\hat{u}_i^2}}{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{N}} = 0,395 + 0,0334\, YEARS_i + \hat{\epsilon}_i \qquad SCE = 27,98. \tag{P26.1}$$

Por lo tanto el valor muestral del estadístico es $BP = 13,99$ mayor que el valor de la distribución $3,84 = \mathcal{X}^2(1)_{0,05}$ luego rechazamos la hipótesis nula para $\alpha = 5\,\%$.
Para hacer el contraste pedido debemos usar un estimador consistente de $V(\hat{\beta}_{MCO})$, como es el caso de $\widehat{V}(\hat{\beta}_{MCO})_W$, para que el estadístico esté bien definido. Los resultados útiles para realizar el contraste son los siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{SALARY}_i & = & 52,2375 & + & 1,4911 & YEARS_i & R^2 = 0,4393. \\ \widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO}) & & (2,3728) & & (0,1135) & & \\ \widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,MCO})_W & & (1,6376) & & (0,0958) & & \end{array}$$

Contrastamos

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{array} \qquad t = \frac{\hat{\beta}_{2,MCO}}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_{2,MCO})_W} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1.)$$

De forma que la regla de decisión, basada en el valor muestral del estadístico, resulta $\left|\frac{1,4911}{0,0958}\right| = 15,5647 > 1,96 = \mathcal{N}(0,1)_{0,025}$, luego se rechaza la hipótesis nula y la variable $YEARS$ es significativa.

3. Si nos fijamos en el gráfico, la dispersión de los residuos aumenta conforme aumentan los valores de YEARS y para las últimas observaciones, vuelve a reducirse. Por lo tanto, podemos proponer una relación simplemente lineal con YEARS u otra cuadrática[24], esto es:

   a)
   - Forma funcional propuesta, Alternativa A: $Var(u_i) = \alpha_1 + \alpha_2 YEARS_i$
   - Forma funcional propuesta, Alternativa B: $Var(u_i) = \alpha_1 + \alpha_2 YEARS_i^2$

   b) En ambos casos, una vez estimados los parámetros de los que depende $Var(u_i)$, tenemos:

$$\text{Criterio de estimación: } \min_{\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{i=222} (Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^*)^2$$

$$Y_i^* = \frac{SALARY_i}{\hat{\sigma}_i}; \qquad X_{1i}^* = \frac{1}{\hat{\sigma}_i}; \qquad X_{2i}^* = \frac{YEARS_i}{\hat{\sigma}_i};$$

[24] La especificación más general $Var(u_i) = \alpha_1 + \alpha_2 YEARS_i + \alpha_3 YEARS_i^2$ predice valores negativos para $Var(u_i)$, por lo que se ha descartado.

$$\widehat{\beta}_{MCGF} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{222} X_{1i}^{*2} & \sum_{i=1}^{222} X_{1i}^{*} X_{2i}^{*} \\ \\ \sum_{i=1}^{222} X_{1i}^{*} X_{2i}^{*} & \sum_{i=1}^{222} X_{2i}^{*2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{222} X_{1i}^{*} Y_i^{*} \\ \\ \sum_{i=1}^{222} X_{2i}^{*} Y_i^{*} \end{bmatrix}$$

c) Para cada caso, tenemos los siguientes resultados:

- Regresión auxiliar Alternativa A:

$$\hat{\sigma}_i^2 = 125,931 + 10,6663\, YEARS_i.$$

- Regresión auxiliar Alternativa B:

$$\hat{\sigma}_i^2 = 237,440 + 0,1847\, YEARS_i^2.$$

d) Los resultados de la estimación por MCGF depende de cada alternativa utilizada como ponderación. Así tenemos:

- Alternativa A, Función de regresión muestral obtenida:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCGF}))}{\widehat{SALARY}_i} = \underset{(1{,}8630)}{49,3397} + \underset{(\ 0{,}1075)}{1,6520}\, YEARS_i.$$

- Alternativa B, Función de regresión muestral obtenida:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{MCGF}))}{\widehat{SALARY}_i} = \underset{(2{,}1589)}{50,6827} + \underset{(\ 0{,}1154)}{1,5943}\, YEARS_i.$$

Material de estudio

A continuación seleccionamos material de interés para el estudio de la econometría, tanto básica como avanzada, para consultar sobre aspectos teóricos y prácticos.

Libros:

Alegre, J., J. Arcarons, C. Bolancé y L. Díaz, (1995), *Ejercicios y Problemas de Econometría*, Colección Plan Nuevo, ediciones AC.

Davidson, R. y J.G Mackinnon, (2004), *Econometric Theory and Methods*, Oxford University Press.

Dougherty, C., (2006), *Introduction to Econometrics*, Oxford University Press.

Fernández, A., P. González, M. Regúlez, P. Moral y V. Esteban, (2005), *Ejercicios de Econometría*, McGraw-Hill.

Greene, W., (1998), *Análisis Econométrico*, Prentice Hall.

Gujarati, D. y D.C. Porter (2009), *Econometría*, McGraw-Hill.

Hill, R.C., W.E. Griffiths y G.G. Judge, (2001), *Undergraduate Econometrics*, John Wiley and Sons, Inc., England.

Johnston, J., (1984), *Métodos de Econometría*, Vicens Vivens.

Maddala, G.S., (1996), *Introducción a la Econometría*, Pearson: Prentice Hall.

Pindyck, R.S. y D.L. Rubinfeld, (1998), *Econometric Models and Economic Forecast*, McGraw-Hill.

Pérez, C., (2006), *Problemas Resueltos de Econometría*, Thomson.

Pulido, A. y J. Pérez, (2001), *Modelos Econométricos*, Pirámide.

Ramanathan, R., (2002), *Introductory Econometrics with applications*, South-Western.

Stock, J.H. y M.W. Watson (2006) *Introduction to Econometrics*, Addison-Wesley.

Verbeek, M., (2008), *A Guide to Modern Econometrics*, John Wiley and Sons.

White, H., (1999), *Asymptotic Theory for Econometricians*, South-Western.

Wooldridge, J.M., (2003), *Introductory Econometrics: A modern Approach*, Academic Press.

Lecturas:

Breusch, T. S. y Pagan, A. R. (1979), A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation, *Econometrica*, 47, pp. 1287-1294.

Goldfeld, S. M. y Quandt, R. E. (1965), Some Test for Homoscedasticity, *Journal of the American Statistical Association*, 60, pp. 539-547.

Harvey, A., y Phillips, G. (1974), A Comparison of the Power of Some Test for Heteroscedasticity in the General Linear Model, *Journal of Econometrics*, 2, pp. 307-316.

White, H. (1980), A heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity, *Econometrica*, 48, pp. 817-838.

Bibliografía

Davidson, R. y J.G. Mackinnon, (2004), *Econometric Theory and Methods*, Oxford University Press.

Esteban, M. V., M. Regúlez y J.I. Modroño, (2011) *Métodos Econométricos y Análisis de Datos* Publicación online: http://ocw2010.ehu.es/ciencias-sociales-y-juridicas/, Ed. Proyecto Open Course Ware (OCW) Publicación en abierto de Materiales Universitarios y Servicios Editoriales de la UPV/EHU, Leioa.

Esteban, M. V. y M. Regúlez, (2010), *Análisis de datos: un enfoque econométrico*, Publicación online: Sarriko - On Line 04/10 en http://www.sarriko-online.com, Ed. F. de C.C. Económicas y Empresariales (UPV/EHU), Bilbao.

Esteban, M. V., M.P. Moral, S. Orbe, M. Regúlez, A. Zarraga y M. Zubia, (2008), *Econometría básica aplicada con Gretl* Publicación online: Sarriko On Line 08/09 en http://www.sarriko-online.com, Ed. F. de CC. Económicas y Empresariales (UPV/EHU), Bilbao.

Fernández Macho, J. y P. González Casimiro, (2009), *Introducción a la Econometría*, Publicación online: http://ocw.ehu.es/ciencias-sociales-y-juridicas, Proyecto Open Course Ware (OCW) Publicación en abierto de Materiales Universitarios y Servicio Editorial de la UPV/EHU, Bilbao.

González Casimiro, P. y S. Orbe, (2012), *Prácticas para el aprendizaje de la Econometría*, publicación online: http://www.argitalpenak.ehu.es, Servicio Editorial de la UPV/EHU.

Greene, W., (2008), *Análisis Econométrico*, Prentice Hall.

Gujarati, D., (1997), *Econometría*, McGraw-Hill.

Hill, R.C., W.E. Griffiths y G.G. Judge, (2001), *Undergraduate Econometrics*, John Wiley and Sons.

Ramanathan, R., (2002), *Introductory Econometrics with applications*, ed. South-Western, 5th edition.

Stock, J.H. y M.W. Watson (2006) *Introduction to Econometrics*, Addison-Wesley.

Verbeek, M., (2008), *A Guide to Modern Econometrics*, John Wiley and Sons.

Wooldridge, J.M., (2003), *Introductory Econometrics: A modern Approach*, South-Western.