eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

INTUICIONISMO Y FORMALISMO EN LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA DE I. KANT Y D. HILBERT. SOBRE FUNCIÓN Y SIGNIFICADO DE LA INTUICIÓN MATEMÁTICA

Tesis Doctoral

Francisco Sirvent Urquidi

Director:

Prof. Dr. D. Julián Pacho García

Departamento de Filosofía

Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación

San Sebastián/Donostia, España

2015

Intuicionismo y formalismo en la filosofía de la matemática de I. Kant y D. Hilbert.
Sobre función y significado de la intuición matemática.

Francisco M. Sirvent Urquidi

Director: Prof. Dr. D. Julián Pacho García

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Universidad del País Vasco - The University of the Basque Country

Tesis para la obtención del grado de Doctor

Francisco Sirvent Urquidi

Director:

Prof. Dr. D. Julián Pacho García

Departamento de Filosofía

Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación

San Sebastián/Donostia, España

2015

A mis hijas Elena y Teresa,
por todo lo que me han dado.
Y a Susanne, que ha estado a mi lado con su amor
y apoyo en los buenos y malos momentos.

Es gibt nichts,
was uns die Abwesenheit eines uns lieben Menschen ersetzen kann,
und man soll das auch gar nicht versuchen.
Man muss es einfach aushalten und durchhalten.
Das klingt zunächst sehr hart, aber es ist doch
zugleich ein groβer Trost.
Denn indem die Lücke wirklich unausgefüllt bleibt,
bleibt man durch sie miteinander verbunden.
(Dietrich Bonhoeffer)

Retirado en la paz de estos desiertos,
con pocos, pero doctos libros juntos,
vivo en conversación con los difuntos
y escucho con mis ojos a los muertos.

Si no siempre entendidos, siempre abiertos,
o enmiendan, o fecundan mis asuntos;
y en músicos callados contrapuntos
al sueño de la vida hablan despiertos.

Las grandes almas que la muerte ausenta,
de injurias de los años, vengadora,
libra, ¡oh gran don Iosef!, docta la imprenta.

En fuga irrevocable huye la hora;
pero aquélla el mejor cálculo cuenta
que en la lección y estudios nos mejora.

(D. Francisco de Quevedo y Villegas, Señor de la Torre de Juan Abad)

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento en primer lugar a mi Director de Tesis, Prof. Dr.D. Julián Pacho, por su paciencia, estímulos y permanente ayuda. El que esta Tesis se haya podido terminar se debe fundamentalmente a él. El trabajo tiene una larga trayectoria, y quedó esbozado como proyecto en los Cursos de Doctorado y en mi investigación en Epistemología que culminó con el Diploma de Estudios Avanzados en Epistemología, y que se desarrolló bajo la dirección de los Profesores Dr. D. Andoni Ibarra y Dr. D. Thomas Mormann, cuyas sugerencias y estímulo (y largas discusiones) orientaron mi investigación en esta dirección, por lo que les expreso mi agradecimiento. Y también a todos los profesores del Departamento de Filosofía y del Departamento de Lógica y Teoría de la Ciencia de la Facultad de Filosofía de San Sebastián, de los que tanto he aprendido en estos años de trabajo con ellos.

Pero esta Tesis, además de una investigación científica sobre un tema determinado, es también el fruto de una larga reflexión sobre mi trabajo cotidiano en el campo de la Matemática, en su enseñanza y en sus aplicaciones prácticas tanto en el mundo empresarial como en la investigación empírica; es decir, una tesis filosófica en el sentido más genuino del término. Y en este largo camino hay muchas influencias y ayudas importantes que debo agradecer. Primero, a mis compañeros del Departamento de Estadística y Econometría de la Facultad de Ciencias Económicas de Bilbao (Sarrico), cuya ayuda y estímulo intelectual han sido siempre para mí un gran impulso. Sarrico es, en realidad, una gran familia. Una institución con solera en el corazón de una ciudad libre y liberal como Bilbao, cuyos valores han forjado mi formación: el rigor intelectual, el amor por el trabajo bien hecho, el compromiso con la sociedad de la que se es una institución fundamental para formar a sus líderes del futuro, el deber de dar a la sociedad lo mejor de ti y la repugnancia por el fanatismo en todas sus vertientes. Comencé mis estudios universitarios en Sarrico, mi mujer fue profesora en Sarrico, mi hija Elena estudió en Sarrico y yo fui durante años profesor de Teoría de la Probabilidad y Estadística en Sarrico. Así que esta tesis, aunque no se lea en Sarrico, es en gran medida una tesis de Sarrico. Y de esta gran familia que es Sarrico tengo que hacer una mención de agradecimiento a los profesores Vicente Núñez, Araceli Garín e Ignacio Díaz-Emparanza, que siempre tienen sus despachos abiertos para ayudar al que lo necesite; y a la Vicerrectora Amaya Zárraga, al Decano Arturo Rodriguez, a la exDecana Inmaculada Gallastegui y a los profesores Karmele Fernández de Aguirre, Jesús Ferreiro, Felipe Serrano, Juantxu Rivas y a tantos otros de la gran familia de Sarrico que estuvieron a mi lado en recientes momentos difíciles y a los que quiero expresar aquí mi profundo afecto y agradecimiento. También tengo que agradecer su apoyo a todos mis compañeros de la Escuela Universitaria de Estudios Empresariales de la Cámara de Comercio, Industria y Navegación de Bilbao, donde ejerzo actualmente como profesor de Estadística.

Pero en mi formación como matemático, la deuda imborrable la tengo con el Prof. Dr. D. Jesús De La Cal (†), quien fuera catedrático del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad del País Vasco, amigo y maestro, cuyas ideas y enseñanzas han impregnado mi concepción de la Matemática que se desarrolla en este trabajo. También debo un agradecimiento al que fuera mi primer profesor de Matemáticas en la Universidad, el Prof. Dr. D. Antonio Fernández de Trocóniz (†), catedrático la Facultad de Económicas de Bilbao (Sarrico) y de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Bilbao, cuyo talento didáctico en los temas más áridos siempre me admiraba –y que me he esforzado en imitar- y en cuyos libros, todos los cuales conservo, siempre encuentro la respuesta a cualquier duda. Precisamente dos de sus discípulos, el Prof. José María Piris (†) de la Facultad de Económicas de Bilbao (Sarrico) y el Prof. Alberto Martínez Arnáiz de la Escuela

Universitaria de Estudios Empresariales de Bilbao (Elcano) fueron determinantes en mi descubrimiento de la Estadística como ciencia aplicada y en mi evolución para llegar a la comprensión del profundo sentido del carácter empírico de la Matemática. Esta relación entre la abstracción matemática, la correspondiente formulación de un cálculo formal adecuado y el aspecto empírico que está en la raíz de sus teorías y que las justifica por sus aplicaciones –es decir, la conciencia de la falacia de la distinción entre *Matemática pura* y *Matemática aplicada*- la comprendí gracias a ellos. Aunque ya desde mis estudios de Preuniversitario tuve el convencimiento de que la Matemática necesitaba de una *fundamentación* dentro de una concepción general de la Ciencia, por lo que esta investigación tiene en realidad una larga trayectoria, consolidándose progresivamente en gran parte con mis reflexiones sobre mi experiencia docente. Tampoco puedo olvidar en mis agradecimientos a los profesores de Sarrico D. Jesús Rubio, cuya amistad me honra, y del que tanto aprendí en nuestras discusiones sobre la didáctica de la Teoría de la Probabilidad, y al Prof. Dr. D. Fernando Tussell, que siempre resolvía mis dudas y que hace ya muchos años, cuando trabajaba en el MIT, me consiguió cuando aún no existía internet un singular trabajo de Gödel sobre las relaciones de la Teoría de la Relatividad con la Filosofía Idealista, asunto que todavía está en mi lista de investigaciones futuras.

Mi agradecimiento también al Prof. Dr. D. Ulises Moulines, catedrático de la *Lehrstuhl für Logik und Wissenschaftstheorie* de la *Ludwig-Maximilians-Universität* de Munich, y al Prof. DDr. D. Hannes Leitgeb, premio *Alexander von Humboldt* en 2010 y titular de la cátedra *Humboldt* de la *Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft* y de la *Lehrstuhl für Logik und Sprachphilosophie* de la Universidad de Munich, y director del *Munich Center for Mathematical Philosophy*, gracias a cuyas invitaciones pude disfrutar de estancias de investigación en sus centros en los años 2011 y 2012, teniendo acceso a los medios de que disponían, pudiendo participar en sus actividades, impartir alguna conferencia y, sobre todo, respirar el ambiente de trabajo y curiosidad intelectual que los caracteriza.

Seguramente no será académicamente muy ortodoxo agradecer aquí su ayuda a personas que no pertenecen estrictamente a este ámbito. Pero el hecho de que me han ayudado, y a veces decisivamente, me fuerza a expresarles mi agradecimiento más sincero: a mis hijas Elena y Teresa, que siempre están en mis pensamientos, a su madre Maribel por los muchos años y sueños que compartimos, y a mi hermana Maribel, que siempre ha estado a mi lado y me ha apoyado. Y a Susanne Küster, por su apoyo incondicional y por las largas discusiones (no siempre sobre la Tesis) que su acrisolado sentido crítico (a veces algo exagerado, en mi opinión) hacía estimulantes e inolvidables.

Mi último agradecimiento es para mis alumnos, algunos ya también viejos amigos, de los que siempre aprendo algo y a los que procuro enseñar, no unas técnicas –que esas se aprenden casi sin querer a poca curiosidad o necesidad que uno tenga-, sino aquello que es el fundamento de la formación humanística y de la superioridad de Occidente: el valor de *la búsqueda* irrenunciable de la Verdad, la Belleza y la Bondad, siguiendo la senda del divino Platón y de Humboldt, la aspiración a la excelencia y a la superación personal, y el amor apasionado por la Libertad. Es decir, el ideal de la *Bildung*, que siempre ha guiado mi vida.

SUMARIO

INTUICIONISMO Y FORMALISMO EN LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA DE I. KANT Y D. HILBERT: INTERRELACIONES, ROL Y VIGENCIA DE LA INTUICIÓN MATEMÁTICA

PARTE-III
CON KANT Y HILBERT, MÁS ALLÁ DE KANT Y HILBERT.

CAPÍTULO- 6. La Lógica Matemática después de Hilbert y su perspectiva.

CAPÍTULO- 7. Las fronteras de la Lógica y los sistemas representacionales de la ciencia moderna. Valoración desde un punto de vista kantiano.

CAPÍTULO- 8. El cambio moderno de paradigma epistemológico en la cognición matemática y su influencia en la interpretación de la filosofía de la Matemática en Kant y Hilbert. …………………………………………………………….........351

CAPÍTULO-9.Valoración de las *representaciones (Vorstellungen)* en las ciencias modernas y discusión del punto de vista transcendental. ……………………………………………………………………385

CONCLUSIONES. ………………………………………..............417

INTRODUCCIÓN.

Entre 1854, año en el que Riemann presentó en la Universidad de Göttingen su disertación de habilitación titulada *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, precisamente el mismo año de la publicación en Londres del libro de Boole *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, y 1931, año en el que se publicó el artículo de Gödel *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Matemathica und verwandter Systeme*, Europa, y muy particularmente Alemania, vivió una de las más grandiosas aventuras del espíritu humano. Una de esas revoluciones espirituales que cambian radicalmente la forma de ver y entender el mundo de los humanos y que afectará a generaciones enteras. Sus ecos y consecuencias inmediatas, tanto conceptuales como prácticos, durarían décadas y llegan a nuestros días, dando lugar a debates que aún no están cerrados y arrojando nueva luz sobre pensadores que creíamos haber entendido y que ahora podemos comprender de otra manera[1]. La Lógica y las Matemáticas experimentaron un desarrollo sin precedentes en sus planteamientos y métodos, y, junto con una reflexión sobre sus fundamentos y sus relaciones mutuas, se crearon nuevas teorías y nuevas disciplinas matemáticas; y siendo éstas de alguna forma el lenguaje de las ciencias de la naturaleza, esto tuvo consecuencias inmediatas en todas ellas y en la tecnología. También consecuencias inmediatas en la Filosofía y en la Epistemología; una demostración indirecta de que la Filosofía aún es una ciencia viva. Este trabajo no es fundamentalmente una investigación histórica de ese proceso, y por tanto, no incluye una estructura cronológica ordenada y sistemática de los acontecimientos, los debates, las obras y los autores implicados. Pero se pretende que la historia fundamental del proceso aparezca en un segundo plano dando cuenta de la atmósfera intelectual y de los hitos fundamentales que lo jalonan, de la misma forma que “Doctor Zhivago” es una historia fundamentalmente de amor y de destino pero que permite respirar con nitidez el ambiente histórico en el que la narración principal se desarrolla, estructurando así una especie de discurso de fondo no narrado pero cuyo espíritu se percibe claramente. Por ello los detalles históricos y la descripción de las muchas teorías involucradas en la discusión se relegan principalmente a las notas a pie de página, pero existen debates básicos que han tenido una trayectoria histórica a veces larga y que se tratan en el texto principal; en ellos se ha tenido muy en cuenta la reivindicación que postula Ferreirós (2001) de la noción *kuhniana* de *exemplar* en el estudio histórico de las ideas: un mismo objeto puede tener un significado y una interpretación totalmente distintos dentro de distintos *exemplars* conceptuales que se han dado en la historia del tópico, y son a veces las interpretaciones dominantes en un momento dado las que determinan en gran parte la evolución de los sistemas conceptuales. El objeto principal de la investigación consiste en:

1º) La especificación de los distintos usos que hace Kant del término *intuición* (*Anschauung, Intuitus*) en su teoría del conocimiento y, a continuación, específicamente en su filosofía de la Matemática.

2º) El estudio de la filosofía de la Matemática de David Hilbert y, específicamente, de su concepción y uso de la noción de intuición en Matemáticas, demostrando que las interpretaciones de su obra y su significado predominantes hasta ahora son un gran error. Se investiga también su *Beweistheorie* y el papel del *método axiomático* en su pensamiento

[1] Una parte importante de ese proceso está descrito magistralmente en (Ferreirós, 2007).

matemático y las analogías y diferencias de ése con la axiomatización de Euclides. La conjetura de que Hilbert habría sido radicalmente mal interpretado fue recientemente formulada por Leo Corry (2002), pero ya en 1960 Stephan Körner la sostuvo razonadamente, aunque al parecer su análisis pasó inadvertido.

3º) La demostración de la tesis fundamental de la profunda conexión entre las filosofías de la Matemática de Kant y Hilbert, y en particular en el rol que ambos asignan a la intuición en el conocimiento matemático, intentando recrear la particular lectura que hace Hilbert del pensamiento kantiano y señalando también sus divergencias explícitas con Kant en algunos puntos.

4º) La demostración de una estrecha conexión, más allá de la apariencia en sentido contrario (y de la opinión hegemónica a comienzos del siglo XX), entre los métodos, fundamentos y *práctica* de la Matemática de Euclides, que fue de hecho la Matemática practicada durante 2000 años en Occidente, y los de la llamada *Matemática moderna* que surge en la segunda mitad del siglo XIX y que caracteriza a la Matemática del siglo XX.

5º) La valoración de la vigencia y de la utilidad de estos enfoques convergentes para una fundamentación moderna de la Matemática desde un punto de vista naturalista.

El trabajo está estructurado en tres partes. En la Parte-I (Capítulos 1, 2 y 3), se aborda la teoría del conocimiento de Kant y su filosofía de la Matemática. Se pretende fundamentalmente fijar el sentido (o mejor dicho, los sentidos) del término *intuición* en el esquema cognitivo kantiano, determinando en segundo lugar su papel específico en la concepción de las Matemáticas de Kant. Gran parte de la crítica al trabajo desarrollado por algunos autores modernos sobre el rol de la intuición en las Matemáticas y la concepción de Kant al respecto se debe basar en una crítica a la lectura que esos autores hacen de esos conceptos básicos de Kant, así como a las concepciones que sostienen sobre las Matemáticas y el papel de la Lógica Formal en ellas. Esto nos obligará a hacer ciertas precisiones, útiles para nuestro contexto, de términos fundamentales del esquema cognitivo kantiano interrelacionados entre sí, como son la *cosa en sí*, o las distinciones *analítico-sintético*, *a priori-a posteriori,subjetivo-objetivo*, *indeterminado-determinado* y *empírico-transcendental*, entre otras. Un punto clave para valorar la vigencia y utilidad de la perspectiva kantiana consiste en determinar los problemas fundamentales que inciden en una discusión epistemológica de la Matemática moderna, su estado actual en la investigación matemática y las diferencias o novedades con respecto a su estado en la época de Kant, así como qué problemas o exigencias de revisión plantea esta evolución a la epistemología kantiana y al rol de la intuición, y si se puede aceptar el "proyecto kantiano" y el corpus básico de la Crítica Transcendental, incluyendo muy especialmente su uso de la intuición en la fundamentación de la Matemática, y del carácter *sintético* y *a priori* de ésta, entendiendo estos términos en el sentido precisado por Kant, sentido que habrá que dilucidar. Si nos atenemos a los planteamientos de Bertrand Russell (1903 y 1911), la respuesta sería rotundamente negativa: la Matemática moderna representaría la negación absoluta del enfoque de Kant (y por elevación, de la Matemática de Euclides). Pero, como veremos, el enfoque de Russell ha sido totalmente descartado por la Matemática moderna, y eso en gran parte debido al trabajo de Hilbert y su escuela, aunque sorprendentemente sigue gozando de credibilidad en círculos filosóficos. Sin embargo, la influencia de Russell fue aplastante hasta los años 30 y su filosofía de la Matemática, y su valoración de Kant, influyó considerablemente en multitud de autores clave. Y de hecho es posible encontrar interpretaciones realmente divergentes de las nociones kantianas más básicas, y algunas incluso que poco o nada tienen que ver con las concepciones originales de Kant. Por eso el estudio se realiza desde la base, lo cual implica un encuadre muy amplio y general que exige una discusión de los conceptos arriba mencionados.

Para el análisis de cualquiera de los items involucrados en la interpretación del pensamiento de Kant se podrían plantear dos estrategias. Una, el análisis comparativo de las distintas interpretaciones y lecturas en la literatura. Teniendo en cuenta que muchos de esos temas llevan más de 200 años en discusión y que no existe unanimidad en la interpretación, esto significaría que cualquiera de ellos podría ser un estudio independiente que abarcaría toda una tesis doctoral. La segunda estrategia, que es la que hemos adoptado, consiste en, sin renunciar a algunas referencias comparativas particularmente relevantes, desarrollar y justificar una línea interpretativa hasta ahora no explorada. La línea desarrollada no es la más generalmente aceptada hasta hoy, pero creo que queda sólidamente justificada a partir de los análisis planteados por una serie de autores en los últimos cuarenta años y, casi podríamos precisar que en los últimos veinte años. A partir de los años 60 del pasado siglo se ha producido un renovado interés en la Filosofía de Kant, en su enfoque epistemológico y en su teoría del conocimiento, y en particular del conocimiento matemático, especialmente en los países anglosajones e igualmente en Alemania, con planteamientos innovadores en la interpretación del pensamiento de Kant, y que contrasta fuertemente con el nulo interés por la filosofía kantiana que caracterizaba a la filosofía desarrollada en el ámbito anglosajón en los dos siglos inmediatamente anteriores. Se puede considerar el punto de partida la obra de Strawson (1966) *The bounds of sense*. Strawson fue seguido por numerosos filósofos que, para decirlo en palabras de Allison, habían tratado de formular y defender algunos argumentos vagamente kantianos “anti-escépticos” o “transcendentales” que estuvieran incontaminados por cualquier premisa idealista. Siguiendo a Strawson, han tratado de plantear como tarea fundamental la separación de lo que Strawson llama “argumentos analíticos” de la *Crítica de la Razón Pura* del *idealismo transcendental*, el cual, según Strawson creía, Kant desgraciada e innecesariamente asoció con ellos (Allison, 2004, 7). Glock (2003) calificó los planteamientos de Strawson de *Analytic Kantianism*. Pero a partir de los años 80 este marco se desborda y surge un conjunto de filósofos que reinterpretan la filosofía de Kant, recogiendo parte de las aportaciones de Strawson y convergiendo con la línea interpretativa que surgió en Alemania a partir de la obra clave de Gerold Prauss (1977). Aunque con notables diferencias entre ellos, esta investigación demuestra que se puede reconstruir una línea interpretativa común, al menos en el campo de la teoría del conocimiento de Kant, que nos servirá de base para interpretar su filosofía de la Matemática, y que revela una sorprendente modernidad. A través de la obra de Allison (2004), Bird (2006), Falkenstein (2004), Patricia Kitcher (1990 y 2006), Hanna (2001), Abela (2002), Sutherland (2004, 2005, 2006 y 2010), Shabel (2003, 2010, 2012 y 2014) y Longuenesse (1993 y 2005), entre otros, además de las fundamentales de Strawson (1966) y Prauss (1977), será posible construir una interpretación del rol de la intuición en la filosofía de la Matemática de Kant de la que se desprenden además nuevas perspectivas para determinar las conexiones entre la Matemática de Euclides y la Matemática moderna, lo que finalmente nos permitirá plantear las bases de una fundamentación *naturalista* de la Matemática en las líneas propuestas recientemente por Penelope Maddy (1997 y 2008), Philip Kitcher (1988 y 2006) y Julián Pacho (1993, 1995 y 2009), entre otros, pero con un fundamento epistemológico más sólido, recogiendo para ello las aportaciones relevantes de Johannes Lenhard (2006), Michael Otte (1998 y 2003), Joongol Kim (2006), Ulrich Majer (1993 y 1995), Leo Corry (2002, 2006 y 2008), Lisa Shabel (2003, 2004 y 2006), Hannes Leitgeb (2004, 2009 y 2013), John Mumma (2006 y 2010), Edward Dean (2008), Jeremy Avigad (2009), Marcus Giaquinto (1983 y 2007), Otávio Bueno (2008 y 2010), José Ferreirós (2001, 2007, 2008 y 2012), Paolo Mancosu (2005), Kenneth Manders (2008), Georg Polya (1956), Stephan Körner (1955 y 1960) y René Thom (1971), además de las fundamentales -estudiadas específicamente en las Partes II y III de este trabajo- de Hilbert, Bernays, Ackermann, Weyl y Gödel.

Del análisis realizado surge un Kant cuya teoría del conocimiento se podría caracterizar en primer término, y en contra de las apariencias, por un realismo robusto[2]. Destaca además su crítica del empirismo, que presenta unos rasgos que anticipa 200 años la crítica contemporánea, presentando notables coincidencias con los planteamientos de filósofos actuales de la mente y del lenguaje como MacDowell (1998 y 2008) y Davidson (1984 y 1990), además de con el omnipresente Quine; estando sin embargo también radicalmente contrapuesto a las propuestas epistemológica de Leibniz, en cuya filosofía racionalista se formó a través de su maestro Wolff. Hay que reconocer que la teoría kantiana del conocimiento es absolutamente original, rompiendo en muchos aspectos con la herencia recibida y los enfoques de sus contemporáneos, lo cual era precisamente el objetivo de su propuesta de "revolución copernicana", e intentando superar el *esquema cognitivo cartesiano*. Crea una terminología original para describir conceptualmente (filosóficamente) los procesos cognitivos, rompiendo con la terminología y los enfoques de sus coetáneos, y recuperando la terminología medieval de la mente de base aristotélica (lo cual no es de extrañar si tenemos en cuenta que Königsberg era en aquél entonces un bastión del aristotelismo), pero despojando a los términos aristotélicos de su carga ontológica esencialista. Su terminología psicologista, que impregna su teoría del conocimiento, puede que sea la causa de las interpretaciones marcadamente psicologistas que, pese a las protestas al respecto formuladas por el mismo Kant en vida, se han hecho de su obra desde Reinhold (1789), quien fue determinante en su lectura por el Idealismo alemán, hasta Adickes (1924) o Vaihingen (1881) y algunos neokantianos, y que llega hasta nuestros días. Y a esto se añade el problema del supuesto *nativismo* de las propiedades humanas de tipo psicológico / cognitivo, atribuido a Kant unánimemente en el siglo XIX, aspecto que también hemos estudiado. Y bajo esas interpretaciones encontramos al Kant que, por ejemplo, conoció Russell (1897). Pero como señala Patricia Kitcher (1995), el compartir una terminología común con la psicología no implica un enfoque psicologista, enfoque que precisamente Kant criticó reiteradamente de forma explícita. Esta opinión la comparten numerosos autores actuales (cfr., Röd, 1988; Pacho, 2000). El enfoque de Kant se puede definir fundamentalmente como *funcionalista* (Meerbote, 1989), y en donde el rol de los conceptos básicos (por ejemplo, la intuición) venía determinado por un esquema esencialmente *formal*. Es por eso que, teniendo en cuenta el papel esencial de la intuición en su teoría cognitiva y el carácter *formal* de toda su construcción, Falkenstein (2004) lo caracteriza acertadamente como *intuicionismo formal*.

En nuestro estudio se detectan en Kant hasta cinco usos o significados distintos del término "intuición" (*Anschauung*) sólo en la *Estética Transcendental*, que es en donde fundamentalmente hemos centrado nuestra investigación. Algunos de estos usos han sido

[2] No es ésta la interpretación más usual de Kant. La tensión permanente entre el realismo empírico de Kant y sus mismas críticas desde el punto de vista transcendental ya fue analizada por Vaihinger (1884, 85-164). Un estudio general de la problemática en (Pacho, 1977 y 1993). Las repetidas y, en principio, confusas referencias de Kant a *das Ding an sich* y el hecho de que Kant parece conceder más importancia en el conjunto de su filosofía a la función constitutiva y regulativa del sujeto que al realismo empírico, llevan a una interpretación dominante que tendencialmente es idealista-constructivista. También el carácter de los sistemas representacionales de las ciencias modernas, que analizamos en el Capítulo-7 y 9, parecen justificar en una primera aproximación las interpretaciones de Kant desde posiciones del anti-realismo moderno (Van Frassen, 1982), (Dummett, 1978 y 1991). Además, muchos autores (Vaihinger, 1884) han creído encontrar contradicciones insolubles en su ataque al empirismo y su defensa del realismo empírico precisamente a través del idealismo transcendental. Justificamos nuestra interpretación y discutimos el tema, sus consecuencias y las distintas interpretaciones de Kant en el último apartado del Capítulo-9.

investigados recientemente por Parsons, Resnik, Allison, Falkenstein, Bird y Friedman, y cuyas interpretaciones, concordancias y discrepancias discutimos detalladamente. Discutimos también las interpretaciones psicologistas de algunos de estos significados y el problema del nativismo asociado a éstas, que tanta importancia han tenido en las interpretaciones clásicas de la teoría del conocimiento de Kant, tema tratado ampliamente por Pacho (1995, 1999 y 2009) y Moya (2008), y que podemos considerar dentro de nuestra interpretación definitivamente superadas, al igual que el problema central e irresoluble que aparentemente presentaba su noción de la "cosa en sí" (Prauss, 1977) y que produjo ríos de tinta durante los siglos XIX y XX, marcando profundamente las interpretaciones clásicas de Kant. Es decir, que el estudio de la epistemología kantiana se puede presentar dentro de unos nuevos paradigmas interpretativos, cuyo resumen pretendemos sintetizar en este trabajo, además de que intentamos realizar también un avance original en esta dirección. Una conclusión relevante es que falta aún un estudio lingüístico sistemático de términos claves de la teoría del conocimiento de Kant como, además de *Anschauung*, los omnipresentes *Vorstellung* o *Erscheinung*[3], al estilo de la decisiva investigación realizada por Prauss (1977) acerca de *Ding an sich*, y sobre el cual se debería apuntalar definitivamente la interpretación que sostenemos aquí.

La teoría del conocimiento de Kant se entiende mejor, como proponen Bird (1962), Nagel (1983) y Abela (2002), en términos de la contraposición *indeterminado-determinado* que en términos de la clásica *subjetivo-objetivo*, dando lugar a una concepción gradualista del conocimiento dentro de un contexto holístico de verdad, siempre con referencia a una realidad externa que el sujeto puede percibir empíricamente –pero de una forma activa, rompiendo con el paradigma empirista de *lo dado*-, y en donde la *intuición* tiene ya una carga cognitiva que se relaciona con la *construcción de los conceptos*. Pero esa *construcción de conceptos*, e igualmente los *conceptos* construidos, se enmarcan en una teoría de la verdad que apela tanto a un concepto de *correspondencia* como a un concepto de *coherencia* (Abela, 2002, 72), y que estarían detrás de una definición nominal de *verdad* "daβ sie nämlich die Übereinstimmung der Erkenntnis mit ihrem Gegenstande sei" (A58-B82), concordancia regulada por unos criterios empíricos (B191 y B279), y que le alejan radicalmente del *constructivismo* moderno al que tienden con facilidad a identificarle muchos intérpretes. Y sería *el juicio* (*Urteil*) el mecanismo que coordina y *realiza* las distintas instancias *funcionales* del *proceso* cognitivo (Abela, 2002 y Longuenese, 1997), desempeñando un rol central en su teoría cognitiva. Para Kant, en su teoría del conocimiento, que aplica también a la Matemática, *la intuición* tiene un papel fundamental en una *conexión inmediata* con el objeto: "Erscheinungen sind die einzigen Gegenstände, die uns unmittelbar gegeben werden können,

---

[3] A raíz de la eclosión de estudios sobre Kant que ha tenido lugar en los últimos 20 años en el ámbito anglosajón, se ha producido también una notable producción de nuevas traducciones al inglés de la obra de Kant, que incorporan los avances en su interpretación. Así, por ejemplo, la traducción de Guyer y Woods (1998) de la *KrV* traduce el término *Erkenntnis*, según su uso, unas veces por *knowledge* y otras por *cognition* y, como ya hacía la clásica de Norman Kemp Smith, traduce *Erscheinung* por *appearance*. Patricia Kitcher (1995) realiza también en su obra propuestas de traducción diversas, según su uso, del omnipresente *Vorstellung*. Igualmente puede destacarse la crítica de Abela a la traducción de Kemp Smith de pasajes relevantes de la *KrV* (Abela, 2002, 136 y ss.). Sin embargo, las traducciones al español parecen desconocer estos avances interpretativos y tampoco existen, hasta donde yo se, críticas a estas traducciones. Por ejemplo, la reciente de Pedro Rivas (2005) traduce sistemáticamente *Erscheinung* por *fenómeno*, al igual que hacía la clásica de García Morente (1928), lo cual distorsiona el pensamiento de Kant si tenemos en cuenta que Kant usaba *Phenomenon* (o *Phenomena*) cuando quería representar el contraste con *Noumenon*, que es lo que sugiere la traducción española; e igualmente se traduce siempre *Erkenntnis* por *conocimiento*, lo cual, por lo menos tiene la excusa de la literalidad en la traducción. También las traducciones españolas traducen siempre *Kenntnis* y *Wissen* igualmente por *conocimiento*, fundiendo en este término español tres vocablos con matiz y uso distintos en Kant y desdibujando así el pensamiento de Kant.

und das, was sich darin unmittelbar auf den Gegenstand bezieht, heiβt Anschauung" (A108-109). Pero, de otro lado, la forma a través de la que percibimos esa relación, la sensación, tiene ya un componente formal impuesto por nuestro esquema cognitivo a través de un marco de verdad que lo hace significante, por lo que su resultado, la intuición del objeto, tiene ya un valor cognitivo aportado por el juicio. Cuando Kant describe la sensación como la materia de la intuición lo hace en un contexto que involucra el objeto y el juicio: "Die Fähigkeit, (Rezeptivität,) Vorstellungen durch die Art, wie wir von Gegenständen affiziert werden, zu bekommen, heiβt *Sinnlichkeit*" (B33). Aunque hay que decir que Kant adjudica también un papel a la *intuición* en relación con el mecanismo de la *demostración*, pero que le relega a una función *heurística*, en contradicción con las opiniones de Russell y Friedman, pero coincidiendo en esto con la mayoría de los matemáticos (Polya, 1956). Para terminar, señalaremos que la filosofía de la Matemática de Kant se basa claramente en una reflexión, encuadrada en su teoría cognitiva, de la *práctica* matemática de su época (Shabel, 2003), (Sutherland, 2004, 2005 y 2006), que –como veremos-, no se aleja tanto de la *práctica* de la Matemática moderna como pudiera pensarse en base a lo que sostienen las interpretaciones fundadas en el logicismo y el formalismo típicas del siglo XX.

En nuestro análisis de la filosofía de la Matemática de Kant, encuadrada dentro de su teoría general del conocimiento, hemos intentados dilucidar seis aspectos fundamentales: el carácter que Kant asignaba a los *enunciados matemáticos*, su concepción de la *demostración matemática* y el rol que le asignaba en ella a la intuición, el rol de la intuición en la *construcción de los objetos matemáticos* y su relación con la noción de *definición*, el carácter que tendrían los objetos matemáticos en su concepción, la relación de todo ello con la noción de *aplicabilidad* de la Matemática y, por último, el carácter de la distinción que Kant hacía –en relación a su objeto y a la metodología- entre Aritmética, Geometría y Lógica y que, a grandes rasgos, veremos que se reproduce en Hilbert. La introducción por Kant del punto de vista transcendental, que introduce aparentes contradicciones con su *realismo empírico*, ha sido interpretado por algunos autores como un cambio sustancial desde el punto de vista lógico, sustituyendo la lógica tradicional de *términos* por una "lógica transcendental" de *objetos* y *conceptos* (Thomson,1972, Maclachlan, 1995 y Allison, 2004), aspecto que analizamos en el Capítulo-9. En nuestro estudio inicial (Capítulo-3), el *realismo empírico* de Kant queda sólidamente justificado y, además, reforzado por su propia reacción ante interpretaciones subjetivistas y psicologistas a la edición A que no compartía. Cualquier interpretación de conflictos o contradicciones, y en particular con su *idealismo transcendental*, el cual plantea serias dificultades interpretativas (Vaihinger, 1884), debería por consiguiente realizarse forzando una interpretación, si existiera, *a partir* de su presupuesto básico: el *realismo empírico*.

En la Parte-II del trabajo (Capítulos 4 y 5) se aborda el estudio de la filosofía de la Matemática de David Hilbert y de su relación con la de Kant. Se demuestra la estrecha relación objetiva entre ambas concepciones, aunque también se resaltan las diferencias entre la lectura que Hilbert hizo de Kant, que lógicamente estaba influida por las interpretaciones hegemónicas de su época, y la nuestra. También se estudian los planteamientos originales de Hilbert, que, si bien fundados en una base kantiana, tienen una entidad propia y van mucho más allá de lo que Kant pudo siquiera llegar a concebir, en gran parte debido a que la Matemática del siglo XX presentaba nuevas teorías y problemas inexistentes en la época de Kant. Además de las continuas referencias de Hilbert a Kant en todos sus trabajos, comenzando por los *Grundlagen*, hemos tenido también en cuenta el estudio publicado por Volker Peckhaus (1990) *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie* que contiene una extensa documentación de la relación de Hilbert y su escuela con la escuela neokantiana de Göttingen y, en particular con Leonard Nelson y Gerhard Hessenberg. Se demuestra que

Hilbert impulsó decididamente a partir de 1905 en Göttingen un proyecto de investigación multidisciplinar que tenía un pilar clave en la potenciación de esa escuela neokantiana, en el contexto de su *philosophische Wendung* (Peckhaus, 1990, 72 y 226) que tuvo lugar a partir de su intercambio epistolar con Frege. Pero Hilbert nunca se involucró en las propuestas filosóficas de esa corriente, aunque en 1917 ingresó "als unterstützendes Mitglied" en la *Jakob Friedrich Fries-Gesellschaft* creada en Berlin por Nelson y su escuela. Con su impulso consiguió que en Göttingen se desarrollara durante años un trabajo conjunto de matemáticos y filósofos, con unos límites difíciles de separar. Esa fascinante atmósfera la describe muy bien Courant (1981, 157). El paraíso de Göttingen se hundió abruptamente en 1933 y ya nunca se pudo reconstruir, pero su influencia científica, cultural, política y social transcendió duraderamente en el ámbito alemán y más allá. Coincidiendo con la calificación que Peckhaus asigna a Frege (Peckhaus, 2014) en su estudio de sus relaciones con el movimiento neokantiano, podemos concluir análogamente que Hilbert, más que un neokantiano, es un "kantiano ecléctico" que extrae sus propias conclusiones de Kant pero siempre supeditadas a las exigencias metodológicas internas de su *propio programa matemático*.

Nuestro estudio de David Hilbert parte de su concepción diferenciada entre Geometría, Aritmética y Lógica, a las que esencialmente caracteriza inicialmente, en sus objetos y métodos, de forma muy análoga a la de Kant. Pero su desarrollo supera ampliamente, aunque casi nunca de forma contradictoria, los planteamientos de Kant. Hay tres desarrollos específicos, en los que esas divisiones se entremezclan, revelando la filosofía de la Matemática de Hilbert que, en muchos aspectos no coincide o desborda a las concepciones de Kant, y que son: su *método axiomático*, que inicialmente se planteó en Geometría, su *Beweistheorie*, que fue su respuesta a la llamada crisis fundacional de los años veinte, y sus desarrollos en Lógica y sus trabajos sobre la relación de la Lógica con la Matemática; los tres aspectos están muy interrelacionados y sobre ellos sobrevuela su distinción entre *inhaltliche Mathematik* y *formale Mathematik*. Han quedado fuera de nuestra investigación sus notables aportaciones a la Física Matemática y sus concepciones de la Física Teórica (Hilbert & Courant, 1953 y Corry, 1997 y 2004), que podrían aportar nueva luz a los temas aquí investigados y que sugieren la necesidad de una investigación futura en esta dirección. Se han investigado no sólo sus libros publicados sino los múltiples artículos y conferencias diseminados en distintas publicaciones que se referencian en la Bibliografía, así como también los apuntes y manuscritos recientemente publicados de los cursos que impartió en Göttingen ("David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917–1933", William Ewald and Wilfried Sieg, editors. New York: Springer, 2006) ("David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902", Ulrich Majer and Michael Hallett, editors. New York: Springer, 2004). Las conclusiones que obtenemos nos permiten un estudio comparativo entre Kant y Hilbert de sus respectivas filosofías de la Matemática, y de sus concepciones del rol de la intuición en ella.

No hay muchos estudios específicos sobre la obra de David Hilbert y su significado, más allá de las interpretaciones (no muy justificadas) predominantes en los últimos 100 años. Sólo muy recientemente algunos autores han comenzado a publicar análisis más detallados y que, en general, cuestionan la interpretación hasta hoy aceptada. Destaca como un pionero en esta línea Stephan Körner (1955 y 1960)[4]. Una conclusión clara de nuestra interpretación, y que coincide con la obtenida desde análisis bien distintos por otros autores que comentamos (Majer 1993 y 1995, Corry 1997, 2004 y 2006, Brading y Ryckman 2008), es en que existe

---

[4] De origen checo y profesor en Bristol desde los años 40, fue en los años 60 director de *Ratio*, la revista que establecía una continuidad con la escuela neokantiana de Nelson.

una concordancia básica entre Kant y Hilbert al considerar que la Geometría del mundo cotidiano es la Euclídea y que se fundamenta en una *constante antropológica* que es en su mayor parte independiente de los desarrollos de la ciencia, y que sería, siguiendo a Kant, la *forma subjetiva de la sensibilidad humana*. Esto tiene claras implicaciones, por ejemplo, para la Didáctica de las Matemáticas, y en especial teniendo en cuenta la consideración del rol que estos autores asignan a la intuición y a la Geometría. Pero Hilbert, a partir de una inicial concordancia con Kant sobre el carácter de la Geometría, desarrolla una concepción compleja de esta disciplina, marcada por la dualidad y cercana a la fenomenología de Husserl y Peirce (conexión sugerida por Majer (1993 y 1995) y que analizamos en detalle, así como la conexión de Husserl con Gödel), y en la que Hilbert caracteriza a la Geometría esencialmente como una *ciencia natural* en la que el rol del apriori kantiano, tal y como se interpretaba en torno a 1900, queda relativizado. Esto arroja nueva luz sobre la interpretación de los *Grundlagen der Geometrie* y sobre las características que Hilbert asignaba al método axiomático, revelando que las interpretaciones de la obra de Hilbert predominantes hasta ahora eran totalmente erróneas. Para Hilbert, los *Grundlagen der Geometrie* eran, por un lado, un intento de axiomatizar la Geometría de Euclides, despojándola de los aspectos no geométricos que contenían los *Elementa*; de otro, se enmarcaban en el contexto de los desarrollos axiomáticos realizados en la segunda mitad de siglo XIX (Veronese, Pash, Peano, Herz); y en tercer lugar, pretenden desarrollar el *método axiomático* como un método de *análisis lógico* y como un *método de exposición* de una teoría científica madura, superando cualquier limitación de su aplicabilidad al ámbito Geométrico. No postula, por tanto, nada respecto al carácter de la disciplina y de sus objetos, limitándose a la estructura de sus enunciados y sus conexiones lógicas. Y lejos de negar el rol de la intuición en la Geometría, precisa por el contrario el carácter fundamental en la Geometría de ese rol, como se evidencia en la misma elección de los *grupos de axiomas* que hace Hilbert y que no llevan al sistema axiomático más económico posible desde un punto de vista puramente lógico. Además de aportar distintas manifestaciones explícitas de Hilbert al respecto, realizamos un estudio comparativo minucioso de los *Grundlagen* y de los *Elementa,* para determinar las similitudes y diferencias de las concepciones del método axiomático de Hilbert y de Euclides. Existen aspectos en los que Hilbert está aún más próximo a Kant. Sus concepciones de la Aritmética elemental son idénticas, así como sus consideraciones de la noción de intuición en este campo, y también sus concepciones del infinito. En su fundamentación de la Aritmética superior (teoría de los números reales, análisis matemático, teoría de números), no conocida como tal en la época de Kant, Hilbert intenta un desarrollo de base pretendidamente kantiana a partir de la *intuición de formas* referida al lenguaje formal en el que se expresa la teoría, introduciendo los *elementos ideales* y el *infinito* como *ideas regulativas de la razón* –claramente de inspiración kantiana- y apelando a la *consistencia* como elemento determinante de la *posibilidad* o incluso de la *existencia*, separándose en esto claramente de Kant para quien, al igual que para Frege, la consistencia justificaba la posibilidad pero no la existencia, siendo éste para Kant el corte que separaba y caracterizaba a la Matemática. La *construcción* del concepto, fundamental en el enfoque de Kant, se realizaría para Hilbert *en* el lenguaje y *por* el lenguaje. Con este mismo enfoque fundamenta la Lógica Matemática. El desplazamiento en estos campos, y especialmente en la Lógica Matemática, del foco principal al *lenguaje* es evidente, y en este enfoque lo que él denomina la *intuición de formas* prioriza el aspecto sintáctico del lenguaje, intentando así esquivar los aspectos semánticos y/o ontológicos que resultan problemáticos cuando hablamos de *conjuntos infinitos* como los números reales o la teoría de números transfinitos de Cantor. Sin embargo, existen muchos pasajes en los que aboga por una visión de la intuición en la Matemática que parece rebasar el marco kantiano, y rebasa más aún su propia noción de *intuición de formas*: “vielmehr ist als Vorbedingungen für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Bestätigung logischer

Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, auβer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. … dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte" (Hilbert, 1926, 171)[5] ¿Pero qué es exactamente para Hilbert ese objeto dado en la intuición?

> "Soll das logische Schlieβen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihre Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren lässt oder einer Reduktion bedarf" (Hilbert, 1926, 171)[6].

Aunque a veces utiliza estos argumentos para justificar su *intuición de las formas,* por ejemplo (Hilbert, 1926, 171) "und insbesondere in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich und wiedererkenntbar ist", parece que esos objetos extralógicos "dados previamente a todo entendimiento en la representación" deberían entenderse desde una lectura fenomenológica (Majer, 1993 y 1995), a menos que consideremos que son objetos puestos por el pensamiento, dando así legitimidad a lo que llamábamos el 5º sentido de la intuición en Kant que es harto discutible y conflictivo en el mismo Kant. Aunque también podría sostenerse como verosímil que Hilbert hace la lectura hegemónica de la tradición del idealismo alemán e interpreta la intuición kantiana como una especie de facultad psicológica extralógica que permitiría "ver inmediatamente" el objeto en que consistiría "la cosa en sí". Hay muchos pasajes que avalarían esta interpretación y, en particular, su lectura del "a priori" kantiano que él mismo considera (bajo esa interpretación) sobredimensionado por Kant y que justificaría su reivindicación empiricista y experimental, al rechazar tal uso del apriori en muchos temas, aspecto que destaca Corry (1997, 2002, 2004 y 2006) como fundamental en el enfoque cognitivo de Hilbert. También discutimos la aparente coincidencia de Hilbert con el análisis de la Geometría realizado por Einstein (1921, 4-6) desde los presupuestos del positivismo lógico y vemos que, tras de esa aparente coincidencia, se revela una profunda discrepancia.

En base a esto y guiado por su fe ciega en la solidez de la Lógica Matemática construida entre 1850 y 1910, Hilbert planteó el *programa finitista* como una respuesta que él creía sólida a la *crisis fundacional* de los años 20. Realizamos un estudio de sus planteamientos hasta concluir en los teoremas de Gödel, y analizamos sus implicaciones y las distintas líneas de investigación del *programa finitista* desde 1935 hasta nuestros días, realizando una valoración global. Cfr., Hilbert & Ackermann (1928); Hilbert & Bernays (1934); Gentzen (1936, 1938); Gödel (1931, 1981); van Heijenoort (1967); Ladriére (1969); Suppes (1972); Birkhoff & Bennett (1987); Franzén (2005); Zach (2003); Niebergall & Schirn (2001); Detlefsen (1986); Franks (2009); Feferman (1960, 2011, 2012b). Más allá de este balance, sus *métodos* establecen en primer lugar la *autonomía de la Matemática* respecto a toda prescripción filosófica o epistemológica, dando un marcado carácter *naturalista* a su

[5] "más bien está ya algo dado en la representación como precondición para la aplicación de la inferencia lógica y para la realización de operaciones lógicas: ciertos objetos concretos extralógicos que intuitivamente como vivencia inmediata (unmittelbare Erlebnis) están ahí previamente a todo pensamiento... esta es la concepción filosófica fundamental que, yo para la Matemática, como absolutamente para todo pensamiento científico, toda comprensión y toda comunicación sostengo como exigible" (Hilbert, 1926, 171).

[6] "Si deben ser las conclusiones lógicas seguras, deben ser esos objetos susceptibles de una visión global completa de todas sus partes, y que su presencia, sus diferencias mutuas, su sucesión o concatenación con el objeto sean al mismo tiempo inmediatamente dadas intuitivamente como algo que no se puede reducir a otra cosa, o algo que no necesita ser reducido" (Hilbert, 1926, 171).

concepción de la Matemática (Franks, 2009). Todo ello, por una parte invalida desarrollos como los de Brower o Russell que se fundaban en una exigencia normativa de fundamento filosófico ajena a la *práctica* científica de los matemáticos y, por otra parte, su inspiración clara en la epistemología de Kant deja abierta la puerta a un nuevo enfoque de la fundamentación de la Matemática desde un punto de vista *naturalista* pero apoyada en la sólida elaboración conceptual de la teoría cognitiva de Kant. Además, Hilbert funda la Metamatemática y la sitúa como una rama más de la Matemática.

También hemos realizado un estudio sobre la conexión del pensamiento de Hilbert con el *constructivismo* en Matemáticas. El tema está relacionado con el posible *constructivismo* de la filosofía de la Matemática de Kant que mantienen algunos autores, en particular Brouwer, quien reivindicaba la inspiración de sus tesis en Kant[7]. Veremos que esta concepción es totalmente incompatible con nuestro análisis. Brouwer rechaza cualquier rol para la intuición del espacio (que para Kant y Hilbert era fundamental) e interpreta la intuición del tiempo como una intuición del movimiento, mientras que para Kant y Hilbert sería una intuición de lo discreto. Entendiendo en sentido muy amplio la noción de *constructivismo* en Matemática como la prevención frente a los enunciados que predican la existencia y frente a las demostraciones por reducción al absurdo, y la preferencia por métodos de construcción directa, hemos estudiado sus diferentes corrientes en la Matemática: la escuela operacional, la Matemática intuicionista, la Matemática constructiva recursiva, el constructivismo matemático de Errett Bishop, la Teoría constructiva de tipos de Martin-Löf, *reverse Mathematics*, el constructivismo matemático clásico (Teoría constructiva de funciones y Matemática discreta), el *finitismo*, y el ultrafinitismo, predicativismo y semi-intuicionismo. Ello nos lleva a una discusión sobre los distintos significados de la noción de *constructivismo* en la Matemática y a la conclusión de que la *construcción en la intuición* que Kant exige como determinante para una teoría Matemática tiene un significado totalmente distinto y relacionado con la *construcción de conceptos*. Esta noción sería compatible con desarrollos no constructivistas como la teoría desarrollada por Ernst Cassirer (1907 y 1910) y su interpretación, o sustitución, de la *construcción en la intuición espacial y temporal* de Kant por el *reines Denken* y los *elementos ideales* inspirados en la obra de Dedekind, o incluso compatible con las mismas concepciones de Dedekind, Cantor o Zermelo, es decir, con lo que los *constructivistas* denominan *Matemática abstracta*.

Todos nuestros análisis nos llevan a un tema central, que también fue el tema central de la filosofía de la Matemática en su época y del influyente programa de Russell: el carácter de la Lógica y su relación con la Matemática. En el Capítulo-6 de la Parte-III se analizan las distintas objeciones al desarrollo de la Lógica Matemática clásica desde 1850 así como las lógicas no-standard que se desarrollan en base a esas objeciones a partir de 1950, y se profundiza el estudio de la posición de Hilbert al respecto. Por un lado, la aportación de Hilbert es fundamental para el desarrollo de la Lógica Matemática moderna, siendo su obra

---

[7] Posiblemente debido a la gran repercusión de los planteamientos de Brouwer, ésta es la interpretación de la conexión de Kant con el constructivismo que aparece en la mayoría de los manuales del siglo XX y en los comentaristas, es decir, asumiendo la reivindicación de Brouwer como cierta y sin un análisis de la posición de Kant. Por ejemplo, para W. Röd (1996, 2. Band, p. 151): "Es verdient angemerkt zu werden, daß Kant mit der Auffassung der Gegenstände der Arithmetik und der Geometrie als konstruierter Gebilde eine Richtung einschlug, die von der intuitionistischen Mathematik des 20. Jahrhunderts fortgesetzt wurde". Y para confirmarlo añade esta nota al pie: "Vgl. Herbert Meschowski: *Wandlung des mathematischen Denkens*, Braunschweig 1969, kap. VIII, 53-61: 'Der Intuitionismus', wo die Auffassung von Vertretern dieser Richtung (L. E. Brouwer, H. Weyl, A. Heyting u. a.) charakterisiert wird". Demostraremos que la posición de Kant no tiene nada que ver con esta interpretación.

conjunta con Ackermann *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928) el primer libro moderno de Lógica y el primero que establece la distinción entre FOL y SOL. Su formalismo en este campo lleva de una forma natural a los planteamientos defendidos por Skolem en el sentido de limitar la Lógica a la FOL, y al consenso obtenido por los lógicos en torno a 1958 considerando los sistemas de ZF y ZFC y el lenguaje de primer orden como suficientes y adecuados para expresar las teorías matemáticas. A lo largo del trabajo, además de una refutación de los prejuicios logicistas y errores de análisis de Russell y otros, hemos intentado establecer claramente las diferencias entre la filosofía de la Matemática de David Hilbert y la de las distintas versiones del formalismo en Matemática (Felix Hausdorff 1903 y 1904, Nicholas Bourbaki 1958 y 1972, Hashkel Brooks Curry 1951).

El enfoque con el que se ha abordado la Parte-III (Capítulos-6, 7, 8 y 9) ha consistido en intentar aplicar los principios metodológicos que hemos encontrado en Kant y Hilbert, y guiados por el lema neokantiano *mit Kant, über Kant hinaus* (que justifica el título de esa Parte-III: *con Kant y Hilbert, más allá de Kant y Hilbert*), se pretende alcanzar una demostración de la virtualidad y vigencia de los enfoques básicos de estos autores para abordar desde una nueva perspectiva la problemática epistemológica de la ciencia moderna. En primer lugar, se pretende cerrar de una forma exhaustiva el estudio de la Lógica y de su relación con la Matemática desde una perspectiva actual. En el Capítulo-6 se plantea el origen de la Lógica Matemática desde mediados del siglo XIX y se amplía con los resultados obtenidos en los últimos 70 años desde la muerte de Hilbert. Se concluye con una crítica sobre aspectos fundamentales de la Lógica standard. Se analiza la evolución del pensamiento lógico de Hilbert y los debates acerca de los lenguajes de primer y segundo orden para la expresión de las teorías matemáticas y que, pese al consenso mayoritario alcanzado en torno a 1958, llegan en realidad hasta nuestros días. Cfr., Hilbert & Ackermann (1928); Quine (1941, 1953, 1953b, 1970); Bueno (2010); Alonzo Church (1956); Resnik (1988); Azzouni (1994); Shapiro (1985, 1990, 1991, 1997); Melia (1995); Eklund (1996); Feferman (1986); Zach (2003, 2004, 2009); Corcoran (1973); Boolos (1975, 1984, 1998); Putnam (1976, 1980); Väänänen (2001); Ferreirós (2001); Moore (1988). Resulta llamativo, aunque justificado desde nuestras críticas, que paralelamente al desarrollo de la Lógica standard se haya producido un planteamiento crítico y un amplio desarrollo de Lógicas no-standard, algunas de un gran valor aunque no hayan sido asumidas de forma general por la comunidad científica; ese estudio se hace sistemáticamente y de forma crítica en el apartado 6.5 del Capítulo-6 (lógicas intensionales, lógicas modales - temporal, deóntica, doxástica y epistémica-, teoría de modelos y semánticas lingüísticas, lógicas relevantes, lógica paraconsistente -*inconsistency tolerant logic*-, y lógica intuicionista). Hay varias modalidades de las Lógicas no-standard que se tratan ampliamente al comienzo del Capítulo-7: las Lógicas no-monotónicas, las Lógicas multivariantes, la *fuzzy logic* y las redes neuronales; con ello se pretende explorar las nuevas fronteras de la Lógica, que pensamos que podrían desarrollar esa disciplina en el futuro en la dirección del lenguaje formal de los sistemas expertos y de los sistemas que *aprenden*, y en conexión con nuevas ciencias como la simulación de los procesos cerebrales y las neurociencias, aportando en el estudio la información accesible de varios programas de investigación muy significativos en curso (*Big Brain Project, Brain Initiative, Human Brain Project*, etc). E igualmente los estudios sobre la *demostración informal* (Leitgeb, 2009) apuntan a la formalización de la lógica subyacente a los procesos cognitivos. En segundo lugar, abordamos el estudio de las consecuencias epistemológicas de un conjunto de ciencias Matemáticas y Exactas desarrolladas a lo largo de los últimos 80 años. La elección de estas teorías para nuestro análisis no ha sido arbitraria. Además de su desarrollo en lo que podríamos llamar la segunda revolución científica (la que surge a partir de 1930), todas comparten una aproximación a características del razonamiento humano que se escapan al análisis clásico: la *incertidumbre*, la *vaguedad*, la *no-monotonicidad* y la capacidad de *autoaprendizaje* y, en el caso de las teorías físicas examinadas, la postulación de objetos que tienen una forma de existencia *distinta* a la de los objetos del mundo cotidiano de los humanos introduciendo un importante *elemento subjetivo*. Partiendo de la Teoría de la Probabilidad y varias de sus más importantes extensiones a las ciencias físicas (estadística bayesiana, termodinámica y mecánica estadística, teoría de la información, *IP-theory*, teoría de la posibilidad, *QBism* o bayesianismo cuántico), se pretende determinar en qué consiste el carácter científico de estas teorías. Encontramos dos conexiones, una en la Teoría de la Medida y sus implicaciones y otra en el hecho de que el análisis debería hacerse desde la perspectiva superior de qué deberíamos entender por una *scientific explanation*. El tema fue ya planteado por los presocráticos, pero a partir de los años 40 del siglo XX se desarrolló un debate desde distintas perspectivas. Cfr., Hempel (1942, 1965); Hempel & Oppenheim (1948); Popper (1935); Braithwaite (1953); Gardiner (1959); Nagel (1961); Salmon (1971, 1984, 1994, 1997); Friedman (1974); Philip Kitcher (1976, 1989); Woodward (2011); Mayes (2014); (Bunge, 2006). Esto arroja nueva luz sobre algunas interpretaciones de la Matemática del siglo XX ya estudiadas; por ejemplo, concluimos que la concepción formalista de la Matemática desarrollada en el siglo XX lleva a un *no-discurso* o a un discurso sin referencia ni significado que favorece la creación de discursos esotéricos y de teorías que serían *pseudocientíficas* y que serían un simple juego de signos sin valor científico. Por el camino hemos analizado y realizado una valoración crítica de algunas de las modernas teorías de la ciencia, que aparecen como estudios monográficos relegados a las notas a pie de página, al igual que los estudios sobre las teorías científicas antes mencionadas, pero que ayudan a contextualizar nuestras tesis principales además de tener un valor propio como breves pero selectas y precisas monografías. Es el caso de los enfoques semánticos de Van Fraassen y de la *teoría estructural de la ciencia* de Sneed-Stegmüller-Moulines, cfr. Evert Beth (1935, 1951, 1959, 1963, 1964 y 1965), Sneed (1971), Sneed & Balzer & Moulines (1987), Moulines (1973 y 1996), Van Fraassen (1970, 1980, 1989, 1998, 2001, 2002 y 2007), Stegmüller (1952, 1957, 1965, 1976 y 1979), Suppes (1972, 1974 y 1988), Suppe (1974, 1989 y 2000), Giere (1988), Rosenberg (2005), Echeverría (1987) y Guerrero (2003, 2007 y 2012).

Para terminar, se intenta aclarar en el Capítulo-8 otro aspecto importante en la actual valoración de Kant. Ciertas investigaciones realizadas en los últimos 10 años sugieren que los procesos visuales y gráficos en la Matemática de Euclides representan un lenguaje en el que se expresa una lógica relacional que era también la propia de la Matemática clásica, al igual que la de gran parte de la moderna. E intentamos justificar que la *práctica* matemática de la Matemática de Euclides que estaba en la base de los análisis de Kant no era esencialmente distinta de la *práctica* de la Matemática moderna, en contra de lo que se pensaba a comienzos del siglo XX bajo la influencia del enfoque logicista planteado por Russell. Estas investigaciones reivindican expresamente la vigencia, al menos parcial, de la filosofía de la Matemática defendida por Kant y por Hilbert. Además, considerando su fundamento en los estudios previos de las neurociencias y de las ciencias cognitivas, estas investigaciones plantean, desde un punto de vista más general, un nuevo enfoque de la epistemología con un sólido fundamento *naturalista*. Cfr., Pacho (1993, 1995, 2009); Maddy (1990, 1997, 2007); Kitcher (1984, 1988, 1994). El origen de estos planteamientos está en el denominado *imagery debate* que surgió en torno a 1970 en USA (Pylyshyn, 1973, 1981, 2002, 2003). Sobre los años 90 se reprodujo el debate, pero esta vez con estudios experimentales neurocerebrales que les dieran un contenido concreto, y esas investigaciones extendidas a las ciencias cognitivas llegan hasta nuestros días con grandes avances. Cfr., Kosslyn (1975, 1980, 2005); Kosslyn & Koenig (1995); Kosslyn & Ganis & Thomson (2001). Esto ha dado lugar a una controversia centrada en la naturaleza de las representaciones internas que subyacen a la experiencia de visualización (Tye, 1991). A partir de aquí, se han desarrollado varios estudios específicamente epistemológicos centrados en el rol de las imágenes mentales y visuales en la Matemática (Mancosu 2005, Giaquinto 2007 y Manders 2008), destacando el trabajo publicado en 2007 por Marcus Giaquinto quien, desde un enfoque epistemológico de base *naturalista*, es decir, remitiéndose en sus limitaciones a los estudios científicos cognitivos, no sólo plantea la viabilidad formal y demostrativa de los *Elementa* sino que realiza un repaso por distintos aspectos de la Matemática moderna susceptibles de este tratamiento visual. Posteriormente un grupo de investigadores de la *Carnegie Mellon University* han codificado la sintaxis y semántica de los *Elementa* de Euclides y logrado traducir sus razonamientos a un lenguaje diagramático, reproduciendo por computación las demostraciones de Euclides, pero ahora traducidas a un lenguaje formal simbólico según la concepción moderna. Cfr., Mumma (2006, 2010); Avigad & Dean & Mumma (2009); Dean (2008); Northrop (2011). Y se han desarrollado también algunos avances sobre sus fundamentos neurológicos (Gallant, 2013, 2008; Cowen & Chun & Kuhl, 2014).

Por otra parte, una forma apropiada de acercarse a las afirmaciones de Kant consiste en entender sus conocimientos de Matemáticas, investigando la Matemática habitual del siglo XVIII y sus planteamientos; éste es precisamente el camino que siguen Donald Sutherland (2004, 2005, 2006) y Lisa Shabel (2003), estudiando especialmente la conexión con los escritos matemáticos de su maestro Christian Wolff, y reforzando parte de las conclusiones de los investigadores anteriores.

Todos los análisis anteriores considerados en su conjunto refuerzan considerablemente las conclusiones obtenidas en las Partes-I y II de nuestros análisis de Kant y Hilbert, rompiendo con gran parte de los lugares comunes en los estudios del siglo XX, y además les da una nueva perspectiva. Y es claro también que la situación en la epistemología de la Matemática hoy es muy distante de la hegemónica hace ahora 100 años a raíz de la publicación de los *Principia* de Russell (Corfield, 2003). La perspectiva que plantea el análisis en su conjunto, junto con la probable convergencia y estrategia cooperativa de todos estos programas de investigación neurológica y lógica, es el de un cambio, previsiblemente muy radical, en todos los estudios en las ciencias cognitivas, en la neurología y en la computación. Y consiguientemente en la epistemología y en la lógica. Todo esto, que incipientemente ya se vislumbra en los sistemas e informes que hemos analizado en esta Parte-III, cambiará radicalmente el plano de discusión sobre la cognición humana y sobre la ciencia, además de abrir un debate filosófico a un nuevo nivel sobre algunas cuestiones sustanciales: la relación hombre-máquina, el carácter y fundamento de la conciencia, y la naturaleza última de la inteligencia y de la misma vida.

En el estudio que hemos realizado hemos encontrado lo que sería la esencia de la Matemática: una *actividad* orientada a la resolución de problemas de un determinado campo que opera en distintas fases con procedimientos y valores epistemológicos distintos, y sobre *objetos* de características distintas en cada fase, y con *métodos* bien definidos y relativamente constantes a lo largo de la Historia. La *justificación* de una teoría matemática desde el punto de vista de una *explicación científica* del mundo aparece siempre ligada a su *aplicabilidad*. La Matemática aparece fundamentalmente como una *actividad* humana que aplica “su lógica” como una noción primitiva no explicitada; una actividad que parece ligada a capacidades cognitivas innatas del ser humano y que se remonta a la más remota antigüedad. E intentamos justificar que la *práctica* matemática de la Matemática de Euclides que estaba en la base de los análisis de Kant no era esencialmente distinta de la práctica de la Matemática moderna, en contra de lo que se pensaba a comienzos del siglo XX bajo la influencia del enfoque logicista planteado por Russell. Aunque algunas técnicas pudieran parecer distintas, los *procedimientos cognitivos*, la *lógica subyacente* y la *metodología* son esencialmente idénticas. Esto es lo que hemos denominado la *identidad de la práctica matemática*, y cuya demostración es una de las tesis fundamentales de esta investigación.

Y con ello terminamos en el Capítulo-9 en el punto de partida de nuestro trabajo, pero con una nueva perspectiva. Una característica fundamental de los sistemas representacionales de las ciencias modernas es, como hemos visto en nuestro análisis, la postulación de objetos que hemos caracterizado como objetos *que tienen una forma de existencia distinta* de los objetos del mundo cotidiano de los humanos. Y por ello el *realismo* adquiere distintos matices según el enfoque *ontológico* que se considere (Pacho, 1993). Puesto que esta problemática estaba ya en el seno del modelo de la Mecánica de Newton –si bien no tan claramente como en las modernas teorías físicas-, cabe conjeturar que Kant era consciente de la problemática, lo que explicaría la permanente tensión entre su *realismo empírico* y las críticas planteadas por él mismo desde el punto de vista *transcendental*; el clarificar esta conjetura exigiría un análisis a fondo de sus escritos sobre la Física, lo cual se plantea como una continuación natural de esta investigación; analizamos esta problemática en el último apartado del Capítulo-9 de la investigación al analizar “el punto de vista transcendental” de Kant. Cfr., Vaihinger (1884); Lehmann (1969); Stroud (1984); Röd (1996); Pacho (1977, 1993); Thomson (1972); MacLachlan (1995); Cicovacki (1995); Abela (2002); Allison (2004); Achourioti & Van Lambalgen (2011); Longuenesse (1997); Bird (1984); Guyer (1984); Walker (1989, 1997).

NOTA SOBRE LAS TRADUCCIONES.

1) Para las traducciones al español de la *KrV* se han considerado las siguientes:

- La traducción de García Morente (1928): "Crítica de la Razón Pura", Juan José García Norro y Rogelio Rovira (edit.), traducción de Manuel García Morente, Madrid: Tecnos, 2002 (2ª edic. 2006). La dificultad con esta edición es que no sigue la tradicional ordenación de la *KrV* según las ediciones A y B y los parágrafos numerados, por lo que es trabajoso buscar el párrafo en cuestión. Además, aunque los editores no aportan ninguna indicación, la traducción es en realidad incompleta faltando numerosos pasajes, aunque más amplia que la de 1928, debido probablemente a los manuscritos recientemente encontrados a los que se refieren los editores. Cuando se usa, se indica después de la cita traducida por (MGM, página), especificando así la página de la traducción donde está el párrafo citado.

- También se ha utilizado la traducción de Pedro Ribas: "Crítica de la Razón Pura", traductor Pedro Ribas, Madrid: Taurus, 2005 (2ª edic. 2007), que cuando se ofrece se indica siempre la referencia añadiendo al final el indicativo (PR). Esta traducción sigue la clasificación usual según las ediciones A y B, y parágrafo numerado, por lo que no se indica la página.

- Ocasionalmente se ha preferido aportar también la traducción inglesa. Cuando se ofrecen traducciones inglesas, se indica siempre la referencia al traductor. Se ha manejado la de Norman Kemp Smith (1929): "Critique of Pure Reason", London, Palgrave MacMillan, 1929. Se ha utilizado la reedición de 2007. También se ha consultado la traducción de Werner S. Pluhar, que contiene muchas consideraciones críticas de Patricia Kitcher y James W. Ellington a la traducción de Kemp Smith (la más usual en las publicaciones en inglés): "Critique of Pure Reason", Indianapolis & Cambridge: Hackett Publishing Company, 1996, en pasajes conflictivos, así como referencias detalladas de otras traducciones inglesas. Así, se ha tenido también en cuenta la traducción de Max Müller (MacMillans, 1881), reeditada en 2007 con comentarios críticos de Marcus Weigelt a otras traducciones (London, Penguin Books), y que es la traducción que Kemp Smith tomó como referencia en su traducción de 1929, y sobre todo la más reciente de Guyer y Woods (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998) y también la de J.M.D. Meiklejohn (Seattle, Washington: Pacific Publishing Studio, 2011). La de N. Kemp Smith y la de Guyer & Woods son las dos que se han utilizado en la mayoría de las citas. Habitualmente se aporta también el original alemán y, a veces, la traducción española.

2) El criterio general ha sido citar la versión original alemana de la edición referida en la Bibliografía (1998) y poner la traducción en nota a pie de página indicando la referencia de la traducción.

A veces se incluyen varias traducciones y en algún caso también una traducción directa propia que considero más adecuada, y en este caso aparece ésta sin referencia a la traducción, discutiéndose en algunas ocasiones los criterios de traducción. En alguna ocasión se presenta en cambio la traducción en el texto principal, y el texto original y traducciones alternativas en nota. Se ha realizado un importante trabajo comparativo de las distintas traducciones de Kant al inglés y al español que, lógicamente, no se incluye en el trabajo pero que nos han proporcionado una sólida base para investigaciones posteriores; por ello, a veces se incluyen algunos comentarios críticos sobre las traducciones y otras veces se aportan varias traducciones para que el lector pueda juzgar los matices por sí mismo, lo que entendemos que ayuda a aclarar el sentido de la cita. Así, en algunas ocasiones se aporta el original alemán en el texto principal y varias traducciones españolas y/o inglesas en nota a pie de página. La razón es la siguiente. Por una parte, se ha realizado un amplio trabajo comparativo de las distintas traducciones españolas e inglesas que, aunque obviamente no se discute en el trabajo por exceder al tema, dan una base para futuras investigaciones y, al tiempo, evidencian el origen de interpretaciones erróneas de Kant basadas en traducciones sesgadas. En algunos casos se discuten explícitamente aspectos de esas traducciones, pero en otros se incluyen simplemente varias traducciones sin comentarios para que el lector juzgue por sí mismo los matices y diferencias, pudiendo obtener así una mejor comprensión del pensamiento expresado por Kant y valorar nuestra interpretación.

3) Las citas ocasionales de otras obras de Kant se refieren a la edición de la Academia accesible online y referenciada en la Bibliografía, salvo las citas de la *Jäsche Logik*, que se refieren a la edición de 1919 referenciada también en la Bibliografía. Por regla general en las citas de obras de Kant distintas de la *KrV* se aporta el texto original alemán y las eventuales traducciones, cuando se aportan, son directas.

4) No existe una traducción al español de las obras de Hilbert. Existen traducciones de algunos artículos relevantes realizadas por la UNAM y de difícil acceso, y también traducciones diversas de algunas de sus obras, que están referenciadas en la Bibliografía. Las citas de Hilbert en este trabajo, cuando no se hacen directamente en el original alemán, se remiten a esas traducciones y, cuando no hay traducción española, son traducciones directas de (Gesammelte Abhandlungen, 1932 y 1935) y de otras ediciones originales, las cuales pueden obtenerse online en **www.sub.uni.goettingen.de**. Se añade al final de la Bibliografía reseñada de Hilbert una lista que incluye las traducciones recientes al inglés de algunos de sus artículos, conferencias fundamentales y cursos, y algunas citas se realizan utilizando esas traducciones inglesas. Por regla general se incluye la cita traducida al español en el texto principal y el original alemán, y excepcionalmente en inglés –si la cita está tomada de una traducción inglesa- en nota a pie de página.

5) Las citas de autores distintos a Kant y Hilbert se hacen como regla general aportando el texto original en el idioma en que se publicó; ocasionalmente en algunas citas relevantes en que se presenta el texto en español, se trata siempre traducciones directas del original al no existir traducciones al español de prácticamente ninguno de los autores estudiados. Las escasas citas de obras publicadas originalmente en francés, italiano o ruso se hacen a partir de su traducción inglesa, bien aportando la cita en inglés o bien traduciéndola al español.

PARTE-I

LA TEORÍA DEL CONOCIMIENTO DE KANT Y EL ROL DE LA INTUICIÓN. INTUICIONISMO FORMAL.

CAPÍTULO-1

Esquema cognitivo kantiano e Intuición

1.1.-Introducción al estado de la cuestión.

A partir de los años 60 del pasado siglo se ha producido un renovado interés en la Filosofía de Kant, en su enfoque epistemológico y en su teoría del conocimiento, y en particular del conocimiento matemático, especialmente en los países anglosajones e igualmente en Alemania. Se puede considerar el punto de partida la obra de Strawson (1966) *The bounds of sense*, con un fuerte influjo del enfoque de Frege, Russell y A. J. Ayer[8]. Para decirlo en palabras de Allison, Strawson fue seguido por numerosos filósofos que han tratado de formular y defender algunos argumentos vagamente kantianos "anti-escépticos" o "transcendentales" que estuvieran incontaminados por cualquier premisa idealista. Siguiendo a Strawson, han tratado de plantear como tarea fundamental la separación de lo que Strawson llama "argumentos analíticos" de la *Crítica de la Razón Pura* del idealismo transcendental, el cual, según Strawson creía, Kant desgraciada e innecesariamente asoció con ellos (Allison, 2004, 7). Es lo que Allison llama la Tesis de la Separabilidad: "existen límites a lo que podemos concebir de una posible estructura general de la experiencia, o acerca de lo que nos permite que ésta sea inteligible para nosotros mismos. La investigación de esos límites, la investigación del conjunto de ideas que forma el esquema limitativo de todo nuestro pensamiento sobre el mundo y sobre nuestra experiencia del mundo es evidentemente una importante e interesante empresa filosófica. Ningún filósofo ha hecho un intento más denodado en esa dirección que Kant (...) Allí donde encontraba características limitativas o necesariamente generales de la experiencia, declaraba que su fuente radica en nuestra propia constitución cognitiva; y esta doctrina la consideraba indispensable como una explicación de la posibilidad de conocimiento de la estructura necesaria de la experiencia. Ahora no hay duda de que esa doctrina es incoherente en sí misma y enmascara, más que explica, el carácter real de esa investigación; así que el problema central para la comprensión de la *Crítica* es precisamente el desligar todos los lazos con esa doctrina de los argumentos analíticos que, de hecho, son independientes de ella" (Strawson, 1966, 15-16)[9].

---

[8] Es imposible exagerar la importancia de la obra de Strawson en el ámbito anglosajón. En el siglo XX, antes de la obra de Strawson el interés en Inglaterra por la Filosofía Transcendental y, en particular por su Epistemología, era prácticamente nula. "Según el *Index to Theses accepted for higher degrees at the Universities of Britain and Ireland* fueron aprobadas entre 1950 y 1960 en las Facultades de Inglaterra, Escocia e Irlanda 227 trabajos de Filosofía (B.Litt., M.A., y Ph. D.). De ellas solamente 7 (aproximadamente el 3%) con un tema relacionado con la Filosofía Transcendental, y de ellas 5 sobre un problema de Ética y solamente 1 sobre un problema de Teoría del Conocimiento y otra sobre Estética" (Gisela Shaw, 1969, 136). Probablemente la opinión predominante sobre la Filosofía Transcendental era acorde con la de Russell, quien dice hablando de Kant: "Hume, con su crítica del concepto de causalidad, le despertó de sus sueños dogmáticos –al menos eso dice él-, pero el despertar fue sólo temporal y pronto inventó un soporífero que le permitió dormir de nuevo" (Russell, 1946, tomo II, p. 323). A partir de la obra de Strawson se produjo una auténtica avalancha de trabajos sobre Kant y, en particular, sobre su epistemología, que ha dado lugar a una cierta línea interpretativa (aunque con diferencias sustanciales en muchos aspectos entre los distintos autores) que desarrollamos en este trabajo. La obra de Strawson sigue, sin embargo, de actualidad. En 2007 se produjo su 12ª reedición por Routledge.

[9] Gisela Shaw (1969, 136-151) analiza la lectura de Strawson y la pone en conexión con otras interpretaciones ligadas a la llamada "escuela analítica", que estaba en el centro de las preocupaciones filosóficas en el ámbito anglosajón entre 1930 y 1960. "(Strawson) se interesaba en última instancia por la cuestión de qué aspectos de

Peter Frederick Strawson trabajó inicialmente en lógica filosófica y escribió un importante tratado de metafísica transcendental (Strawson, 1952) fuertemente influenciado por la *KrV*. Formado en Oxford antes de la II guerra Mundial por neokantianos y hegelianos británicos –junto con sus contemporáneos en Oxford J. L. Austin, A. J. Ayer, Michael Dummett, Paul Grice, y Gilbert Ryle– estuvo en sus primeras obras influenciado por la tradición enraizada en Frege, Russell, y Wittgenstein, y llegó a ser sin duda el más importante filósofo británico desde 1945 al fin de siglo (Hanna, 2012a, 179). Junto con Grice, Strawson defendió la distinción *analítico/sintético* frente a Quine y desarrolló una concepción no reductiva y holística del análisis filosófico (Strawson, 1992)[10]. Su obra *The Bounds of Sense* (1966), cuya influencia como hemos dicho llega a nuestros días, fue ampliamente aceptada por los filósofos analíticos (que entonces copaban los departamentos de las universidades anglo-americanas) y desarrollaba una interpretación extremamente original y aún hoy controvertida de la *KrV*. Interpretación que, por una lado está orientada semánticamente (considera a Kant un verificacionista), y tiene un claro carácter anti-psicologicista y también anti-idealista (acusa a Kant de berkelianismo). Para Hanna (2012a, 181) el punto crucial es, sin embargo, que *Bounds* conecta la idea de Kant de una *deducción transcendental* (A84–92/B116–24, B274–9, A734–8/B762–66) directamente con el concepto lógico-semántico de *presupposition* que Strawson había desarrollado en *Introduction to Logical Theory* (1952). El resultado de esa fusión es en su obra la noción (discutiblemente kantiana) de *transcendental argument*[11].

> "A transcendental argument is also an *anti-skeptical* argument when *P* states the logical denial of some skeptical thesis such as the Cartesian dream-skeptic's 'Possibly nothing exists outside my own phenomenally conscious states' (which is what Kant calls the thesis of 'problematic idealism' at B274) and *Q* states a proposition that the skeptic herself also rationally accepts, such as 'I am conscious of my existence as determined in time' (B275)" (Hanna, 2012a, 182).

Strawson hizo un uso explícito y amplio de los *argumentos transcendentales* en su libro *Individuals: An Essay in Descriptive Metaphysics* (1959), que muchos consideran firmemente enraizada en la tradición kantiana, por ejemplo, según Hanna (2012a); esto es así en el ámbito anglosajón, porque cómo hemos visto al analizar la opinión de Gisella Shaw esto no es así en los círculos kantianos más ortodoxos. De hecho en Kant la *deducción transcendental* es inseparable de aspectos como la psicología transcendental, el idealismo transcendental y el apriorismo sintético de la proposición P del esquema mencionado en la nota anterior. Y Strawson rechaza el idealismo y todo tipo de dualismos a favor de un radical antipsicologicismo y de un no menos radical realismo no-reductivo, holístico y analítico de

---

la *Crítica de la Razón Pura* podrían ser aún significativas para la Filosofía contemporánea" (Gisela Shaw, 1969, 145).

[10] "This in turn is intimately connected with Strawson's vigorous defense of irreducible conceptual intensionality in both logic and semantics, in *Introduction to Logical Theory* (1952), *Logico-Linguistic Papers* (1971), and *Subject and Predicate in Logic and Grammar* (1974). Here it is obvious that Strawson's line of thinking runs strongly parallel to Kant's theory of judgment, analyticity, and logic, which is also explicitly based on irreducible conceptual intensionality. Irreducible conceptual intensionality is also a basic theme of Strawson's immensely influential book on Kant, *The Bounds of Sense* (1966)" (Hanna, 2012a, 180).

[11] Así, una *presupposition* puede ser contextualmente definida como sigue: Una proposición *Q presupone* a una proposición *P* si y sólo si la verdad *P* es una condición necesaria de la verdad de *Q* y también una condición necesaria de la falsedad de *Q*. De modo que *P* es una condición necesaria de la mera significatividad y de la posibilidad de valoración de verdad de *Q*. Un *transcendental argument* tomaría la siguiente forma en general: 1) Asúmase la verdad o falsedad de la proposición *Q*, donde *Q* es una afirmación contingente sobre el mundo de la experiencia humana. 2) Muéstrese que la proposición *P* es una (o la) *presupposition* de *Q*, donde *P* es una afirmación que es necesariamente verdad. 3) Derívese la verdad, y por tanto la necesidad y apriorismo, de *P*.

los universales individuales, los objetos materiales individuales y las personas individuales. "But leaving all that aside, it remains only a very slight exaggeration to say that Strawson's 'descriptive metaphysics' is Kant's transcendental metaphysics *minus* Kant's mentalism" (Hanna, 2012a, 183). Para Hanna existe una dificultad seria en la noción clave strawsoniana de *argumento transcendental*. Arguye que el paso (2) del esquema más arriba expuesto nunca podría funcionar a menos que el verificacionismo semántico sea verdad y, además, esto exigiría que el idealismo transcendental sea verdad y *P* sea sintética y a priori. En tal caso, o el verificacionismo semántico y el idealismo transcendental son verdaderos y *P* es sintética y a priori, o bien los *argumentos transcendentales* de Strawson serían inválidos. Y sostiene que si este planteamiento no fuera correcto, debería demostrarse cómo el paso (2) puede de todas formas funcionar sin el verificacionismo ni el idealismo transcendental ni la sinteticidad a priori. "This is an unsolved problem that all Kantian philosophers after Strawson must face up to" (Hanna, 2012a, 183). La conclusión de Hanna es inadecuada y exagerada, puesto que su argumento puede valer para el sistema desarrollado por Strawson pero, como analizamos en detalle en este trabajo, los filósofos que analizamos más abajo y que parten de Strawson rechazan su "tesis de la separabilidad" y asumen el idealismo transcendental kantiano. Para un análisis de las continuidades, paralelismos y diferencias entre las aproximaciones de Kant y Strawson al método filosófico véase el artículo de H.-J. Glock (2003), "Strawson and Analytic Kantianism". En lo que concierne a los fundamentos de la Matemática, esta línea revisionista fue iniciada por Friedman (1985 y 1992). En esta última obra plantea una revisión a fondo y documentada del pensamiento kantiano sobre la Matemática y su engarce con los debates de la época.

En Alemania la obra clave fue la de Gerold Prauss (1977), quien a partir de un minucioso estudio lingüístico de la *Crítica de la Razón Pura*, realiza una profunda revisión del pensamiento de Kant que rompe con la tradición interpretativa del Idealismo Alemán, interpretación que se consolidó a través de la Universidad de Jena (Reinhold 1789), culminando en las obras de Fichte y Hegel, y rompe también con otras interpretaciones influyentes (Adickes, 1924) (Vaihinger, 1881) o las de los Neo-kantianos[12]. En los países

[12] Desde la muerte de Kant en 1804 su filosofía fue, al menos en la primera mitad del siglo XIX, prácticamente olvidada. El panorama filosófico alemán hasta 1870 estuvo en parte dominado por un idealismo extremo, dentro de un ambiente con una profunda espiritualidad, y en el que eventualmente se mencionaba a Kant pero bajo la interpretación de Reinhold y la escuela de Jena; como contrapunto se desarrolló el llamado *materialismo*, sostenido por la "izquierda hegeliana" y por la emergente corriente "positivista". El ambiente lo retrataron muy bien, y con una gran mordacidad, Marx y Engels en *Die deutsche Ideologie* (1846). Aunque la influencia de Kant es clara en distintos autores, no existía nada parecido a una escuela en torno a esa filosofía. Jensen señala las influencias que operaron sobre los fundadores de las distintas escuelas Neo-kantianas: "the progenitors of Neo-Kantianism, represented principally by Liebermann, Fischer, Trendelenburg, Helmholtz, and Lange, evince a preference for Kant's theoretical rather than ethical or aesthetical writings. While this tendency would be displaced by both the Marburg school's social concerns and the Baden school's concentration on the logic of values, the proto-Neo-Kantians had definite repercussions for later figures like Hans Vaihinger (1852-1933), the so-called empiro-positivists like Richard Avenarius and Ernst Mach, and the founder of the Vienna Circle, Moritz Schlick (1882-1936)" (Jensen, 2014, 3). El Neo-kantismo en todas sus formas fue un movimiento estrictamente alemán, aunque tuvo algunas repercusiones en Francia y en Inglaterra, y que abarca aproximadamente desde 1870 hasta 1945. Bajo el lema de Otto Liebermann (1840–1912) en su *Kant und die Epigonen:eine kritische Abhandlung* (Stuttgart: Schoeber, 1865) "Zurück zu Kant!", [**https://archive.org/details/kantunddieepigo00lieb**] se agruparon muchos filósofos, entre ellos Alois Riehl (1844–1924), Hermann Cohen (1842–1918), Paul Natorp (1854-1924), Heinrich Rickert (1863–1936) y Ernst Cassirer (1874–1945). Se trató inicialmente de un movimiento de reacción frente a la evolución, desde una particular y distorsionada lectura de Kant de la escuela de Jena y del Idealismo alemán, y también de una reacción frente a los retos que los novedosos resultados de las ciencias empíricas y exactas planteaban al esquema kantiano. Frederick C. Beiser (2014) pone el foco en un tratamiento de los movimientos neokantianos mucho antes del surgimiento oficial de las escuelas que aquí describimos. Beiser arguye que la fuente de un tal neokantismo radicaría en figuras cruciales, aunque rechazadas por la filosofía hegemónica de su época: Jakob

Friedrich Fries, Johann Friedrich Herbart, y Friedrich Beneke, a los que en su conjunto denomina "la tradición perdida". Serían los primeros neokantianos porque defendían los límites que Kant imponía al conocimiento frente al exceso especulativo del idealismo. Concluye que ésta llegaría a ser la mayor fuerza filosófica a partir de 1870 como una respuesta a tres líneas fundamentales del desarrollo de la cultura alemana: el colapso del idealismo especulativo, el debate sobre el materialismo y la misma crisis de identidad de la Filosofía. El Neo-kantismo se desarrolló al comienzo del siglo XX en tres versiones significativamente diferentes: (1) Un Neo-kantismo (principalmente centrado en Marburg) *orientado a las ciencias*, estimulado por los desarrollos de la época en las ciencias exactas y naturales y que también tenía una importante referencia en el empirismo clásico de David Hume (1711–76) y John Stuart Mill (1806–73). Sus principales representantes son Hermann Cohen, considerado el fundador, Paul Nartop, Karl Vorländer, Nikolai Hartmann y Ernst Cassirer. (2) Un Neokantismo considerado por muchos *psicologicista* (principalmente centrado en Göttingen) que se fusionó con las corrientes de la psicología empírica. Intenta apoyarse en las interpretaciones sobre Kant de Jacob Friedrich Fries, al que se le acusó de psicologismo (aunque alguno de sus defensores, como Nelson, lo rebatieran enérgicamente). Sus principales representantes son Jürgen Bona Meyer, Rudolf Wagner y Leonard Nelson. Hay que distinguir entre la escuela formada originalmente en torno a Fries y la denominada *Neo-Fries'sche Schule* fundada por Nelson. Sin embargo, la descripción que usualmente liga a esta escuela con la psicología empírica no es totalmente exacta, como veremos en el caso de Nelson y su proyecto de desarrollo de una filosofía de la Matemática a partir de la noción de Fries de una *Kritische Mathematik*. La biografía más detallada de Nelson está en *Neue deutsche Biographie*, Bd. 19, (Berlin, 1999), 60-2, [**http://www.muenchener-digitalisierungszentrum.de/**]. Una fuente secundaria sobre la relación entre Nelson y Husserl está en la biografía de Constance Reid sobre Hilbert, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986, y en la autobiografía de Edith Stein *Life in a Jewish Family 1891-1916*, The Collected Works of Edith Stein, Volume 1, Edited by Dr. L. Gelber and Romaeus Leuven, OCD, English translation by Josephine Koeppel, OCD, Washington DC: ICS Publications, 1986. Una obra básica sobre las relaciones entre Nelson y Hilbert es la de Peckhaus (1990) *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*. (3) Un Neo-kantismo *idealista* (principalmente centrado en las Universidades de Friburgo y Heidelberg, en el Land de Baden) que convergía con elementos de la entonces hegemónica tradición hegeliana. A esta escuela se las suele identificar frecuentemente como la "escuela de Heidelberg" o "escuela de Baden", y también llamada la *Südwestdeusche Schule*. Sus representantes más destacados fueron Wilhelm Windelband, un estudiante de Kuno Fischer y Hermann Lotze, y Heinrich Rickert. Tuvo una fuerte influencia, por ejemplo, en la filosofía del Derecho, fundamentalmente a partir de la obra de Emil Lask, quien formuló su llamada *teoría crítico-axiológica*. Otro autor fundamental fue Gustav Radbruch. Cfr. F. Münch: *Kultur und Recht* , Leipzig 1918, y también F. Münch: *Die wissenschaftliche Rechtsphilosophie der Gegenwart in Deutschland*, en *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, Bd. 1* (1918-19). No se puede minusvalorar la importancia que tuvo este movimiento, si tenemos en cuenta que el *Neo-kantismo psicologicista* dio lugar a la *Fenomenología*, el *Neo-kantismo idealista* al *Neo-hegelianismo* y el *Neo-kantismo orientado a las ciencias* al *Empirismo Lógico* y al *Positivismo Lógico*, corrientes que dominarían la escena filosófica, junto a la *filosofía analítica*, durante todo el siglo XX. La misma *filosofía analítica*, que inicialmente surgió entre finales del XIX y los años 30 como una reacción frente al *Neo-kantismo* y *Neo-hegelianismo*, surgió de hecho del seno del movimiento neo-kantiano. Cfr. "Without Kant's Critical Philosophy, there would have been no such thing as analytic philosophy" (Hanna, 2012a, 158). Cfr. también: Hanna 2012a ; Beck, L. W.,"Neo-Kantianism", en P. Edwards (ed.) *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. 5, New York:Macmillan, 1967, pp. 468–73; Köhnke, K., *The Rise of Neo-Kantianism*, trans. R. Hollingdale. Cambridge: Cambridge University Press, 1991; Soames, S., *Philosophical Analysis in the Twentieth Century*, 2 vols. Princeton, NJ: Princeton University, Press, 2003, esp. vol 2, pp. 461-476, y Jensen (2014). Jensen (2014) amplía la lista de los movimientos neo-kantianos introduciendo a autores recientes, que han protagonizado a partir de 1960 una vuelta al kantismo principalmente en los países anglosajones, y que son un objeto principal de nuestra investigación en este trabajo. Sorprendentemente ninguno de estos autores se apoya -y la mayoría ni siquiera incorpora una referencia a ellos- en las escuelas Neo-kantianas alemanas más arriba descritas. Sorprendentemente, porque durante más de 30 años, hasta 1933, éstos coparon la mayoría de los puestos académicos de Alemania. Jensen esboza una explicación. Una gran parte eran judíos, y además liberales o socialistas, y fueron purgados totalmente por los nazis acabando gran parte de ellos en el exilio. Al mismo tiempo, las Universidades anglo-americanas estaban dominadas en sus departamentos por representantes de la filosofía analítica que, en general, menospreciaban la filosofía kantiana, dándose así la paradoja de que en aquellos años eran más conocidos en Inglaterra y los Estados Unidos representantes de la filosofía alemana que nunca tuvieron un puesto académico (como Kierkegaard, Schopenhauer o Nietzsche) que los filósofos académicos alemanes. Recientemente, tal vez debido al *regreso a Kant* de una parte importante de los filósofos angloparlantes, han comenzado a publicarse amplios estudios sobre los Neokantianos. Por ejemplo, Luft & Rudolf Makkreel (2010) han publicado *Neokantianism in Contemporary Philosophy*, con una extensa colección de trabajos de anglosajones, el enfoque de Strawson y probablemente del mismo Russell, no se puede entender sin la interpretación del pensamiento de Kant que llegó a ese ámbito a través de diferentes versiones que son analizadas por Gisella Shaw (1969), a quien hay que mencionar para explicar el origen de las interpretaciones más relevantes hasta esa fecha en el ámbito anglosajón. Sin embargo, a partir de este punto, un grupo diverso de pensadores anglosajones, realizan una revisión del pensamiento kantiano negando la Tesis de la Separabilidad de Strawson e interpretando el Idealismo Transcendental kantiano en un sentido que confirma el carácter de "revolución copernicana" que le atribuía el mismo Kant. Analizaremos en detalle las obras de Graham Bird (2006), Lorne Falkenstein (2004), Henry Allison (2004), Patricia Kitcher (1990) y Paul Abela (2002) y las perspectivas de investigación que abren. E intentaremos fundamentalmente determinar lo que Kant entendía por "intuición" y como aplica esta noción en el contexto de la Matemática y en relación con los juicios matemáticos. Se basan todos ellos en la revisión de Strawson, aunque desde un punto de vista crítico, y en el trabajo citado de Prauss.

Se puede considerar que todos estos autores constituyen una línea interpretativa de Kant desarrollada fundamentalmente en los países anglosajones en los últimos 50 años, con sus matices, pero que rompen con las tres líneas básicas anteriores en la interpretación de Kant: la de la escuela de Jena y el Idealismo alemán, la neokantiana (véase la nota anterior) y la de Adickes. Todas estas interpretaciones anteriores no se estudian en este trabajo, salvo incidentalmente. En 1969 Gisela Shaw caracterizaba la interpretación de Strawson, y de otros kantianos británicos como Graham Bird, de la siguiente manera: "la más reciente interpretación de un autor inglés de la *Crítica de la Razón Pura* apareció en 1966. El autor, de forma análoga a Bird, se circunscribe a un círculo temático determinado. Si Bird se limita a al problema de los conceptos kantianos en relación a los objetos, Strawson se circunscribe a los

investigación sobre estos autores y Jensen (2014, 11) presenta una larga colección de autores sobre el tema, todos publicados a partir del año 2000. La importancia de estos autores para el pensamiento contemporáneo - además de por su influencia en el empirismo lógico y en el positivismo lógico, ya mencionada- queda clara en la revisión que hace Jensen (2014) de los autores que influyeron en ellos (él los denomina *proto-neo-kantians*) como Kuno Fisher, Trendelenburg, Wagner o Liebermann, y la multitud de autores que fueron discípulos suyos o, incluso, tuvieron puntos de contacto con su pensamiento: Vaihinger, Heidegger, Husserl, Frege, Helmholtz, Emil Lask, Wilhelm Dilthey, Max Weber, Karl Jaspers, Georg Simmel, Richard Avenarius, Ernst Mach, Alois Riehl, Rudolph Otto, Ernst Troeltsch, Paul Tillich, Bruno Bauch, Nikolai Hartmann, y también algunos extranjeros como José Ortega y Gasset, Boris Pasternak, Georg Lukàcs y muchos más que menciona o analiza Jensen (2014, 12). También analiza la influencia de estos movimientos Neokantianos en las Universidades francesas; Cfr. también (Luft & Capeillères, 2010, 70-80). A muchos de los autores aquí citados es difícil clasificarlos unívocamente en una u otra de las escuelas mencionadas, las cuales se pueden realmente considerar más bien una clasificación por la temática. Lo que identifica al conjunto, siguiendo el lema de Liebermann *Zurück zu Kant* o el posterior *Mit Kant –über Kant hinaus!* (Alfons Bilharz: *Mit Kant –über Kant hinaus! Ein Nachtrag zur Centennarfeier*, Wiesbaden: Verlag von J. F. Bergmann, 1904) [**https://archive.org/details/mitkantberkant00bilhuoft**], es el hecho de que todos consideran a Kant el cénit de la filosofía occidental y pretenden *reinterpretarlo* y *transcenderlo*, creando así cada autor a partir de aquí su propio sistema filosófico. Además, los neokantianos tenían una estrecha conexión con muchos científicos, muchos de los cuales se consideraban vagamente kantianos como Frege o Hilbert, estableciéndose de forma natural una amplia corriente de intercambios. Como hemos mencionado, Volker Peckhaus (1990) analiza detalladamente las relaciones entre la escuela neokantiana de Göttingen, la *Neo-Fries'sche Schule* fundada por Nelson, y Hilbert y los miembros de su escuela, así como sus controversias, e intenta fundamentalmente establecer las conexiones entre el programa matemático de Hilbert y la Filosofía Crítica. Comentaremos este estudio en una nota posterior. El muy reciente interés por los Neo-kantianos ha venido acompañado por un *revival* de algunos autores específicos, como es el caso de Ernst Cassirer, al que dedicamos una nota posteriormente. Muchos autores encuentran también una profunda huella del pensamiento kantiano en el positivismo lógico de la Escuela de Viena y en el empirismo lógico; de hecho, muchos de estos pensadores tuvieron un intenso contacto hasta 1933 con las escuela neokantianas e, incluso, muchos surgieron de ellas (Friedman, 1994), (Majer, 1994), (Joergensen, 1951), (Milkov, 2008). Las estrechas relaciones de Hilbert con los neokantianos, así como su interpretación, se estudian en el apartado 4.2.2 del Capítulo-4.

presupuestos metafísicos de la Filosofía Transcendental, y eso no fundamentalmente desde un punto de vista histórico sino sistemático. Lo que le interesa en última instancia es la cuestión de qué aspectos de la *Crítica de la Razón pura* serían aún significativas para la Filosofía contemporánea" (Shaw, 1969, 145). Tras un detallado análisis de la obra concluye irónicamente que "el libro de Strawson sobre Kant demuestra que la actitud de la escuela analítica frente al Idealismo Transcendental y su problema de 'la cosa en sí' en los treinta años desde la aparición de *Lenguaje, Verdad y Lógica* [de Ayers], aunque con agudeza polémica y desenfado juvenil, no ha podido perder el decisivo rechazo a toda posición metafísica. Más aún, se demuestra que con el curso del tiempo los defensores de esa dirección filosófica abandonan el suelo neutral del análisis lógico a favor de un realismo empirista (mayormente moderado) y se han embarcado de nuevo en una discusión sobre la esencia de la realidad y de nuestro conocimiento. Y con ello vuelve la conclusión a reproducir la herencia de Locke y Hume y vuelve la convicción, anclada de forma renovada en una actitud fundamentalmente empirista, de que todas las cuestiones filosóficas sobre la esencia y el ser conducen más allá del dominio de toda experiencia sensible hacia una problemática aparente" (Shaw, 1969, 151). Ciertamente esta es la característica común a todos los autores principales que consideramos en este trabajo, antes mencionados. A Graham Bird lo caracterizaba Gisela Shaw ya en 1969 como un "realista empiricista" que en su obra *Kant's Theory of Knowledge* "se alinea fundamentalmente con aquellas tomas de posición contemporáneas sobre la *Crítica de la Razón pura* que mantienen que el concepto de "la cosa en sí" sería algo así como una construcción lingüística auxiliar y lo interpretan en el marco de un realismo empiricista", aunque reconoce que su libro pertenece a "las escasas investigaciones inglesas que toman como tema un asunto de la *Crítica de la Razón pura"* (Shaw, 1969, 131). Pero la obra de Prauss (1977) vendría a demostrar la posición de Bird y éste reconoce la concordancia entre ambos en su obra madura: "los libros de Gerold Prauss, pero especialmente su obra 'Kant und das Problem der Dinge an sich', proveen con gran detalle un punto de vista diferente al de Adickes. Su visión es muy próxima a la mía, aunque no la misma. Pero he pensado que no merecía la pena remarcar aquí tales diferencias, teniendo en cuenta la gran concordancia básica entre nosotros" (Bird, 2006, 838). Y también para Allison: "Esta discusión está basada en el análisis filosófico del tema de Prauss… Aunque hay significativas diferencias, algunas de las cuales expondré más tarde en este capítulo, mi análisis de este tópico está profundamente influido por Prauss" (Allison, 2004, 458)[13].

En relación con los fundamentos de la Matemática puede decirse que la situación es especialmente compleja porque se solapan sus argumentos en relación con la Matemática relacionados con el papel que en su sistema tienen el espacio y el tiempo para su proyecto fundamental, una teoría del conocimiento, con los argumentos sobre los fundamentos de la Matemática como ciencia específica. Investigaremos la obra de Kant en este aspecto y en

[13] Estos son los antecedentes de la línea interpretativa que se estudia en este trabajo. Resulta curioso que, cuando estudiemos el trabajo de Hilbert en los *Grundlagen* y concluyamos que su obra está guiada por una lectura de Kant, nos encontremos con la interpretación de Leo Corry en "David Hilbert y su Filosofía Empiricista de la Geometría" (Corry, 2002) en donde sostiene una conexión empirista en la concepción de Hilbert sobre la Geometría. Pero ya bastante antes Stephan Körner encontró una conexión entre la lectura de Kant por Hilbert y un cierto empirismo en relación con su filosofía de la Matemática: "(a Hilbert) se le comprende mejor como un transfinitista metodológico que es también un realista metodológico. En efecto, sólo concede 'realidad' a los conceptos empíricos, y considera que los conceptos no empíricos como el de 'infinitud real' sólo deberían admitirse si puede demostrarse que la teoría que los emplea es congruente" (Körner, 1960, 141). Una de las tesis de nuestro trabajo es precisamente que Kant, por decirlo de alguna manera, está mucho más cerca de Hume que de Leibniz. Naturalmente esto hay que matizarlo teniendo en cuenta que una de las tareas de la *Crítica de la Razón Pura* era precisamente demostrar las deficiencias del enfoque empirista de Hume, en el sentido de que en el fondo se convertía en un enfoque anti-realista.

relación con su concepto de “intuición”. Un punto fundamental para valorar la vigencia y utilidad de la perspectiva kantiana consiste en determinar los problemas fundamentales que inciden en una discusión epistemológica de la matemática moderna, su estado actual en la investigación matemática y las diferencias o novedades con respecto a su estado en la época de Kant, así como qué problemas o exigencias de revisión plantea esta evolución (o revolución) a la epistemología kantiana y al rol de la intuición, y si se puede aceptar el “proyecto kantiano” y el corpus básico de la Crítica Transcendental, incluyendo muy especialmente su uso de la intuición en la fundamentación de la Matemática y el carácter *sintético* y *a priori* de ésta. La conclusión inmediata que uno extrae cuando lee a los autores que analizan el rol de la intuición en la concepción de las Matemáticas de Kant, es que entienden por intuición cosas realmente distintas y que presuponen unas interpretaciones muy diversas del papel específico que la intuición tiene en el sistema kantiano. Por eso el estudio se realiza desde la base, lo cual implica un encuadre muy amplio y general. Nuestro primer objetivo será por tanto fijar el sentido (o los sentidos) del término *intuición* en el esquema cognitivo kantiano, aunque nuestro estudio en este punto se limitará básicamente a la *Estética Transcendental*, quedando abiertos a una investigación posterior aspectos fundamentales de la *Lógica Transcendental*, tales como el rol de la *imaginación* y la *síntesis* en la *intuición*. Y nuestro segundo objetivo, su papel específico en la concepción de las Matemáticas de Kant. Gran parte de la crítica al trabajo de algunos autores sobre el rol de la intuición en las Matemáticas y la concepción de Kant al respecto se debe basar en una crítica a la lectura que esos autores hacen de esos conceptos básicos de Kant, así como a las concepciones que sostienen sobre las Matemáticas y el papel de la Lógica Formal en ellas. Esto nos obligará a hacer ciertas precisiones, útiles para nuestro contexto, de términos fundamentales relacionados como son la *cosa en sí*, las distinciones *analítico-sintético, a priori-a posteriori* y *empírico-transcendental*. La interpretación de Kant por la llamada psicología transcendental, y en particular la interpretación de Patricia Kitcher, será objeto de un estudio detallado. Aunque el gremio de los filósofos es reacio a asumir tales interpretaciones realizadas en base a un enfoque científico-empírico, el hecho de que los recientes avances en el campo de las neurociencias y de la inteligencia artificial hayan encontrado su inspiración en Kant, y en él un marco teórico previo a sus desarrollos experimentales, no sólo no debe despreciarse sino que, además de estar muy de acuerdo con la posición metodológica de Kant, plantea la cuestión metafilosófica sobre la naturaleza y función de la Filosofía, entendiendo ésta en primer lugar como una “crítica sobria”, más allá del marco que le había asignado el propio Kant, en cuanto que ha sido capaz de crear un marco conceptual útil para unas ciencias empíricas. Analizar las posibilidades de tal enfoque y las consecuencias que se podrían derivar de él será nuestro tercer objetivo.

Para el análisis de cualquiera de los items mencionados se podrían plantear dos estrategias. Una, el análisis comparativo de las distintas interpretaciones y lecturas en la literatura. Teniendo en cuenta que muchos de esos temas llevan más de 200 años en discusión y que no existe unanimidad en la interpretación, esto significaría que cualquiera de ellos podría ser un estudio independiente que abarcaría toda una tesis doctoral. La segunda estrategia, que es la que hemos adoptado, consiste en, sin renunciar a algunas referencias comparativas particularmente relevantes, desarrollar y justificar una línea interpretativa. La línea desarrollada no es la más generalmente aceptada hasta hoy, pero creo que queda sólidamente justificada.

La crítica más influyente (todavía hoy) a la epistemología kantiana, y en particular a su filosofía de la Matemática (bien que asumiendo una interpretación del pensamiento de Kant muy distinto al defendido aquí) procede de planteamientos de fondo logicistas. Resulta curiosa la supervivencia, prácticamente reducida al ámbito de la Filosofía de la Ciencia y de la Lógica, del *logicismo* cuyas tesis y autodeclarada modernidad analizaremos y criticaremos en detalle en este trabajo, cuando el mismo Russell al final de sus días estaba convencido del error de sus planteamientos originales en este sentido. Bertrand Russell (al igual que G. E Moore, que ejerció una gran influencia sobre él), comenzó su carrera filosófica en la línea del neokantismo psicologicista con su tratado de geometría ya mencionado *An Essay on the Foundations of Geometry* (Russell, 1897) y basado en su disertación en el *Trinity College*, la cual fue supervisada por Ward y también por Whitehead. El punto fundamental de la obra consistía en determinar lo que podía preservarse de las teorías de Kant, que se basaban en una concepción del espacio-tiempo euclídea (naturalmente, según la forma de interpretar esa relación kantiana por los intérpretes del siglo XIX, y que era básicamente psicologicista) después del descubrimiento y desarrollo de las geometrías no euclidianas. Al mismo tiempo había un significativo componente hegeliano en el pensamiento temprano de Russell, probablemente inspirado por su estudio de la *Logic* de Bradley y sus discusiones con el metafísico de la escuela hegeliana escocesa y también miembro del *Trinity* John McTaggart Ellis McTaggart (1866-1925). (Cfr.: Hanna, 2012a ,167; Hylton, 1990; Monk, 1996). Su mentor James Ward (1843-1925), un neo-kantiano fuertemente influenciado por el pensamiento de Brentano (Ward, 1911, 547–604), dirigió también la disertación en el *Trinity College* de G. E. Moore (1873–1958), que versó precisamente sobre Kant. Moore, gran amigo de Russell, además de su mentor, fue probablemente la persona que más influyó en el cambio radical de pensamiento de Russell que se produjo entre 1897 (fecha de la publicación de los *Essay on the Foundations of Geometry* y 1903, fecha de publicación de sus *Principles of Mathematics,* que describían los principios filosóficos que 7 años después darían lugar a su monumental obra (en colaboración con su otro mentor Whitehead) *Principia Mathematica* y que sentarían las bases del llamado *logicismo*. Se pueden encontrar otras influencias que explican ese cambio radical en el pensamiento de Russell. Para Hanna (2012a, 165) la crítica que escribió Moore a los *Essay* (G. E. Moore, 1899, 397–405) en la que acusaba a Russell de cometer la "falacia kantiana" de fundamentar el apriori en consideraciones psicológicas fue decisiva, pero también coincidió con las lecturas por Russell de Frege, Boole, von Meingong y, sobre todo Peano, y que produjeron un giro radical en su pensamiento que, en opinión de Hanna, se orientó en la dirección defendida por Moore, aunque una total identificación entre ambos como sostiene Hanna es muy discutible. G.E. Moore comenzó también su carrera filosófica, al igual que Russell, con su disertación en el *Trinity College* sobre Kant, en una línea de un psicologicismo neo-kantiano y bajo la dirección de Ward, exactamente igual que años más tarde lo haría su discípulo y amigo Russell. Pero pronto se rebeló radicalmente contra las enseñanzas de su maestro y desarrolló una crítica radical de la teoría del juicio de Kant profundamente anti-psicologicista, anti-idealista y realista que se plasmó en sus trabajos *The nature of judgment* (1899) y *The refutation of idealism* (1903), además de algunos trabajos de Ética en la línea de Brentano. Pero para Hanna (2012a , 165), aunque Frege se podría considerar el abuelo de la *filosofía analítica*, "in view of Frege's partial Kantianism, G. E. Moore (1873–1958) was in fact the founding father of philosophical analysis. Paradoxically however, Moore invented analysis not so much by writing about it, as instead by *living it*, that is, by virtue of his passionately and relentlessly deploying the method of of decompositional analysis in his early philosophical writings and by the powerful influence of his charismatic philosophical personality on Russell and Wittgenstein". Porque lo que realmente distingue a Moore es, precisamente, su radical anti-kantismo, aspecto que también caracterizaría la posición *logicista* de Russell. El mismo Russell (1903, xviii) específica a quienes considera que han influido en su cambio y en su última obra: "in Mathematics, my chief obligations, as is indeed evident, are to Georg Cantor and Professor Peano … and in the more philosophical parts of the book I owe much to Mr. G. E. Moore besides the general position which underlies the whole". Más arriba hemos aportado otra cita donde recalca la influencia intelectual de Moore en su trabajo filosófico. También cita, naturalmente, a Whitehead, con quien ya estaba colaborando y, en relación a Frege dice que "if I had become acquainted sooner with the work of Professor Frege, I should have owed a great deal to him, but as it is I arrived independently at many results which he had already established". Es decir, que coincide con Frege en lo que recientemente ha conocido de él, pero que no ha tenido una influencia en su trabajo. En muchas partes de la obra aparecen citas y coincidencias con Leibniz, quien parece que le inspiró en muchos puntos. Y en 8 lugares aparecen citas de Couturat quien, precisamente en 1901 había publicado las obras completas de Leibniz con trabajos hasta entonces inéditos, traducción a la que parece que Russell tuvo acceso y que probablemente le influenció mucho.

Pero el segundo cambio radical de Russell se produjo tras sus discusiones con su discípulo Wittgenstein: "in fact Russell's program of philosophical analysis had fundamentally collapsed by 1914, mainly as the result of his tumultuous personal and philosophical encounters with the young Wittgenstein" (Hanna, 2012a,168). Desde 1912 Wittgenstein fue estudiante investigador con Russell, con quien mantuvo largas conversaciones en las que criticó los planteamientos logicistas de Russell y los presupuestos de la obra que este preparaba (*Theory of Knowledge*). Sus críticas afectaron tanto a Russell que abandonó el proyecto del libro y cambió radicalmente de opinión, considerando erróneos los planteamientos de la que había sido la obra de su vida, el *logicismo*. Como confiesa en su Biografía: "I wrote a lot of stuff about Theory of Knowledge, which Wittgenstein criticised with the greatest severity[…] His criticism . . . was an event of first-rate importance in my life, and affected everything I have done since. I saw he was right, and I saw that I could not hope ever again to do fundamental work in philosophy. My impulse was shattered, like a wave dashed to pieces against a breakwater. . . . I *had* to produce lectures for America, but I took metaphysical subject although I was and am convinced that all fundamental work in philosophy is logical. My reason was that Wittgenstein persuaded me that what wanted doing in logic was too difficult for me. So there was really no vital satisfaction of my philosophical impulse in that work, and philosophy lost its hold on me. That was due to Wittgenstein more than to the war" (Russell, 1975, 282). La guerra les separó, pero al final de ella Russell ya estaba totalmente convencido de los planteamientos de su discípulo y del error de sus antiguos planteamientos logicistas, como se evidencia en su obra *The philosophy of logical atomism* (Russell, 1956), donde indica que "the following is the text of a course of eight lectures delivered in Gordon Square London, in the first months of 1918, which are very largely concerned with explaining certain ideas which I learned from my friend and former pupil, Ludwig Wittgenstein. I have had no opportunity of knowing his views since August, 1914, and I do not even know whether he is alive or dead".

Un objetivo de este trabajo es demostrar lo infundado de esa crítica logicista y la debilidad objetiva del planteamiento logicista para abordar una fundamentación epistemológica de la Matemática, tanto de la clásica como de la moderna.

1. 2.- Algunos significados del proyecto de Kant. La "revolución copernicana".

Podríamos comenzar esta cuestión, pues en realidad debería hablarse más bien de los proyectos de Kant, ya que sólo en la "Crítica de la razón pura" se superponen varios, por la famosa cita del prólogo de la 2ª edición:

> "Bisher nahm man an, alle unsere Erkenntnis müsse sich nach der Gegenstände richten; aber alle versuche über sie a priori etwas durch Begriffe auszumachen, wodurch unsere Erkenntnis erweitert würde, gingen unter dieser Voraussetzung zu Nichte. Man versuche es daher einmal, ob wir nicht in den Aufgaben der Metaphysik damit besser fortkommen, dass wir

annehmen, die Gegenstände müssen sich nach unserem Erkenntnis richten, welches so schon besser mit der verlangten Möglichkeiten einer Erkenntnis derselben a priori zusammenstimmt, die über Gegenstände, ehe sie uns gegeben werden etwas festsetzen soll. Es ist hiermit eben so, als mit den ersten Gedanken des Copernicus gewandt, der, nachdem es mit der Erklärung des Himmelsbewegungen nicht gut fort wollt, wenn er annahm, das ganze Sternheer drehe sich um den Zuschauer, versuchte, ob es nicht besser gelingen möchte, wenn er den Zuschauer sich drehen, und dagegen die Sterne in Ruhe lies. In der Metaphysik kann man nun, was die Anschauung betrifft, es auf ähnliche Weise versuchen" (BXVI)[14].

Con independencia de que se haya discutido la pertinencia de la comparación [15], queda claro que Kant pretendía cambiar los enfoques tradicionales del problema, como demuestran las siguientes citas.

"Weil Erfahrung selbst eine Erkenntnisart ist, die Verstand erfordert, dessen Regeln ich in mir, noch eher Gegenstände mir gegeben werden … dass wir nämlich von den Dingen nur das a priori erkennen, was wir selbst in sie legen" (BXVII – XVIII)[16].

---

[14] "Hasta ahora se admitía que todo nuestro conocimiento tenía que regirse por los objetos; pero todos los ensayos para decidir *a priori* algo sobre estos, mediante conceptos, por donde sería extendido nuestro conocimiento, aniquilábanse en esta suposición. Ensáyese, pues, una vez si no adelantaremos más en los problemas de la metafísica admitiendo que los objetos tienen que regirse por nuestro conocimiento, lo cual concuerda ya mejor con la deseada posibilidad de un conocimiento *a priori* de dichos objetos, que establezca algo sobre ellos antes de que nos sean dados. Ocurre con esto como con el primer pensamiento de Copérnico quien, no consiguiendo explicar bien los movimientos celestes si admitía que la masa toda de las estrellas daba vueltas alrededor del espectador, ensayó si no tendría mayor éxito haciendo al espectador dar vueltas y dejando en cambio las estrellas inmóviles. En la metafísica se puede hacer un ensayo semejante por lo que se refiere a la *intuición* de los objetos" (MGM, pag. 100-101). "Se ha supuesto hasta ahora que todo nuestro conocer debe regirse por los objetos. Sin embargo, todos los intentos realizados bajo tal supuesto con vistas a establecer *a priori*, mediante conceptos, algo sobre dichos objetos –algo que ampliara nuestro conocimiento- desembocaban en el fracaso. Intentemos, pues, por una vez, si no adelantaremos más en las tareas de la metafísica suponiendo que los objetos deben conformarse a nuestro conocimiento, cosa que concuerda ya mejor con la deseada posibilidad de un conocimiento *a priori* de dichos objetos, un conocimiento que pretende establecer algo sobre éstos antes de que nos sean dados. Ocurre aquí como con los primeros pensamientos de Copérnico. Este, viendo que no conseguía explicar los movimientos celestes si aceptaba que todo el ejército de estrellas giraba alrededor del espectador, probó si no obtendría mejores resultados haciendo girar al espectador y dejando las estrellas en reposo. En la metafísica se puede hacer el mismo ensayo, en lo que atañe a la *intuición* de los objetos" (PR). "Hasta aquí se había supuesto que toda nuestra cognición debería ser dirigida según los objetos [Gegenstände]; pero todos los intentos para operar sobre ellos algo a priori a través de conceptos, que pudiera ampliar nuestro conocimiento, se aniquilaron bajo ese supuesto. Investiguemos pues por ello una vez, si no convendría más a las tareas de la Metafísica para un mejor proceder que supongamos que los objetos deberían ser conformes a nuestra cognición, lo cual concuerda así mejor con el requerimiento de la posibilidad de que una cognición a priori debería determinar algo sobre los objetos ya antes de que nos hayan sido dados. Se trata precisamente de lo mismo que proporcionaron los primeros pensamientos de Copérnico, cuando él se planteó… si no podría ser mejor que girara el observador y, por el contrario, las estrellas permanecieran quietas. En la Metafísica podemos ahora, en lo que respecta a la intuición de los objetos, intentar algo análogo" (BXVI). Se ha tenido en cuenta en esta última traducción la opción mayoritaria en las recientes traducciones inglesas de traducir *Erkenntniss* por *cognición* (cognition) en algunas ocurrencias y por *conocimiento* (knowledge) en otras. Aquí el sentido adecuado es el de *cognición*. Por otra parte, se ajusta mucho mejor al sentido del texto la expresión "… que supongamos que los objetos deberían ser conformes a nuestra cognición" que la mucho más fuerte de que "…admitiendo que los objetos tienen que regirse por nuestro conocimiento" (MGM) y también que la más ajustada de "…suponiendo que los objetos deben conformarse a nuestro conocimiento" (PR). También se indica que la traducción "objeto" corresponde a *Gegenstand*, que en alemán se distingue de *Objekt* (que también Kant usa) y cuyos significados en español se superponen; además de éstas ya indicadas, se han hecho otras varias consideraciones análogas en esta última traducción propia.

[15] Un análisis de este tópico desde diferentes puntos de vista puede verse en: S.Morris Engel, "Kant's Copernican Analogy: A Reexamination", *Kant Studien 59* (1963), pp.243-251. Norwood Rusell Hanson, "Copernicus' Role in Kantian's Revolution", *Journal of History of Ideas 20,* (1959), pp.274-281. Pierre Kerzberg, "Two Senses of Kant's Copernican Revolution", *Kant Studien 80,* (1989), pp.63-80.

> "Weil, was der erste betrifft, in der Erkenntnis a priori den Objekten nichts beigelegt werden kann, als was das denkenden Subjekt aus sich selbst hernimmt" (BXXIII)[17].

Aunque ese contraste subjetivo/objetivo y esa referencia a las "reglas del conocimiento en mi" parezca remitirnos a un típico enfoque idealista, y aunque ese hablar de reglas "en mí" parezca identificar "a priori" con "innato", y eso a pesar del reiterado rechazo de Kant a esa identificación (B168; AK8, 202; AK10, 123-130), la forma en que Kant resuelve el problema en su sistema, admitiendo que el conocimiento *a priori* puede ser *sintético*, le permite escapar a los dualismos de la filosofía tradicional, como veremos al analizar el uso muy específico que da a las distinciones *analítico-sintético* y *a priori-a posteriori*.

> "El ejemplo copernicano, después de todo, no reduce el movimiento planetario a la conciencia del observador de una forma idealista. Se trata más bien de que el movimiento físico del observador es una parte esencial de la explicación de su percepción consciente y del mundo real del sistema solar. El paralelismo podría consistir, no en que Kant proponga reducir los objetos, o las reglas que los gobiernan, a la conciencia del sujeto, sino en que él trata esta última como una parte en la explicación de [nuestro conocimiento de] las primeras" (Bird, 2006, 31).

Y su respuesta depende crucialmente de su apelación a verdades *sintéticas a priori* que no serían válidas en todos los mundos posibles (Bird, 2006, 131). Y en este esquema, el rol de intuición es clave. Pero a pesar del reiterado rechazo de Kant a esta identificación en las citas que se mencionan arriba, muchos comentaristas han sostenido, de una u otra forma, el carácter nativista del "a priori" kantiano o de su noción de "forma de la intuición". Lorne Falkenstein (1995, 78-83 y 378-379) discute las posiciones sostenidas en este sentido por Makkreel, Waxman, Vaihinger, Kemp Smith y Patricia Kitcher. Para Falkenstein, "de acuerdo con estos comentaristas, Kant considera las partes de la multiplicidad como originadas por la experiencia sensible, y su *forma* como consistente en ciertas 'leyes innatas de la mente' en virtud de las cuales, guiada por características cualitativas de esas partes, se impone orden en la multiplicidad" (Falkenstein, 1995, 78). En mi opinión la postura de Kant al respecto queda muy clara en esta cita procedente de una obra escrita al final de su carrera, *Über eine Entdeckung, nach der alle neue Kritik der reinen Vernunft durch eine ältere entbehrlich gemacht werden soll*:

> "La *Crítica* no permite absolutamente ninguna *representación* innata o implantada. Cualesquiera que sean, tanto pertenecientes a la intuición como a conceptos intelectuales, deben considerarse como *adquiridas*. Hay, por tanto, una adquisición original (como los profesores del derecho natural consideraban), y por tanto una adquisición de algo que previamente no existía, esto es, que no pertenecía a nada anterior a dicho acto. Tal es lo que la *Crítica* sostiene, *primero*, la forma de las cosas en el espacio y el tiempo, *segundo*, la unidad sintética de la multiplicidad en conceptos. Nuestra capacidad cognitiva no toma tales cosas de los objetos, como algo dado en los objetos como son en sí mismos; más bien ella los lleva a su lugar a

---

[16] "Dado que la misma experiencia constituye un tipo de conocimiento que requiere entendimiento y éste posee unas reglas que yo debo suponer en mí ya antes de que los objetos me sean dados … que sólo conocemos *a priori* de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas" (PR). "Porque la experiencia misma es un modo de conocimiento, cuya regla debo suponer en mí, aún antes de que me sean dados objetos … que no conocemos *a priori* de las cosas más que lo que nosotros mismos ponemos en ellas" (MGM, pág. 102). "El entendimiento tiene reglas que debo presuponer que están en mí antes de que los objetos me hayan sido dados… nosotros sólo podemos conocer a priori de las cosas aquello que nosotros mismos hayamos puesto en ellas".

[17] "Nada puede ser atribuido a los objetos en el conocimiento *a priori*, sino lo que el sujeto pensante toma de sí mismo" (MGM, pág. 105). "Nada puede añadirse a los objetos, en el conocimiento *a priori*, fuera de lo que el sujeto pensante toma de sí mismo" (PR). "Nada en un conocimiento a priori procede ser adscrito a los objetos salvo aquello que el sujeto pensante haya derivado de sí mismo".

priori, fuera de sí mismos. Pero debe haber ciertamente un fundamento para ello en el sujeto, que haga posible que las antes mencionadas representaciones aparezcan así y no de otra manera, y que puedan ser referidas incluso a objetos que todavía no habían sido dados, y al menos ese fundamento es *innato*" (AK, VIII, 221-222)[18].

Parece claro que Kant deja abierta la posibilidad (más bien la necesidad) de un fundamento innato de *nuestra forma de conocer*. Eso debería ser un tema de la psicología empírica y de la genética (disciplina que en su época ni siquiera existía). Aún hoy en día es un tema polémico y no dilucidado el asunto de qué parte de nuestras capacidades psicológicas (en particular cognitivas) es innata y qué parte es adquirida, y de qué forma. En mi opinión, el mérito de Kant radica en tener una visión clara de que *el funcionamiento* de nuestras capacidades cognitivas debe explicarse por un proceso adquirido, pero que debe haber una estructura receptiva innata que en su época era absolutamente inabordable. Su análisis es fundamentalmente el análisis de *cómo funciona* esa estructura cognitiva, y lo hace precisamente en términos funcionales, como señala Ralf Meerbote (1989). La *Epistemología Evolucionista* (EE) ha obligado a replantear la cuestión del *a-priori*. Sobre la EE y la cuestión del apriori biológico véase Vollmer (1985, 166-216) y Pacho (1995, 1999 y 2009). La tesis central de la EE sobre el apriori es: La información inherente a las funciones del sistema cognitivo es válida *a priori* de la experiencia individual, pero su adquisición ha tenido lugar *a posteriori* de la experiencia evolutiva de la especie (Pacho 1995, 105). Esta tesis puede resumirse así: El *apriori* actual es un aposteriori filogenético y, por tanto, adquirido en la evolución. Fue formulada por primera vez en 1941 por K. Lorenz (1941)[19]. Según Pacho

[18] "Die Kritik erlaubt schlechterdings keine anerschaffene oder angeborene Vorstellungen; alle insgesamt, sie mögen zur Anschauung oder zu Verstandesbegriffen gehören, nimmt sie als erworben an. Es gibt aber auch eine ursprüngliche Erwerbung (wie die Lehrer des Naturrechts sich ausdrücken), folglich auch dessen, was vorher gar noch nicht existiert, mithin keiner Sache vor dieser Handlung angehört hat. Dergleichen ist, wie die Kritik behauptet, erstich die Form der Dinge im Raum und der Zeit, zweitens die synthetische Einheit des Mannigfaltigen in Begriffen; denn keine von beiden nimmt unser Erkenntnisvermögen von den Objekten, als in ihnen an sich selbst gegeben, her, sondern bringt sie aus sich selbst a priori zu Stande. Es muß aber doch ein Grund dazu im Subjekte sein, der es möglich macht, daß die gedachten Vorstellungen so und nicht anders entstehen und noch dazu auf Objekte, die noch nicht gegeben sind, bezogen werden können, und dieser Grund wenigstens ist angeboren" (AK, VIII, 221-222).

[19] Gerhard Vollmer (1974, 1981, 1985, 1992 y 2003) ha dedicado gran parte de su esfuerzo a comparar la *teoría del conocimiento transcendental* con la *Evolutionäre Erkenntnistheorie*. Señala que "Kant *sieht nicht*, daβ das Gebiet erkenntnistheoretischer Forschung, wie es von der traditionellen Erkenntnistheorie umrissen wird, viel zu eng ist. Auch bemerkt er nicht den entscheidenden Unterschied zwischen mesokosmischer und theoretischer Erkenntnis. Kant kann die folgenden Fragen *nicht beantworten*: wie entstehen unsere Kategorien? Warum haben wir gerade diese Anschauungsformen und Kategorien? Un warum sind wir gerade an diese apriorischen Urteile gebunden und nicht an andere? (…) Kant gibt *falsche Lösungen* für die folgenden Probleme: Sollten wir die Idee einer organismischen Evolution akzeptieren? Warum können wir einander verstehen? Wie ist intersubjektives Wissen möglich? Können die Kategorien als vollständig erwiesen werden? Können sie durch eine Analyse wissenschaftlicher Theorien gerechtfertigt werden? Haben wir Zugang zur Realität?" (Vollmer, 1985, 173). Y se supone que la *Evolutionäre Erkenntnistheorie* podría encontrar contribuir a dar algunas respuestas. Sostiene Vollmer que "unsere Erkenntnisstrukturen sind Ergebnisse biologischer Evolution" (ibid. 185), y su tesis principal es que "dies könnte sogar der erste Hinweis sein auf eine der grundlegenden Behauptungen der Evolutionäre Erkenntnistheorie, daβ nämlich unsere Anschauungsformen und die Kategorien [se sobreentiende que Vollmer no se refiere a las Anschauungsformen y categorías propuestas por Kant en la KrV, sino a las que de hecho haya] unserer Erfahrung zwar *ontogenetisch a priori* seien (d.h. unabhängig jeder individuellen Erfahrung), aber *phylogenetisch a posteriori* (d.h. erworben durch gute und schlechte Erfahrungen der Art)" (ibid. 181). En su tesis doctoral (Vollmer, 1974), intenta justificar algunas de sus argumentaciones apoyándose en experimentos biológicos o psicológicos. Quizá la mayor discrepancia con nuestro análisis se encuentra en sus siguientes tajantes afirmaciones: "bis zum heutigen Tage hat jedoch niemand ein einziges Exemplar synthetischer Urteile a priori geliefert. Obwohl sie logisch möglich sind, scheinen solche Urteile nicht zu existieren (…) Synthetische Urteile a priori im Sinne Kants gibt es nicht" (Vollmer, 1985, 193), o también: "es gibt kein perfektes Wissen, keinen 'reinen' Verstand, kein synthetisches Apriori, kein transzendentales Selbst, keine Letzbegründung von

(1995 y 1999), habría que precisar que el apriori biológico excluye, evidentemente, las tautologías y el apriori en función del significado. El apriori biológico se refiere a estructuras inherentes al sistema cognitivo humano; si es verdadero describiría estructuras psicocognitivas innatas. La diferencia esencial con el trascendental es que éste no considera el apriori como estructuras innatas, sino como "condiciones de posibilidad" lógicamente necesarias dentro de un argumento transcendental y, por consiguiente, (a) no considera esas condiciones como descripciones de hechos psicocognitivos (aunque tampoco lo niega) innatos; (b) no pueden basar su validez (ni su adquisición) en hechos empíricos. Kant, por primera vez, y a diferencia p. ej. de Leibniz, desconectó el significado de las expresiones "verdades a priori" y "verdades innatas". Para la filosofía precedente, no todo el apriori era innato (p. ej. las tautologías), pero sí todo lo innato era válido *a priori*. Kant sostiene que la cuestión del innatismo no tiene nada que ver con el apriori transcendental. Éste emerge de una argumento transcendental y no puede recurrir al innatismo, pues sería hacer descansar el apriori en una *cuestión de hechos*. Kant sostiene en la *KrV* (B 166-168) que si las estructuras que el apriori describe se justificaran por su condición innata, entonces tendríamos que asumir: (a) que nuestros enunciados válidos a priori serían verdaderos sólo porque la mente tiene tales y cuales estructuras ("necesidad subjetiva" –*KrV* B 168–), y (b) que los mismos enunciados podrían ser falsos si la mente tuviera otras estructuras (como si 2+2= 4 pudiera ser falso si nuestra menta estuviera configurada de otra manera). Hay que destacar que el primer objetivo de Kant es situar el papel de la Filosofía [la Metafísica] en el marco de las nuevas perspectivas abiertas por el avance de las ciencias naturales y la matemática, o incluso plantearse su posibilidad como dice en los *Prolegomena*:

> "Meine Absicht ist, alle diejenigen, so es Werth finden, sich mit Metaphysik zu beschäftigen, zu überzeugen, daß es unumgänglich nothwendig sei, ihre Arbeit vor der Hand auszusetzen, alles bisher geschehene als ungeschehen anzusehen und vor allen Dingen zuerst

---

Normen, keine abstrakte Erkenntnistheorie" (ibid. 194). Para Vollmer, "die Tatsachen der Erkenntnistheorie sind zu kompliziert, als daβ man sie so einfach in die nummerierten Schubladen der Lehrstuhl-Philosophie ablegen könnte" (loc. cit.). Y acerca del convencimiento en muchos científicos (por ejemplo en Hilbert) de la existencia de una "armonía" entre los procesos del pensamiento y los procesos del mundo material, sostiene que "vor der Scylla einer (unerklärten) prästabilierten Harmonie und der Carybdis (unkontrollierbarer) vorgetäuschter Prinzipien kann uns die Evolutionäre Erkenntnistheorie bewahren. Die erstaunliche Übereinstimmung zwischen Vernunft und Natur ist nicht prästabiliert; sie ist das Ergebnis eines Anpassungsprozesses" (ibid. 193). Desde luego, la consistencia de estas afirmaciones, de darse, no podría fundamentarse sólo en el enfoque evolucionista. Además, una *naturalización* del proyecto kantiano requeriría análisis basados en experimentos concretos y teorías contrastables sobre la interrelación entre los procesos físicos cerebrales y los procesos mentales y simulaciones de esos procesos, referidas al ser humano *actual* sobre cuya cognición reflexionó Kant, campo en el que, como veremos en la Parte-III, se ha avanzado bastante en los últimos 20 años. Aunque eso no modificaría el hecho de que *el a priori* kantiano era una exigencia metodológica, una exigencia de la concepción de la Filosofía de Kant, y es independiente de los procesos que llevaron a Kant a concebirlo y de su validez *empírica*. Para Pacho (1995, 1999, 2000 y 2009) la crítica de Vollmer a Kant tiene un problema: le exige responder a cuestiones que Kant no se planteó o se las planteó de otra forma. Una cosa es el a-priori bioevolutivo y otra el puramente epistémico (tautologías y enunciados verdaderos en virtud de la forma) y/o trascendental (enunciados lógicamente necesarios asumidas ciertas premisas). Puede haber algunos puntos de intersección, pero en principio, el a-priori biológico no es aplicable a todo el epistemológico o al trascendental; tratan de cosas completamente distintas. La tabla kantiana de las categorías, por ejemplo, es parte del a-priori trascendental. Sobre esta diferencia véase los siguientes trabajos de Julián Pacho: *¿Naturalizar la razón? Alcance y límites del naturalismo evolucionista* (1995, caps. 6, 7, 13 y 14); "Naturaleza y artificio trascendental. Observaciones críticas a la teoría kantiana del conocimiento", en M. Torrevejano y J. L. Blasco (Eds.): *Trascendentalidad y Racionalidad*, Pre-Textos, Valencia (2000, 171-196); "Epistemología Evolucionista. Una epistemología naturalizada", en: D. Quesada (Ed.): *Cuestiones de Teoría del Conocimiento*, Ed. Tecnos, Madrid (2009, 314-349).

die Frage aufzuwerfen: ob auch so etwas als Metaphysik überall nur möglich sei" (Prolegomena, AK.4.255)[20].

Tanto en el prefacio A como en el B, Kant presenta su pretensión central de establecer la Metafísica sobre una base propia y "científica". En B, sin embargo, usa una pretendida analogía con las "revoluciones intelectuales" que pusieron a disciplinas ya establecidas como la lógica, las matemáticas y la ciencia natural en un "camino seguro" (BXII). Aunque las ciencias provean un modelo seguro para la filosofía, Kant tiene claro que la Metafísica no puede ser una ciencia del mismo tipo que las Matemáticas o las ciencias naturales. La Metafísica, por ejemplo, "se fundamenta solamente en conceptos", mientras que las Matemáticas se fundamentarían también en las intuiciones (AXX, BXIV). Las revoluciones intelectuales en ciencias establecidas como la Geometría y la Mecánica proveerían un modelo cualificado de lo que se necesitaría en Metafísica (BXVIIIn). Para entender el edificio diseñado por Kant para desarrollar su proyecto, debería vérsele más bien como un filósofo del siglo XX que crea un esquema conceptual diseñado para romper viejas falsas dicotomías y problemas mal planteados, y sería un error interpretarlo dentro de los debates de la época.

> "Aquéllos que interpretan la Crítica en términos tradicionalistas están en realidad describiendo la posición de Kant once años antes y yerran al no percibir su cambio radical durante este periodo" (Bird, 2006, 608).

Bird indica que la revolucionaria aproximación de Kant a la Metafísica tiene mucho en común con contemporáneos como Carnap, Wittgenstein y Austin:

> "Su aproximación estaba caracterizada por un rechazo radical de la filosofía anterior más que por una mera reivindicación de nuevos métodos para resolver problemas previos" (Bird, 2006, 609).

Bird analiza en profundidad los puntos en los que hay un evidente paralelismo entre el enfoque de Kant y el de Wittgenstein, dejando aparte por supuesto los temas relacionados con la lógica formal, temática que Kant ni siquiera podía imaginar. Por ello, aunque ya la terapia temprana propuesta por Wittgenstein en el *Tratactus* involucraba claramente temas kantianos, dichos temas estaban demasiado ligados a la nueva lógica de Frege y Russell, incluso allí donde Wittgenstein era crítico, como para permitir cualquier comparación con el pensamiento de Kant. Por esa razón Bird considera principalmente la filosofía tardía de Wittgenstein de los *Cuadernos Azul y Marrón, Investigaciones Filosóficas, Notas sobre los fundamentos de las Matemáticas y Sobre la certeza*. Así en su filosofía tardía la idea de una terapia filosófica se explicita en *Investigaciones Filosóficas* en la misma dirección que Kant en B513-14, usando incluso la misma imagen.

> "El [descubrimiento]… da paz a la filosofía, de modo que ya no está más atormentada por problemas que la ponen a sí misma en cuestión. En su lugar, demostramos ahora un método por medio de ejemplos; y la serie de ejemplos puede detenerse. Los problemas son resueltos, (las dificultades eliminadas), no un problema singular. No se trata de un método filosófico, aunque en verdad hay métodos actuando como diferentes terapias" [Investigaciones Filosóficas, parágrafo 133][21].

> "Ésta es la gran utilidad del modo escéptico de tratar con las cuestiones que la razón pura plantea a la razón pura, y a través del cual puede ser superado un gran desierto dogmático para, en su lugar, implantar una crítica sobria que, como un verdadero catharticón, expurgará

[20] "Mi propósito es convencer a todo aquél que se ocupe de la Metafísica de que es absolutamente necesario dejar de lado su trabajo previo e ignorar todo aquello que ha sucedido antes en orden a encarar una cuestión preliminar: ¿es la Metafísica de alguna forma posible?".

[21] (Wittgenstein, 1953, (2004)).

felizmente la ilusión de las creencias infundadas y su consecuencia, el amontonamiento de saberes sin fundamento [die Vielwisserei]" (B513-514)[22].

Los dos filósofos no sólo usan la misma imaginería, sino que se refieren también al tema prioritario de la filosofía o de la propia razón pura. Para Wittgenstein el tema central eran las atormentantes cuestiones sobre la validez y autoridad de la propia filosofía; para Kant, "los conflictos de la razón consigo misma" que aparecen principalmente en las Antinomias conducen al mismo problema sobre la naturaleza, rol y autoridad de la Filosofía. El análisis de Bird no sólo se refiere a la analogía de puntos de partida, sino también a la coincidencia básica de muchos diagnósticos, pero también a la aparente contradicción entre la indudable pretensión generalizadora del proyecto kantiano y la apelación de Wittgenstein a los "casos intermedios" como el antídoto base de su terapia (Bird, 2006, 616), e igualmente analiza ciertas coincidencias básicas con Austin y Carnap (Bird, 2006, 609-623).

Muchos autores han encontrado afinidades de todo tipo entre Kant y Wittgenstein y otros niegan cualquier tipo de relación más allá de esa actitud analizada por Bird. Entre los que encuentran afinidades las discrepancias son también amplias; para unos se centrarían en el primer Wittgenstein del *Tratactus* (Stenius, 1960 y Maslow, 1961), y analizan las conexiones que observan con la Analítica transcendental, mientras que para otros las afinidades corresponderían al último Wittgenstein a partir del *Cuaderno Azul* (Engel, 1971) y se centrarían en la Dialéctica Transcendental kantiana. En este estudio Engel cita además varias obras en las que se menciona una conexión Kant-Wittgenstein y las analiza detalladamente. Para Stenius hay muchas semejanzas entre las doctrinas filosóficas de Kant y de Wittgenstein, llegando a titular el último capítulo de su libro: "Wittgenstein, un filósofo kantiano". Las semejanzas aludidas son, según Stenius (1960, 220), fundamentales, pues se refieren tanto a la concepción de la tarea filosófica como a la tesis, central para Kant, del dualismo forma-contenido en todas las formas de nuestro conocimiento: "En resumen, el análisis lógico del lenguaje, tal como Wittgenstein lo concibe, es esencialmente una forma de 'deducción trascendental' (en el sentido kantiano), cuyo objetivo es señalar la forma a priori de la experiencia, forma que es mostrada por todo lenguaje significativo y que, por consiguiente, no puede ser dicha. Desde este punto de vista podría llamarse al Tractatus una Crítica del lenguaje puro". En cambio para Robert Hanna (2006, 146), "the later Wittgenstein's devastating critique in the Philosophical Investigations of the doctrines of his own earlier philosophical self in the Tratactus Logico-Philosophicus motivates a radically wider and more open-textured conception of analysis. Indeed, Wittgenstein's radical transformation of analysis returns us full circle to Kant's notion of philosophy, developed in the second half of the first Critique and in the Introduction to his Logic, as a logically self-critical rational anthropology. This in turn provides us with a positive intimation of the nature of philosophical analysis in our so-called 'post analytic' era". El debate sobre el tema es constante en los últimos 50 años y llega hasta nuestros días: Cfr. Walsh (1960, 189–195); Thompson (1981, 458-482); Stenius (1960); Hacker (1986); Stevenson (1982); Lear (1982, 382–392); Engel (1970, 483–513); Williams (1990, 69–88); Mosser (1993, 187–202). Una completa, pero compleja, discusión sobre la relación entre Kant y Wittgenstein así como sobre las diversas interpretaciones en la literatura, en: Wallgren (2006); Mosser (2009, 1-20). Patricia

[22] "Das ist der groβe Nutzen, den die skeptische Art hat, die Fragen zu behandeln, welche reine Vernunft an reine Vernunft tut, und wodurch man eines groβen dogmatischen Wustes mit wenig Aufband überhoben sein kann, um an dessen Statt eine nüchterne Kritik zu setzen, die, als eines wahres Kathartikon, den Wahn, zusammt seine Gefolge, der Vielwiesserei, glücklich abführen wird" (B513-514). "Esta es la gran ventaja que el método escéptico posee en el tratamiento de las cuestiones que la razón pura plantea a la razón pura. Mediante este método podemos deshacernos, con unos costos muy reducidos, de una infinidad de elementos dogmáticos, poniendo en su lugar una crítica sobria, una crítica que, como verdadero catártico, eliminará, afortunadamente, las ilusiones vanas y sus consecuencia, la presunción de saberlo todo" (PR).

Kitcher (2000, 33-63) piensa que la práctica de asimilar las posiciones de ambos filósofos está equivocada y razona intentando demostrar que la la posición de MacDowell de conectar a Kant con el último Wittegenstein es absolutamente errónea y "distort rather than illuminate". Para varios autores, que interpretan la *cosa en sí* y el *noumeno* kantianos de forma muy distinta que Patricia Kitcher y que en la interpretación desarrollada en este trabajo, la conexión fundamental estaría entre el último Wittgenstein y la *Dialéctica transcendental*. Este sería el caso de Karl Otto Apel (1973), de Robert Hanna (2001) y de John MacDowell (1994 y 1998d). Según Hanna, la lógica fuertemente no-clásica del último Wittgenstein guarda una similitud esencial con lo que Kant denominó *Lógica Transcendental,* y que incluiría la *Analítica Transcendental* (la lógica de la verdad) y la *Dialéctica Transcendental* (la lógica de la ilusión). "The salient difference between Kant and Wittgenstein is that later Wittgenstein's logic-as-grammar explicitly incorporates the total range of facts encompassing human linguistic competence and linguistic performance within its scope, whereas this incorporation is at best implicit for Kant" (Hanna, 2012b, 162). Kant dice poco explícitamente acerca de la naturaleza del lenguaje, excepto una anotación en la *Antropología* (Ak7: 192), donde parece defender la tesis de que (1) los significados lingüísticos son pensamientos o partes de pensamientos, y (2) el pensamiento es un discurso interno. "This of course is similar to Wittgenstein's theory of language in the Tratactus" (Hanna, 2012b, 166). Pero el punto crucial para Hanna consiste en que la concepción del análisis filosófico del último Wittgenstein tendría una afinidad fundamental con la concepción de la Filosofía de Kant que se desarrolla en la *Doctrina Transcendental del Método* (Hanna, 2012b, 162). Para Marck Sack (2000) estas interpretaciones se basarían en la estrecha vinculación existente entre el tipo de *presupuestos transcendentales* a los que se remiten Kant, Peirce, Hurssel o Wittgenstein, a pesar del sentido tan diferente que cada uno les dio.

En otra dirección, otros autores como Charles Parsons y Lorne Falkenstein han sostenido también que el diseño kantiano no sería incompatible con el enfoque de Frege. Lo cual, hay que subrayarlo, aunque fuera cierto, no quiere decir que exista la más mínima conexión entre sus planteamientos, pues Kant en su época era absolutamente ajeno a los problemas que un siglo después plantearía la revolución de la Lógica formal y la Matemática. Como el propio Bird reconoce, todos los intentos de ligar la arquitectura diseñada por Kant con cualquier filósofo moderno han ido baldíos, más allá de la coincidencia señalada en su actitud revolucionaria (sobre todo en su época) para abordar lo que él considera el primer objetivo de su proyecto, y que hemos analizado hasta aquí.

Podríamos resumir diciendo que, junto a ese primer objetivo explícito del proyecto kantiano de situar el papel de la filosofía en el marco de la revolución epistemológica ocasionado por la irrupción de las ciencias naturales y exactas, hay un segundo objetivo explícito en relación con el método para abordar el problema. En el planteamiento de ese método que debería ser una "terapia" filosófica, Kant sería, a tenor de esta interpretación, más bien un filósofo del siglo XX con muchos planteamientos coincidentes con Wittgenstein, más que un metafísico tradicional de su época, pues su objetivo habría sido desarrollar un sistema de conceptos que deshaga muchos dilemas filosóficos de la época en cuanto problemas falsos o mal planteados. Pero su arquitectura conceptual es absolutamente original y propia, sin correlato con ningún otro filósofo de la época o moderno. Deberá valorarse si, en su conjunto, satisface los objetivos propuestos y si es compatible o, más aún, si permite tal vez desde su enfoque dar luz a los problemas planteados por la revolución de la Lógica y las Matemáticas del siglo XX. Pero inmediatamente ligados a estos dos objetivos aparecen otros dos en su proyecto. El tercer objetivo, y sin que esta enumeración indique prioridad, es dar cuenta de las posibilidades del conocimiento humano, explorando sus mecanismos y desarrollando una epistemología. Y el cuarto objetivo, describir los fundamentos y el lugar en su arquitectura cognitiva de cada ciencia y, en particular, de la que nos ocupa: las Matemáticas.

> "Ich verstehe unter einer Architektonik die Kunst der Systeme. Weil die systematische Einheit dasjenige ist, was gemeine Erkenntnis allererst zur Wissenschaft, d.i., aus einem bloβen Aggregat derselben ein System macht, so ist Architektonik die Lehre des Szientifischen in unserer Erkenntnis überhaupt, und sie gehört also notwendig zur Methodenlehre. Unter der Regierung der Vernunft dürften unsere Erkenntnisse überhaupt keine Rhapsodie, sondern sie müssen ein System ausmachen" (A832, B860)[23].

Dado el lugar que el espacio y el tiempo ocupan en su epistemología, el análisis de las Matemáticas, sus fundamentos, objetos y métodos, será especialmente delicado, pues en ella se entrecruzan varios de sus proyectos.

Pero en la interpretación marcadamente realista que realizamos en este trabajo de la teoría del conocimiento de Kant no podemos obviar las interpretaciones mayoritarias que sitúan a la epistemología kantiana en un marco general tendencialmente subjetivo-constructivista y, por tanto, anti-realista. Discutiremos este problema detalladamente en el Capítulo-9, pero un punto clave en esa discusión es el rol que tendría en su epistemología su noción de *das Ding an sich*, tema que por sí mismo ha originado ríos de tinta en los últimos 200 años y que es preciso aclarar previamente.

1. 3.- Interpretaciones de La Cosa en Sí

Hebbeler (Reinhold, 2005, 11) sostiene que "las *Cartas sobre la Filosofía Kantiana* de Reinhold (1790) es la obra más influyente jamás escrita referente a Kant". Reinhold era profesor en Jena y, como señala Hebbeler, "su enseñanza convirtió la pequeña ciudad universitaria en el centro de la próxima generación del pensamiento germano y la primera residencia profesional de los Idealistas alemanes: Fichte, Schelling y Hegel y ayudó a atraer a Jena a una extraordinaria constelación de escritores incluyendo Schiller, Hölderlin, Novalis y Friedrich Schlegel, todos los cuales comenzaron por centrarse en Kant y a reaccionar frente a él en los términos en que el Criticismo había sido inicialmente presentado por Reinhold".

Muchos de los argumentos de Kant son en gran parte de una muy específica y compleja pretensión acerca de cómo estamos limitados en todo nuestro conocimiento determinado teóricamente por las formas puras del espacio y el tiempo. No es accidental que Reinhold, y después sus sucesores se basaran en más "simples" y supuestamente mejores argumentos para un "idealismo" que esquivaba las consideraciones específicas de Kant acerca del espacio y el tiempo. Este proceder condujo a una considerable confusión acerca del significado y estructura de los principales argumentos y conclusiones de la Crítica (Reinhold, 2005, 30) (Hebbeler, 2003, capítulos 3 y 5). Los efectos de las *Cartas* pueden ser encontradas no

---

[23] "Entiendo por arquitectura el arte del sistema. Porque la unidad de algo en un sistema es lo que convierte al simple conocimiento en ciencia, esto es, un sistema más allá del simple agregado de elementos, y es precisamente por tanto la arquitectura la teoría de lo científico en nuestro conocimiento y pertenece necesariamente a la teoría del método. Bajo la dirección de la razón, no deberían de ningún modo nuestros conocimientos formar una rapsodia, sino que deberían constituir un sistema" (A832, B860). "Entiendo por *arquitectónica* el arte de los sistemas. Como la unidad sistemática es aquello que convierte el conocimiento ordinario en ciencia, es decir, lo transforma de mero agregado de conocimientos en un sistema. La arquitectónica es la doctrina de lo científico en nuestro conocimiento y, consiguientemente, pertenece de modo necesario a la doctrina del método. Regidos por la razón, nuestros conocimientos no pueden constituir una rapsodia, sino que deben formar un sistema" (PR). El término *arquitectónica* no existe en español como sustantivo, como quiere indicar PR al presentarlo en su primera ocurrencia en cursivas. El substantivo español "arquitectura" expresa bien la idea expuesta por Kant, aunque las traducciones inglesas, tanto la de Norman Kemp Smith, como la de Pluhar, como la de Müller, Guyer y Woods usan el término inglés *architectonic*, que sí existe.

solamente en la estructura del ambicioso programa positivo del Idealismo Alemán, sino también en las socarronas retrospectivas sobre la "Ideología Alemana" ofrecidas por Heine, Marx y Engels, Nietzsche y sus seguidores (Reinhold, 2005, 37)[24]. Esa lectura crítica de un pensamiento kantiano distorsionado, cuajó en un importante movimiento, con un fundamento profundamente espiritualista, muy alejado por tanto del Idealismo Transcendental de Kant, y que en todas sus vertientes producía con diversos matices una mistificación de los conceptos kantianos de "La Cosa en Sí" y de la "Intuición", dándoles un contenido más acorde con la vieja tradición mística alemana, con una suerte de versión secularizada de la Mística de Berthold y J. Böhm, mística que es aún más evidente en el movimiento coetáneo del Romanticismo alemán, con una reivindicación de una Edad Media idealizada, y con un toque panteísta y trágico, muy en concordancia con las más profundas raíces de la primitiva cultura de los pueblos germánicos. Tal línea interpretativa se rompe radicalmente con la obra minuciosa de Gerold Prauss (1977) *Kant und das Problem der Dinge an sich*. Prauss parte del hecho de que en la discusión de *las cosas en sí mismas* Kant usa cierto número de diferentes locuciones, no todas de las cuales serían obviamente equivalentes.

Primero está la forma abreviada *Ding an sich* (y sus variantes *Sache*, *Gegenstand* y *Objekt an sich*), que sugieren una referencia a una cosa con un cierto modo de existencia. Prauss observa que curiosamente, aunque esta locución es relativamente rara en Kant (Prauss localiza 37 ocurrencias de esta forma abreviada y sus variantes en los volúmenes 3-5 de la Edición de la Academia), era sin embargo la preferida en la literatura. Con mucho la locución más común en Kant es *Ding an sich selbst* (y sus variantes *Sache*, *Gegenstand* y *Objekt an sich selbst*). Prauss localiza 258 ocurrencias en los mismos volúmenes (Prauss, 1977, 14-15).

El punto crucial es sin embargo la tesis filosófica de Prauss de que ambas formas estarían construidas como versiones elípticas de la forma canónica "cosa considerada en sí misma" [*Ding an sich selbst betrachtet*], donde la partícula *an sich selbst* funciona adverbialmente para caracterizar cómo una cosa estaría siendo considerada y no qué clase de cosa sería o la forma en que existiría. Prauss también sugiere que aunque esta forma adverbial explícita es también, relativamente rara en Kant (ocurre en 13 pasajes de los mismos temas, en algunos de los cuales Kant usa *ansehen, erwogen* o *denken* en lugar de *betrachten*), ocurre suficiente frecuentemente y, sobre todo en pasajes relevantes, lo que justificaría su status canónico e indicaría que las otras formas breves, que Kant evidentemente primaría por razones estilísticas, deberían ser entendidas a la luz de todo ello[25]. Pero además de intentar probar su tesis principal, Prauss también aborda, en primer lugar, la génesis de ese término en Kant.

> "Con lo anterior nuevamente se demuestra que dicha expresión simplemente se forma como una expresión alemana correlativa de expresiones latinas como 'res per se considerata' o 'res in se spectata' que para Kant eran corrientes a partir de la tradición escolástica… considérese por ejemplo la Metaphysica de Baumgarten, que Kant utilizó como manual para sus clases

---

[24] La influencia de Reinhold y la interpretación de Kant por la escuela de Jena y el Idealismo alemán no se abordan en este trabajo. Además del trabajo citado de Hebbeler, puede encontrarse un estudio detallado del tema en Karl Ameriks (2006, 163-231) y sobre todo Frederik Beiser (1987 y 2002).

[25] Con estas tesis concuerdan autores clave, que citamos a continuación, y quienes a partir de la cual han desarrollado en las dos últimas décadas una revisión a fondo de la epistemología kantiana llegando independientemente a interpretaciones básicamente concordantes: "Esta discusión está basada en el análisis filosófico del tema de Prauss… Aunque hay significativas diferencias, algunas de las cuales expondré más tarde en este capítulo, mi análisis de este tópico está profundamente influido por Prauss" (Allison, 2004, 458). "Los libros de Gerold Prauss, pero especialmente su obra "Kant und das Problem der Dinge an sich", proveen con gran detalle un punto de vista diferente al de Adickes. Su visión es muy próxima a la mía, aunque no la misma. Pero he pensado que no merecía la pena remarcar aquí tales diferencias, teniendo en cuenta la gran concordancia básica entre nosotros" (Bird, 2006, 838).

magistrales de Metafísica, y cuyo parágrafo 15 le pudo hacer familiar la expresión Ding an und für sich betrachtet como correspondencia alemana a las expresiones 'res in se spectata' o 'res per se spectata', y de las cuales la literatura filosófica de aquellos tiempos hacía uso muy frecuente. Ello mostraría que la expresión kantiana Ding an sich incluso en ese 'und für' ha sido abreviada, aunque no siempre lo hace… Una prueba de ello es dada directamente por el propio Kant en AK.8, pág.153, donde él en una, por lo demás exacta cita de Morgenstunden de Mendelssohn en lugar de la expresión original 'Ding an und für sich selbst' pone simplemente 'Ding an sich selbst' " (Prauss, 1977, 20).

En segundo lugar, también realiza una investigación de la evolución del malentendido, empezando por Reinhold y siguiendo por Maimon, Schulze, Fichte, Schelling y Hegel "hasta llegar al quasi-nombre-propio 'Ding-an-sich', una hipóstasis cuyo sinsentido y absurdas consecuencias pueden fácilmente verse. "Con ello se consumó el malentendido, el cual, por su magnitud y consecuencias en la historia de la filosofía no tienen parangón" (Prauss, 1977, 27). El propio Kant, aún en vida observó el error interpretativo, y parece ser que fue el único, escribiendo en su *Opus postumum*: "Die Unterscheidung des so genannten Gegenstandes an sich im Gegensatz mit dem in der Erscheinung (*phaenomenon adversus noumenon*) bedeutet nicht ein wirkliches Ding was dem Sinnengegenstande gegenüber steht sondern …" (AK, 22, 24)[26].

Sin embargo la objetivación de tal concepto sustantivado llegó a ser pronto un lugar común, y no sólo en la literatura filosófica especializada[27]. Prauss intenta buscar las causas de esa rápida deformación de este concepto clave y opina que la fundamental es la rápida perdida de la "latinidad occidental" en la cultura alemana a partir de 1800. Aunque en mi opinión, aún siendo esto un factor real e importante, deberían buscarse causas más profundas, como por ejemplo la fuerte influencia de las tendencias irracionalistas y mistificadoras que impregnan la cultura alemana del siglo XIX (Lukács, 1954). Además Prauss, deshecho el error y rota la tradición interpretativa del idealismo y del neokantismo alemán, inicia también una interpretación de la epistemología kantiana, que no es tan mencionada por los autores posteriores, pero que en gran parte sienta las bases de la nueva interpretación de los autores que vamos a comentar.

1.4. En torno a Apariencia y Cosa en Sí. Fenómeno y Noumeno.

Sentado ya que la expresión "cosa en sí" debería considerarse una abreviatura de "cosa en sí considerada" hay que especificar qué significado tiene tal expresión y especialmente en relación con el término "apariencia", en oposición con el cual Kant frecuentemente lo presenta. Los siguientes pasajes están entre los más discutidos, y algunos de los cuales sugieren incluso una identificación *cosa en si-noumeno* y *apariencia-fenómeno*[28].

---

[26] "La distinción entre el así llamado objeto en sí en oposición al de la apariencia [des so genannten Gegenstandes an sich im gegenstand mit dem in der Erscheinung] no significa un objeto real que pudiera contraponerse al objeto sensible, sino …" (AK, 22, 24).

[27] Así los hermanos Grimm, en su "Diccionario Alemán" (Leipzig 1860) escriben (Tomo 2, línea 1153) bajo la acepción Cosa [Ding] : "La filosofía conoce de una 'cosa en sí' (ein Ding an sich), prescindiendo de la unidad de las apariencias, bajo las cuales el hombre percibe tal cosa. Así la utiliza [das Ding an sich] Kant muy frecuentemente…" y escribían eso aunque ellos todavía sabían que ese 'an sich' o 'an sich selbst' (Tomo 1, bajo "an", línea 287) estaba relacionado con el uso de la vieja expresión latina 'per se'.

[28] El tema que se trata en este apartado y en el anterior es uno de los que, como se indicó en la Introducción, lleva más de 200 años de controversia. Una presentación contrastada de las distintas opiniones requeriría un trabajo monográfico. Se incorpora una referencia a varias lecturas relevantes del tópico. El tema se trata ampliamente, con distintos enfoques, en: Henry E. Allison (2004, pp.16 y ss; pp. 50-73), Graham Bird (2006, pp. 207-219), Lorne Falkenstein (1995, pp. 287-327) , Gerold Prauss (1977) y Gisella Shaw (1969). P. F. Strawson (1996, pp. 240-270). Paul Guyer, "Kant and the Claims of Knowledge", Cambridge University

(i) "Dies war das Resultat der ganzen transzendentalen Ästhetik, und es folgt aus natürlicher Weise aus dem Begriffe einer Erscheinung überhaupt: dass ihr etwas entsprechen müsse, was an sich nicht Erscheinung ist, weil Erscheinung nichts vor sich selbst, und außer unserer Vorstellungsart sein kann, mithin, wo nicht ein beständiger Zirkel herauskommen soll, das Wort Erscheinung schon eine Beziehung auf Etwas anzeigt, dessen unmittelbare Vorstellung zwar sinnlich ist, was aber an sich selbst, auch ohne diese Beschaffenheit unserer Sinnlichkeit, (worauf sich die Form unserer Anschauung gründet), Etwas, d.i. ein von der Sinnlichkeit unabhängiger Gegenstand sein muss" (A251 – 252)[29].

(ii) "In der That, wenn wir die Gegenstände der Sinne wie billig als bloße Erscheinungen ansehen, so gestehen wir hierdurch doch zugleich, daß ihnen ein Ding an sich selbst zum Grunde liege, ob wir dasselbe gleich nicht, wie es an sich beschaffen sei, sondern nur seine Erscheinung, d. i. die Art, wie unsre Sinnen von diesem unbekannten Etwas afficiert werden, kennen. Der Verstand also, eben dadurch daß er Erscheinungen annimmt, gesteht auch das Dasein von Dingen an sich selbst zu, und so fern können wir sagen, daß die Vorstellung solcher Wesen, die den Erscheinungen zum Grunde liegen, mithin bloßer Verstandeswesen nicht allein zulässig, sondern auch unvermeidlich sei" (Prolegomena, AK 4, 314 – 315)[30].

Press 1987, (pp. 333 y ss). Rae Langton, "Kantian Humility: Our Ignorance of Things in Themselves", Oxford University Press 1998, (pp.158-161). H.A. Prichard, "Kant's Theory of Knowledge", Clarendon Press 1909 (pp. 73-76). Norman Kemp Smith, "A Commentary to Kant's 'Critique of Pure Reason' ", Humanities Press 1962 (pp. 216-219). Nicholas Rescher, "Noumenal Causality", en "Kant's Theory of Knowledge", L.W. Beck editor, Dordrecht, Reidel 1974 (pp.175-183). Moltke S. Gram, "How to Dispense with Things in Themselves", *Ratio* 18 (1976), (pp. 1-15). Erich Adickes, "Kant und das Ding an sich", Berlin, Pan 1924 (pp. 5-30). Hans Vaihinger, "Commentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft", Stuttgart, W. Spemann 1892, (vol-2, p. 53). Horst Seidl, "Bemerkungen zu Ding an sich und Transzendentalen Gegenstand in Kant's Kritik der reinen Vernunft", *Kant Studien* 73 (1972), (pp.305-314). H.J. Paton, "Kant's Metaphysic of Experience", New York, Macmillan 1936, (vol-2, pp.445-446). Robert Merrihew Adams, "Things in Themselves", *Philosophy and Phenomenological Research* 57 (1997), (p. 811). W.H. Walsh, "Kant's Criticism of Metaphysics", Edinburgh University Press 1975, (pp. 162-167). Eva Schaper, "The Kantian Thing-in-Itself as a Philosophical Fiction", *Philosophical Quarterly* 16 (1966), pp. 233-243. Ralph Walker, "Kant", London, Routledge 1976, p.134.

[29] "Éste [el contrate *fenómeno – noumeno*] fue el resultado del conjunto de la Estética Transcendental, y por lo tanto sólo se sigue naturalmente del concepto de apariencia en general que algo debe corresponder a aquello que no es en sí mismo apariencia, porque la apariencia nada puede ser por sí misma y fuera de nuestro modo de representación, con lo que, si quiere evitarse que surja un círculo constante, la palabra apariencia debe ya indicar una relación con algo cuya representación inmediata si bien es sensible, está también sin embargo en sí misma sin esa constitución de nuestra sensibilidad (sobre la que se fundamenta la forma de nuestra intuición), i. e. debe ser un objeto [*Gegenstand*] independiente de la sensibilidad" (A251 – 252). "Tal ha sido el resultado de toda la estética transcendental, resultado que se desprende espontáneamente del concepto de fenómeno general, a saber, que tiene que corresponder al fenómeno algo que no sea en sí mismo fenómeno. La razón se halla en que éste no puede ser nada por sí mismo, fuera de nuestro modo de representación. Consiguientemente, si no queremos permanecer en un círculo constante, la palabra fenómeno hará referencia a algo cuya representación inmediata es sensible, pero que en sí mismo (prescindiendo incluso de la naturaleza de nuestra sensibilidad, base de la forma de nuestra intuición) tiene que ser algo, es decir, un objeto independiente de la sensibilidad" (PR). (PR) traduce *Erscheinung* por "fenómeno". Kant distingue entre *Erscheinung* y *Phenomenon* (o *Phaenomena*), y opone ambos a *Noumenon* (o *Noumena*) dándoles distinto contenido, el cual se explica precisamente en esas páginas bajo el título *Phaenomena und Noumena*. En mi opinión sería mejor traducirlos por "apariencia" (*Erscheinung*) y "fenómeno" (*Phaenomena*) respectivamente.

[30] "De hecho, si vemos los objetos de los sentidos como meras apariencias, como corresponde, entonces con ello admitimos al mismo tiempo que una cosa en sí misma le subyace, aunque no tengamos conocimiento de estas cosas tal y como están constituidas en sí mismas, sino sólo de sus apariencias, i. e., de la forma en que nuestros sentidos están afectados por esa cosa desconocida. Por tanto el entendimiento, justamente por el hecho de que acepta las apariencias, admite también la existencia de las cosas en sí mismas, y en esa medida podemos decir que la representación de tales cosas como subyacentes a las apariencias, y por tanto de meros seres inteligibles, no está simplemente permitida sino que es inevitable" (*Prolegomena*, AK 4, 314 – 315).

(iii) "Gleichwohl wird, welches wohl gemerkt werden muss, doch dabei immer vorbehalten, dass wir eben die selben Gegenstände auch als Dinge an sich selbst, wenn gleich nicht erkennen, doch mindestens müssen denken können" (BXXVI – XXVII)[31].

(iv) "Gleichwohl liegt es doch schon in unserm Begriffe, wenn wir gewisse Gegenstände, als Erscheinungen, Sinnenwesen (Phaenomena), nennen, indem wir die Art, wie wir sie anschauen, von ihr Beschaffenheit, wenn wir sie gleich in derselben nicht anschauen, oder auch andere mögliche Dinge, die gar nicht Objekte unserer Sinne sinnlichen Anschauung, d.i. des Verstandes sein, … als Gegenstände bloβ durch den Verstand gedacht, jenen gleichsam gegenüber stellen, und sie Verstandeswese (Noumena) nennen (B306)[32].

(v) "Die Lehre von Sinnlichkeit ist nun zugleich die Lehre von den Noumenen im negativen Verstande, d.i. von Dingen, die der Verstand sich ohne diese Beziehung auf unsere Anschauungsart, mithin nicht bloβ als Erscheinungen, sondern als Dinge an sich selbst denken muss" (B307)[33].

Estos y similares pasajes sugieren dos líneas distintas de argumentación sobre "la cosa en sí misma", donde cada uno enfatiza distintos aspectos de la concepción kantiana, dividiendo a los comentaristas. De acuerdo con una línea, que encuentra su soporte textual más fuerte en el segundo de los pasajes arriba citado, correspondiente a los *Prolegomena*, el pensamiento de cosas (existiendo) en sí mismas no sólo sería admisible, sino necesario, a causa de la necesidad de reconocer una "causa" o "fundamento" de las apariencias. Aunque Kant conecta esta conclusión con la afección, que no es precisamente una relación causal, Allison denomina esta línea la "interpretación causal" por cuanto construye la relación entre apariencia y cosa en sí misma en tanto que esta última sería la causa o fundamento de la primera como un efecto (Allison, 2004, 54). Un problema obvio en esta interpretación es que requiere que tomemos la apariencia y la correspondiente cosa en sí misma como dos entidades distintas, planteando un enfoque ontológico, que no se desarrolla en ningún punto en la obra de Kant, y que aún contradice el enfoque fundamental de su obra, y eso aún si prescindimos de las dificultades de una "causalidad noumenal".

Los otros pasajes (i, iii, iv y v), en los que se fundamentaría la segunda línea interpretativa, sugieren que la pretensión de Kant es de orden semántico. En esta lectura, Kant

---

[31] "Igualmente, y debe ser esto bien notado, se sostiene sin embargo siempre con ello, que nosotros precisamente esos mismos objetos también como cosas en sí mismas, si bien no podemos conocerlos, deberíamos por lo menos poder pensarlos" (BXXVI – XXVII). "No obstante, hay que dejar siempre a salvo –y ello ha de tenerse en cuenta- aunque no podemos *conocer* esos objetos como cosas en sí mismas, sí ha de sernos posible, al menos, *pensarlos*" (PR). "Sin embargo, y esto debe notarse bien, queda siempre la reserva de que esos mismos objetos, como cosas en sí, aunque no podemos *conocerlos*, podemos al menos *pensarlos*" (MGM, pág. 106).

[32] "Igualmente radica en nuestros conceptos que nosotros llamemos seres de los sentidos [*Sinnenwesen*] (*Phaenomena*) a ciertos objetos como a las apariencias (Erscheinungen), al tiempo que diferenciamos la forma en que los intuimos de su constitución [*Beschaffenheit*] en sí misma, para que nosotros coloquemos enfrente, o bien precisamente a esos objetos según su constitución, si no los intuimos, o bien también otras cosas posibles, que en absoluto son objetos [*Objekte*] de nuestros sentidos, pensados sólo como objetos [*Gegenstände*] por el entendimiento, …y en ambos casos seres del entendimiento [*Verstandeswesen*] (*Noumena*) los llamemos" (B306). "No obstante, cuando damos a ciertos objetos, en cuanto fenómenos el nombre de entes sensibles (Fenómenos) nuestro concepto implica ya (al distinguir el modo de intuirlos de la naturaleza que en sí mismos poseen) que nosotros tomamos esas entidades (tal y como son en su naturaleza, aunque no la intuyamos en sí misma) u otras cosas posibles (que no son en absoluto objetos de nuestros sentidos) y las oponemos, por así decirlo, a aquellos objetos, llamándolas *entes inteligibles* (númenos)" (PR).

[33] "La teoría de la sensibilidad es ahora al mismo tiempo la teoría de los Noumenos en sentido negativo, i. e., de cosas que en el entendimiento deben pensarse sin esa relación con nuestro modo de intuir, y con ello, no como simple apariencia, sino como cosa en sí misma" (B307). "La doctrina de la sensibilidad es, a la vez, la doctrina de los númenos en sentido negativo, es decir, la doctrina de las cosas que el entendimiento debe pensar sin esta referencia a nuestro modo de intuir, de las cosas, por tanto, que el entendimiento debe pensar como cosas en sí, no como meros fenómenos" (PR).

estaría afirmando una relación de implicación lógica entre el concepto de apariencia y el concepto de cosa en sí misma, más que una relación causal entre entidades subsumidas bajo esos conceptos. Ésta sería la interpretación, entre otros de Adickes (1924, 5); cfr. Allison, (2004, 458). La idea básica sería que la expresión "apariencia" es parasitaria, o al menos correlativa, de la expresión "cosas en sí misma". Consecuentemente el uso de la primera presupone la legitimidad de la última. Esta interpretación parece encontrar un fuerte soporte textual, por ejemplo en el primer pasaje donde dice que "algo que no es en sí mismo apariencia", es decir, una cosa en sí misma, "se sigue del concepto de una apariencia en general". Similarmente, en el mismo pasaje, Kant sostiene que "la palabra 'apariencia' debe ya ser tomada como indicación de una relación con una tal cosa". Finalmente, en el tercer pasaje, Kant sostiene que la negación de cosas en sí mismas nos conduciría al "absurdo enunciado de que hay una apariencia sin nada que aparezca".

Allison razona acerca de por qué muchas interpretaciones son insatisfactorias con el contexto general y el proyecto de Kant. Respecto a la última, que considera la más sólida, concluye que la respuesta es que tal posición se remonta a un idealismo de estilo berkeliano o a un fenomenalismo y, por tanto, a una forma de realismo transcendental y "en verdad, si el idealismo de Kant fuera comprendido de esta forma (como usualmente por cierto lo es), el problema de la cosa en sí llega a ser intratable" (Allison, 2004, 55). Y considerar las cosas como aparecen, es considerarlas en su relación con las condiciones sensibles bajo las cuales son dadas a la mente en la intuición, esto es, en tanto que cosas en nosotros en el sentido transcendental (que no empírico); precisamente como el considerarlas en sí mismas es pensarlas aparte de toda referencia a esas condiciones, esto es, como fuera de nosotros en el sentido transcendental y de hecho esta forma dual de considerar un objeto consiste simplemente en dos caras del mismo acto de reflexión transcendental. Para pensar las cosas aparte de las condiciones de la sensibilidad es solamente necesario tener en cuenta que, al considerar las cosas de esta manera, uno debe usar categorías puras y que en éstas pueden fundarse sólo juicios analíticos sobre el concepto de las cosas así consideradas (como substancia, causa, etc). La relevancia de la consideración de cosas tal como son en sí mismas (al igual que la propia distinción transcendental) sería directamente_metodológica, más que metafísica, y esto incluso cuando provee de los únicos medios para evitar los errores metafísicos asociados al realismo transcendental (Allison, 2004, 56-57).

Sin embargo, existen numerosos lugares en la "Crítica" en que Kant parece dejar sitio para juicios analíticos involucrando el concepto de una entidad puramente inteligible o el mundo inteligible. Por ejemplo (B149), (A276, B332) (A286, B343-43) (A433, B461) (A609, B637) (A635, B663). En el apartado 1.5.2 analizaremos sus implicaciones y la posible contradicción con el análisis aquí desarrollado.

Si intentamos ahora examinar el concepto de *noumeno* y el de *objeto transcendental*, ambos íntimamente conectados con el concepto de *cosa considerada en sí misma*, así como su opuesto de *fenómeno,* parecería tratarse más bien de conceptos ontológicos, referidos a distinta clase de objetos. Pero podrían enfocarse en términos epistemológicos como el correlato de una cognición no sensible, y consiguientemente puramente intelectual, el primero, precisamente en la misma medida que el fenómeno sería un objeto de una cognición sensible. Sin embargo la relación precisa entre *noumeno* y *cosa en sí* permanece como objeto de disputa en la literatura. Aunque Kant parece a veces usar como sinónimos los términos 'cosa en sí-noumeno' y 'apariencia- fenómeno' -véanse las citas anteriores o también: (B307) (A254, B310) (A256, B 312) (A259, B315) (B423n) -, hace sin embargo explícitamente una tajante distinción entre *apariencia* y *fenómeno*: caracteriza la apariencia como el objeto indeterminado de la intuición empírica (A20, B34), es decir indeterminado por la ausencia de toda determinación conceptual, en tanto que entiende el fenómeno como un objeto sensible que es concebido bajo las categorías (A248-49, B305), o sea una apariencia conceptualmente determinada.

Análogamente al enfoque dado por Prauss sobre la distinción entre *apariencia* y *cosa en sí misma*, la distinción entre *objeto empírico* y *transcendental* no es entre dos entidades ontológicas distintas sino entre dos perspectivas desde las que los objetos empíricos pueden ser considerados, de forma que hablar de *objeto transcendental* debe ser considerado como una construcción adverbial, en el sentido de hablar de objetos empíricos considerados transcendentalmente, esto es, en relación con las condiciones de su cognición. Aunque el *objeto transcendental* no podría identificarse con la *cosa en sí misma*, se trataría de dos niveles distintos de reflexión. Así, según la interpretación de Allison: "la distinción transcendental-empírico marca un contraste entre un segundo nivel de consideración filosófica de los objetos y las condiciones de su cognición (el asunto de la "Crítica"), y un primer nivel de la investigación de ellos (el asunto de las ciencias empíricas), en tanto que la distinción entre las cosas como son en sí mismas y como ellas aparecen es entre dos formas en las que los objetos pueden ser considerados dentro del propio punto de partida transcendental" (Allison, 2004, 63).

Para concluir, muchos de los temas de debate en la literatura interpretativa de Kant se esfuman por irrelevantes si adoptamos el enfoque de que el proyecto de Kant supone una auténtica ruptura con la tradición filosófica anterior, y en particular con los enfoques ontológicos. Para Allison Kant no trataba de decir lo que es indecible, sino simplemente de definir las fronteras de lo que puede ser dicho o preguntado. Para ello, sin embargo, tiene que introducir el "metalenguaje" de la filosofía transcendental: "Así, expresiones tales como "cosas como son en sí mismas", "noumeno", "objeto transcendental" y sus correlatos deben ser entendidos como términos técnicos dentro de este metalenguaje[34] más que como términos en referencia a entidades reales" (Allison, 2004, 73). Y yo añadiría: y aún y cuando muchos de esos términos proceden de la tradición filosófica anterior, en la que tenían una referencia ontológica, y por tanto un significado distinto que en la filosofía transcendental[35].

Para Prauss, justificado también el punto inicial de que la expresión *las cosas en sí mismas* debe considerarse una expresión adverbial en el sentido de *las cosas en sí mismas consideradas* y justificado también un significado inicial de dicha expresión en el sentido de que *las cosas 'en sí mismas' consideradas* no significa otra cosas que *las cosas no consideradas como apariencia* , se desarrolla también el sentido de tal término en dos niveles de reflexión: "en ello se muestra, que esta reflexión dual de hecho no consiste simplemente en dos reflexiones independientes entre sí, sino en el sentido más complicado de que las cosas

[34] Parece que el primero que consideró la posibilidad de interpretar parte de la terminología kantiana como un "metalenguaje" de utilidad para su anteriormente citado "proyecto terapéutico" fue Maclachlan: "La idea de que la cosa en sí misma y las nociones asociadas deberían ser entendidas en relación a un metalenguaje kantiano fue sugerida por D.L.C. Maclachlan, 'The Things in Itself Appears in a Meta-Language', *Proceedings of the Eighth International Kant Congress,* vol-2, pp.155-161." (Allison, 2004, 461). Aunque la idea ya estaba en el análisis de Prauss. Véase el apartado 1.5 de este trabajo.

[35] Para resumir gráficamente la lectura defendida en este trabajo, Kant habría dicho: No podemos conocer *la cosa en sí* … ni falta que hace, pues *la cosa en sí*, entendida como la ha entendido la metafísica dogmática, es un fantasma metafísico sin consistencia teórica. En otros términos: si Kant pidiera un vaso de agua se contentaría, de acuerdo con su epistemología, con que se le sirviera el fenómeno H_2O. En cambio un metafísico consecuente debería rechazar el vaso que se le sirve lleno de H_2O con el argumento de que él ha pedido agua "en sí", no el "fenómeno" agua. En resumen: podemos conocer el mundo, diría Kant, tal como nos lo explica, por ejemplo, la Física newtoniana pero no el mundo *en sí* (las esencias eternas) al que habían aspirado los metafísicos precedentes. Otra explicación de la posición kantiana sería: podemos conocer el mundo pero no desde el punto de vista del ojo de Dios (Putnam). El *en sí* sería por tanto un falso problema.

sólo pueden ser consideradas en sí mismas, en tanto y cuanto la reflexión las ha considerado inicialmente como apariencias" (Prauss, 1977, 38-39). Pero también habría dos niveles en la reflexión de esta contraposición: "las expresiones 'apariencia' y 'cosa en sí'… las usa Kant frecuentemente también en un sentido simplemente empírico. En todos los casos en los que tenemos en el conocimiento empírico a cosas empíricas como objeto, se debe según Kant diferenciar dos aspectos empíricos: de un lado la cosa misma, una rosa determinada o una determinada gota de lluvia, y de otro lado la sensación o percepción o intuición empírica, a través de la que ella nos es dada… Él añade sin embargo inmediatamente: 'Pero esta distinción es solamente empírica' " (Prauss, 1977, 47).

En los siguientes lugares de la KrV se encuentran textos que confirman claramente la interpretación de Prauss: A45, B63; A30, B45; A45, B62; A189, B234; A196, B241.

En el sentido de Prauss, en este nivel empírico, las apariencias serían algo subjetivo, que caería bajo el campo de la psicología empírico-introspectiva, en tanto que las cosas en sí mismas consideradas tendrían un aspecto no subjetivo en ese nivel empírico, expresarían más bien el mundo como objeto inter-subjetivo, un aspecto empírico que caería en el campo de la física: "de esta forma surge la apariencia psico-subjetiva (y con ella también la cosa físico-objetiva) de hecho ya en el campo del conocimiento empírico mismo… [aunque para él] el par de conceptos 'cosa en sí' y 'apariencia' originalmente fueron pensados realmente como conceptos de la filosofía transcendental. De este modo la distinción es desde dos perspectivas distintas dignas de consideración" (Prauss, 1977, 48). En concordancia con Allison, Prauss cree que respecto a la distinción *apariencia-cosa en sí*, en el segundo nivel de la reflexión filosófica, en el nivel no empírico de la filosofía transcendental mediado por las categorías, "a la apariencia se le denomina fenómeno, a la que le corresponde noumeno como la cosa en sí considerada en el sentido de la filosofía transcendental" (Prauss, 1977, 50)[36]. Prauss resume la cuestión:

> "Las expresiones 'Apariencias' y 'Cosas en sí' soportan, en el contexto de la nueva Teoría de la Filosofía Transcendental de la Experiencia de Kant, la función de que el resultado no empírico, que esta teoría en el primer nivel de reflexión [sobre lo empírico] extrae, puede ser elevado a un segundo nivel de reflexión y expresarlo realmente como un resultado sobre lo Empírico, y con ello completar esa Teoría de la Experiencia como una Teoría no empírica de lo Empírico" (Prauss, 1977, 131).

Este desplazamiento hacia arriba (conocimiento no empírico sobre lo empírico) es equivalente a la "paradoja" que Hintikka (1984) detecta en la teoría kantiana[37]. Viene a decir: para aceptar la teoría kantiana del conocimiento hay que aceptar que no podemos conocer el mundo en sí, sino sólo sus apariencias. ¿La teoría del conocimiento kantiano que conocemos es entonces una mera apariencia? Es decir: ¿qué describe o explica la teoría de Kant: la psicología del conocimiento o una reconstrucción formal (transcendental) de un conocimiento sobre qué *puede* o *debe* ser "considerado" conocimiento? Otra versión de esta paradoja es: Kant limita el conocimiento a los límites de la experiencia, pero establece los límites sin recurrir a la experiencia y por tanto se tiene que desinteresar de la psicología del conocimiento (que es abordable empíricamente). Este un uno de los nudos gordianos de su teoría. Por razones análogas, P. F. Strawson [38] (1966) llega a la conclusión de que se produce una transformación del significado referencial de conceptos como 'espacio' y 'tiempo' (que aparecen como formas *a priori* de la percepción de los fenómenos) a meras condiciones

---

[36] Véase al respecto (A248n).

[37] J. Hintikka:"*Das Paradox transzendentaler Erkenntnis*", en: E. Shaper u. W. Vossenkuhl (eds.): *Bedingungen der Möglichkeit, 'Transzendental Arguments' u. transzendentales Denken*, Stuttgart 1984, 123-149).

[38] P.F. Strawson, *The Bounds of Sense*, Oxford 1966, cap. IV.

subjetivas pero *no descriptivas* de la estructura psico-cognitiva del sujeto -lo cual implica que expresiones como “afectar”, “nosotros mismos”, etc. dejen de tener un significado inteligible en el interior de la teoría cuando, inevitablemente, hablan de las relaciones entre el sujeto y sus objetos posibles-[39].

1.5. La Intuición y sus múltiples significados.

Pero nuestro principal objetivo es desvelar la filosofía de la Matemática de Kant y el rol que en ella desempeña la intuición, y que queda determinada, de un lado, por su teoría general del conocimiento, y de otro, por su concepción de la Matemática, de la naturaleza de sus objetos, sus métodos y su *práctica*. Y este es el tema que pasamos a analizar.

1.5.1-Los cuatro primeros sentidos de la intuición en Kant.

Existe unanimidad en destacar el papel clave que la intuición juega en el sistema kantiano. Lorne Falkenstein (Falkenstein, 1995, 14) llega a proponer que la esencia del sistema kantiano es un “intuicionismo formal”. Aunque es evidente que la epistemología de Kant surge de una reflexión sobre las distintas corrientes de la época, con las que lógicamente comparte alguna terminología, esto es con el empirismo, o con intuicionismo, o constructivismo, o nativismo sensacionistas, o con idealismo berkeliano u otras variantes de realismo como el racionalismo de raíz leibniziano- wolfiana en el que se había formado, cuyas controversias sobre el tema conocía y es seguro que fueron el origen de sus reflexiones, es un error intentar incluir sus análisis en los esquemas conceptuales de sus coetáneos, como hacían hasta hace poco la mayoría de sus comentaristas, por cuanto que más bien parece que Kant fuera un filósofo del siglo XX, que crea un nuevo sistema conceptual, aún usando algunos términos comunes de la época, creando otros muchos nuevos y, principalmente, cambiando el enfoque, con lo que muchos problemas filosóficos, serían “falsos problemas” de orden lingüístico que en el metalenguaje de su teoría desaparecerían (Bird, 2006, 609). Con este enfoque del idealismo transcendental, que ya hemos justificado en el apartado-1 al hablar del proyecto de Kant, debe también considerarse el rol de la intuición en su sistema.

Debe afirmarse en primer lugar que, hasta la fecha, no se ha hecho un estudio filológico, al estilo del de Prauss sobre “la cosa en sí” de los distintos usos y términos que Kant utiliza en relación con la intuición [*Anschauung, intuitus, Intuition*] y muchas de sus formas derivadas [*Anschauungsarten*, por ejemplo], pero al menos tres sentidos se pueden localizar en sus relaciones con los demás conceptos básicos.

En (B33-36) Kant diseña un vocabulario en relación con la percepción (tomados mayormente de la tradición medieval y aristotélica que habían abandonado sus contemporáneos) y que adquieren en sus sistema significados inéditos y novedosos, vocabulario que incluye *intuición* [*Anschauung*], *sensación* [*Empfindung*], *apariencia* [*Erscheinung*], *objeto* [*Objekt, Gegenstand*], así como *forma* [*Form*] y *materia* [*Materie*] que deberían formar los elementos de “una ciencia de todos los principios de la sensibilidad [*Sinnlichkeit*] *a priori* [que] yo denomino Estética Transcendental” (B36).

> “In der transzendentalen Ästhetik also werden wir zuerst die Sinnlichkeit isolieren, dadurch, dass wir alles absondern, was der Verstand durch seine Begriffe dabei denkt, damit nichts als empirische Anschauung übrig bleibe. Zweitens werden wir von dieser noch alles, was zur Empfindung gehört, abtrennen, damit damit nichts al reine Anschauung und die bloβe Form der Erscheinungenübrig bleibe, welches das einzige ist, das die Sinnlichkeit a priori liefern kann.

[39] Aunque el análisis desarrollado en este apartado parece la versión más consistente con la nueva interpretación del conjunto de la construcción kantiana, existe todavía una amplia discusión en la literatura, y serían posibles otras versiones que también tienen soporte textual (Bird, 2006, 530-585).

Bei dieser Untersuchung wird sich finden, dass es zwei reinen Formen sinnlicher Anschauung, als Prinzipien der Erkenntnis a priori gebe, nämlich Raum und Zeit, mit deren Erwägung wir uns jetzt beschäftigen werden" (A22)[40].

Con este proyecto y esta terminología técnica al que se debe añadir "impresión" [*Eindruck*], y que es considerablemente ampliada a otro nivel de reflexión en la Dialéctica Transcendental en (B376-377/ A320) se esbozan al menos dos usos del término "intuición". El análisis de la *Estética Transcendental* propuesto por Kant en la cita anterior puede ser resumido así: Los objetos [*Gegenstände*] afectan causalmente nuestros sentidos receptivos para producir sensaciones, pero es la intuición quien inmediatamente nos presenta los objetos. Tales objetos empíricamente presentados son apariencias, que quedan indeterminadas [unbestimmt] en ausencia de recursos conceptuales. Los sentidos se nos presentan con ítems particulares, mientras el entendimiento provee conceptos generales. Las sensaciones son la "materia" a posteriori de las apariencias, mientras que su "forma" a priori ordena ese material en ciertas relaciones.

Es imposible no pensar en un cierto fundamento psicológico en tales explicaciones. Más aún podría pensarse que con tales explicaciones Kant está violando su propia distinción drástica entre su proyecto transcendental y el de la psicología empírica. Para Bird esto es una confusión radical porque toda epistemología opera con términos psicológicos tales como 'creencia', 'memoria' o 'representación'. Lo que distinguiría la filosofía de la psicología no es un vocabulario disjunto, sino la forma específica en que cada disciplina examina un tópico compartido. Pensar de otra forma es confundir 'ser específico' con 'ser distinto': "El examen filosófico de un vocabulario de la percepción es específico y característico, pero su vocabulario básico es compartido con la psicología" (Bird, 2006, 118). Examinaremos más este importante tópico al analizar el enfoque de la llamada Psicología Transcendental de Patricia Kitcher.

Deberíamos comenzar por preguntarnos como deberíamos entender exactamente el término "intuición" [*Anschauung*] en este su primer uso de la *Estética Transcendental*. Aunque existe controversia en la literatura ya sobre este primer uso del término "intuición" en la *Estética*, vamos a resaltar los aspectos en líneas generales aceptados por la nueva línea interpretativa.

En primer lugar, Kant caracteriza "las intuiciones" en la sensibilidad, en tanto que opuestas a "los conceptos" en el entendimiento, y eso con tres características: como algo

[40] "En la Estética Transcendental, por tanto, aislaremos inicialmente la sensibilidad, para con ello poder prescindir de todo aquello que la razón piense en ello, a fin de que nada permanezca sino la intuición empírica. En segundo lugar separaremos de ésta última todo lo que pertenezca a la sensación para que nada quede sino la intuición pura y la simple forma de las apariencias, la cual es, ésta última, lo único que la sensibilidad puede aportar a priori. Con esta investigación se encontrará que hay a priori dos formas puras de la sensibilidad, como principios del conocimiento, a saber: Espacio y Tiempo, en cuya consideración nos ocuparemos" (A22). "Así, pues, en la estética transcendental *aislaremos* primeramente la sensibilidad, separando todo lo que en ella piensa el entendimiento mediante sus conceptos, a fin de que no quede más que la intuición empírica. En segundo lugar, apartaremos todavía todo lo concerniente a la sensación, a fin de quedarnos sólo con la intuición pura y con la mera forma de los fenómenos, únicos elementos que pueden suministrar la sensibilidad *a priori*. En el curso de esta investigación veremos que hay dos formas puras de la intuición sensible como principios de conocimiento *a priori*, es decir, espacio y tiempo. Nos ocuparemos ahora de examinar esas formas" (PR). "Así pues, en la estética transcendental *aislaremos* primeramente la sensibilidad, separando de ella todo lo que el entendimiento, con sus conceptos, piensa de ella, para que no nos quede nada más que la intuición empírica. En segundo término separaremos aún de ésta todo cuanto pertenece a la sensación, para que no nos quede nada más que la intuición pura y la mera forma de los fenómenos, que es lo único que la sensibilidad *a priori* puede proporcionar. En esta investigación se hallará que hay, como principios del conocimiento *a priori*, dos formas puras de la intuición sensible, a saber, espacio y tiempo, con cuya consideración vamos ahora a ocuparnos" (MGM, pág. 129).

"particular", "inmediato" y "pasivo" o "receptivo", características relacionadas de la siguiente forma. Kant habla de intuiciones como en inmediata relación con los objetos, y los trata como particulares en virtud de su contraste con lo discursivo, la contribución generalizadora de los conceptos (Bird, 2006, 119). La inmediatez sugiere una característica fenomenológica de la experiencia sensible ordinaria, por la que nosotros percibimos un objeto presentado (que nos afecta sensiblemente) sin necesidad de ninguna investigación o inferencia. La particularidad categoriza tal objeto así percibido sin el carácter general que el entendimiento provee a través de sus conceptos. Kant también sugiere que las intuiciones se remiten directamente a los objetos, a diferencia de las sensaciones. Tal distinción podría considerarse como un contraste entre estados mentales "representativos" y "no representativo". Hay estados mentales, tales como dolores o irritaciones que pueden no representar nada, aunque estén causados por algún estímulo, y las sensaciones se incluyen típicamente ahí. Las intuiciones, por contraste, son esencialmente representativas en su referencia a los objetos (Bird, 2006, 120). Que el sentir y el intuir puedan ser construidos como estados mentales que ocurren, no tiene un paralelo en las apariencias, que son los objetos de la intuición empírica.

> "Die Wirkung eines Gegenstandes auf die Vorstellungsfähigkeit, so fern wir von demselben affiziert werden, ist Empfindung. Diejenige Anschauung, welche sich auf den Gegenstand durch Empfindung bezieht, heiβt empirisch. Der unbestimmte Gegenstand einer empirischen Anschauung, heiβt Erscheinung" (B34)[41].

Para Bird este punto es reforzado gramaticalmente en cuanto que no existe en la terminología de Kant la forma verbal para "apariencia" correspondiente a las análogas "sentir" o "intuir" correspondientes a "sensación" e "intuición" (Bird, 2006, 120).

Es importante señalar que al hablar de la intuición como esencialmente representativa en su referencia a los objetos, no debe suponerse que hablamos exclusivamente de "objetos externos". Ambas, la sensibilidad externa y la sensibilidad interna tienen sus objetos (Bird, 2006, 1209).

Recientemente Lorne Falkenstein ha sugerido que el vocabulario "subjetivo" de Kant respecto a la percepción, que incluye sus términos *Eindruck* (impresión), *Empfindung* (sensación) y *Anschauung* (intuición) es esencialmente fisiológico más que psicológico y que la distinción de Kant entre intuitivo e intelectual debe ser considerada "propiamente como una distinción entre fisiológico y psíquico, o más exactamente… entre lo físico y lo cognitivo". Sin embargo, Falkenstein concede que la evidencia es dudosa y no puede explicar todos los usos del término *Empfindung* (Falkenstein, 1995, 123). El caso podría ser más claro para el término *Eindruck* (impresión), cuya etimología literal indica un efecto físico y causal sobre los órganos del sentido. Pero Kant usa el término *Eindruck* precisamente como ahora nosotros usamos el término "impresión", para indicar de forma amplia y figurativa cómo las cosas nos

---

[41] "La acción de un objeto sobre la imaginación, en tanto que somos afectados por el mismo, es la sensación. Aquella intuición, que se relaciona con el objeto a través de la sensación, se llama empírica. El objeto indeterminado de una intuición empírica se llama apariencia" (B34). "El efecto que produce sobre la capacidad de representación un objeto por el que somos afectados se llama *sensación*. La intuición que se refiere al objeto por medio de una sensación es calificada de *empírica*. El objeto indeterminado de una intuición empírica recibe el nombre de *fenómeno*" (PR). "El efecto de un objeto sobre la capacidad de representación, en cuanto somos afectados por él, es *sensación*. Aquella intuición que se refiere al objeto por medio de la sensación llámase *empírica*. El objeto indeterminado de una intuición empírica llámase *fenómeno*" (MGM, pág. 128).

afectan. Si incluso este término no está restringido a su uso puramente fisiológico, es difícil de aceptar que los otros términos de Kant, 'sensación' e 'intuición' sean esencialmente fisiológicos. Inevitablemente todos estos términos tienen *asociaciones* con sucesos fisiológicos, y las explicaciones de Falkenstein exploran ese reconocimiento ya incluso en el siglo XVIII, pero casi toda la evidencia textual es más compatible con la interpretación psicológica: "Kant era bien consciente de que había nexos entre lo mental y lo fisiológico, pero la evidencia a favor de una identificación general [con lo fisiológico] no es suficientemente fuerte para excluir una interpretación fundamentalmente psicológica de todos estos términos" (Bird, 2006, 122).

Nuevamente nos encontramos aquí con este tema que, como hemos dicho, valoraremos al hablar de la interpretación de la Psicología Transcendental de Patricia Kitcher. Pero se debe hacer notar que en relación con la *intuición*, al contrario que en la discusión sobre la *cosa en sí*, aparecen como fundamentales aspectos psicocognitivos que eran absolutamente inabordables en la época de Kant. Sólo muy recientemente, con el desarrollo de las neurociencias, las investigaciones sobre inteligencia artificial y robótica y desarrollos matemáticos como las redes neuronales se ha podido comenzar a abordar un estudio científico de procesos de los que, aparentemente, Kant pretendía dar una explicación filosófica en el marco conceptual de lo que él creyó una nueva teoría cognitiva. Cabe pensar que muy probablemente Kant no estaba seguro del alcance exacto de una categoría de su modelo, puesto que conceptualizaba sobre un fenómeno sin evidencia experimental ninguna, o mejor dicho, sobre los resultados de un tal fenómeno, lo que explicaría una cierta ambigüedad que da pie a distintas interpretaciones: "las denotaciones de términos tales como 'sensación externa', 'sensación interna', 'sensación vital', 'sensación' y 'representación de la imaginación' son extremadamente oscuras en Kant, y la cuestión de qué pudiera ser exactamente lo que, en el funcionamiento del cuerpo -o de la mente-, permitiera distinguirlos, es todavía más oscura. Es por tanto una cuestión que Kant deja cuidadosamente sin tratar" (Falkenstein, 1995, 122).

> "Die physiologische Menschenkenntniß geht auf die Erforschung dessen, was die Natur aus dem Menschen macht ... Wer den Naturursachen nachgrübelt … indem er die Gehirnnerven und Fasern nicht kennt, noch sich auf die Handhabung derselben zu seiner Absicht versteht, mithin alles theoretische Vernünfteln hierüber reiner Verlust ist" (AK, 7, 119)[42].
>
> "weil wir keine Kenntniß vom Gehirn und den Plätzen in demselben haben, worin die Spuren der Eindrücke aus Vorstellungen sympathetisch mit einander in Einklang kommen möchten, indem sie sich einander (wenigstens mittelbar) gleichsam berühren" (AK, 7, 176)[43].

Pero no deja de ser curioso que, en lo básico, las nuevas ciencias antes mencionadas, desarrolladas espectacularmente en los últimos 30 años, hayan encontrado un modelo teórico válido para su avance experimental precisamente en el esquema psicognitivo de Kant, como explica Patricia Kitchner (1990). Y deberemos analizar las consecuencias de este hecho. Al mismo tiempo hay que hacer notar (e intentar interpretar) un hecho sorprendente que parece contradecir ese aparentemente sistemático recurso a la ciencia empírica como juez decisivo en el campo psico-cognitivo que acabamos de destacar en Kant. Contradicción que aparece en un punto esencial de su construcción epistemológica. Kant conoce bien los trabajos de piscología del conocimiento de su época. En especial la obra de J. N. Tetens (*Philosophische Versuche*

---

[42] "El conocimiento de la psicología de los seres humanos se basa en la investigación de lo que la naturaleza ha hecho con ello… no [conocemos] los nervios centrales y fibras ni comprendemos su funcionamiento para esos propósitos. Consecuentemente, toda racionalización teórica sobre estos temas es puramente baldía" (AK, 7, 119).

[43] "… no tenemos ningún conocimiento del cerebro y de los lugares en los que las trazas de las impresiones dejados por las representaciones deberían ser armonizados entre sí" (AK, 7, 176).

über die menschliche Natur und ihre Entwicklung, 2 vols., Leipzig 1777). Tetens había estudiado el comportamiento de los sordomudos de nacimiento y había llegado a la conclusión de que operaban con las formas “espacio” y “tiempo” de forma innata. Esto es muy importante, porque permite suponer que Kant vende como adquisición o demostración trascendental (según la cual es *a priori* necesario admitir que el espacio y el tiempo son formas *a priori*) algo que él muy probablemente ha conocido, vía Tetens, como resultado de una investigación empírica[44]. Pero es fundamental destacar el hecho de que a pesar de ello, esa tesis no se justifica en Kant por vía empírica sino que según él *se debe admitir a priori* . Kant sabe apreciar la obra de Tetens, cuya obra está sobre la mesa de trabajo de Kant cuando escribe la KrV[45]. Kant conoce por lo demás no sólo la obra de Tetens, sino a todas las obras de psicología del conocimiento importantes de la época y disponibles en Alemania [46]. Julián Pacho (1997, 174) ha caracterizado la utilización trascendental kantiana de las aportaciones de Tetens como “contrabando conceptual”, pues cabría suponer que Kant sabía justificada por vía empírica su tesis sobre el apriorismo perceptivo de las formas espacio-temporales, pero las presenta en su sistema como una exigencia lógica *a priori*, i.e. trascendental, lo que, de hecho, fundamentaría su epistemología de un modo que podríamos calificar analógicamente como *axiomático*. Pero también podemos considerar este hecho como un importante indicio del concepto que Kant tenía de la Filosofía y del papel que le asignaba en su proyecto de construcción de un *sistema o arquitectura de las ciencias*. Y en este sentido, además la pretensión ya mencionada de hacer de la Filosofía una “crítica sobria” destaca su consideración de que la Filosofía “opera exclusivamente sobre conceptos” (por oposición a la Matemática que opera “también en base a *intuiciones*”). Una ciencia que opera exclusivamente sobre conceptos sólo puede ser de carácter analítico y la construcción de sus conceptos queda fuera de su teoría; no tiene sentido aquí el recurso al nivel empírico. Este análisis del origen de los conceptos que se introducen en la teoría filosófica correspondería a una *metafilosofía*. Por consiguiente la arquitectura deductiva de la Filosofía debería basarse en una suerte de *axiomas*, que Kant introduce bajo esa formulación de *aceptación a priori*. Y, de hecho, si se elimina este punto todo el sistema filosófico de Kant se desmorona. Si interpretamos la epistemología de Kant como un metalenguaje construido para describir y analizar los procesos cognitivos, ese metalenguaje cuya referencia son sus propios conceptos no puede *fundamentarse* en una justificación empírica. Otra cosa sería cómo se han llegado a descubrir o delimitar dichos conceptos lo que, como hemos dicho, correspondería a una *metafilosofía*. En este aspecto, como el tema de Tetens evidenciaría, ciertamente la noción de la Filosofía para Kant está muy alejada de la noción de que “si algo tiene que ver con la realidad, no tiene interés para la Filosofía”. El hecho de que 300 años después se siga discutiendo sobre la utilidad para las ciencias de su epistemología, indica que en la *construcción* de sus conceptos filosóficos subyace una aprehensión efectiva de los procesos

[44] Sobre el conocimiento de la Psicología por Kant véase también: B. B. Klein: *A History of Scientific Psychology* (...), New York/London 1970, p. 482-484).

[45] Cfr. por ejemplo *Rfl. z. Metaphysik*, nº 4900-4901, AK XVIII, 23; *Vorarbeit zu dem Prolegomena*, AK XXIII, 57, 18-19; *Brief an Herz*, 11. Mai 1778, AK X, 270, 10-11; *An Chr. Garoe*, 7. August 1783, AK X, 341, 13-16; *An Mendelson*, 16. August, 1783, ibi.., AK X, 346, 26-29; *An...*, 1. September 1789, AK XI, 84, 36-85. Sobre la relación entre la obra de Tetens y Kant cfr. O. Ziegler: *Tetens Erkenntnistheorie in Beziehung auf Kant*, Leipzig 1888; A. Wreschner: *Ernst Platner und Kants Erkenntnistheorie mit Berücksichtigung von Tetens und Aenesidemus*, Berlin 1891; G. Störring: *Die Erkenntnistheorie von Tetens, Eine historisch-kritische Studie*, Berlin 1901; W. Übele: *J. N. Tetens ... Gesamtentwicklung mit Berücksichtigung des Verhältnisses zu Kant...*, Berlin 1911; A. Seidel: *Tetens Einfluß auf die kritische Philosophie*, Leipzig 1932.

[46] Cfr. B. B. Klein: *A History of Scientific Psychology. Its Origins and Philosophical Backgrounds*, New York/ London, p. 482-484; G. S. Brett: *A History of Psychology*, vol. II, London 1919, p. 328-329.

reales[47]. Pero esa aprehensión es efectivamente realizada desde un enfoque esencial *puramente filosófico* (AXVI-AXVII) donde queda excluido, en principio, toda justificación empírica. Eugenio Moya (2005a, 147) menciona el punto clave en este planteamiento, problema que ya Kant le planteara a Hertz en su carta del 21 de Febrero de 1772: "¿Cómo puede nuestro entendimiento formarse totalmente a priori conceptos de las cosas con los que éstas coincidan necesariamente?"(Ak. X, 131). Es decir, ¿Cómo pueden tener validez objetiva las condiciones subjetivas del pensar? (A89). Para Kant, los fenómenos de la Naturaleza tienen necesariamente que concordar con las leyes o principios *a priori* del entendimiento en la medida en que tales leyes son condición de posibilidad de la existencia de esos mismos fenómenos (B164). Ahora bien, la oscuridad en la demostración de esa afirmación que, ahora sí, debería tener un fundamento esencialmente empírico, era inabordable en la época de Kant, pero ya no tanto en nuestros días. Y de hecho, nuestros análisis de los resultados empíricos de las neurociencias que realizamos en la Parte-III confirman los presupuestos de Kant y, más específicamente, la interpretación que Moya realiza de la teoría cognitiva kantiana: "En todo caso, hay que reconocer que la filosofía de la mente kantiana tiene un calado mucho más profundo de lo que siempre se ha creído. Yo la interpreto (Moya 2003, pp. 57 y ss.; 266-267) en clave *modularista y sistémica*" (Moya, 2005a, 147)[48]. La genialidad de Kant parece hoy evidente pero parece evidente la pregunta acerca de dónde buscó Kant su inspiración. Para

---

[47] Kant, ya en la introducción de la primera *Crítica*, subraya que el carácter fundamental de su investigación radica en "los objetos del entendimiento puro y debe exponer y hacer inteligible la validez objetiva de sus conceptos *a priori*", aunque su segundo aspecto, refiriéndose al aspecto fáctico o empírico de la naturaleza del entendimiento, que "a pesar de su gran importancia" no formaría parte de su objetivo principal: "Diese Betrachtung, die etwas tief angelegt ist, hat aber zwei Seiten. Die eine bezieht sich auf die Gegenstände des reinen Verstandes, und soll die objektive Gültigkeit seiner Begriffe a priori dartun und begrifflich machen (…) die andere geht darauf aus, den reinen Verstand selbst, nach seiner Möglichkeit und den Erkenntniskräften, auf denen er selbst beruht, mithin ihn in subjektiver Beziehung zu betrachten und, obgleich dieser Erörterung in Ansehung meines Hauptzwecks von groβer Wichtigkeit ist, so gehöret sie doch nicht wesentlich zu demselben; weil die Hauptfrage immer bleibt, was und wie viel kann Verstand und Vernunft, frei von aller Erfahrung, erkennen und nicht, wie ist das Vermögen zu Denken selbst möglich?" (AXVI-AXVII). De modo que como hemos subrayado el planteamiento puramente filosófico de su proyecto es claro, afirmando al mismo tiempo la "importancia" de su fundamentación epistemológica a pesar de que, como señala en otras partes que ya hemos mencionado en el trabajo, la ignorancia de los mecanismos neurológicos del entendimiento hacían casi imposible en su época un análisis científico de esta fundamentación. Eugenio Moya señala acertadamente que esto no descarta una *naturalización* del proyecto kantiano: "en torno a la filosofía kantiana se ha articulado una oposición entre facticidad y transcendentalidad que oscurece problemas y perspectivas que son claves para entender el calado y la complejidad del programa transcendental. Es, en este sentido, en el que propongo una *naturalización débil* de dicho programa, no sólo reconstruyendo su teoría de la mente, sino también rastreando el papel que las investigaciones embriológicas jugaron a la hora de plantear soluciones a los mismos problemas epistemológicos" (Moya, 2005a, 144).

[48] "He aquí lo que serían sus principios fundamentales:1. La mente humana tiene una arquitectura natural integrada por módulos cognitivos (facultades, subsistemas) sensibles e intelectivos, estructuralmente diferenciados. 2. Los diferentes módulos (sensibilidad, imaginación, entendimiento, Juicio y Razón), tienen sus propias reglas *a priori* (espacio-tiempo, categorías, esquemas, ideas) y posibilitan operaciones cognitivas -intuición, pensamiento, esquema, juicio, inferencia- irreductibles. 3. Los módulos sensibles (vista, oído, gusto…) son módulos periféricos, que aparecen encapsulados, esto es, sistemas cognitivos independientes y básicos, cuyas operaciones -primordialmente, receptivas e informacionales- son autónomas respecto de los mecanismos espontáneos que posibilitan las operaciones intelectivas superiores. 4. En contraste con los sistemas de entrada, los sistemas intelectivos (centrales, diríamos hoy) son relativamente autónomos, pues son organizativamente cerrados, pero informacionalmente abiertos, de tal modo que su continuidad operacional hace posible el conocimiento objetivo, un conocimiento que es, en definitiva, resultado de un proceso complejo y sistémico de asimilación y transformación de la información sensible. 5. Si el entendimiento es la facultad de la unidad de los fenómenos mediante reglas (conceptos), la razón es la facultad de la unidad de las reglas del entendimiento bajo principios. La razón nunca se refiere, pues, directamente a la experiencia o a algún objeto, sino al entendimiento, a fin de dar unidad *a priori*, mediante ideas, a los diversos conocimientos de éste" (Moya, 2005a, 147). Cfr. también (Moya, 2003a), (Fodor, 1983 y 2008).

Moya, quien justifica su tesis amplia y documentadamente, "lo decisivo es que su referente no fue, pese a lo que por lo general se ha defendido, la físico-matemática newtoniana o la psicología de Tetens; sino una ciencia emergente como la embriología. Es en ésta y no en aquéllas donde Kant buscó la fuente fundamental de las herramientas teóricas de su programa transcendental" (Moya, 2005a, 164-165). Aunque bien documentada, no deja de ser una especulación que tampoco descartaría su inspiración en la obra de Tetens, como sostiene Pacho (1997), porque tampoco existe una referencia explícita de Kant al respecto. Pero lo relevante es que su recurso al *a priori* era una exigencia fundamental de su concepción del *método filosófico* en su *arquitectura de las ciencias*, aspecto que, como veremos en la Parte-II, tampoco Hilbert entendió correctamente[49], pues su interpretación del *a priori* kantiano se basaba en las interpretaciones hegemónicas en su época que lo ligaban a la determinación apriorística de la estructura formal del *espacio físico* en lugar del *espacio perceptivo* (Strawson, 1966).

Otro problema en relación con este primer uso básico del término intuición en Kant surge en relación con su valor cognitivo y el carácter de esa cognición. ¿Se puede hablar de conocimiento intuitivo? Y en caso afirmativo ¿cuál sería el carácter de ese conocimiento y cómo sería posible sí no está mediado por los conceptos y no tiene carácter discusivo? De un lado la tajante división entre la *Estética* por una parte, que se ocupa de la sensibilidad, de la materia (sensación) y de la forma *a priori* de la intuición, que aporta el sujeto cognoscente, y de cuya conjunción resulta la apariencia, y por otra parte la *Analítica* que se ocupa de la contribución *a priori* del entendimiento mediante conceptos, y de otro lado la no menos tajante separación de la sensación y la intuición planteada en el ya citado pasaje (A22) como método de aislamiento (*Isolierung*) de los componentes de la apariencia (materia y forma), plantean el problema del carácter cognitivo de la intuición. El mismo Kant parece concebir que el conocimiento no surge sino al final del proceso, tras la conjunción de esos momentos artificialmente aislados para el análisis, como puede verse en las siguientes citas:

> "Anschauung und Begriffe machen also die Elemente aller unser Erkenntnis aus, so dass weder Begriffe, ohne ihnen auf einige Art korrespondierende Anschauung, noch Anschauung ohne Begriffe, ein Erkenntnis ergeben können" (A51, B75)[50].

> "Gedanken ohne Inhalt sind leer. Anschauungen ohne Begriffe sind blind" (B75)[51].

El otro problema, en realidad asociado con el anterior, surge del hecho de que, como sugiere esta cita parecería imposible identificar una experiencia sensible pura sin ninguna referencia al entendimiento o a los conceptos. Sin embargo parece claro que Kant cree que ambas instancias están, si no literalmente, conceptualmente separadas por su procedimiento de abstracción, y que indican funciones distintas en el proceso cognitivo. Allí donde Kant insiste en una conexión necesaria entre sensibilidad y entendimiento, deja claro a

---

[49] En la epistemología de Hilbert, el principio de "la concordancia entre las leyes del pensamiento y las leyes de la naturaleza", que Hilbert menciona con frecuencia, tiene un papel fundamental, pero en él este principio carece de toda demostración o indicio de justificación; es decir, tiene un carácter de postulado (Hilbert, GA, Band III, 378- 379), (Hilbert, GA, Band III, 380-381), (Hilbert, 1926, GA, Band III, 170-171), (Hilbert, 1931, 485). Y su rechazo de muchas implicaciones del *a priori* kantiano veremos que viene determinada por las interpretaciones hegemónicas en su época del significado de dicho *a priori*: desde las que lo asociaban a la determinación apriorística de las estructuras del *espacio físico*, hasta las que lo asociaban a la interpretación metafísica de la intuición propia del idealismo alemán, forzándole a una actitud aparentemente empirista, como detecta Corry (2002 y 2006).

[50] "Intuición y conceptos constituyen por lo tanto los elementos de todos nuestros conocimientos, de modo que, ni los conceptos sin la intuición de alguna forma correspondiente a ellos, ni la intuición sin conceptos pueden producir ningún conocimiento" (A51, B75).

[51] "Los pensamientos sin contenido son vacíos, las intuiciones sin conceptos son ciegos" (B75).

continuación que considera esto no como una razón para denegar sus contribuciones específicas, sino, al contrario, para separarlas cuidadosamente. Así, a continuación de la lapidaria cita anterior, dice:

> "Daher ist es eben so notwendig, seine Begriffe sinnlich zu machen, (d.i. ihnen den Gegenstand in der Anschauung beizufügen), als seine Anschauungen sich verständlich zu machen, (d.i. sie unter Begriffe zu bringen). Beide Vermögen, oder Fähigkeiten, können auch ihre Funktionen nicht vertauschen" (B75)[52].

El texto es importante por varias razones. Primero como constatación de las afirmaciones precedentes. Y segundo, y en relación al tema que nos ocupa, porque especifica un significado de éste el primer uso del término intuición [*Anschauung*] en la *Estética*. La intuición sería pues una potencia o capacidad, con lo que volvemos a toparnos con la psicología. Así pues en el *primer uso del término intuición* debemos distinguir *dos significados*: *La Intuición*, que en adelante escribiremos con mayúsculas, como potencia o capacidad psicológica, cuyo estudio quedaría dentro del campo de la psicología, y de la que por tanto poco se dice en la Crítica salvo el hecho muy importante señalado en este pasaje de que, considerada dentro del esquema cognitivo, y por lo tanto desde el punto de vista filosófico, lo relevante es su carácter de función (Funktion). Esto dará pie a la revisión del esquema kantiano en las modernas ciencias cognitivas, en lo que se ha dado en llamar el Funcionalismo, por Raf Meerbote (1989) y otros. Y por otro lado, *la intuición* (con minúsculas) o las intuiciones como resultado de la actividad cognitiva de esa función, y a la que serían aplicables esas caracterizaciones mencionadas al principio de particularidad, etc. Se plantea el problema del valor cognitivo de esta intuición considerada como resultado del acto de intuir. ¿Es conocimiento?

Cabe señalar, como indica Charles Parsons (Parsons, 2008, 143) que Kant distingue *Erkenntnis* de *Wissen*, que habitualmente se traducen ambos por conocimiento, y que en las traducciones inglesas se traducían habitualmente por *Knowledge* hasta la más reciente de Guyer y Woods, quienes en algunas ocurrencias traducen *Erkenntnis* por *cognition*. Pero Kant también usa ocasionalmente *Kenntnis*[53]. Y está por hacer un estudio sistemático de todos los

---

[52] "De ahí precisamente que sea tan necesario hacer sensibles los conceptos (i. e., aportarles el objeto dado en la intuición) como hacer discursiva (verständlich) la intuición (i. e., ponerla bajo los conceptos). Ambas potencias (Vermögen), o capacidades (Fähigkeiten) no pueden tampoco confundir sus funciones [Funktionen]" (B75). "Por ello es tan necesario hacer sensibles los conceptos (es decir, añadirles el objeto en la intuición) como hacer inteligibles las intuiciones (es decir, someterlas a conceptos). Las dos facultades o capacidades no pueden intercambiar sus funciones" (PR).

[53] Desde el punto de vista de los significados habituales, *Erkenntnis* es el *conocimiento razonado* y/o el *conocer razonando*, mientras que *Wissen* es el saber establecido sobre algo, por lo que podría traducirse por *saber*, entendido como conocimiento ya almacenado. *Kenntnis* sería equivalente a *Wissen*. Como se ha indicado, hasta muy recientemente en las traducciones inglesas se traducían todas habitualmente por *Knowledge* y en las españolas por *conocimiento*, eliminando así la diferencia. Esto sucede también con muchos otros términos y perífrasis usadas por Kant, desdibujando su pensamiento en las versiones traducidas. Véase por ejemplo la crítica de Abela a la traducción de Kemp Smith en pasajes relevantes (Abela, 2002, 136 y ss.). Analizando los usos que hace Kant de estos términos, se observa que Kant distingue cuidadosamente entre *Erkenntnis*, una representación mental consciente de los objetos (A320/B376), que no implicaría estrictamente creencia, verdad o justificación, y *Wissen* (A58–9/B83), que implica estrictamente creencia, verdad y justificación (A820–31/B848–59). Robert Hanna los traduce respectivamente por "cognition" y "scientific knowing" (R. Hanna, *Kant in the Twentieth Century,* in *Kant and the Foundations of Analytic Philosophy.* Oxford: Clarendon Press, 2001), y concluye que "from this simple terminological point however, it follows that to the considerable extent that the first *Critique* is all about the nature, scope, and limits of human *Erkenntnis*, then it is fundamentally a treatise in cognitive semantics, and *not* fundamentally a treatise in epistemology" (Cfr. Hanna, *Kant and the Foundations of Analytic Philosophy*, esp. pp. 18 and 30, Oxford: Clarendon Press, 2001). Parece que Kant utiliza normalmente *Erkenntnis* como un término técnico con significado preciso, que expresa las limitaciones del conocimiento humano. En la *Deducción* establece que la cognición (*Erkenntnis*) consiste

diferentes usos y las perífrasis que, como señala Bird, parecen indicar que Kant tenía una visión gradualista del conocimiento y daba un cierto valor cognitivo también a la intuición. La posición de Kant no es en modo alguno la de una demarcación tradicional, rígida y estricta entre lo que es conocido y lo que no, o entre lo que es inteligible o no (Bird, 2006, 128).

Pero para poder determinar el valor cognitivo que pudiera tener la intuición (las intuiciones), es decir el objeto resultante del acto de intuir, que es lo que hemos llamado el segundo significado del término *Anschauung*, y que hemos caracterizado como un tipo particular de estado mental de carácter representacional y no mediado por los conceptos, hay que mencionar primero que Kant utiliza también el término en *un tercer significado*, al referirse al *objeto resultante del acto de intuir*, cuando usa el término para referirse también al objeto representado en ese estado mental. Y aún hay un *cuarto significado* : la intuición como *el acto mismo de intuir*. Allison distingue tres usos del término "intuición" en Kant, que se corresponden a los que hemos llamado el segundo, el tercer y cuarto sentido.

> "Desgraciadamente esto [lo anterior] no agota la complejidad, o quizás sería mejor decir la ambigüedad, inherente a la concepción kantiana de la intuición. De hecho [lo anterior] se aplica sólo a uno de los tres sentidos en que Kant usa el término: aquél en el que se refiere a una clase particular de representación o contenido natural [segundo sentido para nosotros]. Como añadidura, a este más o menos oficial sentido de la 'intuición', Kant también usa el término para referirse al objeto representado por tal contenido (the intuited) [para nosotros tercer sentido] y al acto de representar directamente un particular (the intuiting) [para nosotros el cuarto sentido]. Para decirlo brevemente, es necesario distinguir entre un contenido mental, un objeto y un acto como sentidos de 'intuición' " (Allison, 2004, 82).

Para intentar abordar el significado e interrelación de estos significados debe uno partir del hecho de que (Falkenstein, 1995, 21) toda la obra de Kant en la *Crítica* está escrita en torno a la distinción básica entre dos facultades cognitivas: sentidos e intelecto. Tal vez para huir de las dualidades irreconciliables que existían en la filosofía de la época, o tal vez para superarlas con la construcción de un nuevo aparato conceptual, se produce en Kant una regresión inicial a la terminología y significadas de la filosofía medieval y, más acentuadamente, a la aristotélica en la que en gran parte ésta se basaba. Así, la mayor parte de la *Crítica*, la *Doctrina de los Elementos*, está dividida en dos partes fundamentales: una *Estética Transcendental* y una *Lógica Transcendental*. Kant eligió deliberadamente el término *Estética*, en absoluto usual al efecto en su época, que proviene directamente del término griego 'aesthesis', término que Aristóteles había usado para referirse a los procesos de la sensibilidad, y la *Estética Transcendental*, una investigación sobre la naturaleza, en especial de las características estructurales, de los datos proporcionados por los sentidos y su forma de procesamiento por el sujeto. La *Lógica Transcendental* en cambio está dedicada a las funciones cognitivas de conceptualización y entendimiento (la "Analítica de Conceptos"), juicio y formulación de proposiciones (la "Analítica de Principios"), e inferencia o razonamiento (la "Dialéctica"). Estas tres funciones cognitivas también fueron tomadas por

---

en "la relación determinada de una representación dada con un objeto" (B137, y B146–74) y en la Introducción a la edición B describe la generación de una cognición en tanto que involucrando la comparación de diferentes representaciones sensoriales. Análogamente sucede en la *Jäsche Logic* (Ak 9:65). En otros lugares, sin embargo, Kant usa el término *Erkenntnis* más ampliamente (A320/B376–77), donde simplemente una intuición o un concepto se considera como una cognición, y hay lugares en sus Lecciones de Lógica donde *toda* representación se considera una cognición (*Logic Lectures Ak.*24:132, 24:845, y *Jäsche Logic Ak.*9:64). Para Collin Marshall (*Kant's Metaphysics of the Self,* in *Philosophers Imprint,* vol.10, nº 8, 2010), " this broader understanding of the notion makes it impossible to make sense of Kant's central claims concerning cognition in the *Critique* (such as the claim that it requires *both* intuitions and concepts at (A51/B75)". Sin embargo todo esto confirma nuestra tesis de que Kant tiene una concepción gradualista del conocimiento, asignando un valor cognitivo a una simple intuición.

Aristóteles como las funciones básicas del intelecto o "nous". Sin embargo Aristóteles distinguía estas tres funciones también por su propia lógica interna, tratando así de la conceptualización en las *Categorías*, del juicio en *De Interpretatione* y de la inferencia legítima o ilegítima en *Analíticas primeras, Tópicos* y *Refutaciones*. Esta práctica estaba consagrada en los manuales de lógica que se remontaban hasta los días de Kant e incluso más tarde y así se refleja en los contenidos del índice de la *Lógica Transcendental* de la *Crítica*. A pesar de ello la *Lógica Transcendental* no era en su desarrollo de ninguna forma una lógica en el sentido tradicional. Este tópico, que se sale ahora de nuestros propósitos, está analizado detalladamente en (Falkenstein, 1995, 22) y (Longuenesse, 1997). Lo que nos interesa aquí recalcar es que mucha de la terminología básica de Kant se remonta a los tratados medievales y a Aristóteles y, en particular, la distinción entre sensibilidad e intelecto se remonta a la distinción de Aristóteles entre *aesthesis* y *nous* (*De Anima*, 427b7-15) como el propio Kant hace notar (A21n, B25n) y era una distinción básica en la teoría cognitiva medieval, y la teoría de unas cogniciones discursiva e intuitiva fue también elaborada por muchos autores medievales. Aunque Kant no es explícito sobre el origen de otros términos que elige, sucede lo mismo con muchos y "en verdad, lejos de ser un innovador en este aspecto, Kant era un reaccionario. Como base de su filosofía teórica que explicaría la cognición como el resultado de dos facultades, se deshace de toda relación con las teorías cognitivas de sus días y resucita una aproximación al conocimiento humano que sus contemporáneos e inmediatos predecesores habían rechazado" (Falkenstein, 1995, 30). Kant especifica en (A312/ B368-9) sus criterios para la creación de nuevos términos filosóficos y sobre cómo deben interpretarse los términos tradicionales, teniendo en cuenta "los significados que de forma distintiva pertenecen a un término", y teniendo en cuenta que Königsberg había sido siempre un baluarte del Aristotelismo, esos significados con toda seguridad deberían ser para Kant en primer término los tradicionales aristotélicos y escolásticos, aunque luego se amplíen con los derivados de las relaciones en su esquema cognitivo y la dinámica interna de su sistema. E incluso el mismo Kant no descarta la posibilidad de que las distinciones tajantes que establece el lenguaje puedan ser también fruto de nuestra ignorancia sobre los procesos subyacentes al fenómeno.

> "Unsre Erkenntnis entspringt aus zwei Grundquellen des Gemüts, deren die erste ist, die Vorstellungen zu empfangen (die Rezeptivität der Eindrücke), die zweite das Vermögen, durch diese Vorstellungen einen Gegenstand zu erkennen (Spontaneität der Begriffe) … Anschauung und Begriffe machen also die Elemente aller unserer Erkenntnis aus" (A50, B74)[54].

Kant no dice mucho sobre el acto de intuir pero como de acuerdo con la tradición aristotélica, la facultad cognitiva inferior, *aesthesis* o sensibilidad, era esencialmente psicológica, y puesto que "Kant se adhiere a la doctrina de la discursividad del intelecto humano – para él el intelecto humano es exclusivamente discursivo; en principio es incapaz de un entendimiento intuitivo" (Falkenstein, 1995, 43) parece claro que el acto de intuir es un acto esencialmente psicológico (A230/ B283). Podemos resumir diciendo que Kant, siguiendo a Aristóteles, postula la existencia de dos potencias o facultades cognitivas distintas: sensibilidad e intelecto. Sin embargo, al revés que Aristóteles, Kant no fundamenta la

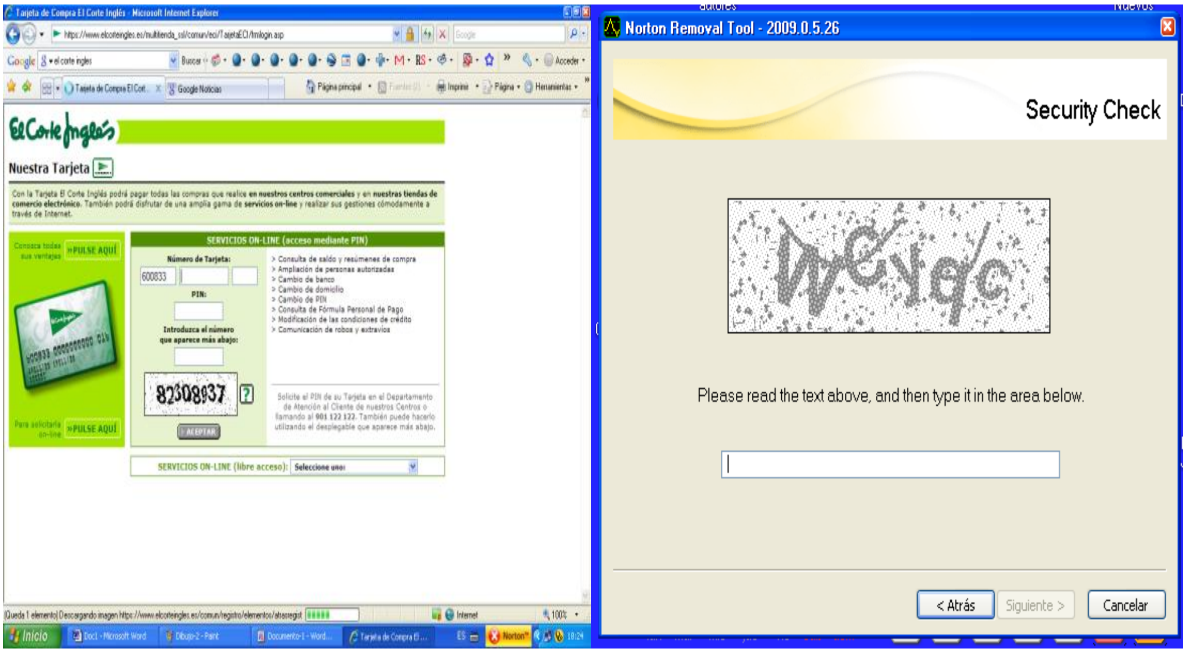
[54] "Nuestro conocimiento surge básicamente de dos fuentes del psiquismo: la primera es la facultad de recibir representaciones (receptividad de la impresiones; la segunda es la facultad de conocer un objeto a través de tales representaciones (espontaneidad de los conceptos) …la intuición y los conceptos constituyen, pues, los elementos de todo nuestro conocimiento" (PR). "Nuestro conocimiento se origina en dos fuentes fundamentales del espíritu: la primera es la facultad de recibir representaciones (la receptividad de las impresiones), la segunda es la facultad de conocer un objeto mediante esas representaciones (espontaneidad de los conceptos) …intuición y conceptos constituyen, pues, los elementos de todo nuestro conocimiento" (MGM).

distinción en la clase de conocimiento que proporcionan (conocimiento de particulares versus conocimiento de universales) ni en la constitución de los órganos asociados (el sistema sensorial – psicológico versus una mente inmaterial) sino en las *funciones* específicas que desempeñan en el conjunto del proceso cognitivo. "Sensibilidad y Entendimiento no serían tanto potencias cognitivas cuanto un primer y segundo momento de una única actividad" (Falkenstein, 1995, 138). En el primer momento, mediante el acto de intuir, esencialmente psicológico, los datos que se nos presentan por los sentidos como apariencia [materia de la intuición] el sujeto los ordena [forma de la intuición] en el espacio y en el tiempo [entendiendo por espacio el espacio bidimensional o tridimensional con la métrica euclídea], produciendo así la intuición, que consiste a su vez de dos objetos, que en Kant con frecuencia son difíciles de distinguir: un estado mental de carácter representacional del objeto y el mismo objeto representado, que para Kant no es un "objeto en sí mismo considerado" sino lo que la específica sensibilidad humana nos da de él a través de los sentidos. Esta intuición de las formas, más que de los objetos propiamente dichos, de carácter no discursivo y directamente representacional del objeto entendido como forma percibida, es lo que permite a Falkenstein calificar al esquema cognitivo Kantiano de "intuicionismo formal". Todo lo anterior justifica el nexo lógico que ha obligado al análisis de la cuestión de *la cosa en sí* en el apartado anterior, y sus relaciones con *la intuición*, que conjuntamente configuran un marco epistémico dentro del cual hay que encuadrar la filosofía de la Matemática de Kant, y que habrá que tener en cuenta para entender adecuadamente qué entendía él por un *objeto matemático* y el rol que asignaba a *la intuición* en su análisis de la Matemática, todo lo cual es un objetivo central de nuestra Tesis. Pero ¿existe alguna evidencia de ese acto (psicológico) de intuir y de su resultado, la intuición, y cuál sería su valor cognitivo? El hecho de que hayamos reconocido el carácter esencialmente representacional (en relación al objeto) de las intuiciones implica ya un valor cognitivo que habría que precisar. Hilbert que, como veremos más adelante, entendió en mi opinión la intuición kantiana precisamente como lo estamos describiendo aquí, y sostuvo por ejemplo que, sea lo que sea el número cuatro y sin entrar en discusiones ontológicas al respecto, la percepción del siguiente grafo de palitroques l l l l nos da una intuición directa del número cuatro, que en nuestro lenguaje lo podemos nombrar con el símbolo 4. Charles Parsons, analizando este ejemplo, aunque en un contexto más amplio, lo denomina "intuición de tipos", en la cuál lo distintivo es que la percepción e imaginación que los encuentra juega un rol paradigmático (Parsons, 2008, 162). Parsons intenta hacer una investigación de las característica de este tipo de intuiciones, observa que "una cadena [de palitroques] es como una figura geométrica: es espacial en cuanto que es una forma instanciada por objetos en el espacio, pero no tiene en sí misma una localización particular en el espacio" (Parsons, 2008, 160) y considera el ejemplo:

```
l  l  l  l
l  l  l    l
l  l  l      l
l  l  l        l
l  l  l          l
```

preguntándose "¿en qué punto deja la inscripción de ser del mismo tipo que la inicial? (Parsons, 2008, 163) Observando que tales tipos se caracterizan por la "vaguedad", sostiene que no se puede hablar de percepción de tipos, sino de intuición y concluye que "si yo veo una cadena escrita en este lenguaje, entonces veo una cierta inscripción incluso si por alguna razón fallo al identificarla o la identifico falsamente (por ejemplo como una cadena de 4 palitroques en lugar de 3). Esta es una instancia de una característica general del uso de "ver", compartida también por "oír" y otros verbos perceptuales… algo más está involucrado al hablar de intuición" (Parsons, 2008, 165).

Para Parsons es en este ejemplo donde se aclara el significado del acto de intuir en el sentido de Kant. Parece que existe una característica específicamente humana que permite, sin mediación de conceptos, identificar un "tipo", por usar la terminología de Parsons, aún en, o precisamente en, una percepción vaga (o difusa, o fuzzy). Y digo específicamente humana porque hasta la fecha ninguna máquina ha podido emular esta característica con éxito. A continuación incorporamos la página de acceso seguro de una cadena de ventas. Como se observa, debajo del número de tarjeta y el password, el sistema te pide que introduzcas el código alfanumérico que aparece abajo en trazos difusos y deformados y con un fondo borroso. Y también es utilizado este sistema por la una importante empresa de seguridad en la red[55] :



El hecho de que esto se utilice y funcione demuestra que la intuición, tal y como lo hemos explicado, existe. Que es un elemento básico de la cognición humana, y que proporciona un grado de cognición del objeto. Esta conclusión sería básica, por ejemplo, en la didáctica de las Matemáticas. Los grafos, diagramas y representaciones espacio-temporales son con frecuencia la mejor forma de explicar el núcleo de una teoría. Incluso en la explicación de las geometrías no euclidianas, la visualización de los entornos de un punto, que en el plano euclídeo aparecen como elipses o hipérbolas, ayuda a comprender la esencia de esa geometría. Podría pensarse que, sea cual sea su origen, innato o adquirido por la experiencia con el entorno cotidiano, la estructura del espacio euclídeo y la estructura de sucesión son las formas en las que el sujeto humano estructura todas sus percepciones espaciales y temporales de forma intuitiva, en un momento previo a la conceptualización. Y esta es, en mi opinión, el enfoque fundamental del tema en el esquema cognitivo kantiano. La interpretación de Parsons es, por cierto, como veremos más adelante, la de Hilbert en lo que nosotros consideraremos su interpretación restrictiva de la intuición kantiana en relación con

[55] Estos instrumentos se basan en el concepto CAPTCHA, acrónimo de Completely Automated Public Turing test to tell Computers and Humans Apart. A veces se designa también por HIP (Human Interaction Proof). Fue desarrollado por primera vez en el año 2000 por Luis von Ahn, Manuel Blum y Nicholas Hopper de la Carnagie Mellon University y John Langford de IBM. Los algoritmos utilizados son públicos, con los que los especialistas pueden valorar la seguridad del sistema.

la fundamentación de la Aritmética y su programa finitista. Y se puede señalar que esta conexión entre Kant y Hilbert la han percibido otros autores e interpretado de distinta manera[56]. Así, se puede considerar también una intuición de formas de los signos o, como dice Resnik, una intuición de patrones de formas[57]. Cabe preguntarse si la noción de intuición de Kant (en los cuatro sentidos que hemos descrito), además de incluir esta interpretación compatible, no incluye también una intuición de carácter semántico, intuición del objeto (o de una representación del objeto) al que se referiría el signo. Esta pregunta cobra mayor sentido si cabe al hablar de el concepto de intuición en Kant en la Geometría y la discutiremos al comparar las nociones de intuición en Kant y en Hilbert.

---

[56] Michael D. Resnik (2000, 217) indica que "En una serie de importantes artículos, Charles Parsons ha arguído que nosotros tenemos intuiciones matemáticas de ciertos objetos matemáticos 'cuasi-concretos' tales como numerales o formas geométricas. *Con Kant y Hilbert* , mantiene que esas intuiciones constituyen algo de nuestra evidencia sobre ciertas verdades matemáticas elementales". Para Charles Parsons (1994, 143), "lo que son esos cuasi-concretos está determinado por alguna instanciación o representación en lo concreto y por tanto difieren de los objetos abstractos puros, tales como los números, los cuales no tienen ninguna representación intrínseca concreta". Parsons utiliza y analiza, para clarificar su idea, la sucesión de palitroques propuesta y utilizada por Hilbert, como antes mencionamos, y habla de intuición de tipos comparándola con la percepción ordinaria de objetos físicos. Veremos que esto mismo hace Hilbert cuando justifica su programa finitista y todo ello es, en mi opinión compatible con la concepción de intuición de Kant (en sus cuatro sentidos) hasta aquí expuesta. Según Parsons (2008, 139), la noción de intuición de Kant es una *intuition that* frente a una *intuition of*, es decir, una intuición de algo, más bien que una intuición de lo que se dice de ese algo, y opina que tal 'intuición de tipos' sería el sentido genuino de la intuición kantiana. El mismo Hilbert tenía, como veremos, una noción más amplia de la intuición en su concepción de la Geometría y podemos preguntarnos si algo análogo no sucedía también con la concepción de Kant. Por el contrario, Resnik (1994, 143) dice que "no tengo ninguna objeción a la tesis de que nosotros intuimos objetos cuasi-concretos, supuesto que usáramos una noción de intuición y cuasi-concretitud más débil que la que Parsons aparentemente utiliza". Además duda de que el uso de una tal intuición ayude a explicar la obviedad de las verdades matemáticas elementales y sostiene que la esperanza de Parsons es que su teoría de la intuición matemática ayude a entender la aprioridad de las Matemáticas. Concluye diciendo que Parsons está en lo correcto al señalar la importancia de nuestro conocimiento de los sistemas simbólicos para la epistemología de las Matemáticas, pero "yo resaltaría la diferencia entre los cuasi-concretos y los objetos puramente abstractos que surgen de nuestras teorías sobre ellos" (1994, 229), dudando, en todo caso de que el enfoque de Parsons permita "explicar por qué la mayoría de las verdades aritméticas obvias son obvias".

[57] El punto más extremo en la interpretación formas de los signos lo constituye la interpretación desarrollada por el formalismo estricto formulado por Curry ya en 1951, y que coincide en lo fundamental con el enfoque de Bourbaki. Stephan Körner (1960, 104-113 y 126-140) ya analizó el problema en 1960 y concluye que "en cuanto a la filosofía de la matemática el formalismo estricto (de Curry) está más cerca que el punto de vista de Hilbert a la doctrina de Kant en la *Estética Transcendental*" (Körner, 1960, 105). La diferencia consistiría en que mientras para Kant un enunciado de la Matemática pura requiere construcciones, en el espacio y el tiempo, para su objeto de estudio "restringidas por la naturaleza misma de dichas_intuiciones ", para Curry el objeto de estudio de la matemática consiste en construcciones cuya posibilidad se haya restringida por "los límites dentro de los cuales la percepción es posible". Así las demostraciones serían demostraciones *ad oculos*, leídas en cierto modo en la percepción. Serían enunciados sintéticos verdaderos pero "su evidencia no es ni la de las tautologías lógicas ni, según opinaba Kant, la que surge de los elementos particulares supuestamente *a priori*. Es la evidencia más bien de enunciados fenomenalistas muy sencillos o de los datos de la percepción. En otros términos, los enunciados de la matemática serían enunciados empíricos que entrañan el menor riesgo posible de error". (Körner, 1960, 106) Así, según Curry (1951, 61), "resulta difícil concebir un proceso más definido y objetivo". Como veremos, Hilbert en su fundamentación de la Matemática considera muy primordialmente esto que hemos denominado "intuición de formas de los signos", ya sea en la interpretación de Curry o en alguna otra descrita en la nota anterior ; pero también veremos que tiene otro sentido más profundo de la intuición y para él "la *raison d'ètre* de los sistemas formales es salvar y preservar las teorías clásicas preexistentes, si bien algo modificadas, y en particular la teoría de los conjuntos de Cantor. En cambio para Curry los sistemas formales son los sustitutos de la matemática clásica" (Körner, 1960, 106) y constituirían un nuevo concepto de la matemática.

1.5.2- El carácter del esquema cognitivo kantiano. El quinto sentido de la intuición en Kant.

En el análisis que hemos realizado, la filosofía de Kant aparece como un intento de superar los planteamientos filosóficos y las limitaciones de la lógica de su época. Para ello, crea un *metalenguaje* específico con el que intenta abordar un análisis funcional de los mecanismos cognitivos humanos, y plantea como problema clave la elucidación de las *condiciones de la posibilidad* del conocimiento humano. Pretende en ese contexto situar el papel de la Filosofía [la Metafísica] en el marco de las nuevas perspectivas abiertas por el avance de las ciencias naturales y la matemática, o incluso plantearse su posibilidad, y también aclarar el papel crucial de las Matemáticas dentro de una *arquitectura* de las ciencias. Para entender el edificio diseñado por Kant para desarrollar su proyecto, debería vérsele más bien como un filósofo del siglo XX que crea un esquema conceptual diseñado para romper viejas falsas dicotomías y problemas mal planteados, y sería un error interpretarlo dentro de los debates de la época. Hay otro objetivo explícito en relación con el método para abordar el problema. En el planteamiento de ese método, que debería ser una "terapia" filosófica, Kant es un filósofo del siglo XX más que un metafísico tradicional de su época, y su objetivo es desarrollar un sistema de conceptos que deshaga muchos dilemas filosóficos de la época en cuanto problemas falsos o mal planteados. Pero su arquitectura conceptual es absolutamente original y propia, sin correlato con ningún otro filósofo de la época o moderno. Ligados a estos objetivos aparecen otros en su proyecto: dar cuenta de las posibilidades del conocimiento humano, explorando sus mecanismos y desarrollando una epistemología, y describir los fundamentos y el lugar en su arquitectura cognitiva de cada ciencia y, en particular, de la que nos ocupa: las Matemáticas. Muchos de los argumentos de Kant son en gran parte de una muy específica y compleja pretensión acerca de cómo estamos limitados en todo nuestro conocimiento determinado teóricamente por las formas puras del espacio y el tiempo. Muchos de los temas de debate en la literatura interpretativa de Kant, se esfuman por irrelevantes si adoptamos el enfoque de que el proyecto de Kant supone una auténtica ruptura con la tradición filosófica anterior, y en particular con los enfoques ontológicos. Como hemos visto, muchas de las oposiciones de la terminología kantiana consisten en *perspectivas epistemológicas funcionalmente contrapuestas* de la consideración del objeto y sin contenido *ontológico* alguno. Siguiendo a Allison (2004, xv-xvi), el idealismo transcendental debe ser interpretado en sí mismo como una metodología o punto de partida, más que como una doctrina metafísica sustantiva, y que pretendería un cambio del enfoque de la cognición "desde un modelo teocéntrico a uno antropocéntrico" y, consecuentemente, desde una concepción intuitiva a una discursiva de la cognición (entendiendo por "teocéntricos" todos los enfoques metafísicos de su época, los cuales suponían una realidad superior a la que de alguna forma podríamos acceder "intuitivamente"). "El idealismo transcendental es, en mi lectura, una doctrina de modestia epistemológica que deniega a seres finitos como nosotros cualquier acceso al punto de vista de las cosas desde un ojo divino (...) y desarrolla una reconfiguración de las normas epistémicas que constituyen la contraparte epistemológica del vuelco de la heteronomía a la autonomía que sostiene en el ámbito de la ética" (Allison, 2004, xvi).

Como anteriormente hemos señalado, Kant utiliza un vocabulario con unas significaciones específicas en su sistema[58] en relación con la *percepción* y que incluye

[58] Podemos considerar la Filosofía Crítica, en una primera instancia, como una teoría comprensiva de la naturaleza humana que se desarrolla por medio de un detallado análisis de la "cognición" humana (*Erkenntnis*), la "volición" humana o "capacidad de elección" (*Willkür*), el "entendimiento" humano (*Verstand*) y la "razón" (*Vernunft*), y que serían "facultades" (*Vermögen*) o "capacidades" mentales espontáneas (*Fähigkeiten*) o "potencias" (*Kräfte*), y que para Hanna (2012a, 150) serían innatas –en el sentido de intrínsecas a la mente y por tanto no adquiridas por experiencias, hábitos o entrenamiento-, aspecto que

habría que matizar. La *cognición* es una facultad para la representación mental consciente de objetos (A320/376–7). La *volición* es una facultad que origina acciones por medio de deseos conscientes. El *entendimiento* es una facultad para conocer o seleccionar de acuerdo con "principios" (*Principien*) (A405, A836/B864), que son reglas necesarias y estrictamente normativas de la mente humana y que se concretan en leyes teóricas o leyes prácticas. "What makes the Critical Philosophy a specifically *critical* philosophy, however, is Kant's striking and substantive thesis – which amounts to a mitigated form of rationalism– to the effect that the human faculty of reason, whether theoretical or practical, is inherently constrained by the brute fact of human finitude, or our animality" (Hanna, 2012a, 150), restricción que operaría a través de las facultades de la "sensibilidad" (*Sinnlichkeit*) el "deseo" (*Begehren*) y el "impulso" (*Trieb*). Estas limitaciones antropocéntricas implican que la cognición humana está constreñida por tres condiciones específicas de la *sensibilidad* (*Sinnlichkeit)* : dos condiciones *formales* , que serían la necesidad de *representaciones a priori en el espacio y el tiempo* (A38–9/B55–6); y una condición *material* , que sería la *afección* (*Affektion*) y que consistiría en la estimulación de los procesos cognitivos por algo existente externo a la facultad cognitiva humana (A19/B33). La teoría que describe esa dinámica sería el *idealismo transcendental* y que contiene dos subtesis: la tesis del transcendentalismo y la tesis del idealismo. La tesis del *trancendentalismo* sostiene que todo contenido representacional de la cognición está estrictamente determinado en sus formas o estructuras subyacentes por un conjunto "capacidades cognitivas" o "facultades cognitivas" (*Erkenntnisvermögen*), entre las que se incluyen: (i) la *sensibilidad* (*Sinnlichkeit*), o capacidad para la representación temporal y espacial vía la "intuición sensible" (*Anschauung*) (A22/B36), (ii) el *entendimiento* (*Verstand*), o la capacidad para la conceptualización en el *pensamiento* (*Denken*) (A51/B75), (iii) la *imaginación* como potencia (*Einbildungskraft*), que por un lado comprende la potencia específica de la *memoria* (*Gedächtnis*, *Erinnerung*) (*A* 7, A182–5), la *imaginación* como actividad y resultado (*Bildung*) y la *esquematización* (A137–42/B176–81), pero que por otro lado también incluye la capacidad de procesamiento mental más general de la *sintetización o síntesis* (A78/B103), (iv) la *autoconciencia* (*Selbstbewußtsein)* (B132) o la capacidad de *apercepción,* que sería el fundamento de la *unidad* de toda *conceptualización* y del *juicio* (B406), y finalmente (v) la *razón* (*Vernunft*), que sería la capacidad para la *inferencia lógica* y las *decisiones prácticas,* teniendo un rol *regulativo*. El sistema conjunto de capacidades cognitivas está constreñido en sus operaciones y funcionamiento por la *pura lógica general* (la ciencia de las leyes del pensamiento, categóricamente normativa, a priori, universal y ontológicamente indefinida) y la *lógica transcendental* (que se puede considerar como la *pura lógica general* semántica y modalmente restringida por una explícita toma de posición sobre los objetos propios de la cognición humana y sobre el sujeto cognoscente) (A50–7/ B74–82), (Hanna, 2012a , 150-153). La tesis del *idealismo* sostiene que los objetos propios de la cognición humana son solamente los objetos de nuestra experiencia sensorial –la apariencia o el fenómeno- (*Erscheinung, Phenomenon)* y no *cosas en sí mismas o noumenos*, de los que no podemos conocer nada (A19–49/B33–73, A369 y *Prolegomena* 4:293). "Appearances, in turn, are *token-identical* with the intersubjectively communicable contents of sensory or experiential representations (*PC,*11: 314). Correspondingly, the essential forms or structures of the appearances are *type-identical* with the representational forms or structures that are generated by our universal a priori mental faculties" (Hanna, 2012a, 153). Según Kant "alle unsere Erkenntnis müsse sich nach den Gegenständen richten" (Bxvi), y "richtet sich aber der Gegenstand (als Objekt der Sinne) nach der Beschaffenheit unseres Anschauungsvermögens, so kann ich mir diese Möglichkeit ganz wohl vorstellen" (Bxvii). La conjunción de las dos tesis da lugar a la tesis del *idealismo transcendental* (A369, B310–11), que Hanna (2012a, 153) interpreta así: "Human beings can cognize and know only either sensory appearances or the forms or structures of those appearances – such that sensory appearances are token-identical with the contents of our objective sensory cognitions, and such that the essential forms and structures of the appearances are typeidentical with the representational forms or structures generated by our own cognitive faculties, especially the intuitional representations of space and time – and therefore we can neither cognize, nor scientifically know, nor ever empirically meaningfully assert or deny, anything about things-in-themselves". Pero Kant matiza (y al mismo tiempo enriquece) esta tesis con su importante tesis del *realismo empírico*: "Also existieren eben sowohl äuβere Dinge, als ich selbst existiere … Also ist der transzendentale Idealist ein empirischer Realist und gestehet der Materie, als Erscheinung, eine Wirklichkeit zu, die nicht geschlossen werden darf, sondern unmittelbar wahrgenommen wird" (A371). "Alle äuβere Wahrnehmung also beweiset unmittelbar etwas wirkliches im Raume, oder ist vielmehr das Wirkliche selbst und in so fern ist also der empirische Realismus auβer Zweifel, d. i. es korrespondiert unseren äuβeren Anschauungen etwas Wirkliches im Raume" (A375). Para Hanna (2012a, 154), "In other words, he is saying that when we eliminate things-in-themselves as possible objects of human sensible cognition (although we remain capable of thinking about them abstractly), focus exclusively on appearances instead, and then identify them with the real material objects in space, it follows that we perceive real material objects in space through our senses without any further intermediary (let us call this Kant's direct perceptual realism), and also that all the essential properties of real material objects in space are macrophysical directly perceivable or observable *intuición* [Anschauung], *sensación* [Empfindung], *apariencia* [Erscheinung], *objeto* [Objekt, Gegenstand], así como *forma* [Form] y *materia* [Materie] que deberían formar los elementos de una ciencia de todos los *principios de la sensibilidad* [Sinnlichkeit] *a priori* y que denomina *Estética Transcendental*. Con este proyecto y esta terminología técnica al que se debe añadir *impresión* [Eindruck], y que es considerablemente ampliada a otro nivel de reflexión en la *Dialéctica Transcendental* en (B376-377, A320) se esbozan al menos dos usos del término *intuición*. El análisis de la *Estética Transcendental* propuesto por Kant puede ser resumido así: Los *objetos* [Gegenstände] afectan causalmente nuestros sentidos receptivos para producir *sensaciones*, pero es la *intuición* quien inmediatamente nos presenta los objetos. Tales objetos empíricamente presentados son *apariencias*, que quedan indeterminadas [unbestimmt] en ausencia de recursos conceptuales. Los *sentidos* se nos presentan con ítems particulares, mientras el *entendimiento* provee *conceptos* generales. Las sensaciones son la "*materia*" *a posteriori* de las apariencias, mientras que su "*forma*" *a priori* ordena ese material en ciertas relaciones. En primer lugar, Kant caracteriza "las intuiciones" en la *sensibilidad*, en tanto que opuestas a "los conceptos" en el *entendimiento*, y eso con tres características: como algo "particular", "inmediato" y "pasivo" o "receptivo", características relacionadas de la siguiente forma. Kant habla de intuiciones como en inmediata relación con los objetos, y los trata como particulares en virtud de su contraste con lo discursivo, la contribución generalizadora de los conceptos. La inmediatez sugiere una característica fenomenológica de la experiencia sensible ordinaria, por la que nosotros percibimos un objeto presentado (que nos afecta sensiblemente) sin necesidad de ninguna investigación o inferencia. La particularidad categoriza tal objeto así percibido sin el carácter general que el entendimiento provee a través de sus conceptos. Kant también sugiere que las intuiciones se remiten directamente a los objetos, a diferencia de las sensaciones. Tal distinción podría considerarse como un contraste entre estados mentales "representativos" y "no representativo". Kant hace una tajante distinción entre la *Estética* por una parte, que se ocupa de la sensibilidad, de la materia (sensación) y de la forma a priori de la intuición que aporte el sujeto cognoscente, y de cuya conjunción resulta la apariencia, y por otra parte la *Analítica* que se ocupa de la contribución a priori del entendimiento mediante conceptos, y de otro lado hace la no menos tajante separación de la sensación y la intuición como método de aislamiento (isolierung) de los componentes de la apariencia (materia y forma). El mismo Kant parece concebir que el conocimiento no surge sino al final del proceso, tras la conjunción de esos momentos artificialmente aislados para el análisis. Parecería imposible identificar una experiencia sensible pura sin ninguna referencia al entendimiento o a los conceptos. Sin embargo parece claro que Kant cree que ambas instancias están, si no literalmente, conceptualmente separadas por su procedimiento de abstracción, y que indican funciones distintas en el proceso cognitivo. Todo parece indicar que Kant tenía una visión gradualista del conocimiento y daba un valor cognitivo también a la intuición. Y en relación con la intuición, se pueden distinguir cuatro usos del término (Anschauung) en la *Estética*:

1º) La Intuición, que en adelante escribiremos con mayúsculas, como potencia o capacidad psicológica, cuyo estudio quedaría dentro del campo de la psicología, y de la que por tanto poco se dice en la Crítica salvo el hecho muy importante de que, considerada dentro del esquema cognitivo, y por lo tanto desde el punto de vista filosófico, lo relevante es su carácter de función (Funktion).

---

properties (let us call this Kant's manifest realism). In other words, for Kant the classical "veil of mere appearances" becomes the field of authentic appearances, in which all things are precisely what they seem to be. In this sense, his idealism is also paradoxically the most robust realism imaginable".

2º) La intuición (con minúsculas) o las intuiciones como resultado de la actividad cognitiva de esa función, y a la que serían aplicables esas caracterizaciones mencionadas al principio de particularidad, etc. Se podría describir como un tipo particular de estado mental de carácter representacional y no mediado por los conceptos.

3º) Kant utiliza también el término en un tercer significado, al referirse al objeto resultante del acto de intuir, cuando usa el término para referirse también al objeto representado en ese estado mental.

4º) Y aún hay un cuarto significado : la intuición como el acto mismo de intuir, el cual sería esencialmente un fenómeno psicológico.

Para abordar el sentido e interrelación de estos significados debe uno partir del hecho de que toda la obra de Kant en la *Crítica* está escrita en tono a la distinción básica entre dos facultades cognitivas: sentidos e intelecto. Tal vez para huir de las dualidades irreconciliables que existían en la filosofía de la época, o tal vez para superarlas con la construcción de un nuevo aparato conceptual, se produce en Kant una regresión inicial a la terminología y significadas de la filosofía medieval y, más acentuadamente, a la aristotélica en la que en gran parte ésta se basaba. Así, la mayor parte de la *Crítica*, la *Doctrina de los Elementos*, está dividida en dos partes fundamentales: una *Estética Transcendental* y una *Lógica Transcendental*. Sin embargo, al revés que Aristóteles, Kant no fundamenta la distinción en la clase de conocimiento que proporcionan (conocimiento de particulares versus conocimiento de universales) ni en la constitución de los órganos asociados (el sistema sensorial-psicológico versus una mente inmaterial) sino en las funciones específicas que desempeñan en el conjunto del proceso cognitivo. *Sensibilidad* y *Entendimiento* no serían tanto potencias cognitivas cuanto un primer y segundo momento de una única actividad. En el primer momento, mediante el acto de intuir, esencialmente psicológico, los datos que se presentan por los sentidos como apariencia [materia de la intuición] el sujeto los ordena [forma de la intuición] en el espacio y en el tiempo [entendiendo por espacio el espacio bidimensional o tridimensional con la métrica euclídea], produciendo así la intuición, que consiste a su vez de dos objetos, que en Kant con frecuencia son difíciles de distinguir: un estado mental de carácter representacional del objeto y el mismo objeto representado, que para Kant no es un "objeto en sí mismo considerado" sino lo que la específica sensibilidad humana nos da de él a través de los sentidos. Esta intuición de las formas, más que de los objetos propiamente dichos, de carácter no discursivo y directamente representacional del objeto entendido como forma percibida, es lo que permitiría calificar al esquema cognitivo Kantiano de "intuicionismo formal". Esta intuición de formas o de tipos, que es interpretada en distinta manera por diversos comentaristas, pero cuya existencia y operatividad está demostrada empíricamente, es un elemento básico de la cognición humana y proporciona un grado de cognición del objeto. Esta conclusión sería fundamental, por ejemplo, en la didáctica de las Matemáticas. Sea cual sea su origen, innato o adquirido por la experiencia con el entorno cotidiano, la estructura del espacio euclídeo y la estructura de sucesión son las formas en las que el sujeto humano estructura todas sus percepciones de forma intuitiva, en un momento previo a la conceptualización. Y esto es fundamental en el esquema cognitivo kantiano.

Hay, sin embargo, como hemos mencionado más arriba, numerosos lugares en la *KrV* en que Kant parece dejar sitio para juicios analíticos involucrando el concepto de una entidad puramente inteligible o el mundo inteligible. Por ejemplo (B149), (A276, B332) (A286, B343-43) (A433, B461) (A609, B637) (A635, B663). Y esto plantea la posibilidad de un 5º sentido de la intuición en Kant, la "intuición intelectual" que, ciertamente, sería incompatible con la lectura de Kant que aquí hemos desarrollado pero que, en todo caso, es objeto de polémica entre los comentaristas. El mismo Kant indica que hay solamente dos tipos concebibles de intuición: la sensible y la no sensible o intelectual, pero esta última, en cuanto que requiere la generación actual del objeto a través del mismo acto de intuir, esto es, sería una intuición creativa, quedaría excluida para los seres humanos como incompatible con nuestra finitud. Para Kant, el concepto de un intelecto intuitivo[59] tendería a ser una modelización de una mente divina y sería para él un concepto problemático puesto que los seres finitos no tendríamos forma de entender su posibilidad, pero tendría una importante función regulativa indicando los límites de nuestra cognición discursiva. La discusión canónica entre estas dos formas de intelecto la desarrolla Kant en los parágrafos 76 y 77 de la *Crítica del Juicio*. Sin embargo el tema está interrelacionado con el problema del *objeto trascendental*, el de *la afección por las cosas en sí mismas* y por la distinción *fenómeno-noumeno*, y hay ríos de tinta escritos al respecto. Por ejemplo según Adickes (1924, 4), con quien no coincide el análisis anterior, existen muchos pasajes en donde Kant afirmaría sin ambigüedad la afección de la mente por las cosas en sí mismas: (A44, B61), (A358), (A380), (A393) y (A494, B522), a los que se podrían añadir otros pasajes problemáticos como (A288, B244), (A613-14, B641-42). Y el problema, junto con la multiplicidad de interpretaciones, se complica con el análisis de la *Deducción Transcendental* (Allison, 2004, 159 y ss). Podemos concluir diciendo que este 5º sentido de la intuición en Kant es un tema conflictivo y discutido y que requeriría un estudio monográfico. Hay que señalar que en nuestro análisis del esquema cognitivo kantiano y, en particular, de la intuición, nos hemos limitado básicamente a la *Estética Transcendental*. Dentro de estos límites, un análisis más a fondo del rol de la intuición en Kant debería incluir el desarrollo de un análisis más detallado acerca de cómo operan en su esquema conceptual las contraposiciones *a priori-a posteriori*, *analítico-sintético* y *empírico-transcendental* (Bird, 2006, 63-96). Pero un análisis ulterior más profundo de la intuición en Kant exigiría también el análisis de la *Lógica Transcendental*, lo que nos remitiría a la consideración del rol de *la imaginación* y de *la síntesis*, entre otras cosas, nociones que según muchos comentaristas serían determinantes en la concepción cognitiva de Kant. (Lenhard, 2006, 312), (Kim, 2006, 150) (Sutherland, 2005).

1. 6. El enfoque de la psicología transcendental y la naturalización del proyecto kantiano.

Si algunos de los comentaristas anglo-americanos sobre Kant en los últimos 40 años tratan de superar la tesis de la separabilidad de Strawson y han creado una lectura de Kant, que hemos desarrollado en los apartados anteriores, que rompe con las mistificaciones al respecto de la filosofía idealista alemana y le presentan como un pensador más bien del siglo XX en su proyecto, Patricia Kitcher se adentra en el resbaladizo terreno de la psicología en relación con el esquema cognitivo Kantiano. Strawson ya indicaba la observación del marcado carácter psicológico de lenguaje de Kant[60]. Pero él no quería leer la obra psicológicamente, sino buscando sus argumentos analíticos. Cuando Strawson propone lo que Allison denomina su *tesis de la separabilidad* entre los argumentos transcendentales de Kant y los analíticos planteando que "dondequiera que él [Kant] encuentra características limitantes o de necesidad general de la experiencia, declara que su fuente radicaría en nuestra propia constitución cognitiva… de modo que un problema central en la comprensión de la Crítica es precisamente esa desconexión de todos los lazos de esta doctrina con los argumentos analíticos que, de hecho son independientes de ella" (Strawson, 1966, 16), parece claro que la

[59] Allison (2004, 28 y ss) analiza esta posición en las distintas interpretaciones de la tradición platónica y de Malebranche y Leibniz, pero también en Locke y Hume, justificando su adscripción a un "modelo teocéntrico" frente al cual, en su opinión, Kant intentó construir un "modelo antropocéntrico" en relación a la cognición. También intenta demostrar que el "modelo teocéntrico" estaba también en el pensamiento pre-crítico del mismo Kant.

[60] "El idioma de Kant es psicológico, el idioma de los departamentos o facultades de la mente" (Strawson, 1966, 20). "El idioma de la obra es el principio a fin un idioma psicológico" (Strawson, 1966, 19).

razón es que interpreta los argumentos transcendentales de Kant de forma básicamente psicológica. Por eso parecería que el intento de Patricia Kitcher de buscar una conexión psicológica en la teoría transcendental de Kant ataca frontalmente los resultados de autores como Bird, Allison o Falkenstein que han despojado a la teoría transcendental de Kant de toda conexión psicologicista, aunque renunciando a la Tesis de la Separabilidad de Strawson, es decir, reivindicando la Filosofía Transcendental como un enfoque filosófico válido. Pero, como veremos, no es en mi opinión el caso. Ella misma es consciente del rechazo inicial que una revisión con tal enfoque produce en los filósofos especializados cuando recalca que "tomando a Dieter Henrich y Gerdd Prauss como referencia, la psicología transcendental tiene el mismo lugar poco envidiable entre los estudiosos germanos que el que tiene entre la academia angloparlante: ¡Evitarla!" (Kitcher, P., 1990, 4). Ciertamente hay fundamentos para esa reticencia. Las lecturas psicológicas de la Crítica fueron prevalentes en los primeros 100 años de su existencia. No vamos a estudiar este tema al detalle, pero una amplia bibliografía para su estudio puede encontrarse en (Kitcher, P., 1990, 232). Un tratamiento a fondo del tema desde perspectivas psicológicas, fisiológicas y biológicas, en (Moya, 2008).

Ya Karl Leonard Reinhold (1758-1823), de cuya decisiva influencia y de la de su obra *Briefe über die Kantische Philosophie* hemos hablado, concluía que *la Crítica* era insuficientemente crítica en el uso de conceptos psicológicos clave. Propuso para remediar este supuesto defecto desarrollar una fundamentación crítica para la filosofía crítica y, partiendo de conceptos asumidos por Kant, pero según Reinhold insuficientemente examinados desde el punto de vista psicológico, en particular el omnipresente y ambiguo en Kant "Vorstellung" (traducido usualmente por "representación"), se embarca en una interpretación psicologicista de *la Crítica*, que continuaría y modificaría su discípulo Jacob Friedrich Fries (1773-1843)[61]. También, en la misma dirección, Norman Kemp Smith (1962, 51) criticaba en 1918 refiriéndose a Cohen, Caird y Riehl : "Ninguna interpretación que ignore o infravalúe estos aspectos psicológicos o subjetivos de las enseñanzas de Kant puede ser admitida como adecuada"[62]. La gran influencia de la filosofía analítica en los círculos anglo-americanos haría el resto. Hay que reconocer que los intentos de lectura psicologicista de la crítica en los siglos XVIII y XIX no sólo se basaban en el carácter marcadamente psicológico de la terminología kantiana pues "antes del siglo XX, la mayoría de la epistemología que se hacía era psicologicista. Como indica Alvin Goldman, la literatura histórica al respecto está repleta con descripciones y atributos, procesos y contenidos, actos y operaciones" (Kitcher, P., 1990, 8). El primer golpe serio para una lectura psicologicista de la Crítica provino de uno de los mayores científicos de las postrimerías del siglo XIX. Hermann von Helmholtz escribió su voluminosa obra *Physiclogical Optics* (1856-1866) que en su tercer volumen contenía una amplia discusión sobre Kant. Aunque él mismo compartía la lectura psicologicista de Kant, y en particular le consideraba un nativista en lo que respecta al problema de la percepción espacial, planteó las dificultades que el descubrimiento de la posibilidad de geometrías no euclídeas por Bolyai y Lobachevski planteaba a la concepción Kantiana de la geometría. A partir de ahí fue un lugar común en muchos comentaristas el decir que la posibilidad de geometrías no euclidianas invalidaba las teorías de Kant, cosa que aún se puede leer en muchos manuales contemporáneos, y eso aunque el mismo Helmholtz consideraba que no era necesariamente cierto por cuanto que bien podría ser que la "percepción" espacial humana fuera después de todo básicamente euclídea. Sin embargo el

[61] "Los esfuerzo de Reinhold y Fries para vindicar la psicología de Kant sólo tuvieron éxito en hacer el tema absolutamente intratable" (Kitcher, P., 1990, 6).

[62] "Desgraciadamente su explicación de la psicología transcendental hizo la doctrina tan inatractiva que consiguió perder más que ganar conversos a su importancia" (Kitcher, P., 1990, 4). Sobre la polémica en torno al psicologicismo kantiano véase (Röd, 1988). Un análisis a fondo y amplia bibliografía en (J. Pacho, 2000) y (Moya, 2008).

golpe de gracia, y definitivo, a la psicología de Kant y, más en general, a cualquier conexión de la psicología con la epistemología e incluso con la filosofía, provino de Gottlob Frege. Frege plateó explícitamente los principios que deberían dirigir esta empresa. Su bien conocido primer principio era separar siempre tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de los objetivo:

> "[X] Como fundamentos he determinado en esta investigación los siguientes: Debe separarse tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de los objetivo… para seguir este principio he utilizado siempre la palabra representación [Vorstellung] en un sentido psicológico, y diferenciado las representaciones de los conceptos [Begriffen] y objetos [Gegenstände]" (Frege, 1987, 23).

Realmente Frege atacaba el psicologicismo exclusivamente en relación con la filosofía de la matemática y de la lógica y aunque aún en ese campo es discutible su identificación de "lo objetivo" con "lo lógico", el hecho es que su influencia en la filosofía del siglo XX, en especial en el ámbito anglosajón, fue determinante[63]. Falkenstein reconoce el valor de la investigación de Patricia Kitcher, si bien criticando su perspectiva pero también deformando su interpretación al argüir que "una brillante defensa de la tesis de que Kant estaba en verdad comprometido [engaged] en un proyecto 'psicologicista' puede verse en 'Kants transcendental Psychology', ch.1. Kitcher intenta argüir que Kant estaba comprometido en un tal proyecto psicologicista sino también que no es algo malo un tal compromiso – que la 'psicología transcendental' de Kant es de hecho un antecesor del siglo XVIII de la clase de investigaciones sobre implementación de tareas de los dispositivos de proceso de la información que actualmente se están desarrollando en las investigaciones sobre inteligencia artificial y psicología cognitiva" (Falkenstein, 1995, 366). Pero Kitcher en modo alguno sostiene un "compromiso" de Kant con un proyecto psicologicista. Muy al contrario, reconoce y analiza el rechazo explícito y reiterado de Kant a todo enfoque psicológico del problema:

> "La actitud de Kant hacia la psicología está clara. Él pretende que la Psicología Empírica es incapaz de contribuir a un conocimiento a priori y debería ser desterrada de la Metafísica. Dedica un capítulo entero a desinflar las pretensiones de la psicología Racional… e incluso en la Antropología recomienda el comportamiento externo como la mejor fuente de evidencia para la Antropología" (Kitcher, P., 1990, 11).

Y en efecto, la actitud de Kant frente a la Psicología es tal y como la describe Kitcher:

> "…und welche daher zur Erklärung der Möglichkeit der Erkenntnis a priori nichts beiträgt, und um deswillen nicht in die Transzendental Philosophie, sondern in die Psychologie gehört" (B152)[64].

> "Also muss empirische Psychologie aus der Metaphysik gänzlich verbannet sein, und ist schon durch die Idee derselben davon gänzlich ausgeschlossen" (A848, B876)[65].

Y en los "Fundamentos Metafísicos de las Ciencias Naturales" sostiene que la Psicología Empírica nunca podría ser una ciencia natural porque no es cuantificable (AK, 4, 471). Además de atacar a la Psicología Racional por activa y pasiva en muchos pasajes de su

---

[63] Michel Dummett ("Frege: Philosophy of Language", Harper & Row, New York 1973) Richard Rorty ("Philosophy and The Mirror of Nature", Princeton University Press, 1979) y Hans Sluga especialmente ("Gottlob Frege", Routledge, Boston 1980) han demostrado la influencia dominante que la concepción de Frege ha tenido en el desarrollo de la Filosofía del siglo XX.

[64] ".. y que por ello mismo no aporta nada a la explicación de la posibilidad del conocimiento *a priori*. Consiguientemente, la imaginación reproductiva pertenece a la psicología, no a la filosofía transcendental" (B152) (PR).

[65] "En consecuencia la Psicología empírica debe ser completamente desterrada de la Metafísica, de la que está absolutamente excluida por la propia idea de la psicología empírica" (A848, B876) (PR).

obra, Kant parece a veces incluso debilitar las conexiones psicológicas que plantea en su misma obra. Así en el prefacio de la primera edición confiesa que el lado subjetivo de la deducción, que se relaciona con las facultades cognitivas del entendimiento es algo “de carácter hipotético” e inesencial para su propósito principal [AXVII]. Éste es precisamente el tratamiento que vimos que daba a la facultad de intuir. Si observamos el análisis de la intuición realizado anteriormente, Kant reconoce un significado de intuición como facultad psicológica y explícitamente renuncia a cualquier análisis de la misma por no poder hacerse un estudio objetivo de ello ni poder conocer los mecanismos fisiológicos que la regulan. Todo esto lo recalca Kitcher (1990, 11 y 55) quien además observa que “él [Kant] recuerda a veces a los logicistas” (Kitcher, 1990, 11) y parece tener razón si observamos pasajes como el siguiente:

> “In dieser müssen also die Logiker jeder Zeit zwei Regeln vor Augen haben.
> 1) Als allgemeine Logik abstrahiert sie von allem Inhalt der Verstandeserkenntnis ihrer Gegenstände, und hat mit nichts als der bloβen Form des Denkens zu tun.
> 2) Als reine Logik hat sie keine empirische Prinzipien, mithin schöpft sie nichts (wie man sich bisweilen überredet hat) aus der Psychologie, die also auf der Kanon des Verstandes gar keine Einfluss hat. Sie ist eine demonstrierte Doktrin, und alles muss in ihr völlig a priori gewiss sein” (A54/ B78)[66].

Además, en el prefacio de la primera edición de la *KrV* explica que el lado subjetivo de la deducción, que se relaciona con las facultades cognitivas del entendimiento es algo “de carácter hipotético” e inesencial para su propósito principal (AXVII). Se observa la coincidencia con la posición de Frege: “[X] Como fundamentos he determinado en esta investigación los siguientes: Debe separarse tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de los objetivo… para seguir este principio he utilizado siempre la palabra representación [Vorstellung] en un sentido psicológico, y diferenciado las representaciones de los conceptos [Begriffen] y objetos [Gegenstände]” (Frege, 1987, 23). Por consiguiente, Kitcher no pretende en modo alguno, pese a la afirmación de Falkenstein, sostener un supuesto “compromiso” psicologicista de Kant. Al contrario. Su descripción de la postura de Kant coincide básicamente con nuestras conclusiones en el análisis de la intuición, y nos ayuda a formularlas con mayor claridad concluyendo que “Kant es solamente culpable de psicologicismo débil. Y esto no es automáticamente un pecado (...) Puesto que el proyecto de Kant era determinar nuestra habilidad para tener ciertos tipos de conocimientos, comienza naturalmente por considerar el tipo de equipamiento mental que poseemos de forma standard” (Kitcher P.,1990, 10). Podríamos decir que Kant tiene un inventario de las facultades cognitivas humanas, pero que renuncia explícitamente a su análisis por considerarlo no científico con los medios de la época, y se centra en una descripción de *sus relaciones funcionales* a través de lo observable por el análisis de los conceptos, lo propio de la filosofía, y las características conceptuales de los conocimientos efectivos de los humanos. Kitcher plantea además dos cosas interesantes que por supuesto no están en Kant. Por un lado tiene una crítica fundada al excesivo predominio de la Filosofía Analítica incluso, hasta épocas muy recientes, en la filosofía de la mente (1990, 8) y plantea que, un enfoque que tal vez pudo ser correcto para la lógica y la Metafísica de finales del XIX, cercena las posibilidades de la filosofía en las nuevas perspectivas que abren el avance de las neurociencias y las ciencias cognitivas. Por eso plantea que ya se dan las condiciones para iniciar un estudio científico de

[66] “En esta ciencia los lógicos deben, pues, tener siempre presentes las dos reglas siguientes: 1) como lógica general, hace abstracción de todo contenido del entendimiento, así como de la diversidad de sus objetos, y no tiene que ver sino con la simple forma del pensar. 2) como lógica pura, no posee principios empíricos, es decir, no toma nada (contra lo que a veces se cree) de la psicología, la cual no ejerce consiguientemente ningún influjo sobre el canon del entendimiento. La lógica pura es una doctrina demostrada y todo tiene que ser en ella cierto enteramente *a priori*” (A54, B78) (PR).

las facultades cognitivas presupuestas en *la Crítica*, que tendría que ser multidisciplinar, y que en esta investigación la Filosofía tendría un papel. Y concluye que el desarrollo de la psicología transcendental tiene relevancia también para el desarrollo de la propia filosofía, constituyendo esto una parte fundamental de su proyecto en el que "en posteriores discusiones de tópicos específicos argüiré sobre la relevancia de las pretensiones de la psicología transcendental para los propios temas filosóficos" (Kitcher P., 1990, 8) y defendiendo las posibilidades que abriría el desarrollo de este nuevo enfoque en la lectura de Kant ya que "parece que ya es hora para otra aproximación […] Una parte esencial de la compleja doctrina del idealismo transcendental es que lo que nosotros conocemos es parcialmente un reflejo de nuestras formas de conocer […] Las contribuciones a proyectos interdisciplinares no necesitan ser sin embargo interdisciplinarios […] Kant fue capaz de ofrecer análisis inusualmente ricos del esquema de tareas de varios aspectos de la cognición […] Argüiré más tarde que esos análisis pueden proveer perspectivas y direcciones para la investigación contemporánea en las ciencias cognitivas […] Mi intención es solamente comenzar la rehabilitación del oscuro lado psicológico de la obra de Kant, de forma que sea accesible para la investigación contemporánea" (Kitcher P., 1990, 29). Reconoce que, en todo caso, tal tentativa es muy parcial ya que sólo analiza la 1ª Crítica de Kant. Excede a los límites de este trabajo un análisis detallado de la obra de Patricia Kitcher pero deben resaltarse algunas consecuencias de la lectura de su obra, relevantes para nuestro tema. En primer lugar abre un interesante y amplio campo de investigación, por un lado puramente filosófico, por cuanto que la investigación de sus tesis debería extenderse más allá de la "Crítica de la Razón Pura", y por otro porque plantea una nueva relación de la filosofía con las ciencias empíricas emergentes. En segundo lugar, y está en relación con esto último, la recogida de datos y la experimentación en las ciencias empíricas no es una recogida ciega de datos y un diseño experimental ciego, sino que esto se enmarca en un esquema, si no siempre teórico, al menos conceptual previo que guía el diseño del experimento y la interpretación de los datos, esquema que es falsable, confirmable o revisable por los resultados empíricos. La evidencia documentada de trabajos experimentales apoyados en el esquema cognitivo kantiano[67] abre el camino a la investigación de un nuevo papel de la Filosofía en la "arquitectura de las ciencias". Si Kant, con las herramientas propias de la Filosofía, el análisis conceptual, pudo diseñar un esquema con tal capacidad (si eso fuera demostrable) queda abierto un nuevo camino que habría que interpretar. Quizás la Filosofía Analítica fuera una cura necesaria, una "terapia" contra el dogmatismo desbocado de la filosofía occidental y su desprecio de la investigación empírica. Pero quizás la "terapia" que, como demostramos en este trabajo, se propuso Kant y que, si las tesis de Kitcher son ciertas, es fructífera, fuera una terapia más potente y más capaz de generar un camino de futuro para la Filosofía que el intentado por la Filosofía Analítica.

---

[67] "No podemos volvernos hacia Kant y esperar descubrir que la verdadera teoría de los conceptos ha estado yaciendo, indetectada, en medio de nosotros durante 200 años. Mis propósitos son mucho más modestos (y espero que realistas) (...) repetiría que el análisis de Kant solamente señala en una particular dirección. Yo desvelo esas perspectivas de algunas formas obvias y muestro su sostén para los intentos actuales de comprender la psicología de los conceptos" (Kitcher, P., 1990, 207). Patricia Kitcher discute la conexión de su interpretación con los resultados de la moderna Filosofía de la Mente y los modelos de Inteligencia Artificial y la contrasta con los resultados de campo (1990, 128-139 y 205-230). Análisis en análoga dirección pueden verse en: Robert Paul Wolff, *Kant' Theory of Mental Activity* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963); Onora O'Neil, "Transcendental Synthesis and Developmental Psychology", *Kant Studien* 75 (1984) pp.149-167; Ralf Meerbote, "Kant's Functionalism", en J.C. Smith (edit), *Historical Foundations of Cognitive Sciencies* (Dordrecht, Reidel, 1989); J. M. Young, "Kant's View of Imagination", *Kant Studien* 79 (1988) pp.140-164. La bibliografía experimental utilizada por Patricia Kitcher puede verse en (1990, 255-256 y 269-272).

CAPÍTULO-2

La filosofía de la Matemática en la epistemología kantiana y el rol de la intuición.

2.1-La filosofía de la Matemática en Kant.

El sistema filosófico de Kant se desarrolló bajo la influencia de la filosofía racionalista, representada principalmente por Leibniz, y de la filosofía empirista representada por Hume, y en oposición consciente a una y otra. Tanto Hume como Leibniz dividen todas las proposiciones en dos clases excluyentes y exhaustivas, esto es, en proposiciones analíticas y factuales, y ambos filósofos consideran las proposiciones matemáticas como analíticas, aunque difieren radicalmente acerca de las proposiciones factuales. Las proposiciones analíticas predican algo que ya está contenido en un concepto y, por lo tanto, su negación sería contradictoria; además son *a priori* de toda experiencia sensorial y, por lo tanto, no empíricas. Las proposiciones factuales serían contingentes, su verdad depende de la experiencia sensorial, y en este sentido serían empíricas y *a posteriori* de la experiencia y, además, añaden una verdad que no estaba contenida en un concepto y en este sentido serían sintéticas. Esta clasificación dicotómica se debe en gran parte a las restricciones de la lógica aristotélica, que era básicamente una lógica de inclusiones[68].

Kant intenta superar las limitaciones de esa lógica introduciendo el punto de vista transcendental[69], esto es, el análisis de las proposiciones también teniendo en cuenta la forma de conocer, las posibilidades y los límites del sujeto cognoscente. Muy esquemáticamente, considera una clasificación triple de las proposiciones con la que reemplaza la dicotomía de Leibniz y Hume, pero para justificarlo las oposiciones *a priori-a posteriori*, *analítico-sintético* y *empírico-transcendental* adquieren otro significado en su sistema con una dinámica sutil que intenta captar lo esencial de la forma específica de conocer del sujeto humano. La primera de las clases que Kant considera, la de las proposiciones analíticas (esto es, proposiciones cuya negación es contradictoria en sí), coincidiría con las proposiciones

---

[68] "Para Friedman, toda la Matemática del siglo XVIII cae de hecho bajo el veredicto de una Lógica incompleta a la que le faltaría principalmente una Lógica relacional. De esta deficiencia, sin embargo, Friedman extrae consecuencias excesivas" (Lenhard, 2006, 304). De hecho el principal argumento que utiliza Friedman para justificar su desacuerdo con la filosofía de la Matemática de Kant y, en particular, de su recurso a la intuición es precisamente que la causa radicaría en su Lógica no relacional basada en la Lógica aristotélica (de inclusiones) de su época: "La concepción de Kant de la *lógica* no es ciertamente nuestra concepción moderna. Nuestra distinción entre geometría pura y aplicada va de la mano con nuestra comprensión de la lógica, y esta concepción simplemente no existía antes de 1879, cuando apareció el *Begriffschrift* de Frege" (Friedman, 1992, 56). "Nuestra lógica, a diferencia de la de Kant, es poliádica más que monádica (silogística); y nuestros axiomas para la geometría euclídea son llamativamente distintos de los de Euclides en cuanto que contienen una *teoría de orden* explícita, esencialmente poliádica" (Friedman, 1992, 59).

[69] Este punto es resaltado por Thomson arguyendo que Kant hizo de hecho un avance sustancial en lógica sustituyendo la lógica tradicional de *términos* por una "lógica transcendental" de *objetos* y *conceptos*. Concluye que "la lógica general requerida por la lógica transcendental de Kant es así por lo menos una lógica cuantificacional de primer orden más identidad" (Thomson, 1972, 334).

analíticas de Hume y Leibniz. En cuanto a las proposiciones no analíticas, Kant distingue en principio dos clases: las que son empíricas o *a posteriori* (proposiciones sintéticas *a posteriori*) y las que son no empíricas (proposiciones sintéticas *a priori*). Las *proposiciones sintéticas a posteriori* dependen de la percepción sensible, en cuanto que toda proposición *a posteriori*, si es cierta, ha de describir una percepción posible de los sentidos o implicar lógicamente proposiciones que describan percepciones de los sentidos. Las *proposiciones sintéticas a priori*, en cambio, no dependen de la percepción sensorial, serían condiciones necesarias de la posibilidad de la experiencia objetiva. Kant divide luego las proposiciones sintéticas *a priori* en dos clases: las "intuitivas" y las "discursivas". Las proposiciones *sintéticas a priori intuitivas* se relacionan ante todo con la estructura que Kant asigna a la percepción y a los juicios perceptivos, y las proposiciones *sintéticas a priori discursivas* (por ejemplo, el principio de causalidad) se relacionan con la función ordenadora de las nociones generales[70]. Para Kant, todas las proposiciones de la Matemática pura pertenecen a la *clase intuitiva de las proposiciones sintéticas a priori*. Un punto clave es justificar cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori* de la clase intuitiva[71].

---

[70] Daniel Sutherland (2004a, 2004b, 2005a) resalta que el corazón de la filosofía de la Matemática en Kant radica en su estudio de las *magnitudes*, un tema que hasta la fecha había sido menospreciado. El mismo Kant indica que sólo el concepto de *magnitud* puede ser construido en la intuición pura, pues las cualidades sólo pueden ser exhibidas en la intuición empírica (A714 / B742), y eso le llevaría a su distinción entre cognición filosófica y cognición matemática (Hintikka, 1967), (Parsons, 1969), (Friedman, 1992). Kant explica (A717 / B745) cómo los matemáticos construyen las magnitudes aritméticas y geométricas, que serían distintas de las figuras espaciales correspondientes al razonamiento geométrico, y distingue entre "construcciones ostensivas" y "construcciones simbólicas" que darían lugar a ambos tipos de razonamientos (Brittan, 1992), (Shabel, 1998). Friedman (1992) también realiza un análisis detallado de la teoría de las magnitudes en Kant, recalcando su distinción entre *quantum* y *quanta*. Kant distingue dos tipos de magnitudes: *quantum* y *quantitas*, y las entiende en el sentido que sugiere el latín, la primera en un sentido más concreto y la segunda en un sentido más abstracto. En los Axiomas de la Intuición Kant da una definición de *quantum* y añade que todas las *apariencias* en ese sentido *son* magnitudes (B202-3). En este sentido, esta noción de magnitud de Kant no se corresponde con la usual hoy en Matemáticas; un palo en movimiento no es que *contenga* o se describa por magnitudes, es que él mismo *es* una magnitud. Este tema ha sido estudiado recientemente también por Friedman (1992 y 2000), Parsons (1984), Longenesse (1998). La distinción entre las concepciones concreta y abstracta de una magnitud en Kant se analiza en (Sutherland, 2004). La tesis de Sutherland es retomada por Shabel (2014, 4-6), quien concluye que "while Kant's theory of mathematical concept construction can be thought of as providing an explanation of mathematical practice as Kant understood it, the theory is intertwined with Kant's broader commitments to strict distinctions between intuitions and concepts, as modes of representations; between the mental faculties of sensibility and understanding; between synthetic and analytic judgements; and between *a priori* and *a posteriori* evidence and reasoning. Ultimately, the picture of mathematics developed in the Discipline of Pure Reason in Dogmatic Use depends on the full theory of judgement that the *Critique* aims to provide, and crucially on the theory of sensibility that Kants offers in the Transcendental Aesthetic" (Shabel, 2014, 6), coincidiendo así con Parsons (1992) y Carson (1997). Y estas son tesis básicas en nuestra exposición. En el apartado 8.2 del Capítulo-8 ampliamos nuestro estudio de Sutherland y Shabel, y de sus consecuencias.

[71] Aquí nos estamos limitando al análisis de Kant en la *KrV* y, especialmente, en su *Estética Transcendental*. Pero su análisis hasta aquí experimentó una gran evolución, aunque con algunos elementos permanentes. En 1763 la Academia Prusiana de Ciencias convocó un premio entre las aportaciones científicas que dilucidaran la cuestión de si los primeros principios de la metafísica y la moralidad podrían ser demostrados y, consiguientemente, alcanzar el mismo grado de certeza que las verdades matemáticas. El primer premio lo obtuvo Moses Mendelssohn y el segundo premio lo obtuvo Kant con su ensayo *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*. Fue publicado por la Academia en 1764 (Ak.2:275-301) y se conoce como el "Prize Essay", siendo considerado una referencia en los textos kantianos pre-críticos de su filosofía de la Matemática (Carson, 1999), (Sutherland, 2010). Un completo análisis de la evolución de Kant desde estos puntos de vista, incluyendo sus concepciones en Física, en la obra seminal de Friedman (1992) *Kant and the Exact Sciences*, y una exposición breve y concisa en (Shabel, 2014). Kant sostiene aquí que el asunto de las Matemáticas consiste en combinar y comparar *conceptos* dados de *magnitudes*, que son claros y ciertos, con la perspectiva de establecer lo que puede ser inferido de ellos (Akk.

Si consideramos cualquier juicio perceptivo sobre el mundo físico, parece plausible decir que su verdad o falsedad dependen no sólo de las definiciones y reglas de la lógica, sino también de su correspondencia o falta de correspondencia con la situación perceptiva que describen. De acuerdo con Kant, es posible también distinguir dos aspectos en cualquier percepción o proposición sobre objetos externos, esto es, el material o empírico situado en el espacio y el tiempo, y el espacio y el tiempo en que dicho material se sitúa para el observador. Suponiendo que la estructura del espacio y el tiempo no son afectados por el material empírico (según Kant, el espacio y el tiempo serían *formas a priori* de la percepción, intrínsecas al sujeto) y que no puede haber percepción que no se sitúe para el sujeto en el espacio y en el tiempo, se podría considerar el espacio y el tiempo como la *forma* de todas las percepciones, y ver la materia de la percepción en todo aquello que no pertenece a la forma. El estar en el espacio y en el tiempo es una condición necesaria de la posibilidad de toda percepción o, al menos, y eso lo subraya Kant, de toda percepción humana. En razón de la clase de divisibilidad que les puede afectar, Kant considera que el espacio y el tiempo son objetos particulares, más que nociones generales (las nociones se pueden dividir en nociones subordinadas, los objetos particulares, en trozos). Pero son objetos particulares especiales: no son absolutamente reales, no son empíricos, solamente son reales en la medida en que los seres humanos (capaces de percepción y de pensamiento general) pueden tener experiencias objetivas. Con lo cual serían entes subjetivos, pero también intersubjetivos. Una especie de *matrices* o de *formas* propias de la forma de percibir de nuestra especie.

De esta forma los *juicios sintéticos a priori de la clase intuitiva* serían posibles porque: a) al describir el espacio y el tiempo describimos entidades particulares, lo que significa que formamos juicios sintéticos, y b) al describir el espacio y el tiempo describimos, no impresiones sensibles, sino las matrices permanentes e invariables de las mismas, lo que significa que nuestras descripciones son independientes de las impresiones sensibles, o sea, *a priori*. Para Kant, las proposiciones de la Matemática pura describen el espacio y el tiempo (entendido en el sentido anterior) y, por lo tanto, son sintéticas *a priori*. Pero sólo con esto difícilmente hubiera podido llegar más allá de la afirmación de las tres dimensiones del espacio y del sentido unidimensional y dirigido del tiempo. En el desarrollo ulterior de esta idea, sostiene que la Matemática pura no puede ser analítica porque para la descripción de un objeto (concepto) en el espacio y el tiempo no basta su *postulación* (o, podríamos decir hoy, su definición), sino que es necesaria su *construcción* (Körner, 1960, 26-34). Construir un concepto sería algo más que postularlo o consignar su definición: consiste en proveerlo de un objeto *a priori*. Así, el concepto de una esfera de cuatro dimensiones, consistente en sí

2: 278). Este trabajo se desarrollaría a través del examen de figuras, o de “signos visibles”, que proveerían *representaciones concretas de conceptos universales que habrían sido definidos sintéticamente*, y los teoremas se establecerían cuando se combinan cogniciones simples “por medio de la síntesis” (Akk. 2: 281). Y Kant concluye que el método matemático no podría ser aplicado para lograr resultados filosóficos, y en particular metafísicos, por la razón fundamental de que “el geómetra adquiere sus conceptos a través de la *síntesis*, mientras que el filósofo sólo puede adquirir sus conceptos a través del *análisis*, y eso cambiaría completamente el método del pensamiento” (Akk. 2: 289). Posteriormente, en el periodo crítico, Kant expandiría su noción de *síntesis* para describir no sólo la génesis y combinación de los conceptos matemáticos, sino también el acto de unificar la multiplicidad de la representaciones. Además usaría también los términos *sintético* y *analítico* para su peculiar forma de distinguir los modos en que se relacionan el sujeto y el predicado de una proposición *a través del juicio*, y también para contrastar *dos modos de argumentación*, uno sintético o progresivo y otro analítico o regresivo (Shabel, 2014, 3). En sus trabajos *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* (1768) y *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* (Disertación Inagural, 1770) (Akk. 2:375 y Akk. 2:385), Kant evoluciona en la dirección de su filosofía del periodo crítico al comenzar a reconocer el rol que las distintas facultades de la sensibilidad juegan en la cognición matemática, reforzando su enfoque epistemológico (Carson, 2004), (Buroker, 1981), (Van Cleve & Frederick, 1991), (Van Cleve, 1999). Y concluye que la evidencia matemática sería *el paradigma* y el medio de toda otra evidencia en las demás ciencias (Akk. 2:403).

mismo, no puede construirse pese a que podamos y, más aún, debamos *postular* su existencia (o sea, definirla) si es que queremos enunciar que en un espacio de cuatro dimensiones existen por lo menos dos esferas sin ningún punto común. En cambio podemos construir en la intuición, y no meramente postular o definir, una esfera tridimensional o un círculo en un espacio tridimensional. Tal construcción resulta posible no sólo por la consistencia en sí del concepto de esfera tridimensional o círculo (esfera bidimensional), sino porque el espacio perceptivo es efectivamente tridimensional. Tal construcción *a priori* no debe confundirse con la construcción de un objeto material, por ejemplo de madera. Pero la *posibilidad* de la construcción material se basa en la posibilidad de la construcción *a priori* en la intuición, por la misma razón que la *imposibilidad* de la construcción material de una esfera de quince dimensiones de madera se basa en la imposibilidad de su construcción *a priori*. Kant efectúa en varios lugares una distinción, crucial para la compresión de su filosofía, entre el *pensamiento* de un concepto matemático, que solo requiere consistencia interna, y su *construcción*, la cual requiere que el espacio sensible tenga una determinada estructura (BIX-BXII). Kant no niega la *posibilidad* de geometrías consistentes distinta de la euclídea ordinaria (lo que implicaría su tesis es que esos sistemas no serían perceptibles ni se podrían intuir), y tampoco sostiene que el *espacio físico* sea euclídeo, por lo que en ese aspecto no ha sido refutado por el desarrollo moderno de las geometrías no euclídeas. Lo que se podría discutir es si es tridimensional y euclídeo el espacio de la percepción sensible, que es su tesis (Körner, 1960, 30)[72].

Consecuentemente con su tesis sobre la estructura del espacio perceptivo, Kant sostiene por tanto que los enunciados de la Geometría (y necesariamente se refiere a la Geometría

---

[72] Joongol Kim, comentando un pasaje de Carnap concluye que, según Carnap, “La doctrina de Kant debe ser abandonada por lo tanto porque ninguna ley de la geometría, matemática o física, puede ser a priori y sintética. P. F. Strawson rechaza correctamente este argumento en cuanto que estaría basado en una errónea dicotomía entre geometría, matemática y física. En su lugar él propone lo que él llama la interpretación *visual o fenomenológica* de la geometría euclidiana, de acuerdo con la cual el espacio de la Geometría Euclídea concierne no al espacio físico sino al fenomenológico” (Kim, 2006, 139). Para Strawson (1966, 277-292) la caracterización por Kant de los enunciados matemáticos como *sintéticos a priori* y el mecanismo de la *intuición* asociado a la necesidad de *percibir* el concepto definido, están íntimamente ligados a la concepción de Kant de un *espacio visual o fenomenológico* cuya estructura sería de forma natural, por la determinación de las características cognitivas humanas, euclídea. “¿Qué *son* entonces los objetos espaciales, pero no físicos (no físicamente determinables) de la intuición pura externa? Una forma de aproximarse a la respuesta a esta cuestión consiste en recordar lo que Kant decía de que no importaba si ‘la construcción de un concepto (espacial) en la intuición pura’ tiene lugar con la ayuda de una figura dibujada en el papel *o simplemente en la imaginación*. Así, la imaginación visual no nos puede suministrar figuras físicas pero nos puede suministrar lo que yo llamaré, a falta de una palabra mejor, figuras *fenomenológicas*” (Strawson, 1966, 281-282). “Kant pensaba que la geometría del espacio físico *tenía* que ser idéntica a la geometría del espacio fenomenológico (...) y si añadimos a este hecho que la geometría fenomenológica es *en un sentido* independiente de los objetos físicos dados sensiblemente, entonces me parece que comienza a ser inteligible el que Kant pensara que el origen del espacio es de carácter fenomenológico y, por tanto también el espacio físico, sería subjetivo, radicaría en la constitución de nuestras mentes o, como él decía, en nuestra facultad de sensibilidad” (Strawson, 1966, 285). Veremos más adelante que curiosamente aparece en Hilbert una concepción análoga cuando describe su noción de la *armonía preestablecida*. Hay dos cosas que, en todo caso, parecen estar claras en la concepción de la matemática de Kant y que le diferencian radicalmente de la concepción que surgió en el siglo XX y que describimos más adelante: que su construcción esta dominada por las limitaciones de la *aplicabilidad* de una teoría matemática y que *la experiencia de un objeto sensible* (en este caso, la construcción de un concepto en la intuición) es sustantiva para que se pueda hablar de *conocimiento humano*. En cierta forma, en la lectura que estamos desarrollando aquí de Kant, y que se apoya en la lectura desarrollada en los últimos 40 años en los países anglosajones, Kant está más cerca de Hume que de Leibniz, mientras que la concepción logicista de la matemática moderna estaría más cerca de Leibniz. “La doctrina general de que toda la matemática es deducción por principios lógicos desde principios lógicos fue reivindicada fuertemente por Leibniz” (Russell, 1903, 5).

euclídea, que era la única que se concebía en su época) son sintéticos *a priori*, y por tanto no analíticos[73].

2.2-La lectura logicista.

Gran parte de las lecturas interpretativas contemporáneas de la filosofía de la Matemática de Kant están fuertemente influenciadas por la lectura logicista del tópico[74]. Michael Friedman es, como ya hemos indicado, el punto de partida en relación con este tema dentro del renovado interés por Kant en el ámbito anglosajón en los últimos 40 años, algo así como lo que significa Strawson en relación con la epistemología kantiana en general. En su detallado y documentado análisis del tema (Friedman, 1992, 55-95) sostiene que

> "what is most striking for me about Kant's theory, as it was to Russell, is the claim that geometrical reasoning cannot proceed 'analytic according to concepts' –that is, purely logically- but requires a further activity called 'construction in pure intuition'" (Friedman, 1992, 56).

A continuación cita como prueba más clara de su afirmación el siguiente pasaje de la *Crítica*:

> "Philosophy confines itself to general concepts; mathematics can achived nothing by concepts alone but hastens at once to intuition, in which it consideres the concept in concreto, although still not empirically, but only in an intuition which it presents a priori, that ist, which it

---

[73] Desde 1970 la interpretación de la filosofía de la Matemática de Kant ha estado polarizada por dos corrientes interpretativas, a las que se suele denominar como "the phenomenological" y "the logical", y basadas respectivamente en una serie de trabajos de Charles Parsons (1964, 1969 y 1984) y Jaakko Hintikka (1965, 1967 y 1969). Parsons sostiene que el carácter sintético de los juicios matemáticos depende fundamentalmente de la inmediatez de las intuiciones matemáticas, que explicarían la inmediatez de tales representaciones de una forma perceptual, con una presencia directa y fenomenológica en la mente. Hintikka, desarrollando una idea de Beth (1956 y 1958), sostiene que el carácter sintético de la Matemática depende exclusivamente de la singularidad de sus componentes intuitivos, de forma que asimila la intuición matemática a términos singulares o particulares y explica el uso de la intuición en un contexto matemático por analogía con la instanciación existencial en Lógica (Shabel, 2014, 12). Naturalmente que existen otras influencias. Por ejemplo, la posición de Friedman (1985, 1992) que aquí comentamos se puede considerar como derivada de los análisis de Beth y Hintikka, pero con una influencia preponderante de autores anteriores y, en especial, de Russell (1903). Lisa Shabel (2014, 12) observa que, sin embargo, la posición de Friedman ha cambiado muy recientemente (Friedman, 2000 y 2010), asimilando parte de los desarrollos planteados por Emily Carson (1997) con una nueva explicación tal que "this new account provides a synthesis between the logical and phenomenological interpretative accounts" (Shabel, 2014, 12). Véase (Friedman, 2012, nota 17). La obra de Carson (1997) desarrolla una interpretación de la teoría de Kant en Geometría que es un desarrollo de la de Parsons, y poniendo un énfasis anti-formalista, resaltando el rol epistemológico y fenomenológico de la intuición en Matemáticas por encima de su rol lógico. Aunque la mayoría de los autores aceptan hoy que Kant tenía una filosofía de la Matemática sofisticada que, al menos, le permitiría dar una explicación adecuada de la Matemática de su tiempo (Shabel, 2014, nota 2), existen sin embargo otros autores para quienes la filosofía de la Matemática de Kant carecería de todo tipo de valor, incluso histórico. Así para Paul Rusnock (2004), la filosofía de la Matemática de Kant carecería de una mínima sofisticación técnica, lo que la haría totalmente inadecuada para una explicación de la Matemática incluso a la luz de su contexto histórico.

[74] Aunque, como hemos dicho, entre los estudiosos de Kant el debate estaba a partir de 1970 entre el enfoque *fenomenológicos* y el *lógico*, la influencia predominante en el siglo XX en relación a la filosofía de la Matemática de Kant, sobre todo entre filósofos y lógicos en general, era la postura fijada por Bertrand Russell (1903) y posteriormente por Rudolf Carnap en su obra *Philosophical Foundations of Physics* (1966), según las cuales los desarrollos de las geometrías no euclídeas, la formalización de la Matemática y el rol prioritario de la Lógica habrían convertido la filosofía de la Matemática de Kant y su fundamento intuitivo en un aparato irrelevante y obsoleto. Un buen ejemplo de esta duradera influencia sería precisamente Michael Friedman (1992) a quien aquí comentamos. Aunque Shabel (2014), como hemos dicho, detecta un cambio radical en algunos de sus recientes planteamientos (Friedman, 2000 y 2010).

> has constructed, and in which whatever follows from the general conditions of the construction must hold, in general, for the object [Objekte] of the concept thus constructed. Suppose a philosopher be given the concept of a triangle and (…) (A715-716, B743-744)" (Friedman, 1992, 56-57, según la traducción de Norman Kemp Smith)[75].

Y Friedman cita textualmente los pasajes (A716, B744, líneas 10-32) y (A717, B745, líneas 1-3) donde Kant reproduce, con algunos comentarios, la demostración de Euclides de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados, según reconoce el mismo Friedman: "Kant is here outlining the standard Euclidean proof of the proposition that the sum..." (Friedman, 1992, 57). Friedman reproduce también la demostración de Euclides como comparación. Concluye que "Kant's conception of geometrical proof is of course anathema to us. Spatial figures, however produced, are not essential constituents of proofs, but at best, aids (and very possibly misleading ones) to the intuitive comprension of proofs. Whatever the intended interpretation of the axioms or premises of a geometrical proof may be, the proof itself is a purely 'formal' or 'conceptual' object: ideally, a string of expressions in a given formal language" (Friedman, 1992, 58). Sin embargo, esta objeción está dirigida en primer término a la concepción euclídea de demostración geométrica, más que a la de Kant, quien sólo la reproduce. Y eso sin tener en cuenta por el momento la identificación que hace Friedman de *conceptual* con *formal*.

En primer lugar, el conjunto de la obra de Kant no sustenta en absoluto la opinión de Friedman. Y, como razonamos a continuación, este pasaje que él cita como paradigmático al respecto, tampoco. Para empezar, parece que Friedman cree que la calificación por Kant de los enunciados matemáticos como sintéticos *a priori* y no analíticos implica que Kant niega el carácter deductivo de la Matemática, identificando *analítico* con *demostrable*. En segundo lugar, la demostración que Kant coloca a continuación del texto citado es nada más que la demostración de Euclides, como el mismo Friedman declara, "Aquí Kant está desarrollando la demostración standard de Euclides", por lo que su objeción a la demostración es realmente una objeción a Euclides, no a Kant. Por otra parte, su concepción de una demostración matemática, que sólo podría aceptarse a partir de una aceptación sin restricciones de la concepción logicista de la Matemática, ("la demostración en sí misma es un objeto puramente 'formal' o 'conceptual': idealmente una cadena de expresiones en un lenguaje formal dado"), deja fuera del concepto de demostración no sólo la Geometría de Euclides toda, sino prácticamente todos los teoremas básicos del Análisis demostrados en el siglo XIX y XX y, en realidad a toda la Matemática.

Pero es que además, en relación con el tema, Kant no sostiene que lo que imprime el carácter demostrativo a esa demostración es que utilice la intuición o la construcción de figuras geométricas, sino que, al final de la exposición de la demostración de Euclides indica que "(el matemático) consigue de esa forma a través de una cadena de deducciones, siempre guiadas por la intuición, una solución de la cuestión completamente clarificadora y a la vez general" (A717, B745)[76]. Con lo cual, a la vez que expresa el carácter esencialmente deductivo de la demostración tomada como ejemplo, lo único que indica respecto a la función

---

[75] "Aber, obgleich sie in solchen Fällen einen gemeinschaftlichen Gegenstand haben, so ist die Art, ihn durch die Vernunft zu behandeln, doch ganz anders in der philosophischen, als mathematischen Betrachtung. Jene hält sich bloβ an Allgemeinen Begriffen, diese kann mit den bloβe Begriffe nichts ausrichten, sondern eilt sogleich zur Anschauung, in welcher sie den Begriff in concreto betrachtet, aber doch nicht empirisch, sondern bloβ in einer solchen, die sie a priori darstellt, d. i. konstruiert hat, und in welcher dasjenige, was aus den allgemeinen Bedingungen der Konstruktion folgt, auch von dem Objekte des konstruierten Begriffs allgemein gelten muss. Man gebe einem Philosophen den Begriff eines Triangels, und …" (A715-716, B743-744).

[76] "Er gelangt auf solche Weise durch eine Kette von Schlüssen, immer von der Anschauung geleitet, zur völlig einleuchtenden und zugleich allgemeinen Auflösung der Frage" (A716-717, B744-745).

de la intuición en esa demostración es, en todo caso, su utilidad como guía para una demostración correcta. Puede discutirse esta opinión de Kant en relación con la teoría de la demostración, pero no es esencial en su concepción del rol de la intuición en la Matemática, contra lo que piensa Friedman. Veamos: Primero, la cita reproducida más arriba y que Friedman presenta como textual, no está completa. Analizamos la cita completa a continuación, que puede compararse con la anterior de Friedman: "El conocimiento filosófico es el conocimiento racional desde los conceptos, el matemático, desde la construcción (*aus der Konstruktion*) de los conceptos. Pero construir un concepto significa: representar (darstellen) la intuición a priori a él correspondiente" (A714, B742, líneas 4-8). (...) "Pero aunque ambos en tales casos tienen un objeto general, la forma en que lo tratan con la razón es totalmente distinta en la consideración filosófica y en la matemática. Aquélla se confina a sí misma en los conceptos generales, ésta no puede conseguir nada con los meros conceptos, sino que se apresura inmediatamente hacia la intuición, en la que considera el concepto *en concreto*, aunque todavía no empíricamente, sino solamente en una intuición que se representa (darstellt) a priori, esto es, que ha sido construida y en la que aquello que se siga de las condiciones generales de su construcción debe mantenerse también, en general, para el objeto (Objekte) del concepto así construido" (A715, B743, líneas 34-37) (A716, B744, líneas 1-9)[77]. Parece claro que Kant no se refiere tanto al mecanismo de prueba[78] sino a la consideración del concepto y, en ese aspecto, la consideración que sería propia de la matemática, la construcción de una representación de la intuición *a priori* de ese concepto, parece muy ligada en muchos pasajes de Kant a su concepción de la "definición". De esta opinión es también Joogol Kim, quien realiza un estudio de este punto, que sería según él un punto clave, y concluye diciendo que "propongo explorar el potencial de la teoría de Kant de la definición de conceptos matemáticos como una solución a los problemas epistemológicos sobre la naturaleza del conocimiento matemático" (Kim, 2006, 156-162). Pero hay que señalar que en este punto la concepción de Kant difiere radicalmente de la concepción de la Matemática moderna después de la revolución del siglo XX. La Matemática moderna evita sistemáticamente las definiciones directas, como veremos al analizar el trabajo de Hilbert, y en ella las definiciones de los objetos son indirectas, relacionales. Otro aspecto crucial en el que la concepción de la Matemática de Kant parece diferir sustancialmente de la moderna sería en relación con los conceptos de los que trata. Kant distingue claramente, en relación con la posibilidad de un concepto, entre dos nociones: su concebilidad (que el concepto sea concebible, pensable; hoy podríamos decir consistente) y su posibilidad real:

> "Conocer un objeto (Gegenstand) exige que yo pueda demostrar su posibilidad (bien sea a través del testimonio de la experiencia sobre su realidad (Wirklichkeit), o bien racionalmente a

[77] "Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe. Einen Begriff aber konstruieren, heiβt: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen. (…)Aber, obgleich sie in solchen Fällen einen gemeinschaftlichen Gegenstand haben, so ist die Art, ihn durch die Vernunft zu behandeln, doch ganz anders in der philosophischen, als mathematischen Betrachtung. Jene hält sich bloβ an Allgemeinen Begriffen, diese kann mit den bloβe Begriffe nichts ausrichten, sondern eilt sogleich zur Anschauung, in welcher sie den Begriff in concreto betrachtet, aber doch nicht empirisch, sondern bloβ in einer solchen, die sie a priori darstellt, d. i. konstruiert hat, und in welcher dasjenige, was aus den allgemeinen Bedingungen der Konstruktion folgt, auch von dem Objekte des konstruierten Begriffs allgemein gelten muss" (A714, B742, líneas 4-8), (A715, B743, líneas 34-37), (A716, B744, líneas 1-9).

[78] Friedman centra sus objeciones al concepto de la intuición en Kant, y en particular en la geometría, en el rol que según él Kant le asignaba en la demostración (lo que como demostramos no era lo esencial, y menos en el sentido en que Friedman lo interpreta, en el enfoque de Kant). En esto sigue fielmente a Russell, como él mismo reconoce: "La presente aproximación a la teoría de Kant de la geometría sigue a Russell en asumir que la construcción en la intuición pura está primordialmente orientada a explicar la demostración matemática o razonamiento, un tipo de razonamiento que sería por lo tanto distinto del razonamiento lógico o analítico."

priori). Pero yo puedo pensar, siempre y cuando no me contradiga, esto es, si mi concepto es solamente un pensamiento posible, y aún aunque nada pueda asignarle, y tanto si a alguna de entre todas las posibilidades de su contenido le correspondiera un objeto como si no. Pero para que un tal concepto conllevara validez objetiva (posibilidad real, pues la primera era simplemente lógica), para ello, será exigible algo más. Pero ese plus no es necesario buscarlo en fuentes teóricas, pues puede radicar en aspectos prácticos" (BXXVI n)[79].

Y lo que requiere para su posibilidad real es que pueda ser dado en la experiencia (A220, B268), (A223, B271), (A240, B299), (A157, B196), (A84,B116). Y en lo que respecta a los conceptos de la Geometría, esto se concreta en su construibilidad[80] . "La imposibilidad radica, no en el concepto en sí mismo, sino en la construcción del mismo en el espacio, esto es, en las condiciones del espacio y las determinaciones del mismo" (A221, B268).

Así, aunque parece claro que Kant considera que los conceptos matemáticos se introducen por *definición* (A731,759) y, por tanto es la definición y no la construcción lo que da los conceptos geométricos y, más aún, el concepto introducido por definición puede ser *arbitrario* (pero consistente), sin ninguna garantía de que exista un objeto que le corresponda (A729, B757), sin embargo, para Kant *la Matemática es algo más restringido*[81] que requiere una experiencia que él describe con el mecanismo de la intuición arriba descrito[82], y es lo que hace que los enunciados matemáticos sean *sintéticos a priori* y no *analíticos*, como serían para Kant si éste considerara la Matemática como una ciencia de conceptos posibles (usando su terminología). Esto, como veremos, se ajusta muy bien al enfoque de los *Elementos* y también parece que Hilbert mantiene una tal concepción en la selección de los grupos de

---

[79] "Einen Gegenstand erkennen, dazu wir erfordert, dass ich seine Möglichkeit (es sei nach der Zeugnis der Erfahrung aus seiner Wirklichkeit, oder a priori durch Vernunft) beweisen könne. Aber denken kann ich, was ich will, wenn ich mir nur nicht selbst wiederspreche, d.i. wenn mein Begriff nur ein mögliche Gedanke ist, ob ich zwar dafür nicht stehen kann, ob im Inbegriffe aller Möglichkeiten diesem auch ein Objekt korrespondiere oder nicht. Um einem solchen Begriffe aber objektive Gültigkeit (reale Möglichkeit, denn die erstere war bloβ die logische) beizulegen, dazu wird etwas mehr erfordert. Dieses Mehrere aber braucht eben nicht in theoretischen Erkenntnisquellen gesucht zu werden, es kann auch in praktischen liegen" (BXXVI n). "El *conocimiento* de un objeto implica el poder demostrar su posibilidad, sea porque la experiencia testimonie su realidad, sea *a priori*, mediante la razón. Puedo, en cambio, *pensar* lo que quiera, siempre que no me contradiga, es decir, siempre que mi concepto sea un pensamiento posible, aunque no pueda responder si, en el conjunto de todas las posibilidades, le corresponde o no un objeto. Para conferir validez objetiva (posibilidad real, pues la anterior era simplemente lógica) a este concepto, se requiere algo más. Ahora bien, este algo más no tenemos por qué buscarlo precisamente en las fuentes del conocimiento teórico. Puede hallarse igualmente en las fuentes del conocimiento práctico" (BXXVI n) (PR). "*Conocer* un objeto exige que yo pueda demostrar su posibilidad (ora, según el testimonio de la experiencia, por su realidad, ora *a priori* por la razón). Pero *pensar* puedo pensar lo que quiera, con tal de que no me contradiga a mí mismo., basta con que mi concepto sea un pensamiento posible, aunque no pueda ciertamente afirmar si en el conjunto de todas las posibilidades le corresponde o no un objeto. Pero para atribuir validez objetiva a un concepto semejante (posibilidad real, pues la primera era sólo lógica), se exige algo más. Ahora bien, este algo más no necesita precisamente buscarse en las fuentes teóricas del conocimiento; puede estar también en las prácticas" (BXXVI n), (MGM, pág. 106-107).

[80] "Así, para Kant, el concepto no euclidiano es lógicamente posible y por tanto pensable, si bien no construible" (Kim, 2006, 155).

[81] También para Sutherland (2005, 145), "De hecho Kant delimita el campo de las Matemáticas apelando a la construcción".

[82] Una vez más hay que recalcar que nuestro análisis de la intuición en Kant se ha limitado básicamente a la *Estética*. Pero Kant, cuya filosofía cognitiva está en general muy determinada precisamente por su forma de entender las Matemáticas, y en especial la Geometría (Sutherland, 2005, 152), distribuye su explicación de la Matemática a todo lo largo de la *Crítica*: La *Introducción* provee de razones que justifican que la Matemática consiste de cogniciones *sintéticas a priori*; la *Estética* y los *Axiomas* articulan las condiciones de la cognición matemática, y la *Disciplina de la Razón Pura* presenta su método.

axiomas[83] de los *Grundlagen*. Pero el cambio más sustancial producido por la revolución de la Matemática en el siglo XX parece que incide precisamente en este punto. Para Alexandrov:

> "La matemática contemporánea es la matemática de todas las posibles relaciones e interdependencias cuantitativas (en general, variables) entre magnitudes. Esta definición es incompleta, pero pone el acento en el rasgo característico de la matemática moderna, rasgo que la distingue de la de otras épocas" (Alexandrov, 1970, tomo I, 89).

Y Cassirer escribía ya en 1907 que "La Matemática (moderna) es, según una definición que Gregor Itelson propuso y Couturat ha adoptado, 'la ciencia de los objetos ordenados': y ciertamente se extiende sobre todas las relaciones cualitativas, en tanto que éstas puedan ser concebibles según reglas conceptuales_estrictas" (Cassirer, 1907, 8), y añade que "La unidad de la Matemática reside de aquí en adelante, no ya en su objeto (...) sino en el método deductivo, el cual en todas sus aplicaciones permanece idéntico y se basa en los mismos fundamentos" (Cassirer, 1907, 31)[84]. Cualquiera que sea la actitud que se adopte ante este hecho, y cualquiera que sea la valoración de de la intensidad o importancia de este enfoque para la matemática que en la práctica se hace[85], parece claro según lo expuesto que el punto de vista de Kant no iba de modo alguno en esta dirección.

Hay dos cosas que, en todo caso, parecen estar claras en la concepción de la matemática de Kant y que le diferencian radicalmente de la concepción que surgió en el siglo XX y que hemos descrito inmediatamente arriba: que su construcción esta dominada por las limitaciones de la *aplicabilidad* de una teoría matemática y que *la experiencia de un objeto sensible* (en este caso, la construcción de un concepto en la intuición) es sustantiva para que se pueda hablar de *conocimiento humano*. En cierta forma, en la lectura que estamos desarrollando aquí de Kant, y que se apoya en la lectura desarrollada en los últimos 40 años en los países anglosajones, Kant está más cerca de Hume que de Leibniz, mientras que la concepción logicista de la matemática moderna estaría más cerca de Leibniz. Para Lenhard (2006, 301), "(la Filosofía de la Matemática de Kant) ha hecho el problema central precisamente de la

[83] "La concepción de Kant de una teoría axiomática es antitética de la concepción moderna. Para él, los axiomas matemáticos son principios sintéticos que son 'inmediatamente ciertos' (A732, B760)" (Kim, 2006, 160). Como veremos, parece que respecto a los axiomas Hilbert sigue en los *Grundlagen* el mismo criterio que Kant, no así en su fundamentación de la Aritmética y de la teoría de la Demostración. Más que que la concepción de la teoría axiomática de Kant sea antitética de la moderna, habría que decir que hay en algún aspecto una ruptura en el siglo XX con la concepción de la axiomática vigente en la Matemática hasta entonces. Así, para Friedman "El sistema de Euclides no es en absoluto una teoría axiomática en nuestro sentido" (Friedman, 1992, 61).

[84] Esta opinión de Cassirer supone de hecho la aceptación del punto de vista de Russell (que en aquella época pareció evidente a casi todo el mundo), pero que es de hecho una profunda distorsión del cambio que experimentó la Matemática en el siglo XX. El cambio real se caracteriza por la opinión ya citada de Aleksandrov en relación a las definiciones, por la aritmetización de gran parte de la Matemática y por el desarrollo de un enfoque *algebraico* para matematizar *estructuras abstractas*.

[85] Ante este fenómeno pueden adoptarse varias posturas. Una, negar que todo lo que se obtiene con ese enfoque sea auténtico conocimiento, que sea científico. Esa es básicamente la actitud de los matemáticos intuicionistas, y es una actitud bien fundamentada (Shapiro, 2000, 172-197), (Brown, 2008, 119-135). También se puede reducir de hecho el dominio de lo matemáticamente posible limitando los métodos aceptables, lo que sería de hecho la postura de Hilbert y su programa finitista, que analizaremos en este trabajo. Otra posibilidad es adoptar una posición pragmática (Kitcher, Philip, 1984) que podemos definir como un hipernaturalismo. Y, por supuesto, está la postura de aceptar ese nuevo enfoque como definitivo y correcto, asumiendo la posición logicista de Russell y su programa, la cual sería la posición de Michael Friedman, y según la cual la posición de Kant sería anacrónica y sin sentido, no teniendo ningún sentido hablar de intuición en las Matemáticas. Pero no está claro ni que la matemática que se hace en la actualidad se haga con ese enfoque, ni menos aún, más bien al contrario, que ese enfoque haya resuelto definitivamente los problemas de fundamentación de la Matemática.

conexión con el objeto y la relación con la aplicabilidad de la Matemática. Para Kant era la intuición la que podría posibilitar esa conexión con el objeto y, como argumentaré desde un punto de partida orientado a la aplicabilidad, en esa función la intuición no ha sido en modo alguno superada”[86]. Friedman, sin embargo, centra sus objeciones al concepto de la intuición en Kant, y en particular en la geometría, en el rol que según él Kant le asignaba en la demostración (lo que como vimos no era lo esencial, en el enfoque de Kant y menos en el sentido en que Friedman lo interpreta). En esto sigue fielmente a Russell, como él mismo reconoce: “La presente aproximación a la teoría de Kant de la geometría sigue a Russell en asumir que la construcción en la intuición pura está primordialmente orientada a explicar la demostración matemática o razonamiento, un tipo de razonamiento que sería por lo tanto

[86] Aunque Lenhard sostiene que “la defensa (de la intuición kantiana) es sólo parcial” porque el punto de partida de Kant de un concepto de intuición fijado a priori debería ser sustituido por un concepto de intuición “naturalizado” (Lenhard, 2006, 301). La noción de epistemología naturalizada fue acuñada por Quine (1969, 69) y llevada a la Filosofía de la Matemática con distintas perspectivas por (Otte, 1998) y (Maddy, 1998) entre otros. Se pueden buscar otros antecedentes. Hilary Putnam argumentaba a favor de un punto de vista pragmático en las reflexiones sobre los fundamentos de las Matemáticas: “Los filósofos y los lógicos han estado en el pasado medio siglo tan ocupados tratando de proveer a las Matemáticas de unos ‘fundamentos’ que muy excepcionalmente unas pocas tímidas voces han osado expresar la sugerencia de que eso no se necesitaba para nada” (Putnam, 1964, 295). En sus argumentaciones se desliza varias veces la comparación con la ciencias empíricas: “Desde mi punto de vista, la característica principal de las proposiciones matemáticas es la muy amplia variedad de formulaciones equivalentes que poseen (...) La misma situación surge con frecuencia en las ciencias empíricas, esto es, la situación de que el mismo hecho (the same fact) puede ser expresado de dos maneras sorprendentemente distintas; el ejemplo más famoso es la dualidad onda-partícula en la mecánica cuántica” (Putnam, 1964, 297). Quien más lejos ha llegado en este camino de buscar un proyecto naturalizado de los fundamentos de la Matemática, siendo el único en proponer una alternativa global coherente y que antes hemos llamado hipernaturalismo, es Philip Kitcher. Para él, “La Matemática, como cualquier otra parte de la ciencia, forma nuevos conocimientos sobre la base de aquellos que ya fueron alcanzados. Una tarea decisiva para los epistemólogos de la Matemática, como también para los de la ciencia, consiste en la identificación de las modificaciones del corpus de los conocimientos que pudieran conllevar el surgimiento de un nuevo corpus de conocimientos (...) Nuestras convicciones matemáticas actuales se justifican en base a sus relaciones con las convicciones de una generación anterior de matemáticos; ese corpus anterior de convicciones se justifica a su vez por sus relaciones con un corpus más anterior, y así sucesivamente. Naturalmente que esa cadena debe tener un comienzo en alguna parte. Allí encontraríamos quizás esa forma de Matemática con respecto a la que Mill tendría razón; una forma rudimentaria de conocimiento matemático que se justifica a los hombres por su experiencia sensible en situaciones donde éstos manipulan su entorno (por ejemplo, desplazando pequeños grupos de objetos). Lo que el naturalismo debe mostrar es que el conocimiento matemático actual surge de aquel primitivo a través de una serie de procesos de transición racionales” (Kitcher, 1988, 288). “Si estoy en lo cierto, entonces algunos temas cruciales en la epistemología de las matemáticas son temas que los filósofos han ignorado ampliamente. La cuestión central sería ¿cómo evoluciona el conocimiento matemático? (...) Mi solución para el problema de la explicación de los orígenes del conocimiento matemático consiste en considerar nuestro conocimiento matemático elemental como garantizado por el sentido ordinario de la percepción” (Kitcher, 1984, 96). “Axiomas y definiciones son aceptados porque sistematizan soluciones de problemas previamente aceptadas. El estudio fundacional está motivado por la necesidad de elaborar herramientas para continuar la investigación matemática (...) mi observación sobre Frege intentaba remarcar la diferencia entre las preocupaciones pragmáticas de los matemáticos y los ideales epistemológicos (sugeriría que torpes ideales epistemológicos) de los filósofos” (Kitcher, 1984, 271). Incidentalmente, esta caracterización de los axiomas y las definiciones encajaría bien con el enfoque con que elaboró Hilbert los *Grundlagen,* como veremos. Puede verse también en Kitcher una fuerte conexión con el tradicional empirismo anglosajón. Muchos de sus argumentos recuerdan las argumentaciones de John Stuart Mill en su obra “A System of Logic” (Mill, J.S., 1843), donde intentaba argumentar que la Matemática sería, esencialmente, una ciencia empírica. Pero Lenhard no parece querer ir tan allá en esa dirección. Se limita a sugerir que el punto de partida de Kant de un concepto de intuición fijado a priori debería ser sustituido por un concepto de intuición “naturalizado” (Lenhard, 2006, 301). Aunque no aporta ninguna indicación de qué exactamente querría decir eso y menos aún desarrolla tal concepto, sí que aporta una interesante refutación razonada del análisis de Friedman sobre la intuición en Kant, que recogemos en distintas partes de este trabajo.

distinto del razonamiento lógico o analítico" (Friedman, 1992, 80). Además, la esencia de su tesis del carácter superfluo (y negativo) de la intuición se centra en intentar demostrar que la elaboración de este concepto por Kant se debía a las deficiencias de su lógica:

> "De nuevo siguiendo a Russell, hemos visto una explicación para esa idea en la diferencia entre la lógica esencialmente monádica al alcance de Kant y la lógica poliádica de la moderna teoría de la cuantificación. Más aún, hemos intentado conectar esa concepción del razonamiento matemático [nuevamente identifica la noción de intuición en Kant con el rol que según él le atribuye en el razonamiento, F.S.] con la mera posibilidad de representar conceptos y proposiciones" (Friedman, 1992, 80).

Y, de hecho, sus argumentos son calcados de los de Russell (Russell, 1903) Por ejemplo: "Kant pensaba que el *razonamiento* de las matemáticas era diferente del de la lógica" (Russell, 1903, 458). Naturalmente, hay un ingrediente más en su argumento: "El razonamiento matemático no requiere ningún elemento extra-lógico" (Russell, 1903, 457, parágrafo 434). Pero, en el fondo, como está ya claro, no se trata del razonamiento. Para el mismo Russell: "La Filosofía pregunta a las Matemáticas: ¿Qué significa todo esto? La Matemática en el pasado era incapaz de responder, y la Filosofía respondía introduciendo la noción totalmente irrelevante de 'la mente'[87]. Pero ahora la Matemática es capaz de responder, en tanto y en cuanto al menos es capaz de reducir la totalidad de sus proposiciones a ciertas nociones fundamentales de lógica" (Russell, 1903, 4). Un siglo después, el desarrollo de la Matemática y de la Metamatemática no avalan en modo alguno estos presupuestos, que son los del programa logicista, y que son los presupuestos, autodenominados modernos, desde los que Friedman realiza el análisis de Kant. Antes al contrario, el proyecto cognitivo kantiano tal y como se presenta tras las conclusiones de este trabajo, aparece como un proyecto moderno desde muchas perspectivas y que incluso puede dar luz para la solución de muchos problemas de la epistemología de las Matemáticas que el proyecto logicista dejaba sin respuesta posible. Para resumir, surgen varias cuestiones fundamentales:

1º) Dejando aparte la (estrecha) concepción de Friedman de una *demostración correcta* –que coincide exactamente con la de Russell- y admitiendo por un momento que en efecto "the proof itself is a purely 'formal' or 'conceptual' object: ideally a string of expressions in a given formal language", podemos preguntarnos si es razonable pensar el carácter de la Matemática desarrollada en el siglo XX (y sus métodos) de una forma que clasificaría como *falsa* (o en el mejor de los casos como *no-científica* o *no matemática*) toda la construcción y metodología de Euclides que, finalmente, *no probaría* teoremas que en último término son verdad (y también en el sentido de que son demostrables con la noción de *demostración* sostenida por Russell y Friedman).

---

[87] El desarrollo de las modernas neurociencias incorpora la posibilidad de un nuevo enfoque experimental inclusive para las teorías cognitivas filosóficas, idea que es explorada como vimos por Patricia Kitcher. Se han realizado algunas investigaciones en esta dirección, aunque no parece ser un campo en el que la mayoría de los filósofos se encuentren a gusto. Hintikka y Symons (2003) muestran "como el desarrollo de la lógica epistémica puede jugar un rol no trivial en las neurociencias cognitivas". Sostienen en ese trabajo que la correspondencia entre dos modos de identificación, tal y como se distinguen en un contexto epistémico, y dos sistemas cognitivos distinguidos por la investigación neurocientífica del sistema visual, no es casual y que esto puede jugar un papel clarificatorio en los niveles más fundamentales de la teoría neurocientífica. Y añaden que "mientras que la mayor parte de los trabajos en neurociencias se dirigen a niveles celulares y subcelulares, la investigación cerebral que puede atraer la mirada de los filósofos parece venir de un híbrido interdisciplinario relativamente reciente conocido como neurociencia cognitiva. Las explicaciones de la neurociencia cognitiva son de interés para los filósofos porque ofrecen la posibilidad de conectar el cerebro y el comportamiento a través de las propiedades de los procesos de información parciales y de los procesos del cerebro" (Hintikka & Symons, 2003, 89). Profundizamos en este tema y en los descubrimientos más recientes en el Capítulo-8.

2º) Si consideramos que la citas de Kant mencionadas no se refieren básicamente a la *demostración*, en contra de lo que Russell y Friedman mantienen, ¿a qué se refieren realmente y dónde fundamenta Kant la especificidad de la Matemática y la Geometría por oposición a la Filosofía?

3º) ¿Qué consecuencias podemos extraer de estas cuestiones?

La posición de Kant en relación a estos asuntos, y particularmente en los textos citados, se enfoca hacia la *formación de conceptos* (y no hacia la *demostración*) en relación con el carácter específico de la Matemática y la Geometría. En todo caso, se podría analizar si su concepción sobre este tema tendría consecuencias en su concepción de la demostración y si contradeciría la actual concepción de *demostración correcta*. La respuesta de nuevo es "no". Por el contrario, permitirá un mejor entendimiento de la noción de demostración en Euclides y su conexión con nuestra noción de demostración.

2.3-Teoría de la demostración o construcción de conceptos. Las caracterizaciones *analítico-sintético* y *a priori- a posteriori*.

Por todo lo expuesto anteriormente, podemos considerar demostrado que el asunto para Friedman tiene que ver con la teoría de la demostración, e incluso la totalidad del sistema conceptual construido por Kant estaría basado en el intento de explicar un tipo de *razonamiento* (el matemático) que sería *diferente* de lógico.

> "The present approach to Kant's theory of geometry follows Russell in assuming that construction in pure intuition is primarily intended to explain mathematical proof or reasoning, a type of reasoning which is therefore distinct from logical or analytic reasoning" (Friedman, 1992, 80).

Sin embargo, esta tesis debe ser rechazada como errónea porque hay evidencia suficiente de que Kant consideraba el razonamiento matemático como puramente deductivo:

> "Er [der Geometer] gelangt auf solche Weise durch eine Kette von Schlüssen, immer von der Anschauung geleitet, zur völlig einleuchtenden und zugleich allgemeinen Auflösung der Frage" (A717, B745)[88].

De hecho, lo único que se indica aquí acerca de la función de la intuición en la demostración es su utilidad como guía para una demostración correcta, asignándole un papel heurístico, lo que claramente un tema muy distinto, pero en ningún caso ligado esencialmente a su concepción del rol de la intuición en la Matemática, que se situaría a otro nivel:

> "Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe. Einen Begriff aber konstruieren, heiβt: die ihm korrespondierenden Anschauung a priori darstellen. Zur Konstruktion eines Begriffs wird also eine nicht empirische Anschauung erfordert, die folglich, als Anschauung, ein einzelnes Objekt ist, aber nichts destoweniger, als die Konstruktion eines Begriffs (einer allgemeinen Vorstellung), Allgemeingültigkeit für alle mögliche Anschauungen, die unter denselben Begriff gehören, in der Vorstellung ausdrücken muss" (A714, B742, lines 4-14)[89].

---

[88] "A través de una cadena de inferencias y guiado siempre por la intuición, el geómetra consigue así una solución evidente y, a la vez, universal del problema" (A717, B745), (PR).

[89] "El conocimiento *filosófico* es un *conocimiento racional derivado de conceptos*; el conocimiento *matemático* es un *conocimiento obtenido por construcción* de los conceptos. *Construir* un concepto significa presentar la intuición *a priori* que le corresponde. Para construir un concepto hace falta, pues, una intuición *no empírica* que, consiguientemente, es, en cuanto intuición, un objeto *singular*, a pesar de lo cual, en cuanto construcción de un concepto (representación universal) tiene que expresar en su representación una validez universal en relación con todas las posibles intuiciones pertenecientes al mismo concepto" (A714, B742, lines 4-14), (PR).

Pero quizás lo más destacable de la cita (A717, B745) sobre la forma de inferencia del geómetra consiste en el contexto en que se realiza, después de una larga descripción del procedimiento para una *demostración constructiva*. Este tipo de demostraciones son muy raras en Aritmética pero frecuentes, por ejemplo, en la Geometría de Euclides. Su utilidad e incluso posibilidad tienen que ver fundamentalmente con la naturaleza del objeto, pero en modo alguno contradicen los principios lógicos generales sino que los utilizan *de forma concreta*. Volveremos a analizar el pasaje cuando estudiemos las características del *pensamiento visual* en el Capítulo-8. Y la segunda cita (A714, B742, lines 4-14) evidencia un segundo uso de la concepción constructiva en Kant, la que se refiere a la *construcción de conceptos*, que sería consustancial a la Matemática y la que la intuición sí desempeña un papel clave –pero no en la demostración. La distinción *analítico-sintético* es lógica mientras que la de *a priori-a posteriori* es epistemológica (Pacho, 1989, p. 475 y 478). La posición de Friedman (como la de Russell) descansa en última instancia en la aceptación incondicional de la contraposición clásica analítico-sintético. Todo enunciado estaría incluido en una de esas dos clases, y la clasificación sería exhaustiva y disjunta. Como ya vimos, la dicotomía se remonta a Hume (y su distinción entre relaciones de ideas y asuntos de hecho) y a Leibniz (y su distinción entre verdades de la razón y verdades de hecho). Aunque ambos difieren radicalmente en el análisis de las proposiciones fácticas, concuerdan en su descripción de la analiticidad: los enunciados analíticos predican algo que ya está contenido en el sujeto y, por lo tanto, su negación sería contradictoria. Más aún, son *a priori* de toda experiencia sensorial y consiguientemente no empíricas. Ambos incluyen a las proposiciones matemáticas en esta categoría. Tal análisis ha demostrado ser demasiado problemático como para ser acríticamente aceptado, como demostró Quine (1951), quien concluye que sólo podría mantenerse como una dicotomía absoluta en tanto que fundado en un prejuicio metafísico.

Kant define con precisión el juicio analítico restringiéndose a los juicios asertivos de la forma sujeto-predicado. En ellos una proposición analítica sería aquélla en la que el concepto predicado estaría incluida en el concepto del sujeto, mientras que una proposición sintética sería aquélla en la que esto no ocurriría (A6-7 /B10-11). Ejemplos de ambas serían para Kant: "todo triángulo tiene tres lados" –analítica- y "7+5=12" –sintética-(B15-16). Ambos enunciados matemáticos. El principal argumento usado por Friedman para intentar justificar su desacuerdo con la filosofía de las Matemáticas de Kant y, particularmente, con su uso de la intuición, es precisamente que la causa de ese uso radicaría en la Lógica no-relacional de Kant basada en la Lógica aristotélica (de inclusiones) de su época (Friedman, 1992, 56-59). Como Lenhard señala:

> "Für ihn (Friedman) fällt nämlich die Mathematik des 18.Jahrhunderts unter das Veredikt einer unvollständiger Logik, der vor allem die Relationen-Logik fehlt. Aus diesem Manko folgert Friedman aber zu viel" (Lenhard, 2006, 304).

Exactamente, y eso es debido a que en el fondo en el análisis de Friedman subyace una inadecuada comprensión del sentido real de la noción de analiticidad. Frege aparentemente extendió la noción de analiticidad incluyendo algunas propiedades lógicas y relaciones tales como simetría, transitividad, negación, etc, enfatizando el formalismo y, particularmente, la definición formal, así como la idea de sustitución de términos sinónimos. Los positivistas lógicos introdujeron una amplia variedad de definiciones de una proposición analítica: una proposición cuya verdad depende solamente del significado de sus términos, una proposición que es verdadera por definición, una proposición que es verdadera por convenciones del lenguaje, entre otras. Y una proposición sintética sería simplemente aquella que NO es analítica, llevando así en todo caso a una clasificación exhaustiva y disjunta. La noción de analiticidad fue así expandida, de forma que ya no se restringiría a un tipo de proposiciones o enunciados asertivos de la forma sujeto-predicado; aunque sólo aparentemente, porque la noción subyacente era la misma en todos los casos: los enunciados analíticos serían la clase de los enunciados tautológicos de una lógica concreta (la aristotélica en el caso de Kant, la adecuada lógica formal en la que todo enunciado analítico puede ser formalizado en el siglo XX). La diferencia real radicaría en la *justificación* de la verdad de los enunciados –que es un asunto epistemológico- y en el carácter de los enunciados matemáticos que para los logicistas y positivistas lógicos serían analítico y por lo tanto *a priori*, mientras que para Kant serían *a priori* pero sintéticos.

La sistematización de Kant es mucho más sutil y afinada que la de los logicistas y los positivistas lógicos, permitiendo plantear un enfoque epistemológico sorprendentemente moderno. Señalaremos aquí sólo un par de características. Primero, su distinción entre *juicio* y *proposición* le sitúa cercano a las posiciones de Quine, en el sentido de tener en cuenta un sustrato sicológico en la Lógica, y por lo tanto en la noción de *verdad*[90]. Por otra parte, en su consideración de la Lógica proposicional Kant parece ser un formalista estricto[91], coincidiendo en esto con los positivistas lógicos, los logicistas y los formalistas del siglo XX. Pero un punto clave es que su particular tipología incluye las *proposiciones sintéticas a priori*, que serían las propias de los teoremas matemáticos, lo que es su principal desacuerdo aparente con los logicistas y positivistas lógicos que, en realidad, entendían estas características con un significado muy distinto al que tienen en el sistema kantiano. Podría sostenerse que Kant considera que los enunciados matemáticos y sus demostraciones estarían fundamentados ante todo en la *práctica* matemática, que él analizó en detalle (otra coincidencia con Quine) y en la *construcción de conceptos* en la *intuición pura*, nociones de su esquema teórico que intentaremos aclarar en este trabajo. Como Friedman (1992, 80) acertadamente pone de relieve, aunque errando en la interpretación de su carácter, esto supone una *restricción* que separa la Matemática de la Lógica[92] .

---

[90] Abela resalta el carácter holístico de la epistemología kantiana y la importancia en él de la noción de *verdad*, e indica que paradójicamente no existe en la obra de Kant una discusión explícita de este concepto y de la problemática asociada (Abela, 2002, 214 y ss).

[91] "In dieser müssen also die Logiker jederzeit zwei Regeln vor Augen haben. 1) Als allgemeine Logik abstrahiert sie von allem Inhalt der Verstandeserkenntnis, und der Verschiedenheit ihrer Gegenstände, und hat mit nichts als der bloβen Form des Denkens zu tun. 2) Als reine Logik hat sie keine empirische Prinzipien, mithin schöpft sie nichts (wie man sich bisweilen überredet hat) aus der Psychologie, die also auf den Kanon des Verstandes gar keinen Einfluss hat. Sie ist eine demonstrierte Doktrin, und alles muss in ihr völlig a priori gewiss sein" (A54, B78). Y en el prefacio de la primera edición explica que el lado subjetivo de la deducción, que se relaciona con las facultades cognitivas del entendimiento es algo "de carácter hipotético" e inesencial para su propósito principal (AXVII). Se observa la coincidencia con la posición de Frege: "[X] Como fundamentos he determinado en esta investigación los siguientes: Debe separarse tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de los objetivo… para seguir este principio he utilizado siempre la palabra representación [Vorstellung] en un sentido psicológico, y diferenciado las representaciones de los conceptos [Begriffen] y objetos [Gegenstände]" (Frege, 1987, 23) .

[92] También para Sutherland (2005, 145), "De hecho Kant delimita el campo de las Matemáticas apelando a la construcción". Para Lenhard (2006, 301), "(la Filosofía de la Matemática de Kant) ha hecho el problema central precisamente de la conexión con el objeto y la relación con la aplicabilidad de la Matemática. Para Kant era la intuición la que podría posibilitar esa conexión con el objeto y, como argumentaré desde un punto de partida orientado a la aplicabilidad, en esa función la intuición no ha sido en modo alguno superada.". La concepción de la Matemática en Kant, al igual que como luego veremos que sucede en Hilbert, está ligada a la referencia a objetos (ya sea construidos en la intuición pura o de otra forma) y a la *aplicabilidad*; la consistencia de los enunciados de una teoría matemática sería una condición necesaria para asegurar la aplicabilidad de una teoría, en cuanto enunciados que expresan leyes de objetos que son (o pueden ser) reales. Otte (2003, 183 y 203-207) y Lenhard (2006, 302-305) enfatizan este aspecto de la importancia de la aplicabilidad en la concepción de la Matemática en Kant y en el rol que en él juega la intuición.

2.4-Construcción de conceptos e intuición. Los *elementos ideales*.

En los próximos capítulos trataremos estos tópicos en detalle, pero es necesario un primer enfoque para valorar adecuadamente la filosofía de la Matemática de Kant y su posible utilidad para una epistemología moderna de la Matemática. Durante siglos, hasta mediados del siglo XIX, las Matemáticas eran consideradas como un arquetipo de certeza apodíctica y sus métodos, probablemente autojustificados por su eficacia práctica en sus aplicaciones en arquitectura, astronomía, navegación, etc, eran aceptados como apropiados sin ningún tipo de discusión metodológica. El *corpus* fundamental de sus conocimientos seguían siendo los *Elementos* de Euclides, aunque desde el siglo XVIII, con la creación del cálculo diferencial e integral por Newton y Leibniz y el consiguiente desarrollo del Análisis con sus cálculos con magnitudes *infinitamente* pequeñas e *infinitamente* grandes, surgieron las primeras dudas sobre su fundamentación. Esas dudas, hasta la sólida fundamentación del Análisis en la formulación de Cauchy, y la aspiración de no volver a caer en una crisis fundacional fueron las razones de la demanda de rigor que surgió en la segunda mitad del siglo XIX, como admite Hilbert explícitamente[93]. Precisamente en la época en la que tuvo lugar una auténtica revolución con la creación de la teoría de conjuntos, la teoría de los números transfinitos, la geometría proyectiva y las geometrías no euclidianas y la perspectiva de una nueva concepción en la axiomática. Una demanda de rigor que finalmente condujo a una crisis fundacional total, que desembocó en un callejón sin salida en la forma en que fue planteada.

Este proceso es especialmente llamativo en la matemática alemana, y particularmente en Dedekind. Es en este contexto en el que emerge la distinción entre *Matemática pura* y *Matemática aplicada,* que en mi opinión estaría hoy en día completamente obsoleto, así como muchas de sus aproximaciones metodológicas, teniendo en cuenta el desarrollo de la Matemática desde la II Guerra Mundial. Un espectacular desarrollo de nuevas teorías matemáticas ha tenido lugar desde entonces en relación con campos específicos: econometría, técnicas estadísticas, análisis no estándar, teoría de categorías, lógica y matemática difusas, entre otras. La mayoría de ellas con aplicaciones tecnológicas significativas. Esto, unido al desarrollo de la computación, con el planteamiento incluso de demostraciones asistidas por ordenador, ha cambiado radicalmente la perspectiva incluso en la teoría de la demostración, llevando a una convergencia entre la perspectiva *operacional* de Kronecker y su escuela y la perspectiva *conceptual* de Dedekind. No tiene ningún sentido discutir acerca de la *validez* de teorías que se aplican con éxito en el control y la manipulación del mundo real. La Epistemología únicamente puede describir *a posteriori* los métodos de las ciencias y describir su estructura gnoseológica y debe renunciar de una vez por todas a pretensiones normativas. Esta es en esencia la posición de Quine que, en mi opinión, no está demasiado lejos del punto de vista metodológico fundamental de Kant; su análisis de la Matemática, y la terminología creada al efecto, estaría basado en una reflexión sobre la *práctica* matemática de su época, y ese desarrollo terminológico (y conceptual) para su comprensión y descripción sería, coincidiendo con la opinión de Maclachlan, un intento de crear un metalenguaje. Por otra parte, es muy cuidadoso en sus conclusiones y deja más problemas abiertos de los que resuelve, planteándose además una notable ambigüedad en los usos de muchos de sus

[93] "Tanto en la Geometría como en la Física es posible dar pruebas de consistencia relativa, esto es, de reducir el problema de la consistencia en estas esferas a la consistencia de los axiomas de la Aritmética. Pero es evidente que no tiene sentido buscar una demostración de este tipo para la Aritmética misma (...) En la medida en que la Teoría de la Demostración, basada en el método de los elementos ideales, hace posible este último y decisivo paso, constituye una especie de punto final y necesario en la construcción del edificio de la Teoría Axiomática. Y lo que hemos tenido que padecer en dos ocasiones, primero con las paradojas del cálculo infinitesimal y luego con las paradojas de la teoría de conjuntos, no podrá pasarnos una tercera vez, no volverá a pasar nunca" (Hilbert, GA, tomoIII, 179).

términos, razones que podrían explicar lo sorprendente de la reivindicación de una raíz kantiana en pensadores tan dispares como Lotze, Dedekind, Frege, Cantor, Hilbert y muchos otros.

En la revisión neokantiana de esta problemática destaca el análisis de Ernst Cassirer, una síntesis del *reines Denken* de Dedekind en la fundamentación de la Matemática y una aproximación naturalista. Su tesis principal la expuso ya en su artículo "Kant und die Moderne Mathematik" (1907) y la desarrolló exhaustivamente en su obra "Substance und Funktion" (1910). Considera la Matemática y la Física un *continuum,* pero no en el sentido de que la Matemática sea una ciencia empírica en el sentido definido por Stuart Mill, sino en el sentido de que "mathematical knowledge and physical knowledge are of the same kind. Both are characterized by introductions of 'ideal elements' which in both areas play essentially the same role". Mormann (2008) ha estudiado el rol que la introducción de *elementos ideales* juega en la creación de las teorías matemáticas y en el desarrollo de sus conceptos, así como el rol fundamental de estos procesos en la filosofía de la Matemática de Cassirer. Además Mormann pone de relieve la importancia en el pensamiento de Cassirer de "some kind of Hegelian flavour in that the conditions of objectivity of science were given through its historical development" (Mormann, 2008, 155), estableciendo una perspectiva naturalista en el pensamiento de Cassirer, y en la interpretación que éste hace de la epistemología kantiana. Pero la principal desviación de Cassirer de la ortodoxia kantiana –tal y como se entendía en su tiempo y todavía hoy en día por algunos (Friedman, 2000)-, "was to give up Kant's sharp separation between understanding and sensibility as two faculties of the mind. Following his teacher Hermann Cohen, Cassirer replaced Kant's two faculties of the mind by a single comprehensive activity of 'pure thought' (reines Denken)", coincidiendo en esta apreciación con Ryckman (1991). "Pure thought primarily expressed itself in the progressive evolution of the mathematized empirical sciences. The formal kernel of the neo-kantian 'pure thought' in Cassirer's sense was the new relational or functional logic inaugurated by Frege, Peano, Russell and others" (Mormann, 2008, 156). Y consecuente con el *Geist der Zeit*, Cassirer rechaza el uso de la intuición como base de la *construcción de conceptos* (y en la demostración) en la Matemática. Esencialmente, Cassirer rechaza la *Transcendental Aesthetik* y, haciendo uso de elementos de la fundamentación de la Aritmética desarrollados por Richard Dedekind, pretende realizar una actualización de la noción de *construcción de conceptos* como base de la fundamentación de la Matemática kantiana, manteniendo su carácter *sintético,* en el sentido de que el progreso matemático estaría basado en la introducción por los matemáticos de nuevas estructuras (*elementos ideales,* como el plano proyectivo complejo) que no estarían incluidas en las viejas estructuras pero que las unifican bajo un nuevo punto de vista (Heis, 2007, v). Sin embargo, la desviación es más aparente que sustantiva (desde la perspectiva de la lectura de Kant que se defiende en este trabajo; no, naturalmente, desde la interpretación predominante en la época), considerando que de lo que la construcción kantiana realmente trata, en relación con la filosofía de la Matemática, es de la *construcción de sus conceptos (y objetos)*, para cuya descripción el filósofo crea un metalenguaje totalmente original. Según Kant, los conceptos matemáticos se construirían como *formas sensibles intuidas* en el espacio y en el tiempo, que serían las *formas a priori de la sensibilidad.* Esta dimensión espacio-temporal sería, como dice Strawson, "a visual or phenomenal space", cuya estructura sería de forma natural euclídea por la determinación de las características cognitivas humanas. Joongol Kim resalta este punto cuando comenta la opinión de Carnap de que "Kant's doctrine must be abandoned, then, because no laws of geometry, mathematical or physical, can be a priori and synthetic".

> "P.F. Strawson rightly reject this argument as based on a mistaken dichotomy between mathematical and physical geometry. Instead he put forward what he called visual or

phenomenal interpretation of Euclidean geometry, according to which the space that Euclidean geometry concerns is not physical but phenomenological space" (Kim, 2006, 139).

Kant hace frecuentemente una distinción crucial para la comprensión de su filosofía entre *el pensamiento* de un concepto matemático, que sólo requeriría consistencia, y su *construcción,* que requiere cierta estructura en el *espacio sensible* (BIX-BXII). Kant no niega en absoluto la *posibilidad* de geometrías consistentes distintas de la euclídea (su tesis sería únicamente que esos sistemas no serían percibibles ni podrían ser intuidos), y tampoco mantiene que el *espacio físico* sea euclídeo, por lo que no ha sido refutado por los modernos desarrollos de las geometrías no euclídeas. Lo que en todo caso podría cuestionarse es su tesis fundamental (y esa es una tesis cognitiva) de que el *espacio de la percepción sensible* es 3-dimensional y euclídeo (Körner, 1960, 30). No hay ninguna duda de que esta aproximación tiene un trasfondo psicológico en tanto que este *espacio fenomenológico* estaría en gran parte determinado por la especificidad de la estructura cognitiva humana, pero esto está muy lejos de las básicamente sicologicistas interpretaciones tradicionales de Kant, como observa Patricia Kitcher.

Más aún, se podría considerar que este esquema, de acuerdo con el cuál las Matemáticas implicarían una restricción que las separaría del mero razonamiento lógico, supone una *aproximación naturalista* en tanto que se basaría en una observación y reflexión sobre la práctica matemática de su época (como es obvio en las citas en su obra de los argumentos de Euclides, que tanto sorprendían a Friedman y Russell). Por otro lado, hay que resaltar que los argumentos visuales y espaciotemporales eran esenciales en las Matemáticas de su época, incluso en los mecanismos de demostración. Todo esto no nos conduce a aceptar la construcción conceptual de Kant como *la* apropiada para una filosofía de la Matemática que permita explicar sus propiedades epistemológicas, pero siguiendo el slogan neokantiano de "volver a Kant más allá de Kant", podemos concluir que su posición metodológica es la apropiada para atacar el problema y también que su construcción filosófica es suficiente para el análisis de la Matemática de su tiempo y, además, compatible con los desarrollos de la Matemática moderna, abriendo interesantes perspectivas para su análisis. Todo esto quedará reforzado cuando mostremos las características sorprendentemente modernas de su teoría epistemológica y cognitiva general.

2.5-Lógica matemática o Matemática lógica.

El siglo de la revolución en las Matemáticas (XIX) fue también el de una profunda crisis en la Lógica. Era una opinión general que la Lógica aristotélica de inclusiones era absolutamente inadecuada para explicar el razonamiento usado en las emergentes ciencias naturales y exactas, en particular en Matemáticas y Física. Además, siguiendo a Kant en este punto, sería necesaria una Lógica sin un componente ontológico, lo que no era el caso de la Lógica aristotélica. Por ejemplo, Lotze –el más famoso lógico alemán de la época- explica en detalle las razones de las deficiencias de la Lógica aristotélica (y también de la booleana) para explicar las peculiares inferencias en Matemáticas (Logik, book I, chapter Three, "the Theory of Inference", 1874). Heis (2007, 288) analiza cuidadosamente sus argumentos y su influencia en el pensamiento de Frege y Cassirer. Resalta que "what is interesting and novel in Lotze's criticism, though, follows directly from Lotze's non-Aristotelian, functional model of the structure and formation of concepts" (Heis, 2007, 294).

Peano propuso y desarrolló un programa en cierta forma convergente. Su noción de "Lógica matemática" aspiraba a introducir los métodos matemáticos en la Lógica, de forma similar a lo que nos referimos cuando hablamos de "Economía matemática" o "Filosofía matemática". Resulta sorprendente que este programa se convirtiera en su contrario en la obra de Russell, en el sentido de que se entendía (y se entiende) a la Matemática como reducible a la Lógica y, específicamente, a una Lógica concebida como un simple cálculo formal, esto es, exclusivamente de carácter sintáctico. Además varias identificaciones ocurren en este proceso, como la identificación de 'formal' con 'conceptual' que señalábamos al comienzo en la cita de Friedman. Y en este contexto, como Friedman también remarca, una *demostración correcta* sería exclusivamente una cadena de símbolos sin significado derivados de acuerdo con reglas sintácticas formales. Por una parte, es evidente la existencia de tales opiniones todavía hoy, como las citas de Friedman prueban, pero es también más y más evidente que sólo son relevantes para algunos lógicos y filósofos y que son absolutamente ignoradas por los matemáticos en su *práctica* creativa y pedagógica. Como explica Leitgeb:

> "in fact, mathematicians are generally not reflecting on the languages of their mathematical articles, monographs, textbooks, and lectures at all, and a fortiori they do not require that proofs be stated in a formal language. This does not mean, that actual proofs do not contain any 'formal' expressions. What mathematicians do is to extend natural language by some (maybe new) distinguished symbols and to use this language in much the same way as lawyers extend natural language by legal terms for their own purposes. The language(s) are thus best viewed as 'organic' entities which grow and change in time, both with the natural languages they extend and with respect to their specific mathematical resources" (Leitgeb, 2009, 268).

Leitgeb reflexiona sobre la actual *práctica* matemática, y particularmente sobre la demostración en el campo de la Matemática actual, y observa que en la argumentación matemática "the mathematical community's sense of *proving a statement from other* involves connecting the latter statements to the former by intermediate steps (i) which preserve truth and (ii) which make evident why truth is preserved from one step to the next" (Leitgeb. 2009, 270). En opinión de Leitgeb, nociones como demostrabilidad informal y demostración informal (que yo pienso que son las características de la práctica matemática moderna) difieren las nociones de "demostrabilidad formal" y "demostración formal" en que tienen componentes o aspectos *semánticos* e *intuitivos* (Leitgeb, 2009, 274). Leitgeb estudia todo esto en profundidad, analizando también el punto de vista de Gödel al respecto, y tratando de abordar un *análisis formal* de esos procedimientos *informales*. En análoga línea, Avigad señala que:

> "On a traditional view, the primary role of a mathematical proof is to warrant the truth of the resulting theorem. This view fails to explain why it is very often the case that a new proof of a theorem is deemed important. Tree case studies from elementary arithmetic show, informally, that there are many criteria by which ordinary proofs are valued. I argue that at least some of this criteria depend on the methods of inference the proofs employ, an that standard models of formal deduction are not well equipped to support such evaluations. I discuss a model of proof that is used in the automated deduction community, and show that this model does better in that respect" (Avigad, 2005, 42).

El asunto parece relevante para la propia Lógica matemática, si tenemos en cuenta su sentido original propuesto por Peano. Considerando que el criticismo (en particular hacia el enfoque kantiano) provienen de un estricto formalismo y logicismo que señalaría la inadecuación a un *canon* en Lógica (y que consideraría dicho *canon* como la última palabra posible en esa disciplina), podemos pensar que estamos en una situación similar a la del siglo XIX. La Lógica matemática, si se identifica con la Lógica formal a su actual nivel de desarrollo, no podría explicar suficientemente los procedimientos del pensamiento ni tampoco la lógica de ciencias concretas, particularmente de las Matemáticas. Esta es también parcialmente la conclusión de Leitgeb:

> "So the Holy Grail in philosophy of mathematics (…) is still waiting to be found, as is further insight into the elusive but fundamental concept of informal provability" (Leitgeb, 2009, 292).

Hermann Weyl, cuyas discrepancias con Hilbert sobre el tema constituyen un punto central en la época de la *crisis fundacional*, expresa de forma especialmente clara este mismo punto de vista en el obituario que en su día escribió para Hilbert:

> "The question of the ultimate foundations and the ultimate meaning of mathematics remains open; we do not know in what direction it will find its final solution or even whether a final objective answer can be expected at all. 'Mathematizing' may well be a creative activity of man, like language or music, of primary originality, whose historical decisions defy complete objective rationalization" (Weyl, 1944, 550).

Pero el problema afectaría también a la propia Lógica matemática en tanto y cuanto aspira a incorporar los *métodos matemáticos* al análisis lógico. Pues esos componentes semánticos e intuitivos estaría en el corazón del problema. Tarski ya desarrolló una crítica mostrando la imposibilidad de eliminar los contenidos semánticos en el razonamiento lógico, creando la *teoría de modelos*. Su punto de partida es un intento de aproximación a una *concepción intuitiva de la noción de verdad:*

> "We would like our definition to adapt to the intuitions derived from classical aristotelic definition of truth, intuitions which are reflected in the well known words of Aristoteles in his work Metaphysics" (Tarski, 1944, 343)[94].

La cita de Aristóteles a la que se refiere Tarski tiene claramente un contenido ontológico, pero eso nos conduciría a otro debate:

> "To make a true statement is to say of what is, that it is, or to say of what is not, that it is not. To make a false statement is to say of what is not, that it is, or to say of what is, that it is not" (Metafísica, Γ, 727) [95].

Se han realizado grandes esfuerzos para tratar de incorporar a la Lógica formal mecanismos que parecen esenciales en el razonamiento humano, desde la Deducción Natural de Genzen[96] a la Lógica No-monotónica (Leitgeb, 2004) o la Fuzzy Logic, la cuál ya es una disciplina autónoma con importantes aplicaciones tecnológicas (Klir & Bo Yuan, 1995). Sin embargo, el uso de *la intuición* en este contexto tendría un significado muy distinto a su uso en Matemáticas (desde el punto de vista de Kant), aunque en última instancia ambos

---

[94] "The Aristoteles' quotation which he refers to, has clearly an ontological content, this will lead us to another debate. "To make a true statement is to say of what is, that it is, or to say of what is not, that it is not. To make a false statement is to say of what is not, that it is, or to say of what is, that it is not". (*Metafísica,* Γ, 727) Citado por Tarski (1944, 343). Una discusión de las versiones modernas de este enunciado y de la problemática que involucra, en Tarski (1944, 343 y ss). Este artículo, "The semantic conception of Truth", es una versión no técnica de un artículo publicado en alemán (Tarski, 1935) que a su vez se publicó originalmente en polaco en 1933. Las referencias están en el mismo artículo.

[95] La versión en español: "Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, falso y es decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero".

[96] Centrándonos exclusivamente en los distintos enfoques en relación con el Cálculo de Enunciados, por ejemplo (tablas de verdad, sistemas axiomáticos, deducción natural de Gentzen) puede observarse que, aún siendo formalmente equivalentes, hay un matiz decisivo en sus respectivas perspectivas. Para aclarar el problema de fondo la pregunta podría ser: Si se quiere enseñar y alcanzar un dominio de la Lógica, cuál sería la estrategia más adecuada ¿estudiar y analizar los Diálogos de Platón o desarrollar un curso de Lógica Matemática? Seguramente la Lógica Matemática ayudaría a analizar mejor los Diálogos, pero sólo con ella no se aprendería absolutamente nada de Lógica. El enfoque de Gentzen incide en esta peculiaridad. Parece que el *razonamiento* humano opera con *reglas de inferencia* y que, por otro lado, actuarían sobre *contenidos semánticos*, siendo imposible para los humanos razonar sin dichos contenidos referidos a un *objeto*. La Deducción Natural de Gentzen obvia esos contenidos, pero se ajusta mejor a *la forma de razonar* de los humanos y es didácticamente muy superior, aunque sea formalmente equivalente, a la axiomática. Se puede decir que es un método más *intuitivo*, y aquí en sentido de *intuición* se referiría a que se ajusta más a la estructura cognitiva de los humanos, y tendría necesariamente connotaciones *semánticas o / y ontológicas*. Lo esencial del enfoque de Gentzen se expone en el Capítulo-6. Las *lógicas no-standard* se exponen y comentan en el Capítulo-6 y 7.

radicarían en ese *week psychologicism* del que habla Patricia Kitcher refiriéndose a la epistemología de Kant, significando que ambos estarían justificados por la específica estructura cognitiva del ser humano. Si descartamos la interpretación del *formalismo* de Curry y el *logicismo* de Russell, en realidad dos variantes relacionadas de un *nominalismo* en la aproximación al problema, resulta que el problema seguiría siendo complicado porque, de un lado, la Lógica sería Matemáticas en cuanto sistema de cálculo pero, de otro lado, le faltaría la referencia a un objeto real (o construible, de acuerdo con Kant), y por lo tanto no sería Matemáticas en sentido kantiano. Aunque el análisis de Kant de la Lógica proposicional de su época podría homologarse con los análisis actuales, con la importante salvedad de que consideraba esa Lógica como un sistema cerrado y definitivo, sin embargo su consideración de la Lógica supera en mucho el ámbito de nuestra actual concepción. Después de su análisis de la *Transcenzendental Ästhetik,* Kant comienza la segunda parte de la *Crítica*, la *Transzendental Logik*, considerando primero la *lógica formal usual*, esto es, la lógica aristotélica tradicional de su época. Consideraba sus juicios como *analíticos y a priori* y, por lo tanto, la lógica formal no sería Matemáticas de acuerdo a su concepción. Para Stephan Körner:

> "Kant´s viewpoint of the nature of this logic is totally compatible with the results of the important developments in this field after his death, except for the significant point that Kant considered this formal logic of his time as closed. But today, as in his time, the statements of formal logic are considered as analytic and a priori, and they ought to work (considered to deal) with the form of reasoning" (Körner, 1955, 43).

Pero, como hemos dicho, Kant aborda en su *Lógica Transcendental* una aproximación más general a la Lógica que va con mucho más allá de las fronteras de esta disciplina tal y como la entendemos hoy en día. Aborda no solamente un análisis de la lógica formal de su época, sino que pretende una tarea más general[97] con tres objetivos básicos: primero, separar

[97] Béatrice Longenesse (1997, 5) en su obra *Kant and the Capacity to Judge* focaliza precisamente su estudio en la conexión entre las formas lógicas del juicio y los actos del entendimiento, y hace exactamente el mismo comentario en relación con la Lógica subyacente: "Kant's notion of logical form is not that of modern logic". Y a pesar de la relevancia que Kant da a su Lógica en la *KrV*, y a pesar de que, como vimos, sus expresiones y valoraciones sobre la concepción de la Lógica coincide prácticamente con las de los logicistas más estrictos, la realidad es que entre los filósofos y Lógicos sus desarrollos de Lógica han sido despreciados: aparentemente no existía sintaxis, no existía semántica, no existía inferencia. Así aparece tratado en los *Begriffsschrift* de Frege y en *The Bounds of Sense de Strawson*, por no hablar de otros autores como Hazen (1999,79) para quien la Lógica formal de Kant sería "terrifyingly narrow-minded and mathematically trivial". Pero la investigación de esa Lógica y su conexión con su Teoría del Juicio se ha revitalizado; además de las obras de Longuenesse podemos mencionar en esa misma dirección a Reich (1932 y 1992) y a Wolff (1995), para quienes el asunto no es tan evidente. Recientemente Achourioti & Van Lambalgen (2011) han realizado un trabajo donde arguyen que "Kant's 'transzendental logic' is a logic in the strict formal sense, albeit with a semantics and a definition of validity that are vastly more complex than that of first order logic". Y desarrollan un formalismo, formalizando algunas nociones de la lógica trancendental, que le permite desarrollar una demostración formal de la Tabla de Juicios de Kant del parágrafo 9 de la KrV y, consiguientemente, como Kant sostenía, completarlo para el tipo de semántica que él tenía en mente. Desde su punto de vista, el trabajo lleva a tres conclusiones: (i) La lógica formal de Kant puede considerarse restrictiva solamente si asumimos que la semántica subyacente sería la de la lógica clásica de primer orden, (ii) pero la lógica implicada en sus argumentos, centrada en torno a tres diferentes nociones de objeto, puede dar lugar a una expresión matemática precisa, condiciendo a una lógica transcendental formalizada, y (iii) con la semántica que proponen los autores, un sistema muy análogo a la lógica formal de Kant, se puede considerar como un fragmento específico de la lógica de primer orden, precisamente la denominada lógica geométrica, y, por tanto "transcendental logic can be conceived as a formal logic in its own right. This is precisely what we shall attempt" (Achourioti & Van Lambalgen, 2011, 1). Es decir, el que Kant no construyera un sistema formal, cuando no existían, no querría decir que no sea posible construirlo, al menos sobre aspectos parciales de su lógica, a partir de su sistema. Existen pocos trabajos en esta dirección. Hay una amplia exposición que revisa el tema en (Stuhlmann- Laeisz, 1976) pero, según los autores "these are set firmly in the context of traditional logic". Existen también estudios sobre aspectos filosóficos específicos en esta dirección como la tesis doctoral

aquellos conceptos *a priori* que, aunque no son de carácter matemático (de acuerdo con su concepción de la Matemática), pueden ser aplicados a la percepción (como por ejemplo *la causalidad*) y diferenciarlos de otras clases de conceptos; segundo, mostrar cómo una correcta aplicación de esos conceptos conduce a juicios *sintéticos a priori* ; y tercero, mostrar cómo una inadecuada aplicación de conceptos *a priori* e *ideas* (esto es, nociones generales tales como la libertad moral que, ni son aplicables a la percepción ni pueden ser abstraídas de ella) conducen a ciertos importantes errores a los que, en cuanto seres humanos, tendemos.

Para concluir, podemos resumir diciendo que de todo lo anterior se deducen claramente varias consecuencias relevantes. La primera consecuencia consiste en que la más influyente (todavía) posición crítica frente a la epistemología kantiana y, específicamente, a su filosofía de la Matemática tiene un fundamento epistemológico demasiado débil. No puede considerar como científica la Matemática *practicada* durante siglos hasta hace 100 años, no es capaz de dar respuesta a los retos y limitaciones de la Lógica moderna y sostiene una ruptura radical de la Matemática moderna con la Matemática clásica. La segunda consecuencia sería que de la lectura que estamos desarrollando aquí de la filosofía de la Matemática de Kant y de su epistemología se deduce que, ni puede entenderse en los términos reduccionistas con que la enfocan los logicistas ni está tan carente de fundamento como estos sostienen. Muy al contrario, aparece con unos rasgos sorprendentemente modernos que pueden contribuir a abrir interesantes perspectivas a la investigación actual. Más aún, recientes investigaciones tienden a confirmar algunos puntos de vista fundamentales de Kant, por lo menos en lo que se refiere a su metodología, contradiciendo la tesis principal de Friedman:

> "Kant's conception of geometrical proof is of course anathema to us. Spatial figures, however produced, are not essential constituents of proofs, but at best, aids (and very possibly misleading ones) to the intuitive comprension of proofs. Whatever the intended interpretation of the axioms or premises of a geometrical proof may be, the proof itself is a purely 'formal' or 'conceptual' object: ideally, a string of expressions in a given formal language" (Friedman, 1992, 95).

Así, para Mumma:

> "The Elements is a mixture of mathematics and something else. This something else is variously referred to as the 'intuitive', 'applied', 'concrete' or 'contentful' of Euclid's theory. What this component amounts is rarely spelled out. Yet there is widespread agreement that whatever it is, it is non-mathematical and so outside the ken of the philosopher of mathematics. Whit this thesis I aim to show the opposite: much of what is branded as intuitive (usually in a pejorative sense) in Euclid's Elements has a legitimate mathematical role, and thus deserves the attention of the philosopher of mathematics. The claim rest on a new formal analysis of the Elements, termed Eu (for Euclid). Eu possessed a syntactic type for diagrams, as well as sentences, and formulates rules of inferences in terms of both. The resulting proofs resemble Euclid's closely, often step for step. On the strength of this resemblance, I argue that a legitimate, diagrammatic method of proof underlies Euclid's results" (Mumma, 2006, 7).

Los resultados de Mumma y su relación con la aproximación kantiana han sido analizados recientemente por Avigad & Dean & Mumma (2009). Jeremy Northrop (2011) ha

---

de MacFarlane (2000) en relación con el uso por Kant del término "formal" y en (Posy, 2003) acerca de si Kant en su lógica estaba guiado por el psicologicismo. En su reciente artículo "Truth criteria and the very project of transcendental logic", Rosenkoetter (2009) sugiere que la lógica transcendental sería fronteriza con la búsqueda de un criterio de verdad que la lógica tradicional no podría conseguir (A57-9 / B82-4), pero no existe ninguna indicación en el artículo de que la lógica transcendental pudiera ser considerada como una lógica formal por derecho propio, al menos en algunas de sus partes. Para los autores, "to our knowledge, ours is the first attempt to shed light on Kant's logic using the tools of modern mathematical logic" (Achourioti & Van Lambalgen, 2011, 2). Véase el Capítulo-9.

llevado el sistema de *Eu* un paso más allá, y ha demostrado cómo el razonamiento diagramático, como el diseñado por *Eu*, puede ser codificado y ejecutado por computador. Un programa de software llamado *E Proof Checker* (EPC), construido usando el lenguaje de programación Java, ha sido creado con este fin, y es analizado en el trabajo de Northrop. El trabajo de estos autores demuestra que en la obra de Euclides, un *lenguaje visual* con reglas de transformación bien definidas, ha sido de alguna forma utilizado como soporte para implementar una lógica *formal* apropiada para el razonamiento matemático, superando así las fronteras de la lógica aristotélica de su época. Esta conclusión concuerda con la tesis de MacLachlan, que hemos citado más arriba. Además, varios autores han analizado recientemente la noción de *visual thinking*, y han discutido sus implicaciones cognitivas y epistemológicas, específicamente en relación con el pensamiento matemático (Mancosu, 2005) (Manders, 2008) (Giaquinto, 2007). Todos estos resultados se discuten detenidamente en el Capítulo-8 de este trabajo y refuerzan las tesis aquí mantenidas.

Todo lo anterior, que analizamos con más detalle en el Capítulo-8, refuerza la tesis de que la construcción lingüística y conceptual de la epistemología kantiana radica esencialmente en un metalenguaje que permite reflexionar y analizar campos cognitivos específicos como la Lógica y la Matemática. Todas las investigaciones anteriormente mencionadas tienden a confirmar el rol que Kant asignaba a la *intuición* en el conocimiento matemático. Esto no significa postular la validez del conjunto de la construcción conceptual kantiana, que sería otro tema. Por el contrario, como se demuestra en este trabajo, el mismo término *intuición* adolece en su obra de múltiples ambigüedades y contradicciones. Sólo se trata de poner en valor su perspectiva metodológica y de demostrar su sorprendente modernidad demostrando, además, su utilidad para la epistemología de la Matemática.

CAPÍTULO-3

El realismo empírico de Kant y el debate en torno a nociones esenciales

3.1.-El paradigma epistemológico cartesiano y la "revolución copernicana".

La interpretación de la filosofía de la Matemática de Kant está determinada por la interpretación de su teoría general del conocimiento. Como ya hemos indicado, la tesis en este trabajo es que la construcción lingüística y conceptual de la epistemología kantiana radica esencialmente en un metalenguaje que permitiría reflexionar y analizar campos cognitivos específicos como la Lógica y la Matemática. La línea interpretativa se fundamenta en una serie de autores que, todos ellos, parten de las interpretaciones desarrolladas principalmente, aunque no sólo, por Strawson y Prauss. La culminación de esta línea interpretativa estaría representada por la obra de Paul Abela, donde se justifica un realismo robusto en la epistemología kantiana, y que vamos a describir con detalle en este apartado, intentando extraer las consecuencias que implica para la filosofía de la Matemática de Kant. En la interpretación de Abela, la obra de Kant presenta unas sorprendentes características modernas (coincidiendo en esto con los autores antes estudiados y ampliando esta perspectiva), pero superando las limitaciones de los enfoques positivistas o empiristas, planteando un enfoque no sólo compatible sino integrable con las modernas investigaciones de las ciencias cognitivas y de la filosofía del lenguaje.

Como la mayor parte de los autores antes estudiados, Abela parte del análisis de Strawson pero, a partir de él desarrolla una interpretación propia en gran parte crítica con el propio análisis de Strawson. Como él mismo explica: "No doubt Strawsons's project *is* designed to challenge the sense-data theories of representation. It is in part the success of the Strawsonian project that theories so powerful in the heyday of Positivism now seem old-fashioned and outdated. My disagreement with the Strawsonian programme is not that it fails to identify and challenge the empiricist model, but rather that it fails to go *far enough*" (Abela, 2002, 93-94).

Sin duda es posible una interpretación de la epistemología de Kant en términos que lo sitúen en una aproximación idealista y/o constructivista y, de hecho, esas serían en términos generales las lecturas actualmente hegemónicas. Pero eso sería un profundo error que contradice el núcleo del proyecto kantiano que, como veremos, está claramente formulado por el mismo Kant en términos inequívocamente realistas. La razón última de estas interpretaciones estaría en la supervivencia del modelo epistémico cartesiano que, precisamente, sería el que Kant quería anular con su enfoque en la "revolución copernicana". El mismo término "realismo empírico" lo acuña el propio Kant en la "crítica al cuarto paralogismo" (A 369). El realismo empírico se rige por un criterio de realidad claro: "Was mit einer Wahrnehmnung nach empirischen Gesetzen zusammenhägt, ist wirklich" (A376). A tenor de este criterio, la función del realismo empírico dentro del sistema debe por tanto contribuir a una explicación positiva de la experiencia posible, y en su desarrollo el *juicio* tendrá un rol fundamental que le confiere un papel esencial en la determinación conceptual de la condición propia del proyecto trascendental kantiano[98]. Abela (2002, 1) resume la posición

[98] B. Stroud (1984, B. Stroud: "Die Transzendentalphilosophie und das Problem der Außenwelt", en E. Schaper & W. Vossenkuhl (Eds.): *Bedingungen der Möglichkeit. 'Transcendental Arguments' und transzendentales*

kantiana en estos términos: “empirical realism is the title Kant invokes for the positive account of possible experience. Developing Kant’s position under this rubric also aids in connecting many of Kant’s arguments with contemporary concerns in the realistic/anti-realistic debates in epistemology and philosophy of language. Issues relating perceptual content, truth, and reference stand at the heart of Kant’s analysis of judgement. And it is judgement, its forms and conditions, that stands at the centre of the Kantian conception of the epistemological relation of mind and world”.

Kant opone el realismo “empírico” al “trascendental”, pues considera que la ontología que corresponde a su crítica trascendental no el es la de un realismo que trascienda al mundo empírico, sino la del mundo empírico. “Realismo transcendental” es el término que Kant adjudica al marco epistémico de la filosofía pre-crítica. Kant adjudica el término tanto a los racionalistas como a la tradición empiricista de sus días (B327). Su característica fundamental sería la visión del conocimiento humano como una relación con objetos considerados como *cosa en sí*, con lo que la representación de la realidad se abstraería de las condiciones que sirven de base al *acto* de la representación. La razón de fondo que uniría explicaciones tan dispares como las de Leibnitz y Hume sería que ambas surgirían de un marco epistémico común fundamentado en la visión cartesiana. Kant etiqueta al punto de vista cartesiano como “idealismo problemático” (B274), y considera que impone una conexión *mediada* entre el contenido interno dado y la realidad exterior. El sujeto tiene ideas, y sólo ideas, a su disposición y la percepción no puede aportar más que los contenidos que ya están en la mente. La tarea epistémica consiste entonces en encontrar una base segura para las inferencias del contenido dado a la realidad objetiva, y así el esquema cartesiano crea un marco epistemológico en el que la referencia a objetos existentes independientemente de la mente se convierte en *problemática*. En palabras de Kant:

> “Ich kann also äuβere Dinge eigentlich nicht wahrnehmen, sondern nur aus meiner innere Wahrnehmung auf ihr Dasein schlieβen, indem ich diese als die Wirkung ansehe, wozu etwas Äuβeres die nächste Ursache ist. Nun ist aber der Schluss von einer gegebenen Wirkung auf eine bestimmte Ursache jederzeit unsicher; weil die Wirkung aus mehr als einer Ursache entsprungen sein kann. Demnach bleibt es in der Beziehung der Wahrnehmung auf ihre Ursache jederzeit zweifelhaft: ob diese innerlich, oder äuβerlich sei, ob also alle sogenannte äuβere Wahrnehmungen nicht ein bloβes Spiel unseres innern Sinnes sein, oder ob sie sich auf äuβere wirkliche Gegenstände, als ihre Ursache beziehen” (A368)[99].

En la solución propuesta por Descartes al problema, conocido precisamente como “problema cartesiano”, *la referencia y la verdad* quedan aseguradas pero a un gran precio: el recurso a la existencia de Dios y a su bondad natural, prescindiendo de lo cual el gap

---

Denken, Stuttgart 1984, 204-233) hace un excelente análisis de la función del empirismo empírico dentro del sistema kantiano frente a las filosofías que le preceden. Sus argumentos no difieren en lo esencial de las tesis mantenidas en lo que sigue. Lo discutimos en detalle en el Capítulo-9.

[99] “No puedo, pues, hablando con propiedad, percibir las cosas exteriores, sino sólo inferir su existencia desde mi percepción interna considerando ésta como efecto de algo exterior que es su causa próxima. Ahora bien, el inferir una causa determinada a partir de un efecto dado es siempre inseguro, ya que el efecto puede proceder de más de una causa. En la relación de la percepción con su causa queda, pues, siempre la duda de si esta causa es interna o externa y, por consiguiente, de si todas las llamadas percepciones externas no son un simple juego de nuestro sentido interno; de si se refieren a verdaderos objetos exteriores como causas de las mismas” (A368) (PR). “Thus I cannot really perceive external things, but only infer their existence from my inner perception, insofar as I regard this as the effect of which something external is the proximate cause. But now the inference from a given effect to its determinate cause is always uncertain, since the effect can have arisen from more than one cause. Accordingly, in the relation of perception to its cause, it always remain doubtful whether this cause is internal or external, thus whether all so-called outer perceptions are not a mere play of our inner sense or whether they are related to actual external objects as their cause” (A368).

epistémico y ontológico entre las representaciones internas y los objetos exteriores del mundo es insalvable. Para Kant, tanto el análisis de Leibniz como el de Hume caían dentro de este marco. En el caso del racionalismo de Leibniz, la separación tomaría la forma de una priorización de lo intelectual sobre lo sensible, tal que “Leibniz intelectualiza las apariencias” (B327) de forma que, rechazando cualquier rol constitutivo a la sensibilidad, identifica el objeto del conocimiento con un objeto puramente intelectual. Kant designa este punto de vista como “realismo transcendental”[100]. Mientras que a los idealistas empíricos como Berkeley o Hume los califica como “idealismo dogmático” y en ellos el acto de representación sería totalmente interno, teniendo experiencia inmediata solamente de las ideas, que serían algo primitivamente dado. Así la experiencia de objetos “externos” es vista como el producto de una construcción interna desde un contenido *dado.* La objetividad emerge “…nämlich von einer durch öftere Assoziationin der Erfahrung entsprungenen subjektiven Notwendigkeit, welche zuletzt fälsisch für objektiv gehalten wird, d. i. der Gewohnheit” (B127)[101]. Lo importante es la posición de Kant de que la aproximación del idealismo empírico comparte con la aproximación del racionalismo una exigencia con algo que está fuera de *la autonomía del juicio,* y que los unifica bajo un “común prejuicio” (B768), y además Kant cree que el marco epistémico del realismo trascendental hunde sus raíces en el marco epistémico iniciado por Descartes. El paradigma epistemológico que el cartesianismo impone está dominado por la búsqueda de una justificación para la inferencia desde las ideas internas a la realidad de los objetos externos: “It is a testament to the power of this description of our epistemic situation that the dominant modern epistemological issues continue to be about induction, justification, and problems associated with scepticism: all features that can be tied back to Descartes’s grand thought experiment” (Abela, 2002, 29). Muchas de las interpretaciones modernas de la epistemología kantiana son radicalmente erróneas porque se hacen aún desde *dentro* de ese marco epistémico cartesiano que sería, precisamente, el que Kant quería *superar* con su construcción conceptual. Lo fundamental es la afirmación de Kant de que el marco cartesiano impone una conexión *mediada* entre el contenido interno y la realidad externa, y que el idealismo dogmático de Hume y Berkeley se mueven en ese marco que les llevaría a una conclusión no aceptable:

> “Dieser transzendentale Realist ist es eigentlich, welcher nachher den empirischen Idealisten spielt, und nachdem er fälsisch von Gegenstände der Sinne vorausgesetzt hat, dass, wenn sie äuβere sein solle, sie an sich selbst auch ohne Sinne ihre Existenz haben müssten, in diesem Gesichtspunkte alle unsere Vorstellungen der Sinne unzureichend findet, die Wirklichkeit derselben gewiss zu machen” (A369)[102].

Kant considera que, si se comienza con una separación de origen entre contenido y referencia, la mera idea de referencia a algo independiente de las ideas internas llega a ser ininteligible y tampoco hay lugar para el carácter intencional de lo mental. Así, si se emplea el

---

[100] Aunque también usa a veces el término para designar el marco epistemológico más amplio del realismo transcendental / idealismo empírico (Abela, 2002, 27).

[101] “From a subjective necessity arisen from frequent association in experience, which is subsequently falsely held to be objective, i.e., *custom*…” (B127) (GW).

[102] “It is really this transcendental realist who afterwards plays the empirical idealist; and after he has falsely presupposed about objects of the senses that if they are not exist they must have their existence in themselves even apart from sense, he finds that from this point of view all our representations of sense are insufficient to make their reality certain” (A369), (GW). “En realidad es este realista transcendental el que hace luego de idealista empírico: una vez que ha partido, erróneamente, del supuesto de que, si los objetos de los sentidos han de ser exteriores, tienen que existir en sí mismos, prescindiendo de los sentidos, descubre que, desde tal punto de vista, todas nuestras representaciones de los sentidos son incapaces de garantizar la realidad de esos mismos objetos” (A369), (PR).

marco del realismo transcendental para caracterizar la situación epistémica inicial, entonces, en base al carácter mediado de la experiencia subjetiva, las simples ideas de externalidad espacial y extensión temporal sucumben víctimas de la verdad reductivista básica de que todas las representaciones son contenidos internos de la mente[103]. Así, lo que comenzó con Descartes con un intento de alcanzar un conocimiento indubitable de el mundo externo termina irónicamente con la negación de la posibilidad de cualquier referencia a una realidad independiente de la mente; se culmina en una concepción del conocimiento de un extremo *carácter constructivista*. Y este era el marco epistemológico que Kant quería cambiar:

> "We should view Kant's Copernican experiment as challenging this deeply entrenched depiction of the fundamental epistemic situation. Thus, while Kant attacks Leibnitz's rationalism and Hume's empiricism, the real epistemic villain is the transcendental realistic framework itself. It is the pre-theoretic assumption that reality is given, independent of the conditions of judgement, that form the primary target of Kant's attack" (Abela, 2002, 32).

La forma habitual contemporánea de intentar capturar la respuesta de Kant al esquema cartesiano consiste en enfatizar las características formales que informan la priorización kantiana del juicio y sus fundamentos[104]. Aceptando que el formalismo constituye una

---

[103] David Hume, *A Treatise of Human Nature,* 2nd.edn.,ed.P.H.Niddtich (Oxford: Clarendon Press, 1989),bk.I,part IV,sect.II: "That our senses offer not their impressions as the images of something distinct, or independent, and external, is evident: because they convey to us nothing but a single perception, and never give us the least intimation of anything beyond". "The notion of external existence, when taken for something specifically different from our perceptions, is an absurdity". "The material of senses supply entails no notion of continued existence, because they cannot operate beyond the extent, in which they really operate". George Berkeley, *The Principles of Human Knowledge*, Prin.23 (London: William Collins Sons and Co., Ltd., 1972): "When we do our utmost to concive the existence of external bodies, we are all the while only contemplating our own ideas. But the mind, taking no notice of itself, is deluded to think it can and does conceive bodies existing unthought or without the mind".

[104] El mismo Kant recalca en los *Prolegomena* este aspecto de su aproximación. La primera lección que se extrae de la *Crítica de la Razón Pura* es que el conocimiento trascendental es el conocimiento a partir de las condiciones *a priori* que estructuran la experiencia: "Ich nenne alle Erkenntnis transzendental, die sich nicht so wohl mit Gegenständen , sondern mit *unsern Begriffe a priori* von Gegenständen überhaupt beschäftigt" (B25). ["I call all cognition transcendental that is occupied not so much with objects but rather with our mode of cognition of objects insofar as this is to be possible *a priori*" (B25), (GW)], ["I entitle *transzendental* all knowledge which is occupied not so much with objects as with the mode of our knowledge of objects in so far as this mode of knowledge is possible *a priori*" (B25), (NKS)], ["Llamo *transcendental* todo conocimiento que se ocupa, no tanto de los objetos, cuanto de nuestro modo de conocerlos, en cuanto que tal modo sea posible *a priori*" (B25), (PR)]. Obsérvese que la traducción de NKS es más literal, al igual que la española de PR y, sin embargo, la de GW traduce aquí "Erkenntnis" por "cognition", en lugar del habitual "knowledge". Este mismo afán interpretativo se observa en muchos de los actuales comentaristas anglosajones, que presentan traducciones propias de pasajes de Kant, por ejemplo, Patricia Kitcher. Es simplemente imposible negar que las características formales dominan la respuesta de Kant al marco epistémico realismo transcendental / idealismo empírico, y veremos más adelante el rol que estas estructuras formales desempeñan en la *Analítica de los Principios*. Pero, como señala Abela (2002, 33), "however, even after having acknowledged the role of the formal, an important interpretative question remains open. How does Kant's formalism alter the received Cartesian view? Might it be the case there remains a danger of invoking formal features without fully recognizing how the conditions-of-judgement approach alters the basic features of the epistemological picture? In other words, could one by focusing primarily on formal features at the same time fail adequately to register the scope of Kant's proposed break with the old epistemological framework?". Abella considera representativo de las modernas interpretaciones del tema el análisis de Allison y considera que falla, precisamente, en que prescinde completamente de la bifurcación original entre mente y mundo que impone el paradigma cartesiano, aunque reconoce que en el corazón de la lectura de Allison está la correcta observación de que la explicación de Kant de la síntesis introduce unas características formales *a priori* que no se pueden derivar de la experiencia. Las formas de la intuición y los conceptos puros del entendimiento son así interpretados como los aspectos clave del análisis de Kant que servirían para distanciar el realismo empírico de sus parientes epistémicos. "The key point…is that Berkeley and Hume share with other transcendental realist a failure to recognize the role in human experience of a set

característica central en la aproximación kantiana al problema, considera, sin embargo, que un enfoque basado meramente en este aspecto (lo que sería lo habitual en los comentaristas modernos) falla a la hora de interpretar la dimensión global de la respuesta de Kant. Además, ese formalismo se desliza con mucha facilidad hacia una interpretación constructivista/ fenomenológica de la relación entre la mente y el mundo. La interpretación que propone Abela consiste en un realismo robusto al nivel empírico y que pretende ser justificado al nivel transcendental.

---

of epistemic conditions" (Allison, 2004, 19). La prioridad de las condiciones formales de la síntesis serían vistas por Allison como una forma de aislar un cierto realismo empírico a partir de los modelos constructivistas y fenomenológicos que el idealismo empírico introduce. Pero Allison destaca también la conexión interna que Kant establece entre las estructuras formales de la cognición humana y la naturaleza de los objetos empíricos, que es crucial en la explicación de Kant sobre la posibilidad del conocimiento empírico; las formas de la intuición y el rol del juicio serían características constitutivas de la representación objetiva: "the defining characteristic of transcendental idealism … is that the cognitive structure of the human mind is viewed as the source of certain conditions which must be met by anything that is to be represented as an object … The point to be emphasized is that this 'changed point of view' [Copernican turn] brings with a radically new conception of an object. An object is now to be understood as whatever conforms to the mind 's conditions (both sensible and intellectual) for the representation of it as an object. This new conception of an object, which is the correlate of the conception of an epistemic condition, is the major outcome of Kant's so called Copernican revolution" (Allison, 2004, 29-30). Sin embargo, para Abella, la posibilidad de que Kant esté señalando algo más que una versión reforzada del paradigma constructivista queda oscurecida por un enfoque exclusivo en lo formal. Para Abela la interpretación de Allison incurre en este fallo: "Allison's approach invites a type of form-geared constructivism: an architectonically well grounded construction no doubt, but a subject-to-object, inner-outer constructivism nonetheless" (Abela, 2002, 40). Abela sostiene que la afirmación de Allison de que el principio central que está detrás de experimento Copernicano es una identificación de la objetividad con las condiciones de la cognición humana, es sin duda correcto e identifica el punto central sobre el que pende la revolución Copernicana. Pero para él "the mistake comes in reducing this rich starting point to a narrow conception of the relation between mind and world … the problems comes with a refusal to take the fine step: extracting Kant's account from the (implicitly accepted) Cartesian framework" (Abela, 2002, 38). Así, para Allison "I wish simply to note that behind … Kant's formal idealism, lies a principle that is implicit in the *Critique* as a whole, but is nowhere made fully explicit: that whatever is necessary for the representation or experience of something as an object, that is, whatever is required for the recognition or picking out of what is 'objective' in our experience, must reflect the cognitive structure of the mind (its manner of representing) rather than the nature of the object as it is in itself. To claim otherwise is to assume that the mind came somehow access to an object … independently of the very elements that have been stipulated to be the conditions of the possibility of doing this in the first place. This involves an obvious contradiction" (Allison, 2004, 27). Guyer indica que "the contradiction is plausible only on the (question-begging) assumption of a *substantive premise* that an epistemic condition necessarily represents the structure of the epistemic subject *instead* of the structure of the object of knowledge" (Guyer, 1987, 339). Abela, aunque comparte algunas críticas de Guyer al enfoque de Allison, concuerda con Allison en privilegiar las condiciones epistémicas sobre los requerimientos ontológicos: "The Copernican revolution turns on this hinge" (Abela, 2002, 38). Sin embargo, insiste en que el cambio Copernicano al modelo epistémico Cartesiano intenta poner en cuestión *más que* la negación empiricista del rol de los conceptos *a priori* y las formas de la intuición. "The priority Kant assigns to judgement is, on my view, intended to banish the idea of *any* epistemic intermediary between belief and the world … the possibility that Kant signalling more than a buttressed version of the constructivist paradigm is obscured by a focus on the formal … The appeal to formal features as the primary differentiating aspect of Kant's challenge may (unfortunately) serve to conceal the lingering presence of the Cartesian framework" (Abela, 2002, 35). En la importancia que Abela otorga al carácter orientado-al-objeto en la percepción, observa una estrecha coincidencia entre los planteamientos de Kant y la moderna psicología empírica desarrollada por J.J. Gibson (1979, 239) y sus seguidores, y que opera sobre una investigación empírica de la *percepción visual*. Nuestra conexión cognitiva con el mundo sería directa (en base a relaciones objetivas entre superficies, texturas, sombras, oclusiones, etc) más que un proceso inferencial de estimulaciones sensoriales de bajo nivel. "I regard Gibson's attack on the role of the given as similar in spirit to Kant's own attack on the mediated epistemological relation between mind and world enforced by empiricism" (Abela, 2002, 36).

3.2.- Realismo al nivel empírico.

Una adecuada comprensión de la aproximación de Kant a las condiciones necesarias para la representación requiere dejar abierto un rol para el objeto empírico[105]. Y esta es la principal discrepancia de Abela con otros autores como Allison: "Whatever is required for the recognition or picking out of what is 'objective' in our experience must reflect the cognitive structure of the mind (its manner of representing) rather than the nature of the object in itself" (Allison, 2004, 27). Afirmación que Abela considera una medio-verdad. Para él, aunque sin la *unidad sintética de la apercepción*, sin las *formas de la intuición* y sin los *modos del juicio* está claro que no podría haber ningún tipo de representación y, aunque también afirma que no es necesario ningún conocimiento de un objeto noumenal, recalca sin embargo el rol que Kant atribuye a "la unidad en el objeto empírico", "la afinidad en la multiplicidad de las apariencias", "la conexión dirigida por reglas en la multiplicidad de las apariencias" que serían centrales en el análisis de Kant y que no pueden ser capturadas apelando a la actividad de síntesis del sujeto restringida a sus características formales: "It is the *experience of objects*, not sensations that are synthesized into objects, that figures in the foreground of the analysis" (Abela, 2002, 43). La inclusión de un rol para el objeto empírico introduce varias cuestiones abiertas acerca de cómo tratar el *objeto-en sí-mismo* empírico sin reducirlo a determinaciones internas. Para Kant:

> "Denn wir haben es doch nur mit unsern Vorstellungen zu tun; wie Dinge an sich selbst (ohne Rücksicht auf Vorstellungen, dadurch sie uns affizieren) sein mögen, ist gänzlich auβer unser Erkenntnissphäre. Ob nun gleich die Erscheinungen nicht Dinge an sich selbst, und gleichwohl doch das einzige sind, was uns zur Erkenntnis gegeben werden kann, so soll ich anzeigen, was die Mannigfaltigen an den Erscheinungen selbst für eine Verbindung in der Zeit auskomme, indessen dass die Vorstellung dieselben in der Apprehension jederzeit sukzessiv ist (…) was verstehe ich also unter der Frage: wie das Mannigfaltige in der Erscheinung selbst (die doch nichts an sich selbst ist) verbunden sein möge?" (B235-236)[106].

En el primer enunciado Kant remarca que el conocimiento no se puede extender a los objetos noumenales, en el segundo deja cuidadosamente abierto un espacio epistemológico para el rol de un objeto empírico, en el tercero plantea la cuestión decisiva de las *Analogías*, esto es, si las apariencias no son *cosas en sí mismas* ¿qué sentido podemos dar a la idea de una relación inherente en las apariencias independiente de nuestra forma particular de conectar con ellas? La respuesta será la tarea central de las *Analogías* y particularmente de la *primera Analogía* (Analogía de la substancia)[107]. Para Abela (2002, 41): "Kant's response, as

---

[105] Gran parte de la estrategia desarrollada en la obra de Abela se basa en sustituir la interpretación subjetivo/objetivo de la representación por una explicación basada en la contraposición indeterminado/determinado (Abela, 2002, 9). Otros intentos previos en esta misma línea, y en los que se apoya el autor, son las obras de Graham Bird y de Gordon Nagel (Bird, 1962), (Nagel, 1983).

[106] "For we have to do only with our representations; how things in themselves may be (without regard to representations through which they affect us) is entirely beyond our cognitive sphere. Now although the appearances are not things in themselves, and nevertheless are the only thing that can be given to us for cognition, I still have to show what sort of combination in time pertains to the manifold in the appearances itself (…) what do I understand by the question, how the manifold may be combined in the appearance itself (which is yet nothing in itself)?" (B235-236), (GW). "…Ya que sólo tenemos que habérnoslas con nuestras representaciones. Cómo sean las cosas (con independencia de las representaciones mediante las cuales nos afectan) es algo que se halla completamente fuera de nuestra esfera de conocimiento. Aunque los fenómenos no sean cosas en sí mismas, son lo único que nos puede ser dado a conocer. Por ello tengo que mostrar qué clase de enlace temporal corresponde a la diversidad de los mismos, ya que la representación de tal diversidad en la aprehensión es siempre sucesiva (…) ¿qué entiendo, pues, por la cuestión: cómo estará ligada la diversidad en el fenómeno mismo (que no es nada en sí)?" (B235-236), (PR).

[107] Kant sostiene en la "Primera analogía de la experiencia" (*KrV*, A 182, B 225 y ss.), que concierne a la noción de *sustancia*, que nuestros juicios sólo establecen una analogía entre su estructura lógica y la estructura del

we shall see, is designed to highlight the role assigned to objective truth-conditions, and the temporal /spatial structure of the manifold of appearances, as necessary conditions for the possibility of representation". El siguiente pasaje describe el enfoque general de la aproximación de Kant:

> "Hier wird das, was in der sukzessiven Apprehension liegt, als Vorstellung, die Erscheinung aber, die mir gegeben ist, ohnerachtet sie nichts weiter als ein Inbegriff dieser Vorstellungen ist, als der Gegenstand derselben betrachtet, mit welchem mein Begriff, den ich aus der Vorstellungen der Apprehension ziehe zusammenstimmen soll. Man sieht bald, dass, weil Übereinstimmung der Erkenntnis mit dem Objekt Wahrheit ist, hier nur nach den formalen Bedingungen der empirischen Wahrheit gefragt werden kann, und Erscheinung, im Gegenverhältnis mit den Vorstellungen der Apprehension, nur dadurch als das davon unterschiedene Objekt derselben könne vorgestellt werden, wenn sie unter einer Regel steht, welche sie von jeder andern Apprehension unterscheidet, und eine Art der Verbindung des Mannigfaltigen notwendig macht. Dasjenige an der Erscheinung, was die Bedingung dieser notwendigen Regel der Apprehension enthält, ist das Objekt" (B236)[108].

---

mundo, y que no es posible ir más allá. Si formulamos un juicio del tipo "S es P", en donde S es un objeto y P una propiedad definitoria, entonces hemos de admitir que pensamos la relación entre la respectivas referencias de S y P en el mundo real de forma análoga a la relación lógica entre S y P en los juicios categóricos (del tipo "S es P"). Una consecuencia de esta analogía es que sólo podemos definir S mediante propiedades (P) del mundo de la experiencia posible, pues otras propiedades no son definibles y/o cognoscibles. Por lo tanto, los predicados/propiedades (P) de tipo "esencial" (metafísicos), y por tanto no contingentes o empíricos, han de quedar excluidos, ya que su justificación sólo sería posible mediante otro enunciado que dijera qué es P (en un enunciado del tipo "P es Q"), etc, lo cual desencadena un regreso al infinito. Kant concluye que la sustancia, es decir, la cosa en sí, *es* (para nosotros) sus predicados, y éstos nunca son predicados esenciales, sino espacio-temporales. En resumen: conocemos del en-si (sustancia) lo que podamos decir en predicados no-esenciales, sino empíricos, y éstos sólo describen fenómenos, no esencias o númenos. Por eso los juicios definitorios o apodícticos (S es P) quedan desprovistos de contenido meta-físico y, por tanto, la noción de sustancia, sin dejar de ser realista, pierde toda carga esencialista. Sobre esta implicación antiesencialista de la *primera analogía de la experiencia* cfr. (Pacho, 1977).

[108] "Here that which lies in the successive apprehension is considered as representation, but the appearance that is given to me, in spite of the fact that it is nothing more than a sum of these representations, is considered as their object, with which my concept, which I draw from the representation of apprehension, is to agree. One quickly sees that, since the agreement of conditions with the object is truth, only the formal conditions of empirical truth can be inquired after here, and appearance, in contradistinction to representations of apprehension, can thereby only be represented as the object that is distinct from them if it stands under a rule that distinguishes it from every other apprehension, and makes one way of combining the manifold necessary. That in the appearance which contains the condition of this necessary rule of apprehension is the object" (B236), (GW). "That which lies in the successive apprehension is here viewed as representation, while the appearance which is given to me, notwithstanding that it is nothing but the sum of these representations, is viewed as their object; and my concept, which I derive from the representations of apprehension, has to agree with it. Since truth consists in the agreement of knowledge with the object, it will at once be seen that we can here enquire only regarding the formal conditions of empirical truth, and that appearance, in contradistinction to the representations of apprehension, can be represented as an object distinct from them only if it stands under a rule which distinguishes it from very other apprehension and necessitates some one particular mode of connection of the manifold. The object is *that* in the appearance which contains the condition of this necessary rule of apprehension" (B236), (NKS). "Aquí se considera lo que se halla en la aprehensión sucesiva como representación, mientras que el fenómeno que me es dado se considera, a pesar de no ser más que el conjunto de estas representaciones, como el objeto de las mismas, objeto con el que tiene que concordar el concepto que extraigo de las representaciones de la aprehensión. Como la concordancia del conocimiento con el objeto constituye la verdad, se aprecia enseguida que sólo podemos preguntar aquí por las condiciones formales de la verdad empírica, y que el fenómeno, a diferencia de las representaciones de la aprehensión, sólo puede ser representado como objeto distinto de ellas si se halla sometido a una regla que lo diferencie de toda otra aprehensión y que imponga una forma de combinación de lo diverso. Aquello que contiene en el fenómeno la condición de esta regla necesaria de la aprehensión es el objeto" (B236), (PR). "Aquí lo que está en la aprehensión sucesiva es considerado como representación; y el fenómeno, que me es dado, aún cuando no es más que un conjunto de esas

Se observa que Kant distingue claramente la representación de un objeto del objeto en sí mismo[109], arguyendo que la noción de combinación *en el objeto*, y no meramente en la aprehensión del objeto, es representable para nosotros en términos de la idea de un orden en las apariencias en cuanto exigible en "eine Art der Verbindung des Mannigfaltigen". O sea, que si la distinción debe ser hecha entre las representaciones internas de un objeto y la representación del objeto empírico mismo en el espacio y en el tiempo, debemos representar las apariencias como teniendo unas determinadas relaciones temporales y espaciales independientes del sucesivo carácter de nuestra idiosincrática manera de percibir ese objeto o suceso. Además, para que la intuición indeterminada pueda ser la base de la representación de un dominio objetivo, deben existir suficientes limitaciones en la multiplicidad del significado (la multiplicidad de las apariencias) para hacer posible una representación única. Los *principios de substancia*, *conexión causal* y *determinación causal recíproca* (las *Analogías*) serán los argumentos de Kant para esa necesaria restricción regida por reglas. Los siguientes pasajes demuestran que Kant aspiraba a mucho más que a una forma modificada de idealismo empírico. En cada pasaje Kant repudia la *conexión mediada* que impone el modelo epistémico de cognición Cartesiano:

> (i) "Alle äuβere Wahrnehmung also beweiset unmittelbar etwas Wirkliche im Raume, oder ist vielmehr das Wirkliche selbst und in so fern ist also der empirische Realismus auβer Zweifel, d.i. es korrespondiert unseren äuβeren Anschauungen etwas Wirkliches im Raume" (A375)[110].
>
> (ii) "Nun ist das Bewusstsein in der Zeit mit dem Bewusstsein der Möglichkeit dieser Zeitbestimmung notwendig verbunden: Also ist es auch mit der Existenz der Dinge auβer mir, als Bedingung der Zeitbestimmung, notwendig verbunden; d.i. das Bewusstsein meines eigenen Daseins ist zugleich ein unmittelbares Bewusstsein des Daseins anderer Dinge auβer mir" (B276)[111].
>
> (iii) "Der Idealist (ich verstehe den materialen)…, Dieser [der Idealist] nahm an, dass die einzige unmittelbare Erfahrung die innere sei, und daraus auf äuβere Dinge nur geschlossen

---

representaciones, es considerado como el objeto de ellas, con el cual debe concordar mi concepto, que yo saco de las representaciones de la aprehensión. Pronto se ve que, como la verdad es la concordancia del conocimiento con el objeto, sólo cabe preguntar aquí por las condiciones formales de la verdad empírica, y el fenómeno, contrapuesto a las representaciones de la aprehensión, no puede ser representado como objeto de éstas, distinto sin embargo de ellas, más que si esta aprehensión está sometida a una regla que la distingue de toda otra aprehensión y hace necesaria una especie de enlace de lo múltiple. Lo que, en el fenómeno, contiene la condición de esa regla necesaria de la aprehensión, es el objeto" (B236), (MGM, pág. 221-222).

[109] La representación se hace mediante conceptos y en juicios (enunciados) que enlazan conceptos, y los juicios tienen una "forma" –hay según Kant cuatro tipos o formas de juicio– bajo cuya "analogía" nos representamos el mundo. Esto hace más inteligible la distinción entre representación y objeto en sí, pues sólo conocemos del objeto su representación bajo las formas de los juicios y su proyección analógica sobre el mundo (la reglas de las "analogías de la experiencia" se completan con las anticipaciones, los esquemas de la percepción y los principios del entendimiento). También explica esa preeminencia de la representación la afirmación kantiana de que los objetos (del conocimiento) son trivialmente objetos constituidos. Para Kant, la expresión "objeto del conocimiento" es redundante, pues lo que no se ha conocido no está objetivado por nuestra mente y, por lo tanto aún no es "objeto", sino un supuesto en-sí o *númenon* que, por definición, está fuera de nuestro conocimiento efectivo. Todo objeto es, en sentido estricto, un producto (no arbitrario) de actos cognitivos que, suponemos, tienen una relación reglada con el mundo. La *KrV* pretende reconstruir las reglas de esa relación.

[110] (i) "Every outer perception therefore immediately proves something real in space, or rather is itself the real; to that extent, empirical realism is beyond doubt, i.e. to our outer intuitions there corresponds something real in space" (A375), (GW).

[111] (ii) "Consciousness in time is necessarily combined with the consciousness of the possibility of this time-determination: Therefore it is also necessarily combined with the existence of the things outside me, as the condition for time-determination; i.e., the consciousness of my own existence is at the same time an immediate consciousness of the existence of other things outside me" (B276), (GW).

werde, aber, wie allemal, wenn man aus gegebenen Wirkungen auf bestimmte Ursachen schließt, nur unzuverlässig, weil auch in uns selbst die Ursache der Vorstellungen liegen kann, die wir äußeren Dingen, vielleicht fälsisch, zuschreiben. Allein hier wird beweisen, dass äußere Erfahrung eigentlich unmittelbare sei, dass nur vermittelst ihrer … innere Erfahrung möglich sei" (B276-277)[112].

(iv) "Also ist der transzendentale Idealist ein empirischer Realist und gestehet der Materie, als Erscheinung, eine Wirklichkeit zu, die nicht geschlossen werden darf, sondern unmittelbar wahrgenommen wird. Dagegen kommt der transzendentale Realismus notwendig in Verlegenheit, und sieht sich genötigt , dem empirischen Idealismus Platz einzuräumen …" (A371)[113].

El pasaje (B276-277) es quizás la expresión más clara del ataque de Kant al paradigma cognitivo cartesiano. Aquí Kant hace explícito cómo el cambio del paradigma epistémico revierte la imagen interpretativa estándar de la cognición. Desde el punto de vista de Kant, la cognición y su objeto están inmediatamente conectados, y sólo a través de esa relación es posible la experiencia interna. La referencia a un objeto no es, como creía Hume, un aspecto derivativo de la cognición en el que caemos naturalmente "whenever the mind follows its first and most natural tendency"[114]. Abela (2002, 192) concluye que: "Sensations are not vehicles for truth-values, beliefs are. The judgement that we are experiencing a sensation is a belief whose determination is directly tied to the force of our other beliefs. There is no primitive point of epistemic contact between belief and sensation that could fulfil the kind of informative, evidential and justificatory work that the empirical idealist appeal to sensation requires. Empirical realism, by contrast, requires that we include immediate reference to the world of objects and events in orden to fix internal mental content".

En todos los pasajes arriba mencionados, el énfasis está dirigido contra la idea de que el conocimiento es posible sin una referencia inmediata a un objeto y también asume que el juicio provee un determinado contenido interno. Se puede resumir en su afirmación de que "dass äußere Erfahrung eigentlich unmittelbare sei, dass nur vermittelst ihrer … innere

---

[112] (iii) "Idealism [material] assumed that the only immediate experience is inner experience, and that from it we can only *infer* outer things –and this, moreover, only in an untrustworthy manner, as in all cases where we are inferring from given effects to determinate causes. In this particular case, the cause of the representations, which we ascribe, perhaps falsely, to outer things, may lie in ourselves. But in the above proof it has bee shown that outer experience is really immediate, and that only by means of it is inner experience … possible" (B276 -277), (NKS). "Idealism [material] assumed that the only immediate experience is inner experience, that outer things could be *inferred*, but, as in any case in which one infers from given effects to *determinate* causes, only unreliably … Yet here it is proved that outer experience is really immediate, that only by means of it is possible … inner experience" (B276 -277), (GW). "El idealismo (en el sentido del idealismo *material*) …suponía que la única experiencia inmediata era la interna y que sólo a partir de ésta se *inferían* las cosas exteriores. Pero, tal como ocurre cuando se deducen causas *determinadas* partiendo de efectos dados, la deducción es insegura, ya que las representaciones que nosotros suponemos –acaso erróneamente- causadas por cosas exteriores pueden tener su causa en nosotros mismos. Lo que se demuestra en la prueba anterior es que en realidad la experiencia externa es inmediata, que sólo a través de ella es posible … la experiencia interna" (B276 -277), (PR). "El idealismo [material, empírico o psicológico] admitía que la única experiencia inmediata es la interna y, por tanto, que las cosas exteriores son sólo *inferidas*, pero de un modo incierto, como siempre que de efectos dados se concluye a causas *determinadas*, porque la causa de las representaciones puede estar también en nosotros mismos, quienes, acaso falsamente, las atribuimos a cosas exteriores. Pero aquí se demuestra que la experiencia externa es propiamente inmediata, que sólo por medio de ella es posible … la experiencia interna" (B276 -277), (MGM, pág. 236).

[113] (iv) "The transcendental idealist is an empirical realist, and grants to matter, as appearance, a reality which need not to be inferred, but is immediately perceived. In contrast, transcendental realism necessarily falls into embarrassment, and finds itself required to give way to empirical idealism …" (A371), (GW).

[114] Hume, *Treatise*, bk.I, part IV, sect. II.

Erfahrung möglich sei" (B276-277), rompiendo así sustancialmente con la tradición epistemológica recibida[115] :

> "Kants attack on the transcendental realistic 'giveness' model anticipates 150 years contemporary criticisms of empiricism. The Copernican experiment is intended to put the Cartesian image of cognition on its head. Private experience is not the domain of primitively given simples. While a subject's experience is idiosyncratic and partial, it is always object oriented …By drawing attention not merely to the formal aspect of transcendental idealism but to the object-involving character of Kant's account of mental content, I have suggested that empirical realism signals a more radical rupture with the received epistemological tradition than has been previously acknowledged, even by sympathetic commentators" (Abela, 2002, 44).

A partir de aquí, desarrolla una argumentación que dibuja un realismo robusto en la aproximación cognitiva kantiana basado en cinco principios (Abela, 2002, 25), (Abela, 2002, 79), (Abela, 2002, 209), (Abela, 2002, 288):

1.-*Principio de Representación*. Toda representación de objetos se remite directamente a la actividad del juicio.

2.-*Principio de Experiencia*. La experiencia está dirigida, y restringida, a un mundo inherentemente causalmente estructurado.

3.-*Principio de Conocimiento Empírico*. El conocimiento se remite solamente a la experiencia y a su posible avance.

4.-*Principio de la Sistematicidad de la Naturaleza*. Las inherentes y sistemáticas relaciones causales de el mundo pueden transcender a nuestra idiosincrática experiencia de él.

5.-*Principio Anti-escéptico*. La fuerza colectiva del conjunto de nuestra creencias acerca del mundo empírico no puede ser radicalmente falsa.

El primer principio es interpretado en un amplio contexto sobre el juicio que incluye consideraciones objetivas de verdad y referencia. El segundo y tercer principio se relacionan con el carácter holístico de la representación, que sería otra característica fundamental de la aproximación kantiana. Estos principios reafirmarían que nada al nivel empírico fuera de la estructura del juicio puede ser incluido como un elemento evidencial o determinante (y esto sería en mi opinión lo más determinante en la lectura de Abela, es decir, el rol determinante que atribuye al juicio en el proceso cognitivo). El cuarto principio afirmaría que, puesto que las condiciones de verdad son desplegadas espontáneamente en el surgimiento original de una determinada representación, no hay forma de excluir el caso de que las relaciones así atribuidas puedan transcender a nuestras capacidades de verificación. En el quinto principio, el rechazo radical del escepticismo se basa en la reivindicación de que verdad y referencia son precondiciones de una determinada representación. La independencia de las creencias y la verdad se extendería hasta la posibilidad de que nuestras creencias puedan ser falsas marginalmente, pero la idea de que el conjunto completo de nuestras creencias generadas por una estructura general de verdad puedan ser falsas en bloque, es rechazada como ininteligible:

> "The epistemic gap between belief and reality created by the Cartesian model has no place in the Copernican alternative that prioritizes judgment and its object-involving conditions" (Abela, 2002, 80).

---

[115] Pippin coincide en este análisis con Abela: "Kant will argue in great detail that there *cannot* be a determinate awareness of 'unity' in sensation, that there must be the judgement or synthesis in order for such awareness to occur … this account of sensation as 'matter' is a crucial element in Kant's criticism of any empiricist 'foundacionalism'. It is, after all, his critic of 'the myth of the given' …" (Pippin, 1982, 28).

3.3.- Otra conexión contemporánea: Quine, Davidson, MacDowell.

Hemos mencionado varias veces en este trabajo las conexiones puntuales que surgían entre las posiciones epistemológicas de Kant y los planteamientos de muchos autores contemporáneos y con los planteamientos de las modernas ciencias cognitivas, según la lectura de los autores aquí estudiados. Este aspecto es especialmente claro en la lectura de Abela:

> "The new epistemic framework Kant is signalling with the Priority-of-Judgement approach has, I believe, a surprisingly modern quality. In contemporary philosophy of mind and philosophy of language, the work of Donald Davidson and John McDowell has a bearing on Kant's assault on the empiricism of his day. In particular, one finds a striking parallel between the contemporary of the sensation-to-belief model and Kant's own repudiation of the epistemological model endorsed by empirical idealists" (Abela, 2002, 54).

> "It is also shown that Kant's judgement-oriented approach challenges, in a rather modern manner, Cartesian-styled first-person accounts of content" (Abela, 2002, 9).

> "This discussion, with its appeal to contemporary epistemological themes developed by Quine, Davidson, and McDowell, will serve to highlight the very modern character of Kant's approach: priorizing considerations of empirical truth over an empirical grounding role for 'the given'" (Abela, 2002, 45).

Davidson, como Kant, cuestiona el supuesto epistémico básico del empirismo clásico: que las creencias pueden ser identificadas con las simples sensaciones usando un argumento similar al que Abela sostiene que Kant utiliza contra el idealismo empírico[116]. La sensación por sí misma sin referencia a consideraciones que involucren un objeto no pueden, según Davidson, "support any inference to an objective world". La mera sensación es profundamente inadecuada como base evidencial de la creencia. En el corazón de la argumentación de Davidson está un cambio en la idea de inspiración cartesiana de que se podría caracterizar la situación epistémica básica en términos de conexión segura entre las puras *determinaciones* internas (sensaciones) y nuestras creencias acerca del mundo externo. Además, como Kant, Davidson resalta en su argumento que no es la mera sensación, sino la aprehensión de la sensación –la *creencia* de que uno está teniendo una sensación- lo que constituye el límite más externo del espectro epistémico[117]. Según Abela (2002, 76), "the following passage from Davidson is a powerful statement of the modern analysis that runs roughly parallel to the Priority-of-Judgement interpretation of empirical realism I favour. Davidson's assault on the contemporary empiricism view captures nicely Kant's attack on the

---

[116] "The simplest idea is to identify certain beliefs with sensations. Thus Hume seems not to have distinguished between perceiving a green spot and perceiving that a spot is green. (An ambiguity in the word 'idea' was a great help here) Other philosophers noted Hume's confusion, but tried to attain the same results by reducing the gap between perception and judgement to zero by attempting to formulate judgments that do not go beyond stating that the perception or sensation or presentation exists (whatever that may mean). Such theories do not justify beliefs on the basis of sensations, but try to justify certain beliefs by claiming that the have exactly the same epistemic content as a sensation. They are two difficulties with such a view: first, if the basic beliefs do not exceed in content the corresponding sensation they cannot support any inference to an objective world; and second, there are no such beliefs." (Davidson, 1986, 310).

[117] "Suppose we say that sensations themselves, verbalized or not, justify beliefs that go beyond what is given in sensation. So, under certain conditions, having the sensation of seeing a green light flashing may justify the belief that a green light is flashing. The problem is to see how the sensation justifies the belief. Of course if someone has the sensation of seeing a green light flashing, it is likely, under certain circumstances, that a green light is flashing. *We* can say this, since we know of this sensation, but *he* can't say it, since we are supposing he is justified without having to depend on *believing* he has the sensation. Suppose he believed he didn't have the sensation. Would the sensation still justify him in the belief in an objective flashing green light?" (Davidson, 1986, 311).

pre-critical epistemic paradigm"[118]. Tanto en el análisis de Kant como en el de Davidson el juicio es la base fundamental para la representación. Y en ambos casos el juicio impondría una relación inmediata, vía condiciones-de-verdad, entre mente y naturaleza. La verdad –"la concordancia del conocimiento con su objeto"- es *el* concepto epistémico primitivo, tal y como Davidson indica:

> "It should be clear that I do not hope to define truth in terms of coherence and belief. Truth is beautiful transparent compared to belief and coherence, and I take it as primitive" (Davidson, 1986, 398).

La aproximación de Davidson compartiría con el realismo empírico de Kant el intento de elaborar una tercera posibilidad entre el realismo transcendental y el moderno anti-realismo, aunque Davidson piensa que los enfoques semánticos serían prioritarios a las cuestiones epistémicas, dando lugar a una aproximación esencialmente menos potente que la de Kant:

> "However, as a vehicle for explicating empirical realism, Davidson's semantic approach is too remote. Kant's theory of representation is far broader and more detailed than Davidson's account of radical interpretation. Davidson's analysis begin too far down the epistemic road, with, for example, modes of judgement, and temporal and spatial structure already in place. Kant's account of representation begins with more general problems and concerns" (Abela, 2002, 79).

McDowell enfoca la crítica al empiricismo abordando el mismo conjunto de problemas y con argumentos parecidos a los de Davidson, aunque discrepa en la forma de tratar algunas consecuencias. Así, realiza una crítica al rol epistemológico de *lo dado* en cuanto que no puede servir como elemento justificatorio o evidencial en relación con la creencia[119] . Señala que el empiricismo, de un lado, requiere *lo dado* como un ingrediente exógeno fundando y justificando la esfera de lo conceptual en algo al margen de lo conceptual y, de otro lado, ese mismo recurso a *lo dado* aborta el rol que se le requiere porque impide el acceso cognitivo al mundo a partir del dominio en el que la justificación, la información y la evidencia operan, es decir, desde el dominio de la creencia[120]. Así, la primera línea de evidencia y justificación no sería la mera sensación sino las creencias que emergen al interactuar los objetos empíricos

---

[118] "The approach to the problem of justification we have been tracing must be wrong. We have been trying to see in this way: a person has all his beliefs about the world –that is, all his beliefs. How can he tell if they are true, or apt to be true? Only, we have been assuming, by connecting his beliefs to the world, confronting certains of his beliefs with the deliverances of the senses one by one, or perhaps confronting the totality of his beliefs with the tribunal of experience. No such confrontation makes sense, for of course we can't get outside our skins to find out what is causing the internal happenings of which we are aware. Introducing intermediate steps or entities into the causal chain, like sensations or observations, serves only to make the epistemological problem more obvious …The moral is obvious. Since we can't swear intermediates to truthfulness, we should allow no intermediaries between our beliefs and their objects in the world. Of course there are causal intermediaries. What we must guard against are epistemic intermediaries" (Davidson, 1986, 312).

[119] "To make sense to the idea of a mental state's or episode's being directed towards the world, in the way in which, say a belief or judgement is, we need to put the state or episode in a normative context. A belief or judgement to the effect that things are thus and so –a belief or judgement whose content (as we say) in that things are thus and so- must be a posture or stance that is correctly or incorrectly adopted according to whether or not things are indeed thus and so" (McDowell, 1994, xi-xii).

[120] "The idea of the Given is the idea that the space of reasons, the space of justifications or warrants, extends more widely than the conceptual sphere. The extra extent of the space of reasons is supposed to allow it to incorporate non-conceptual impacts from outside the realm of thought. But we cannot really understand the relations in virtue of which a judgement is warranted except as relations within the space of concepts: relations such as implication or probabilification, which hold between potential exercises of conceptual capacities. The attempt to extend the scope of justification relations outside the conceptual sphere cannot do what it is supposed to do" (McDowell, 1994, 7).

con nuestros órganos sensoriales. Estas creencias, como todas las creencias, actúan en roles justificatorios en el contexto de los conjuntos de condiciones de verdad que enmarcan el contexto perceptivo en el que es correcto creer que uno está experimentando una sensación particular. A partir de aquí, McDowell desarrolla un programa positivo que, según Abela, es muy similar a la lectura de Kant que él realiza en esta obra que estamos estudiando. En particular, McDowell mantiene que:

> "if we restrict ourselves to the standpoint of experience itself, what we find in Kant is precisely the picture I have been recommending: a picture in which reality is not located outside a boundary that enclosed the conceptual sphere" (McDowell, 1994, 41).

McDowell recalca que hay que enfatizar el hecho de que las mismas intuiciones empíricas involucran ya una carga conceptual[121] . Sin embargo considera que Kant, en última instancia, no estaba totalmente divorciado de la tradición empiricista, en concordancia con los análisis de Strawson, y que para Kant la realidad noumenal[122] sostendría de alguna forma los juicios de la experiencia, atribuyéndole la idea de que "something is Given in experience, from outside the activity of shaping world-views" (McDowell, 1994, 135). Para Abela (2002, 58), hay una evolución en el pensamiento de McDowell al respecto, acercándole aún más a la lectura de Kant de él mismo: "I believe that the motivating spirit behind *Mind and World*, ironically, comes close to a twentieth-century statement of what Kant *did* say in the *Critique*. This irony is perhaps felt less keenly in McDowell's more recent statements on Kant. In the 1997 'Woodbridges Lectures' (*Journal of Philosophy*, 95/9, Sept. 1998) McDowell acknowledges that he had a (mistaken) 'two-world' interpretation of Kant in place in *Mind and World* (p.469 n.23). In this lecture he also acknowledges that his account of the role of Kantian intuition in *Mind and World* was faulty (p.464, particularly n.15). The view that emerges from McDowell's most recent work is closer to the interpretation of intuition, and its relation to objects, that I advance in Chapter 2". La recepción que ha tenido, tanto en la epistemología como en la filosofía del lenguaje, el asalto de Davidson y McDowell a la viabilidad de asignar un rol epistémico como intermediario a la sensación, habría sido decididamente mixto. "I suspect that this is due, in part, to a reluctance to depart from the familiar and entrenched epistemic framework. Anything outside this tradition seems misplaced" (Abela, 2002, 58).

Ya se han señalado en varios puntos de este trabajo algunas conexiones que, a mi juicio, existen entre los planteamientos de Kant y los de Quine. Philip Kitcher (1982) defendió en su trabajo *How Kant almost wrote the 'Two Dogmas of Empiricism'* una conexión muy general. Para Abela (2002, 65), lejos de ver a Kant como opuesto al tipo de holismo contemporáneo ofrecido por ejemplo por Quine, la teoría de la representación de Kant debería verse como una total anticipación de los enfoques contemporáneos[123], solamente que llevando las consecuencias un punto más allá de lo que lo hace Quine.

---

[121] Abela sostiene la misma postura (Abela, 2002, 57), (Abela, 2002, 81 y ss). "McDowells account of the character of conceptual content has a strong affinity with my reading of the role of the Axioms of Intuition in the *Critique*" (Abela, 2002, 58).

[122] Ya vimos que el análisis de Prauss refuta sólidamente esta perspectiva.

[123] Davidson sostiene que la teoría de Quine de la representación es de alguna manera una forma residual de empiricismo. Esta opinión podría parecer extraña teniendo en cuenta que los "Two Dogmas of Empiricism" de Quine es el trabajo standard del ataque contemporáneo al empiricismo. El tema concreto que Davidson ataca es el rol que Quine asigna a los enunciados observacionales, argumentando que el rechazo de Quine a relajar el presupuesto epistémico de que una creencia justificada en última instancia involucra una apelación a lo sensorialmente *dado*, aunque admite que Quine, a diferencia de los positivistas y los verificacionistas, no mantiene que la conexión entre la multiplicidad sensorial y el mundo de los objetos se construya por una correspondencia biunívoca. La crítica de Davidson señala más bien que Quine fallaría al no eliminar

3.4.-La respuesta de Kant: el rol del Juicio.

En la lectura realizada por Abela (2002, 60-66), y que él mismo denomina *The Priority-of-Judgement Interpretation*, la respuesta de Kant se articula en torno al rol del juicio. El análisis de Kant debería entenderse en el sentido de que la adquisición de conocimientos es un proceso abierto en el que nos movemos desde un punto inicial de *determinación* mal definida hacia mayores niveles de representación *determinada*[124]. Como hemos señalado anteriormente, un precedente importante de esta lectura se encuentra en Graham Bird. Bird señala a este respecto que:

> "Kant speaks generally of what is given to the senses as indeterminate until the understanding is able to determinate, or discriminate between, what is perceived. Similarly, he speaks of 'determining' or 'determination' as the specific contribution which the understanding makes to knowledge (B157-158, B168,169) (…) The familiar empiricist distinction between what is strictly given and what is inferred or constructed from this basic material, is not exactly the contrast Kant has in mind (…) Kant's construction is not 'vertical', from low level to higher level descriptions, but 'horizontal', from an indiscriminate manifold of sense to discriminated items within it" (Bird, 1962, 57).

El análisis de Kant adquiere más sentido si, efectivamente, sustituimos el esquema subjetivo/objetivo por el de indeterminado/determinado. Nuestras creencias acerca del mundo procederían a partir de una base inicialmente pobremente definida en el contexto de verdad de un juicio. Kant comienza cada una de las tres *Analogías* con una descripción que tiende a mostrar por qué no podemos modelar la situación epistémica en términos de una determinación subjetiva de las representaciones. Las consideraciones orientadas al objeto que Kant agrupa bajo la noción de "unidad en el objeto" se requieren para para una explicación tanto de un contenido conceptualmente determinado como para una estructura temporal objetiva. Las *Analogías* suministran los recursos conceptuales y temporales para ese necesario marco objetivo. En la *Deducción Transcendental* Kant introduce la aproximación indeterminado/determinado de el objeto de juicio (la apariencia) que debe ser enfocada como el sujeto de los predicados que le asignamos a través de nuestra experiencia sobre él. Cuando Kant introduce por primera vez en la *Estética* el concepto de *apariencia* lo describe como el "objeto indeterminado de una intuición empírica" (B34). Podemos ver la descripción de las apariencias como un "objeto indeterminado" en la forma de una posición lógica para las *todavía no descubiertas* propiedades del objeto empírico[125]. En la *Deducción*, Kant introduce

---

completamente la imagen empiricista de que de alguna forma la determinación de una creencia verdadera estaría ligada a la confrontación con algo totalmente al margen de la creencia, es decir, ligada a la simple sensación (Davidson, 1989, 162) (Davidson, 1986, 311-317). La respuesta de Quine en (Quine, 1993) y (Quine, 1996). Según Abela (2002, 75), "in this latter paper, Quine appears finally to have acknowledged Davidson's point. In this paper Quine admits that similarity in stimulus meaning (understood as similarity in nerve stimulation) cannot support the constitutive role of translation for the attribution of meaning. Nonetheless, Quine still appears to reject stubbornly the move to groundling radical interpretation entirely upon distal, rather than proximal, engagement".

[124] Ya hemos indicado anteriormente que un punto clave en la metodología de Abela consiste en sustituir la interpretación en base a la oposición subjetivo / objetivo por la de indeterminado / determinado (Abela, 2002, 9).

[125] La noción inicialmente difusa de "objeto indeterminado" puede clarificarse si tenemos en cuenta la explicación de Kant sobre el juicio empírico. En todo juicio sintético colocamos un sujeto lógico "x" que fundamenta la unidad de todos los posibles predicados que estén sintéticamente conectados con ese sujeto. así la referencia de Kant a un objeto indeterminado de un juicio empírico es un recordatorio de que la cognición empírica, si bien siempre parcial e incompleta, requiere, como una condición del juicio que haga la cognición posible, un sujeto lógico distinto de las determinaciones empíricas parciales. Así esta "x" sería el espacio lógico para la riqueza del objeto empírico. Nagel sugiere que se trataría de algo análogo a una expresión algebraica que debe ser resuelta gradualmente, en tanto y cuanto vamos atribuyendo más

la idea de *unidad-en-el objeto* en un contexto en el que distingue entre la noción de juicio y la noción empírica de asociación. Kant asegura que el juicio, que se expresa por un enunciado asertórico, afirma una relación necesaria entre representaciones, y eso incluso si se trata de juicios empíricos y, por tanto, contingentes en su origen:

> "So finde ich, dass ein Urteil nichts andres sei, als die Art, gegebene Erkenntnisse zur objektiven Einheit der Apperzeption zu bringen. Darauf zielt das Verhältniswörtchen ist in denselben … Denn dieses bezeichnet die Beziehung derselben auf die ursprüngliche Apperzeption und die notwendige Einheit derselben, wenn gleich das Urteil selbst empirisch, mithin zufällig ist, z. B„ die Körper sind schwer" (B142)[126].

Uno de los principales objetivos de la *Deducción* sería contrastar esta *aproximación-orientada-al juicio* con la la aproximación basada en la asociación del idealismo empírico. El juicio empírico tendría dos polos en la representación: un polo orientado al objeto que se explicaría por la idea de *unidad-en-el-objeto* que se desarrolla en el contexto de las *Analogías* y que no sólo no es explicado sino que es rechazado por Berkeley y Hume, y un polo orientado al sujeto, cuya actividad es esencial para la síntesis necesaria en todo juicio, y que se explicaría por la *unidad transcendental de la apercepción*. Pero ese polo objetivo sería esencial en la epistemología de Kant:

---

predicados al sujeto conforme obtenemos más experiencia del objeto: "We start with the object itself from our first encounter with it, when we have no detailed characterization of it. As experience progresses, we learn more and more about it. But the *it* –the empirical thing itself- confronts us from the outset. The empiricist describes us as starting with the heterogeneity of sensory particulars that are gradually unified. Kant describes us as starting with the unity of the object, its determinate character as yet unknown, to which subsequent experience brings detail and specify" (Nagel, 1983, 28). Kant explica esto claramente en las observaciones introductorias en las que distingue entre *juicios analíticos* y *juicios sintéticos*: "Dagegen ob ich schon in dem Begriff eines Körpers überhaupt das Prädikat der Schwere gar nicht einschliesβe, so bezeichnet *jener* doch *einen Gegenstand* der Erfahrung durch einen Teil derselben, zu welchem ich also noch andere Teile eben der hinzufügen kann. Ich den Begriff des Körpers vorher analytisch durch die Merkmale der Ausdehnung, der Undurchdringlichkeit, der Gestalt, etc. die alle in diesem Begriff gedacht werden, erkennen. Nun erweitere ich aber meine Erkenntnis, und, indem ich auf die Erfahrung zurück sehe, von welcher ich diesen Begriff des Körpers abgezogen hatte, so finde ich mit obigen Merkmale auch die Schwere jederzeit verknüpft, und füge also diese als Prädikat zu jenem Begriffe synthetisch hinzu. Es ist also die Erfahrung, worauf sich die Möglichkeit der Synthesis des Prädikats der Schwere mit dem Begriffe des Körpers gründet, weil beide Begriffe, ob zwar einer nicht in dem andern enthalten ist, dennoch als Teile eines Ganzen, nämlich der Erfahrung, die selbst eine synthetische Verbindung der Anschauungen ist, zu einander, wiewohl nur zufälliger Weise, gehören" (A9- B12). "Although I do not at all the predicate of weight in the concept of body in general, the concept nevertheless designates an object of experience through a part of it, to which I can therefore add still other parts of the same experience as belonging with the former. I can first cognize the concept of body analytically through the marks of extension, or impenetrability, of shape, etc., which are all analytically thought in this concept. But now I amplify my cognition and, looking back to the experience from which I had extracted this concept of body, I find that weight is also always connected with the previous marks, and I therefore add this synthetically as predicate to that concept. It is thus experience on which the possibility of the synthesis of the predicate of weight with the concept of body is grounded, since both concepts, though the one is no contained in the other, nevertheless belong together, though only contingently, as parts of a whole, namely experience" (A9- B12), (GW). Abela aporta un comentario a este texto que justifica *el carácter histórico* del conocimiento científico, fundamentando un aspecto básico de la lectura de Cassirer que indicábamos más arriba: "Of course, weight is something that we connect with the concept of body very early on the course of experience. More fin-grained determinations of an object may well be hell hostage to the idiosyncratic character of human inquiry for much longer periods. Certainly the history of science testifies to the very slow unfolding of our understanding of the nature of objects" (Abela, 2002, 62).

[126] "I find that judgement is nothing other than the way to bring given cognitions to the *objective* unity of apperception. That is the aim of the copula *is* in them … For this word designates the relation of the representations to the original apperception and its *necessary unity*, even if the judgment itself is empirical, hence contingent, e.g., 'Bodies are heavy'" (B142), (GW).

"Dadurch allein wird aus diesem Verhältnisse ein Urteil, d.i. ein Verhältnis, das objektiv gültig ist, und sich von dem Verhältnisse eben derselben Vorstellungen, worin bloβ subjektive Gültigkeit wäre, z. B. nach Gesetzen der Assoziation, hinreichend unterscheidet. Nach dem letzteren würde ich nur sagen können: Wenn ich einen Körper trage, so fühle ich einen Druck der Schwere; aber nicht: er, der Körper, ist schwer; welches so viel sagen will, als, diese beide Vorstellungen sind im Objekt, d.i. ohne Unterschied des Zustandes des Subjekts, verbunden, und nicht bloβ in der Wahrnehmung (so oft sie auch wiederholt sein mag) beisammen" (B142)[127].

De esta forma se ponen las bases de una teoría del conocimiento esencialmente gradualista (ya hemos señalado anteriormente esta característica de la epistemología de Kant que se evidencia en varios puntos del análisis), que se desarrollaría en una ampliación del sistema de creencias, de forma que converge gradualmente sobre un dominio de objetos causalmente determinados:

"We can see how with more experience we gradually refine our beliefs, and, with them, we become more attuned to what perception reveals. There is a reciprocal relation between our beliefs and what experience exhibits. The more experience we enjoy, the more refined our beliefs become. The more sophisticated and subtle our view of the world becomes, the more we are able to distinguish in our perceptual interactions with the world" (Abela, 2002, 64-65).

Si se acepta esta estrategia interpretativa, llega a ser fundamental postular un rol para el conjunto de las creencias que sería fundamental en el sistema de modificación de esas creencias, y deviene también fundamental el problema de las condiciones de verdad (y de la concepción de la verdad) en las que el sistema se sustenta[128]. Así, el carácter holístico de la representación sería una característica esencial del marco cognitivo kantiano y las condiciones de verdad serían de hecho condiciones instrumentales esenciales que restringirían el marco representacional de forma que una única representación, a través de las intuiciones, llegue a ser posible. Las relaciones de referencia operan dentro de un contexto condicionado por consideraciones de *verdad* y los juicios presuponen un amplio marco de creencias. El dominio de lo significado (multiplicidad de las apariencias) debe ser situado en un contexto que fundamenta la representación de cada objeto particular en la intuición[129]; así, la representación

[127] "Only in this way does there arise from this relation a judgement, i.e., a relation that is objectively valid, and that is sufficiently distinguished from the relation of these same representations in which they would be only subjective validity, e.g., in accordance with laws of association. In accordance with the later I could only say 'if I carry a body, I feel a pressure of weight', but not, 'It, the body, *is* heavy', which would be to say that these two representations are combined in the object, i.e., regardless of any difference in the condition of the subject" (B142), (GW). "Sólo así surge de dicha relación un *juicio*, es decir, una relación *objetivamente válida* y que se distingue suficientemente de la relación que guardan entre sí las mismas representaciones. Esta última sólo poseería una validez subjetiva, según las leyes de asociación, por ejemplo. De acuerdo con tales leyes únicamente podría decir: 'Cuando sostengo un cuerpo siento la presión del peso', pero *no* 'El mismo cuerpo es pesado'. esta última proposición indica que las dos representaciones se hallan combinadas en el objeto, es decir, independientemente del estado del sujeto, no simplemente que van unidas en la percepción (por muchas veces que ésta se repita" (B142), (PR).

[128] Es evidente que en este contexto interpretativo la noción de verdad juega un rol fundamental. Un análisis detallado en el Capítulo-9 de este trabajo.

[129] Una gran parte de este trabajo se ha dirigido a determinar el rol de la intuición en el esquema cognitivo de Kant. Una conclusión relevante de lo analizado es que para Kant la intuición empírica tiene ya una carga conceptual. La prioridad asignada al juicio como *la* unidad epistémica básica quedaría justificada en los *Principios de la Analítica*, que serían el corazón del nuevo paradigma epistémico: "The two interconnected tasks of the Principles can be summarized as follows: (1) to detail the temporal/spatial structure necessary for the determinate representation of objects by means of intuition and (2) to investigate and explain the *a priori* conceptual conditions necessary for the emergence of perceptual content. In both cases we will see that Kant's account of representation operates within the indeterminate / determinate model introduced in the preceding chapter. Kant's analysis of cognition involve steps from initially ill-defined temporal and perceptual structure up through ever-increasing determinate sign-signified relations. Kant's treatment thus

involving mapping out the activity of judgement, from the lowest levels, relating to the extensive and intensive magnitudes of empirical intuitions (Axioms and Anticipations), up to the existence of appearances as established by the regulative principles (Analogies)" (Abela, 2002, 83). La lectura de Abela está en abierta contradicción con una lectura muy extendida en la literatura contemporánea y que el propio Abela denomina "The Lockean-Kant Model". Tal lectura parte de la distinción que Kant realiza en los *Prolegomena* entre los *juicios de percepción* y los *juicios de experiencia* y que introduce una tensión entre las explicaciones de Kant en los *Prolegomena* y otras obras de Kant, en particular la *Crítica de la Razón Pura*, tensión que analiza Beatriz Longuenesse (Longuenesse, 1997, ch.7). Y también: (Baumgartner & Kotzin & Lansing, 1990). Para Allison, Kant abandona el análisis de los *Prolegómena* claramente en al edición B de la *Crítica*, opinión que también comparte Abela: "It is clear that Kant's claim in the *Prolegomena* that no categories are involved in judgements of perception simply is false. Even if we allowed determinate inner content independent of objects presented, the judgement implicit in the structure of intuition as magnitudes (Axioms and Anticipations) would still be necessary on the basis of the lessons of the *Critique of Pure Reason*" (Abela, 2002, 88). También para Pippin: "Kant asserts that such judgements (of Perception) do not require pure concepts of understanding … That, however, simply cannot be correct. It may be that these subjective judgements do not *assert* categorical relations, but the formulation of a determinate, even if subjective, experience would seem to require some ground of connection in appeal to categorical conditions. Otherwise the experience here being described would resemble exactly what Kant wants to rule out as an impossible account of what experience is like –a purely inner, noncategorical, direct experience of the flow of my sense impressions" (Pippin, 1982, 178). En la argumentación que Kant hace en los *Prolegomena* recalca que los *juicios de percepción* son sólo subjetivamente válidos y que conciernen a la unión de determinados estados internos del sujeto, no requieren ningún concepto puro sino sólo una conexión lógica en la percepción del sujeto pensante (Kant, Prol. 298). Así, los *juicios de percepción* suministrarían un contenido perceptual a la mente independientemente de la actividad sintetizadora de los conceptos puros del entendimiento. Kant contrasta este dominio subjetivo con la objetividad de los *juicios de experiencia* que involucrarían a las *categorías* y no sólo serían válidos para el sujeto sino que afirmarían la existencia de un estado objetivo, implicando necesidad y objetividad (Kant, Prol. 301). Así, el esquema parece describir que un juicio objetivamente válido supone un proceso de adición de conceptos objetivantes a una representación determinada sólo centrada en la sicología del sujeto, lo cual significa situarse directamente en el marco clásico del empiricismo y de lo que Abela denomina de forma más general el marco cartesiano. Este enfoque ha tenido una considerable influencia en autores relevantes como Lewis W. Beck, Gareth Evans y el propio Strawson. Esto enlazaría directamente con la concepción de Locke y de hecho conformaría una teoría causal de la percepción: "What lies behind the Lockean-Kant view is, I believe, an implicit acceptance of some form of the causal theory of perception. The content of representation is regarded as having a potentially informative nature by virtue of the causal 'input': the propositional content being delivered to the mind independent of the beliefs of that mind … we *are* causally connected to the world. But, on the representation-first model, this causal relation is the wrong place to locate the source of propositional content. Information, justification, and evidence all operate at the level of beliefs, not preconceptual giveness. Uninterpreted causal connections carry no *information*" (Abela, 2002, 89). En opinión de Abela, Strawson fue fundamental en la revigorización de la teoría causal de la percepción en los años 60 y 70, transformándola e integrando la noción de la actividad conceptual dentro de una explicación basada en la causalidad intrínseca del acto de percepción y sosteniendo que el concepto de conexión causal entre la mente y la naturaleza se construye en nuestra noción ordinaria de percepción (Strawson, 1988, 103). Aunque Strawson se distancia de cualquier modelo positivista extremo, "he nevertheless continues to subscribe implicitly to the governing empiricist idea that pure subjetive episodes are truth-bearing entities. There remains, I suggest, an implicit appeal to the residual force of the Cartesian epistemic model" (Abela, 2002, 93). Observamos una coincidencia en el diagnóstico, aunque desde un punto de vista muy distinto, con el de Gisela Shaw que más arriba mencionamos. También Gareth Evans en su obra *The Varieties of Reference* sostiene que la experiencia perceptiva contiene un componente no conceptual; en nuestros juicios acerca del mundo nos moveríamos desde un estado cognitivo que implica un contenido no conceptual a un estado cognitivo conceptual por naturaleza: "the informational states which a subject acquires through perception are *non-conceptual*, or *non-conceptualized*. Judgements based upon such states necessarily involve conceptualization: in moving from a perceptual experience to a judgement about the world (usually expressed in some verbal form), one will by exercising basic conceptual skills … The process of conceptualization or judgements takes the subject from his being in one kind of informational state (with a content of a certain kind, namely, non-conceptual content) to his being in another kind of cognitive state (with a content of different kind, namely, conceptual content" (Evans, 1982, 227). Christopher Peacocke desarrolla otra justificación de esta misma posición apoyándose en la modificación de contenidos semánticos por medio de una teoría de la determinación (Peacocke, 1992, 85). McDowell discrepa del enfoque de Evans en el mismo particular de un objeto comienza con consideraciones de unidad: lo que Kant llama “afinidad en la multiplicidad de las apariencias” (A113, A122, B600, B795). La actividad evaluativa, conscientemente dirigida, de la razón presupone los juicios espontáneos del entendimiento; estos juicios, que involucran objetos empíricos y sus diversas relaciones, simplemente codifican lo que la *estructura general de verdad* ya ha codificado en el acto original de representación por el entendimiento.

Para Kant el conocimiento humano tiene dos fuentes, “unsre Erkenntnis entspringt aus zwei Grundquellen” (B74). Pero una de ellas, los sentidos que llevan a la sensación, no tiene en absoluto el rol que se le asigna en las distintas modalidades dentro del marco cognitivo cartesiano. De un lado, supone una *conexión inmediata* con el objeto: “Erscheinungen sind die einzige Gegenstände, die uns unmittelbar gegeben werden können, und das, was sich darin unmittelbar auf den Gegenstand bezieht, heiβt Anschauung”[130]. Pero, de otro lado, la forma a través de la que percibimos esa relación, la sensación, tiene ya un componente formal impuesto por nuestro esquema cognitivo a través de un marco de verdad que lo hace significante, por lo que su resultado, la intuición del objeto, tiene ya un valor cognitivo aportado por el juicio. Cuando Kant describe la sensación como la materia de la intuición lo hace en un contexto que involucra el objeto y el juicio:

---

sentido que Abela: “In Evans’s account of experience, receptivity figures in the guise of the perceptual element of the informational system, and his idea is that the perceptual system produces its content-bearing states independently of any operations of spontaneity (concept application). It is true that the content-bearing states that result count as experience … only by virtue of the fact that they are available to spontaneity. But spontaneity does not enter into determinating *their* content. So the independent operations of the informational system figure in Evans’s account as a separable contribution made by receptivity to its co-operation with spontaneity” (McDowell, 1994, 51). Abela, en la misma dirección, apela a las modernas teorías modulares de la cognición y a las explicaciones evolutivas del desarrollo cerebral para cuestionar estos enfoques (Abela, 2002, 105) y concluye: “Replace Evans’s notion of an information state with the Lockean-Kantian idea of transcendental matter presented to the understanding as content, and you have a position structurally similar to the position I have been claiming Kant is intent on rejecting … No doubt the Lockean and ultimate realist interpreters believe that this connection in Kant’s system is a ‘transcendental’ concern, thereby seeming to divorce this form of analysis from the above criticism of its empiricist cousins. Nevertheless, the broad empiricist framework is still hard at work, only pushed back a step: now connecting the representation of empirical reality with a (putative) noumenal, rather than phenomenal, given” (Abela, 2002, 106). En realidad, estas lecturas representarían la forma más pura de empiricismo en cuanto que su movimiento más allá del dominio empírico se sustentaría exclusivamente en una inferencia cuyo único soporte sería la pura estructura epistemológica del marco empiricista mismo y todo soporte empírico es *de facto* removido. “The argument thus hangs entirely on the empiricist assumption that belief has an informative connection to pure giveness …if this empiricist presupposition is withdrawn, and if therefore the intelligibility of the chaotic given as the basis for determining belief is rejected, the argument collapses” (Abela, 2002, 106). En esta interpretación hay un punto delicado y que consiste en nuestra frecuente experiencia de objetos que, de hecho, no existen, o de intuiciones desconectadas de las cosas que se supone representan. Se trataría del problema de los sueños, las ilusiones y el error. El problema aquí es que esa asimetría entre los estados internos y externos parece favorecer el enfoque subjetivo / objetivo planteado por la dicotomía “juicios de percepción / juicios de experiencia” propuesta en los *Prolegomena*. Un primer planteamiento sería considerar que una “falsa” sensación es un *juicio erróneo* y no un *error material ya dado*. “Empirical intuitions are not vehicles for truth-values. They neither lie nor tell the truth. They *do* causally connect us with the world, but this connection is not an evidence-conveying relation. Their contribution operates within, and is subordinate to, the sign-signified representational context” (Abela, 2002, 109). En este mismo sentido Kant escribe que “For truth and illusion are not in the object, insofar as it is intuited, in the judgement about it insofar as it is thought. Thus it is correctly said that the senses do not err; yet not because they always judge correctly, but because the do not judge at all. Hence truth, as much as error, an thus also illusion as leading to the later, are to be found only in judgements, i.e., only in the relation of the object to our understanding” (B349-350). Un completo análisis del tema en (Abela, 2002, 193-213) y (Nagel, 1983, 219).

130 “Appearances are the only objects that can be given to us immediately, and that in them which is immediately to the object is called intuition” (A108-109), (GW).

> "Die Fähigkeit, (Rezeptivität,) Vorstellungen durch die Art, wie wir von Gegenständen affiziert werden, zu bekommen, heiβt Sinnlichkeit" (B33)[131].
>
> "Die Wirkung eines Gegenstandes auf die Vorstellungsfähigkeit, so fern wir von demselben affiziert werden, ist Empfindung. Diejenige Anschauung, welche sich auf den Gegenstand durch Empfindung bezieht, heiβt empirisch. Der unbestimmte Gegenstand einer empirischen Anschauung, heiβt Erscheinung. In der Erscheinung nenne ich das, was der Empfindung korrespondiert, die Materie derselben …" (B34)[132].
>
> "Wollen wir die Rezeptivität unseres Gemüts, Vorstellungen zu empfangen, so fern es auf irgend eine Weise affiziert wird, Sinnlichkeit nennen; … Unsre Natur bringt es so mit sich, dass die Anschauung niemals anders als sinnlich sein kann, d.i. nur die Art enthält, wie wir von Gegenständen affiziert werden" (B75)[133].

Como Kant repetidamente dice, "da nun Empfindung an sich gar keine objektive Vorstellung ist …" (B208)[134]. Es en este contexto en el que la representación está involucrada con una relación inmediata con el objeto en el que la percepción sensorial se vuelve significante a través del juicio. La forma en la que el juicio opera en este nivel cognitivo se desarrolla en los *Axiomas de la Intuición* y en las *Anticipaciones de la Percepción*. El principal rol de los *Axiomas* sería hacer evidente la magnitud extensiva de toda intuición empírica[135]. La intuición empírica, el más bajo nivel de la cognición, reflejaría ya la actividad del juicio. El impulso conjunto de los *Axiomas* y las *Anticipaciones* van en la dirección de asegurar que todas las intuiciones empíricas están ya estructuradas en tanto que magnitudes

---

[131] "The capacity (receptivity) to acquire representations through the way in which we are affected by objects is called sensibility" (B33), (GW). "La capacidad (receptividad) de recibir representaciones, al ser afectados por los objetos, se llama *sensibilidad*" (B33), (PR).

[132] "The effect of an object on the capacity for representation, insofar as we are affected by it, is *sensation*. That intuition which is related to the object through sensation is called *empirical* …I call that in the appearance which corresponds to sensation its *matter*" (B34), (GW). "El efecto que produce sobre la capacidad de representación un objeto por el que somos afectados se llama *sensación*. La intuición que se refiere al objeto por medio de una sensación es calificada de *empírica*. … Lo que dentro del fenómeno corresponde a la sensación, lo llamo *materia* del mismo" (B34), (PR).

[133] "The *receptivity* of our mind to receive representations insofar as it is affected in some way (I call) sensibility … It comes along with our nature that *intuition* can never be other than sensible, i.e., that it contains only the way in which we affected by objects" (B75), (GW). "Si llamamos *sensibilidad* a la *receptividad* que nuestro psiquismo posee, siempre que sea afectado de alguna manera, en orden a recibir representaciones, …Nuestra naturaleza conlleva el que la *intuición* sólo pueda ser *sensible*, es decir, que no contenga sino el modo según el cual somos afectados por los objetos" (B75), (PR).

[134] "sensation is not itself an objective representation" (B208), (GW).

[135] En gran parte de la literatura esta parte del análisis de Kant es menospreciado. Para Strawson, tienen una tenue conexión con los temas generales de la *Analítica* (Strawson, 1966, 31). Para Prichard estos principios son de 'poca importancia intrínseca' (Prichard, 1909, 265). Pippin (1982) les dedica un par de párrafos y Allison (2004) les dedica una página. En la interpretación de Abela resultan claves en tanto que revelarían las estructuras formales de la intuición y que serían aportadas por el sujeto cognoscente a través del juicio (Abela, 2002, 119 y ss). Esta parte de la *Crítica*, que ocupa la mitad de la *Analítica de los Principios*, se asocia en la mayoría de los comentaristas a la conexión entre las magnitudes extensivas y la Matemática. Así, para Strawson, estarían relacionadas con la aplicabilidad de las Matemáticas (Strawson, 1966, 122). También para Guyer (1987, ch.7) concerniría a la medida de las magnitudes. Efectivamente, Kant describe los *principios constitutivos* como "matemáticos" pero en el sentido de afirmar que tienen la certeza intuitiva de los juicios matemáticos (B201) pero para a continuación aclarar esta calificación diciendo que "Man wird aber wohl bemerken: dass ich hier eben so wenig die Grundsätze der Mathematik in einem Falle, als die Grundsätze der allgemeinen (physischen) Dynamik im andern, sondern nur die des reinen Verstandes im Verhältnis auf den innern Sinn … vor Auge habe. …Ich benenne sie also mehr in Betracht der Anwendung, als um ihres Inhalts willen" (B202). "But one should note well that I here have in mind the principles of mathematics just as little in the one case as the principles of general physical dynamics in the other … I am therefore tirling them more with respect to their application than on account to their content" (B202), (GW).

extensivas e intensivas. En los *Axiomas* sostiene que “todas las intuiciones son magnitudes extensivas” (B202) y en las *Anticipaciones* que “en todas las apariencias, lo real, que es un objeto de la sensación, tiene una magnitud intensiva, i.e., un grado” (B207). Las intuiciones empíricas serían presentadas a la mente sólo después de haber sido el sujeto de juicios sobre magnitudes extensivas y, sobre todo, intensivas, que involucran las estructuras cognitivas espacio-temporales del ser humano[136]. Así, estos *principios constitutivos* del entendimiento, que operan con juicios relativos a la intuición en un contexto que involucra una experiencia *inmediata* con el objeto, serían los que hacen significante la representación sensorial en un campo que se puede denominar la *experiencia*. Para Abela (2002, 141), “far from having a ‘tenuous connection to the general themes of the Analitic’ (Strawson, 1966, 31), the Axioms of Intuition and the Anticipations of Perception offer a clear statement of Kant’s new judgement-oriented approach, reinforcing the Copernican shift away from the empiricist notion of the given. The unfortunate neglect of this half of the Analitic is, in my view, symptomatic of the powerful grip the ‘common prejudice’ continues to enforce”. Los *principios regulativos* del entendimiento, como los *principios constitutivos* de los que acabamos de hablar, se ocupan también de la determinación de las estructuras temporales y de las condiciones que permiten la especificación del contenido empírico pero a través de juicios que operan sobre la *multiplicidad de las apariencias*, e investigan los mecanismos que establecen las estructuras formales necesarias para que sea posible la *representación* de objetos y sucesos a través de un mecanismo que permita que “ich werde also, in unserm Fall, die *subjektive Folge* der Apprehension von der *objektiven Folge* der Erscheinung, ableiten müssen” (B238)[137]. Esto se desarrolla en las *Analogías* y en los *Postulados del Pensamiento Empírico*. Las *Analogías* constituyen el corazón de la teoría de la *representación* de Kant y están diseñadas para proporcionar una teoría del aparato conceptual necesario para asegurar la posibilidad de conocer objetos y sucesos. Los conceptos puros de sustancia, causa y efecto, y determinación causal recíproca “…als bloβ die Bedingungen der Einheit des empirischen Erkenntnisses in der Synthesis der Erscheinungen, zum Ziele haben” (B223-224)[138]. Kant afirma que sin esos conceptos puros ninguna conexión necesaria de las percepciones en el tiempo es posible y, por tanto, ninguna experiencia es posible. Por otra parte, también describe las *Analogías* como las que hacen posible “den formalen Bedingungen der empirischen Wahrheit” (B236)[139] pues “ob nun aber gleich dieses Verstandesregeln nicht allein a priori wahr sind, sondern sogar der Quell aller Wahrheit, d.i. der Übereinstimmung der unserer Erkenntnis mit Objekten, dadurch, dass sie den Grund der Möglichkeit der Erfahrung, als des Inbegriffes aller Erkenntnis, darin uns Objekte gegeben werden mögen, in sich enthalten, so scheint es uns doch nicht genug, sich bloβ dasjenige vortragen zu lassen, was wahr ist, , sondern, was man zu wissen begehrt” (B296)[140]. Para Abela (2002, 145), “by supplying the basic structures that make the manifold of appearance possible, the Analogies somultaneously secure the possibility of a truth-structure for the representation of objects. The conditions for the possibility of experience and the requirement of a general truth-structure for representation coalesce in the Analogies”. Las *Analogías* son así un grupo de argumentos mutuamente relacionados diseñados para enfocar el problema de la indeterminación de la

---

[136] (Abela, 2002, 130), (McDowell, 1994, 58), (Nagel, 1983, 97).

[137] a través de un mecanismo que “derive the *subjective sequence* of apprehension from the *objective sequence* of appearance” (B238).

[138] “have as their goal nothing but the conditions of the unity of empirical cognition in the synthesis of the appearances” (B223- 224).

[139] “the formal conditions of empirical truth” (B236).

[140] “these rules of the understanding are not only true *a priori* but rather even the source of all truth, i.e., of the agreement of our cognition with objects, in virtue of containing the ground of the possibility of experience” (B296).

estructura temporal y del contenido empírico en la *aprehensión* respondiendo a la pregunta básica: “was verstehe ich also unter der Frage : wie das Mannigfaltige in der Erscheinung selbst (die doch nichts an sich selbst ist) verbunden sein möge?” (B235-236)[141]. Abela (2002, 145-213) analiza las distintas interpretaciones en la literatura, distinguiendo desde lo que el llama “a weak reading”[142] hasta la “a strong reading”[143], pasando por lecturas intermedias como la de Allison (Allison, 1983, 218). Suscribe la “interpretación fuerte” en la que la representación de las sucesivas estructuras de la aprehensión involucra consideraciones objetivas como precondición y en base a las cuales el mecanismo del juicio supera la indeterminación de la aprehensión de la intuición y crea la estructura formal y objetiva necesaria para multiplicidad de la apariencia. Y también nuestra habilidad para realizar juicios sobre el orden real de nuestras percepciones es un juicio sobre un objeto (en este caso, nosotros mismos) que está causalmente influido por otros objetos.

La *Refutación del Idealismo* es un poderoso punto de apoyo a esta lectura realista a nivel empírico[144] . Introducida por Kant en la segunda edición de la *Crítica de la Razón Pura* no ofrece argumentos que no estuvieran ya explícita o implícitamente contenidos en las *Analogías*, pero evidencia cómo el propio Kant enfocaba la fuerza realista de los argumentos allí expuestos. Aunque expuestos en forma de prueba lógica, el punto central de la posición de Kant consiste en la afirmación de que “dass innere Erfahrung überhaupt, nur durch äuβere Erfahrung überhaupt, möglich sei” (B278-279) y de que “dass selbst unsere innere, dem Cartesius unbezweifelte, Erfahrung nur unter Voraussetzung äuβerer Erfahrung möglich sei” (B275)[145]. El argumento postula la existencia independiente de los objetos empíricos: que los objetos existen en el espacio y en el tiempo independientemente de nuestros pensamientos acerca de ellos, y su objetivo es enfrentar “el escándalo de la filosofía” que constituiría el escepticismo radical (BXXXIX) y las lecturas idealistas y psicologicistas que se habían hecho a su primera edición:[146]

---

[141] “what do I understand by the question, how the manifold may be combined in the appearance itself (which is yet nothing in itself)?” (B235-236).

[142] (Wilkerson, 1976,77), (Strawson, 1966, 84-90)

[143] (Longuenesse, 1997, ch.11), (Guyer, 1987, 254), (Abela, 2002, 149-154)

[144] La lectura realizada por Abela está sólidamente argumentada y justificada y caracteriza la epistemología de Kant con un marcado realismo al nivel empírico. Pero en la *Dialéctica Transcendental* Kant pretende principalmente establecer las condiciones frontera del conocimiento humano, y esta parte de la *Crítica* plantea serias dificultades a la interpretación aquí desarrollada. Véase el Capítulo-9 de este trabajo.

[145] “internal experience in general is possible only through external experience in general” (B278-279).“That even our inner experience, undoubted by Descartes, is possible only under the presupposition of external experience” (B275).

[146] “Teorema: La mera conciencia, pero empíricamente determinada, de mi propia existencia, demuestra la existencia de los objetos en el espacio fuera de mí. Prueba:

[1] Tengo consciencia de mi existencia como determinada en el tiempo.

[2] Toda determinación de tiempo supone algo *permanente* en la percepción.

[3] Ese algo, empero, no puede ser algo en mí,

[4] porque precisamente mi existencia en el tiempo sólo puede ser determinada por ese algo permanente.

[5] Así, pues, la percepción de ese permanente es posible sólo por una *cosa* fuera de mí. Por consiguiente, la determinación de mi existencia en el tiempo es sólo posible por la existencia de cosas reales, que yo percibo fuera de mí. Ahora bien, la conciencia en el tiempo está necesariamente unida a la conciencia de la posibilidad de esa determinación de tiempo; así pues, está también necesariamente unida con la existencia de las cosas fuera de mí, como condición de la determinación de tiempo;

[6] es decir, que la conciencia de mi propia existencia es al mismo tiempo una conciencia inmediata de otras cosas fuera de mí.” (B276), (MGM, pág. 236).

Existen notables diferencias entre esta traducción de Manuel García Morente y la de Pedro Ribas. Además, en ambas traducciones en el punto [4] no se tiene en cuenta la propuesta de corrección que hizo Kant (véase la

"Lehrsatz: Das bloβe, aber empirisch bestimmte, Bewusstsein meines eigenen Daseins beweiset das Dasein der Gegenstände im Raum auβer mir.
Beweis:
[1] Ich bin mir meines Daseins als in der Zeit bestimmt bewusst.
[2] Alle Zeitbestimmung setzt etwas Beharrliches in der Wahrnehmung voraus.
[3] Dieses Beharrliche aber kann nicht eine Anschauung in mir sein.
[4] Denn alle Bestimmungsgründe meines Daseins, die in mir angetroffen werden können, sind Vorstellungen, und bedürfen, als solche, selbst ein von ihnen unterschiedenes Beharrliches, worauf in Beziehung der Wechsel derselben, mithin mein Dasein in der Zeit, darin sie wechseln, bestimmt werden können.
[5] Also in der Wahrnehmung dieses Beharrlichen nur durch ein Ding auβer mir und nicht durch die bloβe Vorstellung eines Dinges auβer mir möglich. Folglich ist die Bestimmung meines Daseins in der Zeit nur durch die Existenz wirklicher Dinge, die ich, auβer mir wahrnehme, möglich. Nun ist das Bewusstsein in der Zeit mit der Bewusstsein der Möglichkeit dieser Zeitbestimmung notwendig verbundet: Also ist es auch mit der Existenz der Dinge auβer mir, als Bedingung der Zeitbestimmung, notwendig verbunden;
[6] d. i. das Bewusstseins meines eigenes Daseins ist zugleich ein unmittelbares Bewusstsein des Daseins anderer Dinge auβer mir" (B276)[147].

---

nota siguiente de este trabajo), aunque la traducción de Pedro Ribas sí remite a ella en nota a pie. A continuación, la traducción de Pedro Ribas: "Tesis:
[1] Soy consciente de mi existencia en cuanto determinada en el tiempo.
[2] Toda determinación temporal supone algo *permanente* el la percepción.
[3] Pero ese elemento permanente no puede ser algo en mí,
[4] ya que mi propia existencia sólo puede ser determinada en el tiempo mediante dicho elemento.
[5] La percepción de éste sólo es, pues, posible a través de una cosa exterior a mí, no a través de la simple *representación* de una cosa exterior a mí. Consiguientemente, la determinación temporal de mi existencia sólo es posible gracias a la existencia de cosas reales que percibo fuera de mí. Ahora bien, la conciencia de mi existencia en el tiempo, va necesariamente ligada a la conciencia de la posibilidad de esta determinación temporal. La conciencia de mi existencia en el tiempo se halla, pues, necesariamente ligada también a la existencia de cosas fuera de mí, como condición de la determinación temporal.
[6] Es decir, la conciencia de mi propia existencia constituye, a la vez, la conciencia inmediata de la existencia de otras cosas fuera de mí" (B276), (PR).Numeración en el texto añadida [F.S.]

[147] Numeración añadida [F.S.] El texto aquí presentado sigue la edición de: *Kritik der Reinen Vernunft*, Felix Meiner Verlag, Hamburg 1998 (nach der ersten und zweiten Originalausgabe herausgegeben von Jens Timmermmann). El texto de los puntos [3] y [4], correspondiente a (B276, líneas 15-21) son, según nota del editor: "15-21 [*Dieses ... könne*] Korrigiert aufs Kants eigene Anweisung; vgl. Vorrede zur zweiten Auflage, Anm. S. BXXXIX. In B (und in Ak) heiβt es an dieser Stelle: Dieses Beharrliche aber kann nicht etwas in mir sein; weil eben mein Dasein in der Zeit durch dieses Beharrliche allererst bestimmt werden kann." (pag. 321 de la edición citada). Esto constituye los párrafos que he numerado como [3] y [4], y sobre el texto que acabo de citar están hechas las traducciones mencionadas. También Abela (2002, 187) incluye y comenta una traducción inglesa (GW) de esta versión no corregida de la edición de la Academia (Ak). La traducción del texto corregido citada en alemán se puede encontrar en la nota referida en la traducción de Pedro Ribas; quedaría así:
[3] "Pero ese elemento permanente no puede ser *una intuición* en mí."
[4] "Pues todos los fundamentos de determinación de mi existencia que pueden hallarse en mí son representaciones y, como tales, ellas mismas necesitan un algo permanente distinto de ellas, en relación con lo cual pueda determinarse su cambio y, consiguientemente, mi existencia en el tiempo en que tales representaciones cambian" (BXXXIX, nota), (PR).
El texto de la 2ª edición sin la corrección propuesta por Kant, y en el que se basan las traducciones españolas e inglesa que hemos aportado, es el siguiente (edición de la Academia), páginas 186 y 187:
"22 Ich bin mir meines Daseins als in der Zeit bestimmt bewußt.
23 Alle Zeitbestimmung setzt etwas Beharrliches in der Wahrnehmung voraus.
24 Dieses Beharrliche aber kann nicht <u>*etwas*</u> in mir sein, weil eben mein
25 Dasein in der Zeit durch dieses Beharrliche allererst bestimmt werden kann.
26 Also ist die Wahrnehmung dieses Beharrlichen nur durch ein Ding außer
27 mir und nicht durch die bloße Vorstellung eines Dinges außer mir
28 möglich. Folglich ist die Bestimmung meines Daseins in der Zeit nur

El argumento comienza afirmando que yo soy consciente de mí mismo como un ser empírico que existe en el tiempo[148]. La línea [2] del argumento se refiere explícitamente a la argumentación contenida en la *Primera Analogía* fundamentando la determinación temporal en base a la postulación de substrato permanente. Para Abela (2002, 189), "The notion of a enduring substratum is thus offered as a necessary conceptual constrain that allows us to view our sucessive perceptions as intrinsically determined *in the object*. This notion of unity in the object, as discussed above, also includes the presence of the perceiving subject *within* the manifold of appearances". Las restantes líneas refuerzan la objetividad de lo permanente situado fuera del sentido interno, estableciendo la prioridad para Kant del sentido externo como una condición de la sensibilidad interna, interpretación que se corrobora en otros pasajes importantes de la segunda edición de la *Crítica*, dejando bien establecido el carácter esencialmente realista de la teoría kantiana del conocimiento, por ejemplo en (Bxl-xli, nota al pie) y (B242). La nota en (Bxl-xli) es muy significativa puesto que se trata de una nota al prólogo de la 2ª Edición en la que explícitamente quiere combatir las interpretaciones subjetivistas, escépticas o psicologicistas que se habían hecho a raíz de su 1ª edición. Por consiguiente, en base a todo lo anterior, el realismo empírico de Kant queda sólidamente justificado por él mismo y, además, reforzado por su propia reacción ante interpretaciones subjetivistas y psicologicistas a la edición A que no compartía. Cualquier interpretación de conflictos o contradicciones, y en particular con su idealismo transcendental que plantea serias dificultades interpretativas (Vaihinger, 1884), (Abela, 2002), debería por consiguiente realizarse forzando una interpretación, si existiera, *a partir* de su presupuesto básico: el realismo empírico. Discusión que retomamos en el último apartado del Capítulo-9.

---

29 durch die Existenz wirklicher Dinge, die ich außer mir wahrnehme, möglich.
30 Nun ist das Bewußtsein in der Zeit mit dem Bewußtsein der Möglichkeit
31 dieser Zeitbestimmung nothwendig verbunden: also ist es auch mit
32 der Existenz der Dinge außer mir, als Bedingung der Zeitbestimmung,
33 nothwendig verbunden; d. i. das Bewußtsein meines eigenen Daseins
01ist zugleich ein unmittelbares Bewußtsein des Daseins anderer Dinge
02 außer mir."

Obsérvese que en la línea 24 de la pág. 186, Kant utiliza el término "etwas" en la edición original, que sustituye por el término "Anschauung" en su nota, además de las puntualizaciones de sus líneas posteriores.

[148] En cuanto que la *Refutación* está dirigida contra el paradigma epistémico cartesiano, es coherente que Kant comience con esa referencia al "mí mismo". Sin embargo, el "mí mismo" sobre el que se fundamenta la prueba es el "mí mismo" *empírico* que es consciente del carácter objetivamente determinado de sus representaciones internas, como pone de manifiesto la nota que Kant añadió al Prefacio de la segunda edición: "Allein ich bin mir Meines Daseins in der Zeit (folglich auch der Bestimmbarkeit desselben in dieser) durch innere Erfahrung bewusst, und dieses ist mehr, als bloβ ich meiner Vorstellung bewusst zu sein, doch aber einerlei mit der empirischen Bewusstsein meines Daseins, welches nur durch Beziehung auf etwas, was mit meiner Existenz verbunden, auβer mir ist, bestimmbar ist" (Bxl). "My *existence in time* (consequently, also, of its determinability in time), and this is more than merely being conscious of my representation; yet it is identical with the empirical consciousness of my existence, which is only determinable through a relation to something that, while being bound up with my existence, is outside me" (Bxl), (GW). "Pero sí tengo conciencia, por la *experiencia interna*, de *mi existencia* en el tiempo (y, consiguientemente, de la determinabilidad de la misma en el tiempo). Lo cual, aunque es algo más que tener simplemente conciencia de mi representación, es idéntico a la *conciencia empírica de mi existencia,* la cual sólo es determinable en relación con algo que se halle ligado a mi existencia, pero que está *fuera de mí*" (Bxl), (PR).

PARTE-II

EL ENFOQUE DE DAVID HILBERT: FORMALISMO INTUICIONISTA Y LA AUTONOMÍA DE LA MATEMÁTICA.

CAPÍTULO-4

La Intuición en Hilbert: teoría del conocimiento y fundamentación de la matemática. Aritmética, geometría, lógica y el rol del método axiomático

4.1.- Introducción.

Como señala Corry (2002, 30), es un lugar común que la posición que mejor describe la actitud de la mayoría de los matemáticos profesionales es una posición realista-platonista [149], y eso en el sentido de que, en relación con la esencia de su disciplina, están convencidos de que su actividad trata del estudio sistemático de ciertos entes con objetividad externa a ellos, si bien les resulta bastante difícil explicar cosas tan básicas como "dónde se encuentran esos objetos eternos e incambiables, y por medio de qué facultades puede él conocerlos". En casi cualquier matemático relevante del pasado o del presente se encuentra la misma actitud cuando hablan de su disciplina. Por ejemplo, para Hermite: "creo que los números y las funciones del Análisis no son un producto arbitrario de nuestro espíritu; pienso que existen fuera de nosotros, con el mismo carácter necesario de la realidad objetiva, y nosotros los encontramos, los descubrimos y los estudiamos, igual que los físicos, los químicos o los zoólogos" (Hermite, 1905, tomoII, 398). La situación la explica bien Jean Dieudonné:

> "En cuestiones fundacionales, nosotros creemos en la realidad de las Matemáticas, pero claro, cuando los filósofos empiezan a atacarnos con sus paradojas, corremos a escondernos detrás del formalismo y decimos: 'la Matemática no es más que una combinación de símbolos faltos de significado'...Finalmente se nos deja en paz y así podemos regresar a nuestra Matemática, trabajando como siempre lo hemos hecho, es decir, con algo que es real" (Dieudonné, 1970, 130).

Es la posición que ha sido calificada como "platonismo en día laborable y formalismo de fin de semana". Curiosamente, Dieudonné fue uno de los portavoces habituales de un grupo de matemáticos, fundamentalmente franceses, que representaron un punto de vista radicalmente distinto al expuesto en esta cita y que escribían bajo el pseudónimo "Nicolas Bourbaki". Dicho grupo, de composición variable, ejerció una fuerte influencia en todo el mundo, pero particularmente en Francia y España, en las décadas 60 y 70 del siglo XX. Su influencia, al coincidir con las renovaciones pedagógicas de las enseñanzas y con la época del auge de las "nuevas pedagogías" se extendió al enfoque y diseño de las enseñanzas medias y superiores de Matemáticas en los nuevos planes y sus consecuencias, sin querer negar el excelente trabajo que el grupo Bourbaki realizó en la sistematización y control del rigor de amplias ramas de la Matemática moderna, evidencian un fracaso total en las enseñanzas medias. Aunque el formalismo estricto y el gusto por el formalismo desmesurado y radical ha cuajado más entre los filósofos que entre los matemáticos, el programa del grupo Bourbaki, que es lo que hoy se conoce por *formalismo*, lo expresaba bien el mismo Dieudonné, en abierta contradicción con su cita anterior:

> "La Matemática se nos aparece como un juego, en el cual las piezas son signos gráficos que se distinguen los unos de los otros tan sólo por su forma, y no por su contenido" (Dieudonné, 1962, 551).

---

[149] Sobre el platonismo en Matemáticas, y especialmente en la Matemática moderna, Cfr. (Bernays, 1935) y (Linnebo, 2013).

Además, el grupo Bourbaki se presenta a sí mismo como “los verdaderos herederos (intelectuales) de Hilbert”[150]. Para Leo Corry (2002, 31) la tremenda influencia de Bourbaki

[150] Naturalmente, hay formulaciones más rigurosas del formalismo, como la de Felix Hausdorff. En un manuscrito fechado en 1904 y titulado “Formalismo” escribe: “En todos los debates filosóficos desde Kant, las Matemáticas, o cuando menos la Geometría, han sido consideradas como heterónomas, como dependientes de alguna instancia externa de lo que podríamos llamar, a falta de un término mejor, intuición (Anschauung), ya sea esta pura o empírica, subjetiva o corregida científicamente, innata o adquirida. La tarea más importante y fundamental de las Matemáticas modernas ha consistido en constituirse a sí mismas como libres de esa dependencia, en encontrar su camino desde la heteronomía a la autonomía”. Y en un curso titulado “Tiempo y Espacio” impartido en 1903: “Las Matemáticas ignoran completamente el significado expresado en sus conceptos, la validez actual con que pueden concordar con sus teoremas. Sus conceptos indefinibles son objetos del pensamiento elegidos arbitrariamente y sus axiomas son relaciones entre esos objetos elegidas arbitraria, aunque consistentemente”. Ambas citas en (Purkert, 2002, 53) y (Corry, 2004, 117). Para Corry, esto representa “una tendencia que se ha desarrollado bajo la influencia de los *Grundlagen der Geometrie* en una dirección al margen de las intenciones iniciales de Hilbert” (Corry, 2004, 116). Una discusión metodológica detallada de las posiciones del *formalismo*, a partir de Hilbert, pero distinguiéndose de Hilbert, y que serán discutidas en distintas partes de este trabajo, en (Curry, 1951). Pero la influencia de Nicolas Bourbaki fue determinante en la segunda mitad del siglo XX, sobre todo en la formación de los matemáticos y en la inspiración de las enseñanzas medias y superiores de Matemáticas. Comenzó a escribir ya en los años 30, con la intención declarada de crear un manual extensivo y actualizado del Análisis, y gradualmente sus ambiciones se extendieron haciendo notar las imperfecciones que encontraban en el material matemático en uso. La guerra interrumpió aparentemente su actividad pero, cuando ésta acabó, sus ambiciones se extendían a la topología, el álgebra conmutativa y la teoría de la integración, y su objetivo declarado: realizar una enciclopedia de las Matemáticas rama por rama. Escribió artículos, realizó encuentros y seminarios regulares e incluso anunciaba sus cumpleaños. Pero cuando solicitó su ingreso en la *American Mathematical Society* fue rechazado. La razón: no se trataba de una persona, sino de un colectivo: un grupo de nueve jóvenes matemáticos franceses. Tomaron el nombre de un general de la guerra franco-prusiana, haciendo gala se un sentido del humor que se suponía imperaba en la *Ecole Normale* donde la mayoría se habían formado. El grupo mantenía la estricta norma de que los componentes debían retirarse del grupo al cumplir 50 años, aunque muchos seguían manteniendo relaciones estrechas con el colectivo. Muchos miembros de Boubaki, todos eminentes matemáticos, fueron más elocuentes que el mismo Bourbaki en la explicación de sus objetivos y su filosofía de la Matemática: desde Emile Artin, André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chevalley y Henri Cartan (del grupo de fundadores) hasta otros miembros más tardíos como Jean-Pierre Serre, Samuel Eilenberg y Alexandre Grothendieck y la influencia mundial del grupo se institucionalizó a partir de 1958 con la creación del *Institut de Hautes Études Scientifiques* (IHES) por Léon Motchane y sus contactos regulares con las instituciones matemáticas y científicas de USA. Un estudio detallado de estos contactos y de las opiniones explícitas de estos autores, en (Gray, 2000, pp. 196-232). En sus primeras etapas resaltaban la utilización del *método axiomático* (según la lectura que ellos habían hecho de Hilbert) como la característica esencial de su metodología. “They also shared a philosophy of mathematics in which Hilbert was the central and indeed paradigm figure, although it was a Hilbert adapted to their purposes more than perhaps they knew” (Gray, 2000, 198). Después de la guerra, la perspectiva de Bourbaki de desplazó desde la simple axiomatización hacia una filosofía de las matemáticas más elaborada, considerando esta disciplina esencialmente como un conjunto de estructuras en las que lo esencial era las relaciones entre los objetos, siendo irrelevante la descripción de dichos objetos, es decir, una filosofía estructuralista muy alejada de los puntos de vista de Hilbert, aunque seguían reclamándose sus “herederos intelectuales”. El Bourbaki maduro contribuyó a un libro editado por Françoise Le Lionais, que fue traducido al inglés (Le Lionais, 1971) y donde exponían sus planteamientos, al que siguió un manifiesto en *American Mathematical Monthly* (también incluido en la traducción inglesa de la obra antes citada). Gray incluye en su análisis una larga cita de Dieudonné que ejemplifica un importante componente de la interpretación que Bourbaki hacía de Hilbert, el componente *estético* que, en el pensamiento francés antes del desconstructivismo era esencial: “More than by his ingenious discoveries, it is perhaps indeed by the cast of his mind that Hilbert has the most profound effect on the mathematical world; he has taught mathematicians to *think axiomatically,* that is to say, to strive to reduce each theory to its sctricted logical schema, disentangled from contingencies of calculation. It is impossible to count the new and important results to which the application of this doctrine has led, and which had assured its triumph; but, more than by its immediate usefulness, it can be said that it is by its aesthetic and, even in some way, moral attraction that it has won over most young mathematicians; by his intense need to *understand,* his more and more exacting intellectual integrity, by his untiring aspiration toward a science more and more unified, pure and stripped-down, Hilberts truly personified, for the generation between the two World Wars, the ideal of the

y la amplia aceptación de los puntos de vista formalistas en la matemática del siglo XX, por un lado, y la existencia de la postura *formalista* (que sería más correcto llamar *finitista*) de Hilbert en el debate fundacional de los años veinte, por otro lado, llegaron a combinarse de manera interesante para crear una imagen de Hilbert que lo presenta como el gran formalista del siglo XX, y no sólo en lo que respecta al debate fundacional, sino con respecto a la matemática toda. Pero la verdad es que "de ninguna manera puede decirse que lo haya sido (Hilbert) en su concepción general de la matemática, y mucho menos en el sentido descrito por Dieudonné"[151].

Compartiendo la postura de Corry de que Hilbert no fue un formalista (en el sentido ya canónico fijado por Bourbaki) ni siquiera en el debate fundacional, veremos que la influencia del punto de vista kantiano es determinante en su concepción de la matemática[152] y, en ese

---

mathematician". Citado en (Gray, 2000, 201). Como dice Gray, "I have quoted at such length from this essay because it is surely as eloquent about Bourbaki as it is about Hilbert". Recientemente Leo Corry (1992 y 1996) ha sostenido que, a pesar de sus manifiestos programáticos, Bourbaki nunca realizó en la práctica el estructuralismo que proclamaba, que se trataría de un estructuralismo inconsistente y *ad hoc*; el mito de su estructuralismo se afianzaría por las influencias culturales de una época que lo tomaron como referencia, con Levi-Strauss reivindicando el modelo de Bourbaki para su antropología o con Piaget haciendo lo mismo para su pedagogía. Pero la influencia de Bourbaki mucho más allá de esa generación se basó sin duda fundamentalmente en la alta calidad matemática de los trabajos de sus miembros individuales (Gray, 2000, 203). En todo caso, su interpretación de Hilbert está claramente muy alejada de la que se presenta en este trabajo. Otra importante influencia directa del trabajo de Hilbert fue en los USA (además de la influencia indirecta allí de Bourbaki ya reseñada) la realizada a través de la importante e influyente comunidad matemática de Chicago en torno a E. H. Moore y Oswald Veblen. Moore acudió a Göttingen en 1899 a la ceremonia del memorial de Gauss-Weber (ocasión para la que Hilbert escribió los *Grunlagen der Geometrie*) y llevó esas nuevas ideas de vuelta a América donde en 1901 dirigió un seminario sobre los fundamentos de la Geometría y la obra de David Hilbert. El tratamiento axiomático se extendió a las más diversas disciplinas gracias a la *American school of postulation theorist*, como ellos mismos se autodenominaban, y entre los que sobresalen además Robert Lee Moore (probablemente el matemático americano más influyente de la primera mitad del siglo XX) y R. L. Wilder (Scanlon, 1991), (Gray, 2000, 104-109).

151 Corry intenta justificar la descripción de la posición de Hilbert (en relación con la Geometría) como básicamente empirista, aunque reconoce su fuerte influencia por Kant. Así, al discutir la ordenación de los axiomas de la geometría en cinco grupos separados y distintos realizada por Hilbert en su obra de 1899 *Die Grundlagen der Geometrie*, Corry señala que "los grupos no tienen ningún significado lógico de por sí. Antes bien, ellos reflejan la concepción de Hilbert de los axiomas como expresión de nuestra intuición espacial y las diferentes formas en que ésta se presenta. Cabe señalar aquí que el término *intuición* que aparece tanto en el libro de Hilbert como en la gran mayoría de los textos contemporáneos, se refiere de una manera u otra, al concepto kantiano *Anschauung* que fue interpretado en formas diversas y sutilmente diferentes a lo largo de los años. Obviamente no podremos entrar aquí en una discusión completa de este complejo tema" (Corry, 2002, 38).

152 Además de las citas y argumentos que iremos desgranando en este trabajo, pueden mencionarse algunas referencias clave que, con distintos matices, abundan en esta tesis: Para Bell (2001, 201-202), "Hilbert pensó sin embargo, como hizo Kant, que la Geometría es, en última instancia *el análisis lógico de nuestra intuición del espacio* (...) elaboró una sutil filosofía de las Matemáticas, que más tarde sería conocida como *formalismo*, que difiere en importantes aspectos del logicismo de Frege y Russell, y que comporta ciertas características kantianas (...) y en el fondo Hilbert, como Kant, esperaba fundamentar las Matemáticas sobre la descripción de configuraciones espacio-temporales concretas, solamente que Hilbert restringirá esas configuraciones a *signos concretos*, tales como inscripciones sobre el papel". Para Stewart Shapiro (1997, 157), "Hilbert era consciente de que, a cierto nivel, la intuición espacial o la observación permanece como la fuente de los axiomas de la Geometría. En los escritos de Hilbert, sin embargo, el rol de la intuición está cuidadosa y rigurosamente limitado a la motivación y a la heurística. Una vez que los axiomas han sido formulados, la intuición es apartada". Y en (Shapiro, 2000, 148) se asigna a Hilbert en el apartado *Deductivismo* (y no en *Formalismo*), repite exactamente las mismas palabras y añade "ellas [la intuición y la observación] no son parte de las Matemáticas" (Shapiro, 2000, 151). Para Philip Kitcher (1984, 48), "Aunque Hilbert es generalmente asignado como formalista, sus escritos están llenos de anhelos de mostrar la certeza de la Matemáticas". Ya en 1958 Georg Kreisel (1964, 208) señalaba que "Hilbert no era ciertamente un fanático de un formalismo crudo; así, mientras que sus problemas concernían a propiedades sintácticas de

sentido, las oposiciones del tipo empirista-platonista se diluirían como enfoques mal planteados dentro del esquema cognitivo kantiano, si bien su lectura de Kant, en particular su interpretación del *a priori*, hacen posible la polémica interpretación de Corry en el sentido de un empirismo, aunque matizado, en la postura de Hilbert ante la Geometría. Distinguiremos la posición de Hilbert ante la Matemática y el conocimiento científico en general, de su posición, más restrictiva aunque subsumida en la anterior, en relación con el debate fundacional. Indagaremos su lectura de Kant, y en particular en relación con la intuición en las Matemática, pero también los puntos en los que considera que Kant debe ser revisado, así como las coincidencias e incompatibilidades entre su lectura de Kant y la que nosotros hemos desarrollado aquí.

4.2.- Kant y Hilbert.

4.2.1.- La lectura de Kant por Hilbert y la interpretación de la intuición kantiana en su concepción general del conocimiento.

El objetivo de este apartado es, en primer lugar, localizar las opiniones explícitas de Hilbert sobre el conocimiento en general y, más específicamente sobre el conocimiento matemático, y que están dispersas en diversos artículos y conferencias. Se trata de ofrecerlas textualmente en su conjunto y de analizarlas haciendo explícitos sus rasgos característicos, para después compararlas con las de Kant especialmente en relación con el rol que asignan ambos a la intuición. Y también se trata de establecer la lectura que Hilbert hace de Kant y que, como veremos, en algunos aspectos fundamentales no coincide con la nuestra. Desde nuestro punto de vista, debería considerarse a Hilbert un "kantiano ecléctico"[153] que, partiendo de las interpretaciones de Kant predominantes en su época –muy influenciadas por la interpretación del Idealismo alemán-, intenta una modificación de algunos aspectos básicos de esa interpretación kantiana para hacerla compatible con los enfoques de la ciencia moderna, pero siempre desde el convencimiento de que la teoría del conocimiento de Kant era, en lo esencial, la adecuada para entender la esencia del enfoque científico. Y en este sentido existe un gran paralelismo con Cassirer, y algunas de cuyas conexiones –en particular la importancia que ambos asignan a los *elementos ideales* en las modernas construcciones matemáticas-intentaremos establecer. Aunque veremos que algunos autores sostienen la existencia en Hilbert de una ruptura y superación de Kant, bien por un enfoque fenomenológico (Majer, 1993 y 1995), bien por un enfoque empirista (Corry, 1997, 2002, 2006 y 2008).

---

sistemas formales, las soluciones eran dadas por un razonamiento intuitivamente correcto, y él consideraba explícitamente como innecesaria cualquier formalización de este razonamiento". Para James Robert Brown (Brown, 2008, 70), "y, a causa de que el espacio y el tiempo (o la geometría y la aritmética) son nuestras creaciones, podemos conocer sus propiedades a priori. Así, un kantiano como Hilbert podría decir que las verdades matemáticas finitistas, íntimamente ligadas con la percepción, podían ser conocidas con completa certeza. Hilbert adoptó este esquema kantiano. Su innovación consistió en aplicarlo a los símbolos matemáticos mismos, considerados como objeto de experiencia (...) Pero él quería mucho más que esto (...) quería preservar la totalidad de las matemáticas clásicas con sus totalidades infinitas". El que ha desempeñado una labor de pionera en el desarrollo de estas sugerencias es Leo Corry, quien además ha efectuado una importante labor recopilatoria y clasificatoria de los textos de Hilbert, la cual se refiere en la Bibliografía. También Wilfried Sieg (1988, 1990, 1994 y 1999) ha cuestionado recientemente la interpretación dominante de Hilbert, y basándose en un análisis de su correspondencia con Russell, Frege y otros plantea la complejidad de la filosofía de la Matemática de Hilbert.

[153] Esa es precisamente la calificación que Peckhaus (2014) otorga a Frege, cuando analiza sus contactos con la escuela neokantiana friseana de Jena y se plantea si realmente Frege fue en sus concepciones un neokantiano, o bien, un kantiano autodidacta que asumía algunas de las teorías cognitivas de Kant, pero dentro de una concepción propia de su temática.

El 4 de junio de 1925, bajo el título *Über das Unendliche*, Hilbert pronunció una conferencia en Münster, en la Sociedad Matemática de Westfalia, en honor a la memoria de Weierstrass[154]. En esta conferencia, una de las más elaboradas, complejas y completas de las pronunciadas por David Hilbert, se desarrollan varios temas importantes. Así, se pregunta:

> "¿No estará fallando en alguna parte la inferencia lógica concreta (das inhaltliche logische Schliessen) y dejando de satisfacer nuestras expectativas cuando la aplicamos a objetos o sucesos reales? La respuesta a esto último es definitivamente negativa. La deducción lógica concreta es absolutamente indispensable. Sólo puede conducirnos a errores cuando aceptamos construcciones conceptuales arbitrarias, en particular aquéllas que se aplican a una infinidad de objetos" (Hilbert, 1926, 170)[155].

Y añade la respuesta. Esta respuesta contiene también una (de sus muchas) reivindicaciones explícitas de la filosofía de la Matemática de Kant para justificar su posición y, además, una manifestación explícita de su concordancia con Kant en lo que respecta a una separación tajante entre Matemática y Lógica:

> "Lo que en tales casos sucede es que hemos usado de manera ilícita la inferencia lógica concreta, es decir, hemos hecho caso omiso de las condiciones previas y necesarias para su aplicación. Por lo demás, en esta observación relativa a la existencia de condiciones de aplicabilidad de tales deducciones e inferencias y de la necesidad de su cumplimiento satisfactorio coincidimos plenamente con la filosofía, especialmente con Kant. Ya Kant había indicado, y por cierto, esto formaba una una parte fundamental integradora en su teoría, que la Matemática dispone de un contenido propio independiente de toda Lógica y, en consecuencia, no puede nunca ser fundamentada sólo a través de la Lógica, por lo cual los esfuerzos de Frege y Dedekind estaban de antemano condenados al fracaso. Más bien está ya algo dado en la representación como precondición para la aplicación de la inferencia lógica y para la realización de operaciones lógicas: ciertos objetos concretos extralógicos que intuitivamente como vivencia inmediata (unmittelbare Erlebnis) están ahí previamente a todo pensamiento... esta es la concepción filosófica fundamental que, yo para la Matemática, como absolutamente para todo pensamiento científico, toda comprensión y toda comunicación sostengo como exigible" (Hilbert, 1926, GA, tomo-III, 170- 171)[156].

---

[154] Se publicó, presumiblemente ampliada, en los *Mathematische Annalen 95 (1926), pág.161-190,* y fue reeditado al año siguiente en el *Jahresberricht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 36, pág.201-215.* Una versión abreviada se editó como apéndice a la 7ª edición de "Grundlage der Geometrie" y aparece traducida al español en la edición de dicha obra del CSIC referida en la Bibliografía. Hay una traducción completa del artículo, junto con otros relevantes, en "Fundamentos de las Matemáticas", (edición limitada, 1000 ejemplares) Servicios Editoriales de la UNAM, Mexico D.F., 1993. Las citas de las que no existe traducción son traducciones directas de las obras de Hilbert que pueden obtenerse online en **www.sub.uni.goettingen.de** . La mayoría están también en: "Gesammelte Abhandlungen", 3 Bände, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932, que utilizamos como referencia básica.

[155] "Vorhin haben wir gesehen, dass in der Wirklichkeit das Unendliche nirgends zu finden ist, was für Erfahrungen und Beobachtungen und welcherlei Wissenschaft wir auch heranziehen. Sollte nun das Denken über die Dinge so unähnlich den Geschehnissen mit den Dingen sein und so andersartig vor sich gehen, so abseitig von aller Wirklichkeit? Ist es nicht vielmehr klar, dass wir uns, wenn wir die Realität des Unendlichen in irgendeinem Sinne zu erkennen glaubten, nur haben durch den Umstand dazu verleiten lassen, dass wir tatsächlich in der Wirklichkeit so oft so ungeheure Dimensionen im Groβen und im Kleinen antreffen? *Und das inhaltliche logische Schlieβen, hat uns denn dieses irgendwo getäuscht oder im Stich gelassen, wenn wir es auf wirkliche Dinge oder Geschehnisse anwandten? Nein – das inhaltliche logische Schlieβen ist unentbehrlich. Getäuscht hat es nur dann, wenn wir beliebige abstrakte Begriffsbildungen hinnahmen, auch solche, unter die unendlichviele Gegenstände fallen*" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 170).

[156] "Wir haben dann das inhaltliche Schlieβen eben unzulässig angewandt; d. h. wir haben offenbar notwendige Vorbedingungen für die Anwendung inhaltlichen logischen Schlieβens nicht berücksichtigt. Und in der Erkenntnis, dass solche vorhanden sind und berücksichtigt werden müssen, befinden wir uns in Übereinstimmung mit den Philosophen, insbesondere mit Kant. Schon Kant hat gelehrt –und zwar bildet dies einen integrierenden Bestandteil seiner Lehre-, dass die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik

Esta cita contiene aspectos fundamentales de su posición y será tratada en varios puntos. ¿Pero qué es exactamente para Hilbert ese objeto dado en la intuición?

> "Si deben ser las conclusiones lógicas seguras, deben ser esos objetos susceptibles de una visión global completa de todas sus partes, y que su presencia, sus diferencias mutuas, su sucesión o concatenación con el objeto sean al mismo tiempo inmediatamente dadas intuitivamente como algo que no se puede reducir a otra cosa, o algo que no necesita ser reducido" (Hilbert, 1926, 171)[157].

Y aquí hace una mención a su noción de la intuición de formas pero que el conjunto de la cita y las explicaciones del conjunto de la conferencia supera ampliamente: "und insbesondere in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich und wiedererkenntbar ist"[158].

Existe una cierta contradicción entre esta referencia a los "signos concretos" como los propios objetos matemáticos –enfoque que sería la base de su *Beweistheorie* y de su planteamiento de la Lógica- y sus continuas referencias a los objetos *extralógicos* a los que se remitiría la *intuición matemática*. Ciertamente que esa *intuición de formas* referida a los "signos concretos" puede considerarse una noción de intuición plenamente compatible con la noción de intuición de Kant que hemos desarrollado en los capítulos anteriores, pero sus continuas referencias a la *inhaltliche Mathematik* y a la intuición de sus objetos propios como base de toda teoría matemática hacen evidente que paralelamente sostiene otra noción más amplia de *la intuición*. Además, la desliga de la asociación que hacía la interpretación del Idealismo alemán entre *la intuición* y el *A priori* en Kant, y que él asume. A continuación de las citas mencionada, Hilbert particulariza esta visión en relación con el problema concreto planteado por la llamada "crisis fundacional", y que comentaremos más adelante al analizar este problema. Pero, como ya mencionamos, su postura a este respecto es mucho más restrictiva que su postura general, que es el punto que ahora queremos desarrollar. Aunque en su aplicación de estas ideas al problema de la "crisis fundacional" parece que limita la intuición a lo que hemos llamado los usos 1,2,3 y 4 de la intuición por Kant y en este sentido parece compatible con nuestra lectura de Kant, sin embargo su posición general ante el conocimiento científico y el papel de las Matemáticas en él ofrece una interpretación más amplia que desborda nuestra lectura de Kant. Se puede sostener (Mejer) que esos objetos extralógicos "dados previamente a todo entendimiento en la representación" deben entenderse

---

gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann, weshalb auch die Bestrebungen von Frege und Dedekind scheitern müssten. Vielmehr ist als Vorbedingungen für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, auβer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schlieβen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihre Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren lässt oder einer Reduktion bedarf. Dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 170-171).

[157] "Soll das logische Schlieβen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihre Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren lässt oder einer Reduktion bedarf" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 171).

[158] "y específicamente en la Matemática los objetos que consideramos son los propios signos concretos, cuya forma es para nuestra percepción inmediatamente clara y reconocible" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 171).

desde una lectura fenomenológica, a menos que consideremos que son objetos puestos por el pensamiento, dando así legitimidad a lo que llamábamos el 5º sentido de la intuición en Kant que, como vimos, era harto discutible y conflictivo en el mismo Kant. Aunque también podría sostenerse como verosímil, y esa es nuestra opinión, que Hilbert hace la lectura hegemónica de la tradición del idealismo alemán e interpreta la intuición kantiana como una especie de facultad psicológica extralógica que permitiría "ver inmediatamente" el objeto en que consistiría "la cosa en sí". Hay muchos pasajes que avalarían esta interpretación y, en particular, su lectura del "a priori" kantiano que el mismo considera (bajo esa interpretación) sobredimensionado por Kant y que justificaría su reivindicación empiricista y experimental, al rechazar tal uso del apriori en muchos temas, aspecto que destaca Corry como fundamental en el enfoque cognitivo de Hilbert. Si obviamos esta interpretación, el análisis de Corry que asigna a Hilbert una posición fundamentalmente empirista sería evidente. Así, en su artículo *Naturerkennen und Logik*[159], Hilbert escribe:

> "Queremos aprovechar hoy esta situación favorable (se refiere a la espectacular explosión de nuevos descubrimientos y teorías en las ciencias naturales producida en esos decenios) para tratar un viejo problema filosófico en relación con nuestro tema, precisamente la controvertida cuestión acerca de la participación que, de un lado el pensamiento y del otro la experiencia, tienen en nuestro conocimiento. (...) Tenemos la ventaja frente a los antiguos filósofos de haber convivido con una gran cantidad de descubrimientos importantes (...) y en ellos se muestra continuamente cómo teoría y praxis, pensamiento y experiencia están entrelazados" (Hilbert, GA, tomo-III, 378- 379)[160].

> "Pero aún más sorprendente es una evidencia, que nosotros llamaremos, en un sentido distinto que Leibniz, la armonía preestablecida que, precisamente, consiste en una materialización y realización del pensamiento matemático (...) Sólo podemos comprender esa concordancia (Übereinstimmung) entre Naturaleza y Pensamiento si consideramos el elemento formal , y el mecanismo con él asociado, en ambos lados, en la naturaleza y en nuestro entendimiento" (Hilbert, GA, tomo-III, 381)[161].

Esta última opinión aparece en muchos otros sitios de su obra. Por ejemplo, en diciembre de 1930 pronunció una conferencia ante la Sociedad Filosófica de Hamburgo con el título "die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre"[162]. La conferencia comienza así:

> "Cuando en la esfera de las Matemáticas examinamos las dos fuentes de nuestro conocimiento, es decir, la experiencia y el pensamiento puros, surge una serie de ideas que podrían también resultar de interés para la Filosofía. (...) La unidad de las leyes de la naturaleza, que a veces se nos aparece de forma tan sorprendente, puede ser considerada como un ejemplo de ambas fuentes. Sin embargo, un fenómeno aún más notorio que el de esta idea de la unidad

---

159 Publicado en *Naturwissenschafften,* 1930, pp-959-963 y recogido en (Hilbert, GA, tomo III, pp-378-387).

160 "Wir wollen heute diese günstige Lage benutzen, um unserem Thema entsprechend ein altes philosophisches Problem zu behandeln, nämlich die vielumstrittene nach dem Anteil, den das Denken einerseits und die Erfahrung anderseits an unserer Erkenntnis haben (…) wir haben also den älteren Philosophen gegenüber den Vorteil, eine große Anzahl solcher Entdeckungen miterlebt (…) und darin zeigen sich beständig Theorie und Praxis, Denken und Erfahrung aufs innigste verschlungen" (Hilbert, GA, Band III, 378- 379).

161 "Aber noch auffallender ist eine Erscheinung, die wir in anderem Sinne als Leibniz die prästabilierte Harmonie nennen, die geradezu eine Verkörperung und Realisation mathematischer Gedanken ist (…) wir können diese Übereinstimmung zwischen Natur und Denken, zwischen Experiment und Theorie nur verstehen, wenn wir das formale Element und den damit zusammenhängenden Mechanismus auf beiden Seiten der Natur und unseres Verstanden berücksichtigen" (Hilbert, GA, Band III, 381).

162 (La fundamentación de la teoría elemental de números). El texto fue publicado en 1931 en Mathematische Annalen 104, pp.485-494, y su parte fundamental aparece recogida en GA, tomo III, pp.192-195. Se basa en la conferencia impartida en Diciembre de 1930 en la *Philosophische Gesellschaft* de Hamburgo.

es el que podríamos llamar la armonía preestablecida, que pone claramente de manifiesto la existencia de una relación entre la naturaleza y el pensamiento" (Hilbert, 1931, 485)[163].

A continuación intenta aclarar con dos ejemplos a qué se refiere al hablar de esa "armonía preestablecida":

> "El ejemplo más extraordinario y maravilloso de la misma nos lo ofrece la ahora célebre teoría de la relatividad de Einstein. En ella, la exigencia general de invariantes determina por sí sola, de manera unívoca, las complicadas ecuaciones diferenciales para los potenciales de gravitación. Pero esa determinación no sería posible sin el profundo trabajo de investigación llevado a cabo por Riemann con mucha anterioridad. En realidad, el hecho de que un sistema formal tan complejo, con coeficientes numéricos, tenga su origen en una idea general, constituye un caso más bien aislado, inclusive en el Análisis Matemático. La Teoría de la Demostración, que a continuación discutiremos, representa igualmente un ejemplo de armonía preestablecida. Esta teoría se sirve del llamado Cálculo Lógico, desarrollado con anterioridad con fines muy diferentes" (Hilbert, 1931, 485)[164].

Repite esta misma idea y estos mismos ejemplos en la ya citada conferencia "Acerca del Infinito":

> "¿Cómo puede ocurrir esto? Por suerte para nosotros entra aquí en escena la misma armonía preestablecida que observamos tan frecuentemente en la historia del desarrollo de las ciencias, precisamente esa armonía de la que Einstein, por ejemplo, saca provecho cuando, para su Teoría de la Gravitación, encuentra completamente elaborado el Cálculo General de Invariantes; nosotros encontramos el Cálculo Lógico elaborado ya de forma avanzada" (Hilbert, 1926, GA, tomoIII, 176)[165].

Y en *Naturerkennen und Logik* se extiende con más detalle en precisar estas ideas y aporta otros ejemplos (GA, tomo III, 380-381): Primeramente indica que hay tres aspectos relacionados con el tema: "si ahora nos centramos en nuestro propio problema, cómo se interrelacionan Naturaleza y Pensamiento, quisiéramos traer a colación aquí tres puntos de vista principales. El primero asociado al problema ya mencionado del infinito. Como vimos: el infinito no se realiza en ninguna parte; no está disponible ni en la naturaleza ni aún tampoco como fundamento en nuestro pensamiento, a menos de que dispongamos de precauciones especiales. Aquí ya vislumbro un paralelismo importante entre Naturaleza y Pensamiento, una

---

[163] "Wenn wir die beiden Quellen unserer Erkenntnis, die Erfahrung und das reine Denken, im mathematischen Bereiche untersuchen, so treffen wir eine Reihe von Gesichtspunkten an, die vielleicht auch vom philosophischen Interesse sind (…) Die Einheit der Naturgesetze, die wir oft in so überraschender Wiese antreffen, kann als Beispiel für beide Erkenntnisquellen gelten. Aber noch auffallender als dieser Gesichtspunkt der Einheit ist eine Erscheinung, die wir die prästabilierte Harmonie nennen und die in einem Zusammenhang zwischen Natur und Denken deutlich bezeugt" (Hilbert, 1931, 485).

[164] "Das groβartigste und wunderbarste Beispiel für die prästabilierte Harmonie ist die berühmte Einsteinsche Relativitätstheorie. Hier werden allein durch die allgemeine Forderung der Invarianz die recht komplizierten Differentialgleichungen für Gravitationspotentiale eindeutig aufgestellt; und diese Aufstellung wäre unmöglich gewesen ohne die tiefgehenden und schwierigen mathematischen Untersuchungen von Riemann, die lange vorher da waren. Es ist sogar ein in der mathematischen Analysis vereinzelter Fall, dass ein so kompliziertes spezielles Formelsystem mit numerischen Koeffizienten aus einem allgemeinen Gedanken entspringt. Auch meine nachher hier zu erörternde Beweistheorie ist ein Beispiel für die prästabilierte Harmonie. Denn sie bedient sich des sogenannten Logikkalküls, der seinerseits vorher und zu ganz anderen Zwecken, nämlich lediglich zur Abkürzung und Mitteilung von Aussagen, ersonnen war" (Hilbert, 1931, 485).

[165] "Wie kann das geschehen? Da tritt nun zum Glück für uns dieselbe prästabilierte Harmonie ein, die wir so oft in der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft bemerken, -die Einstein zustatten kam, als er für seine Gravitationstheorie den voll ausgearbeiteten allgemeinen Invariantenkalkül vorfand: wir treffen als fortgeschrittene Vorarbeit den *Logikkalkül* an" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 176).

concordancia fundamental entre experiencia y teoría. Todavía percibimos otro paralelismo: nuestro pensamiento surge de la unidad y busca construir la unidad; de otro lado, observamos la unidad de las sustancias en la materia y constatamos por todas partes la unidad de las leyes de la naturaleza". Continúa con una larga exposición de ejemplos que confirmarían esta observación y concluye: "Pero todavía más sorprendente es una apariencia, que nosotros, en otro sentido que Leibniz, denominamos la armonía preestablecida, que precisamente consiste en una realización de los pensamientos matemáticos"[166].

Y aquí describe otros ejemplos que confirmarían esta idea: "el ejemplo más antiguo de ello son las elipses, que fueron estudiadas mucho tiempo antes de que siquiera se intuyera que los planetas, y menos aún, que los electrones se movían en tales trayectorias. Pero el ejemplo más grandioso y maravilloso de la armonía preestablecida es la famosa Teoría de la Relatividad einstiniana". Y repite al respecto los mismos argumentos que ya hemos mencionado en las citas de otros artículos. También menciona lo que hoy conocemos como Teoría de los Espacios de Hilbert y su posterior aplicación en la Teoría Espectral en la Física. El tema de la Teoría General de Invariantes y la teoría de la Relatividad en Física, y el papel que Hilbert asocia a este asunto en relación con la "armonía predeterminada" ha sido estudiado muy recientemente por Corry (2004), Sauer (2005) y Brading y Ryckman (2008) en base a este artículo y a las dos comunicaciones sobre el tema de Hilbert a la Academia de Ciencias de Göttingen (1915 y 1917) y varios trabajos y lecciones de 1916-1917 que se referencian el la Bibliografía. Un estudio en detalle del tema se sale de nuestra investigación, pero debemos resaltar algunas conclusiones de carácter metodológico de la investigación de Brading y Ryckman (2008, 6): "Hay dos piezas contextuales que creemos que son cruciales para un correcto entendimiento del tratamiento de Hilbert de la física general covariante: su método axiomático y su apelación a la epistemología kantiana". Para estos autores, la utilización del método axiomático en el tratamiento del tema, con cuya utilidad no estaba Einstein de acuerdo, debe entenderse desde el rol epistemológico que Hilbert asociaba a tal método, y no sólo en este tema particular, sino "en todo conocimiento científico suficientemente desarrollado":

> "Sin embargo, en el uso de Hilbert este término (axioma) no implica meramente la típica preocupación matemática por el rigor de los enunciados explícitos de una teoría, sino que más bien connota también un método específicamente lógico y matemático de investigación de la 'profundización en los fundamentos' de la teoría. Por tanto, con la invocación del 'método axiomático' Hilbert estaba llamando la atención sobre un método epistemológico específico de investigación de las teorías matemáticas (incluyendo las de la Física) que él había inaugurado, y que veía íntimamente ligado a la naturaleza del propio pensamiento" (Brading & Ryckman, 2008, 6).

No parece quedarles dudas tampoco de que su enfoque se inspiraba en su lectura de Kant: "En términos más generales, tal y como la directiva de Kant prescribe, el método axiomático es concebido como un análisis lógico que comienza con ciertos 'hechos' presentados a nuestra intuición finita o a nuestra experiencia" (Brading & Ryckman, 2008, 7),

---

[166] "Wenn wir uns nun unserem Problem selber, wie Natur und Denken zusammenhängen, zuwenden, so wollen wir hier drei Hauptgesichtspunkte zur Sprache bringen. Der erste knüpft an das soeben besprochene Problem der Unendlichkeit an. Wir sahen: das Unendliche ist nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden noch als Grundlage in unserem Denken ohne besondere Vorkehrungen zulässig. Hierhin schon erblicke ich einen wichtigen Parallelismus von Natur und Denken, eine grundlegende Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie. Noch einen anderen Parallelismus nehmen wir wahr: unser Denken geht auf Einheit aus und sucht Einheit zu bilden; wir beobachten die Einheit des Stoffes in der Materie, und wir konstatieren überall die Einheit der Naturgesetze. (…) Aber noch auffallender ist eine Erscheinung, die wir in anderem Sinne als Leibniz die prästabilierte Harmonie nennen, die geradezu eine Verkörperung und Realisation mathematischer Gedanken ist" (Hilbert, GA, Band III, 380-381).

opinión que concuerda bien con las primeras citas arriba expuestas. Sin embargo, Brading y Ryckman observan también en Hilbert una modificación del punto de vista de Kant, particularmente en la concepción y el rol atribuido al *a priori* así como en las limitaciones de la objetividad por las 'condiciones de la posibilidad de la experiencia':

> "En el contexto de una discusión sobre los puntos de vista de Hilbert acerca de los fundamentos de la Matemáticas, Peckhaus ha remarcado recientemente que 'la preferencia de Hilbert por el kantismo era ampliamente incompatible con la Filosofía de Kant'. Pero esto debería ser tomado más bien como un dicho ingenioso, por cuanto que depende totalmente de qué se entiende por 'Filosofía de Kant' (...) Debería decirse que Hilbert, a través del método axiomático, fue el primer neokantiano que puso su dedo exactamente allí donde la teoría General de la Relatividad exigía una modificación del esquema tradicional kantiano que expresamente limitaba las condiciones de objetividad por condiciones de posibilidad de la experiencia" (Brading & Ryckman, 2008, 44).

> "En suma, las dos comunicaciones de Hilbert sobre los 'fundamentos de la Física' son una respuesta epistemológica compleja a la relatividad general, hasta ahora no reconocida, y ligada directamente a su empleo del 'método axiomático'" (Brading & Ryckman, 2008, 49)

Y ciertamente la respuesta es compleja porque, allí donde Brading y Ryckman observan la aceptación por Hilbert de una determinación del concepto en las leyes físicas, debería matizarse de que *solamente dentro del sistema axiomatizado*, porque, de nuevo en *Naturerkennen und Logik*, después de señalar la Teoría de la Relatividad como el paradigma de la por él denominada *armonía preestablecida*, Hilbert continúa:

> "Si bien esa armonía preestablecida ni agota las relaciones entre Naturaleza y Pensamiento ni revela tampoco los secretos más profundos de nuestro problema (...) El seguimiento de estos métodos debería por tanto conducir, según parece, a un sistema de leyes naturales que, en su conjunto, se adecuarían a la realidad y entonces se necesitaría sólo, de hecho, del Pensamiento, esto es, de la deducción conceptual, para alcanzar todo el saber sobre el mundo físico; parecería como si tuviera Hegel razón en la creencia de que todo el acontecer de la Naturaleza pudiera deducirse de los conceptos. Pero esa consecuencia es incorrecta. Pues, ¿cuál es el origen de las leyes del mundo? ¿Cómo las alcanzamos nosotros? Y ¿quién nos enseña que éstas se adecúan a la realidad? La respuesta es que todo esto sólo es posible para nosotros exclusivamente a través de la experiencia. Al contrario que Hegel, nosotros reconocemos que las leyes del mundo no se pueden obtener de ninguna otra forma que de la experiencia. Sería posible que por construcción de la operativa de los conceptos físicos pudieran operar una multitud de puntos de vista especulativos, pero el si una determinada ley propuesta y el aparato lógico de conceptos a ella asociada son adecuados, el decidir esto, es exclusivamente un asunto de la experiencia" (Hilbert, GA, tomo III, 382)[167].

Es esta posición tan claramente expresada la que avalaría la opinión de Corry de que "como veremos en las páginas siguientes, la concepción de Hilbert de la Geometría mucho antes que formalista, era esencialmente empiricista" (Corry, 2002, 32), en tanto y cuanto

[167] "Indes auch diese Prästabilierte Harmonie erschöpft noch nicht die Beziehungen zwischen Natur und Denken und enthüllt noch nicht die tiefsten Geheimnisse unseres Problem. (…) Die Verfolgung dieser Methoden müsste, so scheint es, dann wirklich zu einem System von Naturgesetzen führen, das auf die Wirklichkeit in ihrer Gesamtheit passt, und dann bedürfte es tatsächlich nur des Denkens, d. h. der begrifflichen Deduktion, um alles physikalische Wissen zu gewinnen; alsdann hätte Hegel recht mit der Behauptung, alles Naturgeschehen aus Begriffen deduzieren zu können. Aber diese Folgerung ist unzutreffend. Denn wie ist es mit der Herkunft der Weltgesetze? Wie gewinnen wir solche? Und wer lehrt uns, dass sie auf die Wirklichkeit passen? Die Antwort lautet, dass uns dies ausschließlich die Erfahrung ermöglicht. Im Gegenteil zu Hegel erkennen wir, dass die Weltgesetze auf keine andere Weise zu gewinnen sind als aus der Erfahrung. Mögen bei der Konstruktion des Fachwerkes der physikalischen Begriffe mannigfache spekulative Gesichtspunkte mitwirken: Ob die aufgestellten Gesetze und das aus ihnen aufgebaute logische Fachwerk von Begriffen stimmt, das zu entscheiden ist allein die Erfahrung imstande" (Hilbert, GA, Band III, 382).

Hilbert expresará esta misma opinión en relación con la verificación de la validez de los axiomas de la Geometría.

Por otro lado, hay muchos puntos en donde se pone en evidencia que Hilbert asocia la intuición con el "a priori" kantiano, en el sentido de que la intuición sería la facultad de conocimiento de ese "a priori" que se absolutiza como una fuente propia de conocimiento. Así en *Die Grunlegung der elementalen Zahlenlehre* dice:

> "Ahora bien, una observación cuidadosa nos conduce a la conclusión de que, aparte de la experiencia y el pensamiento, existe una tercera fuente de conocimiento. Aunque en la actualidad ya no podemos estar de acuerdo con ciertos aspectos del pensamiento de Kant, la idea básica más general de su epistemología conserva, sin embargo, toda su validez: la determinación de las ideas a priori y con ello la investigación de las condiciones de posibilidad de todo conocimiento" (Hilbert, 1931, 485-486)[168].

Parece aquí que es el pensamiento el que aporta lo que se conoce a priori, en cuanto ideas, y debería entenderse tal vez la intuición como "intuición intelectual", que era el 5º uso, como vimos conflictivo y discutible, de la intuición en Kant. Pero, a renglón seguido, cuando intenta aclararlo se remite directamente a su versión limitada de la intuición, que analizaremos al detalle posteriormente, y donde el a priori viene dado por el objeto en la representación y la forma que nosotros intuimos, es decir, esos *signos concretos* a los que vimos que a veces mencionaba como los *propios* objetos matemáticos, repitiendo además a modo de resumen y prácticamente con las mismas palabras una idea que ya hemos citado y que aparece exactamente igual en otros artículos, por ejemplo en éste *Die Grunlegung der elementalen Zahlenlehre* basado en su conferencia en Hamburgo en 1930, donde continúa así:

> "Esto es, en mi opinión, lo que ocurre en mis investigaciones sobre los principios de las Matemáticas. En ellas, lo a priori es, ni más ni menos, un enfoque fundamental que me gustaría llamar también finitista: hay algo que nos está dado de antemano en la representación, esto es, ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como vivencia inmediata y previos a todo pensamiento. Si la inferencia lógica ha de ser algo seguro, es necesario que tengamos una visión global y completa, en todas sus partes, de estos objetos. Su apariencia, su diferenciación, su secuencia y coordinación se nos da con ellos mismos de manera intuitiva e inmediata como algo que ya no es susceptible ni requiere de una reducción adicional. Esta es la concepción fundamental que considero necesaria no sólo para las Matemáticas, sino también, en general, para todo pensamiento, toda comprensión y comunicación científicos, y sin la cual ninguna actividad del espíritu sería posible. Con ello creo haber distinguido y caracterizado la tercera fuente del conocimiento que se añade a la experiencia y a la lógica" (Hilbert, 1931,486)[169].

---

[168] "Indes die aufmerksame Betrachtung führt uns dazu, dass auβer Erfahrung und Denken noch eine dritte Erkenntnisquelle da ist. Wenn wir auch im einzelnen Kant heute nicht mehr zustimmen können, so behält doch der allgemeinste Grundgedanken der Kantsche Erkenntnistheorie seine Bedeutung: jene anschauliche Einstellung a priori festzustellen und damit die Bedingung der Möglichkeit jeder Erkenntnis zu untersuchen" (Hilbert, 1931, 485-486).

[169] "Ich meine, dass dies im Wesentlichen in meinen Untersuchungen über die Prinzipien der Mathematik geschehen ist. Das Apriori ist dabei nichts mehr und nichts weniger als eine Grundeinstellung, die ich auch als die finite Einstellung bezeichnen möchte: es ist uns eben schon im Voraus etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, auβer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbare Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schlieβen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen, und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren lässt oder eine Reduktion bedarf. Dies ist die Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte, und ohne die eine geistige Betätigung gar nicht möglich ist. Damit glaube ich die dritte

Esta lectura distorsionada del rol del "a priori" kantiano, por otro lado paralela a la hipóstasis de "la cosa en sí" y a la interpretación de la intuición como una facultad cuasi-mística, por lo demás predominante en su época y que Prauss puso en evidencia, le fuerza por un lado a reforzar el carácter empirista de su enfoque –que es el que resalta Corry- y, por otro, a desterrar ciertos supuestos principios "a priori", que ahora serían más bien "ideas" puestas por el entendimiento, de su enfoque finitista –más ajustado éste a una interpretación kantiana, aunque restrictiva- en el que obviamente tales "ideas a priori" no cabían. Así, continúa en el mismo artículo:

> "Las ideas a priori son aquéllas ideas intuitivas y lógicas que se obtienen en el marco del enfoque finitista. En éste nos percatamos, en particular, de que hay principios que Kant considera a priori y que nosotros asignamos a la experiencia, por ejemplo, la totalidad de los hechos fundamentales de la Geometría, así como las propiedades elementales del espacio y la materia. Pero existen también, por otra parte, principios que normalmente han sido tenidos como a priori, pero que no es posible obtener en el marco de un enfoque finitista, por ejemplo, el principio del tercero excluido y, en general, los llamados enunciados transfinitos. La aplicación más inmediata y la primera manifestación de los enunciados de este tipo tiene lugar en la teoría de los números" (Hilbert, 1931,486)[170].

Estas ideas las desarrolla también en su conferencia ya referida *Naturerkennen und Logik* detallando algunos de estos aspectos:

> "De hecho, algunos filósofos han sostenido –y Kant es el representante clásico de este punto de partida-, que nosotros, además de la lógica y la experiencia, poseemos también ciertos conocimientos a priori sobre la realidad" (Hilbert, GA, tomo III, 383)[171].

Obsérvese una cierta actitud nativista en la concepción de Hilbert del *a priori* kantiano. En realidad creo que no está nada clara la lectura que Hilbert hace del *a priori* en Kant. En los pasajes que siguen, continuación del anterior, Hilbert especifica lo que, en su concepción, debería ser el *a priori*.

> "Bien, admito que ya para la construcción de los entramados teóricos son necesarias ciertas visiones apriorísticas (gewisse aprioristische Einsichten), y que tales están continuamente en la base de la realización de nuestros conocimientos. Creo que también el conocimiento matemático en el fondo reposa en última instancia en alguna forma de tales visiones intuitivas" (Hilbert, GA, Band III, 383)[172].

Obsérvese que nuevamente el *a priori* viene asociado con la intuición, pero parece que es un uso de la intuición muy distinto que el que desarrolla en sus trabajos sobre la

---

Erkenntnisquelle, die zu Erfahrung und Logik noch hinzutritt, erkannt und charakterisiert zu haben" (Hilbert, 1931,486).

[170] "Die Einsichten a priori sind diejenigen anschaulichen sowie die logische Einsichten, die im Rahmen jener finiten Einstellung, gewonnen werden. Wir werden dabei im Besonderen gewahrt: es gibt Sätze, die Kant als a priori angesehen hat, und die wir der Erfahrung zuweisen. Z.B. die gesamten Grundtatsachen der Geometrie, sowie die elementaren Eigenschaften von Raum und Materie. Aber es gibt anderseits auch Sätze, die wohl meist für a priori gehalten worden sind, die aber nicht im Rahmen der finiten Einstellung gewonnen werden können, z.B. das Prinzip des Tertium non datur sowie überhaupt die sogenannten transfiniten Aussagen. Die nächstliegende Anwendung und das erste Auftreten der transfiniten Aussagen findet in der Zahlenlehre statt" (Hilbert, 1931,486).

[171] "Es haben in der Tat Philosophen –und Kant ist der klassische Vertreter dieses Standpunktes- behauptet, dass wir auβer der Logik und der Erfahrung noch a priori gewisse Erkenntnisse über die Wirklichkeit haben" (Hilbert, GA, Band III, 383).

[172] "Nun gebe ich zu, dass schon zum Aufbau der theoretischen Fachwerke gewisse aprioristische Einsichten nötig sind und dass stets dem Zustandekommen unserer Erkenntnisse solche zugrunden liegen. Ich glaube, dass auch die mathematische Erkenntnis letzten Endes auf einer Art solcher anschaulicher Einsicht beruht" (Hilbert, GA, Band III, 383).

axiomatización de la aritmética y de la Lógica –basados en su interpretación restrictiva de la intuición como *intuición de formas* de los “signos concretos”- que analizaremos en el apartado siguiente, aunque curiosamente inmediatamente a continuación añade:

> “Y (creo) también que incluso para la construcción de la Teoría de los Números tenemos necesariamente una cierta visión intuitiva a priori. Con ello conserva por tanto su significado el pensamiento fundamental más general de la teoría kantiana del conocimiento: esto es, el problema filosófico de determinar a priori cada toma de posición intuitiva y con ello investigar las condiciones de la posibilidad de cada conocimiento conceptual y, al mismo tiempo, de cada experiencia. (...) El Apriori (das Apriori)” -obsérvese la substantivización- “es con ello nada más y nada menos que una postura básica o la expresión de ciertos requisitos inexcusables del Pensar y Experimentar. Pero la frontera, de un lado, entre lo que poseemos a priori y, de otro lado, de aquello para lo que la experiencia es necesaria, debemos disponerla de forma distinta que Kant; Kant había sobrevalorado el rol y la extensión de lo Apriorístico” (Hilbert, GA, tomo III, 383)[173].

Parece difícil sustraerse a la impresión de que Hilbert realiza una lectura del concepto de lo *a priori* en Kant con esa objetivación como ente sustantivo típica de la tradición del idealismo alemán (*das Apriori, das Ding-an-sich, ...*) que ya discutimos y criticamos anteriormente en el Capítulo-1 de este trabajo, y que, con buen criterio, le parecen exageradas sus implicaciones. Lo notable es que asocia el conocimiento de lo *a priori* con la intuición, reforzando la impresión de una lectura nativista de estos conceptos en Kant y, por cierto, desbordando ampliamente el uso que de estos términos hace, como veremos, en su fundamentación de la Aritmética y de la Lógica (y en su *Beweistheorie*). Un último tema clave en el enfoque de Hilbert es el uso que asigna en su concepción epistemológica a los *elementos ideales*, aspecto en el que en gran parte coincide con Cassirer.

4.2.2.- La relación de Hilbert con la escuela neokantiana de Göttingen.

Aunque las referencias directas a Kant aparecen ya en las primeras páginas de los *Grundlagen*[174], sin embargo, como hemos mencionado, los comentaristas del siglo XX las consideraban en general una *forma de hablar* sin contenido real. La opinión general la expresa muy bien Fang (1970, 84): “Hilbert merely liked to quote Kant, the most famous and greatest of all Königsbergers –that was all (…) the situation was rather comparable to the practice of many Russian mathematicians who would begin their works with a few lines of quotation from Marx or Engels or Lenin; these lines could not possibly make their works ‘communistic’ or even philosophical”. Las meras citas anteriores desmienten esta interpretación.

En nuestra interpretación, Hilbert desarrolló su trabajo desde una perspectiva puramente matemática y, más aún, la *autonomía de la Matemática* en el desarrollo de los trabajos científicos propios de esa disciplina sería su concepción más sólida. Es más, gran parte del

---

[173] “Und [ich glaube] dass wir sogar zum Aufbau der Zahlentheorie eine gewisse anschauliche Einstellung nötig haben. Damit behält also der allgemeinste Grundgedanke der Kantschen Erkenntnistheorie seine Bedeutung: nämlich das philosophische Problem, jene anschauliche Einstellung a priori festzustellen und damit die Bedingung der Möglichkeit jeder begrifflichen Erkenntnis und zugleich jeder Erfahrung zu untersuchen. Ich meine, dass dies im Wesentlichen in meinen Untersuchungen über die Prinzipien der Mathematik geschehen ist. Das Apriori ist dabei nichts mehr und nichts weniger als eine Grundeinstellung oder der Ausdruck für gewisse unerlässliche Vorbedingungen des Denkens und Erfahrens. Aber die Grenze einerseits zwischen dem, was wir a priori besitzen, und anderseits dem, wozu Erfahrung nötig ist, müssen wir andre ziehen als Kant; Kant hat die Rolle und den Umfang des Apriorischen weit überschätzt” (Hilbert, GA, Band III, 383).

[174] En la misma Introducción de los *Grundlagen* Hilbert afirma que “die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus” (Hilbert, 1899, 1), y la obra comienza destacando una cita de Kant: “So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen. (Kant, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre T.2. Abt2.)”.

enconamiento que adquirieron los debates durante la *crisis fundacional* se pueden explicar por el empecinamiento de Hilbert en reivindicar esa *autonomía* y no aceptar las prescripciones de filósofos y lógicos. Hilbert tenía, sin embargo, sus propias concepciones filosóficas desde el principio. Se consideraba a sí mismo, como muchos científicos de su época, un kantiano de una forma genérica y posiblemente con poca elaboración filosófica. Aunque no existen referencias sobre los escritos que en este sentido le influyeron y tampoco análisis filosóficos propios de esa primera época, nuestros análisis de sus citas y declaraciones –y nuestro análisis de la Filosofía de la Matemática en los *Grundlagen*- en su primera época, demostrarían que Hilbert tenía ya una idea definida de aspectos filosóficos fundamentales de su trabajo matemático, que aparentemente encontraban su inspiración en Kant, aunque de una forma genérica y sin que se pueda encontrar en sus obras el desarrollo de una teoría cognitiva descrita por él, y tampoco en relación con la Matemática. Sin embargo, sí hemos detectado coincidencias con Kant en aspectos concretos, como en su uso de la intuición en Aritmética y Lógica. Es decir, se puede decir que Hilbert en esa época no era un filósofo, aunque sí era capaz de interpretar aspectos filosóficos de su obra, la cual se desarrollaba desde su concepción de unas exigencias *estrictamente matemáticas*. Pero parece que se produjo un cambio radical a raíz del intercambio epistolar con Frege. Es lo que Peckhaus (1990, 72) denomina *die philosophische Wendung Hilberts*.

La última carta de Hilbert a Frege (Frege, 1976, 75) en su intercambio epistolar terminaba indicando que "Sie werden mich jedenfalls zu einem genaueren Nachdenken und zu einer sorgfältigen Formulirung meiner Gedanken anregen". Y parece que no se trataba sólo de una educada despedida. A partir de ahí Hilbert modificó sustancialmente los planteamientos de su *programa* y se involucró activamente en la política de personal de la Universidad de Göttingen intentando favorecer la contratación de profesorado que pudiera ayudarle en el desarrollo de su programa matemático y también, y esto es muy significativo, en el desarrollo de una escuela de filosofía de la Matemática orientada bajo su influencia y en línea con las necesidades de su *programa*. En primer lugar, en todos sus artículos y conferencias realizados a partir de 1905 modificó aspectos esenciales de su *programa*. La naturaleza del cambio entre 1904 y 1917 la explicaba muy bien Otto Blumental en (Hilbert, GA, Band-III 1935, 422):

> "Lange Zeit ruhte Hilberts Beschäftigung mit diesen Fragen, wenn er sich auch mehrfach in Vorlesungen über Prinzipien der Mathematik berührt hat. Dagegen verfolgte er mit lebhaftestem Interesse E. Zermelos mengentheoretische Gedanken, sein Auswahlpostulat un seine Axiomatik der Mengenlehre. Auf der anderen Seite machte er sich mit der Logikkalkül in seinen verschiedenen Formen bekannt, denn er hatte sogleich nach 1904 bemerkt, dass ohne eine übersichtliche und vollständige Formalisierung der logischen Schlussweisen auf dem von ihm erstrebten Wege nicht vorwärts zu kommen war".

Hilbert olvidó su antigua opinión de que el cálculo lógico aparecía ya como una teoría sólida y acabada para nuestro uso, se propuso su desarrollo axiomático que debería ir ligado a un desarrollo paralelo en la Aritmética, cuya demostración de consistencia sería clave, y concibió que una fundamentación de la Matemática era inseparable de una fundamentación de la Teoría de Conjuntos. Para Peckhaus, esas ideas están por primera vez claramente expuestas en su curso *Logischen Prinzipien des mathematischen Denkens* (Hilbert, 1905)[175], pero también está claramente expuesto en su artículo y conferencia *Axiomatisches Denken* (Hilbert, 1917)[176] y en su conferencia *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* (Hilbert,

---

[175] Curso dictado en Göttingen en el semestre de verano de 1905. Publicado en (Hilbert, 2006).

[176] *Mathematische Annalen*, 78:405–15, 1918. Conferencia pronunciada en la Sociedad Suiza de Matemática, 11 Septiembre 1917. Reimpreso en (Hilbert, 1935, Band III, 146–56). Traducción inglesa en (Ewald, 1996, 1105–1115).

1905)[177], donde proponía "un desarrollo simultáneo de las leyes de la Lógica y de la Aritmética" que, a través de una introducción sucesiva de operadores lógicos y matemáticos diseñados "desde un punto de vista pragmático", deberían en un proceso *progresivo* reinterpretar la *construcción* de un cálculo axiomático del Cálculo de Predicados, el sistema axiomático de los Operadores Matemáticos y el sistema axiomático de la Teoría de Conjuntos y de la Aritmética. Pero en sus planteamientos introducía también importantes dimensiones filosóficas. Para Peckhaus (1990, 73), "dieses Programm hat an zwei Stellen direkte Bezüge zur Philosophie: Das Problem des ersten Anfangs einer Axiomatik kann Hilbert nur durch Annahme eines metaphysischen 'Axioms des Denkens' lösen, dessen Ausgestaltung er noch offen lässt. Darüber hinaus entstehen in jeder noch so formalisierten Axiomatik durch die Forderung nach einem Widerspruchsfreiheitsbeweis eine ganze Reihe von philosophischen, nicht nur mathematisch-technisch zu lösenden Problemen". Hilbert abordó estas nuevas perspectivas, no sólo basándose en su propio trabajo, sino involucrándose activamente en la política de contratación de la Universidad de Göttingen, con la ayuda casi siempre de su amigo Felix Klein, que era quien tenía una influencia decisiva en esa política. Este es un aspecto poco conocido de la actividad de Hilbert que resalta Peckhaus (1990), dando una información detallada de sus actividades al respecto. El mismo Hilbert en sus memorias lo reconoce:

> "In alle Fragen der Organisation hatte Klein die unbestrittene und unbedingte Führung; um Dinge der Verwaltung habe ich mich nicht gekümmert. Aber wenn es sich um wesentliche Entscheidungen handelte, insbesondere ins Berufungen, bei Schaffung neuer Stellen und dgl., habe ich stets aktiven Anteil genommen" (Hilbert, 1971, 79).

Para Peckhaus (1999), la persistente actividad de Hilbert en la política académica se debía, más que a afinidades personales, al desarrollo de un programa de investigación interdisciplinar diseñado a largo plazo[178]. Su primer compromiso firme fue el intento de contratación de Ernst Zermelo, quien debería desempeñar un papel esencial en su investigación del desarrollo conjunto de la Lógica y la Aritmética, y de su conexión con la fundamentación de la Teoría de Conjuntos. Después de varios intentos infructuosos, Zermelo consiguió en 1902 con el apoyo activo de Hilbert el puesto de *Privatdozent* en Göttingen, donde ejerció 8 años, y desarrolló sus investigaciones más importantes, y en 1905 fue nombrado profesor titular en Göttingen. A pesar de los intentos de Hilbert, no consiguió un puesto estable y en 1910, también con el apoyo de Hilbert, fue designado como profesor ordinario en Zürich, después de fracasar el intento de Hilbert de conseguir su nombramiento como profesor extraordinario en Göttingen[179]. Zermelo tuvo su primer contacto en Göttingen con Leonard Nelson, seguidor de Jakob Fries[180] quien sería otro de los científicos en los que

---

[177] 1905, "Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", en A. Krazer, editor, *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, S. 174–85, Leipzig, 1905. Teubner. Traducción inglesa en (van Heijenoort, 1967, 129–38).

[178] "Unabhängig von der persönlich-sozialen Motiven war Hilberts Einsatz auch eingebunden in einer längerfristige Forschungsstrategie" (Peckhaus, 1990, 122).

[179] Una referencia detallada con documentación precisa de los procesos de contratación de Zermelo, de su relación con Hilbert y del significado y las polémicas de sus teorías, en (Peckhaus, 1990, 76-122). Zermelo expresó siempre su resentimiento por su situación académica.

[180] No existen evidencias de que Hilbert conociera especialmente, o hubiera sido influenciado por los trabajos de Fries, aunque se volcara en apoyar a Nelson para institucionalizar la *Neue Fries'sche Schule* de Nelson en Göttingen. Jakob Friedrich Fries (1773-1843) es un pensador al que Jensen (2014) califica como *protoneokantiano*. Hijo de un pastor recibió una educación pietista en su familia y en instituciones educativas de la Hermandad de Moravia en Niesky. Estudió primero Teología y desde 1795 estudió Derecho y Filosofía, primero en la Universidad de Leipzig y posteriormente, desde 1797, en la Universidad de Jena, siendo allí alumno de Fichte. Después ejerció hasta 1800 como profesor particular en Suiza. En 1801 obtuvo la Habilitación y en 1805 fue nombrado profesor extraordinario en Jena, donde ejerció la mayor parte de su

Hilbert se volcó, teniendo un intercambio epistolar científico con él entre 1906 y 1909. Habían coincidido ya en la época en la que Nelson era estudiante en Göttingen y Zermelo participó durante algún tiempo a partir de 1904 en el círculo privado de discusiones filosóficas de Nelson.

Hilbert intervino en el intento de contratación de Edmund Husserl. Esta vez el éxito fue más fácil, pues Husserl contaba con el apoyo decidido del Ministerio de Educación de Prusia. Este Ministerio expresó ya en en 1900 su intención de crear en Göttingen un puesto de profesor extraordinario de Filosofía para Husserl, pero la oposición resuelta de la Facultad de Filosofía lo paralizó. En 1901 se repitió el fracaso. El intento del Ministerio en 1905 obtuvo el apoyo de Hilbert y Husserl fue nombrado el 28 de Junio de 1906 por el Rey de Prusia como "persönlichen Ordinarius für Philosophie". En 1908 se planteó de nuevo en Göttingen su nombramiento. La oposición de la Facultad de Filosofía fue también general, y plantearon 3 opciones: propusieron en primer lugar a Paul Nartop, en segundo lugar a Heinrich Mayer y en tercer lugar a Ernst Cassirer. Pero esta vez Hilbert presentó el 30 de Julio de 1908 un voto separado en el que elogiaba el significado fundamental que tenía el proyecto de desarrollo de

---

vida. Aunque Fries se apartó de los caracteres pietistas de la fe religiosa en que se crio, quedaron elementos religiosos estructurales determinantes en la evolución de su sistema filosófico. En su obra crítica sobre *Reinhold, Fichte y Schelling* (1803; reimpresa en 1824 como *Polemische Schriften*) presentó con claridad su posición filosófica así como en los tratados *System der Philosophie als evidente Wissenschaft* (1804) y *Wissen, Glaube und Ahndung* (1805, reed. en 1905). En *la Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft* (1807, 2ª edic. 1828-1831), realizó un intento de dar una nueva fundamentación a la teoría crítica de Kant. En 1811 apareció su *System der Logik* y en 1814 *Julius und Evagoras, ein philosophischer Roman*. Tras su nombramiento en Jena para la cátedra de Filosofía teórica (que incluía Matemáticas, Física y Filosofía moderna), emprendió una cruzada contra el romanticismo dominante. En su interpretación de Kant, cuya filosofía asumió, fue acusado reiteradamente de psicologismo, acusaciones que intentó refutar vigorosamente Leonard Nelson. Fue famoso su enfrentamiento con Hegel, de quien dijo que "el hongo metafísico de Hegel no ha crecido en los jardines de la ciencia, sino en la colina de estiércol del servilismo" (J. F. Fries, carta del 6 de enero de 1821, en: Gunther Nicolin, *Hegel in Berichten seiner Zeitgenossen*, Felix Meiner, Hamburg, 1970, p. 221). Tuvo una intensa militancia política, destacando como un nacionalista radical, y apoyó de múltiples modos a las fraternidades estudiantiles (*Burschenschaften*). Expuso su punto de vista en el libro *Von deutschem Bund und deutscher Staatsverfassung* (1816), que dedicó "a la juventud de Alemania". Karl Ludwig Sand, el asesino de Kotzebue, se contaba entre los alumnos de Fries; las autoridades encontraron una conexión, le juzgaron en Mainz y perdió durante años la *venia legendi*. También destacó por sus actitudes radicalmente antisemitas, llegando a proponer (*Über die Gefährdung des Wohlstandes und Charakters der Deutschen durch die Juden* (1816)) el marcar las vestimentas de los judíos para distinguirlos del resto de la población. Fries desarrolló una teoría cognitiva (*Die mathematische Naturphilosophie* (1822)), que él sostenía que estaba basada en Kant, y que despertó el interés de muchos autores, y muy especialmente de Leonard Nelson quien hizo suya su propuesta para desarrollo de una *kritische Mathematik*. Para algunos autores, el racionalismo crítico de Popper, representado en Alemania por Hans Albert y Helmut F. Spinner, entronca con la filosofía de Fries, así como la filosofía de Friedrich A. Hayek, y en USA el filósofo Kelley L. Ross, con el título *The Proceedings of the Friesian School- Fourth Series*, publica desde 1996 un e-journal sobre el tema: **http://www.friesian.com/**. Desde 1967 se publica por la editorial Scientia Verlag en Aalen en 33 tomos las obras completas de Jakob Fries. Cfr. (Fries, 1967). Fries murió en 1843. Tres años más tarde se fundó la 1ª Sociedad Friseana (*Fries'schen Schule*, 1846–1849), y a la que pertenecieron Ernst Friedrich Apelt (1815–1859), Ernst Sigismund Mirbt (1799–1847), Friedrich van Calker (1790–1870), Heinrich Johann Theodor Schmid (1799–1836), Ernst Hallier (1831–1904), Oscar Schmidt (1823–1886) y Oskar Schlömilch (1823–1901). En 1847, bajo la dirección editorial de Ernst Friedrich Apelt se comenzó a editar la revista *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, pero sólo se publicaron 2 números. La iniciativa fue retomada a comienzos del siglo XX por Leonard Nelson, quien fundó en Göttingen la 2ª escuela friseana, *die Neue Fries'sche Schule*, y emprendió la reedición de los *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, esta vez con la editorial Vandenhoeck & Ruprecht, y en 1913 creó en Berlin la *Jakob-Friedrich-Fries-Gesellschaft*. Ese círculo, en el que, además de los afines a Nelson, participaron *positivistas lógicos* como Kurt Grelling como Hans Reichenbach, y el mismo Hilbert, se suele conocer como *die Berliner Gruppe*. La conexión de Nelson y de su escuela con Hilbert es uno de los objetos de este apartado.

una filosofía sistemática por Husserl[181]. El segundo apoyo, duradero en el tiempo, en el campo de la filosofía fue el apoyo a Leonard Nelson y al desarrollo de su escuela de *filosofía matemática* en Göttingen.

Leonard Nelson[182] escribió una larga carta de 47 páginas a Hilbert el 29 de Diciembre de 1916 (Nelson, 1916) en la que exponía su preocupación por el estado de la Filosofía en Alemania, describía sus estudios y sus méritos académicos, defendía su proyecto de desarrollar una filosofía de la Matemática bajo el concepto (tomado de Fries) de una *kritische Mathematik* y expresaba su deseo de conseguir una Habilitación en Göttingen. Nelson demostraba un amplio conocimiento del significado esencial del trabajo de Hilbert, probablemente fruto del intercambio de opiniones con su gran amigo y miembro de su escuela Gerhard Hessenberg, matemático profesional que conocía y compartía los puntos de vista de Hilbert y que fue de los pocos que supo ver desde el principio su valor filosófico. Nelson le exponía a Hilbert su propósito de "rehabilitar el valor de la filosofía frente al dogma de la imposibilidad de una *filosofía como ciencia* y, con ello, crear una disciplina que profundizara en los métodos de las Matemáticas y de las Ciencias de la Naturaleza". Su fin era recuperar y desarrollar las perspectivas de Jakob Friedrich Fries, "seiner *Mathematischen Naturphilosophie* und seiner kritische *Logik* bewiesen habe, zu welcher Fruchtbarkeit die durch ihn dargestellte Personalunion von Philosophie, Mathematik und Physik diesen verschiedenen Disziplinen hätte gereichen können" (Nelson, 1916, 9). Aunque no existe constancia de que Hilbert tuviera un conocimiento especial de la filosofía de Fries, lo cierto es que ya desde 1905 comenzaría un apoyo incondicional, tanto a Nelson como a su escuela, que duraría años. Nelson contaba en su proyecto con la oposición en bloque de la Facultad de Filosofía, más orientada a la Historia de la Filosofía y a la Psicología, y también del Ministerio de Educación de Prusia, tal vez influido por el intenso activismo político de Nelson en Berlín en los círculos socialdemócratas[183]. Después de múltiples peripecias[184], Nelson obtuvo la *venia legendi* de Filosofía el 9 de Marzo de 1909 en Göttingen. Fueron rechazados sus intentos anteriores de 1906, 1907 y 1908, con la oposición expresa a ese rechazo de Hilbert[185]. En 1907 Nelson se planteó ya la institucionalización de su *Neue Fries'sche Schule*,

---

[181] Un informe detallado del proceso con referencias a las actas correspondientes en (Peckhaus, 1999, 206-216).

[182] Leonard Nelson nació en Berlin en 1882. Su padre Heinrich Nelson era un afamado abogado judío y su madre Elisabeth Lejeune-Dirichlet estaba emparentada con la familia de Felix Mendelssohn-Bartholdy y Du Bois-Reymond y con el filósofo Paul Hensen. Tuvo su primer contacto con la filosofía de Fries fue en 1896 a través de un libro que le regalaron en su confirmación, y parece que le impresionó porque siempre mantuvo su adscripción a esa corriente filosófica. Ya en sus tiempos en el *Französischen Gymnasium* de Berlin fundó su primer círculo de discusión filosófica con Marcel Djuvara, Otto Meyerhof y Gerhard Hessenberg. La interrelación y amistad con Hessenberg, del que también tomó clases particulares de Matemáticas, duró toda su vida. En 1901 comenzó sus estudios en Heidelberg, visitando las clases de Kuno Fischer, de su tío Paul Hensel y las del matemático Leo Königsberger, que le impresionaron profundamente. En 1902-1903 estudió en Berlin, y en 1903 comenzó a estudiar en Göttingen, donde se doctoró en 1904. Ya en su época de estudiante en Göttingen fundó un círculo de discusiones filosóficas donde se discutía principalmente la teoría filosófica de Fries. Entre sus primeros miembros estaban Alexander Rüstow, Carl Brinkmann, Käthe Kollwitz, el estudiante de medicina Ernst Blumenthal, el teólogo Rudolf Otto y el estudiante de Psicología Walter Baade. Se denominaron "*die Neue Frie'schen Schule*" (Peckhaus, 1990, 131-132).

[183] Resulta llamativo el intenso activismo político en círculos socialistas y liberales tanto de los miembros de la Escuela de Nelson como la de los de la Escuela de Margburg que, contra lo que podría pensarse teniendo en cuenta su temática profesional, fue muy superior a la de los de la Escuela de Baden. Esto les costaría su purga en 1933 con el ascenso al poder de los nazis.

[184] Un estudio detallado de ese proceso, con referencia a las actas, junto un estudio de las posiciones filosóficas de Nelson y de su relación con Hilbert, en (Peckhaus, 1990,123-224).

[185] Nelson, en su carta de 1916, le escribe a Hilbert: "Sie selbst wissen am besten, welche Hindernisse überwunden werden mussten, um mir auch nur meine jetzige Stellung [als Privatdozent] zu erkämpfen. Unter dem Vorwand, ich sei zu jung, ist meine Habilitation um Jahre aufgehalten worden, und ich hätte auch später

y en Marzo de 1913 se constituyó en Berlin la *Jakob Friedrich Fries-Gesellschaft*, cuyos fines eran:

> "die Förderung der von Kant und Fries begründeten kritischen Philosophie durch den Ausbau einer Gemeinschaft zu intensiver Arbeit innerhalb der Frie'schen Schule, sowie durch Verbreitung dieser Philosophie nach auβen und die Unterstützung solcher Bestrebungen, die sich ihre Anwendung auf bestimmte theoretische und praktische Einzelfragen zur Aufgabe machen"[186].

David Hilbert ingresó en la Sociedad en 1917 "als unterstützendes Mitglied". Los miembros más importantes eran: Otto Apelt, Paul Bernays, Marcel Djuvara, Gerhard Hessenberg, Otto Meyerhof, Heinrich Goesch, Alexander Rüstow y Kurt Grelling[187]. Nelson emprendió también ya en su época de estudiante la tarea de reeditar la revista fundada por los primeros discípulos de Fries en 1847 *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, en cuya dirección colocó al matemático Gerhard Hessenberg y al psicólogo Karl Kaiser, con cuyo prestigio consiguió que la revista fuera editada por la editorial Vandenhoeck & Ruprecht de Göttingen a partir de 1904[188]. Durante años, el ambiente en la Facultad de Filosofía de

---

nicht einmal dies Ziel erreicht, wenn nicht Sie mir damals Ihre Hilfe hätten zu Teil werden lassen. In Wahrheit wollte man mich nicht zulassen, weil ich mir erlaubt hatte, an einigen viel bewunderten Würdenträgern freimütig Kritik zu üben" (Nelson, 1916, 20). Para Peckhaus (1990, 127), "bei diesen Bemühungen war der schleppende Verlauf von Nelsons akademischer Karriere sehr hinderlich: zwei Anläufe zur Promotion, fünf Jahre bis zur Habilitation, weitere 10 Jahre bis zur Ernennung zum Professor".

[186] En (Peckhaus, 1990, 154).

[187] El círculo de influencia de esta sociedad excedía con mucho a los miembros del grupo de Nelson. Se le suele denominar *die Berliner Gruppe* o *die Berliner Zirkel*, refiriéndose a veces con ese nombre a la escuela neokantiana de Göttingen. Además de Hilbert, participaban regularmente en sus discusiones muchos miembros que acabaron en el *positivismo lógico*, como Kurt Grelling, y otros que nunca fueron miembros de esa escuela neokantiana como Hans Reichenbach, quien desarrolló el llamado *empirismo lógico*. Para muchos autores, la influencia de la teoría del conocimiento kantiana en el *empirismo lógico* y en el *positivismo lógico* era mucho más fuerte de la que reconocían sus autores; aunque rechazaban el *a priori* sintético de Kant, "scientific legacy in the twentieth century philosophy was much more complex and subtle. In fact, already Quine insisted that the logical empiricists still followed Kant, above all, in preserving the sharp distinction between the underlying spatiotemporal framework of physical theory, on the one hand, and the empirical laws formulated within this framework, on the other hand. This, however, was only the tip of the iceberg of latent Kantianism in the works of the logical empiricists" (Milkov, 2008,1). De la misma opinión son Friedman (1994), Majer (1994) y Richardson (1998, 2003 y 2010). Es muy posible que la insistencia de Hilbert en criticar lo que consideraba "el exceso del *a priori* en Kant" y ciertas tendencias empiristas detectadas por Corry tengan su origen en los debates realizados en ese círculo. Milkov (2008, 3) señala las discrepancias que tuvieron lugar incluso en el nombre del grupo: "Hilbert, who once sat in sessions of *Nelson's Fries-Society*, closely followed the development of the Berlin Group. Moreover, his assistant Paul Bernays actively participated in the life of the prominent offspring of the Berlin Group—*The Society for Empiric Philosophy*. After the analysis we made in this section, it is no surprise that Hilbert criticized the naming of the society "empirical". Reichenbach promptly reacted to this criticism, renaming it into *Society for Scientific Philosophy* (cf. Joergensen 1951: 48). Unfortunately, Reichenbach did not realise that he must also rename his philosophy. Indeed, it was 'empiricist' in a very weak sense".

[188] La empresa de Nelson fue secundada por filósofos, psicólogos y matemáticos, como J. Bernays, Carl Brinckmann, Kurt Grelling, K. Kopperschmidt, M. Kowalewski, Abraham Fraenkel y Julius Kraft. En 1918 volvió a suspenderse la publicación. Julius Kraft fundó posteriormente la revista *Ratio*, que se publicó ininterrumpidamente desde 1937. Con la muerte de Julius Kraft en 1960 la dirección de esta revista pasó a Stephan Körner, publicada por la editorial Basil Blackwell (Oxford). El último director fue Martin Hollis, y dejó de publicarse en 1987, cuando desapareció también su edición alemana (tenía una edición inglesa y otra alemana financiada por la Philosophisch-Politische Akademie e.V. **http://www.philosophisch-politische-akademie.de/**). Julius Kraft pretendió que *Ratio* fuera continuadora del espíritu nelsoniano de los Neuen Folge. Una *Ratio (New Series)* comenzó en 1988 y continúa hasta hoy, pero sin conexión con Fries o Nelson. Se denomina actualmente *Ratio, An International Journal of Analytic Philosophy*:
http://onlinelibrary.wiley.com/journal/10.1111/(ISSN)1467-9329/homepage/ProductInformation.html

Göttingen se caracterizó por un intenso contacto y por el desarrollo de actividades conjuntas entre el Seminario de Matemáticas de Hilbert y el grupo, y después Seminario, de Filosofía de Nelson. La atmósfera la describe muy bien Richard Courant en sus *Reminiscences from Hilberts Göttingen*:

> "The very interesting personality of Nelson played a very great role, and there was very much interaction between groups of mathematicians and groups of philosophers. It was really an extremely colourful and intense group of people, all in more or less contact with each other" (Courant, 1981, 157).

Ese paraíso se hundió abruptamente en 1933. La mayor parte de ambos grupos fueron expulsados de la Universidad, unos por tener orígenes judíos, otros por su activismo político y otros por ambas cosas. Muchos encontraron refugio en los Estados Unidos, otros en Suiza y algunos en Turquía, donde dos miembros de la escuela de Nelson llegaron a fundar una nueva Facultad en Estambul. Los que no fueron expulsados no corrieron mejor suerte; por ejemplo, Ernst Zermelo fue denunciado por la asociación nazi de estudiantes por negarse a hacer el saludo nazi, fue expulsado y perdió todos sus honores, que recuperó al finalizar la guerra. Hilbert, ya jubilado, fue aparentemente respetado, pero sus obras fueron manipuladas eliminando a los coautores de origen judío (como en su *Anschauliche Geometrie*, escrita con Cohn-Vossen), y su obra fundamental *Methods of Mathematical Physics* escrita con Richard Courant, ya exiliado en USA, fue directamente prohibida en el III Reich. Se entiende la amargura de la respuesta que Hilbert dio en 1934 al Ministro de Educación del Reich. En 1934 Hilbert, ya jubilado, asistió una comida-homenaje en la Universidad de Göttingen, a la que también asistió Rust, Ministro de Educación del Gobierno de Hitler. Cuando Rust le preguntó a Hilbert si el Instituto de Matemática había sufrido debido a la "salida de judíos y amigos de judíos", Hilbert respondió: "Jelitten? Dat hat nich jelitten, Herr Minister. Dat jibt es doch janich mehr!"[189].

El paraíso de Göttingen ya nunca se pudo reconstruir. Aunque los pocos que regresaron después de la guerra tendrían una influencia considerable en la ciencia, en la sociedad y en la política de la RFA. Peckhaus (1990, 128) indica que, por ejemplo, los discípulos de Nelson Willi Eichler, Gerhard Weiser y Grete Henry- Hermann tuvieron una influencia determinante en el *Programa de Bad Godesberg* (1959) del SPD.

Las aportaciones de Nelson y de los miembros de su escuela al *programa* de Hilbert fueron muy amplias y no sólo filosóficas; destacan sus aportaciones en Lógica y Teoría de Conjuntos, y están todas ellas perfectamente descritas en la obra de Peckhaus (1990). También la posición filosófica de Nelson, y su posición en relación con la Matemática, están descritas en esa obra. Pero, a pesar del estrecho contacto entre Hilbert y Nelson, no existe ninguna referencia en Hilbert, ni opinión, sobre la filosofía de Nelson y de su escuela[190]. Sería

---

[189] En: Abraham Fraenkel, 1967, *Lebenskreise: Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers*. Deutsche Verlags-Anstalt. Algunos corrieron peor suerte. Kurt Grelling fue detenido en 1940 en Bélgica e internado en varios campos en Francia; el 18 de Septiembre de 1942, Kurt Grelling y su esposa "aria" Greta Grelling fueron gaseados en Auschwitz. Gerhard Genzen, uno de los discípulos más brillantes de Hilbert y nazi convencido, fue asesinado por los rusos en Praga en 1945, internado en uno de los llamados "campos de la revancha" y en donde sistemáticamente se dejaba morir a los prisioneros de hambre.

[190] No existe ninguna opinión expresa de Hilbert en relación con las posiciones filosóficas de Nelson y de su escuela. Para establecer una comparativa sólo podemos guiarnos por las posiciones filosóficas expresas de Hilbert en relación con la filosofía kantiana y por sus afirmaciones expresas sobre la filosofía de la Matemática; y también por las amplias exposiciones de Nelson sobre estos tópicos. Los postulados del proyecto de su escuela están resumidos en la carta que Nelson dirigió a Hessenberg en marzo de 1908, y que se reproducen en (Peckhaus, 1990, 152-153). Pero también disponemos de las manifestaciones de Nelson en relación con la acogida por Hilbert de sus propuestas. Así, en junio de 1905 escribe una carta a su amigo Hessenberg en la que expresa su decepción por la actitud y la linea de trabajo de Hilbert: "von Hilberts

necesario un estudio comparativo de los análisis de ambas escuelas, que aún está por hacer, para obtener unas conclusiones definitivas sobre su posible influencia mutua. Lo aquí descrito es sin embargo suficiente para descalificar la tesis hegemónica en el siglo XX de que las referencias kantianas de Hilbert eran un discurso rutinario sin contenido. Partiendo de aquí, nuestra investigación intenta comparar los presupuestos cognitivos de Hilbert directamente con los de Kant, en nuestra lectura. Pero es innegable que esos años de interacción entre las dos escuelas tuvieron que aportar algo. Aunque este es un tema para una investigación futura. Recientemente Volker Peckhaus (2014) ha investigado la relación de Frege con el kantismo y con la escuela neokantiana de Fries en Jena, con la que tuvo un intenso contacto. En su trabajo *Kantianer oder Neukantianer?*[191], Peckhaus concluye que "Frege als Neukantianer zu bezeichnen erscheint mir bei der hier diskutierten Sachlage als irreführend. Er war ein eklektischer Kantianer, dessen Beeinflussung durch die aristotelisch-scholastische Tradition nicht ignoriert werden sollte". En mi opinión existe un gran parecido con la actitud de Hilbert. Hilbert impulsó y ayudó al programa neokantiano de Nelson y de su escuela como parte de una línea de investigación multidisciplinar[192], pero nunca parece que compartió sus propuestas filosóficas al 100%; Hilbert sería, como Frege, un "kantiano ecléctico" inspirado en sus propias reflexiones sobre la filosofía de Kant y guiado por un afán justificativo *a posteriori*; para él lo determinante serían las exigencias puramente matemáticas de su investigación.

4.3 -La crisis fundacional. Breve reseña histórica. La fundamentación de la Matemática.

Debe mencionarse aquí que en este trabajo se estudia el concepto de la intuición en Kant y, en este Capítulo, la lectura que Hilbert hace de él y que es más restrictivo en su *programa finitista* que en su concepción general de la Matemática y del conocimiento. El concepto de la intuición ha tenido un largo y contradictorio recorrido en la historia de las ideas y, en particular, en las Matemáticas y parece, en todo caso, asociado al concepto de verdad. Durante más de 2000 años el concepto de verdad pareció estar asegurado. El modelo

---

philosophischen 'Resultaten' mach' Dir nur lieber keine groβen Hoffnungen. Ich bin bereits durch das, was er bisher davon produziert hat, recht enttäuscht. So lange er mit rein mathematischen Mitteln operiert, ist er zwar oft schwer verständlich, aber was er bringt, ist natürlich bewunderungswürdig. Dass er das Bedürfnis nach mehr fühlt, ist ja auch sehr schön, aber so wie er das rein Mathematische verlässt, wird er einfach albern. Von der ganzen kritischen Auffassung der Ursprungsfrage hat er offenbar niemals gehört, soviel er auch über das Thema redet, erwähnt er doch nicht einmal ihre Möglichkeit, geschweige denn ihre Existenz. Ein von andern Sätzen unabhängiges Axiom ist für ihn von vornherein identisch mit einer neuen Beobachtung (…) Um den Widerspruch in den Mengenlehre zu beseitigen, will er (nicht etwa die Mengenlehre sondern) die Logik reformieren. Nun, wir wollen sehen, wie er es macht". En su respuesta en ese mismo mes de junio, Hessenberg no compartía la postura de Nelson: "von Hilberts philosophischen Sachen mache ich mir trotz Deines absprechenden Urteils sehr viele Hoffnungen". [Reproducido en (Peckhaus, 1990, 166)].

[191] Volker Peckhaus (2014), *Kantianer oder Neukantianer? Über die Schwierigkeiten, Frege der Philosophie seiner Zeit zuzuordnen*, Universidad de Paderborn: **http://kw.uni-paderborn.de/institute-einrichtungen/institut-fuer-humanwissenschaften/philosophie/personal/peckhaus/texte-zum-download/kantianer-oder-neukantianer/**

[192] Para Peckhaus (1990, 226), Hilberts Philosophisches Engagement ist Frucht der 'philosophischen Wendung' in seinem Grundlegungsprogramm (…) Im Zuge der 'philosophischen Wendung' revidierte Hilbert das axiomatische Programm durch Erweiterung der Aufgabenstellung. Es wurde zugestanden, dass die Grundlegung der Mathematik gemeinsamer Anstrengungen von Mathematikern, Logikern und Philosophen bedurfte, deren Arbeitsgebieten jeweils spezifische Teilaufgaben zugewiesen wurden". En mi opinión, en ese *philosophische Wendung* fue determinante la correspondencia que mantuvo con Frege, que creo que le hizo comprender la precariedad de sus análisis filosóficos.

de Euclides, perfecto en muchos aspectos, aseguraba la verdad de las conclusiones. La confianza en la *verdad de sus axiomas* se basaba tal vez más en el éxito de sus predicciones en la navegación, en la arquitectura y en la astronomía. Es cierto que algunos observaron algunas deficiencia e imperfecciones en el sistema, pero en su conjunto servía para las necesidades de la vida práctica. En el Renacimiento se independizaron, por un lado, algunas disciplinas como ciencias propias: la navegación, la mecánica, la ingeniería y la astronomía. Sin embargo, el concepto de verdad permanece bastante inalterado.

> "La noción tradicional de verdad matemática es la que se remonta al Renacimiento. En esta concepción no se hace gran distinción entre los objetos de los que se ocupan los matemáticos y los considerados por las ciencias de la naturaleza, unos y otros son cognoscibles, y el hombre llega a ellos simultáneamente mediante la intuición y el razonamiento, de los que no había ningún motivo para dudar y que no fallaban mas que si no se usaban debidamente" (Bourbaki, 1976, 25).

La evidencia del funcionamiento práctico de las verdades demostradas en el sistema daban confianza tanto en los *métodos de demostración* como en la *verdad de los axiomas*. "Vemos así cómo la Matemática griega llega, en la época clásica, a una especie de certeza empírica" (Bourbaki, 1976, 29). Pero esto era posible porque los matemáticos griegos habían sido muy cautelosos y parece que tenían algunas ideas muy claras. Aunque no se haya conservado ningún texto matemático griego de la época antigua, la evidencia del impresionante sistema que constituyen los *Elementa* permite suponer, y más teniendo en cuenta el acerado sentido crítico del conjunto de su cultura, que se debieron producir amplios debates sobre el tema.

> "Las reglas del razonamiento debieron haberse elaborado necesariamente en contacto con la experiencia para poder llegar a ofrecer una completa confianza; antes de poder llegar a considerarlas indiscutibles habrían tenido que pasar por muchos tanteos y paralogismos. Habría que desconocer el espíritu crítico de los griegos y su gusto por la discusión y la sofística, para poder pensar que los mismos 'axiomas' que a Pascal le parecían tan evidentes no fueron objeto de largas discusiones. En un dominio distinto del de la Geometría propiamente dicha, las paradojas de los eleáticos nos han transmitido algún eco de tales polémicas" (Bourbaki, 1976, 27).

Platón caracteriza con precisión *el método matemático* en un célebre pasaje de *La República*: "Los geómetras y los aritméticos suponen dos clases de números, el uno par, el otro impar, figuras, tres especies de ángulos, y los consideran como cosas conocidas; una vez aceptadas, consideran que no tienen que dar cuenta de ellas ni a sí mismos ni a los demás, considerándolas como evidentes para todos, y, a partir de aquí, proceden ordenadamente, para llegar de común acuerdo a la finalidad que se habían propuesto"[193]. En ese método habría, pues, dos pasos claves, primero la aceptación de los supuestos como verdaderos -y los criterios con los que se actúa al respecto no están definidos en la cita de Platón- y en segundo lugar "un proceso que recorre ordenadamente una serie de etapas intermedias, y, finalmente, en cada paso, el consentimiento del interlocutor que garantiza la corrección del razonamiento" (Bourbaki, 1976, 28). Respecto a este segundo punto, obsérvese que aparece un factor psicológico en el criterio de demostración correcta. Los griegos tuvieron buen cuidado en minimizar este aspecto usando preferentemente demostraciones constructivas. "Estas demostraciones son 'construcciones', dicho de otra manera, exhibe (Euclides), apoyándose en los axiomas, objetos matemáticos que demuestra satisfacen las definiciones que trata de justificar" (Bourbaki, 1976, 29).

---

[193] *República*, Libro VI, 510 c-e. Traducción española de Patricio Azcárate, EDAF, Madrid, 1985.

Pero también fueron muy cautelosos en otros aspectos: “los matemáticos griegos no parecen haber creído nunca poder dilucidar las ‘nociones primeras’ que les sirven de punto de partida: línea recta, superficie, razón de magnitudes...” (Bourbaki, 1976, 28), aunque dan algunas definiciones de tipo descriptivo. Otra cosa es con las llamadas “definiciones nominales” en donde son extremadamente cuidadosos; así aparece explícitamente por primera vez el problema de la “existencia” en Matemáticas. Aristóteles hace notar que una definición no implica la existencia de la cosa definida, y que es necesario, o bien un postulado o bien una demostración. E igualmente Euclides, por ejemplo, tiene buen cuidado en postular la existencia del círculo, y de demostrar las del triángulo equilátero, las paralelas y el cuadrado a medida que los va introduciendo en sus razonamientos (*Elementa*, Libro I). En otra dirección, Aristóteles distinguió claramente el infinito potencial del infinito actual. Y los matemáticos anteriores parecían haber tenido ya muy en cuenta la distinción, evitando cuidadosamente introducir el infinito actual. Un ejemplo típico, el enunciado que hoy en cualquier manual se lee así: “El conjunto de los números primos es infinito” Euclides lo formulaba en estos términos: “Para toda cantidad dada de números primos, existe uno mayor”. Y, así también se tendría derecho a decir que un punto pertenece a una recta, pero sacar de aquí la conclusión de que una recta está compuesta de puntos sería violar el tabú del infinito actual, y Aristóteles dedica largos párrafos a justificar esa prohibición. Esta tradición se remonta hasta bien entrado el siglo XIX y muchos matemáticos evitan hablar de conjuntos y razonan sistemáticamente “en comprensión”; Galois, por ejemplo no habla de cuerpos de números, sino únicamente de las propiedades comunes a todos los elementos de uno de tales cuerpos. Incluso Pasch y Hilbert en sus presentaciones axiomáticas de la geometría euclídea siguen absteniéndose de decir que las rectas y los planos sean conjuntos de puntos. Peano es el único que emplea libremente el lenguaje de la teoría de conjuntos en Geometría elemental.

Las necesidades del Análisis, y en particular el estudio a fondo de las funciones de variables reales que se desarrolla durante todo el siglo XIX, son el origen de lo que iba a convertirse en la moderna Teoría de Conjuntos. Cuando Bolzano, en 1817, demuestra la existencia del extremo inferior de un conjunto acotado inferiormente de números reales, todavía razona, como la mayoría de sus contemporáneos, “en comprensión”, no hablando de un conjunto cualquiera de números reales sino de una propiedad arbitraria de estos últimos. Pero cuando treinta años más tarde redacta sus *Paradoxien des Unendlichen*, publicadas en 1851, no duda en reivindicar el derecho a la existencia del “infinito actual” y en hablar de conjuntos arbitrarios. En este trabajo define también la noción general de equipotencia entre dos conjuntos y demuestra que dos intervalos compactos cualesquiera de números reales son equipotentes. La noción de equipotencia tiene ya su precedente en una nota de Galileo, donde dice que la aplicación que asocia cada entero a su cuadrado establece una correspondencia biunívoca entre los enteros y sus cuadrados y, por consiguiente, el axioma de “el todo es mayor que la parte” no sería aplicable a los conjuntos infinitos. Pero la consecuencia que de esto sacó Galileo, e igualmente Cauchy en 1833, fue que había que aumentar la desconfianza respecto al infinito actual.

La posibilidad de éxito con el razonamiento “por comprensión” se basaba en el hecho de que los conjuntos considerados en las Matemáticas clásicas pertenecen a un pequeño número de tipos sencillos, y casi todos ellos pueden ser descritos totalmente con un número finito de “parámetros” numéricos, de tal modo que su consideración se reduce en definitiva a un conjunto finito de números; así sucede por ejemplo con las curvas y superficies algebraicas, que durante mucho tiempo fueron las únicas “figuras” de la Geometría clásica. Pero con el análisis de las funciones de variable real y con las nuevas teorías que surgen en varias ramas de la Matemática en el siglo XIX empiezan a colarse por todas partes conjuntos esencialmente infinitos que no pueden tratarse con el razonamiento “por comprensión”.

Cantor aborda un estudio racional del infinito actual y, como se ha sabido por investigaciones recientes, también Dedekind, y el primero consigue entre 1872 y 1884 una teoría completa. Algunas lagunas fueron completadas por Bernstein (1897) y, sobre todo por Zermelo, quien demostró el teorema ya conjeturado por Cantor en 1833, de que en todo conjunto existe una buena ordenación. Ya los primeros resultados de Cantor dieron lugar rápidamente a importantes aplicaciones, incluso en las cuestiones más clásicas del Análisis, por no hablar de las partes de la obra de Cantor que inauguraban la Topología General y la Teoría de la Medida. Además, ya en los últimos años del siglo XIX, comienza a emplearse el principio de inducción transfinita, que se convirtió, después del teorema de Zermelo, en un instrumento indispensable de todas las ramas de las Matemáticas; en 1922 Kuratowski, evitando el empleo de conjuntos bien ordenados, daba una versión más manejable de este principio, reencontrada por Zorn en 1935, siendo ésta la forma en que se usa hoy en día. La consagración oficial de la teoría de Cantor tuvo lugar en el 1º Congreso Internacional de Matemáticas (Zurich, 1897), en el que Hadamard y Hurwitz señalaron sus importantes aplicaciones al Análisis. Aunque la aceptación no fue sin resistencias. “Resultaba imposible que concepciones tan atrevidas, echando abajo una tradición dos veces milenaria, y llevando a resultados tan inesperados y de un aspecto tan paradójico, se aceptasen sin resistencia” (Bourbaki, 1976, 48). Por ejemplo, encontró una irreducible oposición desde el principio en Schwarz y Kronecker.

Pero pronto, casi al mismo tiempo que su éxito, comenzaron a surgir problemas. Burlari-Forti hizo ver en 1897 que no puede considerarse la existencia de un conjunto formado por todos los ordinales, ya que dicho conjunto estaría bien ordenado y, por tanto, sería isomorfo a uno de sus segmentos distinto del total, lo que es absurdo. El mismo Cantor observa en 1899, en una carta a Dedekind, que no puede decirse que los ordinales formen un conjunto, ni hablar del “conjunto de todos los conjuntos” sin llegar a una contradicción (el conjunto P(E) de las partes de este “último conjunto” E sería equipotente a una parte de E, lo que estaría en contradicción con la desigualdad $\mathfrak{M} < 2^{\mathfrak{M}}$, siendo $\mathfrak{M} =$cardinal de E). En 1905 Russell, analizando la demostración en esta desigualdad, muestra que el mismo razonamiento que se usa para demostrarla demuestra también (sin usar la teoría de cardinales) que la noción del “conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos” es contradictoria. El razonamiento de Russell está próximo a las paradojas de los antiguos griegos, cuyo prototipo es la paradoja de “Epiménides el Mentiroso” (Epiménides, que es cretense, dice que todos los cretenses son mentirosos; ¿dice la verdad Epiménides?), objeto de innumerables comentarios en la Lógica clásica.

El problema era que estas contradicciones no aparecían sólo en regiones que podría pensarse como periféricas en la Matemática, sino que pronto empezaron a aparecer en las partes más clásicas de la Matemáticas, incluyendo los enteros. Es lo que se llamó “la crisis de los fundamentos” y que llegó a alcanzar un gran enconamiento, en parte por razones de prestigio personal. Pero el hecho es que se produjo una sensación de gran inseguridad en muchos matemáticos. Seguramente temían que su disciplina pudiera encontrarse en el mismo grado de seguridad que la Filosofía en el siglo XIX cuando Hegel en su disertación inaugural “demostró” que no podía haber más de siete planetas, justo el mismo año en que se descubrió el octavo. El problema llegó a su punto álgido cuando el matemático holandés L. Brower, discípulo del berlinés Kronecker, recogiendo distintas críticas planteadas por prestigiosos matemáticos como Borel, Baire, Hadamard, Lebesgue, Poincaré y otros, emprende un replanteamiento sistemático y completo de todas las matemáticas, radicalizando los principios críticos planteados por los anteriores, y es seguido en esa línea por otros como Heyting y Weyl, uno de los más brillantes discípulos del mismo Hilbert. En lo esencial, para Brouwer la Matemática coincidía con la parte “exacta” de nuestro pensamiento, basada en la intuición primera de la sucesión de los enteros naturales, y que no podía ser traducida a un sistema formal sin sufrir mutilaciones; además, solamente sería "exacta" en la mente de los matemáticos y sería utópico esperar lograr un instrumento de comunicación entre ellos que no estuviese sometido a todas las imperfecciones y ambigüedades del lenguaje, por lo que a todo lo que puede aspirarse es a despertar en el interlocutor un estado del espíritu favorable mediante descripciones más o menos vagas. Una demostración no es válida en virtud de reglas lógicas fijadas de una vez para siempre, sino en virtud de la "evidencia inmediata" de cada uno de sus eslabones. Esta "evidencia" recibe, por otra parte, una interpretación mucho más restrictiva que la de Borel y sus partidarios: por ejemplo, no podría decirse que una relación de la forma "R o (no R)" sea verdadera (principio del tercio excluso) salvo que, para todo sistema de valores dado a las variables que aparecen en R, se pueda demostrar que una de las dos proposiciones "R" o "no R" es verdadera. Por tanto, los intuicionistas no admiten que todo enunciado tenga que ser verdadero o falso, pero a tales enunciados no les asignan otro valor de verdad. Para Brower el "dogma de la validez universal de la ley del tercio-excluso" es un fenómeno de la historia de la civilización, al igual que lo fueron antes la creencia en la racionalidad del número π o de que la tierra era el centro del universo. Es fundamental el concepto de implicación en los intuicionistas, que marca las desviaciones que esta "lógica" presenta respecto a la booleana, clásica o convencional. Además, uno de los puntos cruciales reside en el concepto de "negación", como puede ya pensarse al ver que rechazan las pruebas por simple reducción al absurdo. Su postura es esencialmente una contestación al conocimiento de proposiciones matemáticas sobre objetos matemáticos de los que se presupone la existencia (en razón de una deducción no contradictoria con los axiomas de que se trate) pero de los que ninguna *construcción* efectiva se conoce. Por ejemplo, para hallar el máximo común divisor de 15 y 25 , sabemos que dicho número existe y que es 5 porque disponemos de una "técnica matemática" precisa por la que, dado cualquier par de números naturales, podemos obtener en un número finito (grande o pequeño) de pasos su máximo común divisor, y esa técnica, aplicada al 15 y al 25, da el 5. Rechazan, pues, toda afirmación o negación sobre entidades matemáticas no-construibles en tal sentido y, para ellos, *existir* es sinónimo de *ser construible*. "Los vigorosos ataques procedentes del campo intuicionista hicieron ponerse a la defensiva durante algún tiempo no solamente a las escuelas matemáticas de vanguardia, sino también a los partidarios de la Matemática tradicional. Un célebre matemático ha reconocido quedar impresionado por estos ataques hasta el punto de limitar voluntariamente sus trabajos a las ramas de las Matemáticas consideradas 'seguras'" (Bourbaki, 1976, 62). Hilbert expuso la situación en estos términos en su artículo ya citado *Über das Unendliche* :

> "Cantor ha logrado desarrollar con éxito estas ideas, dando forma a una teoría de los números transfinitos y a un cálculo completo para los mismos. De este modo y como culminación del gigantesco trabajo conjunto de Frege, Dedekind y Cantor, el infinito alcanzaría por fin el triunfo; en un vuelo audaz, había alcanzado las frágiles cumbres del éxito. La reacción no se hizo esperar, pero se desencadenó de forma muy dramática. Todo ocurrió de manera exactamente análoga a lo que había sucedido con el desarrollo del Cálculo Infinitesimal. El entusiasmo que los nuevos y fructíferos resultados suscitaron entre los matemáticos dio lugar a una actitud muy poco crítica en relación a la validez de los modos de inferencia que los sustentaban. Los principios y métodos utilizados para la formación de conceptos y la inferencia de conclusiones permitían el surgimiento de contradicciones. Las primeras inconsistencias se presentaron de manera aislada, pero adquirieron gradualmente mayor gravedad al surgir las llamadas paradojas de la Teoría de conjuntos. Fue, en especial, la contradicción descubierta por Zermelo y Russell la que, al ser dada a conocer al mundo matemático, tuvo prácticamente el efecto de una catástrofe en nuestra disciplina. A causa de estas paradojas, tanto Dedekind como Frege abandonaron la posición que habían sustentado hasta entonces e inclusive la rama misma de la investigación que los había ocupado durante tanto tiempo. De hecho, durante años Dedekind se mostró renuente a autorizar una nueva edición de su monumental tratado Was sind

und was sollen die Zahlen? (1888), mientras que Frege se ve obligado, como él mismo reconoce en una nota al final de los Grungesetze der Arithmetik (1893, 1903), a admitir como errónea la tendencia general de ésta, su obra más importante. A consecuencia de todo esto, también la teoría de los números transfinitos de Cantor es objeto de severos y apasionados ataques provenientes de los más diversos ámbitos. La reacción es tan radical y en ocasiones tan desmesurada que pone en tela de juicio muchos de los conceptos fundamentales y muchas de las argumentaciones y los métodos más importantes de las matemáticas, llegándose a sugerir una prohibición total de sus aplicaciones (...) Lo primero que tenemos que hacer es percatarnos con toda claridad de que, a la larga, las paradojas nos colocan en una situación absolutamente intolerable" (Hilbert, GA, tomo III, 169-170) [194].

Hilbert dedico el resto de su carrera principalmente a este problema y a los fundamentos de la Aritmética, que relacionaba con el primero, proponiendo y desarrollando su *proyecto finitista*.

4.4 -El uso del concepto de intuición en la fundamentación de la Aritmética y el programa finitista.

Ya vimos en el apartado anterior que Hilbert consideraba la situación insostenible. En el mismo trabajo indica:

"¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el mismo pensamiento matemático falla? Por fortuna existe una vía enteramente satisfactoria que con absoluto apego al espíritu de nuestra disciplina nos permite escapar de las paradojas. Las consideraciones y las metas que orientan este trabajo son las siguientes:
1.- Queremos examinar con todo cuidado aquellas construcciones conceptuales y aquellos métodos de investigación que enriquezcan a nuestra disciplina, queremos cultivarlos, apoyarlos y servirnos de ellos siempre que se presente la más ligera posibilidad de obtener un resultado. Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.

2.-Es absolutamente necesario alcanzar en los modos de inferencia el mismo grado de seguridad que la que existe en la teoría ordinaria elemental de los números, en la que todo el mundo confía plenamente y en la que una paradoja o una contradicción sólo pueden surgir por nuestra falta de atención" (Hilbert, GA, tomo III, 170)[195].

---

[194] "Cantor hat nun in Verfolg dieser Gedanken die Theorie der transfiniten Zahlen aufs erfolgreichste ausgebaut und eine vollständigen Kalkül für dieselben geschaffen. So wurde schlieβlich durch die gigantische Zusammenarbeit von Frege, Dedekind, Cantor las Unendliche auf den Thron gehoben und genoss die Zeit des höchsten Triumphes. Das Unendliche war im kühnsten Fluge auf eine schwindelnde Höhe des Erfolges gelangt. Die Reaktion blieb nicht aus; sie spielte sich sehr dramatisch ab. es geschah genau analog, wie in der Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Man war in der Freude über die neuen und reichen Resultate hinsichtlich der Zulässenheit der Schlussweisen offenbar zu wenig kritisch verfahren; denn es stellten sich bei bloβer Anwendung der allmählich üblich gewordenen Begriffsbildungen und Schlussweisen Widersprüche heraus, zuerst vereinzelt, allmählich immer schärfer und immer ernster: die sogenannten Paradoxien der Mengenlehre. Insbesondere war er ein von Zermelo und Russell gefundenen Widerspruch, dessen Bekanntwerden in der mathematischen Welt geradezu von katastrophaler Wirkung war. Angesichts dieser Paradoxien gaben Dedekind und Frege ihrer Standpunkt tatsächlich auf und räumten das Feld. Dedekind trug lange Bedenken, von seiner epochemachender Abhandlung "Was sind und was sollen die Zahlen" eine Neuauflage zuzulassen; und auch Frege hat die Tendenz seines Buches 'Grundgesetze der Arithmetik' als verfehlt erkennen müssen, wie er in einem Nachwort gesteht. Und gegen Cantors Lehre gar wurden von den verschiedensten Seiten die heftigsten Angriffe gerichtet. Die Gegenbewegung war so ungestüm, dass die allerübligsten und fruchtbarsten Begriffe und die allersimpelsten und wichtigsten Schlussweisen in der Mathematik bedroht wurden und ihre Anwendung verboten werden sollte. (…) Es soll zugegeben werden, dass der Zustand, in der wir uns gegenwärtig angesichts der Paradoxien befinden, für die Dauer unerträglich ist" (Hilbert, GA, Band III, 169-170).

[195] "Und wo soll sonst Sicherheit und Wahrheit zu finden sein, wenn sogar das mathematische Denken versagt? Aber es gibt einen völlig befriedenden Weg, den Paradoxien zu entgehen, ohne Verrat an unserer

Hilbert compartía las objeciones de los intuicionistas, si bien no sus soluciones, que consideraba exageradas, y se proponía buscar una solución cuyos principios podría compartir el mismo Brower. Identificó con claridad el origen del problema:

> "Es evidente que la realización cabal de estos fines será posible sólo si somos capaces de clarificar por completo la esencia del infinito" (Hilbert, GA, tomo III, 170)[196].

Para Hilbert el infinito aparece por una *sensación* errónea, debida precisamente a las limitaciones de nuestros sentidos. No *existe* en ninguna parte en la realidad objetiva, ni tampoco en nuestro pensamiento. Sería una *idea* o un *concepto*: "Como ningún otro problema, el del infinito ha inquietado desde los tiempos más remotos el *ánimo* de los hombres. Ninguna otra *idea* ha sido tan estimulante y fructífera para el entendimiento. Pero, como ningún otro *concepto*, requiere de precisión y esclarecimiento satisfactorios (...) el significado concreto que éste posee en la realidad (...) La primera e irreflexiva (näive) *impresión* que tenemos de la naturaleza y la materia es la de algo extenso y continuo. Por ejemplo, si tenemos un trozo de metal o un volumen de un cierto líquido, la idea (Vorstellung) que inmediatamente nos surge es la de que se podría dividir ilimitadamente y cada parte mantendría siempre las mismas propiedades"[197]. Hace a continuación una exposición de los modelos de la Física sobre la constitución de la materia y concluye que:

> "Podemos entonces concluir que en ninguna parte de la realidad existe un continuo homogéneo que pueda ser ilimitadamente divisible y que constituyera de algún modo una realización de lo infinito en la esfera de lo pequeño. La divisibilidad infinita de un continuo es exclusivamente una operación del pensamiento, solamente una idea (Idee) que la observación de la naturaleza y la experimentación en la física y la química refutan" (Hilbert, GA, tomo III, 164) [198].

Del análisis de la "observación del universo como un todo" saca las mismas consecuencias y concluye:

> "Podemos entonces decir que hemos constatado el carácter finito de la realidad en dos direcciones, en la esfera de lo infinitamente pequeño y en la de lo infinitamente grande. Podría ocurrir, no obstante, que el lugar propio y justificado del infinito no sea la realidad, sino nuestro

---

Wissenschaft zu üben. Die Gesichtspunkte zur Auffindung dieses Weges und die Wünsche, die uns die Richtung weisen, sind diese: 1.- Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlussweisen wollen wir, wo immer nur die geringste Aussicht sich bietet, sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können. 2.-Es ist nötig, durchweg die selbe Sicherheit des Schlieβens herzustellen, wie sie in der gewöhnlichen niederen Zahlentheorie vorhanden ist, an der niemand zweifelt und wo Widersprüche und Paradoxien nur durch unsere Unaufmerksamkeit entstehen" (Hilbert, GA, Band III, 170).

196 "Die Erreichung dieser Ziele ist offenbar nur möglich, wenn uns die volle Aufklärung über *das Wessen des Unendlichen* gelingt" (Hilbert, GA, Band III, 170).

197 "Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig. (…) welche inhaltliche Bedeutung dem Unendlichen in der Wirklichkeit zukommt (…) Der erste naive Eindruck von dem Naturgeschehen und der Materie ist der des Stetigen, des Kontinuierlichen. Haben wir ein Stück Metall oder ein Flüssigkeitsvolumen, so drängt sich uns die Vorstellung auf, dass sie unbegrenzt teilbar seien, dass ein noch so kleines Stück von ihnen immer wieder dieselben Eigenschaften haben" (Hilbert, GA, tomo III, 163).

198 "Und das Fazit ist jedenfalls, das ein homogenes Kontinuum, welches die fortgesetzte Teilbarkeit zulieβe, und somit das Unendliche im Kleinen realisieren würde, in der Wirklichkeit nirgends angetroffen wird. Die unendliche Teilbarkeit eines Kontinuums ist nur eine in Gedanken vorhandene Operation, nur eine Idee, die durch unsere Beobachtungen der Natur und die Erfahrungen der Physik und Chemie widergelegt wird" (Hilbert, GA, tomo III, 164).

pensamiento. Y podría muy bien resultar que en éste el infinito asuma una función conceptual absolutamente imprescindible" (Hilbert, GA, tomo III, 165)[199].

Pero el papel que Hilbert asigna a la *idea* del infinito en nuestro pensamiento no es una sencilla "existencia" platónica, sino que asumiría el rol específico del las *ideas regulativas del la razón* de la epistemología kantiana. Así en *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre* escribe: "El infinito no se realiza entonces en ninguna parte; no existe en la naturaleza y no resulta tampoco admisible como fundamento de nuestro pensamiento intelectivo (...) El manejo del infinito debe ser garantizado, en consecuencia, a partir de lo finito"[200]. Y en *Die logische Grundlagen der Mathematik*: "Nuestro pensamiento es finito, y cuando pensamos tiene lugar un proceso finito" (Hilbert, 1923, GA, tomo III, 187)[201]. Y más explícitamente dice en *Über das Unendliche*, inspirándose explícitamente en la solución que dio Weierstrass al Cálculo Infinitesimal:

> "Debemos ahora reemplazar las argumentaciones con lo infinito por procesos finitos que nos conduzcan a lo mismo, es decir, que hagan posibles las mismas demostraciones y los mismos métodos de obtención de fórmulas y teoremas" (Hilbert, 1926, GA, tomo III, 162)[202].

El método considerado adecuado al efecto por Hilbert sería el de la introducción de *elementos ideales* (que eran fundamentales en el pensamiento de Dedekind) juntamente con la aplicación del llamado *método axiomático*, el cual analizaremos en el próximo apartado y que sería la más genuina aportación de Hilbert no sólo a la solución de este problema sino a la Matemática en general. Analiza minuciosamente el uso y el rol de los *elementos ideales* en el desarrollo de muchas teorías y justifica este procedimiento como solución al problema del infinito actual en la Matemática. Parte como modelo de la fundamentación por Weierstrass del Cálculo Infinitesimal y de su éxito al transformar enunciados que involucran "lo infinitamente pequeño" y lo "infinitamente grande" –asunto que había traído de cabeza a muchos matemáticos durante el siglo XIX- a afirmaciones que se refieren a relaciones entre magnitudes finitas. "Sin embargo el infinito continúa estando presente cuando hablamos de las sucesiones numéricas infinitas que definen a los números reales, al igual que en la noción misma de un sistema de tales números, al que normalmente se le considera como una totalidad acabada y completa" (Hilbert, GA, tomo III, 161-162)[203]. Tras el trabajo de Weierstrass, el hablar de "lo infinitamente pequeño" y de "lo infinitamente grande" sería una forma de hablar, pues los enunciados correspondientes estaban firmemente asentados bajo la formulación de cálculos con cantidades finitas y se trataría de conseguir lo mismo con estos usos pendientes del infinito:

---

[199] "Die Endlichkeit des Wirklichen haben wir nun in zwei Richtungen festgestellt: nach dem Unendlichkleinen und dem Unendlichgrossen. Dennoch könnte es sehr wohl zutreffen, dass das Unendliche *in unserem Denken* einen wohlberechtigen Platz hat und die Rolle eines unentbehrlichen Begriffes einnimmt" (Hilbert, GA, tomo III, 165).

[200] "Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäβigen Denken zulässig. (…) Das Operieren mit dem Unendlichen muss also durch das Endliche gesichert werden" (Hilbert, 1931, 488).

[201] "Unser Denken ist finit; indem wir denken, geschieht ein finiter Prozess" (Hilbert, 1923, GA, tomo III, 187).

[202] "Und so wie das Operieren mit dem Unendlichkleinen durch Prozesse im Endlichen ersetzt wurde, welche ganz dasselbe leisten und zu ganz denselben eleganten formalen Beziehungen führen, so müssen überhaupt die Schlussweisen mit dem Unendlichen durch endliche Prozesse ersetzt werden, die gerade dasselbe leisten, d.h. dieselben Beweisgänge und dieselben Methoden der Gewinnung von Formeln und Sätzen ermöglichen" (Hilbert, 1926, GA, tomo III, 162).

[203] "Aber das Unendliche tritt noch immer auf in den unendlichen Zahlenfolgen, welche die reellen Zahlen definieren, und weiter noch in dem Begriff des Systems der reellen Zahlen, welches ganz so wie eine fertig und abgeschlossene vorliegende Gesamtheit aufgefasst wird" (Hilbert, 1926, GA, tomo III, 161-162).

"Así como en los procesos de paso al límite del Cálculo Infinitesimal se demuestra que el infinito en el sentido de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande no es sino una simple forma de hablar, también debemos mostrar que el infinito, en tanto que totalidad infinita, tal y como todavía los encontramos en los procesos de inferencia usuales, es algo meramente aparente. De manera análoga a como las operaciones con lo infinitamente pequeño fueron sustituidas por procesos en el ámbito de lo finito con los que podemos llegar exactamente a los mismos resultados y a las mismas elegantes relaciones formales, debemos ahora reemplazar las argumentaciones con lo infinito por procesos finitos que nos conduzcan a lo mismo (...) Es esta precisamente la intención principal de mi teoría (...) en otras palabras, nuestra meta es concluir la tarea que Weierstrass intentaba llevar a cabo con la fundamentación del Análisis" (Hilbert, GA, tomo III, 162)[204].

El infinito actual aparecería ya de forma natural en la Aritmética más elemental. Por ejemplo los enunciados
1+2= 2.3 /2
1+2+3+ ...+10 = 10.11 /2
no presentarían mayor problema ya que "pueden ser verificados directamente efectuando las operaciones indicadas", pero el enunciado
1+2+3+ ... + n = n .(n+1) /2
"contiene en realidad una *infinidad* de proposiciones, y es eso precisamente lo esencial del mismo, y es gracias a ello que puede representar la solución de un problema aritmético y requerir un genuino argumento para su prueba". El infinito actual aparecería también cuando consideramos la totalidad de los enteros positivos como una unidad acabada, o cuando pensamos en los puntos de un segmento como una totalidad de objetos como algo terminado. Y sería consustancial a la Teoría de Conjuntos de Cantor, cuyo núcleo fundamental sería la teoría de los números transfinitos. Para Hilbert, "[el sistema de Cantor] constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido, sino también uno de los logros más elevados de la actividad intelectual pura de los seres humanos" (Hilbert, GA, tomo III, 167)[205].

Aunque el Análisis "en cierto sentido no es sino una sinfonía del infinito", el enfoque de Weierstrass no sería suficiente para recoger la esencia de la idea, que debería construirse a partir de las teorías de Cantor. En la fundamentación del Análisis realizada por Weierstrass se abordaría lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande solamente como un concepto límite "*Limesbegriff*, algo que se encuentra en devenir, en surgimiento, algo que se está generando, en otras palabras, en el Análisis hablamos del infinito como un *infinito potencial",* pero el reto que habría que encarar sería el del *infinito actual*:

"(el Análisis) resulta insuficiente para proporcionarnos una visión de la más profunda esencia del infinito. Esta visión la encontramos más bien en la Teoría de Conjuntos de Georg

[204] "Und so wie bei den Grenzprozessen der Infinitesimalrechnung das Unendliche im Sinne des Unendlichkleinen und des Unendlichgrossen sich als eine bloβe Redensart erweisen lieβ, so müssen wir auch das Unendliche im Sinne der unendlichen Gesamtheit, wo wir es jetzt noch in den Schlussweisen vorfinden, als etwas bloβ scheinbares erkennen. Und so wie das Operieren mit dem Unendlichkleinen durch Prozesse im Endlichen ersetzt wurde, welche ganz dasselbe leisten und zu ganz denselben eleganten formalen Beziehungen führen, so müssen überhaupt die Schlussweisen mit dem Unendlichen durch endliche Prozesse ersetzt werden, die gerade dasselbe leisten, d.h. dieselben Beweisgänge und dieselben Methoden der Gewinnung von Formeln und Sätzen ermöglichen. (…) Dies ist nun die Absicht meiner Theorie. Sie hat zum Ziel, die definitive Sicherheit der mathematischen Methode herzustellen, zu welcher die kritische Periode der Infinitesimalrechnung noch nicht gelangt ist; sie soll also zur Vollendung bringen, was Weierstrass mit seiner Grundlegung der Analysis angestrebt und wozu er den einen notwendigen und wesentlichen Schritt getan hat" (Hilbert, 1926, GA, tomo III, 162).

[205] "(…) diese scheint mir als die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und überhaupt eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäβiger menschlicher Tätigkeit" (Hilbert, 1926, GA, tomo III, 167).

> Cantor (...) y en su núcleo fundamental, la teoría de los números transfinitos (...) una disciplina más cercana a un enfoque filosófico general que ubica todo el complejo de problemas relativo al infinito en una nueva perspectiva" (Hilbert, GA, tomo III, 167)[206].

La introducción de los números transfinitos de Cantor debería ser considerada desde la perspectiva del *método de los elementos ideales*. Hilbert realiza un repaso de su significado, su función y sus ventajas en la construcción de algunas teorías matemáticas. Es interesante constatar algunas afirmaciones que hace en esta explicación, y que nos remiten de nuevo a su visión general sobre las Matemáticas, más allá de la elaboración de su *programa finitista*. Así, al explicar cómo el método de los *elementos ideales* ha sido aplicado en la geometría plana elemental dice que "en ésta, los puntos y las rectas del plano constituyen los únicos objetos reales originales y con una existencia verdadera" (Hilbert, GA, tomo III, 166). Para estos objetos resulta válido el axioma de conexión: a través de dos puntos cualesquiera pasa una y solamente una línea recta. De esto último se obtiene como consecuencia que dos rectas se intersecan a lo más en un punto, sin embargo, la proposición de que dos rectas se intersecan siempre en un punto no es verdadera, pues pueden ser paralelas. La introducción de *elementos ideales*, que aquí sería la introducción de puntos al infinito y de una recta al infinito, logra que la proposición de que dos rectas se intersecan siempre en un solo punto resulte universalmente válida. "Los *elementos ideales* 'al infinito' poseen aquí la ventaja de simplificar las leyes de conexión, permitiendo al mismo tiempo una visión global del tema. Por otra parte, es bien sabido que la simetría entre punto y recta (que resulta de esta simplificación) hace posible obtener en la Geometría un principio tan útil y fructífero como el de la dualidad" (Hilbert, GA, tomo III, 166)[207]. Como ejemplo de la introducción y utilidad de *elementos ideales* menciona también las magnitudes complejas ordinarias del Algebra, "con ellas podemos simplificar los teoremas relativos a la existencia y el número de raíces de una ecuación". Para Hilbert, la introducción de *elementos ideales* en una teoría tiene limitaciones muy precisas que, si bien en el fondo están relacionadas con la "intuición" de los "objetos reales originales y con existencia verdadera" de la teoría, en el marco del *sistema axiomático* en el que *se construye* la teoría se deberían concretar en la superación de la *prueba de consistencia*:

> "No debemos de ninguna manera perder de vista un requisito previo para nuestro proceder y esencial al mismo. Existe una condición única, aunque absolutamente necesaria, para la aplicación del método de los elementos ideales, a saber, la prueba de consistencia. La extensión por medio de la adición de ideales es lícita y admisible cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original y, en consecuencia, únicamente si al

---

206 "Aber die Analysis allein führt uns noch nicht zu der tiefsten Einsicht in das Wesen des Unendlichen. Diese wird uns vielmehr erst durch eine Disziplin vermittelt, die der allgemeinen philosophischen Betrachtungsweise näher steht und die berufen war, den ganzen Fragenkomplex in betreff des Unendlichen in ein neues Licht zu stellen. Diese Disziplin ist die Mengenlehre, deren Schöpfer Georg Cantor war, und zwar kommt hier für uns allein in Betracht das wahrhaft Einzigartige und Originale, den eigentlichen Kern der Cantorsche Lehre ausmacht, nämlich seine Theorie *der transfiniten Zahlen*" (Hilbert, 1926, GA, tomo III, 167).

207 "Schon in der elementaren Geometrie der Ebene findet die Methode der idealen Elemente ihre Anwendung. Hier sind ursprünglich die Punkte und Gerade der Ebene allein die reallen, wirklich existierenden Gegenstände. Für diese gilt unter anderem das Axiom der Verknüpfung: Durch zwei Punkte geht immer eine und nur eine Gerade. Hieraus ergibt sich als Folgerung, dass zwei Geraden sich höchstens in einem Punkte schneiden; die zwei Geraden können viel mehr auch einander parallel sein. Es ist aber bekanntlich durch Einführung idealer Element, nämlich der unendlich fernen Punkte und einer unendlich fernen Geraden zu erreichen, dass der Satz, wonach zwei Geraden sich immer in einem und nur einem Punkte schneiden, allgemein gültig wird. Die idealen 'unendlichfernen' Elemente bringen den Vorteil, das System der Verknüpfungsgesetze so einfach und übersichtlich zu machen, wie nur irgend möglich. Wegen der Symmetrie zwischen Punkt und Gerade entsteht daraus bekanntlich das so fruchtbare Dualitätsprinzip der Geometrie" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 166).

> suprimir los elementos ideales las relaciones que resultan para los elementos originales son válidas en la esfera original" (Hilbert, GA, tomoIII, 178- 179)[208].

Y ¿cómo se podría introducir el *infinito actual* como *elemento ideal* en la Teoría Elemental de Números? El procedimiento inicial para llegar a los números cantorianos transfinitos o, como los denomina Cantor, números de segunda clase, "consiste en llevar el *procedimiento* de conteo más allá (hinüberzählen) del infinito numerable ordinario, esto es, en una continuación natural, unívocamente determinada y sistemática de la numeración finita usual" (Hilbert, GA, tomo III, 169). Así, empezaríamos contando los enteros ordinarios: 1, 2, 3 ... y podemos considerar los objetos así numerados como un conjunto terminado infinito que denotamos por ω.

Nuestra enumeración puede ahora continuar de manera natural con $\omega+1, \omega+2, ...$ hasta $\omega+\omega$, esto es, $2.\omega$.

Seguiríamos con $2.\omega+1, 2.\omega+2...$ hasta $2.\omega+\omega$, esto es, $3.\omega$.

Así conseguimos $\omega, 2\omega, 3\omega, ...$ hasta $\omega.\omega$, esto es, ω^2.

Y continuando conseguimos $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, ...$ hasta ω^ω, los primeros números cantorianos transfinitos. Cantor logró desarrollar con éxito estas ideas dando forma a una teoría y a un cálculo completo de éstos. Pero para Hilbert, su introducción como *elemento ideal* dentro de una *teoría finitista* sólo podría hacerse con el *método axiomático* y dentro de una reelaboración axiomática de la Teoría Elemental de Números, donde, como veremos a continuación, utiliza una noción kantiana muy restrictiva de la intuición. Parte de unas formas, dispuestas en el espacio, sin significado (esto es, sin que opere el entendimiento), que conoceríamos *intuitivamente*, y que nos darían la intuición de sucesión, o tal vez la intuición de número entero, porque esto no lo aclara suficientemente:

> "En la Teoría de Números tenemos (inicialmente) los signos numéricos
>
> 1, 11, 111, 1111,
>
> donde cada signo es reconocible intuitivamente en que a 1 siempre le sigue 1. Estos signos numéricos –objeto propio de nuestra consideración- no tienen en sí ningún significado" (Hilbert, GA, tomo III, 171).

A partir de aquí, Hilbert construye varios niveles de lenguaje, o si se quiere, varios lenguajes, donde la referencia y la denotación se remite de uno a otro, y con funciones específicas:

> "Pero, además de estos signos, necesitamos ya en la Teoría elemental de Números otros signos que signifiquen algo y sirvan para la comunicación, por ejemplo, el signo 2 como abreviatura del signo numérico 11, o el signo 3 como abreviatura del signo numérico 111; más allá, utilizamos también los signos +, =, > y otros, y que sirven para la comunicación de aserciones. Así, 2+3=3+2 debe servir para la comunicación del hecho de que, en referencia a la abreviaturas utilizadas, 2+3 y 3+2 son el mismo signo numérico 11111. Igualmente sirve por tanto 3>2 como comunicación de hecho de que el signo 3, esto es 111, se extiende más allá del signo 2, esto es 11, o bien que el último signo es una porción del primero" (Hilbert, GA, tomo III, 172).

Hilbert introduce también letras a , b , c , ... como signos a este nivel con el fin de comunicar aserciones. Con ello b > a es la comunicación de que el signo numérico b se

[208] " (…) dürfen wir doch die wesentliche Vorbedingung für unser Tun nicht vergessen. Es gibt nämlich eine Bedingung, eine einzige, aber auch absolut notwendige, an die die Anwendung der Methoden der idealen Elemente geknüpft ist, und diese ist der *Nachweis der Widerspruchfreiheit*: die Erweiterung durch Zufügung von Idealen ist nämlich nur dann tatthaft, wenn dadurch im alten engeren Bereiche keine Widersprüche entstehen, wenn also die Beziehungen, die sich bei Elimination der idealen Gebilde für die alte Gebilde herausstellen, stets im alten Bereiche gültig sind" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 178- 179).

extiende más allá del a. “E igualmente, desde el actual punto de partida, la expresión a+ b = b+a sería solamente la comunicación de que el signo numérico a+b es el mismo que b+a. Y con ello puede el contenido pertinente a esta comunicación ser demostrado a través de una inferencia con contenidos materiales, y podríamos llegar muy lejos con esa forma de actuación intuitiva y referente a contenidos” (Hilbert, GA, tomo III, 172). Pero el problema consistiría en que, mientras algunos enunciados con contenido concreto como 2+3=3+2, o bien 2=3, o bien a+b = b+a no presentan problemas desde un punto de vista finitista y se “presentan como algo inmediatamente intuitivo y comprensible, algo susceptible de ser negado, que es verdadero o falso y “en relación a lo cual podemos hacer valer sin ninguna restricción las reglas de la lógica aristotélica” como el principio de no contradicción y el del tercero excluido, habría otros problemáticos, por ejemplo aquellos que no serían separables en enunciados más simples. Por ejemplo el enunciado a+1 =1+a, en el que aparece un numeral no especificado, no sería susceptible de negación desde el punto de vista finitista puesto que “el enunciado no puede ser interpretado como una expresión compuesta de un número infinito de igualdades numéricas conectadas por la palabra ‘y’, sino que debe serlo como juicio hipotético que afirma algo con tal de que dispongamos ya de un numeral”. En ese y otros ejemplos que Hilbert propone, concluye que “la falta de claridad se convierte en algo intolerable cuando el ‘todos’ y el ‘existe’ se combinan en enunciados subordinados.

> “Como sea, las leyes lógicas utilizadas por el ser humano desde que este tiene la capacidad de pensar y que Aristóteles nos ha enseñado no tienen aquí validez” (Hilbert, GA, tomo III, 174)[209].

Por ello se introducen los *enunciados ideales*, “cuya función consiste en preservar la validez de las leyes usuales de la Lógica”. Pero, ¿qué son exactamente y cómo se introducen? En realidad Hilbert construye un nuevo lenguaje, considerando exclusivamente la *forma* del anterior, y los nuevos enunciados carecerían de todo significado y referencia, exactamente lo mismo que ocurría originalmente con los signos numéricos 1, 11, 111, … y que reconoceríamos también de forma inmediatamente intuitiva por su disposición, secuencia y estructura en el espacio. Así el enunciado numérico a+b = b+a ya discutido anteriormente se traduciría al nuevo lenguaje por ***a+b = b+a*** carente de cualquier contenido o significado:

> “Esta fórmula no es ya la comunicación inmediata de un contenido, sino tan sólo una construcción formal cuya relación con los enunciados finitistas originales 2+3 = 3+2, 5+7 = 7+5 los signos 2,3,5,7 sustituyen a a y a b, estableciéndose por medio de este sencillo procedimiento tales enunciados finitistas particulares. De este modo podemos concluir que aquí ni a, ni b, ni =, ni +, ni siquiera la fórmula misma a+b = b+a poseen, por sí mismos, ningún significado; ocurre con ellos a este respecto lo mismo que con los signos numéricos originales [1, 11, 111,...]. Sin embargo a partir de estas fórmulas es posible derivar otras fórmulas a las que sí podremos asignar un significado, considerándolas como comunicaciones de enunciados finitistas. Si generalizamos esta idea, las Matemáticas llegan a ser un inventario de fórmulas, primero aquéllas que corresponden a comunicaciones con contenido de enunciados finitistas, y a las que se añaden otras fórmulas que carecen de todo significado y que son las formas [Gebilde] ideales de nuestra teoría” (Hilbert, GA, tomo III, 175- 176)[210].

---

[209] “Jedenfalls diejenigen logische Gesetze, die die Menschen, seit sie denken, stets gebraucht haben, und die eben Aristoteles gelehrt hat, gelten nicht” (Hilbert, 1926, GA, Band III, 174).

[210] “ (…) und diese ist auch gar nicht mehr eine unmittelbare Mitteilung von etwas Inhaltlichem, sondern ein gewisses formales Gebilde, dessen Verhältnis zu den alten finiten Aussagen 2+3 = 3+2, 5+7 = 7+5 darin besteht, dass wir in jener Formel für ***a***, ***b*** Zahlzeichen 2, 3, 5, 7 einsetzen und dadurch, d. h. durch ein Beweisverfahren –wenn auch ein sehr einfaches- diese finiten Einzelaussagen gewinnen. So kommen wir zu der Auffassung, dass ***a, b***, =, +, so wie die Gesamtformel ***a+b = b+a*** an sich nichts bedeuten, so wenig wie die Zahlzeichen; wohl aber können aus ihr Formeln abgeleitet werden, denen wir eine Bedeutung zuschreiben, und zwar, indem wir sie als Mitteilungen von finiten Aussagen auffassen. Wenn wir diese Auffassung generalisieren, so wir die Mathematik zu einem Bestande von Formeln, und zwar erstens

La forma que tiene Hilbert de introducir estos *elementos ideales* es utilizando el método axiomático que ya había desarrollado en los *Grundlagen der Geometrie* e incorporando a la teoría axiomatizada el Cálculo Lógico (aquí aparecería otra vez la 'armonía preestablecida'), de forma que en la teoría, aunque sería mejor llamarlo lenguaje, las fórmulas serían formas sin significado pero también las propias demostraciones serían estructuras de signos dispuestos en el espacio, figuras [Figur], que se reconocerían intuitivamente, entendiendo por intuición ese reconocimiento no discursivo de formas que ya presentaban los signos numéricos originales:

> "Ahora bien, en tanto que no expresan afirmaciones finitistas, los enunciados ideales, esto es, las fórmulas, carecen de todo significado, por lo que no podemos aplicarles las operaciones lógicas de manera concreta [inhaltlich] como a los enunciados finitistas. Se hace entonces necesario someter a un proceso de formalización análogo tanto a las operaciones lógicas como a las demostraciones mismas. Pero este proceso requiere a su vez una reformulación de las relaciones lógicas en fórmulas (...) Por fortuna, esa misma armonía [preestablecida] se pone de manifiesto en relación con nuestra problemática permitiéndonos hallar como algo ya elaborado de manera avanzada el cálculo lógico" (Hilbert, GA, tomo III, 176)[211].

Y aunque ese cálculo se creara originalmente en el marco de una perspectiva diferente y sus enunciados fueran enunciados con "contenido concreto" y significado, se someten al mismo procedimiento, o traducción al lenguaje formal, resultando que, según esto, las fórmulas del cálculo lógico no poseen aquí absolutamente ningún significado; todas ellas son ahora *enunciados ideales*. El resultado de todo ello es que "finalmente obtenemos, en lugar de la ciencia matemática con contenido concreto, el cual se comunicaba con el lenguaje normal, simplemente una colección de fórmulas con signos matemáticos y lógicos que se disponen unos tras de otros según reglas determinadas (...) la inferencia concreta [das inhaltliche Schliessen] es reemplazada por un manejo externo [ein äusseres Handeln] según reglas (...) y una demostración matemática es una figura [Figur] que aparece ante nosotros como tal intuitivamente" (Hilbert, GA, tomo III, 177)[212]. A partir de aquí, Hilbert construye un sistema axiomático, que no vamos a analizar, para la Aritmética. Como conclusión cree que "el infinito es una idea en la que podemos confiar sin reservas en el marco de la teoría que acabo de delinear". Ya ha quedado claro en toda la exposición anterior que, para Hilbert, el infinito no tiene ningún tipo de realidad, ni existe en la naturaleza ni es aceptable como fundamento de nuestro pensamiento intelectivo. Al aparecer el infinito actual de forma natural en la matemática moderna y, en particular en la teoría de los números, intentos como los de

---

solchen, denen inhaltlichen Mitteilungen finiter Aussagen entsprechen, und zweitens von weiteren Formeln, die nichts bedeuten und die *ideale Gebilde unserer Theorie* sind" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 175-176).

[211] "Aber da die idealen Aussagen, nämlich die Formeln, so weit sie nicht finite Behauptungen ausdrücken, nicht bedeuten, so können an ihnen die logische Operationen nicht inhaltlich wie an den finiten Aussagen vorgenommen werden. Es ist also nötig, die logische Operationen und auch die mathematische Beweise selbst zu formalisieren (…) Da tritt nun zum Glück für uns dieselbe prästabilierte Harmonie ein, die wir so oft in der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft bemerken (…) wir treffen als vorgeschrittene Vorarbeit den *Logikkalkül* an" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 176).

[212] "Dadurch erhalten wir schlieβlich an Stelle der inhaltlichen mathematischen Wissenschaft, welche durch die gewöhnliche Sprache mitgeteilt wird, nunmehr einen Bestand von Formeln mit mathematischen und logischen Zeichen, welche sich nach bestimmten Regeln aneinander reihen. (…) das inhaltliche Schlieβen wir also durch ein äuβeres Handeln nach Regeln ersetzt und es wird damit einerseits für die Axiome selbst, die doch auch ursprünglich naiv als Grundwahrheiten gemeint waren, die aber schon längst in der modernen Axiomatik bloβ als Verknüpfungen von Begriffen angesehen wurden, wie ferner auch für den Logikkalkül, der ursprünglich nur eine andere Sprache sein sollte, jetzt der strenge Übergang von naiver zu formaler Behandlung vollzogen (…) Ein mathematischer Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muss" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 177).

Frege de basar la misma noción de número en la lógica le parecían insuficientes y equivocados:

> "En abierta oposición a Frege y Dedekind, podemos concluir que existen ciertas representaciones e ideas intuitivas que son imprescindibles como condición de posibilidad de todo conocimiento científico: la lógica no basta; las operaciones con el infinito necesitan para ser seguras de una base finita. El rol que le resta al infinito es más bien simplemente el de una idea [Idee] –si se entiende por una idea, según las palabras de Kant, un concepto de la razón, el cual supera toda experiencia y por medio del cual se ensambla lo concreto en el sentido de una totalidad" (Hilbert, GA, tomo III, 190)[213].

Hilbert no concebía que hubiera otra posibilidad de abordar el problema de forma satisfactoria que éste su programa finitista. Pero como ya él mismo hizo notar, su éxito dependía de las demostraciones de consistencia, y en particular de la demostración de consistencia de los axiomas de la Aritmética.

> "Tanto en la Geometría como en la Física es posible dar pruebas de consistencia relativa, esto es, de reducir el problema de la consistencia en estas esferas a la consistencia de los axiomas de la Aritmética. Pero es evidente que no tiene sentido buscar una demostración de este tipo para la Aritmética misma (...) En la medida en que la Teoría de la Demostración, basada en el método de los elementos ideales, hace posible este último y decisivo paso, constituye una especie de punto final y necesario en la construcción del edificio de la Teoría Axiomática. Y lo que hemos tenido que padecer en dos ocasiones, primero con las paradojas del cálculo infinitesimal y luego con las paradojas de la teoría de conjuntos, no podrá pasarnos una tercera vez, no volverá a pasar nunca" (Hilbert, GA, tomoIII, 179)[214].

Para resumir, podemos decir que para Hilbert el infinito aparece por una *sensación* errónea, debida precisamente a las limitaciones de nuestros sentidos. No *existe* en ninguna parte en la realidad objetiva, ni tampoco en nuestro pensamiento. Sería una *idea* o un *concepto*, más precisamente, el papel que Hilbert asigna a la *idea* del infinito en nuestro pensamiento no es la de una sencilla "existencia" platónica, sino que asumiría el rol específico del las *ideas regulativas_del la razón* de la epistemología kantiana. El método considerado adecuado por Hilbert para abordar el infinito actual en la Matemática sería el de la introducción de *elementos ideales*[215] juntamente con la aplicación del llamado *método*

---

[213] "Im Gegensatz zu den früheren Bestrebungen von Frege und Dedekind erlangen wir die Überzeugung, dass als Vorbedingung für die Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis gewisse anschauliche Vorstellungen und Einsichten unentbehrlich sind und die Logik allein nicht ausreicht. Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden. Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist viel mehr lediglich der einer Idee –wenn man, nach den Worten Kants, unter einer Idee einen Vernunftbegriff verstehet, der alle Erfahrung übersteigt und durch den das Konkrete im Sinne der Totalität ergänzt wird- einer Idee überdies, der wir unbedenklich vertrauen dürfen in dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 190).

[214] "In der Geometrie und den physikalischen Theorien gelingt der Nachweis der Widerspruchsfreiheit durch Zurückführung auf die Wiederspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome. Diese Methode versagt offenbar bei der Arithmetik selbst. Indem unsere Beweistheorie auf Grund der Methoden der idealen Elemente diesen letzten wichtigen Schritt ermöglicht, bildet sie den notwendigen Schlussstein in dem Lehrgebäude der Axiomatik. Und was wir zweimal erlebt haben, einmal als es sich um die Paradoxien der Infinitesimalrechnung und dann um die Paradoxien der Mengenlehre handelte, das kann nicht zum dritten Male und wird nie wieder passieren" (Hilbert, 1926, GA, Band III, 179).

[215] Para Thomas Mormann, "La noción de *idealización* ha recibido una considerable atención en la filosofía de la ciencia contemporánea pero menos en la filosofía de las matemáticas. Una excepción fue el 'idealismo crítico' de Ernst Cassirer. De acuerdo con Cassirer, la metodología de la idealización juega un rol central en las matemáticas y la ciencia empírica" (Mormann, 2008, 151). En este trabajo se constata la importancia crucial de los *elementos ideales* en el enfoque de Hilbert, lo cual es un punto de coincidencia importante con Cassirer, y ambos desde una perspectiva pretendidamente kantiana para tratar los nuevos problemas de la Matemática que no existían en la época de Kant. No existe ninguna mención a Cassirer en Hilbert, y en los

axiomático. Para Hilbert, la introducción de elementos ideales en una teoría tiene limitaciones muy precisas que, si bien en el fondo están relacionadas con la "intuición" de los "objetos reales originales y con existencia verdadera" de la teoría, en el marco del *sistema axiomático* en el que *se construye* la teoría se deberían concretar en la superación de la *prueba de consistencia*.

Esto significa que la extensión por medio de la adición de ideales es lícita y admisible cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original y, en consecuencia, únicamente si, al suprimir los elementos ideales, las relaciones que resultan para los elementos originales son válidas en la esfera original. Para introducir el infinito actual como elemento ideal en la Teoría Elemental de Números, el procedimiento inicial para llegar a los números cantorianos transfinitos o, como los denomina Cantor, números de segunda clase, consistiría en llevar el procedimiento de conteo más allá del infinito numerable ordinario, esto es, en una continuación natural, unívocamente determinada y sistemática de la numeración finita usual. Pero para hacerlo sería necesario añadir elementos ideales a la Teoría de Números y, previamente, determinar los elementos de tal teoría elemental de forma susceptible de axiomatización. Para Hilbert, la introducción del infinito actual como elemento ideal dentro de una teoría finitista sólo podría hacerse con el método axiomático y dentro de una reelaboración axiomática de la Teoría Elemental de Números, donde utiliza una noción kantiana muy restrictiva de la intuición. Parte de unas formas, dispuestas en el espacio, sin significado (esto es, sin que opere el entendimiento), que conoceríamos intuitivamente, y que nos darían la intuición de sucesión, o tal vez la intuición de_número entero, porque esto no lo aclara. A partir de aquí, Hilbert construye varios niveles de lenguaje, o si se quiere, varios lenguajes, donde la referencia y la denotación se remite de uno a otro, y con funciones específicas. Para introducir los *enunciados ideales*, "cuya función consiste en preservar la validez de las leyes usuales de la Lógica", Hilbert construye un nuevo lenguaje, considerando exclusivamente la forma del anterior, el cual tenía contenido material (Inhalt) y significado, pero los enunciados en el nuevo lenguaje carecerían de todo significado y referencia, exactamente lo mismo que ocurría originalmente con los signos numéricos 1, 11, 111, … y que reconoceríamos también de forma inmediatamente intuitiva por su disposición, secuencia y estructura en el espacio. Sin embargo, a partir de las fórmulas de este lenguaje sin significado es posible derivar otras fórmulas a las que sí podremos asignar un significado, considerándolas como comunicaciones de enunciados finitistas.

Si generalizamos esta idea, las Matemáticas llegan a ser un inventario de fórmulas, primero aquéllas que corresponden a comunicaciones con contenido de enunciados finitistas, y a las que se añaden otras fórmulas que carecen de todo significado y que son *las formas [Gebilde] ideales de nuestra teoría.* La manera que tiene Hilbert de introducir estos elementos ideales es utilizando el método axiomático que ya había desarrollado en los *Grundlagen der Geometrie* e incorporando a la teoría axiomatizada el cálculo lógico (aquí aparecería otra vez la 'armonía preestablecida' en el sentido que él le daba a esta noción, al encontrarse con el cálculo lógico ya desarrollado), de forma que en la teoría, aunque sería mejor, en mi opinión, llamarlo lenguaje, las fórmulas serían formas sin significado pero también las propias demostraciones serían estructuras de signos dispuestos en el espacio, figuras [Figur], que se reconocerían intuitivamente, entendiendo por intuición ese reconocimiento no discursivo de formas que ya presentaban los signos numéricos originales. En abierta oposición a Frege y Dedekind, concluye que existen ciertas representaciones e ideas intuitivas que son imprescindibles como condición de posibilidad de todo conocimiento científico: la lógica no basta; las operaciones con el infinito necesitan para ser seguras de una base finita. Lejos de ser

manuscritos de sus cursos recientemente publicados tampoco. Se plantea así la necesidad de una investigación de esas afinidades y de las diferencias y coincidencias de sus concepciones.

un formalista, en el sentido actual del término, o de tener algún tipo de afinidad con el logicismo, como todavía se le presenta en ciertos estudios, Hilbert aparece más bien como un kantiano para el que, incluso en su programa finitista –mucho más restrictivo que su concepción general de la Matemática-, reivindica la intuición como un elemento constitutivo esencial, no ya tan sólo de las Matemáticas, sino como "condición de la posibilidad de todo conocimiento científico; la Lógica no basta".

La noción de intuición que utiliza en su programa finitista, tanto en la intuición de número como en la de demostración, concuerda plenamente con los sentidos 1,2,3 y 4 que hemos presentado como básicos en Kant en la línea interpretativa de Prauss, Falkenstein, Allison, Bird y Abela. Sin embargo, como veremos, su visión general de las Matemáticas y, en particular, de la Geometría le lleva a sostener una visión de la intuición más general, identificable tal vez con la que aparecía en el discutible sentido 5 de la intuición kantiana como *intuición intelectual* (o que, en todo caso, no encajaría con los usos 1,2,3 y 4 que hemos identificado en la *Estética* de Kant) o, más probablemente, relacionado con su lectura del *a priori* kantiano típica de la interpretación de Kant por el Idealismo alemán, y que Hilbert, en desacuerdo, consideraba sobredimensionado por Kant. Y, en todo caso, desbordaría el enfoque epistemológico de Kant para concordar más bien con un cierto platonismo o tal vez, como sostiene Corry, con un empiricismo o, como sostiene Majer, relacionada con una interpretación fenomenológica conexa con la de Husserl, tema que queda abierto a discusión e investigación posterior.

4. 5 -El Método Axiomático.

El Método Axiomático de David Hilbert, quizás su aportación más característica a la Epistemología, comienza a desarrollarse con los *Grundlagen*. Esta obra es básicamente una nueva formulación, teniendo en cuenta los desarrollos de la Geometría en el siglo XIX, de la Geometría axiomatizada por Euclides 2200 años antes. Para entender la génesis del método y sus características será necesario comparar detenidamente la axiomatización de Euclides y la de Hilbert, y para ello deberemos: (i) Analizar la estructura axiomática de los *Grundlagen*, (ii) Analizar la estructura axiomática de los *Elementa* de Euclides, (iii) Analizar las axiomatizaciones y los desarrollos de la Geometría del siglo XIX, para entender las razones de las modificaciones introducidas por Hilbert, y (iv) Analizar las diferencias entre los *Elementa* y los *Grundlagen* para concretar las características del Método Axiomático de Hilbert que, como veremos, no es una simple axiomatización alternativa de la axiomatización realizada por Euclides.

4.5.1 Estructura de los *Grundlagen.*

Cuando David Hilbert publicó en 1899 la obra *Grundlagen der Geometrie*, muchos colegas se extrañaron puesto que era conocido por sus numerosos trabajos e investigaciones en la teoría de los invariantes y en la teoría de los cuerpos de números algebraicos y no se sabía que tuviera interés por la Geometría. Que se sepa, solamente publicó en 1895 un artículo acerca de la línea recta como el camino más corto entre dos puntos, donde generalizaba el modelo de la geometría hiperbólica propuesto por Klein y Cayley. Sin embargo, dictó varios cursos de Geometría en los años anteriores en la Universidad de Gotinga, donde se había incorporado tres años antes. La primera edición de los *Grundlagen der Geometrie*, un trabajo de 89 páginas, fue publicada por la editorial B.G.Teubner de Leipzig en un volumen titulado *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen* y que también incluía el trabajo de Emil Wiechert *Grundlagen der Elektrodynamik*[216]. En ese pequeño

[216] Fue encargado por Felix Klein como parte de las celebraciones que culminarían con la inauguración de un monumento a dos de las principales figuras de la ciencia en Göttingen, Gauss y Wilhelm Weber.

trabajo Hilbert exponía exclusivamente la Geometría que Euclides había presentado en trece libros hacía 2200 años, y además despojándola de algunas partes no específicamente geométricas como el método de exhaución y sus consecuencias.

Aparentemente la pretensión básica era axiomatizar perfectamente la Geometría de Euclides, en el sentido de reducir a un mínimo los elementos básicos necesarios para poder deducir todos sus resultados, demostrando también la independencia y consistencia de esos elementos básicos. Por ello el primer paso, desarrollado en el capítulo I, consistía en enumerar tales elementos básicos (axiomas). Este capítulo fue objeto de cambios importantes en sucesivas ediciones[217]. En el capítulo II Hilbert analiza la consistencia e independencia de sus axiomas. Es de señalar que Hilbert presenta, más que axiomas, grupos de axiomas, lo cual repite en las distintas axiomatizaciones de otras teorías que realiza posteriormente. Aquí considera el grupo-I (axiomas de enlace), el grupo-II (de ordenación), el grupo-III (de congruencia), el grupo-IV (de paralelas) y el grupo-V (de continuidad). Muchos autores, confundiendo su axiomatización de la Geometría con su teoría de la demostración presentada en el apartado anterior, sostienen que Hilbert presenta aquí una axiomatización estrictamente formal que huye de toda interpretación intuitiva, y esto se interpreta así por algunos incluso hoy en día. Pero tal afirmación no se puede sostener[218]. Con relación a la independencia (capítulo II) Hilbert demuestra en realidad la independencia de los grupos de axiomas[219], probando que "no es posible derivar por medio de silogismos ninguna parte esencial de un determinado grupo de axiomas de los grupos de axiomas precedentes"[220]. Que el axioma de las paralelas es independiente de los demás, lo demostró Hilbert a la manera tradicional, esto es, recurriendo a la existencia de una geometría no euclídea, en la que se verificaban todos los axiomas a excepción del de las paralelas[221]. La demostración de la independencia de los

[217] El orden de los temas en el capítulo I fue modificado entre la primera y la segunda edición; de la segunda a la décima (1968) ese orden se mantuvo. De la segunda a la sexta se fueron introduciendo numerosas mejoras (varios axiomas, por ejemplo, pasaron a ser teoremas), así como apéndices. Véase (Sanchez Ron, 1996, 23).

[218] Por ejemplo, Sánchez Ron (1996, 23) sostiene que "con mayor o menor claridad, en mayor o menor grado, en todos se aprecia cómo están construidos pensando en términos lógicos, no intuitivos: ¿cómo si no limitarse a decir (axioma-I-3): 'sobre una recta existen al menos dos puntos'? A cualquiera que haya dejado un resquicio a la intuición, que tenga la idea de recta, no se le ocurriría reducirse a semejante enunciado, o si lo hiciese añadiría inmediatamente que existen infinitos puntos en una recta (en el sistema de Hilbert ésta es una consecuencia –teorema 7- de los axiomas". Más bien, contra la opinión de Sánchez Ron, podría concluirse que Hilbert sigue la línea de los antiguos griegos e intenta no introducir como axioma el infinito actual. Veremos también que la presunta renuncia de Hilbert a la intuición en la Geometría no se puede sostener. Corry (2002, 38) sostiene, por el contrario que "los grupos no tienen ningún significado lógico de por sí. Antes bien, ellos reflejan la concepción de Hilbert de los axiomas como expresiones de nuestra intuición espacial y las diferentes formas en que ésta se presenta". Y hemos presentado manifestaciones explícitas de Hilbert en esta última dirección.

[219] Sin embargo, existían relaciones de dependencia entre los grupos de axiomas. Ya Poincaré señalo que ('Les fondements de la géometrie' *Bulletin des Sciences Mathématiques,* 26, 249-272 (1902)) los axiomas de orden dependen de los de enlace, en tanto que éstos definen de alguna manera la noción de tres puntos en línea recta.

[220] En algún caso también probó la independencia de algún axioma de los de los demás del grupo, así, probó que el axioma III-5 no se deduce de los demás axiomas de congruencia elaborando una geometría analítica particular.

[221] El axioma de la paralelas es formulado así por Hilbert (1996, 33): "IV. *(Axioma de Euclides).-Sea* a *una recta cualquiera y* A *un punto exterior a* a : *en el plano determinado por* a *y* A *existe a lo más una recta que pasa por* A *y no corta a la* a". Este axioma es enunciado por Euclides así: "Postulado V.-Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en este mismo lado". De este axioma Hilbert deduce (1996, 33) el "Teorema 31.- Los ángulos de un triángulo suman dos rectos". En muchos textos aparece este teorema como equivalente al axioma de las paralelas, sin embargo Hilbert demuestra (1996, 55), basándose en las investigaciones de H. Dehn (F. Schur dio posteriormente una demostración alternativa), que son equivalentes

axiomas de continuidad se lleva a cabo introduciendo una geometría no arquimediana[222] . En la primera edición de los *Grundlagen* el grupo-V de axiomas (de continuidad) únicamente estaba formado por el axioma de Arquímedes, con el que pretendía "hacer posible la introducción del concepto de continuidad en geometría" introduciendo la noción de que si se dan dos segmentos arbitrarios, *l* y *L*, se puede encontrar siempre un número entero, *n*, lo suficientemente grande como para que al construir *n* veces el segmento *l*, se obtenga un segmento total mayor que *L*. Sin embargo, en la segunda edición alemana (1903) incorporó el Axioma V-II de plenitud o completitud (Vollständigkeit), lugar en el que permaneció en todas las ediciones que él revisó, indicando que, aunque su libro no había utilizado para nada ese axioma, "desde el punto de vista de los principios es el que hace posible la correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y todos los números reales"[223].

En relación con la consistencia del sistema, Hilbert hace una demostración de consistencia indirecta, sirviéndose de números reales que satisfacían los cinco grupos de axiomas, por lo que "toda contradicción en las consecuencias de los axiomas I-V necesitará verse en la Aritmética del sistema de números enteros"[224]. El propósito principal del capítulo III es el de establecer en el plano, y con independencia del axioma de Arquímedes, la teoría euclídea de las proporciones, sin la cual no se pueden construir los teoremas de semejanza para triángulos. Parte de la demostración del teorema de Pappus[225], el cual permite obtener las leyes de multiplicación en el cálculo de segmentos, lo que posibilita abordar la teoría de proporciones. Concluye demostrando que toda recta en el plano está representada por una ecuación lineal en las coordenadas. En el capítulo IV proporciona una teoría poligonal de las áreas, que se construyen mediante un cálculo de segmentos, sin introducir ningún axioma nuevo. El capítulo V se dedica al teorema de Desargues, básico en la geometría proyectiva. El capítulo VI se dedica al teorema de Pascal-Pappus y en el capítulo VII se aborda la cuestión de qué problemas pueden resolverse en una geometría fundamentada en los grupos de axiomas I-IV mediante la regla y el compás. En las sucesivas ediciones Hilbert fue incorporando hasta diez apéndices, consistentes en reproducciones (a veces corregidas) de artículos ya publicados o conferencias, por ejemplo, el Apéndice III "Nuevo fundamento de la Geometría de Bolyai-Lobatschefky"[226] en el que reconstruía axiomáticamente, según el

---

sólo si se agrega el Axioma de Arquímedes, es decir, si se admite la continuidad. Pero esta equivalencia no sería válida en geometrías no arquimedianas, cuya existencia estaba ya demostrada. Aquí mismo discute Hilbert las distintas modificaciones del axioma de Euclides que dan lugar a las geometrías no euclidianas. Esta discusión es un buen ejemplo de unos de los objetivos principales de Hilbert al diseñar su Método Axiomático: clarificar el rol de cada axioma (*Grundsätze o Kernsätze*, en la terminología más sugerente propuesta por Pasch) en la generación de las distintas partes básicas del cuerpo de una teoría, así como sus interrelaciones.

[222] al igual que había hecho Veronese en su libro Fundamenti de Geometria (1891).

[223] Ya al aparecer la traducción francesa del libro, en 1902, Hilbert añadió una nota en la que decía que "señalemos que a los cinco grupos de axiomas precedentes se les puede añadir todavía el siguiente axioma, que no es de naturaleza puramente geométrica, y que, desde un punto de vista teórico, merece una atención especial. Axioma de plenitud: Es imposible añadir al sistema de puntos, rectas y planos otros objetos de manera tal que el sistema así generalizado forme una nueva geometría que satisfaga todos los axiomas de los grupos I-V". Señalaba que no nos dice nada sobre la existencia de puntos límite ni sobre la noción de convergencia, y, sin embargo, con su uso se puede demostrar el teorema de Bolzano por el que, para todo conjunto de puntos situados entre dos puntos de una recta, existe un punto de acumulación.

[224] Todo el método quedaría así tocado en un punto vital por los teoremas de incompletitud de Gödel. Todo sistema axiomático consistente de la Aritmética elemental sería necesariamente incompleto.

[225] Así es como se denomina en la actualidad. Hilbert lo llama el teorema de Pascal, al igual que Poincaré. Sanchez Ron (1996, 25) conjetura que en eso seguiría probablemente el precedente de W.Wiener.

[226] "Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie", *Mathematische Annalen* 57, 137-150, (1903).

método de los *Grundlagen*, y sin recurrir a los axiomas de continuidad, la geometría plana de Bolyai-Lobachwesky. También se hicieron modificaciones importantes a la obra principal[227].

Como ya hemos señalado, esta obra ha sido interpretada por muchos hasta nuestros días como un intento (exitoso) de reducción de la Geometría a un modelo simbólico ininterpretado donde la verdad se identifica con la derivabilidad formal (en el sentido precisado por Hilbert en su teoría de la demostración comentada en el apartado anterior) y donde la intuición no tendría ningún lugar, y como una obra que documentaba la concepción formalista de la Matemática de David Hilbert. Como veremos, esto no se puede sostener[228] pero podría explicarse tanto por el contexto de los debates previos al respecto en el siglo XIX como por las reacciones a la obra y los debates consiguientes, que se mezclaron con el debate fundacional anteriormente discutido. Debe, en nuestra opinión, distinguirse el Método Axiomático creado por Hilbert, y aplicado en esta obra a la Geometría Euclídea (y posteriormente aplicado por él mismo a otras disciplinas), de la aplicación de dicho método, junto con la utilización de elementos ideales, para la axiomatización de la teoría de la demostración en la fundamentación de la Aritmética. Será preciso para ello analizar los debates e intentos de axiomatización de la Geometría en el siglo XIX e igualmente un análisis más detallado de la estructura axiomática de los *Grundlagen*.

Se pueden encontrar algunas citas de Hilbert que, aisladas de su contexto, parecerían avalar la tesis de que Hilbert tenía una visión formalista de la Matemática y, en particular, de la Geometría, o la famosa anécdota citada[229] por muchos autores que narra Otto Blumenthal (Hilbert, GA, tomo III, 403) y según la cual Hilbert, en relación a los axiomas de la geometría, manifestó en una conversación informal: "uno debería ser capaz de decir siempre, en lugar de puntos, líneas rectas y planos, mesas, sillas y jarras de cerveza"[230]. Aunque

---

[227] El orden de los temas en el capítulo I fue modificado de la primera a la segunda edición; de la segunda a la décima (1968) ese orden se mantuvo. De la segunda a la sexta (Leipzig, 1923) se introdujeron numerosas mejoras y varios axiomas pasaron a ser teoremas. De la segunda a la cuarta edición (Leipzig 1903, 1909, 1913) los apéndices añadidos fueron siete, uno más en la quinta (Leipzig 1922) y otro en la sexta (Leipzig 1923). En la última edición aparecida en vida de Hilbert, y la última corregida por él, la séptima (Berlin, 1930), los apéndices son diez, aunque sólo cinco se conservan de las tres ediciones anteriores. En la octava (Stuttgart, 1958) y novena (Stuttgart, 1962) Paul Bernays introdujo varios suplementos. Para más detalles véase (Sánchez Ron, 1996, 31). La traducción española es de la séptima edición alemana (B.G.Teubner, Leipzig-Berlin 1930) y fue realizada por Francisco Cebrián en 1953, publicándose en 1953 como el número 1 de una "colección de textos clásicos" patrocinada por el Instituto Jorge Juan de Matemáticas del CSIC. Se ha reeditado por dicho Consejo en 1996 en la colección "Textos Universitarios".

[228] Hasta Bourbaki tiene que reconocer esto, si bien en nota a pie de página: "Sin embargo, Hilbert parece haber creído siempre en una 'verdad' matemática objetiva. Incluso algunos formalistas que, como H.Curry, mantienen una postura muy próxima a la que acabamos de resumir, rechazan con indignación la idea de que las matemáticas pudieran ser consideradas como un simple juego, y se empeñan en ver en ellas una 'ciencia objetiva'" (Bourbaki, 1972, 55).

[229] La mencionan Constance Reid (1970, 57) (1996, 60) , Hermann Weyl (1944, 612) y G.Birkhoff y M.K.Bennett (1987, 343), Bell (2001, 201), Sánchez Ron (1996, 29), Gray (2008, 179), Stewart (1997, 157), entre otros.

[230] El relato de Blumenthal es exactamente el siguiente: (tras asistir a la conferencia de Wiener en Halle, y de regreso a Königsberg) "en una sala de espera berlinesa discutía él con dos geómetras –si no me confundo A.Schoenflies y E.Kötter- sobre la axiomática de la Geometría y dio su concepción con la típica agudeza que le caracterizaba con las siguientes palabras: 'se debe poder decir en todo momento en lugar de *punto, recta, plano: mesa, silla, jarra de cerveza*'". Lo relevante es que enmarca dicha anécdota dentro de un supuesto punto crucial en el desarrollo del pensamiento de Hilbert, y directamente en el origen de la gestación de los *Grundlagen der Geometrie* y comentando el éxito de esta obra dice: "Merece la pena indagar las causas de ese éxito y el desarrollo de las ideas de Hilbert. Ese proceso parece haberse iniciado con mucha anterioridad. Hoy sabemos con seguridad que la conferencia que H. Wiener pronunció en 1891 en la *Naturforscher-Versammlung* de Halle sobre 'Fundamentos y Construcción de la Geometría' produjo un fuerte impacto en Hilbert" (Blumenthal, 1935, 402).

probablemente lo realmente relevante de la anécdota es que ocurrió a comienzos de 1891 y, como Blumenthal relata a continuación, Hilbert había leído en el anterior semestre un curso de Geometría, y también sería relevante el contexto de la anécdota, que no era otro que la asistencia de Hilbert a una conferencia de Wiener en Halle sobre Geometría y que, según Blumenthal, le impactó, lo que documenta su interés por el tema 8 años antes de la aparición de los *Grundlagen*. Pero lo cierto es que esas palabras se suelen citar como confirmación de la posición formalista (en el sentido de Bourbaki) de Hilbert en relación específica con la Geometría y en referencia a su proyecto con los *Grundlagen*, interpretación que el mismo Blumenthal sostiene. Así, hablando de la conferencia de Wiener en Halle en 1891 y su impacto sobre Hilbert, dice: "En esa conferencia sostuvo Wiener con completa claridad la exigencia de que, los hechos válidos para los puntos y rectas del plano, y para las operaciones de conexión y corte, deberían poder ser derivados de esos 'enunciados básicos' (Grundsätzen)[231], cuyas formulaciones solamente contendrían esos elementos y operaciones, de forma que 'se pueda construir a partir de éstos una ciencia abstracta que sea independiente de los axiomas de la Geometría'[232](...) Estos planteamientos subyugaron a Hilbert, que en el anterior semestre había enseñado Geometría Proyectiva, de forma que, ya en el mismo viaje de vuelta, comenzó a reflexionar sobre esas cuestiones" (Blumenthal, 1935, 402). Y sobre el significado de esta obra de Hilbert sostiene que: "Los 'Grundlagen' deben su aplastante éxito sin duda, en primer lugar, a su dirección filosófica, a la radical abstracción de la intuición (Anschauung) y su sustitución por las conexiones lógicas" (Blumenthal, 1935, 403) Esa misma interpretación parece ser que tuvo por parte de muchos de sus contemporáneos.

Resulta curiosa y a la vez esclarecedora la reacción de Frege al respecto, así como la respuesta de Hilbert. Al poco de publicarse los *Grundlagen*, Frege envió una carta el 27 de Diciembre de 1899 a Hilbert en la que le manifestaba que encontraba su enfoque extraño. Insistía en el punto de vista tradicional de los axiomas geométricos según el cual éstos se justificaban por la intuición geométrica. Hilbert respondió inmediatamente el día 29 de Diciembre:

> "Usted escribe: 'Denomino axiomas a las proposiciones que son verdaderas pero que no son demostradas porque nuestro conocimiento de ellas surge de una fuente muy diferente de la lógica, una fuente que podría llamarse intuición espacial. De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen entre sí'. Encuentro muy interesante leer esta frase de su carta, ya que por lo que a mí se refiere siempre que he pensado, escrito y dado clases sobre estos temas, he dicho justo lo contrario: Si los axiomas dados arbitrariamente no se contradicen entre sí en todas sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Para mí, este es el criterio de verdad y existencia" (en Frege, 1980, 39)[233].

Esta es la cuestión clave que hay que dilucidar. Puede parecer sorprendente, o más bien abiertamente chocante, contemplar a Frege sosteniendo una postura aparentemente intuicionista (compárese con su posición en relación a los fundamentos de la aritmética) frente a un Hilbert que aparentemente defiende una postura logicista. Para aclarar esta paradoja hay que tener en cuenta los siguientes puntos que intentaremos demostrar. En primer lugar, la situación particular de la Geometría en la época, que, incluso también por Hilbert, era

---

[231] Pasch, en sus intentos de axiomatización, comenzaría llamándolos *Grundsätzen* para luego proponer el nombre de *Kernsätzen* (Blumenthal, 1935, 403).

[232] Aquí se entendía por axiomas, como era tradicional, los axiomas de la formulación de Euclides, cuya verdad se suponía que se debía a su "evidencia intuitiva". Este uso de "intuición" es claramente distinto del kantiano, tal y como lo hemos interpretado en este trabajo.

[233] Citado también por Sánchez Ron (1996, 37). Parece que esta opinión tan tajante de Hilbert avala la interpretación de Blumenthal, y aún la más extrema de Bourbaki. Pero una interpretación literal no parece muy en consonancia con el conjunto de manifestaciones de Hilbert al respecto que citamos en este trabajo.

considerada fundamentalmente una Ciencia natural y empírica, por oposición a la *matemática pura*, tal y como se entendía en esa época, y que de hecho la unificación de la Geometría con las distintas disciplinas matemática sólo vendría como consecuencia del nuevo enfoque de David Hilbert, y más precisamente de su Método Axiomático y sobre todo de los trabajos de Riemann y, en otra línea, de la obra de Klein.

Por otra parte, Hilbert hablaba más bien de las características de su Método Axiomático, que aplicó por cierto a otras disciplinas distintas de la Geometría, y el cual consideraba un método adecuado "para cualquier disciplina con un nivel suficiente de desarrollo". Se trataba más bien, como señalan Brading y Ryckman, de que "sin embargo, en el uso de Hilbert este término (axioma) no implica meramente la típica preocupación matemática por el rigor de los enunciados explícitos de una teoría, sino que más bien connota también un método específicamente *lógico y matemático* de investigación de la 'profundización en los fundamentos' de la teoría. Por tanto, con la invocación del 'método axiomático' Hilbert estaba llamando la atención sobre un método epistemológico específico de investigación de las teorías matemáticas (incluyendo las de la Física) que él había inaugurado, y que veía íntimamente ligado a la naturaleza del propio pensamiento" (Brading & Ryckman, 2008, 6). Por otra parte, en relación a la geometría propiamente dicha, Hilbert no planteó en el fondo ninguna ruptura con el enfoque tradicional de la geometría, incluyendo en esto los intentos de axiomatización realizados en el siglo XIX, que esencialmente, como veremos, seguían concibiendo la Geometría como una ciencia natural.

El enfoque verdaderamente revolucionario de la Geometría estaba en el planteamiento de Felix Klein[234]. Como dice Corry (1998, 1), "a diferencia de matemáticos del tipo de

---

[234] Planteamiento con el que Hilbert nunca estuvo de acuerdo. Felix Klein pronunció en 1872 en la Universidad de Erlangen una conferencia inaugural con ocasión de su nombramiento como catedrático de dicha Universidad, que es lo que se conoce como el "Programa de Erlangen" y que él tituló "Consideraciones comparativas sobre las nuevas investigaciones geométricas" (Klein, 1921, tomo I, 460-497). Aquí, además de plantear sus opiniones sobre el carácter de la Geometría, el papel de la intuición en ella, la oposición entre Geometría analítica y Geometría sintética (enfoque fundamentado por von Staudt, que elimina las coordenadas de las demostraciones, y pretendía prescindir de los números reales e incluso de los axiomas, y que era muy respetada y estaba de moda en Alemania en aquellos años pero cuya única utilidad hoy reconocida es que ayudó a aclarar el papel de los escalares dentro de la geometría clásica), también planteó muy minuciosamente su enfoque unificador de la geometría *sobre una base algebraica*, cambiando así radicalmente el planteamiento de lo que es la Geometría. Basándose en los trabajos Cayley y de Sophus Lie sobre grupos e invariantes, con el cual también colaboro en el desarrollo de estas ideas, su propuesta la resume así: "Una teoría geométrica se refiere a un conjunto y a un grupo de transformaciones de ese conjunto, y todos los teoremas de la Geometría correspondiente son teoremas de existencia de invariantes de ese grupo". De esta forma, la noción ambigua de "propiedad geométrica del espacio" adquiere una entidad formal algebraica, y nociones como alineación, orientación, distancia y, en general, cualquier propiedad geométrica, se puede traducir por un cierto conjunto con una propiedad de invarianza por un grupo de transformaciones. Así se produce, no solo una unificación conceptual de las distintas geometrías, sino una mejor comprensión de sus relaciones con una teoría física. Como veremos más adelante, Hilbert no compartía en modo alguno este enfoque. El proceso seguido a partir de aquí, según Bourbaki "llevaba hacia una abstracción cada vez mayor de las formas sesquilineales, aunque se ha revelado extremadamente sugestivo conservar sin modificaciones la terminología [de la geometría clásica] (...) Superada en tanto que ciencia viva y autónoma, la Geometría clásica se ha convertido de este modo en un *lenguaje universal* de la matemática contemporánea, dotado de una flexibilidad y comodidad incomparables" (Bourbaki, 1976, 191). Sobre el Programa de Erlangen y sus consecuencias puede consultarse: Thomas Hawkins, "The *Erlanger Programm* of Felix Klein: Reflections of its place in the History of Mathematics", *Historia Mathematica, 11,* 442-470 (1984); M.K.Bennett & Garret Birkhoff, "Felix Klein and his 'Erlangen Program'", *History and Philosophy of Modern Mathematics, pp.145-176,* University of Minnesota Press, Minneapolis, 1988; David E. Rowe, "A forgotten chapter in the History of Felix Klein's *Erlanger Programm*", *Historia Mathematica, 10,* 448-457 (1983); François Russo, "Groupes et Géométrie. La genèse du programme d'Erlangen de Felix Klein" (Paris, 1968); Thomas Hawkins, "Line geometry, differential equations and the birth of Lie's theory of groups", en *History of Modern Mathematics*, vol. I, pp.275-327 (Academic Press, San Diego, 1989).

Giuseppe Peano (1858-1939) o Felix Haussdorff (1868-1942), Hilbert puede ser calificado de 'modernista moderado', cuya mayor habilidad consistió, no tanto en introducir innovaciones radicales sino más bien en profundizar y desarrollar las tradiciones existentes, clarificando sus puntos más esenciales, preparando concisas síntesis de vastos territorios, y ofreciendo nuevos puntos de partida para una renovada investigación de los campos clásicos cultivados por sus predecesores". Por tanto, el aporte innovador de Hilbert con los *Grundlagen* era, más que específicamente geométrico, metodológico, e íntimamente ligado a una lectura de la filosofía de Kant. Como dicen Brading y Ryckman en un contexto distinto, en relación con la Física, "Hay dos piezas contextuales que creemos que son cruciales para un correcto entendimiento del tratamiento de Hilbert de la física general covariante: su método axiomático y su apelación a la epistemología kantiana" (Brading & Ryckman, 2008, 6). Exactamente lo mismo se podría decir "para un correcto entendimiento del tratamiento de Hilbert" de la Geometría [235].

La situación de la Geometría en el siglo XIX era algo singular dentro de las Matemáticas. Frente al vigoroso desarrollo experimentado en los siglos precedentes, y en ese mismo, por muchas ramas de la Matemática, así como la aparición de nuevas ramas y teorías, la Geometría seguía reducida en lo fundamental al planteamiento de Euclides, considerado válido y suficiente desde hacía más de 2000 años, sin que ni tan siquiera las recientes construcciones de geometrías no euclidianas por Gauss, Lobatschevski y Bolyai supusieran un cuestionamiento serio, y, de hecho, pasaron bastante desapercibidas y no plantearon ninguna conmoción [236]. Y eso era así debido, como vimos al comienzo del capítulo, a la certeza de tipo empírico sobre la verdad de sus axiomas, fundamentada, por consiguiente, en la concepción universalmente aceptada de la Geometría como una "ciencia natural" (Einstein, 1921, 6), (Hilbert, GA tomo III).

4.5.2 Estructura de los *Elementa* y sus errores.

El profundo respeto a la obra de Euclides no impidió encontrar en ella desde el principio algunos fallos. Comenzaremos con una breve descripción de la estructura de los *Elementa*, de la que se infiere una profunda reflexión metamatemática. La obra distingue dos tipos de enunciados cuya verdad debe admitirse (y no entra a valorar las razones de esa admisión) para la validez de la obra. Los divide en dos clases: la primera consta de proposiciones, principios o axiomas generales, o "nociones comunes", que se considera que afectan a todo razonar; la segunda incluye aquellas proposiciones, principios, o "postulados", o axiomas particulares que se considera que afectan exclusivamente a la disciplina. Ambas clases están catalogadas al comienzo mismo del texto (Euclides, 1991), antes del enunciado y demostración del primer teorema del primer libro. Las nociones comunes o axiomas generales son cinco:

1.-Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí

2.-Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales

3.-Si a cosas iguales se sustraen cosas iguales, las diferencias son iguales

4.-Cosas que pueden llevarse a ser congruentes son iguales

5.-El todo es mayor que su parte

Los postulados o axiomas particulares también son cinco:

[235] No es casual que los *Grundlagen* comiencen con una cita clave de Kant: "Así , pues, todo conocimiento humano comienza con intuiciones, de éstas pasa a conceptos y termina con ideas. (Kant, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre T.2. Abt2.)".

[236] Bourbaki (1972, 29).

I.-Por dos puntos distintos pasa una única recta
II.-Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado
III.-Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados
IV.-Todos los ángulos rectos son iguales
V.-Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en este mismo lado[237].

Resta disponer de un mínimo de "objetos matemáticos", o bien porque se encuentren, o bien porque se suministren de antemano[238]. La solución dada a esta cuestión por Euclides consiste en suministrar de antemano una tal colección por medio de los *οροι*, término que suele traducirse por "definición", pero que también podría significar "término" o incluso "descripción excitante"[239]. Se encuentran veintitrés definiciones al comienzo del libro primero, entre éstas:

1.-Un punto es aquello que no tiene partes
2.-Una línea es una longitud sin anchura
3.-Las extremidades de una línea son puntos
4.-Una recta es una línea que yace por igual respecto de todos sus puntos

Siguen las definiciones de superficie, plano, ángulo y sus clases, círculos, triángulos y cuadriláteros y sus clases y, finalmente, rectas paralelas:
23.-Rectas paralelas son aquéllas que, estando en un mismo plano, por más que se las prolongue en ambos sentidos nunca se encuentran.

Luego hay otros grupos de definiciones al comienzo de cada libro, excepto: en el libro X donde se dan definiciones en tres lugares distintos (al principio se dan cuatro definiciones para introducir los términos: conmensurable e inconmensurable, racional e irracional), y en los dos últimos libros que no incorporan definiciones. Al comienzo del libro V, la definición cuarta será relevante:

4.-Se dice que dos magnitudes forman razón cuando cada una admite un múltiplo que es mayor que la otra.

Al comienzo del libro XI están las 28 últimas definiciones de los *Elementa*. Desde el principio, dichas "definiciones" han sido muy controvertidas[240]. Por ejemplo, se ha señalado que la definición de recta podría incluir a la circunferencia, a ciertos tipos de espirales y a la hélice. Además, la distribución en la obra entre "postulados" y "nociones comunes" es confusa y, aún peor, algunas definiciones tienen en realidad el carácter de postulados. Por ejemplo, la definición cuarta del comienzo del libro V, citada más arriba, es equivalente a lo que hoy llamamos el "postulado de Arquímedes".

---

[237] Este (Postulado V) ha sido frecuentemente reformulado así: Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a dicha recta. Obsérvese que ésta es la formulación que vimos que da Hilbert, sólo que él evita usar el término *paralela*.

[238] "Surge así el problema del origen de las entidades matemáticas, en particular de las fundamentales o primitivas (...) Es obvio que es ésta una delicada cuestión que recurrirá una y otra vez en todo intento de fundamentación de la Matemática" (Dou, 1974, 21).

[239] La palabra *definición* tiene ya un significado muy definido en la ciencia moderna. El término griego mencionado podría significar "quizá mejor 'descripciones que han de excitar en la mente del lector la idea u objeto matemático' cuya definición exacta debía de parecer a los griegos como imposible o inefable" (Dou, 1974, 21).

[240] (Dou, 1974, 23).

Por otro lado, la lista de postulados es insuficiente, problema que aparece ya en la demostración de la primera proposición del libro I, que enuncia que dos circunferencias cada una pasando por el centro de la otra se cortan, sin que eso pueda deducirse de la lista de postulados y axiomas previos. La falta de postulados de orden fue señalada por Pasch, y además los que faltan no son más evidentes que los expresamente enunciados, por lo que la indicación de Aristóteles de que no es necesario postular lo evidente tampoco sería de aplicación. También se han encontrado numerosos paralogismos, algunos tan sutiles que no se han esclarecido hasta después de la obra de Riemann; otros fueron descubiertos muy pronto, por ejemplo, la proposición 16 del libro I no puede demostrarse a partir de los postulados y teoremas previamente establecidos y el error en la demostración de Euclides se ha considerado siempre paradigmático del exceso de confianza en la intuición[241]. Pero el enunciado que levantó más suspicacias, dando lugar a infinitud de trabajos a lo largo de los siglos, fue el Postulado V transcrito más arriba. Y había buenas razones para ello. Es de tal naturaleza que parece que ha de responder a una manera de ser del espacio físico en el que vivimos, y, puesto que no es tan es evidente como los demás postulados (involucra una recta "indefinida"), teniendo en cuenta la concepción dominante de la Geometría como una ciencia natural, eso significaría que no debería ser postulado, sino que tendría que ser demostrable a partir de los otros postulados explícitos de Euclides del libro I, de los postulados suyos implícitos que son evidentes (siguiendo la opinión de Aristóteles) y de los veintiocho primeros teoremas del libro I que son demostrados sin emplear el Postulado V. Se pensaba que era un error de Euclides el incluirlo como postulado. Así lo entendieron eminentes matemáticos a lo largo de los siglos, y eso dio lugar a infinitos intentos de demostración del V Postulado según este planteamiento, entre los que cabe destacar el trabajo publicado por Saccheri en 1733[242]. Pero era independiente, y este hecho, y el de que Euclides lo incluyera como postulado separado contra toda lógica aparente, nos habla a las claras de todo lo que no sabemos que sabían los griegos, pero que sí sabían[243]. Un paso importante para el

---

[241] (Dou, 1974, 32) y con más detalle en (Wussing, 1962).

[242] La primera presunta demostración del postulado V que ha llegado hasta nosotros se debe a Tolomeo (siglo II d.de C.). La "demostración" de Tolomeo, de gran profundidad, nos es conocida a través de Proclo, quien después de señalar la insuficiencia de la demostración de Tolomeo da su propia demostración del postulado V, que también contiene un paralogismo. Otra pretendida demostración también de gran altura se debe a Nashiraddin (1201-1272), traductor de Euclides a la lengua de los persas, y otra se debe al autor de la *Arithmetica Infinitorum*, J. Wallis (1616-1703). La demostración de Wallis puede leerse en (Becker, 1964, 170). La "demostración" más célebre, que de hecho supuso un paso importante para el esclarecimiento de la cuestión, se debe al jesuita Jerónimo Saccheri que publicó en 1733 el libro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides vindicado de todo error). Parte del cuadrilátero birrectángulo isósceles, ya tratado anteriormente por C.Clavio, pero que hoy se denomina cuadrilátero de Saccheri. Está formado por un segmento AB y en los extremos dos perpendiculares de igual longitud las dos, AC y BD. Se cierra uniendo C con D con un segmento igual a AB. Primeramente demuestra que en esta construcción los ángulos en C y en D son iguales. Y luego plantea las tres hipótesis posibles: que ambos sean rectos, obtusos o agudos. "Parece que Saccheri, sea en virtud de su propia casi demostración, sea por la fuerza de una tradición bimilenaria jamás puesta en duda, está convencido de que la única hipótesis racionalmente coherente es la del ángulo recto, equivalente al postulado V de Euclides.Toda su argumentación restante va dirigida a excluir, y merece la pena señalar que por reducción al absurdo, las dos hipótesis del ángulo obtuso y agudo, hipótesis que andando el tiempo habrían de conducir a la creación de las geometrías elementales elíptica e hiperbólica respectivamente" (Dou, 1974, p.29). Su demostración era falsa, pues contenía varios paralogismos, pero "el librito de Saccheri constituye, sin que llegara a reconocerlo su autor, el primer tratado de geometrías no euclídeas, con unos treinta teoremas, muchos de ellos nada triviales" (Dou, 1974, 29) . Un tratamiento a fondo del tema en (Dou, 1967 y 1970). El texto en (Becker, 1964, 171).

[243] De esa opinión parece ser también Hilbert cuando dice (*Mathematisches Denken*, 1918): "En realidad, el problema de si el enunciado de las paralelas se encuentra condicionado por otros axiomas es resuelto ya de manera negativa por Euclides mismo al considerarlo como uno de sus axiomas" (GA, tomo III, 148).

esclarecimiento de la cuestión fue dado por J.H. Lambert (1728-1777)[244] y, curiosamente, en el periodo 1825-1830 Gauss, Lobachevski y Bolyai probaron de forma independiente la independencia del postulado V, construyendo estos dos últimos unas geometrías no euclidianas. Parece ser que el primero en publicar algo al respecto fue Nikolas I. Lobatschevski, quien en 1829 publicó un desarrollo sistemático de la geometría del ángulo agudo en el Boletín de la Universidad de Kazán[245]. Sin embargo, estos descubrimientos pasaron desapercibidos y tuvieron una transcendencia muy limitada[246], toda vez que sus mismos autores seguían convencidos de que la Geometría era una ciencia natural que, si bien podía estructurarse deductivamente, sus axiomas se obtendrían por abstracción de las propiedades del mundo real, por lo que debería ser una prueba empírica la que indicara si el postulado V era *verdadero* o no. Así, el mismo Gauss intentó probarlo midiendo los ángulos del triángulo formado por tres colinas de Hannover muy alejadas, y ésta era también la opinión de Lobatschevki (Bourbaki, 1976, 30) y hasta del mismo Riemann quien en su célebre disertación inaugural, a la que asistió Gauss ya octogenario, decía: “hay que resolver el problema de saber en qué medida y hasta qué punto estas hipótesis son confirmadas por la experiencia”[247] .

4.5.3- Las axiomatizaciones y los desarrollos de la Geometría del siglo XIX.

La obra de Bernhard Riemann marca un punto de ruptura. En su trabajo de habilitación (1854) Riemann plantea las bases de lo que hoy se conoce por Geometría Riemanniana, que incluye una unificación de las geometrías euclídeas y no euclídeas. La geometría riemanniana es el estudio de las variedades diferenciales con métricas de Riemann; es decir de una aplicación que a cada punto de la variedad, le asigna una forma cuadrática definida positiva en su espacio tangente, aplicación que varía suavemente de un punto a otro. Esto da ideas locales de (entre otras magnitudes) ángulo, longitud de curvas, y volumen. A partir de éstas, pueden obtenerse otras magnitudes por integración de las magnitudes locales. Como casos especiales particulares aparecen los dos tipos convencionales (geometría elíptica y geometría hiperbólica) de geometría no-euclidiana, así como la geometría euclidiana misma[248]. Todas estas geometrías se tratan sobre la misma base, al igual que una amplia gama de las geometrías con propiedades métricas que varían de punto a punto. Cualquier variedad diferenciable admite una métrica de Riemann y esta estructura adicional ayuda a menudo a solucionar problemas de topología diferencial. También sirve como un nivel de entrada para la estructura más complicada de las variedades pseudo-Riemann, las cuales, en el caso

---

[244] Establece la relación de proporcionalidad entre el defecto (o exceso) de la suma de los ángulos de un triángulo respecto de dos rectos y su área, en la hipótesis del ángulo agudo (u obtuso). Además sugiere la analogía de la geometría del ángulo agudo con la geometría sobre una esfera de radio imaginario (Dou, 1974, 33), (Becker, 1964, 173).

[245] (Dou, 1974, 33). En 1829 Johann Bolyai escribe a su padre Wolfgang, profesor de Matemáticas, filósofo y amigo de Gauss acerca de sus trabajos sobre el tema. El padre envió el trabajo de su hijo a Gauss, y luego lo publicó en 1832 como un apéndice de su propia obra. Parece que para cuando Gauss recibió el trabajo de Bolyai ya había llegado por su cuenta a esas conclusiones, pero se negaba a publicarlas, según se desprende de la correspondencia de Gauss con Bessel y con Schumacher. Esta correspondencia puede consultarse en (Becker, 1964, 178).

[246] Por lo pronto, su efecto sobre los principios de las Matemáticas no fue tan profundo como a veces se dice. Simplemente, obligó a abandonar las pretensiones del siglo anterior sobre la ‘verdad absoluta’ de la Geometría euclídea y, con más razón, el punto de vista leibniziano de las definiciones implicando los axiomas; estos dejarían de aparecer como ‘evidentes’ para pasar a ser *hipótesis* cuya adaptación a la representación matemática del mundo sensible se trata de comprobar. “Gauss y Lobatschevski creían que la discusión sobre las diversas geometrías podía ser zanjada por la experiencia” (Bourbaki, 1976, 30).

[247] B. Riemann: “Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen”, puede consultarse en (Becker, 1964, 185). Hay traducción española en (Ferreiros, 2000).

[248] Un estudio elemental detallado se puede encontrar en (Dou, 1974, 40).

particular de tener dimensión = 4, son los objetos principales de la teoría de la relatividad general. Pero el enfoque no estaba exento de problemas[249].

Lo cierto es que a partir de aquí se produjo en el último tercio del siglo XIX una fuerte y dinámica corriente de investigación sobre la Geometría, sobre todo en Alemania, en la que participaron científicos como Beltrami, Lie, Pasch, Veronese, Helmholz, Hertz, Klein, Wiener, Schur, Peano, y muchos otros. Se creó, por las dificultades que iban surgiendo, una conciencia general de que había que examinar con mayor cuidado y clarificar prioritariamente las estructuras deductivas de la o (a esas alturas se podía decir ya) de las Geometrías. Pero además de los trabajos sobre las Geometrías euclídeas y no-euclídeas, y de la línea abierta por Riemann, existía otra corriente de investigación a partir de los trabajos publicados en 1822 por Jean Victor Poncelet, que inauguró la Geometría Proyectiva[250]. En 1882 Moriz Pasch publicó su trabajo "Lecciones sobre la Geometría nueva"[251]. En él reconstruía la geometría proyectiva de una manera novedosa, basada en un examen axiomático comprensivo, y tomó especial cuidado en no referirse nunca a las propiedades de los diagramas relevantes, sino en seguir cuidadosamente las inferencias deductivas de los axiomas. Eso le permitió cerrar algunas brechas lógicas que existían desde los tiempos de Euclides y que se fueron descubriendo gradualmente a lo largo de la historia [252].

> "Pero es importante señalar que para Pasch, como para la mayoría de los geómetras alemanes desde los tiempos de Gauss, la Geometría era una ciencia natural, cuyo objetivo es el estudio de la forma externa de los objetos, y cuyas verdades se obtienen, aunque deductivamente, a partir de axiomas que expresan hechos directamente derivados de la experiencia empírica. Para Pasch, el significado de los axiomas es netamente geométrico, nunca puramente formal, y su significado no puede comprenderse sin referencia a las figuras a las que se refieren. La deducción de los teoremas no debe ni puede apoyarse en los diagramas, pero el significado es estrictamente referido a ellos" (Corry, 2002, 33)[253].

[249] "La descripción que Riemann intenta dar de las 'multiplicidades extendidas *n* veces', objeto de sus trabajos, solamente se apoya en consideraciones 'intuitivas' (esta palabra sólo está justificada para $n \leq 3$, para valores de *n* mayores se trata en realidad de un razonamiento por analogía) para justificar la introducción de 'coordenadas locales; a partir de aquí se siente en un terreno sólido en apariencia, a saber, en el del Análisis. Pero este último se funda en último término sobre el concepto de número real, que no había tenido hasta entonces más que un carácter muy intuitivo, y los progresos de la teoría de funciones condujeron a resultados inquietantes en este aspecto; con los trabajos del mismo Riemann sobre la integración, y sobre todo con los ejemplos de curvas sin tangente construidos por Weierstrass y Bolzano, daba comienzo toda la patología de las Matemáticas (...) Los efectos producidos sobre la mayoría de los matemáticos del siglo XIX iban desde la repulsa hasta la consternación" (Bourbaki, 1976, 30).

[250] "Además de interesantes resultados y teoremas que se iban agregando continuamente, la atención se dirigía también hacia problemas fundacionales de esta disciplina, especialmente en lo tocante al rol jugado por consideraciones de continuidad en la demostración de sus teoremas centrales" (Corry, 2002, 32). Para más detalle véase (Bourbaki, 1976, 181-183).

[251] "Vorlesungen über neuere Geometrie", puede consultarse en (Becker, 1964, 199).

[252] (Corry, 2002, 33), (Torrelli, 1978, 210). Al sistema axiomático diseñado por Pasch le falta la perfección que caracterizaría al de Hilbert. Él mismo lo reconoce en una nota (fechada en Giessen en Marzo de 1912) que añadió a la edición española del libro ("Lecciones de Geometría moderna", traducción de Julio Rey Pastor y José Álvarez Ude, Junta de Ampliación de Estudios, Madrid, 1912): "Han quedado sin probar otros hechos de la misma índole, por ejemplo (...).Puede ser un ejercicio útil para el lector hallar los axiomas que faltan, completando de este modo los principios fundamentales de la Geometría proyectiva" (Pasch, 1912, 34). Por otra parte, no dio demasiada importancia a la cuestión de la independencia de sus axiomas. Así (Pasch, 1912, 135) escribe: "Estos medios no son independientes entre sí, pero esto es indiferente para nuestros fines".

[253] En palabras de Pasch: "Los axiomas no pueden entenderse sin las correspondientes figuras; expresan lo que se observa en determinadas figuras simples. Los teoremas no se fundamentan en observaciones, sino que se demuestran; cada conclusión que tiene lugar en el curso de una demostración, debe encontrar su confirmación en la figura, pero ella misma se justifica, no por la figura, sino por ciertos enunciados

El trabajo de Pasch tuvo dos consecuencias directas. Por un lado reavivó el interés por el enfoque axiomático de la Geometría, dando lugar a numerosos trabajos de axiomatización, y por otro, planteó la necesidad de resolver el estatus de las consideraciones de continuidad, que en su sistema no quedaban dilucidadas, dando lugar a dos corrientes de investigación al respecto[254]. Entre los sistemas axiomáticos que se crearon bajo el influjo de los planteamientos de Pasch habría que citar precisamente al de Hilbert[255] y el de Peano, para quien el sistema de Pasch representaba un interesante desafío. En 1889 Peano había desarrollado un lenguaje en el cuál presentó sus postulados de la Aritmética. Estaba interesado en aclarar la relación entre los términos lógicos y los puramente geométricos, y pensaba que su lenguaje podía abrir nuevas posibilidades al respecto. Creó un sistema axiomático que era una leve modificación del de Pasch, pero procuró asegurar primordialmente la independencia de los axiomas. Su concepto de independencia era muy parecido al que desarrollaría Hilbert poco después, pero lo aplicaba a axiomas individuales y nunca pensó en aplicarlo a grupos de axiomas, que sería el caso del enfoque fundamental de Hilbert[256]. Pero para Peano, y también para Hilbert, la Geometría era una ciencia natural y sus ideas se derivan directamente de la experiencia empírica[257]. Un último autor que pudo influir en los planteamientos de Hilbert fue Veronese, quien en 1891 probó la independencia del axioma de Arquímedes de los restantes de la Geometría[258], abriendo la posibilidad de una Geometría no-arquimediana, es decir, en la cual se omiten los axiomas de continuidad, tema que Hilbert trataría en su libro. Por otro lado, como hemos reseñado en una nota anterior, Hilbert estaba en completo desacuerdo con los planteamientos de Sophus Lie y Felix Klein, por lo que esta perspectiva no fue considerada por él en absoluto[259].

4.5.4- Diferencias entre los *Elementa* y los *Grundlagen.* Las características del Método Axiomático de David Hilbert.

Puesto que en el fondo los *Grundlagen* surgen de una *reflexión* de Hilbert acerca de los *Elementa*, era necesario el análisis pormenorizado de la estructura de ambas obras realizado en los apartados anteriores con el fin de entender mejor el carácter de esa *reflexión* y para fijar

---

anteriormente demostrados (o por una definición)" (Becker, 1964, 201). Y en el prólogo a la edición española ya mencionada (Pasch, 1912) escribe: "La finalidad de la obra era, en primer término, organizar completamente la Geometría como exige la naturaleza de la Matemática, y al mismo tiempo hacer resaltar el origen empírico de los conceptos y nociones geométricos. En realidad, en algunos trabajos no se concede a esta tendencia todo su valor, o es relegada a segundo término". Véase también (Torretti, 1978, 210-218).

[254] Véase (Corry, 2002, 34).

[255] Ya hemos visto que existe evidencia documental de que en 1890, es decir el año anterior a su asistencia a la conferencia de Wiener en Halle, estaba enseñando Geometría Proyectiva.

[256] (Corry, 2002, 35) y también: (Kennedy, 1981, 281), (Torretti, 1978, 221-226).

[257] "A pesar de su continua insistencia en ejecutar análisis detallados de las estructuras lógicas de las teorías fundamentales en Matemáticas, Peano, de manera similar a Pasch, no era un formalista ni un logicista en el sentido que posteriormente se le atribuyó a estos términos. Para Peano las ideas matemáticas, y en particular aquellas de la Geometría, se derivan directamente de la experiencia empírica" (Corry, 2002, 35). Véase también (Kennedy, 1981, 443). Sin embargo, para Sánchez Ron: "Un aspecto en el que los matemáticos italianos se distinguen claramente de Pasch es el del carácter que asignaban a los axiomas geométricos, veían a la geometría axiomática como una ciencia abstracta, libre de dependencias empíricas" (Sánchez Ron, 1996, 27). Este no sería el caso de Peano, pese a la opinión de Sánchez Ron. Véanse las citas anteriores y (Torretti, 1978, 221).

[258] (Toepell, 1986, 56).

[259] En el Apéndice IV de los *Grundlagen* se reproduce un artículo titulado "Sobre los fundamentos de la Geometría" (Hilbert, 1996, 186-233) que se había publicado anteriormente (*Mathematische Annalen* 56, pp. 50-68 (1902)), en el que Hilbert critica el enfoque de Lie y de Klein. Ya había planteado con anterioridad sus críticas públicamente, precisamente en la misma formulación del problema 5º de los 23 que enumeró en el Congreso de París de 1900: "De la noción de grupos continuos de transformación de Lie, haciendo abstracción de la hipótesis que las funciones que definen los grupos son susceptibles de diferenciación" .

la posición de Hilbert respecto de aspectos claves como la intuición en la Matemática, la noción de verdad en ella, el carácter de sus objetos o las relaciones del pensamiento matemático con la Lógica. El trabajo de David Hilbert en los *Grundlagen* debe considerarse fundamentalmente como un intento de axiomatización de la geometría euclídea[260], teniendo en cuenta las aportaciones de los siglos al respecto, la clarificación lógica de las investigaciones del siglo XIX, y muy especialmente las de Pasch, y eso dentro del enfoque de su Método Axiomático, el cual intentamos aquí caracterizar, y que de hecho comenzó a perfilarse en este intento, y que tenía la pretensión de ser un método aplicable a toda teoría "con un cierto grado mínimo de desarrollo" y que, por tanto, era fundamentalmente un *método epistemológico general*, más que un enfoque específico de una ciencia. Llama la atención el contraste entre la simplicidad de los fundamentos de la Geometría tal y como vienen dados por Hilbert en sus axiomas, y la compleja problemática que suscitan las definiciones, postulados y axiomas de los *Elementa* de Euclides. Es obvio que hay un progreso extraordinario desde los *Elementa* a los *Grundlagen der Geometrie* por varias razones y muy especialmente porque Hilbert ha evitado las definiciones explícitas: "pensemos en tres distintos sistemas de entes: a los entes del *primer* sistema los llamamos *puntos* y los designamos con A,B,C,..., a los entes del *segundo* sistema los nombramos *rectas* y los designamos por a,b,c,..., a los entes del *tercer* sistema los denominamos *planos* y los designamos con $\alpha, \beta, \gamma, ...$Los puntos reciben también el nombre de *elementos de la Geometría lineal*, los puntos y rectas el de *elementos de la Geometría plana*, y los puntos, rectas y planos el de *elementos de la Geometría espacial o del espacio*. Concebimos los puntos, rectas y planos en ciertas relaciones recíprocas y expresamos estas relaciones con palabras tales como 'estar situado', 'entre', 'congruente', 'paralelo', 'continuo'.

La descripción completa de estas relaciones hecha exactamente y con fines matemáticos resulta de los *axiomas de la Geometría*. Los axiomas de la Geometría podemos dividirlos en cinco grupos: cada uno de estos grupos, aisladamente, expresa *ciertos hechos fundamentales correspondientes a nuestra intuición*" (Hilbert, 1996, 3)[261]. Esta la podríamos señalar como la primera característica básica del que llamamos Método Axiomático de David Hilbert: al evitar las definiciones directas de los objetos matemáticos y considerar solamente su *estructura relacional*, adopta un enfoque que podríamos llamar estructuralista; en la exposición axiomática, y para sus fines, lo relevante son las relaciones estructurales entre los objetos. Eso no quiere decir que para él esa teoría matemática *es* solamente esas relaciones, o

---

[260] Según Corry, "En 1899 Hilbert publicó un famoso trabajo conocido como *Los Fundamentos de la Geometría*, que contenía una novedosa y sistemática elaboración de la geometría euclídea y de las no-euclídeas" (Corry, 2002, 32). Esta afirmación tiene que matizarse. Es verdad que el tratamiento de Hilbert en esa obra tenía en consideración los resultados de las investigaciones del siglo XIX antes expuestas -por ejemplo a la hora de elegir los grupos de axiomas-, y que en los apéndices añadidos a las sucesivas ediciones trataba temas específicos de esas investigaciones, pero en su primera edición era exclusivamente un tratado de Geometría euclídea y, en su esencia, así permaneció hasta la séptima y última edición que él revisó.

[261] Incidentalmente, vuelve aquí a parecer claro que para Hilbert, como para el resto de los matemáticos alemanes de su época, los axiomas deben expresar una intuición empírica. Parece absolutamente injustificada la pretensión de Sánchez Ron y otros (siguiendo la tradición de Bourbaki) de considerar esta obra de Hilbert un paradigma del formalismo. En esta interpretación, el esquivar las definiciones directas, como hace Hilbert en la cita anterior, es considerado como una postulación de la irrelevancia del significado de los símbolos. Esto es ciertamente así para el propósito del estudio de la estructura deductiva de la teoría, pero no para la teoría misma, como queda claro por los criterios de Hilbert en la elección de los axiomas, que implica la consideración de un significado, además de por las numerosas declaraciones explícitas suyas al respecto. Por otra parte, Hilbert considera su método adecuado "para cualquier teoría con cierto grado de desarrollo", por tanto excluye que sea un método de génesis de la teoría -y mucho menos la teoría misma, a la cual sería consustancial el significado-, sería más bien un método expositivo y de investigación de la estructura lógica de una teoría, así como de depuración de errores y eventualmente de su simplificación, como de hecho lo es su reformulación de la axiomática de la Geometría de Euclides.

que esos objetos no definidos *son* exclusivamente lo que determinan esas relaciones, sino que solamente nos vamos a fijar en eso, por así decirlo, en la forma de la teoría[262]. Aunque eso no explicará la génesis de la teoría, ni el tipo de existencia de sus objetos[263], ni otros aspectos relevantes sobre la teoría que pudieran ser fundamentales para entender, por ejemplo, el *proceso de su creación* o la *didáctica* de la teoría o su *aplicabilidad*, aspectos sobre los que Hilbert parece que sí que tiene una opinión, y que separa claramente del enfoque de su Método Axiomático. Pero hay una diferencia casi más fundamental entre la pretensión de Euclides y la pretensión de Hilbert. En los *Grundlagen* de Hilbert se incluye el postulado de continuidad tal como fue originalmente formulado por Cantor y había sido antes perfectamente establecido por Dedekind. Ello significa que Hilbert tiene la pretensión de fundamentar la Geometría elemental relativamente a la teoría del número real, que a su vez requiere ser fundamentado. Muy distinto es sin embargo el contenido de la obra de Euclides. Los *Elementos* son, no sólo una Geometría, sino también una Aritmética e incluso un Análisis Matemático, en cuanto que introducen y aplican el método de exhaucción[264] y también

---

[262] Y de acuerdo con su interpretación de Kant, esa *forma* deberá poder ser dada por la sensibilidad en la intuición. Aunque como demuestra su criterio en la elección de los axiomas, aquí y en otras axiomatizaciones que realizó posteriormente, tiene también otra concepción de la intuición que se remite directamente a los objetos. Así, en la misma Introducción de los *Grundlagen* (Hilbert, 1996, 1): "El poner de manifiesto los axiomas de la Geometría y el averiguar sus conexiones, es problema que se encuentra discutido desde tiempos de Euclides en numerosos y excelentes trabajos de la literatura matemática. El problema citado queda reducido al análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales". Y en la página 3: "Los axiomas de la Geometría podemos dividirlos en cinco grupos: cada uno de estos grupos, aisladamente, expresa ciertos hechos fundamentales correspondientes a nuestra intuición". Obsérvese que esto parece que no cuadra mucho con el empiricismo que Corry le atribuye a Hilbert en su enfoque de la Geometría.

[263] También en esta dirección de huir de toda pretensión ontológica coincidiría con la posición básica de Kant, tal y como lo hemos interpretado en este trabajo.

[264] El llamado *método de exhaución* (en inglés *method of exhaustion* o *method of exhaustions*, que proviene del latín *exhaustio* "agotamiento") es un método para el cálculo de áreas que se remonta a Antiphon –o Antifonte- (finales del siglo V a.C.) y que fue perfeccionado algunas décadas después por Eudoxo de Cnidos (The MacTutor History of Mathematics archive:

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Antiphon.html).

El primer uso registrado de este término (*methodus exhaustionibus*, o *méthode des anciens*) para designar el método se encuentra en el jesuita Grégoire de Saint-Vincent (22 March 1584 Bruges – 5 June 1667 Ghent) en su obra *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum* (David Smith, (1923) *History of Mathematics*, Ginn & Co., v.1, p. 425. Reedición: 1958, New York: Dover Publications). Hay que señalar que el término *exhaución* (o *exhaucción*) no está admitido por la Real Academia de la Lengua Española (aunque ha reconocido el sustantivo *exhausción*, así como los adjetivos *exhausto* y *exhaustivo*), sin embargo se usa sistemáticamente en todos los manuales de Matemáticas en español. Por tanto, el término correcto debería ser *método exhaustivo* o, atendiendo a su etimología y significado, *método por agotamiento*. Ocasionalmente se lee también en los manuales la denominación *método de exhausción*. El método aproxima progresivamente el área de una figura plana dada (lo que se llamaba el *problema de la cuadratura*) inscribiendo en ella una sucesión de polígonos cuyas áreas convergen al área de la figura. Si la sucesión de polígonos está correctamente construida, la diferencia entre el área del n-ésimo polígono y la figura tiende a hacerse arbitrariamente pequeña. La demostración de la convergencia se hacía por *reducción al absurdo*. Arquímedes en su obra *Método* perfecciona la técnica combinando el *método de exhaución (o agotamiento)* con el *método de comprensión* (circunscribiendo a la figura polígonos cuyas áreas convergen por exceso), lo que le permitió además calcular con un alto grado de precisión el número π, y que es un antecedente directo de las *sucesiones de sumas inferiores y de sumas superiores* que definen la *integral de Riemann*, aunque la idea ya fue desarrollada por Bonaventura Cavalieri con su *método de los indivisibles;* en su obra *Theoremata Mathematica*, publicada en 1624, hay una clara explicación del *método de exhaución* con sus aplicaciones a múltiple cuadraturas (Margaret E. Baron (1969) The Origins of the Infinitesimal Calculus, Pergamon Press, Oxford, pp. 135 – 47). Euclides usó el *método de exhaución* para demostrar las siguientes seis proposiciones del Libro XII de los *Elementa*:

Proposición 2: El área de un círculo es proporcional al cuadrado de su diámetro.

contiene distintos elementos de la teoría de números, lo cual implica de entrada una extraordinaria mayor complejidad en la obra de Euclides que en la de Hilbert (Dou, 1974, 45). Todo eso es eliminado en los *Grundlagen*.

Así, la segunda característica básica del Método Axiomático de Hilbert sería el objetivo de la simplicidad, y esto en una doble dirección. Por una parte, como acabamos de ver aquí, despojando a la teoría de todo lo que no sea esencial de ella, en este caso los aspectos no geométricos como el método de exhaución y sus consecuencias. Y de otro lado, considerando grupos de axiomas, cada uno de los cuales definirían, o estarían definidos por una propiedad de la teoría, o del objeto de la teoría, independiente de las demás propiedades. Así el objetivo de simplicidad no equivaldría a un sistema axiomático lo más elemental posible desde el punto de vista lógico. De hecho, varios matemáticos notaron inmediatamente que el sistema de Hilbert contenía algunas redundancias[265]. Pero esto es verdad si se consideran los axiomas como una colección completa y no como un sistema de grupos. A Hilbert lo que le interesaba era la independencia mutua entre los grupos, no entre axiomas individuales de diferentes grupos[266], y eso estaba determinado, por las razones que hemos dado, por el enfoque epistemológico de su método. Y este mismo enfoque lo aplicó en las axiomatizaciones de diferentes teorías que abordó posteriormente. Todo lo dicho respecto a la simplicidad surge del análisis de sus sistemas axiomáticos porque parece que él mismo nunca definió esta propiedad con claridad. En la introducción a los *Grundlagen* dice solamente que "la presente investigación es un nuevo ensayo para construir la Geometría sobre un sistema *completo de axiomas, lo más sencillo posible,* deduciendo de él los más importantes teoremas, de manera tal, que en ese proceso aparezcan con la máxima claridad la interpretación de los distintos grupos de axiomas y el alcance de las consecuencias que aisladamente se deriven de ellos" (Hilbert, 1996, 1). Algo análogo ocurre con lo que sería la tercera característica del Método Axiomático de Hilbert, que sería el objetivo de completitud, esto es, que se puedan deducir todos los teoremas de la teoría. "Si bien Hilbert desarrolló un método claro para determinar la independencia de sus axiomas, nunca hizo lo mismo ni para la simplicidad ni para la completitud" (Corry, 2002, 39)[267].

Pero lo más relevante, y que es lo que le confiere la base de ese carácter *de método epistemológico para la investigación de la estructura lógica de una teoría*, y que sería la cuarta característica del Método Axiomático de Hilbert, consiste en que lo que se busca es el sistema adecuado "para una teoría conocida y suficientemente elaborada" y no al contrario. "No se trata de escoger un sistema más o menos arbitrario de premisas y de ver a dónde ellas

---

Proposición 5: Los volúmenes de dos tetraedros de la misma altura son proporcionales a las áreas de sus bases triangulares.

Proposición 10: El volumen de un cono es una tercera parte del volumen del correspondiente cilindro que tiene la misma base y altura.

Proposición 11: Los volúmenes de los conos (o cilindros) de la misma altura son proporcionales al área de sus bases. Proposición 12: El volumen de un cono (o cilindro) que es similar a otro es proporcional al cubo de la razón del diámetro de sus bases.

Proposición 18: El volumen de una esfera es proporcional al cubo de su diámetro.

[265] Véase (Torretti, 1978, 239).

[266] (Corry, 2002, 38).

[267] Para Corry, además, estas exigencias de simplicidad y completitud fueron entendidas por Hilbert en el sentido de Hertz, y muy directamente influenciado por su obra: " [la simplicidad] se deriva directamente de las concepciones expuestas por Hertz para el tratamiento axiomático de las teorías físicas (...) Otro requerimiento que Hilbert tomó de Hertz es el de la 'completitud'. Una axiomatización adecuada para Hilbert es aquélla que permita derivar todos los teoremas o resultados conocidos de la disciplina en cuestión" (Corry, 1996, 39).

nos conducen" (Corry, 2002, 39)[268].Y así, si bien, como vimos, Hilbert utiliza en el análisis de un sistema ya axiomatizado, en sus propiedades lógicas y en su teoría de la demostración una idea de la intuición como *intuición formal* que podría identificarse con los cuatro primeros sentidos de la intuición que vimos en Kant, sin embargo, en la elección de los grupos de axiomas y en su explícita mención de la exigencia de interpretación pone en juego una idea de intuición en relación al objeto o al significado que está por investigar. No debe pues confundirse su Método Axiomático, que estamos aquí describiendo y que posteriormente aplicaría a otros campos "suficientemente desarrollados", con su concepción de la Geometría. Se ha tenido acceso recientemente a los apuntes de los cursos de Geometría que Hilbert dictó desde 1891 donde queda clara su concepción y se corroboran muchas de nuestras afirmaciones. Por las notas sabemos que entre los libros que lo influenciaron se encuentran textos geométricos como el de Pasch, o la traducción alemana del libro de Peano sobre Geometría, y en particular el libro de Heinrich Hertz sobre los fundamentos de la Mecánica. E igualmente afirmaciones inequívocas como las siguientes. Por ejemplo, del curso que dictó en 1891:

> "La Geometría es la ciencia que trata de las propiedades del espacio. Ella es esencialmente diferente de los dominios puros de la Matemática tales como la teoría de los números, el álgebra o la teoría de las funciones. Los resultados de estas últimas se obtienen a través del pensamiento puro ...La situación es completamente diferente en el caso de la Geometría. Yo nunca podré penetrar las propiedades del espacio por pura reflexión, tal y como yo podré hacerlo en lo referente a las leyes de la Mecánica o cualquier otra ley física de esta manera. El espacio no es un producto de mis reflexiones. Antes bien, me es dado a través de los sentidos" (citado en Toepell, 1986, 21).

O en relación al objetivo de independencia:

> "Entre las apariencias o hechos de la experiencia que se nos manifiestan al observar la naturaleza, hay un tipo peculiar, es decir, aquellos hechos que corresponden a la forma externa de las cosas. La geometría se ocupa de este tipo de hechos (...) La Geometría es una ciencia cuyos factores esenciales están hasta tal punto desarrollados, que todos sus hechos pueden ser ya deducidos de otros más básicos. El caso de la Electricidad o de la Óptica son muy diferentes, pues muchos nuevos hechos están siendo continuamente descubiertos. Sin embargo, en lo que respecta a su origen, la Geometría es una ciencia natural" (citado en Toepell, 1986, 58).

Y en el curso que dictó en 1899, el mismo año de la aparición de los *Grundlagen*:

> "Como la Mecánica, la Geometría también emerge de la observación, de la experiencia. En este sentido ella es una ciencia experimental (...) Pero sus fundamentos experimentales han sido irrefutablemente, y tan generalmente reconocidos –ellos han sido confirmados a tal grado, que ya no se considera necesario dar pruebas adicionales de ellos. Es más, todo lo que se necesita es derivar estos fundamentos de una colección mínima de axiomas independientes y así construir el edificio todo de la geometría por medios puramente lógicos. De esta manera, la Geometría se vuelve una ciencia matemática pura. También en Mecánica se da el caso de que los físicos han reconocido sus hechos más básicos. Pero la organización de los conceptos básicos todavía está sujeta a cambios en su percepción (...) y por ende la Mecánica no puede ser descrita todavía hoy en día como una disciplina matemática pura, o por lo menos en el mismo sentido en que podemos decirlo de la Geometría" [269].

Estas ideas se repiten con reiteración y se precisan en algunos aspectos en toda su obra posterior, como hemos visto en citas anteriores ya discutidas en este trabajo, y como en los ejemplos que siguen. Así en *Axiomatisches Denken:*

[268] Compárese con la caracterización de la axiomática en la Matemática dada por Hausdorff que hemos citado más arriba.

[269] en *Mechanik-Notas de clase*. Citado también en (Corry, 1997, 108) (Corry, 2002, 38) (Corry, 2004, 90).

"Todo lo que puede ser objeto del pensamiento científico cae, con tal de que haya alcanzado un cierto grado de madurez que le permita conformar una teoría, en el terreno propio del método axiomático, y, por lo tanto, de manera mediada en el de las matemáticas. Penetrar, en el sentido que hemos indicado, en los niveles axiomáticos más profundos, significa alcanzar una visión mucho más profunda de la naturaleza y la esencia del método científico, y dar un paso significativo en el proceso de toma de conciencia de la unidad esencial del conocimiento. En virtud de su estrecha relación con el método axiomático, las Matemáticas parecerían llamadas a ocupar un lugar prominente en la ciencia en general" (Hilbert, GA, tomo III, 156) [270].

"El método euclidiano de investigación se convirtió con el tiempo en el prototipo de la investigación axiomática, convirtiéndose también la Geometría en un modelo para la construcción axiomática en general" (Hilbert, GA, tomo III, 148)[271].

"El procedimiento del método axiomático, tal y como aquí se hace evidente, equivale a una ubicación más profunda de los fundamentos de las ciencias particulares" (Hilbert, GA, tomo III, 148)[272].

"Si observamos una teoría determinada, reconoceremos en ella un reducido número de proposiciones distinguidas que sirven de fundamento para la construcción del entramado de conceptos que hemos mencionado. A partir de esas proposiciones y con base en principios lógicos, podemos obtener en su totalidad el edificio conceptual que subyace a la disciplina en cuestión" (Hilbert, GA, tomo III, 147)[273].

"Si consideramos el conjunto de los hechos que conforman una cierta esfera del conocimiento más o menos comprensiva, nos percatamos de inmediato de que la totalidad de los mismos es susceptible de un orden. La ordenación se lleva a cabo recurriendo a una cierta trama de conceptos relacionados entre sí, de tal manera que a cada objeto y a cada hecho del campo del conocimiento de que se trate les corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos del mismo. La trama de conceptos no es otra cosa que la teoría de esa esfera del saber" (Hilbert, GA, tomo III, 146)[274].

Y en *Über den Zahlbegriff* (1900) y en *Neubegründung der Mathematik* (1922) resalta:

"Mi opinión es esta: a pesar del gran valor pedagógico y heurístico que el método genético pueda tener [se refiere aquí a las extensiones sucesivas de los dominios numéricos], el método

---

[270] "Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftliches Denkens überhaupt sein kann, verfällt, so bald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. Durch Vordingen zu immer tieferliegender Schichten von Axiomen im vorhin dargelegten Sinne gewinnen wir auch das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewusst. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führender Rolle in der Wissenschaft überhaupt" (Hilbert, 1918a, GA, Band III, 156). Originalmente en *Mathematischen Annalen,* Bd.78, p.415 (1918), en base a la Conferencia expuesta en Zurich el 11 de Septiembre de 1917 en la Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft.

[271] "Die Untersuchungsmethode Euklids wurde vorbildlich für die axiomatische Forschung, und seit Euklid ist zugleich ist zugleich die Geometrie das Musterbeispiel für eine axiomatische Wissenschaft überhaupt" (Hilbert, 1918a, GA, Band III, 148).

[272] "Das Verfahren der axiomatischen Methode, wie es hierin ausgesprochen liegt, kommt also einer *Tieferlegung der Fundamente* der einzelnen Wissensgebiete gleich" (Hilbert, 1918a, GA, Band III, 148).

[273] "Wenn wir eine bestimmte Theorie näher betrachten, so erkennen wir allemal, dass der Konstruktion des Fachwerkes von Begriffen einige wenige ausgezeichnete Sätze des Wissensgebietes zugrunde liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen nach logischen Prinzipien das ganze Fachwerk aufzubauen" (Hilbert, 1918a, GA, Band III, 147).

[274] "Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten mehr oder minder umfassenden Wissensgebietes zusammenstellen, so bemerken wir bald, dass diese Tatsachen eine Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt jedesmal mit Hilfe eines gewissen *Fachwerkes von Begriffen,* in der Weise, dass dem einzelnen Gegenstände des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nicht anders als die *Theorie* des Wissensgebietes" (Hilbert, 1918a, GA, Band III, 146).

axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento”[275].

“La fundamentación axiomática de la teoría del continuo no se opone en forma alguna a la intuición” (Hilbert, GA, tomo III, 158)[276].

Resultan evidentes algunas conclusiones relevantes que se desprenden de estas citas en relación con aspectos fundamentales del pensamiento de Hilbert. Primero, que la Geometría es la ciencia que trata de las propiedades del espacio y es esencialmente distinta de otros dominios de la Matemática porque sus enunciados no pueden obtenerse por pura reflexión, ya que “el espacio no es un producto de mis reflexiones. Antes bien, me es dado a través de los sentidos”. La Geometría es en cierto sentido “una ciencia experimental” puesto que “emerge de la observación, de la experiencia”, pero sus resultados y “sus fundamentos experimentales han sido irrefutablemente, y tan *generalmente* reconocidos –ellos han sido confirmados a tal grado, que ya no se considera necesario dar pruebas adicionales de ellos”. Es decir, su verdad es irrefutable, con independencia de toda demostración lógica. Además es una ciencia totalmente desarrollada, lo que permite convertirla en una teoría matemática pura mediante el proceso de axiomatización, del cual sería un modelo. Pero este método de axiomatización no sería un método específico de la Geometría puesto que “todo lo que puede ser objeto del pensamiento científico cae, con tal de que haya alcanzado un cierto grado de madurez que le permita conformar una teoría, en el terreno propio del método axiomático, y, por lo tanto, de manera mediada en el de las matemáticas”, y de hecho es un método general de análisis lógico y de exposición de cualquier ciencia suficientemente desarrollada que permite situar una teoría científica *en otro nivel epistemológico* ya que “el procedimiento del método axiomático, tal y como aquí se hace evidente, equivale a una *ubicación más profunda de los fundamentos* de las ciencias particulares”. Además, esto en modo alguno contradice o refuta la utilidad o necesidad de la *intuición* en la creación de una teoría matemática y así, por ejemplo, “la fundamentación axiomática de la teoría del continuo no se opone en forma alguna a la intuición”, *intuición* que sería necesaria incluso para una adecuada selección de los axiomas, como él mismo demuestra con la selección de los grupos de axiomas que realiza en los *Grundlagen.* Para terminar, y en relación también con el postulado de continuidad[277], ya vimos anteriormente que en la primera edición de 1899 Hilbert sólo incluyó el axioma de

---

[275] “Über den Zahlbegriff”, incluído como Anexo-VI a partir de la 3ª edición (1909) de los *Grundlagen* (Hilbert, 1996, 245). Originalmente en el *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8*, p.180 (1900).

[276] “Neubegründung der Mathematik”, originalmente conferencia presentada a la Sociedad Matemática de Copenhague y al Seminario de Matemáticas de la Universidad de Hamburgo en 1922.

[277] “Todas estas preguntas en torno al rol de la continuidad constituyen en principal estímulo que llevó a Hilbert a involucrarse activamente en los fundamentos de la Geometría” (Corry, 2002, 34). El problema se planteó cuando comenzó a considerarse el rol jugado por las consideraciones de continuidad en los teoremas centrales de la Geometría Proyectiva, que en aquella época vivía su momento de esplendor (Bourbaki, 1976, 181). Felix Klein intentó demostrar que tanto la Geometría euclídea como las no-euclídeas pueden verse como derivadas de la proyectiva. El concepto de razón cruzada de cuatro puntos, que es un invariante proyectivo sería la herramienta básica, si se pudiera definir sin usar la distancia euclídea como tradicionalmente se había hecho. En su trabajo sobre invariantes cuadráticos, a partir de unas ideas originales de Cayley, las extendió para cubrir el caso de las Geometrías no-euclídeas, para definir la razón cruzada en términos puramente proyectivos, aunque sin completar todos los detalles. La reconstrucción axiomática de la Geometría proyectiva por Pasch no aclaraba tampoco definitivamente el rol de la continuidad. Algunos matemáticos como Klein pensaban que la continuidad era una propiedad del espacio como tal, mientras que otros como Wiener o Schur creían que podía reducirse a ideas más elementales y que podría desarrollarse el cuerpo fundamental de la geometría proyectiva sin invocar la continuidad. En la célebre conferencia de 1981 en Halle, a la que Hilbert asistió, Wiener sostuvo que sería posible demostrar el teorema fundamental de la geometría proyectiva, que en la demostración tradicional a través de la razón cruzada necesitaba la referencia a algún tipo de continuidad, basándose tan sólo en los teoremas de Desargues y Pappus, y en 1898 Schur demostró el teorema de Pappus sin axiomas de continuidad (Corry, 2002, 34) (Torretti, 1978, 110-152).

Arquímedes, mientras que en la segunda de 1903 añadió en el grupo-V de axiomas de continuidad el axioma de completitud (aunque especificando que no lo había usado para nada en su libro)[278], lo cual permite la identificación de la recta con los números reales. Y añadía que lo introducía por razones de principio, “porque es el que hace posible la correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y todos los números reales”. Esto le permitiría reducir el problema de la consistencia del sistema axiomático de la Geometría a la consistencia de la Aritmética, una prueba de consistencia relativa. Esta exigencia de consistencia (no contradicción) sería la quinta, e importantísima característica del Método Axiomático de Hilbert. Aunque no habla mucho de ello en los *Grundlagen*, ya vimos en su respuesta a la carta de Frege al respecto como identificaba la consistencia del sistema con la “verdad” de los axiomas, y aunque esa afirmación tan tajante queda muy matizada, e incluso en parte desmentida, por el conjunto de sus declaraciones al respecto y por el análisis que hemos hecho de su propio método, sería crucial, como vimos más arriba, en su teoría de la demostración, aunque sería discutible qué se entiende ahí por “verdad”. Si bien no parece probable que cuando elaboró los *Grundlagen*, y dada su concepción de la Geometría como una ciencia natural, pensara que los teoremas de la Geometría euclídea pudieran llevara una contradicción ni que fuera necesario probar eso[279], lo cierto es que a la postre las exigencias de consistencia y completitud se acabaron convirtiendo con el desarrollo de su método en características cruciales del Método Axiomático tal y como lo concebía Hilbert. Por ello, los resultados de Gödel que discutimos a continuación cuestionaban el corazón mismo de su método.

---

278 “En las investigaciones que siguen nos apoyamos esencialmente en el axioma de Arquímedes y no presuponemos, en general, el axioma de plenitud” (Hilbert, 1996, 37).

279 Para Corry (2002, 40), “antes bien, Hilbert parecía estar siguiendo una idea expresada por Hertz en su *Mecánica*, según la cual las teorías físicas, al irse desarrollando, van agregando hipótesis que parecen razonables de por sí pero que finalmente llegan a contradecir otras hipótesis que se habían asumido con anterioridad (...) Dado el reciente auge de las geometrías no-euclídeas sería tal vez conveniente clarificar si en la Geometría se habían adoptado recientemente algunas suposiciones adicionales que podrían estar contradiciendo el ya aceptado cuerpo de conocimientos”.

CAPÍTULO-5

El *programa finitista* y el constructivismo

5.1- Evolución y vigencia del programa de Hilbert.

Aparentemente, y así fueron percibidos en su momento, los Teoremas de Gödel cuestionaban el corazón mismo del proyecto finitista. Una valoración de esta apreciación y de su alcance real nos obliga, primero, a realizar una descripción detallada de estos teoremas y de su técnica, segundo, a describir el significado del *proyecto finitista* (del cuál Hilbert nunca dio una definición precisa) y de la posible evolución de la opinión de Hilbert al respecto. El análisis de las investigaciones posteriores realizadas en el periodo 1940-2015 será ilustrativo de las profundas implicaciones del *proyecto finitista* y del éxito de su propuesta fundamental, más allá del objetivo inicial del programa: la reivindicación de la *autonomía de la Matemática* y su fundamentación epistemológica sobre una perspectiva naturalista de base kantiana y la reducción de la misma *metamatemática* a una parte de la matemática independiente de todo apriorismo filosófico.

Además, la construcción de tres teorías equivalentes (la teoría de los sistemas formales, la teoría de la computación y el λ-cálculo) añaden matices relevantes a los teoremas según en qué teoría se formulen. Por otra parte, cada una de esas teorías ha encontrado un campo de aplicación distinto dando lugar, especialmente la teoría de la computación, a nuevas teorías matemáticas con un amplio rango de aplicabilidad. Este desarrollo ha estado muy ligado a la evolución de la Lógica Matemática, lo que nos obligará a discutir los diferentes intentos alternativos surgidos en su desarrollo y sus aplicaciones. Para terminar, los teoremas de Gödel han dado lugar a una multitud de teorías filosóficas y de tesis sobre la epistemología de la Matemática, algunas disparatadas y basadas en extrapolaciones injustificadas e incluso en interpretaciones erróneas de dichos teoremas, que se deberían discutir para determinar el alcance exacto de las consecuencias de esos teoremas y, finalmente, valorar el alcance y perspectivas del *programa finitista*.

5.1.1.-Los Teoremas de Gödel: perspectiva general, sus consecuencias y las investigación subsiguiente.

El problema, que pondría en cuestión todo el edificio, surgiría precisamente cuando Gödel publicó en 1931 su artículo de 25 páginas titulado "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia *Mathematica* und verwandter Systeme*"* en *Monatshefte für Mathematik und Physik, 38, pp. 173-198* (Gödel, 1981, 53), en el cual probaba, en primer lugar (Teorema VI) que todos los sistemas formales de la matemática -(incluidos el de los *Principia Mathematica*, la aritmética formal de Peano, la teoría axiomática de conjuntos y, en general, cualquier sistema formal que cumpliese ciertas condiciones mínimas, en particular la *consistencia*[280])-, son *incompletos*, es decir, que para cada uno de ellos puede efectivamente construirse una sentencia indecidible (es decir, que ni ella ni su negación es deducible). Además, esta incompletitud no tiene remedio. Por muchos axiomas que añadamos, los sistemas formales siguen siendo incompletos. En segundo lugar, Gödel demostraba que es imposible probar la consistencia de un sistema formal (que cumpla ciertas condiciones mínimas) dentro del

[280] En realidad Gödel exigía la ω-*consistencia*, una propiedad más fuerte que la consistencia, pero en 1936 Barkley Rosser logró probar el teorema reduciendo la ω-consistencia a la simple consistencia.

mismo sistema, más precisamente: Teorema XI- *Si un sistema formal (de los considerados) es consistente, entonces es imposible probarlo formalmente, es decir, es imposible deducir en él la sentencia que dice que es consistente* (Gödel, 1981, p.45). La tercera parte del artículo la dedica a exponer otros resultados complementarios de indecidibilidad que refuerzan los ya obtenidos. Previamente, en 1930, comunicó su descubrimiento a la Academia de Ciencias de Viena, y un resumen suyo apareció publicado en el boletín de la Academia, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften, 67 (1930), p.214-215* donde el mismo Gödel resume sus resultados bajo el título *Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit* (Gödel, 1981, 41-42)[281].

El carácter efectivo y constructivo de sus demostraciones, admisibles para todos los lógicos y matemáticos, incluso para los intuicionistas, hizo que éstas fueran aceptadas de inmediato. Sin embargo, tal vez debido a la inmensa conmoción que causaron, pocas demostraciones en la Historia han sido tan minuciosamente revisadas y discutidas como las contenidas en las 25 páginas de este trabajo. Jean Ladrière analiza minuciosamente el mecanismo de la demostración de Gödel (Ladrière, 1969, 102-132) y también estudia los análisis críticos (1969, 133-147) realizados por Perelman, Barzin, Kuczynski y Findlay, algunos de los cuales, hablando *grosso modo*, encuentran algún tipo de razonamiento circular en la demostración de Gödel, y Ladrière también presenta y estudia las observaciones a estas críticas realizadas por Helmer, Fitch y Church. Su conclusión es que "las diferentes críticas opuestas a la demostración de Gödel no pueden justificar un rechazo de su teorema. Pero ellas dan la ocasión de poner de relieve el alcance de ciertas distinciones y de aclarar la naturaleza de las condiciones que pueden hacer legítimo un razonamiento circular. Si Gödel ha conseguido establecer su teorema, se ha debido a poder construir una proposición que puede representar un enunciado de forma circular sin que lleve a una contradicción. Pero una construcción de este género sólo es posible en la medida en que una parte suficiente de la

---

[281] "Si a los axiomas de Peano añadimos la lógica de *Principia Mathematica* (con los números naturales como individuos) con el axioma de elección (para todos los tipos), obtenemos un sistema formal S, para el cual valen los siguientes teoremas:

I.-El sistema S no es completo, es decir, en él hay sentencias φ (que pueden efectivamente ser indicadas), tales que ni φ ni $\neg\varphi$ son deducibles y, en especial, hay problemas indecidibles con la sencilla estructura $\exists x$ Fx, donde x varía sobre los números naturales y F es una propiedad (incluso decidible) de los números naturales (Además en S hay fórmulas de primer orden para las que no es deducible la validez universal ni la existencia de un contraejemplo)

II.-Incluso si admitimos todos los medios lógicos de *Principia Mathematica* (por tanto, en especial el cálculo lógico de orden superior y el axioma de elección) en la metamatemática no hay ninguna prueba de consistencia para el sistema S (y aún menos la hay si restringimos de alguna manera los medios de prueba). Por consiguiente, una prueba de consistencia del sistema S sólo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no estén formalizados en el sistema S, y algo análogo ocurre también con otros sistemas formales como el sistema axiomático de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (este resultado vale en especial también para el sistema axiomático de la matemática clásica, tal como ha sido construido, por ejemplo, por J. von Neumann).

III.-El teorema I puede ser aún reforzado, en el sentido de que ni siquiera añadiendo un número finito de axiomas (o una infinidad que resulte de un número finito mediante una 'elevación de tipo') al sistema S obtenemos un sistema completo, mientras que el sistema ampliado siga siendo ω-consistente (...).

IV.-El teorema I sigue valiendo para todas las extensiones ω-consistentes del sistema S que resulten de añadirle una infinidad de axiomas, mientras la clase de axiomas añadidos sea decidible, es decir, mientras para cada fórmula sea metamatemáticamente decidible si es un axioma o no (y aquí suponemos que en la metamatemática disponemos otra vez de los medios lógicos de *Principia Mathematica).*

Los teoremas I, III y IV pueden extenderse también a otros sistemas formales como, por ejemplo, a la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, con tal de que tales sistemas sean ω-consistentes. Las pruebas de estos teoremas aparecerán en *Monatshefte für Mathematik und Physik"* (Gödel, 1981, 41-42).

metateoría del sistema utilizado es formalizable en el sistema mismo. Indudablemente, hay límites en las posibilidades de formalización de la metateoría de un sistema en el sistema mismo, pero el razonamiento de Gödel sólo utiliza ciertos conceptos y operaciones metateóricas; basta con que estos conceptos y operaciones sean representables en el sistema utilizado" (Ladrière, 1969, 146). Ladrière (1969, 149-175) también analiza las generalizaciones de los teoremas de Gödel realizadas por Kleene, Rosser y Kalmár, describiendo los parecidos y diferencias con los supuestos y métodos de demostración de Gödel. Los resultados posteriores a los teoremas de Gödel también se puede consultar en (Birkhoff & Bennett, 1987).

Era evidente que los resultados de Gödel cuestionaban el programa finitista de Hilbert. Al final de su vida, en la obra publicada con P. Bernays en 1934 *Grundlagen der Mathematik*, Hilbert daba su opinión: "me gustaría manifestar que la opinión, temporalmente extendida, de que ciertos resultados de Gödel implican que mi teoría de la demostración no es posible, ha resultado ser errónea. De hecho, esos resultados demuestran únicamente que para obtener una prueba adecuada de la consistencia uno debe utilizar el punto de vista finitario de una forma más afinada de la que se necesita cuando se trata el formalismo elemental" (Hilbert & Bernays, 1934, v). De alguna forma los hechos parecen darle la razón, aunque con la importante matización de que su programa quedaría en cierta forma modificado. Así, Gentzen demuestra (Gentzen, 1936 y 1938) la no contradicción de la Aritmética formalizada utilizando 'intuitivamente' la inducción transfinita hasta el ordinal numerable ε_0. Asocia a cada demostración D de la Aritmética formalizada un ordinal $\alpha(D) < \varepsilon_0$; por otra parte, describe un procedimiento que, a partir de toda demostración D que de lugar a una contradicción, proporciona una demostración D' que también da lugar a una contradicción y tal que $\alpha(D') < \alpha(D)$; la teoría de los conjuntos bien ordenados permite concluir la inexistencia de tal demostración D. Un análisis completo de la demostración en (Ladrière, 1969, 188). Gentzen obtiene la demostración por modelo indirecto (en las demostraciones por modelo indirecto hay que apelar al sentido intuitivo de ciertos enunciados aritméticos, pero sólo se hace intervenir enunciados de forma muy sencilla, sin que contengan ni variables ni cuantificadores; para estos enunciados se puede dar un criterio de certeza que permita obtener en todo caso una decisión efectiva en un número finito de etapas), pero sin embargo ha debido recurrir a un principio de inducción transfinita extendido al segmento de la *segunda clase de ordinales transfinitos* determinada por el *primer número-*ε. Para más detalles sobre estos conceptos, véase (Ladrière, 1969, p.194 y 405-407) y (Suppes, 1972, 195). Para Bourbaki (1972,70), "estas 'demostraciones' que emplean 'intuitivamente' la inducción transfinita hasta un ordinal dado supondrían un progreso importante si se pudieran aplicar, por ejemplo, a la teoría de los números reales o a una parte importante de la teoría de conjuntos". Ladrière concluye diciendo que "la demostración de Gentzen satisface, pues, el corolario de Gödel, rebasando el cuadro de la aritmética clásica sobre un punto: la extensión del principio de inducción a un sector de lo transfinito. Pero al mismo tiempo continúa conforme al ideal de la teoría de la demostración, conservando un punto de vista constructivo. (...) Al mismo tiempo modifica el sentido del ideal hilbertiano; la teoría de la demostración ya no consistiría en establecer la consistencia de las matemáticas *sobre la base de consideraciones estrictamente finitas*, sino en fundamentar teorías haciendo intervenir únicamente al *infinito potencial*. De esta forma, la consistencia de la Aritmética clásica, alguno de cuyos razonamientos recurren al *infinito actual*, es demostrada mediante una interpretación en la que el infinito sólo se considera en su forma potencial" (Ladrière, 1969, 199).

Por otra parte, el mismo Gödel demuestra también más tarde (Gödel, 1940) la consistencia relativa para el sistema de Zermelo-Frankel recurriendo a un modelo definido de forma constructiva, en un sentido que es bastante parecido al que se utiliza en la demostración de Gentzen; exactamente demuestra: *Si el sistema obtenido suprimiendo el axioma de elección en el sistema de Zermelo-Fraenkel es consistente, lo sigue siendo cuando se le añade el axioma de elección y la hipótesis general de continuidad* (Ladrière, 1969, 200). Como todas las demostraciones de consistencia, la demostración de Gödel de este teorema hace intervenir *un dominio de objetos de carácter intuitivo.* Entre las contribuciones posteriores en esta línea se pueden citar a Shepherdson (1951, modelos transitivos), Mostowski (1949, el teorema del isomorfismo), Montague (1961, principio de reflexión), y también Levy (1957), Vopènka y Balcar (1967), Scott (1967) y Monro (1972). Para más detalles véase (Jech, 2008, 43). Los desarrollos entre 1970 y 2005 pueden consultarse en (Franzén, 2005), (Kaye, 2007) y en (Smith, 2007).

Pero los Teoremas de Gödel, además de por la importancia intrínseca de sus enunciados para el *programa finitista* son también relevantes, o incluso casi más relevantes, por la misma técnica que desarrolló Gödel para su demostración. La clave de la aportación de Gödel al *programa finitista* estaría en las consecuencias de su aritmetización de la sintaxis. Porque a partir de la obra de Gödel incluso los que quieran demostrar la inadecuación del *programa finitista* deben hacerlo *dentro* de los términos del programa, con una formulación matemática de los correspondientes enunciados metamatemáticos (Franks, 2009, 66).

5.1.2.- Los Teoremas de Gödel y su técnica. Descripción.

Hilbert compartía en gran medida las objeciones de los intuicionistas, aunque no sus soluciones. La aproximación *finitista* de Hilbert, que ya hemos discutido, está íntimamente ligada a un *formalismo* (basado en la interpretación más restrictiva de la *intuición* en la *Estética* de Kant) para todo razonamiento sobre una teoría matemática particular, para lo cual la misma teoría matemática en cuestión debe ser transformada en un 'objeto finito' para su estudio. Lo que implica una estricta formalización de la teoría matemática en cuestión, convirtiéndose en una mero conjunto de símbolos (formas físicamente perceptibles) que serían de tres clases: fórmulas correspondientes a enunciados de tipo finitista de la teoría, fórmulas correspondientes a enunciados *ideales* sin significado intuitivo de la teoría y fórmulas correspondientes a los métodos de inferencia usados en las demostraciones. Todo teorema *demostrable* en la teoría original debería tener su correspondiente fórmula en la teoría formal *derivable* de los axiomas y teoremas ya derivados por medio de las reglas definidas en el sistema formal. De esta forma, según Hilbert, una teoría matemática "con contenido"[282] estructurado en un *lenguaje informal* se convertiría dentro del *sistema formal* en un repertorio de fórmulas que estaría formadas por "signos" sin significado que se construyen y se derivan unos de otros según *reglas sintácticas* bien definidas.

El razonamiento acerca de esa estructura (denominada *Metamatemática* por el mismo Hilbert, quien creó el término) sería también una teoría matemática "con contenido", el cual

[282] Hilbert utiliza el término "inhaltliche Mathematik". En las traducciones inglesas se suele traducir por "contentual mathematics". En español se podría traducir por "matemática con contenido" o "matemática real". El hecho de que Hilbert distinga entre "Inhaltliche Mathematik" y "Formal Mathematik" es muy importante para la comprensión de su pensamiento. Como se demuestra en este trabajo, la concepción de la Matemática de Hilbert excede con mucho los términos del *programa finitista,* que debe entenderse como un proyecto específico para *fundamentar el rigor matemático* científicamente y un intento de fundamentar la *autonomía* de la Matemática, en el sentido de que las cuestiones que surgen en la reflexión filosófica sobre sus métodos y objetos deben y pueden ser tratados *matemáticamente* (Franks, 2009, ix). Esto significa, por un lado, la reivindicación de una *filosofía matemática* (un modo matemático de afrontar la filosofía) y, por otro, la postulación de que la Matemática, al revés que otras formas de conocimiento puede dar cuenta de la validez de sus métodos ordinarios con independencia de cualquier teoría filosófica del conocimiento, es decir, de forma *autónoma.* Pero esto era sólo una parte de su visión de la Matemática y del programa que desarrolló, como vemos por ejemplo en su concepción de la axiomática en la Geometría.

consistiría en ese repertorio de "signos" o "formas" perceptibles directamente por los sentidos, siguiendo la mejor tradición kantiana. Así, de acuerdo con la técnica metamatemática propuesta por Hilbert, habría tres niveles a considerar: en primer lugar la *matemática informal,* que involucra razonamientos con técnicas matemáticas informales e inferencias lógicas intuitivas; en segundo lugar el *sistema formal (o cálculo),* que constituye una estricta formalización de la *matemática informal,* sustituyendo las reglas de inferencia por reglas de manipulación de los símbolos; y en tercer lugar la *meta-teoría,* en la que el sistema formal mismo sería el objeto de estudio. Los teoremas de la meta-teoría serían de carácter exclusivamente sintáctico, puesto que concernirían sólo a las formas y posibilidades de manipulación de esos símbolos, pero tendrían consecuencias para el sistema deductivo informal formalizado en el cálculo, y el primero se puede considerar como una interpretación de ese cálculo formal[283]. El ingenio de Gödel consistió en plantearse lo que se ha llamado la *aritmetización de la metamatemática,* explotando las posibilidades de enumerar las fórmulas de todo sistema formal, y construyendo una aplicación que a cada fórmula, en cuanto secuencia de símbolos, se le asigna un subconjunto de números naturales (y lo mismo se hace para toda secuencia de fórmulas que constituyen una "demostración" en el sistema formal). La *teoría informal* que considera Gödel es la aritmética natural, la más sólida y segura de todas las teorías matemáticas, para la que se especifica un *sistema formal* P construido de forma que "si a los axiomas de Peano añadimos la lógica de *Principia Mathematica* (con los números naturales como individuos) con el axioma de elección (para todos los tipos), obtenemos un sistema formal P, para el cual valen los siguientes teoremas" (Gödel, 1981, 41). Las fórmulas del sistema P son series finitas de signos básicos "bien construidas" según ciertas reglas sintácticas y una "demostración" en P (que se distingue de *demostración* en el sistema informal) es una serie finita de fórmulas con ciertas características. Más concretamente:

Gödel introduce como signos básicos las constantes lógicas: Π como el cuantificador universal, ~ (negación), $\vee$ (disyunción), y los símbolos "(" y ")" ; los símbolos *0* y *f* que representan el cero y la función sucesor, de modo que los signos numéricos de su sistema son *0, f0, ff0,* etc. A continuación construye un *sistema formal* axiomatizado, el sistema P, de acuerdo con la teoría de Hilbert.

Pero después de la descripción del sistema formal P, Gödel desarrolla un ingenioso sistema que permite construir una aplicación inyectiva del conjunto de fórmulas de P sobre un subconjunto de números naturales, de forma que cada fórmula tiene un número (número de Gödel)[284]. Gödel resalta la estrecha relación entre las clases numéricas (y sus relaciones) con

---

[283] Parece claro que todo esto se puede interpretar también como una "traducción" entre diferentes sistemas lingüísticos.

[284] Primero, los signos básicos $0, f, \sim, \vee, \Pi, (,),$ son respectivamente asignados a los números impares entre 1 y 13. Este simple hecho permitirá distinguir si un número de Gödel corresponde a un signo básico o a una serie de signos, puesto que toda serie de signos tendrá un número de Gödel con un factor $2^k, k \geq 1$ y será por tanto par. A continuación, las variables $x_n, y_n, z_n \dots$, donde *n* representa el tipo de la variable, se adjudican a números de la forma p^n, donde *p* es un número primo mayor que 13. De esta forma, cada serie de signos básicos es aplicada inyectivamente en una serie finita de números naturales. Para terminar, es necesario definir una aplicación que a cada una de esas series numérica le asigne un único número natural; eso se hace mediante la siguiente regla: a cada serie de números $n_1, n_2, \dots, n_k$ se le asigna el único número natural $2^{n_1}.3^{n_2}\dots.p_k^{n_k}$, donde p_k es el k-ésimo número primo y *k* coincide también con el número de signos de la serie considerada. Aplicando esa regla una vez, se consigue asignar a cada fórmula de P un único número natural así factorizado. Y aplicando la regla de nuevo a una serie de números así obtenidos (correspondientes, por ejemplo, a una posible demostración) se obtiene un número natural así factorizado que

las nociones metamatemáticas que ellas representan, mediante el convenio de denotar una noción metamatemática (por ejemplo ‘variable’, ‘axioma’, ‘demostración’, etc) mediante cursivas en su correlato de la teoría de números (*variable, axioma, demostración,* etc). De modo que ahora efectivamente tenemos tres niveles: las demostraciones, axiomas, etc. de la *teoría informal*; las ‘demostraciones’, ‘axiomas’, etc del *sistema formal* P; y las *clases numéricas y relaciones numéricas* denominadas *demostraciones, axiomas, etc.* en la *teoría informal de números.*

Pero en una última vuelta de tuerca, Gödel observa que los enunciados que afirman relaciones entre ciertos números naturales (esto es los enunciados de la teoría de números) pertenecen al dominio de la teoría informal de números y, por tanto, serían candidatos para ser representados en el mismo sistema formal P. Mediante el recurso a “funciones recursivas”[285],

---

correspondería a tal serie de fórmulas (o sea, a una posible demostración). Para terminar, los enunciados metamatemáticos sobre esas fórmulas se pueden traducir en enunciados de la teoría de números acerca de los números de Gödel así construidos.

[285] El término “función recursiva” se usa con frecuencia informalmente para describir cualquier función definida por *recursión*. Un *proceso recursivo* es un proceso o procedimiento en el cuál los objetos se definen en términos de objetos del mismo tipo. Por medio de una *relación de recurrencia* (con frecuencia una ecuación o sistema de ecuaciones), a partir de unos pocos objetos iniciales y de una pequeña cantidad de reglas (con frecuencia un solo objeto inicial y una regla) se construye –potencialmente- la clase de la totalidad de objetos de ese tipo. Sin embargo, es fundamental evitar la *autorecursión* por la cuál un nuevo objeto es definido en términos de sí mismo conduciendo a un *anidamiento infinito* (*infinite nesting*). La autoreferencia aparece de forma natural en cualquier lenguaje que posea el pronombre “yo”. Un ejemplo es la autodefinición de Dios en *Exodo 3.14*: “yo soy el que soy”, aunque es una autoreferencia en cierta forma indirecta puesto que el pronombre “yo” es un objeto lingüístico que no se refiere a sí mismo sino a la persona que habla (Odifreddi & Cooper, 2013); aunque si consideramos que “la existencia” es por tanto una cualidad definitoria de “Dios”, el enunciado “Dios existe” sería claramente autorreferencial. El ejemplo más antiguo conocido de una paradoja autorreferencial en Lógica es la paradoja de Liar, atribuida a Eubulides (siglo IV a.C.) en la forma “yo soy un mentiroso”. Se puede plantear más claramente con el siguiente enunciado: “este enunciado es falso”, que es verdadero si y sólo si es falso. En cambio, el enunciado que aparece en muchos textos como el prototipo de la paradoja de Liar, el enunciado llamado de “Epiménides el mentiroso” o “Epiménides el Cretense” (siglo VI d.C) no es en modo alguno una paradoja. El enunciado dice así: “Epiménides, que es cretense, dice que todos los cretenses son mentirosos”. Si el enunciado es verdad, Epiménides miente porque es cretense, luego el enunciado sería falso. Contradicción. Si el enunciado es falso, no es verdad que todos los cretenses sean mentirosos, y Epiménides –que es cretense- podría ser mentiroso o no. Y si es mentiroso no habría contradicción. Luego, en efecto, el enunciado es falso, porque si fuera verdad sería contradictorio (Odifreddi & Cooper, 2013). La paradoja de Liar ha tenido innumerables versiones en la historia. Una versión en dos etapas fue propuesta por Philip Jourdain en 1913 siguiendo unas sugerencias de Buridan en el siglo XIV: “El siguiente enunciado es verdadero”, “El enunciado anterior es falso”. Una versión de infinitos pasos fue propuesta por Yablo (1985 y 1993): “Todos los siguientes enunciados son falsos”, “Todos los siguientes enunciados son falsos”. Como hemos visto, Gödel (1931) demostró sus teoremas de incompletitud en base a enunciados autoreferenciales (e hizo una referencia explícita a la paradoja de Liar en su artículo; demostró que si una propiedad P (la consistencia) es representable en un sistema de primer orden que contiene una Aritmética suficientemente fuerte, entonces existe un enunciado en ese sistema que predica de sí mismo esa propiedad P, pero ese enunciado es indemostrable. Además, en la demostración evitó la circularidad. Para Odifreddi esto significa, desde un punto de vista lógico, que la *verdad* es irrepresentable en un sistema formal y, aunque Gödel lo habría reconocido explícitamente en una carta a Zermelo (Murawski, 1998) nunca realizó una demostración que involucrara el concepto de *verdad* – según Feferman (1984) porque tenía reservas acerca de esa noción-. Esta afirmación acerca de la irrepresentabilidad de la *verdad* se atribuye usualmente a Tarski (1935). (Odifreddi & Cooper, 2013), (Beall & Glanzberg 2013). La moderna historia de la teoría de la recursión se remonta al siglo XIX en el que Dedekind utilizó funciones recursivas en su análisis del número natural. En Lógica la recursión aparece en Skolem (1923), quien observó que muchas funciones básicas pueden ser definidas como simples aplicaciones del método de recursión y, como hemos mencionado, Gödel (1931) las utilizó en su demostración. La formalización moderna y el desarrollo de la noción se deben básicamente a Herbrand (1932), Rózsa Péter (1951) – quien ya presentó un artículo fundamental al respecto en el Congreso de Matemáticas de Zurich en 1932- y Kleene (1936). Una historia detallada de estos modernos desarrollos en

(Adams, 2011). Pero el método tiene una larga trayectoria en la historia de la Matemática. El ejemplo probablemente más antiguo de la aplicación del método aparece en Egipto en el llamado *Papiro Rhind* o *Papiro de Ahmes*. Es éste un documento escrito en escritura hierática en el siglo XVI a.C por el escriba Aahmes a partir de documentos de tres siglos antes, según relata él mismo al principio del texto por lo que los conocimientos se pueden datar en el siglo XIX a. C. . Consta de tres fragmentos, de los cuales dos se conservan en el Museo Británico y uno en el Museo de Brooklyn, y contiene un total de 87 problemas matemáticos de todo tipo resueltos. Uno aplica en su solución una progresión generada por una función recursiva. También se puede citar el *Sulvasutra* indú (Los *Shulba-sutras* son parte de los *Shrauta-sutras*, un compendio considerado apéndice de los *Vedas* (los textos más antiguos de la India, del milenio II y I a. C. La importancia de los *Shulba-sutras* radica en que constituyen la única fuente que ha sobrevivido sobre los básicos conocimientos matemáticos que se conocieron en la India durante el período védico (entre mediados del II milenio a. C. y mediados del I milenio a. C.), escrito entre el 600 y 200 a. C., y que contiene una aproximación a $\sqrt{2}$ utilizando un algoritmo recursivo. Existen también varias aplicaciones del método en los trabajos de Arquímedes (Odifreddi & Cooper, 2012) y (Plofker, 2007). Pero el ejemplo más famoso de la historia es la definición implícita de la *sucesión de Fibonacci*. Fue construida por primera vez por Leonardo da Pisa (Fibonacci) en 1202 en la discusión del famoso "problema del conejo". Existen muchas definiciones formales de esta noción informal de "función recursiva", muchas de las cuales difieren entre sí sólo en aspectos irrelevantes. Kleene (1952) define una *función recursiva parcial* de números naturales como una función definida por un sistema no contradictorio de ecuaciones en el cuál, en cada ecuación, ambos miembros están compuestos por: (1) símbolos de función -por ejemplo *f, g, h, …*-, (2) variables sobre el dominio de los números naturales –por ejemplo, *x, y, z, …*-, (3) la constante 0 –cero- y (4) la *función sucesor* S(x)= x+1. Por ejemplo, el siguiente sistema de cuatro ecuaciones

(1) f(x, 0)=0
(2) f(x, S(y))=g(f(x,y), x)
(3) g(x, 0)=x
(4) g(x, S(y))=S(g(x,y))

Las ecuaciones pueden no determinar de forma única el valor del output (o sea, no determinar de forma única a la función f) para todo posible input, y en ese sentido se dice que es una *función recursiva parcial*. Si el sistema de ecuaciones determina f de forma única para todo input, entonces se dice que es una *función recursiva total*. Por lo general, cuando se habla de una *función recursiva* se sobreentiende implícitamente que se trata de una *función recursiva total*. Hay cierta confusión en la terminología porque algunos autores usan el término *función recursiva general* (*general recursive function*) para significar una *función recursiva parcial* y otros para significar una *función recursiva total* (Szudzik, 2013), (Weisstein, 2013) y (Buck, 1963). El conjunto de funciones que pueden ser definidas (totalmente) recursivamente de esta manera es equivalente a las funciones computable por *Máquinas de Turing* y también a las computables por el *λ-Cálculo.* El tipo más simple de recursión ocurre cuando se itera una función dada (*recursión iterativa o recursión por iteración).* Técnicamente la n-ésima iteración de una función f se define así:

$f^{(o)}(x) = x$

$f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x))$.

Así, $f^{(1)}(x) = f(x)$ y $f^{(2)}(x) = f(f(x))$, etc.

Obsérvese que $f^{(n)}(x)$ es una función de dos argumentos, n y x. Es posible fijar el primer argumento n con lo cual se obtiene una función iterativa fija, por ejemplo, si $S^{(n)}(x)$ es la función que devuelve el n-ésimo sucesor de x, $S^{(2)}(x)$ devuelve el segundo sucesor de x, o sea, el sucesor del sucesor de x, la cual genera el conjunto de números pares 0, 2, 4, … Existen seis tipos básicos de recursión: iteración (que ya hemos descrito), recursión primitiva, recursión primitiva con parámetros, recursión del curso del valor y doble recursión. Una explicación sintética pero completa en (Odifreddi & Cooper, 2012). En la mayoría de los textos modernos, por ejemplo en (Boolos & Jeffrey, 1974), (Cooper, 2003), (Cutland, 1980), (Enderton, 2010), (Epstein & Carnielli, 1999) y (Mendelson 1964), se ha convertido en standard la definición de las *funciones recursivas primitivas* como aquéllas que se obtienen a partir de las *funciones iniciales* a través de la *composición* y de la *recursión primitiva.* Los detalles de estos conceptos en (Odifreddi & Cooper, 2012) y (Oddifredi, 1989 y 1999). El ejemplo más famoso de la historia, ya mencionado, es la definición implícita de la *sucesión de Fibonacci* por medio de la recursión siguiente:

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$f(n + 2) = f(n) + f(n + 1)$.

Se puede obtener también una expresión explícita de f(n) que evite la definición por recurrencia:

logra establecer un método en dos etapas de forma que los enunciados de la teoría de números correspondientes a ciertos conceptos metamatemáticos sean de hecho formalmente “representables” en P, de modo que los enunciados metamatemáticos acerca del sistema P se corresponden no solamente con proposiciones de la teoría informal de números sino que además son hechas corresponder con fórmulas dentro del mismo sistema P, en una especie de viaje de ida y vuelta. En resumen que, bajo estos presupuestos, Gödel demuestra su primer teorema de incompletitud formulado en la proposición-vi de su trabajo original, y que se puede formular así: Si P es un sistema *w-consistente*[286] entonces existe una fórmula de P tal que ni ella ni su negación son fórmulas *demostrable* en P. El teorema afirma la existencia de fórmulas indecidibles en P, es decir, tales que ni ellas ni su negación son demostrables (derivables) en P, bajo el supuesto de la *w*-consistencia de P. El segundo teorema de incompletitud de Gödel se puede demostrar como un simple corolario del anterior, y expresa que la propiedad metamatemática de que “P es consistente” no se puede demostrar (derivar) en P, si se asume que P es un sistema consistente; es decir, demuestra que si el enunciado metamatemático “P es consistente” es demostrable (derivable) en P, entonces P es inconsistente (en contra del supuesto).

Hay que hacer notar algunas consideraciones de importancia para entender las implicaciones epistemológicas de estos teoremas. La primera consiste en que la frecuente interpretación de que Gödel demuestra la existencia de enunciados de la teoría de números indecidibles en el sistema P es en sí errónea, en el sentido de que eso en realidad se deduce por meras consideraciones de cardinalidad[287]. La noción de *completitud* de un sistema formal significa que todo enunciado *expresable* por medio de los símbolos del sistema es decidible en el sistema. La fuerza de los resultados de Gödel radica en que *construye* una proposición expresable en el sistema P y demuestra que es indecidible en P, es decir, demuestra que el hecho de que existen muchas proposiciones indecidibles en P (que ya sabemos que ocurre por consideraciones de cardinalidad) ocurre entre las proposiciones expresables en P, con lo cual P es *formalmente incompleto*. El segundo punto relevante de los resultados de Gödel consiste en que el enunciado indecidible expresable en P que construye es de naturaleza puramente aritmética. El tercer punto relevante es que esa proposición de carácter puramente aritmético que es expresable e indecidible en P y que él construye, se demuestra por razonamientos metamatemáticos que es una proposición *verdadera*. La conclusión es que el sistema P es formalmente incompleto respecto de enunciados verdaderos de la aritmética elemental. Para

---

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Por ambos métodos se obtiene la sucesión 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 …Como hemos indicado anteriormente, fue construida por primera vez por Leonardo da Pisa (Fibonacci) en 1202 en la discusión del famoso “problema del conejo”: ¿Cuántos conejos se pueden generar en un año a partir de una pareja?. Esta sucesión tiene muchas propiedades interesantes y curiosas, entre ellas varias relaciones con la “razón de oro”, también llamada “razón áurea” (Chandra & Weisstein, 2013).

[286] La *w-consistencia* es una propiedad más fuerte que la consistencia. En 1936 Rosser demostró que la simple asumpción de *la consistencia* es suficiente para demostrar la existencia de una proposición indecidible en P, aunque la proposición que construye Rosser es más complicada que la de Gödel (Rosser, 1936, pp. 87-91). Por ello el primer teorema de incompletitud de Gödel de suele denominar con frecuencia Teorema de Gödel-Rosser.

[287] Para todo sistema formal existe un número infinito numerable de secuencias de símbolos, pero existe una cantidad infinita no numerable de enunciados de la teoría de números puesto que el número de funciones de la teoría de números es infinito no numerable, lo cual se demuestra por un argumento diagonal (Boolos & Jeffrey, 1985, 17). Por lo tanto existe un número infinito de enunciados de la teoría de números que no pueden ser ni probadas ni refutadas en un sistema formal.

terminar, aunque Gödel trabaja y construye sus argumentos en el sistema P, se demuestra que se generalizan fácilmente a una serie de "sistemas afines", entre los que se cuentan las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y la de Von Neumann, el sistema de Russell y Whitehead de los *Principia Mathematica* y el propio sistema de Hilbert de la aritmética[288] .

La conclusión relevante es que la *incompletitud* no se deriva de alguna deficiencia del sistema formal en cuestión, sino que parece intrínseca a *todo* sistema formal lo suficientemente complejo como para permitir la formulación de la aritmética elemental, es decir, expresaría una limitación inherente al método axiomático formalmente entendido (es decir, al *formalismo* o *finitismo* tal y como lo concibió Hilbert). Paradójicamente, la "fuerza"

---

[288] Podría plantearse si una ampliación de los axiomas del sistema evitaría el problema. Gödel demuestra también que no: cualquier extensión del sistema por medio de una clase w-consistente de axiomas contendrá necesariamente proposiciones indecidibles, incluyendo la proposición de la teoría de números que se corresponde con la consistencia del sistema extendido. Más precisamente: cualquier extensión del sistema por medio de una clase w-consistente de axiomas definibles recursivamente, contendrá enunciados indecidibles, incluyendo entre éstos el enunciado de la teoría de números que se corresponde con la afirmación metamatemática de que el sistema extendido es consistente. Si el sistema está formado por una clase *c* de fórmulas w-consistentes, Gödel establece que ni la fórmula con número de Gödel *17Gen r* ni *Neg(17 Gen r)* son c-demostrables. Es decir, que la fórmula *17 Gen r* es indecidible en cualquier extensión del sistema original P por medio de una clase recursiva y w-consistente de axiomas. Se puede pensar en añadir dicha fórmula *17Gen r* directamente como un axioma, con lo cual sería trivialmente demostrable en el sistema así ampliado. Podría parecer incluso un procedimiento razonable puesto que sabemos que el enunciado de la teoría de números correspondiente a *17Gen r* es verdadero. Pero se demuestra que entonces otro enunciado verdadero tomará el lugar como una proposición indecidible del sistema ampliado. Se puede añadir ese nuevo enunciado como axioma y obtener un nuevo sistema ampliado, en el cual pasaría lo mismo. Y así indefinidamente. El sistema con todos los infinitos enunciados añadidos como axiomas lo denotamos P_w . Pero a este sistema se le puede aplicar el argumento de Gödel y se puede construir una nueva fórmula que es indecidible en el sistema. De modo que las proposiciones indecidibles en P no forman un grupo fijo, ni siquiera un grupo infinito fijo. En esencia, Gödel especifica un método que, dado cualquier sistema P, nos permite construir una proposición expresable en él e indecidible en él. Podría pensarse también que un medio válido para poder demostrar proposiciones indecidibles de un sistema teórico de un *tipo* dado, tal como el sistema P, consistiría en alterar el sistema de modo que se pudiera acceder a variables de un *tipo* de orden superior, tal y como el mismo Gödel indica en su trabajo: "Las proposiciones indecidibles aquí presentadas siempre son decidibles por medio de la adición de *tipos* de un adecuado orden superior" (Gödel, *On Formally Undecidable Propositions* , p.62, nota 48a). El sistema original P de Gödel contiene una multiplicidad infinita de *tipos*, y por tanto se puede considerar un sistema de orden ω-enésimo. Si extendemos dicho sistema para permitir el acceso al *tipo* ω, así como a cada uno de los *tipos* finitos, resulta un nuevo sistema de orden (ω + 1), que podemos llamar P^+ . La noción semántica de *verdad* en P no se puede definir en el mismo sistema P, si se quiere evitar la inconsistencia, ya que se podría generar la paradoja de Liar (que consiste en el hecho de que el enunciado 'este enunciado es falso' sería verdad si y sólo si fuera falso); la obra de Tarski formalizó completamente la noción de *verdad semántica* y estableció la indefinibilidad de esa noción en un sistema formal dentro del mismo sistema. Sin embargo, en el sistema extendido P^+ se puede definir la *verdad* para el sistema original P y, usando tal definición, demostrar que los axiomas de P son verdaderos, que las reglas de inferencia de P conservan la *verdad* y que por tanto todos los teoremas de P son verdaderos, de lo que se sigue inmediatamente la consistencia de P (puesto que un enunciado y su negación no podrían ser simultáneamente verdaderos). Así, la consistencia de P se puede demostrar en P^+, así como decidir las proposiciones que eran indecidibles en P. Este procedimiento de extender P mediante la adición de *tipos* superiores se puede continuar indefinidamente, de modo que se obtiene una jerarquía de sistemas de orden ω, ω+1, …, ωn, …, ω^2, …, ω^ω, …etc. Pero subsisten dos problemas. Por un lado, en esta progresión de jerarquías la consistencia de un sistema de orden-i sólo se puede demostrar por modos de razonamiento accesibles en el sistema de orden superior i+1. Pero la consistencia de ese sistema S_{i+1} es tan dudosa como la de S_i por lo que tal prueba de consistencia relativa adolece de una total falta de significación epistemológica. En segundo lugar, al ascender en la jerarquía de órdenes llega un momento en que los ordinales ya no son definibles recursivamente y, por lo tanto, el sistema correspondiente deja de ser un "sistema formal" puesto que éste sólo puede contener una cantidad infinita numerable de *tipos*. Aquí encuentra Gödel la verdadera fuente de la incompletitud (Gödel, *On Formally Undecidable Propositions*, p.62, nota 48a).

del sistema implica esa deficiencia. Sistemas "débiles"[289] como aquellos que involucran sólo la suma pero no la multiplicación, evitan estos problemas, pero son claramente inadecuados para una completa formalización de la aritmética elemental. De modo que la adecuación de un sistema formal (como P) para la representación de la aritmética, junto con la exigencia de consistencia, determinan la incompletitud del sistema y convierten en indemostrable la simple consistencia del sistema. Ahora estamos en condiciones de hacer una valoración con perspectiva del significado e importancia del *programa finitista* de Hilbert y de la vigencia que, en sus planteamientos o consecuencias, pudiera tener.

5.1.3- Valoración y análisis del *programa finitista* de Hilbert.

La primera conclusión que en una primera aproximación se desprende de todo lo anterior es que el *programa finitista* de Hilbert, tal y como él mismo lo había formulado, queda refutado, en el sentido de que es imposible "traducir" a un sistema formal la más simple de las teorías matemáticas (la teoría de los números enteros) de forma *consistente* y *completa*. Se puede pensar con Alberto Dou que "parece hoy en día que hay que admitir que la teoría de la demostración[290] de Hilbert no ha conseguido sus fines" (Dou, 1970, 83) y que "observemos que Hilbert dio a conocer su teoría de la demostración con una confianza absoluta de que tal demostración de consistencia sería posible para toda la matemática formalizada; ahora parece claro que aquello fue un optimismo sin fundamento" (Dou, 1970, 82). A partir de aquí, incluso el concepto de *consistencia*[291], que para Hilbert estaba asociado al concepto de *verdad*

---

[289] Por ejemplo Mojzesz Presburguer (1929, "Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt", *Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves*. Warszawa: 92–101) construyó un sistema que contiene sólo +, =, y los símbolos lógicos, y que es consistente, completo y decidible. El problema de decisión para la aritmética de Presburger se ha convertido actualmente en un interesante problema en la teoría de la complejidad computacional y de la computación, y que comentamos en una nota posterior.

[290] El término *teoría de la demostración* (*Beweistheorie*) lo utiliza Hilbert como equivalente a *metamatemática* (*Metamathematik*, término acuñado por él mismo, parece que con clara alusión al la clásica palabra aristotélica *metafísica*).

[291] Damos aquí una lista resumida de las definiciones de los términos elementales más relevantes en la discusión subsiguiente:

1) La Lógica de primer orden, también llamada lógica de predicados o cálculo de predicados, es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden. Los lenguajes de primer orden son, a su vez, lenguajes formales con cuantificadores que alcanzan sólo a variables de individuo, y con predicados y funciones cuyos argumentos son sólo constantes o variables de individuo. La Lógica de segundo orden es una extensión de una lógica de primer orden en la que se añaden variables para propiedades, funciones y relaciones, y cuantificadores que operan sobre esas variables. Así se expande el poder expresivo del lenguaje sin tener que agregar nuevos símbolos lógicos . Se puede crear así una jerarquía ascendente definiendo Lógicas de orden superior (High-order-logics), es decir se puede definir una Lógica de orden-k para cualquier entero positivo k. Para más detalles, véase la Parte-III.

2) Dada una *Lógica de orden-k*, en particular, una Lógica de primer orden, se define un sistema deductivo (o cálculo) de esa Lógica como un cálculo que permite derivar unas fórmulas verdaderas para toda interpretación (tautologías o leyes lógicas) de otras del mismo tipo. Hay infinidad de sistemas deductivos en una lógica, por ejemplo: la *deducción natural de Gentzen* o los *sistemas axiomáticos* tipo Hilbert u otros *sistemas axiomático*. Constan de un *alfabeto*, unos *axiomas* y unas *reglas de inferencia*. Así *deducen* unas *tautologías* de otras (*axiomas*) y se pretende que reproducen el razonamiento humano conservando las propiedades semánticas a través de reglas sintácticas de deducción. Los *axiomas* son leyes lógicas o tautologías de la lógica en cuestión y lo ideal es que formen un sistema *independiente* (un axioma no se puede derivar de los demás), *consistente* (del sistema no se puede deducir un enunciado y su contrario) y *completo* (del sistema se pueden deducir todas las tautologías de la lógica).

3) Lógica completa (incompleta) vs. Teoría completa (incompleta). La propiedad de completitud significa cosas distintas si nos referimos a una lógica o a una teoría. Un *sistema deductivo* o un *cálculo* en una lógica es completo cuando todas las leyes lógicas (tautologías, o también *fórmulas válidas* en la terminología de Gödel) puede derivarse de los axiomas. O sea, si toda fórmula verdadera (bajo todas las interpretaciones) es derivable en el sistema. Gödel demostró en su tesis doctoral la completitud del cálculo de proposiciones en la

en un sistema formal, queda relativizado. Por ejemplo, para Curry –representante del formalismo estricto en Matemática- la demostración de consistencia no es necesaria ni suficiente para la aceptabilidad de un sistema (por aceptabilidad se entiende el conjunto de consideraciones que en vista de las *aplicaciones,* llevan a que haya interés por un sistema formal con preferencia a otro) (Curry, 1951)[292]. Esto se añade a las críticas que desde el principio tuvo el criterio de Hilbert por parte de Brouwer (1923): "Una teoría errónea, aunque no se la coja en contradicción, no por eso deja de ser errónea".

Sin embargo, ya vimos que la reacción de Hilbert fue muy otra: "me gustaría manifestar que la opinión, temporalmente extendida, de que ciertos resultados de Gödel implican que mi teoría de la demostración no es posible, ha resultado ser errónea. De hecho, esos resultados demuestran únicamente que para obtener una prueba adecuada de la consistencia uno debe utilizar el punto de vista finitario de una forma más afinada de la que se necesita cuando se trata el formalismo elemental" (Hilbert & Bernays, 1934, v). Y de hecho, las investigaciones reseñadas anteriormente parecen indicar que una extensión del enfoque de Hilbert, en el sentido de utilizar *el infinito potencial* en lugar de consideraciones estrictamente finitas, plantea perspectivas prometedoras que ya han conseguido notables avances.

Pero para una evaluación del significado, valor y perspectivas de su programa, resulta más relevante el indicar algunas consecuencias epistemológicas de la actual situación que

---

lógica de primer orden. No debe confundirse esta noción de *completitud* con la involucrada en los teoremas de incompletitud de Gödel, que analizaremos más adelante.

4) Una teoría T en una lógica es un sistema deductivo (cálculo) que a los axiomas propios de la lógica añade otros que no son tautologías sino que son verdaderos en alguna interpretación. ejemplos importantes de teorías en la lógica de primer orden que veremos en la discusión: la aritmética de Presburger, la aritmética Q de Robinson, la aritmética PA, el sistema ZF y el sistema ZFC.

5) Una *teoría* en una lógica es completa si para toda fórmula ϕ, o bien ella o su negación es una fórmula de la teoría, es decir, es demostrable a partir de los axiomas de la teoría. Por ello a veces se denomina a esta propiedad *negation completeness.* Es el sentido de *completitud* al que se refieren los dos teoremas de incompletitud de Gödel.

6) Enunciado (decidible) indecidible vs. Teoría (decidible) indecidible. La propiedad de decidibilidad significa cosas distintas si nos referimos a un enunciado o a una teoría. Un enunciado ϕ es decidible en una teoría T si o bien ϕ o bien su negación $\neg\phi$ es un enunciado de T; y ϕ es indecidible en T si ninguno de los dos son enunciados de T. Esto sólo puede ocurrir cuando una teoría es incompleta. Por ejemplo en la aritmética de Robinson Q el enunciado $\forall x \forall y(x+y=y+x)$ que expresa la propiedad conmutativa de la suma es un enunciado indecidible; sin embargo es decidible en la aritmética PA, aunque ésta también es incompleta (tiene sentencias indecidibles, como por ejemplo el enunciado de Gödel).

7) Una teoría es decidible si para toda fórmula ϕ se puede determinar si pertenece a la teoría; si existe una fórmula para la que no existe un procedimiento para determinarlo se dice que la teoría es indecidible. Existen enunciados decidible e indecidibles en teorías decidibles, y enunciados decidibles e indecidibles en teorías indecidibles.

8) Una teoría T es consistente si no existe ninguna fórmula ϕ tal que ella y su negación estén en T.

292 Resulta curioso observar cómo el formalismo extremo de Curry recurre a consideraciones de *aplicabilidad* para justificar la aceptación de un sistema matemático (por encima de la consideración lógica de *consistencia*). Para Curry "la Matemática es la ciencia de los sistemas formales" (Curry, 1951, 56) y en su concepción ni siquiera es exigible la *consistencia*: "Incluso si se descubriera una inconsistencia esto no tendría que significar un completo abandono del sistema (...) y esto es lo que de hecho ha sucedido en el pasado" (Curry, 1951, 64). Y aporta una sugerencia interesante para explicar un punto crucial de la visión de Hilbert con el que discrepa: "Consideremos ahora la posición de Hilbert. Como es bien conocido, él insiste en la *consistencia* como un criterio para la *aceptabilidad.* Sospecho que la razón es que él, como los intuicionistas, buscan una justificación a priori. Pero, dejando de lado el que para la física una justificación a priori es irrelevante, mantengo que una prueba de consistencia no es ni necesaria ni suficiente para la aceptabilidad" (Curry, 1951, 61).

deben destacarse y que intentaremos poner en conexión con el planteamiento global del pensamiento de Hilbert.

En primer lugar, el *programa finitista* fue la respuesta específica de Hilbert al debate fundacional de los años 20, y en modo alguno debe confundirse con su concepción de la Matemática que, como vemos en este trabajo, era mucho más amplia y compleja y que, incluso dentro de ese programa, distinguía entre *inhaltliche Mathematik*, *formal Mathematik* y *Metamathematik*. Había una característica fundamental de dicha respuesta que no fue percibida por sus contemporáneos y que ahora comienza a destacarse: mientras que sus contemporáneos de las diversas corrientes proponían una *fundamentación* de la Matemática basada en análisis y conceptos filosóficos o epistemológicos acerca del *carácter* de la Matemática y sus relaciones con la Lógica, Hilbert proponía fundamentalmente que esas características deberían solventarse *dentro* de la misma Matemática y por métodos exclusivamente matemáticos, es decir, proponía una *autonomía* de la Matemática y, más aún, una propuesta de *filosofía matemática*, aunque circunscrita al ámbito de la filosofía y epistemología de la Matemática.

En oposición a sus contemporáneos en el debate, su *programa finitista* planteaba un desarrollo del problema que no se basaba en ninguna filosofía o epistemología previa y que habría de desarrollarse por métodos reconocidos como válidos por *todos* los matemáticos de cualquier posición filosófica. Es decir, apelaba a la *actividad* matemática reconocida por la comunidad matemática como fuente de legitimación, un enfoque claramente naturalista[293]. Curtis Franks analiza y justifica detalladamente este planteamiento (Franks, 2009, 29-59). Para Franks “in fact Hilbert’s epistemological position differs significantly from those of his intellectual adversaries … this is because the question inspiring him to foundational research is not whether mathematics is consistent, but rather whether or not mathematics can stand on its own … All the traditional ‘Hilbertian theses’ –formalism, finitism, the essential role of a

[293] Esto no fue en absoluto reconocido en su momento. De hecho, la recepción de su *programa finitista* en la comunidad matemática fue en general de menosprecio, en el sentido de considerarla una más de las *propuestas filosóficas* que nada tenían que ver con la Matemática real. Un caso significativo es el de Herbrand. Jaques Herbrand, un joven estudiante de la École Normale Superiéure de Paris se interesó por el *programa* de Hilbert a finales de los años 20 y dedicó su tesis doctoral a reelaborar la *teoría de la demostración* de acuerdo con sus propios criterios de rigor, corrigiendo lo que creía que eran deficiencias del planteamiento de Hilbert. Como relatan los colegas de Herbrand poco después de su muerte a los 23 años en un accidente de montaña en los Alpes (Chevalley & Lautman, 1931), (Chevalley, 1934), sus ideas fueron al principio impopulares en la École a pesar de su buena reputación entre los prominentes matemáticos franceses que componían su staff, hasta el punto de que incluso se forzó la organización de un comité para supervisar sus estudios. El obstáculo que encaraba era la opinión general entre los matemáticos de que la investigación fundacional de Hilbert era un divertimento dentro de una discusión filosófica esotérica que no merecía ninguna atención de la comunidad matemática. Debido a dicha presión, Herbrand publicó algunas notas durante su estancia en la École acerca de la naturaleza del *programa* de Hilbert. Recalcó dos aspectos: primero, que la metamatemática (o teoría de la demostración) tiene unos importantes y definidos objetivos matemáticos que deberían contemplarse con independencia de consideraciones filosóficas (incluyendo las que él creía que Hilbert asociaba con esa teoría) y, segundo, que las técnicas desarrolladas por Hilbert adolecían de una falta de rigor para desarrollar adecuadamente la teoría. Proponía reorganizar la técnica en torno a una aproximación rigurosa de los problemas estrictamente matemáticos que estarían en el centro del *programa* de Hilbert. Leyó su tesis en 1930 y en ese mismo año obtuvo una beca de la Fundación Rockefeller que le permitió continuar sus estudios en Alemania en 1931, primero con John von Neumann en Berlin, después durante Junio con Emil Artin en Hamburgo, y finalmente con Emmy Noether en Göttingen, y tuvo ocasión de comparar sus propias opiniones respecto al *programa finitista* con las de von Neumann y evaluar el impacto de los resultados de Gödel sobre el programa de Hilbert. Como veremos, su contribución a dicho programa es probablemente la más significativa junto a la de Gödel, e independiente de ésta (Franks, 2009, 83-86). Parte de sus escritos fueron publicados póstumamente por Emmy Noether, por su antiguo profesor Helmut Hasse y su antiguo compañero de estudios Claude Chevalley.

special proof of consistency- are methodological principles necessitated by this one question" (Franks, 2009, 31).

Y de todos los textos de Hilbert aquí citados parece desprenderse una filosofía de la Matemática –que él nunca desarrolló explícita y sistemáticamente- en la cuál se vislumbra un claro realismo. Parece claro que Hilbert nunca dudó de la consistencia de la Geometría euclídea cuando elaboró los *Grundlagen* (y demostró su consistencia relativa) y nunca dudó de la consistencia de la aritmética de los enteros cuando desarrolló su *programa finitista* en donde la demostración de esa consistencia era esencial. Era una exigencia metodológica de un programa filosófico que se proponía desarrollar una *filosofía matemática* de los fundamentos de la Matemática[294]. "If Hilbert's program is understood thus, the templation to ignore it as a contribution to the philosophy of mathematics goes away. Hilbert's epistemological stance turns out to be one of philosophical subtlety and originality" (Franks, 2009, 32). Desde esta perspectiva, el trabajo de Gödel es una aportación fundamental a dicho programa: "Gödel's invention of a technique for the arithmetization of syntax is perhaps the most significant positive contribution to Hilbert's program" (Franks, 2009, 64). Franks discrepa de la interpretación tradicional del impacto de la obra de Gödel sobre el programa de Hilbert, interpretación que podría resumirse en las citas antes mencionadas de Dou, concordando en eso con la opinión del propio Gödel[295]. Y eso porque, en primer lugar, y siguiendo la sugerencia crítica de Hilbert que hemos mencionado más arriba, una adecuada extensión de la noción del finitismo permite, como la investigación posterior ha demostrado, una superación parcial de los resultados de Gödel. Pero para Franks la clave de la aportación de Gödel al *programa finitista* estaría en las consecuencias de su aritmetización de la sintaxis. Porque a partir de la obra de Gödel incluso los que quieran demostrar la inadecuación del *programa finitista* deben hacerlo *dentro* de los términos del programa, con una formulación matemática de los correspondientes enunciados metamatemáticos: "but if Gödel's discovery of the arithmetizability of syntax dispelled Hilbert's optimism by forcing a distinction between the ability to settle that question in the affirmative, it is only because the same discovery vindicated Hilbert's principal philosophical conviction: that by being cast within mathematics itself important questions *about* mathematics could be investigated without favouring any philosophical tendencies over others. Strictly speaking then, something like Gödel's achievement is just what Hilbert's program needed to get off the ground properly" (Franks, 2009, 66).

Hilbert no tenía ninguna duda acerca de la consistencia de ninguna rama de la Matemática, como se desprende con claridad de las múltiples citas suyas reproducidas en este trabajo sobre la naturaleza de la Matemática, y no contemplaba su programa como un test de consistencia en un sentido tradicional. Está también claro que hubiera recibido con alegría una demostración no circular puramente matemática de la consistencia del análisis, y muy

[294] Un pasaje muy sugestivo de su posición está en su artículo de 1931 en los *Mathematischen Annalen* en donde caracteriza su creencia en en la *consistencia* de la Matemática como una "fe" y afirma que la "fe" en este caso no es suficiente: "It would be the death of all science and the end of all progress if we could not even allow such laws as those of elementary arithmetic to count as truths. Nevertheless, even today Kronecker still has his followers who do not believe in the admissibility of *tertium non datur*: this is probably the crassest lack of faith that can be met with in the history of mankind. However, a science as mathematics must not rely upon faith, however strong that faith might be; it is rather the duty to provide complete clarity" (Hilbert, 1931, 268).

[295] "I wish to note expressly that [the second incompleteness theorem] does not contradict Hilbert's formalistic viewpoint. For this viewpoint presupposes only the existence of a consistency proof in which nothing but finitary means of proof are used, and it is conceivable that there exist finitary proofs [of the consistency of S] that cannot be expressed in the formalism of P [= PM]" (Gödel, 1931, traducción de van Heijenoort, 1967, p. 615).

probablemente incluso esperaba obtener tal resultado y en ese sentido está claro su exceso de optimismo[296]. Pero como especifica Franks, "this followed from his not being in a position in terms of practical expectation to distinguish the availability of such a demonstration from a different goal, the purely mathematical *formulation* of the statement that a branch of mathematics was consistent. Yet it is the latter goal that Hilbert emphasized when stressing the philosophical point of his program –that of formulating metatheoretical questions in such a way that unambiguous answers to them would result" (Franks, 2009, 65-66).

Franks resalta que, de hecho, el trabajo publicado en 1931 por Gödel significa esencialmente la confirmación definitiva de la perspectiva de Hilbert. Sus dos teoremas de incompletitud se siguen sin mucho trabajo del teorema del punto fijo de Carnap y de los análisis tradicionales de los enunciados paradójicos (como la paradoja de Liar). "Thus the substantial analytical work preceded him" (Franks, 2009, 67). La innovación esencial del trabajo de Gödel consistió en la técnica que usó para construir un enunciado que era equivalente en la aritmética al enunciado metamatemático de que ella misma era indemostrable. Y esa técnica de aritmetización de la sintaxis es la que le permitió a Gödel utilizar el teorema del punto fijo de Carnap y los análisis de los enunciados paradójicos disponibles, aplicados esta vez al caso de la demostrabilidad, "and from which the bad news may properly be seen as a corollary result" (Franks, 2009, 67). Para Franks existen evidencias de un germen de esa perspectiva en el mismo Hilbert (1926, p.199 y 1928, p.471) en donde también escribió que "a formalized proof, like a numeral, is a concrete and surveyable object"[297]. Ya en los *Grundlagen* (1899) desarrolló un proceso de aritmetización por medio del cual se interpretaban las relaciones de la Geometría Euclídea como relaciones aritméticas sobre un subconjunto de un cuerpo algebraico de modo que, bajo esa interpretación, los axiomas de la Geometría Euclídea expresaban *verdades aritméticas*, y la posibilidad de derivar una contradicción de los axiomas Euclídeos se trasladaba a una demostración de contradicción en la aritmética de modo que la *consistencia* de la Geometría Euclídea quedaba reducida a la *consistencia* de la aritmética.

Esta obra es de una importancia crucial para entender la evolución del pensamiento de Hilbert y el carácter de su posterior *programa finitista* que estamos discutiendo aquí. En primer lugar, el éxito conjunto del enfoque axiomático y de la aritmetización antes descrita

---

[296] El optimismo de Hilbert se expresa en su famoso *non ignorabimus* pronunciado en el Congreso de Matemáticas de 1900, donde presentó sus famosos 23 problemas, y en referencia al *ignoramus et ignorabimus* expresado en 1872 por Emil du Bois-Reymond en relación a nuestras posibilidades de conocimiento de la conciencia humana y del mundo físico: "However unapproachable these problems may seem to us, and however helpless we stand before them, we have, nevertheless, the firm conviction that their solution must follow by a finite number of purely logical processes … This conviction of the solvability of every mathematical problem is a powerful incentive to the worker. We hear within us a perpetual call: There is the problem. Seek its solution. You can find it by pure reason, for in mathematics there is no *ignorabimus*". Y también en su lema, expresado en 1923, y que figura en su epitafio: "Wir müssen wissen, wir werden wissen".

[297] De forma muy general, la "aritmetización" es un proceso por medio del cual un tema con objetos no-aritméticos es "reducido" a la teoría de los enteros positivos. Desde este enfoque muy general, las obras de Dedekind y Kronecker se pueden considerar (y precisamente desde los enfoques radicalmente antagónicos de ambos respecto al carácter de la Matemática) como ejemplos pioneros de un proceso de "aritmetización": la construcción de los números reales por Dedekind a partir de sucesiones de números racionales, que ellos mismos eran construibles directamente a partir de los enteros, y las investigaciones de Kronecker en las que demuestra cómo áreas cruciales de la Matemática pueden ser descritas a través de construcciones de conjuntos de enteros. También en los trabajos iniciales de Hilbert se encuentra el recurso a técnicas de aritmetización y, en particular, en los *Grundlagen*. Como vimos, el proyecto consistía esencialmente en mostrar que la Geometría Euclídea era axiomatizable por un número finito de axiomas (o grupos de axiomas) lógicamente independientes y que el sistema era completo y consistente, y recurrió a una demostración de "consistencia relativa" reduciendo los enunciados geométricos a enunciados aritméticos.

indujeron probablemente a Hilbert a pensar que tal cosa era posible en cualquier rama de la Matemática, lo que le llevaría a formular su *programa finitista* como una técnica válida para toda la Matemática. En segundo lugar, y consecuentemente con lo anterior, aborda el problema de la *completitud* y *consistencia* de la aritmética porque era lo que correspondía después del análisis anterior de acuerdo con su epistemología naturalista y sin otorgar ningún rango epistemológicamente distinguido a la aritmética. Eso contrasta con muchos de sus contemporáneos, que creyeron ver como consecuencia de los *Grundlagen* un estatus epistemológico distinguido en la aritmética. No existe en ningún lugar de los *Grundlagen* ni en ningún otro lugar de su obra una reivindicación de un estatus epistemológico especial para la aritmética, o sobre el carácter especial de la *verdad* aritmética, o una afirmación en el sentido de que la *consistencia* de la aritmética sea más autoevidente o menos cuestionable, o distinta en carácter, que la de la Geometría[298]: “The ‘arithmetization’ of geometry was not for him a way to ground geometric truth in arithmetic truth, but rather a methodological step essential for a mathematical demonstration of the consistency and mutual independence of the Euclidean axioms” (Franks, 2009, 69). Así, la elección de Hilbert de una interpretación aritmética de los axiomas Euclídeos no tenía nada que ver con el estatus epistemológico de la aritmética; se trataba sólo de que de que era la elección adecuada porque la prueba de consistencia relativa resultaba ser indubitablemente *matemática* y, en ese sentido, no dependiente de un fundamento en la *intuición* kantiana o algo análogo.

Es evidente, y aún más después de las aportaciones de Gödel y Herbrand, que el *programa finitista* de Hilbert implica una fuerte acentuación del carácter sintáctico de un enunciado matemático y de su *demostración* (que en el sistema formal se identifica con su *derivación sintáctica*), es decir, un fuerte carácter *formalista*, en marcado contraste con la filosofía realista de la Matemática que se vislumbra en sus numerosos escritos ya analizados, en su noción de la *inhaltliche Mathematik* y en sus propias aportaciones en otras áreas matemáticas distintas del *programa finitista*. Pero como en cualquier otra teoría formalizada (incluyendo la Lógica Matemática), el problema *semántico* aparece de forma inevitable como una limitación de la potencia del sistema formal y como un reto. Ya Poincaré planteó muy pronto que la consistencia de la aritmética no podría realizarse sin un razonamiento circular puesto que el principio de inducción sería en realidad una propiedad de nuestra mente que nunca podría probarse formalmente. La postura de Hilbert al respecto fue modificándose con el tiempo. En sus conferencias en Hamburgo (1922) criticó el punto de vista de Poincaré y además sostuvo que el recurso a la inducción transfinita era innecesario en el programa finitista: “Poincaré was from the start convinced of the impossibility of a proof of the consistency of the axiomatics of arithmetic. According to him, the principle of complete induction is a property of our mind … His objection that this principle could never be proved except by the use of complete induction itself is unjustified and will be refuted by my theory” (Hilbert, 1922, p. 201). Pero de hecho la objeción de Poincaré no pudo nunca ser refutada por Hilbert. En aquellos años iniciales Hilbert sostuvo que el uso de la inducción completa no era necesaria en su *Beweisstheorie*, sosteniendo que los razonamientos en la metamatemática eran de un “nivel bajo” y exigirían sólo una inducción sobre un dominio concreto intuitivamente determinado, mientras que la matemática ordinaria exigiría un nivel “superior” que necesitarían de la inducción completa, por lo que este principio sería una parte esencial de la matemática ordinaria y como tal aparece en sus estudios como un objeto de estudio, pero

[298] Para Kronecker, por ejemplo, toda la Matemática debería ser aritmetizada en uno u otro sentido, excepto la Geometría, que tendría su propio carácter epistemológico. Recordemos que entonces muchos autores, incluyendo Frege (y según hemos visto, en el fondo también Hilbert) consideraban a la Geometría una ciencia natural.

nunca como un instrumento de razonamiento metamatemático: "[in metamathematics] we simply have concrete signs as objects, we operate with them, and we make contentual statements about them. And in particular, regarding an example given of methamatematical proof, I should like to stress that this proof is merely a procedure that rests on the construction and deconstruction of number signs and that is essentially different from the principle that plays a prominent role in higher arithmetic, namely, the principle of complete induction or of inference from n to $n+1$. This principle is rather, as we shall see, a formal principle that carries us farther and that belongs to a higher level; it need a proof, and the proof can be given" (Hilbert, 1922, p. 203). Bernays, el estrecho colaborador de Hilbert, insiste en que este enfoque permite evitar la circularidad objetada por Poincaré: "In this regard, two types of complete induction are to be distinguished: the narrow form of induction, which relates only to something completely and concretely given, and the wider form of induction, which uses either the general concept of whole number or the operating with variables in an essential manner. Whereas the wider form of complete induction is a higher form of inference whose justification constitutes one of the tasks of Hilbert's theory, the narrower form of inference belongs to the primitive intuitive mode of cognition and can therefore be applied as a tool of contentual inference" (Bernays, 1922b, 221). Pero con ello, en el fondo, establecen una diferencia esencial entre la metamatemática y la matemática ordinaria, en contra del postulado básico del *programa finitista*.

Sin embargo la postura de Hilbert va variando gradualmente a lo largo de los años 20. Al final, cuando su programa está técnicamente más maduro, admite el uso de la inducción completa al nivel metamatemático: "As my theory shows, two distinct methods that proceed recursively come into play when the foundations of arithmetic are established, namely, on the one hand, the intuitive construction of the integer as numeral …, that is, *contentual* induction, and, on the other hand, formal induction proper, which is based on the induction axiom and through which alone the mathematical variable can begin to play its role in the formal system" (Hilbert, 1928, 472). Nos podemos preguntar por la razón que movió a Hilbert a cambiar entre 1922 y 1928 su opinión acerca de la potencia de la inducción que era necesaria al nivel metamatemático. Para Franks (2009, 81-83), la razón más obvia sería que las demostraciones desarrolladas en la primera parte de la década se revelaron erróneas y una posterior reflexión le convenció de la necesidad de métodos más fuertes para obtener resultados concluyentes. "But to whatever degree this explains psychologically Hilbert's change of mind, there is a deeper, underlying reason" (Franks, 2009, 82). Razón que estaría relacionada con la segunda cuestión con la que el mismo Bernays caracterizaba el *programa* de Hilbert: la formulación de la *consistencia* de un sistema formal y que Bernays formulaba en estos términos: "$\perp$ cannot be obtained as the end-formula of a proof" (Bernays, 1922b, 220). Esta formulación de la *consistencia,* aunque representara un avance en el desarrollo de la metateoría, seguía siendo un enunciado *acerca* de demostraciones y fórmulas y, por lo tanto, no una fórmula sino un enunciado ordinario en el lenguaje ordinario. Así, "the lack of purity in his program thus stemmed from the informality of the consistency statement he aimed to verify. This was the underlying reason why he was unable, in the case of the proof theory, to meet the standard he set for himself in his earlier work on the foundations of geometry …Instead, Hilbert was forced to reconsider his method and means of investigation throughout his program's early history as the insufficiently formal goal proved continuously elusive" (Franks, 2009, 83). Además, la incapacidad para responder claramente a lo que parecía ser la principal objeción de Poincaré (la circularidad puramente lógica en cualquier justificación de la inducción) hacía surgir la ambigüedad en la obra de Hilbert y ponía en evidencia que su *Beweistheorie* no era, como se pretendía, puramente matemática, y no tenía capacidad para distinguir matemáticamente los dos tipos de inducción y era, a la postre, incapaz de realizar una evaluación para la que precisamente habría sido diseñada.

Por todo lo cual Franks concluye que Hilbert creó en realidad una proto-teoría de la demostración que adolecía de una falta de rigor, precisión y desarrollo que le impedían alcanzar sus fines: "Hilbert thus presented what may properly be thought of as a proto-proof theory, and he took it as far as he could. From within his own circle, the proof-theoretical apparatus never met his own standard of purity and therefore fell short of his goal of demonstrating mathematical autonomy" (Franks, 2009, 83). El diagnóstico coincide con la opinión formulada ya en los años 30 por Herbrand [299], cuyo trabajo es para Franks la segunda gran aportación al *programa finitista* y comparable a la de Gödel.

El punto clave consiste en que Herbrand propone, en lugar de una aritmetización de la sintaxis como la que simultáneamente e independientemente de su trabajo realizó Gödel, que los propios enunciados metamatemáticos deberían ser aritmetizados, y el primer objetivo de su estudio doctoral era determinar cómo esto sería posible. Así, en vez de intentar encontrar un enunciado en el lenguaje de la aritmética con *las mismas condiciones de verdad* que el enunciado informal de Bernays acerca de la consistencia (como hizo Gödel), debería poderse sustituir el enunciado de Bernays acerca de objetos sintácticos por un enunciado que fuera la expresión de la consistencia en términos de funciones de la teoría de números: "rather than resolve the impurity in an ordinary language statement of consistency through the arithmetization of syntax, Herbrand formulated an ordinary language statement of consistency that already was 'arithmetical'. Such statement is not, like the sentence Gödel would construct, a formula in the language of arithmetic; its 'arithmetical' nature amounts to its verification or refutation consisting in checking purely arithmetical facts (specifically in solving Diophantine equations) rather than syntactic ones" (Franks, 2009, 89-90). Para Herbrand, el problema fundamental de la metamatemática, y en términos del cuál los otros problemas metamatemáticos podrían ser trabajados, consistía en el *Entscheidungsproblem* (realmente una clase de problemas): dada una teoría matemática formalizada y un enunciado en el lenguaje de esa teoría, determinar si dicho enunciado era o no un teorema de esa

---

[299] Según Franks, Herbrand tenía una opinión distorsionada acerca de las posiciones filosóficas de Hilbert, a quien le imputaba posiciones cercanas o coincidentes con Brower.Pero siempre sostuvo que, independientemente de esas posiciones filosóficas, había una problemática matemática concreta detrás del *programa finitista* que merecía ser investigada y desarrollada. También creía que los métodos de Hilbert y sus desarrollos al respecto carecían de rigor y que estaban abocados al fracaso, acertando en el diagnóstico de los puntos clave en los que el *programa* tenía que ser reformulado. En una carta que escribió a Hadamard en 1931 decía que "When I first attacked these questions, the status of them was as follows: the principal ideas of proofs, and some proof-schemata, had been explained by Hilbert in a series of articles; but the schemata were almost all false, as Hilbert himself subsequently recognized … It was necessary to consider the whole theory again from top to bottom in order to attain the desidered rigor in its beginnings and to arrive at precise results … I was obliged to start by establishing all the lemmas, in general easily proved, which lie at the base of these theories and which have not previously been stated in a satisfactory manner. I was very often led to complete them" (Goldfarb, 1971, p. 278). La traducción inglesa de los escritos de Herbrand, en (Goldfarb, 1971). Un estudio detallado de la obra de Herbrand, incluyendo su Teorema Fundamental y su significado y límites, en (Franks, 2009, pp. 83-104), (Buss, 1955), (Kreisel, 1951) y (Ireland, K. and Rosen, M. "Herbrand's Theorem." §15.3 in A Classical Introduction to Modern Number Theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, pp. 241-248, 1990). Este teorema reduce la cuestión de la insatisfacibilidad en la lógica de primer orden a la cuestión de la insatisfacibilidad en el cálculo proposicional. (Sakharov, Alex and Weisstein, EricW,"Herbrand'sTheorem".FromMathWorld—A-Wolfram-Web-Resource: **http://mathworld.wolfram.com/HerbrandsTheorem.html)**. Lo que comúnmente se denomina "Teorema de Herbrand" en muchos libros de texto es una forma muy simple del Teorema de Herbrand que se aplica solamente a $\forall\exists$-fórmulas; pero el enunciado original del Teorema de Herbrand se aplica a fórmulas arbitrarias de primer orden. Un estudio completo de las distintas versiones y sus demostraciones en (Buss, 1955b). La demostración realizada por Herbrand en su tesis contiene serios errores que fueron descubiertos y corregidos por Debren en los años 60 (Debren et alt., 1963 y 1965), pero mucho antes por Gödel, aunque no publicados, según se ha podido saber por sus apuntes publicados póstumamente (Goldfarb, 1990 y 1993) y (Debren, 1993).

teoría[300]. Consideró su Teorema Fundamental como un método para reducir el *Entscheidungsproblem*, que surge inicialmente como una cuestión acerca de si una prueba existe o no existe, a un problema de teoría de números. El Teorema Fundamental de Herbrand, que él creía que era una versión constructiva de los resultados de Löwenheim y Skolem [301], muestra esencialmente "how a question *about* mathematics can be analyzed with mathematics itself" (Franks, 2009, 97).

---

[300] Todos estos resultados se desarrollan dentro de la *Lógica de primer* orden. La Lógica de primer orden, también llamada lógica de predicados o cálculo de predicados, es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden. Los lenguajes de primer orden son, a su vez, lenguajes formales con cuantificadores que alcanzan sólo a variables de individuo, y con predicados y funciones cuyos argumentos son sólo constantes o variables de individuo. La Lógica de segundo orden es una extensión de una lógica de primer orden en la que se añaden variables para propiedades, funciones y relaciones, y cuantificadores que operan sobre esas variables. Así se expande el poder expresivo del lenguaje sin tener que agregar nuevos símbolos lógicos . Se puede crear así una jerarquía ascendente definiendo Lógicas de orden superior (High-order-logics), es decir se puede definir una Lógica de orden-k para cualquier entero positivo k. En la Parte-III se discute su desarrollo y la controversia histórica acerca de la lógica adecuada para la Matemática.

[301] El teorema de Löwenheim-Skolem o teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski es un teorema que establece que si una teoría de primer orden es consistente, entonces tiene al menos un modelo con dominio finito o numerable. Más precisamente: sea T un subconjunto consistente de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ (con identidad): si T es finito o numerable, entonces tiene al menos un modelo con dominio finito o numerable. Esto significa que las teorías de primer orden no pueden controlar la cardinalidad de sus modelos. La primera versión del teorema se debe a Leopold Löwenheim en 1915, aunque su demostración tenía una pequeña laguna. Thoralf Skolem demostró una segunda versión del teorema en 1919. Desde entonces han aparecido otras versiones. En general el teorema de Löwenheim-Skolem no se sostiene en lógicas más fuertes, como la lógica de segundo orden. Se suele distinguir entre el *teorema descendente* y el *teorema ascendente*: Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden de cardinalidad K, donde K es un cardinal infinito. El *teorema de Löwenheim-Skolem descendente* establece que si $\mathcal{L}$ tiene un modelo de cardinalidad K, entonces también tiene al menos un modelo de cardinalidad menor o igual a K. La demostración del teorema emplea el teorema de la existencia de modelos dentro de la demostración de completitud para la lógica de primer orden. El teorema establece una conexión entre la cardinalidad del lenguaje y la cardinalidad de sus modelos, e impone serias restricciones sobre la representación de estructuras infinitas. Si E es una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$ de cardinalidad mayor que la cardinalidad de $\mathcal{L}$, ningún conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ podrá representar a E hasta el isomorfismo ya que, según el teorema, cualquier conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ que tenga modelos, tendrá algún modelo de cardinalidad menor que la cardinalidad de E; y este modelo no puede ser isomorfo con E. El teorema de Löwenheim-Skolem descendente es una propiedad clave, junto con el teorema de compacidad, para caracterizar a la lógica de primer orden. De nuevo, sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden de cardinalidad K, donde K es un cardinal infinito. El *teorema de Löwenheim-Skolem ascendente* establece que si $\mathcal{L}$ tiene un modelo de cardinalidad K, entonces también tiene al menos un modelo de cardinalidad mayor o igual a K. La demostración emplea el teorema de compacidad para lenguajes de primer orden. Este segundo teorema elimina cualquier esperanza de representar cualquier estructura infinita hasta el isomorfismo. Pues si un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ tiene un modelo infinito, entonces tendrá otros de cardinalidad mayor y, por tanto, no isomorfos. El *teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski* establece que si un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo de cada cardinalidad infinita mayor o igual que la cardinalidad de $\mathcal{L}$. Este teorema es un resultado reforzado del teorema de Löwenheim y Skolem, que se puede obtener combinando los otros dos resultados.(Cfr. Hunter, Geoffrey (1971). "Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order Logic", University of California Press y Shapiro, Stewart, "Classical Logic", en Edward N. Zalta (ed.), Stanford Encyclopedia of Philosophy ,Winter 2009 Edition y Ebbinghaus 2007). Más precisamente: una *signatura* consiste en un conjunto de símbolos de función S_{func}, un conjunto de símbolos de relación S_{rel}, y una función representando la aridad (multiplicidad o número de variables) de los símbolos de función y de relación. Un símbolo de función nulo (de aridad cero) se denomina símbolo de una *constante*.En el contexto de la lógica de primer orden, una signatura se llama a veces un *lenguaje*. Se dice que es *numerable* si el conjunto de símbolos de relación y de función es numerable, y en general la cardinalidad de una signatura es la cardinalidad del conjunto de símbolos que contiene. Una teoría de primer orden consiste en una signatura determinada y un conjunto de enunciados determinados (fórmulas sin variables libres). Tales teorías se especifica frecuentemente dando una lista de axiomas que generan la teoría, o bien dando una estructura y

considerando la teoría consistente en todos los enunciados que satisfacen esa estructura. Dada una signatura σ,una σ-estructura M es una interpretación concreta de los símbolos de σ; consiste en todos los conjuntos subyacentes, denotados frecuentemente también por "M", junto con una interpretación de los símbolos de función y de relación de σ. Una interpretación de un símbolo constante de σ en M es simplemente un elemento de M; en general, una interpretación de un símbolo de función n-ario f es una función de M^n en M, y una interpretación de un símbolo de relación R es una relación n-aria sobre M, es decir, un subconjunto de M^n . Una subestructura de una σ-estructura M consiste en tomar un subconjunto N de M que sea cerrado bajo las interpretaciones de todos los símbolos de función en σ, lo que incluye las interpretaciones de todos los símbolos constantes o elementos de σ, y restringiendo los símbolos de relación a N. Una subestructura elemental es un caso muy especial de una estructura; en particular, satisface exactamente los mismos enunciados de primer orden que la estructura original, la cual sería su extensión elemental. El enunciado moderno del teorema establece de forma más general (y más fuerte que las versiones desarrolladas por Skolem) que: Para toda signatura σ, toda σ-estructura infinita M y todo número cardinal infinito $\kappa \geq |\sigma|$, existe una a σ-estructura N tal que $|N| = \kappa$, si $\kappa < |M|$ entonces N es una subestructura elemental de M; si $\kappa > |M|$ entonces N es una extensión elemental de M. La parte del teorema que afirma que una estructura tiene subestructuras elementales de todas las cardinalidades infinitas más pequeñas se conoce como teorema de Löwenheim–Skolem descendente, y la parte que asegura que toda estructura tiene extensiones elementales de todas las cardinalidades infinitas más grandes se conoce como el Löwenheim–Skolem ascendente. Por ejemplo, si denotamos por N a los números naturales y por R a los reales, del teorema se deduce que (N, +, ×, 0, 1) (la teoría de la aritmética elemental de primer orden) tiene modelos de cardinalidad infinita no numerable, y que la teoría de (R, +, ×, 0, 1) (la teoría de los cuerpos reales cerrados) tiene un modelo numerable. Existen, por supuesto, axiomatizaciones que caracterizan a (N, +, ×, 0, 1) and (R, +, ×, 0, 1) de forma unívoca salvo isomorfismo, pero el teorema de Löwenheim–Skolem demuestra que esas axiomatizaciones no pueden ser de primer orden. Así, por ejemplo, la completitud de un orden lineal, que caracteriza a los números reales, no sería una propiedad de primer orden. Una teoría se llama *categórica* si tiene solamente un modelo, salvo isomorfismo. El término fue introducido por Oswald Veblen (1904), y se esperaba que esto permitiera una sólida fundamentación de la Matemática si se lograba describir una teoría categórica de primer orden de alguna versión de la teoría de conjuntos. El teorema de Löwenheim–Skolem fue el primer golpe a esa esperanza puesto que implicaba que una teoría de primer or en que tuviera un modelo infinito no podía ser categórica. Finalmente en 1931 la esperanza se disipó completamente con el teorema de incompletitud de Gödel. Muchas consecuencias del teorema de Löwenheim-Skolem les parecieron antiintuitivas a los lógicos de los años 20, situación que se conoce con el nombre de la *paradoja de Skolem*. Muchas consecuencias tenían una *apariencia* paradójica entonces, cuando aún no estaba clara la distinción entre propiedades de primer orden y propiedades que no eran de primer orden. La *paradoja de Skolem* involucra un aparente conflicto entre dos teoremas de la lógica: el teorema de Skolem (1915) (que en la formulación inicial de Skolem sostiene que si una teoría de primer orden tiene infinitos modelos entonces tiene un modelo infinito numerable) y el teorema de Cantor (1873) (que sostiene que existen conjuntos infinitos no numerables). Si se tiene en cuenta que los principios que sustentan la demostración del teorema de Cantor pueden ser formulados como enunciados de una lógica de primer orden, surge la aparente paradoja de cómo un modelo numerable puede satisfacer el enunciado que dice que existen conjuntos infinitos numerables. En una introducción al artículo de Torlaf Skolem (1922) donde se planteó por primera vez esta paradoja, Jean van Heijenoort escribió ya que "is not a paradox in the sense of an antinomy … it is a novel and unexpected feature of formal systems" (reimpreso en Van Heijenoort, 1967, pp. 290-291). El comentario reflejaba el consenso general al respecto dentro de la comunidad matemática. El mismo Skolem (1922) dio una solución de la aparente paradoja, concluyendo que no era un problema para la matemática. Variantes de esa solución aparecen en muchos trabajos recientes (Resnik 1966; Myhill 1967; Hart 1970; McIntosh 1979; Benacerraf 1985; Shapiro 2002; Giaquinto 2002), así como en muchos manuales de texto (Fraenkel et al. 1984; Ebbinghaus et al. 1996; van Dalen 1997). Para una discusión de este tópico, los posteriores refinamientos de la paradoja, las diferentes posturas y su solución (Bays 2007 y 2012). Aunque la llamada *paradoja de Skolem* no supone ninguna contradicción, por tanto, para la matemática, ha dado lugar curiosamente a un abundante debate sobre sus consecuencias filosóficas que se remonta hasta nuestros días. El más reciente se debe a Putnam (1980), quien presenta una versión del teorema de Skolem utilizando la teoría de modelos para construir sobre ello un argumento contra el realismo. La argumentación de Putnam ha recibido innumerables críticas en la literatura. Cfr. (Bays 2001; Velleman 1998; Gaifman 2004b; Bellotti 2005; Bays 2007b; Hafner 2005). Para un debate más amplio incluyendo las respuestas del mismo Putnam Cfr. (Devitt 1984; Lewis 1984; Taylor 1991; Van Cleve 1992; Hale and Wright 1997; Chambers 2000; Bays 2001; Bays 2008 puede considerarse representativo de las críticas al argumento de Putnam; en Putnam 1983, vii–xii y Putnam 1989 se contiene las repuestas de Putnam. Una defensa de las tesis de Putnam en: Anderson 1993, Douven 1999, Haukioja 2001, y Kroon 2001). Como señala Dawson (1993), para comprender la

Es curioso observar que Herbrand, quien erróneamente identificaba la posición filosófica de Hilbert con la de Brouwer, sostiene en su obra una posición estrictamente constructivista, y muy distante, por tanto, de la de Hilbert y en realidad mucho más próxima a Brouwer. Para Buss (1995b) esta es la causa de sus fallos en la demostración de su Teorema Fundamental y también de que no llegara a demostrar el Teorema de Completitud[302] que

---

historia inicial de la teoría de modelos debe distinguirse entre *consistencia sintáctica* (ninguna contradicción puede derivarse usando las reglas de deducción para la lógica de primer orden) y *satisfacibilidad* (existe un modelo). Curiosamente, antes de que el teorema de completitud hiciera innecesaria la distinción, el término *consistencia* se usaba muchas veces en un sentido y otras muchas en otro. El primer resultado significativo de lo que más tarde llegaría a ser la *teoría de modelos* fue el teorema de Löwenheim que en su forma inicial (Löwenheim, 1915) indicaba que para toda signatura infinita numerable σ, todo σ-enunciado que es satisfacible en un modelo, lo es en un modelo infinito numerable. En su artículo Löwenheim utilizaba el cálculo de Peirce-Schröder y, por tanto, las notaciones de Schröder, que hoy se consideran anticuadas. Un resumen del trabajo usando notaciones modernas en (Brady, 2000). En general se pensaba que la demostración inicial de Löwenheim adolecía de algunos defectos, pero recientemente Badesa ha hecho una revisión donde concluye que esa prueba era completa (Badesa, 2004). Skolem publicó varias versiones del teorema y pruebas alternativas (Skolem: 1920, 1923 y 1929), hasta que Anatoly Maltsev (1936) demostró usando el teorema de completitud la versión más general arriba enunciada. Como anécdota, citaba una nota de Skolem según la cuál el teorema habría sido ya demostrado por Tarski en un seminario en 1928, pero Tarski había olvidado esa demostración. A pesar de ello, a este teorema general se le conoce desde entonces con el nombre de teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski. Resulta también irónico (Hodges, 1993) que el nombre de Skolem haya quedado para siempre ligado al teorema ascendente cuando él no creía en él puesto que rechazaba la realidad de los conjuntos infinitos no numerables. "Legend has it that Thoralf Skolem, up until the end of his life, was scandalized by the association of his name to a result of this type, which he considered an absurdity, nondenumerable sets being, for him, fictions without real existence" (Poizat 2000). Hemos mostrado que la FOL no puede caracterizar la noción de *infinitud*. Por tanto tampoco puede caracterizar la noción de *finitud* y, en definitiva, no puede caracterizar la *cardinalidad*: Si la finitud fuera caracterizable en la FOL, existiría un conjunto de enunciados de primer orden cuyos modelos serían precisamente aquéllos con dominio finito. Eklund (1996, 150) demuestra que del supuesto de que un conjunto de enunciados Γ tenga modelos finitos de una cardinalidad finita arbitraria se sigue que tiene también un modelo infinito y, por tanto, la noción de finitud no es caracterizable dentro de la FOL.

302 El *Teorema de Completitud,* que fue planteado por Hilbert y Ackermann en 1928 (Hilbert & Ackermann, 1928) y que fue demostrados primeramente por Gödel en 1929 en su tesis doctoral y publicado en 1930 en *Monatshefte für Mathematik* (Gödel, 1930), no debe confundirse con los dos *teoremas de incompletitud* que también demostró Gödel. El término "completitud" tiene en ambos casos significados totalmente distintos, aunque sorprendentemente en muchos comentarios se identifican. Henkin (1949) presentó una demostración simplificada que fue mejorada por Hasenjaeger (1953). Pero el artículo de Gödel incluía también una lista de definiciones meticulosas de los conceptos relevantes que son de gran utilidad para entender el problema. La cuestión que Hilbert y Ackermann plantearon en 1928 es si un determinado sistema de axiomas dado explícitamente para el cálculo de predicados de primer orden "…is complete in the sense that from it all logical formulas that are correct for each domain of individuals can be derived…" (van Heijenoort 1967, p. 48). El *teorema de completitud* fue enunciado por Gödel en los siguientes términos: Theorem: Every valid logical expression is provable. Equivalently, every logical expression is either satisfiable or refutable. En la terminología de Gödel , una "logical expression" es una fórmula-bien-formada (es decir, válida según las reglas sintácticas) de la lógica de primer orden sin identidad. Una expresión es "refutable" si su negación es demostrable (derivable, *provable*), y es "valid" si es verdadera en toda interpretación (es decir, es una tautología o ley lógica); es "satisfiable" si es verdadera en alguna interpretación. Así pues, la *completitud* se refiere aquí a un sistema deductivo de la lógica de predicados de primer orden (hay innumerables sistemas deductivos en esa lógica, por ejemplo, la *deducción natural* de Gentzen, sistemas axiomáticos *tipo Hilbert*, etc). Es teorema simplemente dice que un *sistema deductivo* de la lógica de predicados de primer orden es *completo*, en el sentido de que puede derivar formalmente todas las fórmulas válidas (tautologías o leyes lógicas), es decir, el sistema no necesita añadir ninguna regla de inferencia más para poder derivar todas las leyes lógicas. La propiedad recíproca es la de *corrección* o *adecuación* (*soundness*): sólo las fórmulas lógicamente válidas (tautologías o leyes lógicas) son derivables en el sistema, o sea: si una fórmula es derivable en el sistema, es una fórmula válida (ley lógica o tautología). Un sistema deductivo que cumple las dos propiedades se dice que es *perfecto*. Sin embargo, en los *teoremas de incompletitud* de Gödel se habla de *completitud* en un sentido totalmente distinto. En primer lugar, se trata de la *completitud de una teoría*

exigía esa demostración[303]. Para Franks (2009, 104), el demostrar la autonomía de la Matemática no estaba entre los objetivos explícitos de Herbrand, y tampoco entendió él que ésta era una de las tareas básicas del programa de Hilbert. Sin embargo, “his infatuation with rigor nonetheless led him to see precisely what was needed to repair Hilbert’s program and to measure accurately his own partial contribution to that reparation” (Franks, 2009, 104). Una de las consecuencias interesantes de la interpretación estrictamente constructivista del trabajo de Hilbert que realiza Herbrand es la conexión de la noción de *demostrabilidad* con la de *computabilidad* desarrollada por Alan Turing, y el Teorema Fundamental de Herbrand tiene un papel relevante en la Teoría de la Computabilidad[304].

---

formulada en la lógica de primer orden. Una *teoría* (axiomatizada) añade a los axiomas del sistema deductivo otros axiomas que no son fórmulas válidas (leyes lógicas o tautologías). Una *teoría (sistema formal)* es *completa* si todas las fórmulas verdaderas de la teoría si toda fórmula verdadera de la teoría puede ser derivada de los axiomas. El primer *teorema de incompletitud* de Gödel establece que una teoría S que contenga como mínimo la aritmética PA, si es consistente (en la formulación ampliada de Rossen) es incompleto (hay fórmulas verdaderas que no pueden ser demostradas) y, además, es *esencialmente incompleto*: ninguna extensión de S es completa. Pero ya hemos visto que la *aritmética de Presburger* es completa, consistente y decidible. Son dos ejemplos de sistemas incompletos y completos (respectivamente) en un sistema deductivo de la lógica de primer orden que es completo (por el teorema de completitud de Gödel).

303 “There was also a fairly serious error in Herbrand's proof, which was first described in published material by Dreben et al.; this error was apparently also recognized by Bernays in the 1930's and was discovered and corrected by Gödel in unpublished notes. These errors in no way detract from the importance of Herbrand's work, since alternative proofs could be given. In any event, although there are some false lemmas in Herbrand's work, his main theorems are all fully correct … Herbrand's thesis also includes a construction that is very close to the completeness theorem. (Recall that the completeness theorem was first proved by Gödel in 1930, in the same year that Herbrand's thesis was completed.) In his thesis, Herbrand discusses that fact that if there is no witnessing substitution for a proposition derived from *A* (as in Theorem 4), then it is possible to construct an sequence of finite domains where appropriate translations of *A* are false. Herbrand also discusses the possibility of having an infinite domain where *A* would be false in the usual sense; had he actually done this, he would have proved the completeness theorem. Somewhat surprisingly, Herbrand evidently knew that such an infinite domain could be obtained, but *because of his constructive outlook*, he declined to carry out the proof that such an infinite domain existed …It is interesting to speculate why Herbrand chose not to state the completeness theorem. Firstly, Herbrand took a *very strong constructive, formalist point of view*, and he would have rejected non-constructive arguments on philosophical grounds. Indeed, Herbrand defined “true" to mean “provable in Q_H" rather than “true in all possible structures". Secondly, it seems that Herbrand felt that his fundamental theorem was of greater interest than a model-theoretic completeness theorem” (Buss, 1995b, 13-14).

304 Resulta que existen tres teorías que son formalmente equivalentes, con lo que cualquier problema o teorema se puede formular y resolver en los términos de cualquiera de esas teorías: *el cálculo formal de primer orden* desarrollado por Hilbert y Gödel, *la teoría de la computabilidad* planteada y desarrollada por Alan Turing (1936 y 1938) y el *λ-cálculo* desarrollado por Alonzo Church (1932 y 1936). La *Turing-computabilidad* se define en términos de secuencias o cadenas de signos y hoy en día es una de las varias formas equivalentes en las que se puede definir la computabilidad. Se dice que un conjunto E de cadenas es *computablemente numerable* (otros términos usados en la literatura: *recursivamente enumerable* o *efectivamente enumerable* o *recursivamente computable*) si es posible programar a un ordenador para computar e imprimir a todos los miembros de E, prescindiendo de las limitaciones de tiempo, energía y memoria. Con esta terminología todo conjunto de la cadenas numéricas es computablemente enumerable. Aunque la definición de *conjunto computablemente enumerable* se establece en términos de cadenas, es posible aplicarlo a conjuntos de números naturales: un conjunto de números naturales es computablemente enumerable si y sólo si el conjunto de sus correspondientes cadenas numéricas es computablemente enumerable. E igualmente se puede extender la definición a conjuntos de objetos matemáticos de cualquier tipo que puedan ser representados por cadenas de signos. En 1936 Alan Turing introdujo un modelo teórico que describía un computador digital con memoria de trabajo ilimitada (la máquina de Turing universal o TUM), de forma que se pueden pensar los ordenadores ordinarios como realizaciones físicas de ese modelo –lógicamente, con memoria limitada y, por tanto, son realizaciones aproximadas-. En el tratamiento matemático de la Teoría de la Computación, la TUM o cualquier otro modelo actual de computación se usan para especificar las definiciones formales de los conceptos básicos de la teoría. Por tanto, las definiciones son puramente matemáticas y cuando se habla de

posibilidad se trata de *posibilidad matemática;* por ejemplo, se dice que un conjunto de cadena E es *computable* (o *computablemente decidible* o simplemente, en el contexto de la teoría, *decidible*) si es posible programar un computador para decidir, dada una cadena de símbolos *s,* si *s* pertenece o no a E. Esta propiedad se basa en otra importante propiedad de todo conjunto de cadenas numéricas: la existencia de un *algoritmo* (es decir, un procedimiento mecánico basado en reglas bien definidas) que permite decidir, dada una cadena de símbolos, si ésta aparece o no en una enumeración computable del conjunto E. Un conjunto E que no es *decidible* se dice que es (computablemente) *indecidible.* Se demuestra fácilmente que todo conjunto finito de cadenas E es decidible, pero puede suceder que tenga un número de cadenas tan enorme que ningún computador actual pueda decidir en un tiempo accesible. Existen tres importantes teoremas que establecen la relación entre enumerabilidad computable y decidibilidad computable: 1)Todo conjunto computablemente decidible es computablemente enumerable. 2)Un conjunto E es computablemente decidible si y sólo si tanto E como su complementario son computablemente enumerables. 3)Teorema de undecidibilidad (Turing-Church): Hay conjuntos computablemente enumerables que no son decidibles. La noción de decidibilidad en la Teoría de la Computación es, pues, distinta de la de la Teoría de los Sistemas Formales. Sin embargo, existe una estrecha conexión: 1)El conjunto de teoremas de un sistema formal es computablemente enumerable. 2)Un sistema formal es *decidible* (en el sentido definido en el sistema formal) si el conjunto de teoremas del sistema no sólo es computablemente enumerable sino también computablemente decidible. Se puede pues formular, por ejemplo, el primer teorema de incompletitud de Gödel en términos de la teoría de la computación. Es interesante resaltar que la demostración de éste realizada por Turing, estrictamente constructivista en la línea de Herbrand, muestra que el uso de formalizaciones aritméticas de enunciados autoreferenciales (usadas por Gödel en su demostración y que para algunos representaban una circularidad asociada con la paradoja de Liar) no son esenciales para demostrar la incompletitud. Y la demostración de Turing muestra también que la estructura de la teoría S, en particular el que se exprese en la lógica de primer orden o en la lógica de segundo orden, es irrelevante (siempre que el conjunto de sus teoremas sea computablemente enumerable) (Franzén, 2005, 74). En este contexto se ha podido resolver también el llamado *10º problema de Hilbert* que planteó Hilbert en el famoso Congreso de Matemáticas de 1900: ¿existe un algoritmo que permita decidir si una ecuación diofántica (ecuación polinómica con coeficientes enteros) tiene o no tiene solución? En palabras de Hilbert: "Given a diophantine equation with any number of unknown quantities and with rational integral numerical coefcients: to devise a process according to which it can be determined by a fnite number of operations whether the equation is solvable in rational integers". La noción de *computabilidad* no se creó hasta los años 30 y en sus términos se encontró la solución como una consecuencia del llamado *MRDP-Teorema* (Matiyasevich-Robinson-Davis-Putnam) probado en 1970, y a partir del cual se puede demostrar que no existe tal algoritmo. El resultado es importante, primero porque se trata de un problema típicamente matemático y no lógico, segundo porque los métodos son estrictamente constructivos y tercero porque la conclusión es que el conjunto (matemático) de la ecuaciones diofánticas resolubles es un conjunto computablemente enumerable pero no decidible y el conjunto de las ecuaciones diofánticas no resolubles no es computablemente enumerable. Este teorema tiene otra consecuencia importante que depende del hecho de que puede ser demostrado en la aritmética elemental con una prueba que se puede formalizar en PA: dado un enunciado A tipo-Goldbach, se puede construir una ecuación diofántica $D(X_1, X_2, \ldots X_n)=0$ tal que se demuestra en PA que A es verdadero si y sólo si la ecuación no tiene solución; en particular, se puede encontrar una tal ecuación para el enunciado "PA es consistente". De modo que A= "PA es consistente" es verdadero si y solo si la ecuación diofántica asociada no tiene solución, lo cual es indecidible y, todavía más, si A fuera un enunciado verdadero pertenecería a la clase de ecuaciones diofánticas no resolubles la cuál es computablemente no numerable, y esto traduce a la Teoría de la Computación el segundo teorema de incompletitud de Gödel, pero dándole un matiz: la consistencia de PA no es computablemente decidible porque, si fuera verdad ese enunciado, su ecuación diofántica asociada pertenecería a una clase – las ecuaciones diofánticas no resolubles- que no es computablemente numerable con lo que no sería tratable por los métodos computacionales (Franzén, 2005, 71). El MRDP-Teorema sostiene la equivalencia de las nociones de *conjunto recursivamente enumerable (o enumerablemente computable)* y *conjunto diofántico* (conjunto de números naturales definidos como soluciones de ecuaciones diofánticas) tuvo una historia accidentada y un desarrollo largo: Davis y Putnam demostraron el resultado asumiendo una conjetura en la teoría de números; Julia Robinson descubrió cómo evitar la conjetura y simplificó la demostración, y el resultado fue su artículo conjunto "The Decision Problem for Exponential Diophantine Equations" (*The Annals of Mathematics* Vol. 74, No. 3, Nov., 1961, pp.425-436). Mucho después J. P. Jones and Matiyasevich encontraron una demostración mucho más simple e intuitiva ("Register Machine Proof of the Theorem on Exponential Diophantine Representation of Enumerable Sets", *The Journal of Symbolic Logic,* Vol. 49, No. 3, Sep. 1984, pp. 818-829). Para más detalles sobre el trabajo de Matiyasevich véase (Martin Davis, "Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable", *American Mathematical Monthly*, Vol. 80, No. 3 , Mar.

1973, pp. 233-269). En todos estos análisis es, como más arriba indicaba, esencial la noción de "enunciado tipo-Goldbach" (*Goldbach-like statement*). La *Conjetura de Goldbach* es el enunciado de que, para todo número natural *n,* el número *2n+4* se puede expresar como la suma de dos números primos. Tiene la propiedad de que existe un algoritmo simple para testar si un número dado se puede expresar como la suma de dos números primos. Un "enunciado tipo-Goldbach" es un enunciado que tiene precisamente esa propiedad: existe un algoritmo simple para testar si un elemento satisface el enunciado. Una definición rigurosa de *Goldbach-like statement* en (Franzén, 2005, 155-163). Resulta que MRDP-Teorema implica que cada enunciado de la familia Π_1^0 (una de las clases más bajas de la llamada *jerarquía aritmética* o *jerarquía de Kleene-Mostowski*, que clasifica ciertos conjuntos según la complejidad de las fórmulas aritméticas que los definen) es equivalente a un enunciado que afirma que una ecuación diofántica particular no tiene solución en los números naturales, y este último es un enunciado tipo-Goldbach. Además, muchos enunciados problemáticos de la Matemática, como *el Último Teorema de Fermat, la Hipótesis del Continuo* y *el Teorema de los Cuatro Colores*, se pueden expresar como enunciados de Π_1^0; y también el enunciado de que un sistema formal particular como PA o ZFC es consistente puede ser expresado por un enunciado de esa clase (Japaridze, 1994, 89–112), (Moschovakis, 1980). Todos estos resultados, demostrables dentro de la Teoría de la Computabilidad de Turing y, por tanto, con métodos estrictamente constructivos, permiten situar los Teoremas de Incompletitud de Gödel en su auténtica dimensión: existen enunciados que no son tratables por métodos computacionales, en particular, ciertos enunciados que predican propiedades metateóricas, y también enunciados puramente matemáticos. Para Franzen (2005, 114) esto sugiere que "the argument that our inability to specify any formal system that exhausts our mathematical knowledge indicates that there is something essentially nonmechanical about our mathematical thinking". Pero las consecuencias de esta afirmación sobre la "inexhaustibilidad" de nuestro conocimiento matemático y las limitaciones de los lenguajes formales y los métodos computacionales deben distinguirse de la pléyade de teorías filosóficas sobre la "mente humana" y el "pensamiento computacional" que a partir de distintas interpretaciones sobre los teoremas de Gödel se han elaborado en los últimos 70 años, algunas incluso con pretendidas implicaciones teológicas. La tercera teoría equivalente es, como ya mencionamos más arriba, el λ-*Cálculo* desarrollado por Alonzo Church y Stephen Kleene en los años 30 (Church, 1932 y 1936), (Stephen Kleene, 1935 y 1981), (Turing, 1937b). Aunque equivalente a la Teoría Computacional de Turing y al la Teoría de los Sistemas Formales, tiene, al igual que éstos, su propio campo específico de aplicaciones entre las que cabe señalar la *programación funcional*: "The λ-calculus is, at heart, a simple notation for functions and application. The main ideas are applying a function to an argument and forming functions by abstraction. The syntax of basic λ-calculus is quite sparse, making it an elegant, focused notation for representing functions. Functions and arguments are on a par with one another. The result is an intensional theory of functions as rules of computation, contrasting with the traditional extensional approach one of function as a set of pairs of a certain kind. Despite its sparse syntax, the expressiveness and flexibility of the λ-calculus make it a cornucopia of logic and mathematics. This entry develops some of the central highlights of the field and prepares the reader for further study of the subject and its applications in philosophy, linguistics, computer science, and logic" (Alama, 2013, 1). Una exposición moderna de la teoría y sus aplicaciones en (Revesz, 1988). La historia de la teoría en (Rosser, 1984). El carácter intensional de la teoría, por oposición a la teoría de funciones clásica, lo explica muy bien Alama (2013, 1.2): "The notion of function or operation at work in the λ-calculus is an intensional one. We can view λx[M] as the description of an operation that, given x, produces M; the body M of the abstraction term is itself a description of what to do with x. Intuitively, given descriptions M and N, we cannot in general decide whether λx[M] is equal to λx[N]. The two terms might 'behave' the same (have the same value given the same arguments), but it may not be clear what resources are needed for showing the equality of the terms. By contrast, the definition of a function in set theory as a set f of ordered pairs satisfying the property that $(x,y) \in f$ and $(x,z) \in f$ implies $y = z$. The notion of equality of functions is equality of functions qua sets, which, under the standard principle of extensionality of sets, entails that two functions are equal precisely when they contain the same ordered pairs". Se puede considerar al λ-cálculo como el más pequeño lenguaje universal de programación. Consiste básicamente en una regla de transformación simple (sustitución de variables) y un esquema simple para definir funciones. El λ-cálculo es universal porque cualquier función computable puede ser expresada y evaluada a través de él. Por lo tanto, es equivalente a las máquinas de Turing. Sin embargo, el cálculo lambda no hace énfasis en el uso de reglas de transformación y no considera las máquinas reales que pueden implementarlo. Es una técnica enfocada más al software que al hardware. Vemos que, aunque las tres teorías son equivalentes, en el sentido de que determinan las mismas funciones y los problemas se pueden formular equivalentemente en cada una, tienen su propio matiz y, de hecho, su propio campo de aplicaciones autónomo. La *Tesis de Church-Turing* (o Conjetura de Church-Turing, Tesis de Church, Conjetura de Church, o Tesis de Turing, aunque existen diferencias de matiz entre todos estos nombres) sostiene que una función es *algorítmicamente computable* (es

En 1960 Solomon Feferman observó una distinción filosófica entre los dos teoremas de incompletitud de Gödel. La distinción de Feferman no era estrictamente entre los dos teoremas (que desde un punto de vista matemático eran muy claros) sino más bien sobre la forma en que habitualmente son parafraseados en el lenguaje natural. El primer teorema de Gödel establece que si el sistema S incorpora los axiomas de Dedekind-Peano, la lógica de los *Principia Mathematica* de Russell y el axioma de elección, si es ω-consistente entonces es incompleto (es decir, hay enunciados Φ en el lenguaje de S tales que, si S es ω-consistente, entonces ni Φ ni ¬Φ son S-demostrables[305] . Para Feferman aquí no había ningún problema, en contraste con el segundo teorema. El segundo teorema establecía que otro enunciado indemostrable en S era la aritmetización del enunciado metateórico de la propia consistencia de S, lo cuál se suele interpretar como que " Si S es consistente entonces no puede probar su propia consistencia". En palabras del propio Gödel: "Hence a consistency proof for the system S can be carried out only by means of modes of inference that are not formalized in the system S itself (assuming S's consistency), and the analogous results hold for other systems as well" (Gödel, 1931, 173; van Heijenoort, 596). Aquí Feferman veía un problema.

Aunque Gödel demuestra su primer teorema de incompletitud presentando un enunciado que supuestamente expresa su propia indemostrabilidad, nada en la lectura estandard del teorema indica detalles de la naturaleza o veracidad de esa "expresión". Suponiendo que el enunciado no expresara nada en absoluto, esto es, que fuera una fórmula matemática sin significado, seguiría siendo una fórmula en el lenguaje de la aritmética que sería demostrable si y sólo si fuera refutable (según su teorema). El uso de la aritmetización sería sólo un recurso utilizado por Gödel, quien de hecho utilizó un enunciado análogo al que ya conocían los antiguos griegos y que enunciaba su propia falsedad llevando a una paradoja (Epiménides, el mentiroso). Gödel fue capaz de aplicar en el contexto de la aritmética el mismo razonamiento básico utilizado para determinar por qué ese tipo de enunciado no podía ser pensado coherentemente como verdadero o falso, para demostrar que una expresión formal con la misma estructura básica no podía ser demostrada ni refutada. El hecho de que esto funcionara es una evidencia solamente de que la aritmetización permite construir enunciados con las condiciones de demostración deseadas, pero no de que esa fórmula matemática *signifique* lo mismo que el enunciado aritmetizado, aspecto que resulta irrelevante en su demostración y en la interpretación del primer teorema (Franks, 2009, 106-107). En contraste, en la anterior paráfrasis del segundo teorema, el enunciado que Gödel demuestra que es indemostrable (si S es consistente) debe expresar realmente la consistencia de S[306]. El

---

decir, una función cuyos valores son efectivamente calculables) si y sólo si es *Turing-computable* (es decir, computable por una Máquina de Turing). En términos informales, si existe un método para desarrollar efectivamente un cálculo, entonces el mismo cálculo podría ser implementado por una Máquina de Turing. Así, la Tesis de Church-Turing es un enunciado que caracteriza *la naturaleza de la computación* (en cualquiera de los tres sistemas teóricos equivalentes aquí mencionados) pero que, sin embargo, no puede ser demostrada. La premisa fundamental que subyace a la tesis es la noción de lo que significa una función "efectivamente calculable" que "is a somewhat vague intuitive one and thus, the 'thesis' remains a hypothesis" (Church, 1952, 317). La tesis, a pesar de no poderse demostrar, es casi universalmente aceptada, aunque la historia de las diversas interpretaciones del significado de "una función efectivamente calculable" desarrolladas en los últimos 50 años podría llenar un libro. Pero las máquinas reales no disponen de memoria ilimitada ni de tiempo ilimitado, de modo que dos de los problemas que tienen una importancia fundamental en la *teoría de la computación* son, primero, el establecimiento de una tipología operativa del *orden de los tiempos de computación* de un lenguaje (o de una teoría) y, segundo, el desarrollo de una teoría de *la complejidad de un algoritmo* (Teoría de la Complejidad Computacional).

305 Como ya hemos indicado, Rosser (1936) demostró el teorema sustituyendo la hipótesis de ω-consistencia por la de consistencia. Desde entonces se considera el primer teorema de Gödel en este sentido y se le suele denominar también Teorema de incompletitud de Gödel-Rosser.

306 Las paráfrasis de los teoremas de Gödel en el lenguaje natural han dado lugar a interpretaciones disparatadas y generalizaciones extravagantes que analiza y refuta detalladamente Franzén (2005). Y también a sutiles

mismo Gödel indica, como hemos visto, que cualquier prueba de la consistencia de S tendría que utilizar principios de inferencia no formalizados en S, y Feferman señala que algo más complejo está involucrado en esta conclusión. Para Feferman, la clave del segundo teorema está en la *intensionalidad* [307]:

"The application of the method [of arithmetization] can be classified as being extensional

---

errores en la extracción de sus conclusiones científicas, mayormente relacionadas con un intento de aportar una apoyatura "científica" a un "argumento" filosófico. Por ejemplo, para Kadvany (1989, 162) "the simplest observation of how Gödel's Theorem create a postmodern condition begins with the First Incompleteness Theorem. This theorem says, in effect, that a consistent axiomatic system strong enough to prove some weak theorems from elementary number theory, requiring only the operations of addition and multiplication, but not either operation separately, will be *incomplete*: there will always be mathematical sentences formulated in the syntax of the system under consideration that are neither provable not refutable in the system, and these sentences are said to be *undecidable* with respect to the system. Since an undecidable proposition and its negation are each separately consistent with the base system, one can extend the old system to two mutually incompatible new ones by adding on the undecidable sentence or its negation as a new axiom. The classical example of this procedure is the generation of non-Euclidean geometries by adding the negation of the parallel postulate. The new system so constructed also have new undecidable sentences, different from the originals, and the process of constructing new undecidable sentences and then new systems incorporating them or their negations goes on *ad infinitum*, like a branching tree which never ends". Franzén (2005, 50-57) analiza detalladamente las falacias del argumento. Ya vimos que si A es un enunciado indecidible en el sistema S, la adición de A o bien de no-A como axioma lo convierte trivialmente en decidible en el nuevo sistema S´, en el cuál aparecerá otro enunciado indecidible, obteniéndose así un proceso de extensión infinito. Lo relevante de ello era que expresaba la esencial incompletitud de todo sistema formal, pero no que los sistemas de esa expansión de árbol tuvieran alguna relevancia, ni matemática, ni de cara a sus aplicaciones ni de ningún otro tipo, por lo cuál malamente pueden servir de soporte a una interpretación filosófica *postmodernista*. Más aún, la analogía con la construcción de geometrías no ecuclidianas a partir de la euclídea (mediante la sustitución del axioma de las paralelas) está totalmente fuera de lugar, primero porque la sustitución del axioma de las paralelas no se hace por su negación sino por otro axioma (incompatible con el anterior) que no es su negación sino otro con contenido concreto y, segundo, porque esa nueva geometría tiene un significado matemático relevante y una aplicabilidad también relevante; por ejemplo, la geometría euclídea es un modelo para el comportamiento de las magnitudes medibles del espacio en una porción pequeña (aproximadamente plana) de la superficie terrestre, mientras que la geometría elíptica es un modelo para el comportamiento de las magnitudes medibles en la superficie de una esfera (por ejemplo del globo terrestre). En cambio, si en la aritmética de Peano (PA) sustituimos el axioma que establece que para todo n , $n+0=n$ (que es independiente de los demás axiomas de PA) por su negación "no es el caso de que para todo n, $n+0=n$", entonces por el teorema de completitud de Gödel para la lógica de primer orden la teoría resultante tiene un modelo, es decir, se puede especificar una estructura matemática donde existe un elemento e tal que $e+0$ no es igual a e pero que satisface los demás axiomas de PA. "Unlike the case of non- Euclidean geometry, such a mathematical structure is not of any particular interest, either mathematically or from the point of view of applications. And of course the existence of such structures –there are very many of them- in no way affects the observation that n+0 *is equal to* n for every natural number n … no 'postmodern condition' is created by this, but only an infinite tree of very uninteresting theories" (Franzén, 2005, 51-52).

[307] El tema está muy relacionado con los motivos críticos que dieron origen a las llamadas *lógicas no-standard* que han surgido y se han desarrollado en el siglo XX, principalmente en su segunda mitad. En el Capítulo-6 se exponen resumidamente las *lógicas intensionales, lógicas modales, lógicas relevantes (o lógicas de relevancia), lógicas paraconsistentes y la lógica intuicionista,* todas las cuales que se pueden englobar bajo el epígrafe de *lógicas no-standard,* y se hace un resumen de sus motivaciones, su historia y el estado actual de la investigación y de sus aplicaciones. También se discuten las críticas a algunos de sus planteamientos realizadas por algunos autores relevantes como Quine y Russell. Algunas *lógicas no-standard,* en general muy recientes, como las *lógicas multivariantes,* la *lógica difusa (fuzzy logic),* las *lógicas no monotónicas* y las *redes neuronales* no aparecen en el Capítulo-6 y se estudian separadamente en el Capítulo-7. La razón es que tienen unas características comunes que, como razonamos allí, las situarían en una nueva perspectiva que representaría los retos de la Lógica actual.

> if essentially only numerical correct definitions are needed, or intensional if the definitions must more fully express the notions involved, so that various of the general properties of these notions can be formally derived" (Feferman, 1960, 35).

Sostiene que el resultado de incompletitud del primer teorema requiere solamente una aritmetización de tipo extensional, mientras que el resultado de la indemostrabilidad de la consistencia en el segundo teorema es intensional, por lo que para demostrar que el sistema, si es consistente, no puede probar su propia consistencia, la aritmetización usada debería ser intensionalmente correcta. La tesis de Feferman es que la noción de T-demostrabilidad de las propiedades metateóricas, al igual que las nociones epistémicas de conocimiento y creencia, son inherentemente *intensionales* (Franks, 2009, 118). En este punto hay que señalar que el mismo Feferman ha realizado una crítica de las tesis de Franks aquí recogidas; en (Feferman, 2012b) desarrolla una revisión de esta obra de Franks en donde critica radicalmente los planteamientos desarrollados por Franks y especialmente en el "enfoque naturalista" que el *programa finitista*, según los planteamientos de Franks, supondría, no ahorrando ironías al respecto: "One may well ask how the author's effort to put this positive face on the patent failure of Hilbert's program can possibly succeed in showing that mathematical knowledge is autonomous, that mathematics has only to look to itself for its proper foundations. Let us see. The first two chapters of Franks' elegantly written book (whose text, unfortunately, is marred by numerous typos) are devoted to the development of Hilbert's *new science* within his overall conception of mathematics and his philosophical naturalism" (Feferman, 2012b, 1). Feferman critica acertadamente que, aunque Franks toma los *Grundlagen* como el punto de partida del pensamiento de Hilbert, no hace ninguna conexión entre sus concepciones en éste con el pensamiento expresado en el *programa finitista* y que, en muchos aspectos, como ya hemos expuesto en este mismo trabajo, parecen en efecto contradictorios: "Franks takes Hilbert's famous 1899 work on the foundations of geometry as a point of departure. But no mention is made at all in the book or its references of the evolution of Hilbert's thought on the foundations of mathematics from the famous lecture in 1900 on problems of mathematics through various papers prior to 1922, especially those of 1900, 1905 and 1918" (Feferman, 2012b, 1). Feferman también tiene razón cuando observa que en el trabajo de Franks muchos de los problemas acerca de la interpretación de lo que Hilbert entendía por *finitismo* (Hilbert nunca indicó explícitamente su opinión al respecto) son obviados: "The many problems of what Hilbert meant by finitism (and what ought to be meant by it) and exactly what kind of reasoning would be admitted under it are brushed aside as follows: (sigue una cita de la página 58 de Franks)" (Feferman, 2012b, 4) y que, y esto es más fundamental, Franks no aborda en absoluto la aparente discrepancia entre su análisis del *programa finitista* y los reiterados pronunciamientos de Hilbert acerca de la *inhaltliche Mathematik* y de los abundantes razonamientos extramatemáticos con los que intentaba justificar su *programa finitista* (y muy en particular, los relacionados con la *intuición* que hemos analizado en este trabajo): "Franks gives no attention to the *prima facie* extra-mathematical features of concrete intuition that Hilbert uses continually to promote finitism. Moreover, he makes no mention of the distinction between the *real* statements of finitary mathematics and the remaining *ideal* statements of mathematics that Hilbert emphasized beginning with his well known 1925 lecture, *On the infinite*. This distinction would seem to grant second class citizenship to most of mathematics on philosophical, rather than mathematical grounds. In emphasizing what he thinks are the "most overlooked" aspects of Hilbert's program, Franks conveniently ignores the commonly recognized aspects that may not favour the overriding theme of the autonomy of mathematical knowledge. All of this is fodder for Hilbert scholars, of which I am not one, so I will leave it at that" (Feferman, 2012b, 4-5). Y, para terminar, sugiere que Franks realiza una lectura claramente sesgada de la posición de Hilbert: "Throughout the book, Franks has quoted Hilbert selectively to support as much as possible his revisionist view of what

Hilbert’s program was really important for accomplishing” (Feferman, 2012b, 14), concluyendo en relación con la tesis principal de Franks que “the autonomy of mathematical knowledge in practice is a fact: mathematicians have no need of a book like this to convince them that philosophers have nothing to tell them about what ought and ought not to count as mathematics” (Feferman, 2012b, 15).

Siendo esto último cierto, no hace justicia al intento fundamental de Franks: explicar la posición de Hilbert y el significado último del *programa finitista* en el contexto del *debate fundacional* de los años 20 en el que sí se dio esa pretensión normativa (por ejemplo, por Brouwer) aunque no deje de ser cierto el escaso eco –e incluso desprecio, como vimos al analizar el caso de Herbrand- que obtuvo en la comunidad matemática. Además Franks justifica adecuadamente, y a mi juicio acierta, al resaltar el enfoque naturalista del *programa finitista* y su uso de una concepción determinada de la intuición. Otra cosa es que esta propuesta, en muchos aspectos, parezca contradecir la concepción general de la Matemática de Hilbert y del rol de la intuición en ella –como hemos señalado e intentado explicar en este trabajo-, y que no analice esa aparente contradicción ni extraiga las consecuencias. Éste es precisamente uno de los objetivos de este trabajo.

Pero el trabajo de Franks sostiene unas tesis, que como dice Feferman, son efectivamente *revisionistas* (y contradiciéndose Feferman a sí mismo, por tanto, no tan triviales) sobre los objetivos y las posiciones defendidas por Hilbert en el *programa finitista* que coinciden con las sostenidas en este trabajo. Una valoración de la obra de Franks totalmente discrepante con la de Feferman la podemos encontrar en Juliette Kennedy (2011): “This short but inspiring book questions the received view of Hilbert's contribution to the foundations of mathematics, and offers a newly clarified position within the philosophical attitude known as naturalism, especially of the (fiercely) anti-foundationalist persuasion (…) this is without a doubt one of the most thoughtful as well as one of the most beautifully written books on the philosophy of mathematics to have been published in recent memory”. Y aunque cuestiona el desarrollo que hace Franks de algunos puntos clave (teoría de conjuntos, “reflexiones de segundo orden”, etc), concluye que “Franks's reading of Hilbert aside, his book raises the question: is mathematics autonomous? Franks's suggestion is that mathematics is completely free-standing; answerable to aesthetic constraints, if anything, and certified, if such is needed, by applications. Franks is asking us to shift our attention away from the foundational project; not to naturalize mathematics necessarily, but to historicize it” (Kennedy, 2011, 121).

Para resumir, el segundo teorema de Gödel se entiende usualmente como una demostración de que ninguna aritmética suficientemente fuerte puede demostrar aritméticamente su propia consistencia. Esto se entiende comúnmente en el sentido en que lo explicaba Dou, es decir, como una refutación del *programa* de Hilbert. El razonamiento de fondo es que Hilbert quería probar la consistencia de la totalidad de la matemática ordinaria (y en particular, de la aritmética) de una forma no circular, y el descubrir que las técnicas requeridas para una tal demostración de consistencia rebasaban las técnicas disponibles al formalizarlas en el sistema, desmantelaba su ambición de demostrar que la circularidad era evitable. Básicamente se han sugerido tres formas de evitar esta objeción.

La primera se debe, irónicamente, a Gödel: “I wish to note expressly that [the second incompleteness theorem] does not contradict Hilbert’s formalistic viewpoint. For this viewpoint presupposes only the existence of a consistency proof in which nothing but finitary means of proof are used, and it is conceivable that there exist finitary proofs [of the consistency of S] that cannot be expressed in the formalism of P [= PM]” (Gödel, 1931, en van Heijenoort, 1967, p. 615). Hay que recalcar que para Gödel “finitism is whatever it takes to reason effectively about formal proofs as such” (Franks, 2009, 113). Por tanto, era ambicioso predecir que todo los que se necesitaría para la *Beweisetheorie* podría ser formalizable en S; S permitiría una evaluación matemática de la aritmética, pero en principio nada garantizaría que esa formalización en S fuera posible. "According to Gödel this prediction was *too* ambitious" (Franks, 2009, 113)[308], por cuanto que creía haber demostrado que lo que se necesita para demostrar la consistencia de S excede a los principios inferenciales formalizables en S. En realidad, el análisis de Gödel termina en el mismo punto que Poincaré, puesto que el teorema de Gödel se mantiene para cualquier sistema más fuerte que S también y, puesto que excluye la formalización en S de cualquier prueba de la consistencia de S, entonces se mantiene análoga conclusión para cualquier extensión T de S. Para Franks (2009, 114), "This 'way out' is unwellcome to the Hilbertian because it leaves no mathematics open to non-circular analysis".

La segunda propuesta para rescatar el programa hilbertiano de su aparente refutación consiste en la interpretación de Detlefsen (1986) de que el segundo teorema de incompletitud para una teoría T no es "estable"[309] para fundamentar la conclusión de que no existe ninguna prueba en T de la consistencia de T. De acuerdo con Detlefsen, incluso las versiones más generales del teorema de Gödel no excluyen la posibilidad de que existiera una fórmula T-demostrable que expresara la consistencia de T. El problema es cómo construirla. Detlefsen (1986, pp. 120 y ss) presenta como evidencia una fórmula que sería T-demostrable y que expresaría una especie de "consistencia local" de T, es decir, expresaría (y sería demostrable) la consistencia de "una parte" de la teoría. Para Detlefsen esto sería aceptable desde el punto de vista de Hilbert si aceptamos (como Detlefsen sostiene) que Hilbert mantenía una epistemología "instrumentalista" de la Matemática. Básicamente Detlefsen describe una forma por la que T podría demostrar una formulación no estándar de su consistencia (parcial) y arguye que esto sería aceptable por Hilbert debido a sus puntos de vista filosóficos de tipo instrumentalista. Este punto de vista acerca de la posición filosófica de Hilbert creo que queda refutado en este trabajo[310]. Pero además, y lo que es peor, la posición que Detlefsen adjudica a Hilbert iría en contra de su principal objetivo en la *Beweistheorie*, que era, como ya hemos

---

[308] Feferman (2012b, 7) señala que Gödel cambió pronto esta valoración No da ningún argumento y se remite a "Feferman, 2011: *Lieber Herr Bernays! Lieber Herr Gödel!* Gödel on finitism, constructivity, and Hilbert's program. In (M. Baaz, et al., eds.) *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. Horizons of Truth.* New York: Cambridge University, pp. 111-133". Esta referencia aparece en nuestra bibliografía como (Feferman, 2008a). Sin embargo en ese trabajo Feferman no aborda en ningún momento la ya citada afirmación de Gödel, ni aporta ninguna cita de él en la que se contradiga; se puede conjeturar que Feferman cree que ese cambio de valoración que él sostiene se puede inferir de los escritos posteriores que menciona en ese artículo en relación con el trinomio mente-máquina-pensamiento matemático, problema relacionado con las interpretaciones de la *consecuencias filosóficas* del segundo teorema de incompletitud. Este es un tema que analizaremos posteriormente en el Capítulo III. Franzén (2005, 39) discrepa totalmente de esta valoración de Feferman.

[309] Detlefsen (1986) sostiene que el segundo teorema de incompletitud de Gödel puede no tener suficiente "estabilidad" como para extraer las conclusiones que Gödel extrae de él: "The Stability Problem is, then, precisely this: to show that every set of properties sufficient to make a formula of T a fit expression of T's consistency is also sufficient to make that formula unprovable in T (if T is consistent)" (Detlefsen, 1986, 81). Franks (2009, 109) expresa con claridad el problema en otros términos: "How can one show that knowing of the unprovability in T of a mathematical formula suffices for us to know that the consistency of T in unprovable in T by any means ?". Así la distinción de Feferman adquiere pleno significado. ¿Cómo podemos asegurar que esa fórmula realmente *expresa* la consistencia de T?.

[310] Es un tema controvertido el si la concepción epistemológica de Hilbert era instrumentalista o realista. Kitcher y Mancosu coinciden con Detlefsen en asignarle a Hilbert una epistemología instrumentalista, mientras que Prawitz, Simpson y Hallett discrepan (cfr. Mancosu, 1998a). En nuestro trabajo se pretende demostrar que la epistemología de Hilbert, analizando su *programa finitista* en el contexto de toda su obra para una correcta interpretación, era claramente una epistemología realista.

explicado, plantear los problemas metamatemáticos como problemas matemáticos y, por tanto, independientes de toda posición filosófica previa, incluyendo la suya misma.

La tercera alternativa hasta hoy planteada es la de Feferman. El problema es cómo codificar una propiedad intensional (esencialmente semántica) en un lenguaje aritmético. Se han utilizado aritméticas débiles, en especial la *aritmética Q* de Robinson, pero sin grandes avances[311]. Franks (2009, 112-168) analiza y critica detalladamente las propuestas

---

[311] La *Aritmética Q* de Robinson (*Robinson-arithmetic* o *Q-aritmetic*) fue desarrollada por Tarski, Mostowski y Robinson (1953). Aunque en realidad fue presentada inicialmente por Raphael Mitchel Robinson en el Tercer Congreso de Matemáticas (Robinson, 1950). Q es esencialmente PA sin el *axioma de inducción*, pero de ello resulta una aritmética extremadamente débil. La lógica subyacente al sistema Q es la *lógica de primer orden con identidad* (denotada esta última por "="). La *aritmética de Robinson* es una aritmética muy débil que en sí carece de interés. Puede demostrar, por ejemplo, que 2+5=5+2 pero no puede demostrar de forma general la propiedad conmutativa de la suma ni tampoco por ejemplo que $Sx \neq x$ (Burgess, 2005, 56), es decir, los números en esa aritmética se alejan mucho de las propiedades elementales de los números naturales usuales. Pero su interés es enorme desde el punto de vista de las propiedades metamatemáticas demostradas en ella. Hemos hablado ya de otras aritméticas débiles, como la *aritmética de Presburger* que es completa, consistente y decidible, por lo que, de un lado presenta gran interés para la Teoría de la Computación y, de otro, parece confirmar la idea de que en una aritmética débil no tendría validez el primer teorema de incompletitud de Gödel. Sin embargo, la aritmética Q es extremadamente débil, pero es *completa* en el sentido del teorema de completitud de Gödel (puesto se se expresa en una lógica de primer orden) y es *incompleta* en el sentido de los teoremas de incompletitud de Gödel; además es *indecidible* y, más aún, cualquier extensión suya (incluyendo PA) también lo es; Q es un fragmento finitamente axiomatizable de PA que es recursivamente incompletable y esencialmente indecidible. Además, puesto que el único axioma que le separa de PA es el *axioma de inducción matemática*, puede concluirse que la razón de los teoremas de incompletitud demostrados por Gödel para PA no radican en ese axioma. La conclusión del segundo teorema de incompletitud de Gödel también es válida para Q : ninguna extensión recursivamente axiomatizada de Q y consistente puede demostrar su propia consistencia (Bezboruah &Shepherdson 1976), (Pudlák 1985), (Hájek & Pudlák 1993, 387), (Rautenberg, 2008, 184 y ss). La aritmética Q fue construida específicamente con la intención de ser la más débil posible pero suficiente para permitir demostrar el primer teorema de incompletitud de Gödel. Pero ha demostrado tener además otra cualidad por la que es muy utilizada: permite representar en ella e interpretar teorías más fuertes y ser, por tanto, utilizada en muchas demostraciones de otras teorías (Svejdar, 2007, 348), (Hájek & Pudlák, 1993). Más precisamente: Q es esencialmente PA sin el *axioma de inducción*, pero de ello resulta una aritmética extremadamente débil. La lógica subyacente al sistema Q es la *lógica de primer orden con identidad* (denotada esta última por "="). Los individuos, llamados *números naturales*, son elementos de un conjunto N que tiene un elemento distinguido (denotado "0") llamado *el cero*. Además se definen tres operaciones en N :

- Una operación monaria llamada *sucesor de* (denotada por el prefijo S)
- Dos operaciones binarias: la *suma* (denotada por +) y el *producto o multiplicación* (denotado por concatenación). Se conviene en que las variables no ligadas por el *cuantificador existencial* están implícitamente ligadas por el *cuantificador universal*. El siguiente sistema de axiomas Q1-Q7, que es el que habitualmente se utiliza hoy en día, fue presentado por Burgess (2005, 56):

1. $Sx \neq 0$
2. $(Sx = Sy) \rightarrow x = y$
3. $y = 0 \vee \exists x(Sx = y)$
4. $x + 0 = x$
5. $x + Sy = S(x + y)$
6. $x0 = 0$
7. $xSy = (xy) + x$

Estos axiomas se pueden leer informalmente así:

(1) el 0 no es el sucesor de ningún número.
(2) Si el sucesor de x es idéntico al sucesor de y, entonces x es idéntico a y. El recíproco de (2) se sigue de las propiedades de la identidad.
(3) Todo número, o bien es 0 o bien es el sucesor de algún número.
(4) y (5) constituyen la definición recursiva de la suma.
(6) y (7) constituyen la definición recursiva del producto.

desarrolladas por Feferman (1960) para una codificación aritmética que "retenga" las propiedades intensionales de un enunciado, y asimismo los trabajos de Kreisel (1958) y

---

En las aritméticas más fuertes que Q obtenidas al usar el *axioma de inducción matemática*, el axioma (3) se convierte en teorema. Si a estos 7 axiomas (eliminando el tercero) se les añade el *axioma de inducción* resulta la aritmética PA, por lo que Q es un fragmento de PA. Si la lógica subyacente no incluye la identidad, entonces es necesario añadir seis axiomas más. Esta axiomatización con 13 axiomas fue la que presentó Robinson (1950) inicialmente. El orden total estricto usual de N (denotado por "<") puede ser definido en términos de la suma con la siguiente regla (Burgess, 2005, 230) : $x < y \leftrightarrow \exists z\,(x + Sz = y)$. O bien el orden no estricto: $x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(x + z = y)$, o ambos (Buss, 1998a, 62). En caso contrario, se necesitaría añadir los siguientes cuatro axiomas:

a) $\neg(x < 0)$

b) $0 = x \lor 0 < x$

c) $x < y \leftrightarrow (Sx < y \lor Sx = y)$

d) $x < Sy \leftrightarrow (x < y \lor x = y)$.

Puesto que esta extensión es meramente definicional (introducción de un nuevo símbolo), se le sigue llamando también la *aritmética Q (o de Robinson)*. Muy recientemente se han intentado desarrollar otros sistemas alternativos con el mismo propósito, como la *Teoría TC* desarrollada inicialmente por Grzegorczyk (2005) y que tiene la singular característica de que pretende evitar la aritmetización del problema; en lugar de números utiliza *cadenas (strings)* y la *concatenación* como única operación. Svejdar (2009) considera que el germen de la teoría estaba en Quine (1946) y en Tarski. La indecidibilidad de TC se demuestra en (Grzegorczyk, 2005). Grzegorczyk y Zdanowski (2008) demostraron la indecidibilidad esencial de TC. La cuestión de si la *aritmética de Robinson* es interpretable en TC quedó planteada y abierta en (Grzegorczyk & Zdanowski, 2008). Visser (2009), Ganea (2009) y Svejdar (2009) dieron independientemente una respuesta positiva a esta cuestión, lo que implica la esencial indecibilidad de TC, pero una demostración directa de esto fue dada en (Grzegorczyk & Zdanowski, 2008). Más aún, Svejdar (2009) demuestra que TC también es interpretable en Q, por lo que ambos sistemas tienen la misma potencia deductiva. Una información más detallada sobre TC y algunas variantes en (Visser, 2009) y (Svejdar, 2009). Mojzesz Presburger (1929, "Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt", *Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves*. Warszawa: 92–101) construyó un sistema que contiene sólo +, =, y los símbolos lógicos, y que es consistente, completo y decidible. El problema de decisión para la aritmética de Presburger se ha convertido actualmente en un interesante problema en la teoría de la complejidad computacional y de la computación: si n es la longitud de un enunciado en la aritmética de Presburger, Fisher y Rabin (1974, *Proceedings of the SIAM-AMS Symposium in Applied Mathematics* Vol. 7: 27–41.) demostraron que cualquier algoritmo de decisión tiene en el peor de los casos un tiempo de procesamiento de al menos $2^{2^{cn}}$, para alguna constante c>0. Por lo tanto, el problema de decisión en la aritmética de Presburger es un ejemplo de un problema de decisión que requiere un tiempo de computación más que exponencial. Fischer y Rabin también probaron que para cualquier axiomatización razonable del sistema (definida precisamente en ese artículo) existen teoremas de longitud n que tienen una longitud de demostración doblemente exponencial. Intuitivamente esto significa que existen límites computacionales para lo que puede ser probado por un programa computacional. El trabajo de Fischer y Rabin también implica que la *Aritmética de Presburger* se puede usar para definir fórmulas que calculan correctamente cualquier algoritmo, siempre que los inputs sean menores que unas cotas relativamente grandes. Esas cotas pueden ampliarse, pero sólo usando nuevas fórmulas. Además una cota triplemente exponencial para cualquier problema de decisión en la aritmética de Presburger fue demostrada por Oppen (1978). (Derek C. Oppen: A Upper Bound on the Complexity of Presburger Arithmetic. J. Comput. Syst. Sci. 16(3): 323-332). Se demuestra que la Aritmética de Presburguer es *completa, consistente y decidible*, por lo que se ha demostrado útil para la creación de algoritmos de prueba y para demostraciones automáticas. Esta aproximación es la base de al menos 5 sistemas de prueba de corrección para programas de computador, comenzando por el *Stanford Pascal Verifier* a finales de los años 1970 y continuando con *Microsoft's Spec# system* de 2005. Más detalles en: Young, P., 1985, "Gödel theorems, exponential difficulty and undecidability of arithmetic theories: an exposition" in A. Nerode and R. Shore, *Recursion Theory, American Mathematical Society*: 503-522. El programa "Princess", basado en la Aritmética de Presburguer, accesible online verifica la validez de una fórmula y resuelve online problemas aritméticos: **http://www.philipp.ruemmer.org/princess-examples.shtml**.

Pudlák (1985 y 1996) sobre la validez y el significado de los teoremas de incompletitud de Gödel en Q. Concluye resaltando que los resultados confirman la intuición de Kreisel de que la demostración (entonces todavía hipotética) del segundo teorema de incompletitud de Gödel en Q involucraría esencialmente un carácter extensional y que el teorema carecería de un significado metamatemático: “An essential step in extracting this meaning from any formal theorem involves first verifying that the theory even can speak of its own consistency” y “On the other hand especially in arithmetics so weak as Robinson’s, the unprobavility of anything like the Feferman criteria for an adequately constructive no-counterexample formulation of provability suggest that this systems cannot speak meaningfully of their own provability at all” (Franks, 2009, 168).

Para concluir, podemos resumir la valoración de la actualidad y perspectivas del *programa finitista* de acuerdo con lo aquí expuesto en los siguientes términos. En primer lugar, el *programa finitista* de Hilbert es una propuesta antifundacional planteado en el contexto del debate fundacional y que se basa en una epistemología naturalista de base kantiana; se trataría de reducir los problemas metamatemáticos a problemas matemáticos y resolverlos *dentro* de la Matemática de acuerdo con los métodos propios usualmente aceptados por la comunidad matemática, al margen de todo prejuicio filosófico y en donde la *intuición de las formas* tendría un rol decisivo. Y en este sentido el *programa* ha sido un éxito puesto que hoy en día la Metamatemática es un subcampo específico de la Matemática e incluso los análisis que contradicen el *programa finitista* (entendido en sentido estricto) se plantean y discuten *dentro* de este subcampo de la Matemática. En segundo lugar, en el actual nivel de desarrollo de esa ciencia, puede afirmarse que se ha demostrado que la esperanza (o fe) de Hilbert de poder demostrar formalmente la consistencia de la totalidad de la Matemática usual era demasiado ambiciosa; se ha demostrado que esto no es posible, que existen unas limitaciones inherentes a la capacidad expresiva de los sistemas formales y a la lógica, al menos tal y como se han desarrollado en el siglo XX y tal y como los concebimos hoy en día. A este respecto pueden matizarse dos cosas. Por un lado, como hemos visto, la consistencia de las teorías matemáticas estaba para Hilbert fuera de toda duda; lo que puede resultar sorprendente es su confianza absoluta el la potencia de la lógica formal para demostrarlo (especialmente si tenemos en cuenta que él no era en absoluto un logicista), y es esa potencia la que ha fallado. Por otro lado, como señala Franzén (2005,33), si bien es cierto que ahora sabemos que existen enunciados de la aritmética elemental verdaderos que no pueden demostrarse en un sistema formal, lo cierto es que hasta la fecha ninguno de los enunciados aritméticos que conocemos como verdaderos han resultado ser indemostrables formalmente; y no sólo eso: “No aritmetical conjeture or problem that has occurred to mathematicians in a mathematical context, that is, outside the special field of logic and the foundations of philosophy of mathematics, has ever been proved to be undecidable in ZFC”.

El *gap* que se ha demostrado que existe entre los que Hilbert denominaba *inhaltliche Mathematik* y *formal Mathematik* debería superarse, desde lo que podríamos considerar, de acuerdo con las conclusiones de este trabajo, el punto de vista realista y naturalista de la epistemología de Hilbert, apelando como último árbitro a *inhaltliche Mathematik* y a la *práctica* aceptada usualmente por la comunidad matemática. Como dice Fránzen (2005, 34), “so a mathematician who attacks a natural mathematical problem in the optimistic spirit of Hilbert’s ‘non ignorabimus’ is not obliged to feel at all worried by the possibility of the problem being unsolvable within ZFC …extensions of the axioms and rules of reasoning have occurred and are continually being explored … so a Hilbert-style optimistic may well take the view that the impossibility of formulating any one formal system within which every arithmetical problem is solvable does not exclude the possibility of every arithmetical problem being solvable in one or another of an indefinite series of further extensions of mathematics by new axioms or rules of reasoning". Este era de hecho el punto de vista de Gödel cuando propuso (1958) "large cardinal axioms" como un medio de extender las matemáticas actuales[312]. Lo que está puesto en cuestión no es en realidad la Matemática, cuya justificación y consistencia se basa en última instancia en su *aplicabilidad*, sino la Lógica –o mejor dicho los sistemas lógicos formales- tal y como hoy la conocemos con sus limitaciones para dar una justificación y explicación racional de la Matemática entendida como *práctica*. Este es el enfoque que inspira a Hilbert al formular el *programa finitista*. Sin embargo, para Avigad (2007, 115) "there is some leeway in interpreting the term finitary, and Gödel, in the 1931 paper, grants the possibility that something we may consider 'finitary' may lie outside the kinds of mathematics Hilbert wanted to formalize. But Gödel was being charitable; today, it is hard to see how we might find something that can reasonably be called finitary but is not formalizable in, say, ZFC".

Vistos los resultados, la pregunta sería si se podría modificar la Lógica Formal de alguna manera para ampliar su potencia. En los últimos 50 años se ha producido un enorme avance en los desarrollos de las *Lógicas no-standard* que ya hemos analizado y que surgieron mayoritariamente totalmente al margen del *programa finitista* y de una actitud crítica ante la Lógica clásica o standard tal y como se consolidó a comienzos del siglo XX (y dentro de la cuál se planteó el programa de Hilbert), y también en el intento de formalizar los procedimientos de *demostración informal* (Leitgeb, 2009). Hay que resaltar que un efecto colateral de las investigaciones del *programa finitista* ha consistido en el desarrollo de técnicas con unos estándares de rigor que han permitido una formulación rigurosa de estos nuevos campos, de modo que la discusión –lo cuál era el objetivo fundamental de dicho programa- se realiza *dentro* de este campo específico de la Matemática.

Además, en los últimos 20 años se ha producido una relativización de los planteamientos fundacionales, que en el fondo está en la línea que inspiró Hilbert[313]. Los planteamientos naturalistas de la epistemología de la Matemática convergen con la difuminación de la distinción entre *Matemática pura* y *Matemática aplicada* y entre los enfoques *conceptuales* y *operacionales* que dividieron a los matemáticos en el siglo XIX, como hemos analizado y justificado en este trabajo. Por otra parte, las investigaciones desarrolladas en torno al *programa finitista*, especialmente en las interpretaciones más estrictamente constructivistas como la de Herbrand, han dado lugar a una intensa conexión con la noción de *computabilidad* desarrollada por Alan Turing y a grandes aplicaciones en el

---

[312] Su propuesta (Gödel, 1958) era extender ZFC con axiomas sobre el infinito y principios de la teoría de conjuntos más fuertes que implicaran enunciados aritméticos no demostrables en ZFC. Desde entonces se ha hecho una amplia investigación en esa dirección (Franzén, 2005, 57).

[313] Para Franks (2009, 171-172) "Philosophy of mathematics has taken a strong anti-foundationalist turn … The great irony is that Hilbert's actual philosophical views would be welcome to contemporary writers if only the were known … The fact that recent philosophy of mathematics has largely turned against the foundational programs may even be a result of Hilbert's vision". Y eso a pesar de largo malentendido de casi un siglo en el que Hilbert ha sido mayoritariamente entendido como un representante de la posición contraria, malentendido favorecido tal vez, en opinión de Franks, porque "Hilbert's own language often obscured his actual aims: His talk of a 'new grounding of mathematics' and 'absolute certainty' resonate with the general foundational tenor of his day". Y un punto importante de la investigación aún pendiente sería el comparar la concepción de Hilbert sobre la *autonomía de la Matemática*, que estaba en la base de su *programa finitista*, con las concepciones naturalistas de la *práctica matemática* que han surgido: "One project ahead of interpreters of Hilbert's program is thus to compare his conception of mathematical autonomy with the various naturalistic accounts of mathematical practice that have arisen in the wake of the development of meta-mathematics and the decline interest in foundationalist epistemology". Como una aportación a este proyecto Franks (2009, 174-199) realiza un análisis comparativo de la crítica de Wittgenstein al discurso de segundo-orden, crítica que "is a starting point for many naturalistic views in philosophy".

campo de la Computación, hasta el punto que puede decirse que hoy en día la mayoría de las investigaciones relacionadas con la Metamatemática y con las lógicas standard y no-standard se desarrollan en los departamentos de Computación de la universidades. No es menos importante señalar que todas las *lógicas no standard,* incluyendo muy principalmente a la *intuicionista*, han encontrado su campo de aplicación en la *teoría de la computación* y en la *inteligencia artificial,* lo cual produce una convergencia en la práctica con la *lógica clásica* y el *programa finitista* en un campo delimitado por lo que se puede denominar la *Matemática constructivista* que, en modo alguno se contrapone hoy en día con lo que pudiéramos llamar la *Matemática conceptual;* los resultados constructivistas y los programas de ordenador asociados son aproximaciones arbitrariamente exactas a conceptos bien definidos, y la calidad de esas mismas aproximaciones justifican la *realidad* de esos objetos conceptuales.

Desde el punto de vista estrictamente teórico, parece que las observaciones de Hilbert y Gödel acerca de las dificultades que los teoremas de Gödel planteaban al *programa finitista* indican el camino correcto de superación:

> "Me gustaría manifestar que la opinión, temporalmente extendida, de que ciertos resultados de Gödel implican que mi teoría de la demostración no es posible, ha resultado ser errónea. De hecho, esos resultados demuestran únicamente que para obtener una prueba adecuada de la consistencia uno debe utilizar el punto de vista finitario de una forma más afinada de la que se necesita cuando se trata el formalismo elemental" (Hilbert & Bernays, 1934, v), y "I wish to note expresely that [the second incompleteness theorem] does not contradict Hilbert's formalistic viewpoint. For this viewpoint presupposes only the existence of a consistency proof in which nothing but finitary means of proof are used, and it is conceivable that there exist finitary proofs [of the consistency of S] that cannot be expressed in the formalism of P [= PM]" (Gödel, 1931, en van Heijenoort, 1967, p. 615), en donde la clave está en la noción de "finitary means of proofs"[314].

Parece que una extensión adecuada del concepto finitista integrando en él el infinito potencial sería un camino con posibilidades que, de hecho, ya ha producido notables avances. En este contexto deben resaltarse los trabajos realizados en los 10 últimos años en torno al ε-cálculo (Zach, 2003) y (Niebergall & Schirn, 2001)[315]. Para resumir, podemos terminar

---

[314] "It is often said that the incompleteness theorem demolished Hilbert's program, but this was not the view of Gödel himself. Rather, it showed that the means by which acceptable consistency proofs could be carried out had to be extended. Gödel's own 'Dialectica interpretation', which he developed in the early 1940s and which was published in the journal *Dialectica* in 1958, gave one way of extending the notion of finitistic proof" (Franzén, 2005, 39).

[315] El $\varepsilon - cálculo$ es un formalismo lógico desarrollado por Hilbert y Ackermann para implementar el *programa finitista* (Avigad & Zach, 2012), (Sieg, 1988), (Avigad & Reck, 2001). Fundamentalmente se trata de la introducción de un operador en la *lógica de predicados de primer orden* que permita eliminar los cuantificadores en las demostraciones de consistencia de una teoría que se expresa en esa lógica. La idea fue planteada por Hilbert inicialmente en sus conferencia de Hamburgo (Hilbert, 1921 y 1922) y en (Hilbert, 1923), desarrollada progresivamente en distintas conferencias y cursos en el periodo 1921-1923 y planteada de forma completamente desarrollada por Ackermann en su disertación en 1924 (Ackermann, 1924), concretando tanto el llamado *epsilon-cálculo* como el *epsilon-método de sustitución.* El ε-*cálculo* es una extensión del *cálculo de predicados de primer orden* mediante la introducción de una "epsilon operación" que sustituye a los cuantificadores, desarrollando un cálculo libre de cuantificadores; es *conservativo,* en el sentido de que no añade ninguna consecuencia lógica nueva al cálculo de primer orden, pero la inexistencia de cuantificadores se supone que permitiría hacer más fácil las demostraciones de consistencia por métodos estrictamente finitistas. La introducción del operador ε sólo introduce una expresión: εxA, que denota "algún x que satisface A, si existe alguno". Con ello los cuantificadores se sustituyen por las siguientes expresiones:

Definición del cuantificador existencial: $\exists x\ A(x) \equiv A(\varepsilon x\ A)$

Definición del cuantificador universal: $\forall x\ A(x) \equiv A(\varepsilon x\ (\neg A))$

El cálculo del operador está gobernado por la regla (el "axioma transfinito" de Hilbert): $A(x) \rightarrow A(\varepsilon x\ A)$

Las únicas reglas del cálculo son:
-*modus ponens*
-regla de *sustitución*: de A(x), se concluye A(t), para todo término t.
"The usual quantifier axioms and rules can be derived from these, so the definitions above serve to embed first-order logic in the epsilon calculus. The converse is, however, not true: not every formula in the epsilon calculus is the image of an ordinary quantified formula under this embedding. Hence, the epsilon calculus is more expressive than the predicate calculus, simply because epsilon terms can be combined in more complex ways than quantifiers. It is worth noting that epsilon terms are nondeterministic, thereby representing a form of the axiom of choice. For example, in a language with constant symbols a and b, $\varepsilon x\ (x = a \lor x = b)$ is either a or b, but the calculus leaves it entirely open as to which is the case" (Avigad & Zach, 2012, 3). La primera aplicación general del epsilon-cálculo fue en los epsilon-teoremas de Hilbert, que aparecieron en el segundo volumen de la obra de Hilbert y Bernays *Grundlagen der Matemathik* (1939) y que dan las bases de la primera demostración correcta del Teorema de Herbrand (Moser & Zach, 2006): Primer epsilon-teorema: Supongamos que $\Gamma \cup \{A\}$ es un conjunto de fórmulas libre de cuantificadores. Si A es derivable de Γ en el epsilon-cálculo, entonces A es derivable de Γ en la lógica de predicados libre de cuantificadores. Segundo epsilon-teorema: Supongamos que $\Gamma \cup \{A\}$ es un conjunto de fórmulas libres del símbolo epsilon. Si A es derivable de Γ en el epsilon-cálculo, entonces A es derivable de Γ en la lógica de predicados. "The first epsilon theorem establishes that quantifiers and epsilons can always be eliminated from a proof of a quantifier-free formula from other quantifier-free formulae. This is of particular importance for Hilbert's program, since the epsilons play the role of ideal elements in mathematics. If quantifier-free formulae correspond to the "real" part of the mathematical theory, the first epsilon-theorem shows that ideal elements can be eliminated from proofs of real statements, provided the axioms are also real statements" (Avigad & Zach, 2012, 4). El interés inicial del epsilon-cálculo era la creación de una técnica para obtener demostraciones de consistencia por medios finitistas. Ya en sus trabajos de 1917-1918 Hilbert resaltó que se puede probar fácilmente la consistencia de la lógica proposicional asignando a las variables proposicionales y a las fórmulas valores de verdad 0 y 1 e interpretando las conectivas lógicas como las correspondientes operaciones aritméticas. Se trataba de desarrollar una generalización del método que permitiera demostrar la consistencia del cálculo de predicados, o del epsilon-cálculo, o de teorías más extensas de la Matemática. Ackermann (1924b) consiguió desarrollar la técnica y aplicó el epsilon-cálculo al sistema de la aritmética de segundo orden introduciendo el operador epsilon de segundo orden sobre las variables de función: $\varepsilon f\ A(f)$ y usándolo para interpretar a los cuantificadores de segundo orden, de forma análoga al cálculo de primer orden. Así surgió el *Análisis* o *aritmética de segundo orden* como una extensión de la *aritmética de primer orden*. Pero Gerhard Gentzen (1936) logró con éxito una demostración de consistencia de la aritmética de primer orden en una formulación basada en la lógica de predicados sin el símbolo epsilon; la demostración, como ya hemos comentado más arriba, usaba la inducción transfinita hasta un cardinal ε_0. Ackermann (1940) fue capaz de adaptar las ideas de Gentzen para dar una demostración de consistencia de la aritmética de primer orden usando el método epsilon de sustitución, aunque sus intentos de conseguir una prueba de consistencia para la aritmética de segundo orden no tuvieron éxito. La demostración de Ackerman se discute en Hilbert & Bernays (1970, *Grundlagen der Mathematik*, Vol. 2, 2nd, edition, Berlin: Springer, Supplement V) y (Wang, 1963). Las demostraciones de consistencia de la aritmética de Gentzen impulsaron un campo de investigación conocido como *análisis ordinal* y la investigación llega hasta nuestros días. Este campo es particularmente relevante, como ya mencionamos más arriba, en el sentido de considerar un *programa finitista extendido* cuyo objetivo es justificar las matemáticas clásicas a través de sistemas constructivos o quasi-constructivos admitiendo el uso del infinito potencial, y estos métodos han suplantado en gran parte al epsilon-cálculo en ésta que era su finalidad original. Pero el epsilon cálculo permanece como una aproximación alternativa y hay una activa investigación para extender los métodos de Hilbert-Ackermann a teorías más fuertes. Como señalan Avigad y Zach (2012, 7), "the epsilon-substitution method did not die with Hilbert's program, and that a significant amount of current research is carried out in epsilon-formalisms". Así, en los años 60 William Tait (1960 y 1965) extendió los métodos de Ackermann para obtener un análisis ordinal de extensiones de la aritmética con principios de inducción transfinita. Otros trabajos más recientes, en Grigori Mints (1994, 1996 y 2001)**,** Sergei Tupailo**, y** Wilfried Buchholz (Mints &Tupailo &Buchholz, 1996 y 1999)**.** Muy recientemente, variantes del epsilon-cálculo han sido aplicadas con éxito en lingüística y en filosofía del lenguaje, y también en las lógicas no-standard. Von Heusinger & Egli (2000, 1-13) proporcionan una lista exhaustiva de los autores y los trabajos en este reciente campo de aplicación. Véase también (Slater, 1994 y 1995 y 1998 y 2013). Recientemente también se ha desarrollado una intensa actividad investigadora en la *teoría de la demostración estructural (structural proof theory)*, una rama de la *teoría de la demostración* que se centra en el cálculo deductivo lógico y sus propiedades; tiene muchas conexiones con la teoría de la computación, sobre todo en relación con la deducción automática, la programación funcional y la verificación asistida por computador: "Here, too, Gentzen-style methods tend to

recordando las palabras de Hilbert en el famoso Congreso de Matemáticas de 1900: “we hear within us the perpetual call: There is the problem. Seek its solution. You can find it by pure reason, for in mathematics there is no *ignorabimus*”, y el comentario de Franzén (2005, 16) al respecto: “Gödel’s first incompleteness theorem by no means *refutes* this optimistic view of Hilbert’s. What it does is establish that Hilbert’s optimism cannot be justified by exhibiting any single formal system within which all mathematical problems are solvable, even if we restrict ourselves to arithmetical problems”. Pero “unprovable” en el contexto de estos teoremas no significa que “cannot be proved” en términos absolutos, sino sólo que es “unprovable in some particular formal system” (Franzén, 2005, 24).

5.2- *Constructivismo* en Lógica y Matemática: Lógica y Matemática *intuicionista*, el *programa finitista* y el *constructivismo*.

Hemos resaltado ya la convergencia práctica que se ha producido en los últimos 60 años en torno a una *matemática constructivista* y una *teoría de la computación* (y en un contexto más amplio, con la *inteligencia artificial*) entre los desarrollos del *programa finitista*, las *lógicas no standard* y los modelos matemáticos que seguían a la escuela *operacional* de Kronecker y Schwarz (y que en Matemáticas se pueden concretar en los últimos 100 años en los importantes avances que han creado como una disciplina propia el Cálculo Numérico), así como con el *constructivismo* de la escuela rusa de Kolmogorov, Markov y Smirnov. Todo ello es una demostración práctica del dislate que supuso la *crisis fundacional* de los años 20. En ese contexto merece la pena valorar el significado de la *lógica intuicionista* y de las propuestas de Brouwer que, a la postre, despojadas de su carga metafísica han convergido con esa *matemática constructivista*, y también analizar el significado, características y perspectivas de esta última, así como sus relaciones con la *Matemática conceptual* (algunos constructivistas la denominan *Matemática idealista*) que modernamente podemos considerar ligada a Dedekind, Cantor y Zermelo. Esta clarificación será también esencial para dilucidar la relación de la Matemática moderna con la Matemática anterior al siglo XIX (que podemos considerar identificada con la de Euclides) y con la filosofía de la Matemática de Kant.

La *lógica intuicionista* se puede describir de forma resumida como la *lógica clásica* sin la ley del Tercio Excluso o *Tertium Non Datur* (LEM – *Law of Excluded Middle* o PEM-*Principle of Excluded Middle*): $(A \vee \neg A)$, pero con la Ley de Contradicción: $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ (Moschovakis, 2010). En muchos textos se presenta *el intuicionismo* como una posición surgida en el debate *fundacional* de los años 20. Pero en realidad surge de una filosofía de la Matemática claramente expuesta por Brouwer muchos años antes aunque en el debate *fundacional* planteó unas propuestas que tuvieron un protagonismo indiscutible, especialmente en su confrontación con el *programa finitista* de Hilbert. Las ideas de Brouwer al respecto estaban ya claramente enunciadas en su pequeño opúsculo *Leven, Kunst en Mystik* (Brouwer, 1905 (1996)) y desarrolladas casi completamente en su tesis doctoral *On the*

---

dominate. But the epsilon calculus can also provide valuable insights” (Avigad & Zach 2012, 12). Cfr. (Troelstra-Schwichtenberg, 2000). En esta dirección cabe señalar el uso del epsilon-cálculo en el diseño y programación de los sistemas *HOL* e *Isabelle*. Estos son programas para la *demostración automática* y para la *demostración asistida por ordenador.* Están accesibles online:

HOL: **http://www.cl.cam.ac.uk/research/hvg/HOL/**

Isabelle: **http://www.cl.cam.ac.uk/research/hvg/Isabelle/**

Además, en el campo matemático ajeno a la *teoría de la demostración* y también ajeno a la *teoría de la computación,* es reseñable que la obra de Bourbaki “Theorie des ensembles” (1958) utilizaba el operador epsilon (aunque con otra notación). Más detalles y amplia bibliografía en: (Avigad & Zach 2012), (Zach, 2003 y 2006).

Foundations of Mathematics (Brouwer, 1907). Brouwer (1908) sostenía que la LEM había sido inicialmente abstraída de situaciones finitas y posteriormente extendida sin justificación a enunciados acerca de colecciones infinitas de objetos (Véase el apartado 6.5.5 del Capítulo-6 titulado "Lógica intuicionista"). La denegación por Brouwer de la *Ley del Tercio Excluso* se fundamenta en realidad, como criticaba Hilbert, en consideraciones puramente filosóficas acerca de los que *debería ser* la Matemática en función de sus postulados filosóficos y en una consideración muy restrictiva de la *demostración*. Hay que mencionar el especial tratamiento que hace Brouwer de la *negación*[316]. Brouwer ya en (1905 (1996), 1907 y 1908) planteó detalladamente su filosofía de la Matemática, de la que extraía conclusiones con una *pretensión normativa* para la Matemática práctica: la Matemática sería una actividad puramente mental, de forma que sus objetos serían puras construcciones mentales, o mejor, se identificarían con un acto mental (Brouwer 1907, 99n.1), (Brouwer 1975, 61, n.1), y que no tienen entidad propia ni pueden ser expresadas precisamente por ningún lenguaje, y las demostraciones sólo pueden ser reglas operacionales que permitan *construir* el objeto predicado y constatar si efectivamente ese objeto verifica la propiedad enunciada.

Para Moschovakis (2010), "philosophically, intuitionism differs from logicism by treating logic as a part of mathematics rather than as the foundation of mathematics; from finitism by allowing (constructive) reasoning about infinite collections; and from platonism by viewing mathematical objects as mental constructs with no independent ideal existence". El punto de partida de esas construcciones mentales sería la pura intuición del flujo del tiempo, que no se basaría en ninguna impresión sensorial y que simplemente nos permitiría percibir internamente la forma de "one thing and again a thing, and a continuum in between". Brouwer denomina esta "forma", que enlazaría *lo discreto* y *lo continuo* pero que no permitiría reducir lo uno a lo otro, "the empty two-ity" (Brouwer 1907, 8), (Brouwer 1975, 17). Como señala Van Atten (2012, 2.1), "as time flows on, an empty two-ity can be taken as one part of a new two-ity, and so on. The development of intuitionistic mathematics consists in the exploration which specific constructions the empty two-ity and its selfunfolding or iteration allows and which not". Y en palabras de Brouwer : "the only possible foundation of mathematics must be sought in this construction under the obligation carefully to watch which constructions intuition allows and which not" (Brouwer 1907, 77), (Brouwer 1975, 52). Brouwer considera la intuición del tiempo como una propiedad de una consciencia prelingüística, por lo que la Matemática sería una actividad mental independiente del lenguaje; el uso del lenguaje puede describir nuestras actividades matemáticas, pero ellas mismas no dependen de elementos lingüísticos y, por tanto, nada que sea verdadero acerca de

---

[316] Desde el punto de vista intuicionista, decir que una proposición A es verdadera significa fundamentalmente afirmar que existe una construcción que se describe correctamente por el enunciado A; la proposición A adquiere el valor de verdad por la construcción. De acuerdo con Brouwer, decir que una proposición A es falsa significa que es imposible realizar una tal construcción, y se denota $\neg A$; tal imposibilidad se puede reconocer, o bien inmediatamente (por ejemplo, la imposibilidad de identificar "1 unidad" con "2 unidades") en donde se observa inmediatamente que la construcción pretendida está bloqueada (Brouwer 1907, 127), (Brouwer 1975, 73); o bien de forma mediata demostrando que una proposición A es contradictoria reduciéndola a un enunciado falso conocido (por ejemplo, mostrando que $A \rightarrow 1=2$) (Brouwer 1954, 3). Eso equivale a definir $\neg A$ de otra manera: $\neg A := A \rightarrow 1=2$. En ambos casos se trata de una "negación como imposibilidad", y se conoce como "strong negation". Sin embargo Brouwer utiliza también una noción débil de la negación, conocida como "week negation", en donde no se excluye que algún día se pueda encontrar una demostración de A o $\neg A$, y aquí el afirmar la *negación débil* de A no significa asignar un valor "verdadero" o "falso" ni a A ni a $\neg A$. Por ello algunos autores (Barzin & Errera, 1972) han sostenido que este tratamiento de la *negación débil* por Brouwer equivale de hecho al uso de una *lógica trivalente.* Pero la realidad es que Brouwer en ningún momento desarrolla una tal lógica, quedando dichos enunciados en una especie de limbo de difícil clasificación; este tipo de enunciados desempeñan un papel fundamental, como ya hemos mencionado, en sus "weak counterexamples" (van Atten, 2012, 2.3 y 2.4).

una actividad matemática constructiva puede justificar su verdad en un hecho lingüístico. Objetos lingüísticos tales como los axiomas pueden ser útiles para describir una construcción mental, pero no justifican su existencia. Por ejemplo, Brouwer rechaza ciertos axiomas de la matemática clásica como el axioma de completitud de los números reales (si todo conjunto no vacío de números reales tiene una cota superior, entonces existe un mínimo de todas las cotas superiores *–el supremo*) aduciendo que no existe un método general que nos permita construir mentalmente ese mínimo cuya existencia postula el axioma. Para Brouwer (1975, 451), "formal language accompanies mathematics as the weather-map accompanies the atmospheric processes". Y en este contexto la Lógica estudia y sistematiza ciertos modelos de la expresión lingüística de nuestras actividades de construcción matemática, muy especialmente, los patrones que caracterizan a la inferencia válida; pero lo que se preservaría en una inferencia de una premisas a la conclusión no sería, como en la lógica clásica, un tipo de posible evidencia de verdad transcendente, sino la constructibilidad de los objetos predicados. Esta posición estaba ya explícita en su disertación doctoral (Brouwer 1907, 125–132, 159–160), (Brouwer 1975, 72–75, 88), aunque se cita con frecuencia un pasaje memorable posterior:

> "Is it allowed, in purely mathematical constructions and transformations, to neglect for some time the idea of the mathematical system underconstruction and to operate in the corresponding linguistic structure, following the principles of syllogism, of contradiction and of tertium exclusum, and can we then have confidence that each part of the argument can be justified by recalling to the mind the corresponding mathematical construction? (Brouwer 1908, 4), (Brouwer 1975, 109).

A continuación argumenta a favor de una respuesta afirmativa para el silogismo y el principio de no contradicción, y para una respuesta negativa para el PEM. La Lógica sería descriptiva, pero no creativa, y con el uso de la Lógica uno nunca podría obtener verdades que no se pudieran obtener por una construcción matemática directa (Brouwer, 1948). Opina que la Lógica se puede codificar en un sistema lingüístico y que el sistema resultante puede ser estudiado matemáticamente con independencia de las actividades matemáticas de las que inicialmente era una abstracción, y que iterando el proceso se llega a una jerarquía de actividades matemáticas. Brouwer describe esa jerarquía al final de su disertación (Brouwer 1907, 173ff) y hace la distinción entre "mathematics" y "mathematics of the second order" (Brouwer 1907, 99n.1, 173), (Brouwer 1975, 61n.1, 94), donde esta última sería el estudio del lenguaje de la primera haciendo abstracción de su significado original, anticipando de esta forma la distinción de Hilbert entre "matemática" y "metamatemática" (Hilbert, 1923, 153). Posteriormente Brouwer reclamaría su prioridad en esa distinción añadiendo una nota (Brouwer 1927, 375), (Mancosu 1998, 44n.1) en la que indicaba que se la había explicado a Hilbert en sus conversaciones de 1909 (Van Atten, 2012, 2.1 y 2.2). Brower fue afinando con el tiempo sus propuestas filosóficas y en sus llamados *Cambridge Lectures*, del periodo 1946-1951, las cuales él mismo recomendaba como una introducción al intuicionismo (Brouwer, 1981), y distingue dos "acts of intuitionism" (citado en Iemhoff, 2012, 2.1):

> "The first act of intuitionism is: Completely separating mathematics from mathematical language and hence from the phenomena of language described by theoretical logic, recognizing that intuitionistic mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time. This perception of a move of time may be described as the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the twoity thus born is divested of all quality, it passes into the empty form of the common substratum of all twoities. And it is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics" (Brouwer, 1981, 4-5).
>
> "The second act of intuitionism is: Admitting two ways of creating new mathematical entities: firstly in the shape of more or less freely proceeding infinite sequences of mathematical entities previously acquired …; secondly in the shape of mathematical species, i.e. properties

> supposable for mathematical entities previously acquired, satisfying the condition that if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be "equal" to it ….” (Brouwer 1981, 8).

Para Iemhoff, “the two acts of intuitionism form the basis of Brouwer's philosophy; from these two acts alone Brouwer creates the beautiful realm of intuitionistic mathematics” que, además, “according to Brouwer mathematics is a languageless creation of the mind. Time is the only a priori notion, in the Kantian sense” (Iemhoff, 2012, 2.1). Esta referencia al sentido kantiano de la intuición temporal en la que se basa su sistema es un lugar común en muchos manuales y, de hecho, el mismo Brouwer la reivindica expresamente[317]. Esto, de acuerdo con nuestra interpretación de Kant, no se sostiene en absoluto, pudiéndose calificar la filosofía de Brouwer de un solipsismo extremo[318]. Así, la *filosofía de la Matemática* de Brouwer, que está en la base de su *programa fundacional,* se basa expresamente en una lectura de Kant que, de acuerdo con nuestra interpretación, es difícilmente sostenible. La noción de la *intuición temporal* en la que basa su sistema no es en absoluto kantiana por varias razones: Primero, para él es una especie de propiedad sicológica de la mente –o en todo caso se sustenta en una filosofía de la mente sin base empírica- que permite una “actividad” y que es independiente del lenguaje y de los sentidos; para Kant toda intuición, y también la temporal, está ligada a una actividad perceptiva y directamente relacionada con la sensibilidad (como para Hilbert). Segundo, para Kant (como para Hilbert), la intuición temporal no es la base de la aritmética, sino del movimiento y la mecánica, mientras que para Brouwer sería la base de la aritmética. Tercero, para Kant, la intuición temporal es inseparable de la espacial en su teoría del conocimiento, como *formas puras de la sensibilidad*; Brouwer, en cambio, rechaza todo tipo de intuición espacial y, desde luego, su teoría del conocimiento esta desligada de todo tipo de sensibilidad. Por lo tanto, no existe de hecho la más mínima conexión entre ambas teorías del conocimiento, salvo el nombre de “intuición temporal” que designa cosas distintas y con funciones distintas. Para Hilbert, que en el fondo era como hemos visto un matemático clásico, resultaba de todo punto inaceptable proscribir esquemas de razonamiento (como el PEM) o lo que era peor, teorías matemáticas (como el continuo de los números reales) que estaban firmemente asentadas por su uso, y todavía más, por el éxito de sus aplicaciones, sólo en base a unos prejuicios filosóficos. Además, esa era una actitud que él consideraba no científica y que atentaba contra el núcleo de su obra según nuestra investigación: la autonomía de la Matemática sobre una fundamentación naturalista de base kantiana.

Y aunque era evidente, como indicaba acertadamente Feferman en su crítica a la obra de Franks que antes hemos mencionado, que existía una fundamentación filosófica en el pensamiento de Hilbert (lo hemos demostrado en este trabajo), para Hilbert esto no podía suponer en ningún momento una restricción fuera del sentido común para los métodos matemáticos. Y sin embargo, como muchos otros matemáticos, compartía también algunas de las conclusiones críticas de los trabajos de Brouwer y que, como vimos al comienzo del

---

[317] Posiblemente debido a la gran repercusión de los planteamientos de Brouwer, ésta es la interpretación de la conexión de Kant con el constructivismo que aparece en la mayoría de los manuales del siglo XX y en los comentaristas, es decir, asumiendo la reivindicación de Brouwer como cierta y sin un análisis de la posición de Kant. Por ejemplo, para W. Röd (1996, 2. Band: p. 151): “Es verdient angemerkt zu werden, daß Kant mit der Auffassung der Gegenstände der Arithmetik und der Geometrie als konstruierter Gebilde eine Richtung einschlug, die von der intuitionistischen Mathematik des 20. Jahrhunderts fortgesetzt wurde”. Y para confirmarlo añade esta nota al pie: “Vgl. Herbert Meschowski: *Wandlung des mathematischen Denkens,* Braunschweig 1969, kap. VIII, 53-61: ‘Der Intuitionismus’, wo die Auffassung von Vertretern dieser Richtung (L. E. Brouwer, H. Weyl, A. Heyting u. a.) charakterisiert wird”. La posición de Kant no tiene nada que ver con esta interpretación.

[318] Este carácter solipsista de la filosofía de Brouwer ha sido observado por muchos autores. Por ejemplo (Troelstra, 2011, 8).

capítulo, ya habían sido formuladas con anterioridad en gran parte por matemáticos como Borel o Lebesgue. De hecho, el interés despertado por las propuestas de Brouwer fue enorme y las investigaciones llegan a nuestros días, participando en ellas muchos matemáticos que no compartían en absoluto la filosofía de Brouwer; por ejemplo, una de las aportaciones más destacadas es la de Kurt Gödel, quien siempre sostuvo un platonismo claro.

Hay varias cosas que llaman la atención en el *intuicionismo* planteado por Brouwer y en sus consecuencia y evolución. En primer lugar, Brouwer fue inicialmente un matemático destacado que realizó importantes aportaciones a la Matemática clásica (en el periodo 1909-1913) y por las que se le considera el padre de la Topología moderna, pero a pesar de ello nunca se planteó una formalización de la Lógica y de la Matemática bajo los términos por él propuestos, aún cuando era evidente que sólo una tal formalización permitiría una comparación con la Lógica y Matemática clásicas; esa tarea la emprendió con éxito su discípulo Heyting y, simultánea e independientemente Gödel y Gentzen, que no pueden considerarse intuicionistas, junto con algunos *constructivistas* rusos (Glivenko y Kolmogorov). La razón tal vez resida en su convencimiento filosófico de la inutilidad del “formalismo”, término con el que designaba al *programa finitista* de Hilbert, y que se expresa muy bien en la siguiente famosa cita:

> “We need by no means despair of reaching this goal [of a consistency proof for formalized mathematics], but nothing of mathematical value will thus be gained: an incorrect theory, even if it cannot be inhibited by any contradiction that would refute it, is none the less incorrect, just as a criminal policy is none the less criminal even if it cannot be inhibited by any court that would curb it” (Brouwer 1924N, 3),(van Heijenoort 1967, 336).

Se desarrollaron sistemas formales para el Cálculo Proposicional, para el Cálculo de Predicados y para la Aritmética intuicionistas por Heyting (1930), Gentzen (1934) y Kleene (1952). Gödel (1933) demostró la equiconsistencia de las teorías intuicionistas y clásicas. Kripke (1965b) dio una semántica con respecto a la cuál la lógica intuicionista sería correcta y completa y que coincide con una subclase en el sistema modal S4[319]. Según ello, la lógica intuicionista se puede entender como una subclase de la lógica clásica, aunque se demuestra que tiene el mismo rigor de consistencia que la lógica clásica[320]. Pero Gödel (1933) observa que la lógica y la aritmética intuicionistas serían en cierto sentido más *ricas* que las clásicas por cuanto que esa distingue como distintas fórmulas que son clásicamente equivalentes pero que, al mismo tiempo, tendría el mismo rigor de consistencia de la lógica clásica. Sin embargo, no hay una equivalencia entre la Aritmética desarrollada por Heyting (1956) y el Análisis de Bishop (1967) y los correspondientes clásicos. Además, en los desarrollos

---

[319] Una translación del cálculo proposicional intuicionista en una lógica modal (que anticipaba S4) fue realizada por I. E. Orlov antes que por Gödel, y antes también del intento fallido de Becker (citado por Gödel). Probablemente ni Gödel ni Becker tuvieron noticia de ello, pues como hemos visto en una nota anterior las obras de Orlov no fueron accesibles en Occidente hasta muy recientemente (Van Atten, 2012), (Došen, 1990 (1992)), (Bazhanov, 2003).

[320] Más precisamente, Glivenko (1929) demostró para el Cálculo Proposicional que “(Teorema de Glivenko): Una fórmula proposicional arbitraria A es clásicamente demostrable si y sólo si ¬¬A es intuicionistamente demostrable”. El teorema no se puede generalizar al Cálculo de Predicados, pero existen numerosos resultados sobre las interrelaciones (Moschovakis, 2010, 4.1). La formalización de la lógica intuicionista en un *sistema de tipo Hilbert* se desarrolla guiada por la llamada B-H-K (Brouwer-Heyting-Kolmogorov)-interpretación de la noción de *verdad* intuicionista . Aquí la independencia de los operadores lógicos &, ∨, →, ¬, ∀, ∃ contrasta con la situación en la lógica clásica donde, por ejemplo, (A ∨ B) es equivalente a ¬(¬A & ¬B), y ∃xA(x) es equivalente a ¬∀x¬A(x). Desde el llamado *punto de vista B-H-K* un enunciado de la forma (A ∨ B) afirma que, o bien una demostración A o bien una demostración de B ha sido construida; en tanto que ¬(¬A & ¬B) afirma que ha sido construido un algoritmo que efectivamente convierte cualquier par de construcciones que demuestren ¬A y ¬B respectivamente, en la demostración de una contradicción conocida.

posteriores a los fundadores se produce una mezcla con las escuelas de Kolmogorov, Markov, Smirnov, Chebichev y otros *constructivistas* rusos que no sostenían las posiciones filosóficas intuicionistas e incluso con defensores del *programa finitista* como Herbrand. Una exposición detallada de la *lógica y matemática intuicionista*, así como de su evolución y desarrollo actual en: (Moschovakis, 2010), (van Atten, 2011a, 2011b y 2011c), (van Atten, 2012), (van Dalen, 1981, 1999 y 2000), (Troelstra & Schwichtenberg, 2000), (Dummett, 1977 (2000)), (Troelstra & van Dalen, 1988), (van Stigt, 1990).

El éxito de la *matemática intuicionista* en la *teoría de la computación* se debe a su enfoque *constructivista*, enfoque que comparte con otras corrientes (incluyendo el *programa finitista*, especialmente en sus interpretaciones más estrictamente constructivistas como la de Herbrand) y podría desligarse totalmente de los postulados filosóficos de Brouwer. Como señala van Atten (2012), la exposición standard hoy en día de la lógica intuicionista se expresa en términos de la llamada *interpretación B-H-K* (o *Proof Interpretation,* según la terminología de Heiting)[321], presentada por Troelstra y Van Dalen (1988) en *Constructivism in mathematics*. El problema es que nociones fundamentales involucradas en esa interpretación tales como "construction", "presenting", "transformation" y "proof" pueden ser entendidas de formas muy diferentes, como de hecho lo han sido. Además, "there have been different ideas as to how one may justify that concrete instances of clauses H3 and H4 indeed work for any (possibly hypothetical) proof of the antecedent. Logical principles that are valid on one understanding of these notions may not be valid on another" (van Atten, 2012, 1.1). También es possible interpretar dichas especificaciones de una forma que validara los principios de la lógica clásica (Troelstra & van Dalen 1988, 9, 32–33). Para Van Atten, "in the context of the foundational programs of intuitionism and constructivism, all notions are of course understood to be effective; but even then there is room for differences of understanding. Such differences can have mathematical consequences. On some understandings, intuitionistic logic turns out formally to be a subsystem of classical logic (namely, classical logic without the Principle of the Excluded Middle). But that is not the understanding of intuitionistic mathematicians, who, in analysis, have constructed intuitionistically valid instances of the schema $\neg\forall x(Px \lor \neg Px)$, while classically there can be none" (van Atten, 2012, 1.1). Por todo ello, es dudoso que la *lógica intuicionista* tenga una entidad propia con independencia de los *prejuicios* filosóficos del intuicionismo de Brouwer, y su relevancia se debe fundamentalmente a que desembocó en una forma de *constructivismo* en Matemáticas que, junto a otras modalidades del mismo, tienen un rol fundamental en la moderna *teoría de la computación* y en los desarrollos de *inteligencia artificial*. Para van Atten (2012, 3.6) "Brouwer's logic has played a role in the *Grundlagenstreit* (the Foundational Debate) only to the extent that this logic could be seen as a fragment of classical logic. Constructive logic in that sense was a success, and it became fundamental to Hilbert's Program as well".

Y esta es la segunda característica sorprendente de la evolución del *intuicionismo* de Brouwer: por un lado, sus propuestas filosóficas se han tornado con el tiempo irrelevantes, especialmente a partir de los años 50 y a medida que se fue extendiendo un estado de opinión en el sentido de que el *debate fundacional* fue un debate sin sentido, mal planteado y superado[322]; pero de otro lado, se ha producido una convergencia práctica con las diversas

---

[321] Algunos (Bridge, 2013, 4) consideran que la *interpretación B-H-K* se puede hacer más precisa usando la noción de Kleene de *realizabilidad (realizability)* (Dummett 1977 [2000], 222–234); (Beeson 1985, Chapter VII).

[322] A partir de 1928 Brouwer concibe una serie de *strong counterexamples* para enunciados de la matemática clásica con los que pretendía demostrar que esos enunciados eran contradictorios. Y a partir de 1948 publica también otros *counterexamples* que se basaban en lo que él denominaba "creating-subject methods", aunque

corrientes de la Matemática *constructivista* (incluyendo aquí a algunos seguidores del *programa finitista* como Herbrand o Skolem), dando lugar a nuevas disciplinas ya autónomas como la *teoría de la computación* y la *inteligencia artificial* que plantean nuevos enfoques y una convergencia complementaria con la Matemática clásica, y esto sería lo realmente relevante.

5.3- El *constructivismo* en la Matemática.

La Matemática *constructivista* constituye una amplia familia de escuelas que se podrían caracterizar por una mínima cautela metodológica común: se interpreta la expresión "existe" en el sentido de que "se puede construir" (o bien "se puede dar un procedimiento que permite construir") el objeto del que se predica la existencia, o bien la naturaleza de los objetos con los que trata exige un método algorítmico de resolución (aunque, como veremos, existen disciplinas que cuando es necesario utilizan los resultados del Análisis clásico). Eso en Matemáticas suele significar que se puedan calcular efectivamente las relaciones que definen el objeto. Por ejemplo, si se predica que "existe" una determinada función, eso significaría que pueden calcularse efectivamente mediante un procedimiento bien descrito "todos" los valores de su dominio. Pero desde un punto de vista lógico el "constructivismo" implicaría mayores restricciones. Según Bridges (2013, 1), "in order to work constructively, we need to reinterpret not only the existential quantifier but all the logical connectives and quantifiers as instructions on how to construct a proof of the statement involving these logical expressions". Esa tarea la abordó como hemos visto el *intuicionismo* de Brouwer, aunque en sus desarrollos lógicos –y al margen de sus postulados filosóficos- participaron muchos autores que no podrían ser inscritos en esa escuela (como, por ejemplo, Gödel o Kolmogorov).

Pero la Matemática *constructivista* no surgió de esos trabajos lógicos, aunque algunos constructivistas luego participaran en ellos, sino que hunde sus raíces a lo largo de toda la historia de la Matemática hasta llegar a la Antigua Grecia (el método de *exhaución* de

---

en (Brouwer, 1948b) afirma que llevaba usando ese método en sus clases desde 1927. La propiedad característica del método consistía en que hacía referencia explícita a un "sujeto" abstracto que desarrollaría las construcciones matemáticas en una estructura temporal, y ponía en relación esa estructura con la noción intuicionista de *verdad* (Van Atten 2012, 3.3). Cfr. Brouwer 1949a, Brouwer 1949b, Heyting 1956 (pp. 117–120); Myhill 1968; Dummett 1977 (2000) (pp. 244–245). Para Van Atten (2012, 3.3) "we do note here one particular aspect of this method. It seems to introduce a further notion of negation, by accepting that, if it is known that the creating subject will never prove A, then A is false. But this is actually no different from the notion of negation as impossibility. Heuristically, this can be seen as follows: given the freedom the creating subject has to construct whatever it can, the only way to show that there can be no moment at which the subject demonstrates A must be to show that a demonstration of A itself is impossible. An actual justification of the principle is this: If the creating subject demonstrates a proposition A, it does so at a particular moment n; so, by contraposition, if it is contradictory that there exists a moment n at which the subject demonstrates A, then A is contradictory". Pero la importancia de este método radica en dos hechos: El primero viene expuesto perfectamente por Van Atten (2012, 3.6) : "Brouwer did not announce the existence of strong counterexamples in a loud or polemical way; and when in 1954 he finally did publish (in English) a paper with a polemical title — *An example of contradictority in classical theory of functions* — , the Foundational Debate was, in the social sense, long over. Intuitionistic logic and mathematics had been widely accepted to the extent that they could be seen as the constructive part of classical mathematics, while the typically intuitionistic innovations were ignored. It is not surprising, then, that the presentation of the strong counterexamples in the 1950s did not at all lead to a reopening of the debate". Y el segundo consiste en el intento realizado por Heyting de construir una conexión a partir de este "creating-subject" entre el intuicionismo de Brouwer y la fenomenología de Husserl. Brouwer ya se había entrevistado y conversado con Husserl en Abril de 1928, cuando este último asistió a sus conferencias en Amsterdam. Un análisis del "creating-subject" como un sujeto transcendental en el sentido de Husserl, en (Van Atten, 2012), y un estudio de la conexión en un sentido más amplio en (Tieszen, 1984, 1989 y 2005) y (Franchella, 2007).

Arquímedes anteriormente analizado sería un método típicamente constructivista). La característica común en todos sus trabajos es que raramente se utilizan demostraciones por reducción al absurdo (salvo en situaciones finitas) y también que raramente se utilizan las propiedades de los conjuntos infinitos no numerables y, en algunos, que tampoco utilizan la inducción completa, aunque todos se realizan dentro de lo que podemos llamar la Matemática clásica y también utilizando la Lógica clásica (sin mayores matizaciones al respecto), incluyendo la mayoría la aceptación en principio de la Ley del Tercio Excluso y del uso de la implicación material.

5.3.1- La *escuela operacional*.

La primera escuela que se puede citar es la de Kronecker y Schwarz, que podríamos calificar de *operacional*, y que se opuso frontalmente a los desarrollos de Cantor y Zermelo ya antes del *debate fundacional*, como hemos expuesto en la primera parte de este capítulo. Siguiendo a Bridges (2013, 3) se pueden considerar varias clases más de *constructivismo* en Matemáticas en los últimos 125 años (además de la aquí citada, que Bridges no menciona como tal, aunque los trabajos matemáticos de Kronecker y Schwarz, más allá de las críticas a Cantor en las que participaron muchos otros matemáticos, eran claramente *constructivistas*).

5.3.2- La *Matemática intuicionista*.

El significado concreto de los que esto significaba es bastante confuso en Brouwer y, en todo caso, no se puede separar fácilmente de sus postulados lógicos y filosóficos. Otros autores que tuvieron un papel relevante en sus desarrollos lo expresan con mayor claridad, por ejemplo Errett Bishop (1967, 2): "the primary concern of mathematics is number, and this means the positive integers. We feel about number the way Kant felt about space. The positive integers and their arithmetic are presupposed by the very nature of our intelligence and, we are tempted to believe, by the very nature of intelligence in general. The development of the positive integers from the primitive concept of the unit, the concept of adjoining a unit, and the process of mathematical induction carries complete conviction. In the words of Kronecker, the positive integers were created by God".

Pero esta definición la hubiera suscrito también Kronecker, a quien precisamente se le atribuye esa afirmación acerca de los números enteros. ¿Dónde está la diferencia? La diferencia está en las restricciones lógicas que imponían a sus construcciones; sin embargo esto creaba un sistema de conceptos distintos y por ello no se puede identificar el significado de "función continua", por ejemplo, en la Matemática intuicionista y en la clásica, por lo que resultados que parecían contradecir a la Matemática clásica, no eran tales. Como señala Bridges al analizar los teoremas intuicionistas llamados *principle of continuous choice* (2013, 3.1), "each of these statements appears to contradict known classical theorems. However, the comparison with classical mathematics should not be made superficially: in order to understand that there is no real contradiction here, we must appreciate that the meaning of such terms as "function" and even "real number" in intuitionistic mathematics is quite different from that in the classical setting". Y al analizar el *teorema de continuidad uniforme* subraya que "the reader is warned once again to interpret this carefully within Brouwer's intuitionistic framework, and not to jump to the erroneous conclusion that intuitionism contradicts classical mathematics".

Y esto mismo sucede con muchos otros resultados, por lo que se puede decir que esa corriente no supuso ningún avance ni cambio significativo para la Matemática, en tanto que sus resultados, aunque diferentes y con diferentes conceptos, no aportaban ningún avance. Como señala Bridges (2013, 11), "unfortunately —and perhaps inevitably, in the face of opposition from mathematicians of such stature as Hilbert— Brouwer's intuitionist school of mathematics and philosophy became more and more involved in what, at least to classical mathematicians, appeared to be quasi-mystical speculation about the nature of constructive thought, to the detriment of the practice of constructive mathematics itself", y eso a pesar del enorme interés que despertaron sus propuestas en círculos que se salían de su posición filosófica (Gödel, Glivenko, Kolmogorov, Weyl, Bishop). Los trabajos (matemáticos) reseñables de esta escuela se deben fundamentalmente a Heyting, y el principal defecto de esta corriente es que de hecho no produjo (más allá del trabajo de Heyting, que se centró fundamentalmente en la Aritmética) unos resultados matemáticos alternativos, como muy bien señala Bishop (1967) y (Bishop & Bridges, 1985, 8). Sin embargo tuvo la capacidad de embarcar a una gran cantidad de matemáticos constructivistas (e incluso no constructivistas) de otras tendencias en un proyecto de investigación que llega hasta nuestros días. Aunque, en realidad, en el proyecto estrictamente *intuicionista* (que nosotros consideramos una variante del *constructivismo*) se involucraron –curiosamente, si tenemos en cuenta la relación que existía para Brouwer entre Lógica y Matemática- fundamentalmente lógicos. En palabras de Bishop (1967, *A Constructivist Manifesto*) y (1985, 8-9):

> "Brouwer fought the advance of formalism and undertook the disengagement of mathematics from logic. He wanted to strengthen mathematics by associating with every theorem and every proof a pragmatically meaningful interpretation. His program failed to gain support. He was an indifferent expositor and an inflexible advocate, contending against the great prestige of Hilbert and the undeniable fact that idealistic mathematics produced the most general results with the least effort. More important, Brouwer's system itself had traces of idealism and, worse, of metaphysical speculation. There was a preoccupation with the philosophical aspects of constructivism at the expense of concrete mathematical activity. A calculus of negation was developed which became a crutch to avoid the necessity of getting precise constructive results. It is not surprising that some of Brouwer's precepts were then formalized, giving rise to so-called intuitionistic number theory, and that the formal system so obtained turned out not to be of any constructive value. In fairness to Brouwer it should be said that he did not associate himself with these efforts to formalize reality, it is the fault of the logicians that many mathematicians who think they know something of the constructive point of view have in mind a dinky formal system or, just as bad, confuse constructivism with recursive function theory Brouwer became involved in metaphysical speculation by his desire to improve the theory of the continuum. A bugaboo of both Brouwer and the logicians has been compulsive speculation about the nature of the continuum. In the case of the logicians this leads to contortions in which various formal systems, all detached from reality, are interpreted within one another in the hope that the nature of the continuum will somehow emerge … This makes mathematics so bizarre it becomes unpalatable to mathematicians, and foredooms the whole of Brouwer's program. This is a pity, because Brouwer had a remarkable insight into the defects of classical mathematics, and he made a heroic attempt to set things right".

5.3.3- La *Matemática constructiva recursiva*.

A finales de los años 40 Markov abordó el desarrollo de una Matemática constructivista desde los principios de la Lógica intuicionista (Markov, 1954), (Kushner 1985) y que se conoce por RUSS (Bridges, 2013, 13). Tiene muchos puntos en común con el análisis recursivo clásico desarrollado independientemente por Turing, Church y otros a partir de 1936, salvo que Markov utiliza la Lógica intuicionista. Un desarrollo axiomatizado en (Richman, 1983) y (Bridges & Richman, 1987). Aunque no aportó ningún avance reseñable (Bridges, 2013, 12), sus líneas de investigación todavía perduran (Richman, 2000), pero la línea fundamental de progreso sigue los desarrollos de Turing y Church que dejan de lado la Lógica intuicionista. Por otra parte, Markov pasa por derecho propio a la Historia de las Matemáticas más bien por sus aportaciones a la propia Lógica intuicionista y, sobre todo, y dentro de la Matemática clásica, a la Teoría de la Probabilidad. Merece la pena reseñar que fue discípulo de Chebichev, quien ocupa un lugar destacado en la Matemática constructivista clásica que mencionamos más adelante.

5.3.4- El *constructivismo* matemático de Errett Bishop.

Para Bridges (2013, 14), el escaso y lento progreso en la Matemática constructivista realizado hasta los años setenta se debió a su dependencia de los principios no-clásicos de Brouwer y del aparato de las funciones recursivas. En 1967 Bishop publicó su obra *Foundations of Constructive Analysis* que supuso una ruptura del enfoque intuicionista dominante hasta entonces y que se proponía primordialmente dos objetivos: primero, probar que todo teorema del Análisis clásico aceptado en el siglo XX tenía su formulación correlativa en una Matemática constructivista (esto no lo consiguió completamente pues su obra quedó inacabada, pero sí en gran parte) y, segundo, demostrar por métodos puramente constructivos gran parte del Análisis clásico del siglo XX, es decir, usando exclusivamente métodos algorítmicos. En 1985 publicó junto con Douglas Bridges su obra póstuma *Constructive Analysis* (en realidad una edición revisada y ampliada de la obra anterior), en donde se profundizaba en esta línea demostrando por métodos exclusivamente constructivos más teoremas del Análisis clásico (Bishop, 1967), (Bishop & Bridges, 1985).

Bishop parte de una crítica a los planteamientos de Brouwer, más que a sus intenciones, y constata la irrelevancia de sus resultados matemáticos y el total abandono de su opción por la comunidad matemática: “there have been, however, attempts to constructivize mathematics, to purge it completely of its idealistic content. The most sustained attempt was made by L.E.J. Brouwer, beginning in 1907. The movement he founded has long been dead, killed partly by compromises of Brouwer's disciples with the viewpoint of idealism, partly by extraneous peculiarities of Brouwer's system which made it vague and even ridiculous to practising mathematicians, but chiefly by the failure of Brouwer and his followers to convince the mathematical public that abandonment of the idealistic viewpoint would not sterilize or cripple the development of mathematics. Brouwer and other constructivists were much more successful in their criticisms of classical mathematics than in their efforts to replace it with something better. Many mathematicians familiar with Brouwer's objections to classical mathematics concede their validity but remain unconvinced that there is any satisfactory alternative”(Bishop, 1967, 2).

Su defensa del *constructivismo* se basará en dos aproximaciones al tema. De un lado, el carácter realista de la Matemática que se evidencia en su justificación epistemológica en base a sus *aplicaciones*: “Mathematics is a mixture of the real and the ideal, sometimes one, sometimes the other, often so presented that it is hard to tell which is which. The realistic component of mathematics - the desire for pragmatic interpretation - supplies the control which determines the course of development and keeps mathematics from lapsing into meaningless formalism. The idealistic component permits simplifications, and opens possibilities which would otherwise be closed. The methods of proof and the objects of investigation have been idealized to form a game, but the actual conduct of the game is ultimately motivated by pragmatic considerations” (Bishop, 1967, 2). Y de otra parte, sostiene, como Brouwer, que la Matemática se sustenta exclusivamente en la noción de *número entero*, critica las deficiencias de la matemática clásica a este respecto y se propone *demostrar* los resultados del Análisis clásico en base a este principio y al principio metodológico de una “regla bien definida que permita construir un objeto” (*a routine* en su terminología, con la que intentaba evitar la noción de *algoritmo* como regla que llega al objeto en una serie *finita* de pasos, lo que a su juicio implicaba un circulo vicioso en la definición de *número entero*): “we develop a large portion of abstract analysis within a constructive framework. This development is carried through with an absolute minimum of philosophical prejudice concerning the nature of constructive mathematics. There are no dogmas to which we must conform. Our program is simple- to give numerical meaning to as much as possible of classical abstract analysis. Our motivation is the well-known scandal, exposed by Brouwer (and others) in great detail, that classical mathematics is deficient in numerical meaning" (Bishop, 1967, 3). Además tampoco descalifica a la matemática clásica ni a la validez de sus argumentos: "we are not contending that idealistic mathematics is worthless from the constructive point of view. This would be as silly as contending that unrigorous mathematics is worthless from the classical point of view. Every theorem proved with idealistic methods presents a challenge: to find a constructive versión, and to give it a constructive proof" (Bishop, 1967, 3).

Para Bridges (2013, 13), esto significa que el Análisis de Bishop [conocido como BISH, aunque Feferman (1997, 2) lo denota BCM –por *Bishop Constructive Mathematics*, denotación que siguen otros como Anne Troelstra (2011)] ha desmontado la pretensión de Hilbert de que la eliminación de los procedimientos transfinitos y de ciertas leyes lógicas como el LEM serían un lastre mortal para la Matemática: "taking the principle of excluded middle from the mathematician would be the same, say, as proscribing the telescope to the astronomer or to the boxer the use of his fists" (Hilbert, 1928: *Die Grundlagen der Mathematik*, translated as "The foundations of mathematics" in van Heijenoort 1967, pp. 464-479). Sin embargo, Bishop en realidad sólo demuestra la potencia de los *métodos constructivistas*. Posiblemente hay detrás una sospecha (de inseguridad) respecto a los métodos no constructivistas de la Matemática clásica, pero no un rechazo razonado y, además, en tanto que se alcanzan los mismos resultados que en la Matemática clásica, eso supone un reconocimiento indirecto de la validez de los métodos de ésta. Si a eso añadimos el hecho de que las demostraciones constructivistas son en general mucho más complicadas que las clásicas, la pregunta para un matemático sería: ¿cuál es la razón para abandonar mi metodología que es igual o más eficaz, y puede combinarse con la constructivista, y además permite demostraciones más sencillas? Y esta es posiblemente la razón por la que la BISH no haya tenido en la práctica ningún eco en la comunidad matemática[323].

Bridges (2013, 14) sostiene sobre los que practican la BISH que, frente a lo que pensaba Bishop, "in practice, they are doing mathematics with intuitionistic logic. Experience shows that the restriction to intuitionistic logic always forces mathematicians to work in a manner that, at least informally, can be described as algorithmic; so algorithmic mathematics appears to be equivalent to mathematics that uses only intuitionistic logic". Y menciona que esta idea fue formulada inicialmente por Richman (1990 y 1996). Y sugiere que habría que distinguir entre el *constructivismo ontológico* de Brouwer y otros que llegan a una práctica constructivista a partir de una creencia de que los objetos matemáticos son creaciones mentales, y el *constructivismo epistemológico* de Richman y de aquellos que, como Bishop, ven el constructivismo matemático como caracterizado por su metodología que, en el fondo, según él, se basaría en el uso de una lógica intuicionista, y que sería equivalente a una metodología algorítmica. Pero aunque la distinción entre ambos tipos de constructivismo parece bastante evidente, la identificación de la práctica constructivista basada en la lógica intuicionista con una metodología algorítmica es mucho más discutible. Hemos mencionado más arriba que se ha demostrado formalmente la equivalencia entre la *Teoría de la Demostración en un sistema formal*, la *Turing-computabilidad* y el *λ-Cálculo*. Por ello, la equivalencia con una metodología algorítmica corresponde claramente a la *demostración en un sistema formal* dentro de la lógica clásica según el *programa finitista* (que, como veremos, se puede considerar otra variante del constructivismo, que es como la interpretaba Herbrand), por lo que una limitación para trabajar dentro de una lógica intuicionista ha de suponer una *restricción* a la misma noción de *algoritmo* o de *computabilidad*. Este aspecto está más claro

---

[323] Aunque eso no significa que no se hayan hecho desarrollos posteriores a Bishop en su estilo, por ejemplo en Algebra es relevante la obra "A Course in Constructive Algebra", Mines & Richman & Ruitenberg 1988.

en la teoría desarrollada por Martin-Löf, independiente y casi simultánea a la de Bishop, y que ha tenido una gran influencia en la Teoría de la Computación desarrollada a partir de 1980.

5.3.5- La Teoría Constructiva de Tipos de Martin-Löf.

Per Martin-Löf estudió entre 1964 y 1965 con Kolmogorov y de regreso a Estocolmo publicó *Notes on constructive Mathematics* en 1970. Es conocido por sus trabajos en Teoría de la Probabilidad, en Estadística y en Teoría de la Computación, algunos de ellos escritos junto con su hermano Anders, además de por su aportación a la Lógica intuicionista. En 1968-1969 fue Assistant Professor en la Universidad de Chicago con William Alvin Howard haciendo alguna aportación a la Lógica intuicionista; precisamente el llamado *isomorfismo de Curry-Howard* (una analogía o isomorfismo entre un *enunciado* y el *tipo de su demostración*) sería uno de los fundamentos de su posterior *Teoría de los Tipos* (conocida por ML). Esta teoría se esbozó inicialmente en su obra *Notes on constructive Analysis* (1968), y estaba más en la línea de la escuela de Kolmogorov que en la de Bishop o Brouwer. Para Bridge (2013, 14): "the book is in the spirit of RUSS, rather than BISH; indeed, its author did not have access to Bishop's book until his own manuscript was finished. Martin-Löf later turned his attention to his theory of types as a foundation for Bishop-style constructive mathematics". La Teoría de los Tipos de Martin-Löf (o también ML) se basa en la siguiente noción fundamental: "we shall think of *mathematical objects* or *constructions*. Every mathematical object is of a certain kind or *type* [… and] is always given together with its type. […] A type is defined by describing what we have to do in order to construct an object of that type. […] Put differently, a type is well-defined if we understand […] what it means to be an object of that type. Thus, for instance N → N [functions from N to N] is a type, not because we know particular number theoretic functions like the primitive recursive ones, but because we think we understand the notion of number theoretic function *in general*" (Martin-Löf, 1975, 74). En su sistema, todo *enunciado* puede ser representado como un *tipo* (el *tipo* de las demostraciones de ese *enunciado*) y cada *tipo* determina un *enunciado* (*el enunciado* para el que el *tipo* en cuestión es no vacío). Distingue cuidadosamente entre *demostraciones* (proofs) y *derivaciones* (derivations); un *objeto-demostración* (poof object) es una evidencia de que algún enunciado ha sido demostrado, mientras que una *derivación* es una secuencia formal que lleva a la *construcción* del *objeto-demostración*. "Also, Martin-Löf exercises two basic forms (one dare not say "types" here!) of *judgement*. The first is a relation between proof objects and propositions, the second a property of some propositions. In the first case, the judgement is either one that a proof object a is a witness to a proposition A, or else one that two proof objects a and b are equal and both witness that A has been proved. The first case of the second form of judgement states that a proposition A is well-formed, and the second records that two propositions A and B are equal" (Bridges, 2013, 15).

Martin-Löf desarrolla una formalización de la Lógica en ML (Martin-Löf, 1975, 1984 y 1998) que ha sido interpretada como una *fundamentación* lógica del Análisis de Bishop (Bridges & Reeves, 1999) (Bridges, 2013, 16) y en donde los *tipos* sustituyen a los *conjuntos* clásicos y las funciones definibles en LM son siempre computables. Realizó varias modificaciones de la teoría inicial y progresivamente se fue interesando en la Lógica y en la Filosofía de la Matemática, especialmente en relación con la *consecuencia lógica* y el *juicio* (Martin-Löf, 1996; en este artículo se listan también las demás obras de Martin-Löf en este campo), con posiciones que se pueden consideran influidas por Brentano, Frege y Husserl. Una característica notable de su formalismo es que el Axioma de Elección puede ser derivado de sus axiomas. Además Goodman & Myhill (1978)[324] demostraron que el Axioma de

[324] El *Teorema de Diaconescu* o *Teorema de Goodman-Myhill* establece que el Axioma de Elección es suficiente para derivar la Ley del Tercio Excluso (LEM). Fue demostrado inicialmente por Diaconescu (1975) y posteriormente por Goodman y Myhill (1978), aunque se suele conocer por el nombre de estos últimos. Se

Elección implica la Ley del Tercio Excluso (LEM), por lo que ML difícilmente puede considerarse una Lógica intuicionista y, en tanto que fundamento del Análisis de Bishop, éste tampoco sería un *análisis intuicionista* sino más bien un *Análisis constructivista* (y, en contra de la opinión de Bridges, al margen de la Lógica intuicionista) y ML una variante de la Lógica clásica fundada en una modificación de la noción de *conjunto* (sustituida por *tipo*)[325].

La LM ha tenido una amplia aplicación en la moderna Teoría de la Computación. Para Bridges (2013, 16), "every constructive proof embodies an algorithm that, in principle, can be extracted and recast as a computer program; moreover, the constructive proof is itself a verification that the algorithm is correct — that is, meets its specification. One major advantage of Martin-Löf's formal approach to constructive mathematics is that it greatly facilitates the extraction of programs from proofs. This has led to serious work on the implementation of constructive mathematics in various locations". Y éste era un objetivo explícito de la obra de Martin-Löf: "The difference, then, between constructive mathematics and programming does not concern the primitive notions of the one or the other, because they are essentially the same, but lies in the programmer's insistence that his programs be written in a formal notation so that they can be read and executed by a machine, whereas, in constructive mathematics as practised by Bishop (1967), for example, the computational procedures (programs) are normally left implicit in the proofs, so that considerable further works is needed to bring them into a form that makes them fit for mechanical execution. What I have just said about the close connection between constructive mathematics and programming explains why intuitionistic the type theory (Martin-Löf, 1975), which I began to develop solely with the philosophical motive of clarifying the syntacs and semantics of intuitionistic mathematics, may equally well be viewed as a programming language" (Martin-Löf, 1982, 3). Y en relación con este objetivo el éxito ha sido total. El formalismo desarrollado por Martin-Löf se adecúa al parecer muy bien a un lenguaje de programación, conteniendo además en gran parte el programa en el algoritmo mismo. Se han desarrollado en base a él numerosos programas de demostración automática y de demostración asistida como por ejemplo *NuPRL*, *LEGO* y *Coq*, y lenguajes de programación como *ATS*, *Cayenne*, *Epigram* y *Agda*[326]. Los métodos de programación desarrollados a partir de este formalismo, y el formalismo mismo así como sus características se analizan en (Nordstöm et alt., 1990)[327].

---

puede acceder online a la demostración de Diaconescu: **http://www.ams.org/journals/proc/1975-051-01/S0002-9939-1975-0373893-X/S0002-9939-1975-0373893-X.pdf**. En el *abstract* se especifica que "it is shown that an intuitionistic model of set theory with the axiom of choice has to be a classical one", que es la tesis que defendemos que ocurre con Bishop y Martin-Löf, en tanto que LM permite deducir el Axioma de Elección. Sin embargo, algunos autores sostienen que la LM no contiene los requisitos de *extensionalidad* que permitan afirmar el Axioma de Elección. Errett Bishop planteó ya el teorema como un ejercicio en 1967 (Bishop, 1967, 58, problema 2).

325 También para Feferman (1997, 2), "in contrast, the Bishop style constructive development of mathematics, which I abbreviate BCM -for Bishop Constructive Mathematics, can be read as a part of classical analysis, though developed in more refined terms".

326 Estos programas y lenguajes se desarrollan a partir del formalismo de Martin-Löf por distintos Departamentos universitarios. La obra más importante que detalla las aplicaciones de este formalismo a la computación es: Nordstöm, Bengt & Peterson, Kent & Smith, Jan, "Programming in Martin-Löf's Type Theory", Oxford: Oxford University Press (1990). Está agotada, pero se puede obtener una versión libre online en: **www.cs.chalmers.se/Cs/Research/Logic**. A continuación indicamos unos links donde se indican las características de los programas, se puede acceder a bibliografía y manuales y, en algunos casos, se puede descargar el programa libremente.

-NuPRL (proof checker): **http://en.wikipedia.org/wiki/NuPRL**, **http://www.nuprl.org/**. Acerca de sus aplicaciones, véase: R.L. Constable et alt. "Implementing Mathematics with The Nuprl Proof Development System", Upper Saddler River, NJ: Prentice-Hall, 1986.

-Coq (proof checker): **http://en.wikipedia.org/wiki/Coq**, **http://coq.inria.fr/**, En contra de nuestra opinión, Martin-Löf siempre consideró que su obra se desarrollaba en el marco de la Lógica intuicionista, aunque él identifica explícitamente *intuicionismo* con *constructivismo*: "Now, it is the contention of the intuitionists (or constructivists, I shall use this terms synonymously) that the basic mathematical notions, above all the notion of function, ought to be interpreted in such a way that the cleavage between mathematics (classical mathematics, that is) and programming that we are witnessing at present disappears" (Martin-Löf, 1982, 169). En este mismo artículo se dan claras sugerencias de que su noción de *tipo* en Lógica se inspiró en la evolución de los *tipos* de variables (y de otros *tipos* dentro de la teoría de la computación) que aparecen en la sucesión de lenguajes de alto nivel como Fortran, Algol 60 y Pascal (1982, 168-170).

5.3.6- *Reverse mathematics*.

A finales de los años 70, Harvey Friedman (1975) inició un programa de investigación que pretendía clasificar los teoremas matemáticos de acuerdo con su equivalencia con uno, o con un pequeño número, de principios de la teoría de conjuntos. Para Bridges (2013, 16), "this classification reveals interesting, and usually nontrivial, differences in proof-theoretic complexity". El manual standard sobre la *reverse mathematic* clásica es el libro de Simpson (1999).

A comienzos del siglo XXI, Veldman (2005) e Ishihara (2005, 2006) iniciaron de forma independiente un intento de elaborar una *reverse mathematics* basada en la Lógica intuicionista más que en la clásica; Bridges la denomina *constructive reverse mathematics* (CRM), y es ésta probablemente la razón por la que incluye la *reverse mathematics* en su clasificación de la *Matemática constructivista*. Pero en realidad consiste más en un programa de investigación lógica que en un programa matemático y no tiene mucho sentido considerarlo como una escuela de la Matemática constructivista, aunque se lleve a cabo, como en el caso de los autores últimamente citados, dentro del enfoque de la Lógica intuicionista. Una descripción sintética de sus resultados principales en (Bridges, 2013, 16-20).

5.3.7- El *constructivismo matemático* clásico. Teoría constructiva de funciones y Matemática discreta.

Resulta bastante sorprendente que ninguno de los autores consultados, y en particular Bridges (2013), quien presenta una clasificación que pretende ser exhaustiva de la *Matemática constructivista*, mencione siquiera la corriente más importante (por sus resultados) de este tipo de Matemática[328]. Tiene una larga historia dentro de la Matemática clásica y ha alcanzado en los últimos 150 años un nivel espectacular, dando lugar a disciplinas que ya están claramente diferenciadas. Es esto una prueba más de que el tratamiento de estos temas en la literatura científica está todavía hoy fundamentalmente en manos de lógicos, más

---

http://www.cis.upenn.edu/~bcpierce/sf/
http://video.ias.edu/univalent/appel
-ATS (programming language): **http://en.wikipedia.org/wiki/ATS_(programming_language)**,
http://www.ats-lang.org/ página oficial.
-Cayene (programming language): **http://en.wikipedia.org/wiki/Cayenne_(programming_language)**,
http://www.augustsson.net/Darcs/Cayenne/html/ página oficial.
-Epigram (programming language): **http://en.wikipedia.org/wiki/Epigram_(programming_language)**.
-Agda (programming language): **http://en.wikipedia.org/wiki/Agda_(theorem_prover)**,
http://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php
-LEGO (proof checker): **http://www.lfcs.inf.ed.ac.uk/reports/92/ECS-LFCS-92-211/**.

[327] La obra está agotada, pero se puede obtener una versión libre online en: **www.cs.chalmers.se/Cs/Research/Logic** .

[328] Tampoco Troelstra (2011) ni Troelstra &Van Dalen (1988) la incluyen en sus clasificaciones.

que de matemáticos. El punto de vista respecto a la *Matemática constructivista* de Bridges, por ejemplo, se resume muy bien en la siguiente cita:

> "The traditional route taken by mathematicians wanting to analyse the constructive content of mathematics is the one that follows classical logic; in order to avoid decisions, such as whether or not a real number equals 0, that cannot be made by a real computer, the mathematician then has to keep within strict algorithmic boundaries such as those formed by recursive function theory. In contrast, the route taken by the constructive mathematician follows intuitionistic logic, which automatically takes care of computationally inadmissible decisions. This logic (together with an appropriate set-theoretic framework) suffices to keep the mathematician within constructive boundaries. Thus one is free to work in the natural style of an analyst, algebraist (e.g., Mines et al. 1988), geometer, topologist (e.g., Bridges & Vîta 2003), or other normal mathematician, the only constraints being those imposed by intuitionistic logic" (Bridges, 2013, 20).

Pero esto no se ajusta en absoluto a la realidad. Con frecuencia el método constructivo viene determinado por la naturaleza de los objetos de la disciplina y, como sucede en las disciplinas que vamos a mencionar, a veces se utilizan incluso resultados del Análisis clásico que pueden ser útiles –aunque no sean constructivos- y, en todos los casos, las consideraciones lógicas no tienen un papel demasiado relevante (tampoco las restricciones intuicionistas), sin que por ello las herramientas queden limitadas al aparato de las funciones recursivas; manteniéndose, sin embargo, en su conjunto en su carácter de *Matemática constructiva*. Sólo describiremos brevemente algunas de las disciplinas más importantes en este campo:

<u>1) La *Teoría de Aproximación de Funciones* (y/o *Teoría Constructiva de Funciones*)</u>. Ambas teorías están muy relacionadas y, aunque se pueden remontar a la Antigüedad griega (el *método de exhaución* que hemos comentado más arriba sería un ejemplo prototípico rudimentario) y han realizado aportaciones numerosos matemáticos a lo largo de la historia, sus orígenes como disciplina independiente se pueden situar en Weierstrass y sus teoremas de aproximación, pero su desarrollo se debe fundamentalmente a la escuela rusa (surgida probablemente a partir de los trabajos y la influencia de Euler) y especialmente a Chevichev (que fue como vimos el maestro de Markov) y sobre todo a Bernstein[329], quien acuñó el término *Teoría Constructiva de Funciones*. Este desarrollo moderno fue conocido en Occidente a partir de la traducción de la obra de Natanson (1964 y 1965)[330], que se puede considerar todavía hoy el manual estandard del tema (y en la práctica una enciclopedia, pues no hay muchos artículos o libros anteriores accesibles, e incluye la referencia de los autores rusos más relevantes) y se difundió rápidamente por los Departamentos de Matemáticas y Cálculo Numérico.

---

[329] Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) es sin duda el padre del desarrollo de esta teoría en el siglo XX, aunque también es conocido por sus importantes aportaciones a las Ecuaciones Diferenciales Parciales, a la Geometría Diferencial y a la Teoría de la Probabilidad. En su tesis doctoral realizada bajo la dirección de Charles Émile Picard y David Hilbert y que defendió en la Sorbona en 1904, resolvió el *problema 19 de Hilbert* acerca de la solución analítica de las ecuaciones diferenciales elípticas. Una lista de sus obras más importantes en relación con la Teoría de Aproximación de Funciones puede consultarse en la obra citada de Natanson. Una bibliografía más general y su biografía en la página de la *McTutor Encyclopedia of Mathematics* de la Universidad de St. Andrews:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernstein_Sergi.html
Varios de sus discípulos realizaron aportaciones relevantes a la Teoría Constructiva de Funciones, como Yakov Geronimus y Sergei Stechkin, entre otros (sus obras, y las de otros autores de la escuela rusa, vienen referidas en el libro de Natanson).

[330] Isidor Pavlovich Natanson (1906-1964) fue un matemático ruso de origen suizo que fue estudiante y profesor en San Petersburgo. Su obra "Constructive Function Theory" (1964 y 1965) reúne los resultados fundamentales de la teoría y la bibliografía básica.

La *Teoría de Aproximación de Funciones* se puede definir como el conjunto de técnicas que se ocupan de estudiar cómo una función puede ser aproximada de forma óptima por medio de funciones más simples, y se caracterizan cuantitativamente los errores de cada aproximación[331]. Se suele denominar *Teoría Constructiva de Funciones* a la parte de la teoría que se ocupa de la relaciones entre la *suavidad* de una función y su *grado de aproximación*, aunque a veces, como en el caso de Natanson, se utilizan ambos términos como sinónimos. Como generalmente las funciones aproximantes son polinomios, se pueden computar con facilidad por medio de sumas y productos, que son las operaciones básicas de una máquina. Y el desarrollo de la computación ha supuesto una interacción entre estas disciplinas creando un amplio campo de aplicabilidad. Para Natanson (1964, vii- ix), "the constructive theory of functions is a branch of mathematical analysis dealing with the questions that arise in the approximate representation of arbitrary functions by the simplest analytical expedients possible (…) As we shall see, all these points of view are most closely interconnected, so that the theories pertaining to them overlap to a very high degree. In fact, it is this interlocking of manifold ideas, methods and facts –quite apart from its highly practical significance- chiefly responsible for the constructive theory of functions being one of the most beautiful branches of mathematics". Quizás sea precisamente esa combinación de "ideas, métodos y hechos" lo que lleva a los lógicos que se mueven en el entorno intuicionista a no considerar esta teoría como *genuinamente constructiva*.

2) La *Matemática discreta* y la *Matemática finita*. En los últimos 30 años han proliferado los manuales con el título "matemática discreta" y "matemática finita" (o también *Matemática concreta*), así como las asignaturas con dicho nombre en ciertos estudios universitarios, principalmente Informática, Economía e Ingeniería. La *Matemática discreta* se puede definir como el conjunto de técnicas y teorías cuyos objetos son infinitamente numerables o finitos (es decir, contables) y la *Matemática finita*, aquella cuyos objetos son una colección finita (por lo que a veces esta última se considera incluida en la primera).

Desde otro punto de vista, se ocupan de estructuras matemáticas cuyos objetos no "varían suavemente" como los números reales sino que forman una colección "discreta" o colección de "entes separados". Hay en realidad distintas definiciones y matices, pero estas disciplinas de definen más bien por lo que no son: excluyen la *variación continua de cantidades* y las nociones relacionadas y, por tanto, excluyen el *Cálculo* o *Análisis* clásico, y aplican exclusivamente métodos constructivistas y algorítmicos. Algunos de sus contenidos tienen una amplia trayectoria en la Matemática (como la *Combinatoria* o técnicas de conteo), otras han surgido o se han desarrollado principalmente en el siglo XX. Los tópicos, que varían según las carreras, suelen contener: Teoría de Grafos, Combinatoria, Teoría de Conjuntos, Teoría de la Información, Teoría de la Probabilidad y Cadenas de Markov, Lógica Formal,

---

331 Un ejemplo sencillo serían las aproximaciones de Taylor o MacLaurin del Análisis clásico. Por ejemplo, el desarrollo en serie de Taylor de la función más importante del Análisis:

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...$ permite realizar una aproximación truncando la serie en un polinomio de grado arbitrario, y existen fórmulas sencillas para acotar el error en función del grado del polinomio y por tanto caracterizar la velocidad de convergencia. Estas sencillas aproximaciones son por cierto las que se usan en las calculadoras de bolsillo para evaluar las funciones más importantes del Análisis. Otro ejemplo clásico serían los desarrollos en serie de Fourier y los de Laplace. Una historia de la teoría en: K.-G. Steffens (2006), *The History of Approximation Theory: From Euler to Bernstein*, Birkhauser, Boston 2006. Sus aplicaciones a la computación en: W. J. Cody Jr. & W. Waite (1980), "Software Manual for the Elementary Functions", Prentice-Hall, 1980. Una página dedicada a artículos de la historia de la teoría, con links a las revistas más importantes y bibliografía: **http://www.math.technion.ac.il/hat/**. Una página dedicada a las últimas investigaciones de la teoría y links a más revistas: **http://www.emis.de/journals/SAT/**.

Teoría de la Computación, Teoría Algebraica de Números, Teoría de Juegos, Teoría de la Decisión, Geometría Plana y Cálculo en Diferencias Finitas, principalmente[332]. Algunos de estos tópicos son de hecho hoy en día disciplinas independientes (que en algunos estudios se dan como asignaturas).

Algunos, en su forma más general, superan a la *Matemática discreta* incorporando elementos del Análisis, como es el caso de la Teoría de la Probabilidad, que también se puede considerar como un caso particular de la Teoría de la Medida, disciplina esencialmente analítica. Hay algunas disciplinas que en rigor serían parte de la *Matemática discreta* y que no suelen aparecer en los manuales ni en las asignaturas bajo ese epígrafe. La razón es que han alcanzado tal nivel de desarrollo y aplicabilidad que se imparten habitualmente como disciplina independiente en ciertos estudios. Es el caso de la *Investigación de Operaciones* (*Operational Research*). Aunque algunas de sus técnicas ya se descubrieron a comienzos del siglo pasado (caso de el *algoritmo simplex* para la *programación lineal*, desarrollado por Danzig y von Neumann en los años 30), su desarrollo tiene lugar al finalizar la II Guerra Mundial a partir de la divulgación de las técnicas desarrolladas por el Ejército americano y el británico para la logística de sus tropas y operaciones. Hoy en día es una disciplina casi inabarcable, que ha incorporado también técnicas estadísticas, e imprescindible en los estudios de Economía y Organización[333], y que se desarrolla íntegramente por métodos constructivistas. No nos alargaremos describiendo más ejemplos análogos como: la Teoría de la Información, la Criptografía, la Teoría Algebraica de Números o el Análisis Numérico que, en general, combinan una metodología constructivista con un enfoque analítico y usan también por tanto el aparato analítico. Ante este panorama, parece ciertamente ridículo que

---

[332] Unos manuales de *Matemática Discreta* muy extendidos en las Universidades de todo el mundo y con gran aceptación por los estudiantes por su carácter eminentemente práctico son: Lipschutz, S. and Lipson, M. L. *2000 Solved Problems in Discrete Mathematics.* New York: McGraw-Hill, 1991; Lipschutz, S. and Lipson, M. L. *Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 2nd ed.* New York: McGraw-Hill, 1997; Otros manuales de carácter más teórico, y algunos con distintas aplicaciones: Balakrishnan, V. K. *Introductory Discrete Mathematics.* New York: Dover (1997); Bobrow, L. S. & Arbib, M. A. *Discrete Mathematics: Applied Algebra for Computer and Information Science.* Philadelphia, PA: Saunders (1974); Dossey, J. A.& Otto, A. D.&Spence, L.& Eynden, C. V. *Discrete Mathematics, 3rd ed.* Reading, MA: Addison-Wesley (1997);Graham, R. L.& Knuth, D. E.& Patashnik, O. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd ed.* Reading, MA: Addison-Wesley (1994); Hall, C.& O'Donnell, J. *Discrete Mathematics Using a Computer.* London: Springer-Verlag (2000); Rosen, K. *Applications of Discrete Mathematics, 4th ed.* New York: McGraw-Hill (1998); Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press (2000); Ronald Graham& Donald E. Knuth& Oren Patashnik, *Concrete Mathematics* (2001); Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volumes 1-4a Boxed Set.* Addison-Wesley Professional (2011); Kenneth H. Rosen; John G. Michaels. *Hand Book of Discrete and Combinatorial Mathematics*. CRC PressI Llc (2000); Bojana Obrenic, *Practice Problems in Discrete Mathematics*, Prentice Hall (2003); John Dwyer, *An Introduction to Discrete Mathematics for Business & Computing* (2010); Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics: And Its Applications*, McGraw-Hill College (2007); Ralph P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*, Addison Wesley (2004); Susanna S. Epp, *Discrete Mathematics With Applications*, Thomson Brooks/Cole (2010); Revistas especializadas:

Discrete Mathematics **http://www.journals.elsevier.com/discrete-mathematics/**

MathArchives **http://archives.math.utk.edu/topics/discreteMath.html** .

[333] Páginas con bibliografía, revistas y links de *Investigación Operativa:*

Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa: **http://www.seio.es/**

The OR Society: **http://www.theorsociety.com/**

International Federation of Operational Research Societies: **http://ifors.org/web/**

JORS: **http://www.palgrave-journals.com/jors/index.html**

INFORMS: **https://www.informs.org/** .

los autores antes citados ni siquiera las mencionen entre las escuelas *constructivistas*, cuando su importancia objetiva es muy superior a todas las demás juntas.

5.3.8- El *finitismo*.

El *programa finitista* propuesto por Hilbert, y que hemos estudiado detalladamente más arriba, era claramente un programa *constructivista* ya desde sus planteamientos originales, como lo demuestra su equivalencia con la *Teoría de la computabilidad de Turing* y con el *λ-Cálculo*. Este carácter queda más claro en la lectura y desarrollo que realizaron Herbrand y Skolem.

Lo singular en el caso de Hilbert es que defiende un *constructivismo* para la Metamatemática (concebida como una teoría matemática) que no mantiene para la Matemática en general. Es evidente que esto se debe a una posición *filosófica* y que de alguna forma representa, como vimos que señalaba Feferman acertadamente al criticar a Franks, una contradicción con su propósito fundamental de asentar la *autonomía* de la Matemática en su metodología. Y podemos preguntarnos por qué precisamente la *Metamatemática* concebida como teoría matemática ha de ser *constructivista* en tanto que las demás teorías matemáticas no necesariamente. Ciertamente la respuesta está en su intento de justificar desde una concepción kantiana la introducción de *elementos ideales* en las teorías matemáticas en base a una *intuición de formas fundada en la sensibilidad*, de manera totalmente análoga a su fundamentación de la Aritmética. Aunque sus *prejuicios filosóficos* quedan decisivamente matizados en su *programa* por su concepción *naturalista* de que la Matemática sería en última instancia lo que hace y acepta la *comunidad matemática* consensuadamente.

También es destacable que, junto a cierta indefinición respecto a conceptos claves (nunca definió exactamente qué entendía por *independencia*, por ejemplo) y una falta de rigor en sus desarrollos metamatemáticos (en opinión de Herbrand y otros), fue evolucionando progresivamente en su concepción del *programa finitista*, como vimos al estudiar su análisis del papel de *la inducción* en su sistema. Lo que es incuestionable es que el *finitismo* pertenece por derecho propio a las escuelas *constructivistas* y, por las características de su campo de aplicación (la Metamatemática) y su éxito en lograr que las discusiones en ese ámbito se ajusten a sus parámetros formales, en una de las posiciones principales.

Quizás la exposición más completa (y definitiva) de la concepción de Hilbert del *finitismo*, y que tenía en cuenta las aportaciones y puntos de vista de Skolem y Herbrand, esté en su obra conjunta con Bernays *Die Grundlagen der Mathematik* (Hilbert & Bernays 1934, capítulo 2).

Hay que recalcar que, según nuestro análisis, la filosofía de la Matemática de Hilbert no es *constructivista*, por lo que en lo que respecta a su *programa finitista*, en tanto que una parte de una filosofía más general, habría que matizar ese carácter constructivista (cosa que no sucede con Herbrand o Skolem). Tal vez por ello Bridges (2013) no incluye el *finitismo* en la escuela *constructivista*. Pero Leon Horsten (2012) sí lo hace; siguiendo la clasificación tradicional hasta ahora, considera la filosofía de la Matemática de Hilbert como prototipo del "formalismo" (sin distinguir su *programa finitista* de su filosofía general) y presenta el *formalismo* de Curry como una variante. Ya hemos analizado más arriba el profundo error que subyace a esta clasificación (que el mismo Curry, como vimos, se encargó de subrayar). Además, justamente al contrario que Hilbert, Curry consideraba la Metamatemática como una excepción a su concepción formalista de la Matemática como un juego de signos sin significado que admitía incluso la *contradicción*; como señala Horsten (2012, 7) en referencia a la concepción de Curry: "On this view, mathematics consists of a collection of formal systems which have no interpretation or subject matter (Curry here makes an exception for metamathematics)".

5.3.9- Otras escuelas *constructivistas*: *Ultrafinitismo (o Ultraintuicionismo o Actualismo), Predicativismo, Semi-Intuicionismo.*

Con estos nombres introducen Troelstra (2011) y Troelstra & Van Dalen (1988) en su exhaustivo estudio del constructivismo estas corrientes como parte del *constructivismo* moderno, en mi opinión sin mucha justificación en algunos casos porque el *predicativismo* y el *semi-intuicionismo* sólo muy forzadamente se pueden considerar *constructivistas*: se trataría más bien de coincidencias puntuales con el *constructivismo* dentro de concepciones de la Matemática con entidad propia y diferenciadas de esta corriente. Aunque algunas en el fondo tengan una posición filosófica básicamente coincidente (y coincidente con el *finitismo* de Hilbert) superando así la clasificación hoy en día considerada standard que aquí presentamos.

El *ultrafinitismo* (también llamado *ultraintuicionismo* o *actualismo* o *finitismo estricto* o *finitismo fuerte*) carece de influencia o resultados relevantes hasta el momento, aunque su punto de vista plantea interesantes perspectivas en los últimos años con el avance vertiginoso de la computación. Se puede considerar que sostiene en líneas generales el punto de vista finitista, pero no sólo para la metamatemática. Por tanto, deniega la existencia del conjunto infinito de números naturales N, puesto que no se puede realizar, como un infinito actual. Pero además consideran las restricciones que la *realización física* impone a los objetos matemáticos, aunque sean de naturaleza finita. Así, el número definido mediante la función exponencial *exp(exp(exp(79)))* es un número real cuya parte entera nadie ha podido hasta la fecha calcular. Consecuentemente niegan la posibilidad de definir las funciones numéricas teóricas (como la exponenciación) sobre el dominio de los naturales.

Además algunos como Edward Nelson[334] consideran que la misma definición de número natural aceptada comúnmente no se puede mantener puesto que sería circular: partiendo del 0, los números naturales se definen recursivamente por la función *sucesor* $s(n)=n+1$, pero esto significaría que en la definición ya está implícita la noción de número natural; por ejemplo, la definición del número 79 significaría aplicar 79 veces la función sucesor. Incluso para la mayor parte de los constructivista, estos planteamientos conducirían a problemáticas de trabajo prácticamente inabordables, por lo que no se han podido producir resultados relevantes; por ejemplo Troelstra & Van Dalen (1988) indican que “no satisfactory development exists at present”. De modo que más que una crítica a sus planteamientos, lo que se critica es la imposibilidad de conseguir resultados tangibles a partir de éstos.

Sin embargo, desde muy recientemente y con el avance de la computación, algo ha comenzado a cambiar, pudiendo los matemáticos de esta corriente (por otro lado bastante heterogéneos en sus matices) elaborar propuestas concretas factibles que ligan sus planteamientos a la *teoría de la complejidad computacional* y a la *teoría de la demostración automática* o a la *demostración asistida por ordenador*, e incluso plantean el descubrimiento de teoremas mediante experimentación y simulación computacional, con lo cual las teorías matemáticas perderían su carácter apriorístico pasando la Matemática a ser de hecho una ciencia experimental.

El primero que al parecer definió las objeciones del *ultrafinitismo* fue Gerrit Mannoury, que fue profesor de Brouwer y sobre quién ejerció una gran influencia, especialmente en el

---

[334] Edward Nelson home page: **https://web.math.princeton.edu/~nelson/**
papers: **https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers.html** paper: “Warning signs of a Possible Collapse of Contemporary Mathematics”: **https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/warn.pdf**
Books and articles: **https://web.math.princeton.edu/~nelson/nelsonbib.pdf** .

aspecto filosófico[335]. Los primeros trabajos rigurosos en esta perspectiva se deben al matemático ruso Alexander Esenin Volpin[336] a partir de 1959. Es a partir de los últimos 15 años cuando se han desarrollado los enfoques computacionales antes mencionados y se pueden citar a Doron Zeilberger[337], Edward Nelson, Rohit Jivanlal Parikh, Stephen Cook,

[335] Gerrit Mannoury (1867-1956) es importante no sólo por sí mismo (es el primer matemático que planteó y defendió razonadamente el programa *ultrafinitista*) sino porque también permite entender el contexto intelectual en el que se forjó el pensamiento de Brouwer. Fue durante muchos años *privatdozent* en la Universidad de Amsterdam, de la que llegó a ser profesor entre 1917 y 1937 impartiendo Mecánica, Geometría y Filosofía de la Matemática, además de un importante dirigente e ideólogo del movimiento socialista holandés. Fue profesor de Brouwer, sobre el que ejerció una fuerte influencia, y les llegó a unir una gran amistad. De 1905 a 1947 estuvo en la presidencia de la Sociedad Matemática Holandesa (Wiskundig Genootschap). En 1909 publicó un libro sobre fundamentación de la Matemática que se considera la primera obra sólida publicada al respecto en Holanda. No obtuvo nunca el título de doctor y se jubiló en 1937 pasando a ser profesor emérito, pero en 1946 obtuvo un doctorado honorífico por la Universidad de Amsterdam en cuya concesión se involucró muy personalmente Brouwer. Su pensamiento estaba muy influenciado por Hegel (además de por Marx), pero también por Nietzsche y Spinoza y publicó gran cantidad de artículos, estudios y también panfletos y artículos políticos, ninguno de los cuales está traducido del holandés (J. H. Stegeman: "Gerrit Mannoury. A Bibliography", Tilburg 1992), (David van Dantzig: "Gerrit Mannoury's significance for mathematics and its foundation", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1957, pp. 1-18). Tanto Mannoury como Brouwer eran miembros de un círculo de Fiosofía del Lenguaje que se denominaba a sí mismo *Signifische Kring* (*Signific Circle*) y también Significs; algunos lo consideran el equivalente holandés del *Círculo de Viena*, tenía una estrecha conexión con el pensamiento de Charles Sanders Peirce desde su fundación en 1890 por Lady Welby (Lady Welby, "Sense, Meaning and Interpretation," in *Mind*, January and April 1896) y se disolvió en 1920. Otros miembros relevantes fueron van Eeden, David van Dantzig, Herman Gorter, Jacob Israël de Haan, Henri Borel y Evert W. Beth (*Semiotic and Significs: The Correspondence Between Charles S. Peirce and Victoria, Lady Welby,* Charles S. Hardwick & J. Cook (edits.), 1977, 2nd edition 2001).

[336] Alexander Sergeyevich Esenin-Volpin (o Yesenin-Volpin) es un poeta y matemático ruso-americano nacido en 1924 y que actualmente convalece en un hospital de Boston. Fue un notable disidente y defensor de los derechos humanos en la antigua Unión Soviética que fue confinado durante años en psiquiátricos y prisiones y liberado en 1965 debido a la presión interna e internacional. En 1970 formó el Comité de Derechos Humanos con Yuri Orlov y Andrei Saharov y en 1975 emigró a los Estados Unidos, obtuvo la nacionalidad americana y trabajó en la Universidad de Boston hasta su jubilación. A partir de 1959 comenzó a ser conocido internacionalmente por sus trabajos sobre Matemática *ultrafinitista* e *intuicionista*, siendo considerado el representante de esta corriente en la segunda mitad del siglo XX, aunque también trabajó en Matemática clásica y, en especial, en Teoría de Conjuntos (Zdravkovska, Smilka; Duren, Peter (1993), *Golden years of Moscow mathematics* , AMS,Bookstore. p. 221), (A. Yessenin-Volpin, "Le programme ultra intuitioniste des fondements des mathemathiques", in A. Mostowski (edit.), *Infinitistic Methods*, pp. 201-233, Oxford: Pergamon Press 1961), (Yessenin-Volpin, A. S. [Esenin-Volpin, A. S.], "The ultra-intuitionistic criticism and the antitraditional program for foundations of mathematics", in *Intuitionism and proof theory (Proc. Conf., Buffalo, N.Y., 1968),*A. Kino & J. Myhill &R. Vesley (edits.), pp. 3–45, Amsterdam: North-Holland, 1970). Para J. Geiser (American Mathematical Society, 1973, MR0295876 (45 #4938) 02A05), "The author may, in a certain sense, be placed between L. E. J. Brouwer and G. Mannoury (see Synthesis, 1957, for a discussion of Mannoury's contributions to the foundations of mathematics). Closer to Brouwer in that his antitraditional position permits mathematics to proceed (i.e., mathematical development in the context of his foundations is not impeded by presently unsolved philosophical and psychological problems) and closer to Mannoury in the throwing off of traditional assumptions and the exploitation of the syntactical, semantical and pragmatic nature of natural language".

[337] Doron Zeilberger es un matemático israelí nacido en Haifa en 1950 que es conocido principalmente por su contribución a la *Combinatoria*. Recibió por ello la medalla *Leonard Euler* en 2004 y en 1998 el premio *Leroy P. Steel* concedido por la *American Mathematical Society*. Una referencia de sus obras más importantes en **http://scienceworld.wolfram.com/biography/Zeilberger.**html. Se considera a sí mismo un *ultrafinitista* y es conocido por firmar sus artículos con su ordenador "Shalosh B. Ekhad" (shalosh=3 y ekhard=1 en hebreo) como coautor:**(http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/ekhad/papers.html**),así como por sus provocativas opiniones (accesibles en su página de la Rutgers University (New Jersey):

http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/OPINIONS.html. En una entrevista realizada en 2007 para la revista FOCUS sostiene que "Experimental mathematics is a rapidly growing field, both explicitly and implicitly. Explicitly, there is a very good journal by that name, an Institute in Simon Fraser University, and

Andreas Kornai, Vladimir Sazonov,Mirco A. Mannucci, y Shaughan Lavine[338], que no fueron considerados en las obras de Troelstra, no existiendo todavía hoy en la literatura un estudio valorativo de su importancia para la filosofía de la Matemática; pero es claro que representan una nueva tendencia, aún minoritaria, cuyas posibilidades no pueden minusvalorarse aunque no se sustente en una fundamentación sólida según las concepciones clásicas de la filosofía de la Matemática.

Hay que destacar que la mayor parte de los autores reseñados enfocan sus trabajos sobre matemática y epistemología de la matemática defendiendo una posición *ultrafinitista* pero enfocada desde dos perspectivas que ocupan gran parte de su curriculum profesional: la Teoría de la Computación y la Teoría del Lenguaje. En relación con las últimas aportaciones de estos autores, Horsten señala que "on most accounts, ultra-finitism leads, like intuitionism, to revisionism in mathematics. For it would seem that one would then have to say that there is a largest natural number, for instance. From the outside, a theory postulating only a finite mathematical universe appears proof-theoretically weak, and therefore very likely to be consistent. But Woodin has developed an argument that purports to show that from the ultra-finitist perspective, there are no grounds for asserting that the ultra-finitist theory is likely to be consistent (Woodin 2011). Regardless of this argument (the details of which are not discussed here), many already find the assertion that there is a largest number hard to swallow. But Lavine has articulated a sophisticated form of set-theoretical ultra-finitism which is mathematically non-revisionist (Lavine 1994). He has developed a detailed account of how the principles of ZFC can be taken to be principles that describe determinately finite sets, if these are taken to include indefinitely large ones" (Horsten, 2012, 19).

El *predicativismo* y el *semi-intuicionismo* son incluidos, como dijimos, por Troelstra entre las escuelas *constructivistas* aunque, como se reconoce en el mismo texto (Troelstra, 2011), se trataría más bien de coincidencias puntuales a partir de concepciones distintas. El origen del *predicativismo* está en la obra de Russell y, más precisamente, en el análisis que Poincaré realizó de la llamada *paradoja de Russell*, que define la colección C de todas las entidades matemáticas que satisfacen el enunciado $\neg x \in x$; el argumento consiste en preguntarse si el mismo C satisface la condición, y se deriva una contradicción. El diagnóstico de Poincaré establece que esta definición no define de hecho ninguna colección, pues es imposible definir una colección S por medio de una condición que implícitamente se puede referir a sí misma ya que se establece un *círculo vicioso*. Las definiciones, como ésta, que

---

at the recent annual meeting at New Orleans there was a special session dedicated to it. This is a good start, but still at its infancy. However, implicitly, more and more mathematicians, even pure ones, use the computer daily to formulate and test conjectures, in a mode that George Andrews calls "pencil with power-steering" (…) In this kind of research, we try to teach the computer to firs make a conjecture, all by itself, and then automatically prove its own conjectures, also all by itself! Of course, the only way we can do it, at present, is by focusing on narrowly-defined areas".

http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/JoeGallianInterview.html. Ha desarrollado programas para ejecutar con *Maple* que abarcan infinidad de campos concretos de la Matemática y que son de libre acceso en: http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/programs.html

338 Shaughan Lavine: home page: http://dingo.sbs.arizona.edu/~slavine/
papers: http://zillion.homelinux.com/foswiki/bin/view/Main/ShaughanLavinePublications
Rohit Jivanlal Parikh: home page & papers: http://www.sci.brooklyn.cuny.edu/cis/parikh/
http://www.sci.brooklyn.cuny.edu/cis/parikh/parikh-pubs.html
Andreas Kornai: home page: http://www.kornai.com/, papers: http://www.kornai.com/pub.html
Stephen Cook: home page & papers: http://www.cs.toronto.edu/~sacook/
Mirco Mannucci: home page: http://cs.gmu.edu/~mmannucc/
Vladimir Sazonov: home page: http://cgi.csc.liv.ac.uk/~sazonov/,
papers: http://cgi.csc.liv.ac.uk/~sazonov/papers.html .

violan el *principio del círculo vicioso* se denominan *impredicativas*; una definición con sentido sólo se podría referir a entidades que ya existan independientemente de la colección definida, y tales definiciones se denominarían *predicativas*. Pero el asunto no está tan claro; como más tarde señaló Gödel, un platonista encontraría esta argumentación poco convincente pues, si una colección matemática existiera independientemente del acto de la definición, entonces no sería tan evidente el porqué de que no pudieran existir colecciones que *sólo* pudieran definirse impredicativamente (Gödel, 1944 (1990), 119), (Horsten, 2012, 8)[339].

[339] Todo esto le condujo a Russell a desarrollar su *teoría de los tipos* (la simple y la ramificada), en la que las restricciones sintácticas se diseñaron para hacer a las *definiciones impredicativas* fórmulas mal construidas (no válidas en el formalismo); en la *teoría simple de tipos* las variables libres en las fórmulas que expresaban una definición tomaban valores en un rango de entidades al cual la colección que era definida no pertenecía, y para las variables ligadas de las fórmulas de definición en la *teoría ramificada de tipos* se requería que su rango no incluyera la colección que era definida. Pero con independencia del propósito de Russell de reducir la totalidad de las Matemáticas a la Lógica, pronto se aceptó que la *teoría ramificada de tipos* era un aparato demasiado pesado y engorroso para formalizar los argumentos matemáticos usuales. Weyl, como Poincaré, no compartía en absoluto el logicismo de Russell y sostuvo además que en la práctica era imposible trabajar en Matemáticas en el formalismo de la *teoría ramificada de tipos* de Russell. "Weyl developed a philosophical stance that is in a sense intermediate between intuitionism and platonism. He took the collection of natural numbers as unproblematically given. But the concept of an arbitrary subset of the natural numbers was not taken to be immediately given in mathematical intuition. Only those subsets which are determined by arithmetical (i.e., first-order) predicates are taken to be predicatively acceptable" (Horsten, 2012, 9). Además pronto se observó que una gran parte de las definiciones estandard de Análisis eran impredicativas, con lo que el foco se alejó de las paradojas de la teoría de conjuntos; además los matemáticos se convencieron de que éstas no afectaban tanto como inicialmente se pensó a las teorías fuertemente impredicativas de Cantor y Zermelo. En este contexto Weyl se propuso asentar el Análisis clásico sobre una base predicativista, pero pronto abandonó su proyecto al abrazar temporalmente el programa intuicionista de Brouwer. "These factors caused predicativism to lapse into a dormant state for several decades" (Horsten, 2012, 9). Pero en los años 60 Solomon Feferman (1964, 1988b y 1997) resucitó con éxito las investigaciones desde la perspectiva *predicativista*. Demostró que la estrategia propuesta por Weyl podía ser iterada hasta el orden transfinito y aquellos conjuntos de números que se podían definir por medio de la cuantificación sobre los conjuntos que Weyl considerada predicativamente justificados podían ser considerados también predicativamente aceptables, y así sucesivamente. Así el proceso se propagaba sobre un camino de *ordinales predicativos* hasta un ordinal que podría considerarse una cota superior (el *ordinal de Feferman–Schütte* Γ_0), y desarrolló también una medida de la predicatividad del camino. Esta teoría fue desarrollada también independiente y casi simultáneamente por Kurt Schütte (1960 y 1968), -éste fue el último alumno de doctorado de Hilbert, aunque su tesis "Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik" fue dirigida en la práctica principalmente por Bernays; murió en 1998 después de ser en sus últimos años profesor en la *Ludwig Maximilians Universität* de Munich-. A partir de aquí se desarrolló una investigación en los últimos años del siglo XX para tratar de determinar qué partes de la Matemática estándar podrían desarrollarse justificadamente dentro del esquema predicativista; esta investigación fue desarrollada fundamentalmente por Solomon Feferman (2005) y Harvey Friedman (1985), y puede decirse que con éxito: "The research (…) shows that most of twentieth century analysis is acceptable from a predicativist point of view" (Horsten, 2012, pp. 8-10) y "thanks to the pioneering efforts of Weyl and the modern proof-theoretic work of Feferman, Schütte, and others, it is now clear that a great deal of ordinary mathematics, including virtually all of nineteenth century analysis and much of twentieth century functional analysis, can be carried out in systems that qualify as 'predicative' according to rather precise standards that these proof theorists have forged" (Hellman, 2004, 2). El programa de Weyl fue planteado en sus obras (Weyl, 1918 y 1919). Una exposición detallada y completa de la moderna realización de ese programa en (Feferman 1998, ch.13), que contiene también una bibliografía exhaustiva sobre *predicativismo*, y (Feferman, 1998b). Una excelente exposición resumida en (Feferman & Hellman, 1995). Sobre las implicaciones filosóficas del moderno *predicativismo* véase (Hellman, 2004). Ya Gödel destacó el hecho sorprendente de que la simple formulación del *principio del círculo vicioso* es un problema más difícil que su propia evaluación. Esto se concreta en que, por ejemplo, Russell en diferentes pasajes de los *Principia* ofrece al menos tres formulaciones del principio que no conducen a evaluaciones concordantes: "Vicious circle principle I: *No totality can contain elements definable only in terms of the totality.* Vicious circle principle II: *Everything that involves all the elements of a totality can not be an element of the totality.* Vicious circle principle III: *Everything that presupposes all the elements of a totality can not be an element of the totality.* Only the *vicious circle*

Como acabamos de señalar, se puede considerar a Poincaré el fundador del *predicativismo* pero en muchos de sus trabajos se le podría considerar también como *semi-intuicionista* y en otros un *formalista*; algunos lo encuadran dentro del *convencionalismo*. Como señala Troelstra (2011, 4), "one cannot extract a unified and coherent point of view from Poincaré's writings. On the one hand he is a forerunner of the (semi-)intuitionists and predicativists, on the other hand he sometimes expresses formalist views, namely where he states that existence in mathematics can never mean anything but freedom from contradiction". De lo que no hay duda es del importante papel que desempeñó en los debates de comienzos del siglo XX. Para la historia del *constructivismo* Poincaré sería importante, según Troelstra, por dos razones: primero, por la discusión explícita y el énfasis en el rol de la intuición en la Matemática, y específicamente en la 'intuición pura del número', con lo que coincidiría con los *semi-intuicionistas* y se anticiparía a Brouwer; y segundo, por su crítica de las *definiciones impredicativas*, con lo que se le podría considerar el fundador del *predicativismo*, que fue planteado como un programa por Weyl en 1918 pero que no llegó a desarrollar.

La reactivación del programa predicativista de Weyl en los años 60 y su desarrollo, principalmente por Feferman, Schütte y Harvey Friedman (véase la nota anterior) a llevado a

---

principle I makes it impossible the derivation of mathematics from logic required by the logicist program*"* (**http://planetmath.org/**, 2013). Así, lo relevante de esta tricotomía radica en que las consecuencias del *principio del círculo vicioso* (según la versión que se adopte) dependen del grado de una posición previa anti-platonista (o anti-realista, en el caso más extremo). Y si uno asume una posición realista, según la cual los conceptos y las clases tienen una existencia independiente del sujeto cognitivo, entonces puede asumir sin problemas las *definiciones impredicativas*, como subrayó Gödel. Por otra parte, las *definiciones impredicativas* no violarían el *vicious circle principle II* si se interpreta "all" como una conjunción infinita, pues en tal caso una definición impredicativa que caracterizara unívocamente un objeto no involucraría a la totalidad como un ente en su definición. Y una definición impredicativa no violaría el *vicious circle principle IIII* si se interpreta "presuppose" en el sentido de que se asume la *existencia* de *una totalidad*, pero no en el sentido de que se asume *el conocimiento* de ella (**http://planetmath.org/**, 2013). En cualquier caso el *predicativismo* como programa presupone un mayor o menor grado de *antiplatonismo*. Así, para Feferman "I am a convinced antiplatonist in mathematics [and reject the view that] objects such as numbers, sets, functions, and spaces exist independently of human thoughts and constructions, and [that] statements concerning these abstract entities...have a truth value independent of our ability to determine them....although this [platonist view] accords with the mental practice of the working mathematician, I find the viewpoint philosophically preposterous" (Feferman (1998), Preface, p. *ix*.). Pero esto no debe entenderse en el sentido de que el *predicativismo* (en sus distintas variantes) supone un *nominalismo*, al menos en el sentido tradicional, teniendo en cuenta por ejemplo su aceptación sin restricciones de la *existencia* de los números naturales y de la lógica clásica. En sus más recientes trabajos Feferman ha revisado y suavizado además la formulación de su *antiplatonismo* aceptando la *objetividad* de los valores de verdad, al menos para los enunciados aritméticos, pero sin una *ontología* explícita de los números como objetos abstractos independientes de la mente Hellman (2004, 6). Y sobre esta base Hellman ha tratado de continuar la obra de Feferman desarrollando lo que él denomina un "estructuralismo eliminativo". Se puede consultar la página web de Geoffrey Hellman: **http://www.tc.umn.edu/~hellm001/**, y se pueden descargar algunos de sus principales artículos online en:
http://www.tc.umn.edu/~hellm001/SelectedPublications.html. Para algunos autores, el *predicativismo* tal y como se ha desarrollado en los últimos 30 años a partir de las propuestas de Weyl sería la cuarta corriente fundamental de la Filosofía de la Matemática moderna junto con el *logicismo*, el *formalismo* y el *intuicionismo* (Horsten, 2012, pp.2-9), que se añadirían a las tradicionales *platonismo* y *nominalismo*. Sin embargo, esta clasificación, como ya hemos indicado, es muy discutible porque, en primer lugar, identifica el *finitismo* de Hilbert por un lado con el de Herbrand o Skolem (que desde un punto de vista filosófico eran muy distintos) y, lo que es peor, con el *formalismo* de Curry (y aunque no se menciona explícitamente siguiendo la costumbre de la mayoría de los especialistas de la Filosofía de la Matemática de prescindir de los matemáticos, de Bourbaki) que, como vimos, no tenían nada en común con las posiciones filosóficas de Hilbert; y, en segundo lugar, deja sin clasificar adecuadamente dos corrientes fundamentales de la moderna Filosofía de la Matemática y de la Lógica: el *estructuralismo* y el *ficcionalismo* (y otras relevantes como el *convencionalismo*).

su consolidación como una filosofía sólida de la Matemática y con significativas implicaciones en la Metamatemática: “Nevertheless, thanks to the pioneering efforts of Weyl and the modern proof-theoretic work of Feferman, Schütte, and others, it is now clear that a great deal of ordinary mathematics, including virtually all of nineteenth century analysis and much of twentieth century functional analysis, can be carried out in systems that qualify as ‘predicative’ according to rather precise standards that these proof theorists have forged” (Hellman, 2004, 2). Y también para Horsten (2012, 9), “This calibration of the strength of predicative mathematics, which is due to Feferman and (independently) Schütte, is nowadays fairly generally accepted. Feferman then investigated how much of standard mathematical analysis can be carried out within a predicativist framework. The research of Feferman and others (most notably Harvey Friedman) shows that most of twentieth century analysis is acceptable from a predicativist point of view”. Pero el *predicativismo* en la forma que ha tomado recientemente bajo estos autores tiene una importante relación con el *finitismo*, y más precisamente, con el programa de Gödel que se proponía superar las limitaciones del programa propuesto por Hilbert planteadas por los teoremas de incompletitud (lo cuál no deja de ser paradójico teniendo en cuenta el *platonismo* declarado de Gödel; es una evidencia más de que en el fondo se trata en ambos casos de enfoques *realistas*); pues la justificación de *caminos de ordinales predicativos* hasta la *cota transfinita* Γ_0 *de Feferman-Schütte* (que marcaría el límite de las construcciones predicativas) permite la extensión de los procedimientos finitistas por inducción hasta numerales transfinitos, que era precisamente la propuesta de Gödel, y la introducción de nuevos *axiomas transfinitos* que realizarían una *unificación* conceptual de los teoremas de la Matemática ordinaria[340]. Esto lleva a algunos autores a hablar del *programa de Feferman-Gödel*, que habría sido confirmado por estos desarrollos del *predicativismo*. Aunque “now it must be conceded that we are only at the early stages of probing Gödel's doctrine and strategy for justifying transfinite set theory in the manner of Friedman's program. Not surprisingly, we simply do not yet have a rich body of results exemplifying unification of mathematics (old and new) by means of higher set theoretic axioms, especially if the mathematics is required to be combinatorial in character” (Hellman, 2004, 13).

Quizás, después de todo, estas coincidencias no deberían extrañar porque el *predicativismo* ya en los planteamientos iniciales de Poincaré y Weyl surgió como una respuesta (al igual que el *finitismo*, el *intuicionismo* y las demás corrientes *constructivistas* aquí expuestas) al escepticismo (o reserva metodológica) frente a la concepción clásica del *transfinito* cantoriano y, en particular, del *continuo*, y de la noción de “todos los subconjuntos de un conjunto infinito numerable”; y al igual que las demás corrientes aquí estudiadas, plantea reservas para hablar, por ejemplo, de funciones que no pueden en principio ser dadas a través de una descripción matemática precisa; un requerimiento básico de la *predicatividad* sería que todo objeto matemático se pueda presentar por medio de una cadena finita de símbolos de un lenguaje contable, y esto incluye por tanto las fórmulas que definen conjuntos o funciones, con cuantificadores en las fórmulas restringidos a objetos (conjuntos) previamente considerados “aceptables”. Es evidente la total coincidencia con los

---

[340] The reader may recall that Gödel (1983), 477) explicitly considered “verifiable consequences" of new axioms as the target of unification, i.e. mathematical results demonstrable without the new axioms, whose proofs with their aid would be simpler, more perspicuous, and brought together in a unified way. The focus on new theorems going beyond the old axioms is characteristic of Friedman's program, but Gödel also explicitly recognized the “fruitfulness" of extensions of set theory by large cardinals, as contrasted with their negations, in that new theorems about the integers become provable (Gödel (1983), 483), and he even wrote, of large cardinal axioms due to Mahlo, that they “increase the number of decidable propositions even in the field of Diophantine equations." (Gödel (1983), 477.) Thus, Friedman's focus on new theorems of the character of “ordinary mathematics" is an entirely natural outgrowth of Gödel's ideas” (Hellman, 2004, 13).

planteamientos básicos del *finitismo* de Hilbert. Pero en contraste con el *intuicionismo*, y al igual que en Hilbert, el sistema de los números naturales tiene un tratamiento clásico y la lógica clásica se considera totalmente legítima. El foco se pone en la discusión de los "principios de existencia" de los conjuntos que permitan decidir dicha "existencia" como legítima, pero huyendo de todo planteamiento ontológico de fondo; más bien se trataría de las condiciones de aceptación del "conocimiento" de esos objetos. Se podría hablar, por tanto, de un "platonismo débil" que, en el fondo, era también el enfoque del *finitismo* tal y como fue planteado por Hilbert.

Bajo el epígrafe de *semi-intuicionistas* o *empiristas* Troelstra engloba a los matemáticos franceses Borel, Lebesgue, Baire y al matemático ruso Luzin, que anticiparon algunas de las críticas a la fundamentación de la Matemática moderna que luego surgirían y se radicalizarían en el *debate fundacional* pero que, por lo demás, formaban un grupo absolutamente heterogéneo como reconoce el mismo Troelstra (2011, 5): "their discussions of foundational problems are always in direct connection with specific mathematical developments, and thus have an 'ad hoc', local, character; also the views within the group differ". Lo que tendrían en común sería la idea de que, incluso si los objetos matemáticos existieran con independencia de la mente humana, la Matemática sólo podría manejarlos en la medida en que fuéramos capaces de construirlos mentalmente, es decir, que pudiéramos tener acceso a ellos por nuestra intuición y, por tanto, ser capaces de definirlos explícitamente, lo que a veces sólo ocurre cuando somos capaces de "descubrirlos" *empíricamente* en el mundo real. En cierta forma se podría incluir en este grupo a Poincaré y a Hermann Weyl en ciertas fases de su evolución intelectual. Parece claro también que ese "empirismo" tiene también muchos puntos en común con los recientísimos autores *ultrafinitistas* de tipo computacional que hemos mencionado más arriba, en el sentido de que estos últimos también sostienen el carácter "empírico" del conocimiento matemático a través de la simulación y experimentación computacional.

Una conclusión relevante, en mi opinión, es que los planteamientos del *finitismo*, del moderno *predicativismo* y de los autores recientes que hemos clasificado como *ultrafinitistas* no son en absoluto incompatibles, sino que expresarían una complementariedad de puntos de vista dentro de un mismo enfoque *constructivista* (entendiendo este término en un sentido muy amplio, que significaría una reserva a los enunciados de "existencia"), y todos se podrían caracterizar también por un "platonismo débil" desde el punto de vista ontológico y, en la práctica (aunque no siempre lo planteen explícitamente) por un desplazamiento de la problemática del conocimiento al *lenguaje* en el que se expresa el análisis de los objetos matemáticos. La posición filosófica de fondo del *predicativismo* y su relación con el *lenguaje*, que compartiría con las otras dos corrientes aquí mencionadas, la expresa muy bien Hellman:

> "Perhaps, even more fundamentally, there is a worry about the intelligibility of reference to that which is beyond even the possibility of identification by means of mathematicolinguistic expression. Perhaps, like the intuitionist, the predicativist thinks that classicists are deluding themselves in their efforts to communicate about genuinely uncountable totalities, and perhaps, as in the case of some intuitionists, this view can be traced back to a verifiability theory of meaning. Or perhaps, only somewhat more modestly, an epistemological claim would be made, that rational belief only extends as far as that which is graspable in predicativist terms -in the case of mathematics, objects that are definable/describable in such terms and theorems that are provable in a predicatively justified system" (Hellman, 2004, 4).

Esta autolimitación del conocimiento a *lo que es aprehensible por la mente humana y mediado por el lenguaje* es, como vimos en el Capítulo I, la característica fundamental de la epistemología kantiana, por lo que todos estos movimientos se podrían calificar de genuinamente kantianos. Hay que recalcar que estos movimientos los hemos caracterizado en el sentido de que *coinciden* con el constructivismo en algunos puntos, pero que no son genuinamente constructivistas; porque una pregunta que surge inmediatamente es si la filosofía de la Matemática de Kant es constructivista, y la respuesta que se deduce inmediatamente de nuestro análisis de Kant y de este estudio del constructivismo, es que no aunque, como en el caso de estos autores modernos, plantee alguna coincidencia o mas bien una aceptación *condicionada o limitada* del constructivismo dentro de una concepción más general. Pero queda planteada la necesidad de una investigación específica sobre el sentido y el carácter que Kant asignaba a la *construcción de conceptos en la intuición* y que para él era determinante en la delimitación de la Matemática[341]. Pero si, según nuestro análisis, existe una concordancia básica entre Kant y Hilbert en su concepción de la Matemática y en el rol de la intuición, y si además la posición de Hilbert evoluciona creando un camino propio para la comprensión de los nuevos problemas que plantea la Matemática del siglo XX separándose de Kant en algunos aspectos, el hecho de que la Matemática desarrollada a partir de 1950 y la Lógica de ese mismo periodo (incluyendo las lógicas no-standard) planteen problemas radicalmente nuevos, nos fuerza a un análisis siguiendo el viejo lema de los neokantianos *mit Kant – über Kant hinaus!*, que podríamos adaptarlo a nuestro estudio: "con Kant y Hilbert, más allá de Kant y Hilbert!". Esta es la tarea que emprendemos a continuación en la Parte-III.

[341] Los planteamientos de Cassirer (1907 y 1910) y su teoría del *reines Denken* y los *elementos ideales* son el primer intento serio en esa dirección.

PARTE-III

CON KANT Y HILBERT, MÁS ALLÁ DE KANT Y HILBERT.

CAPÍTULO-6

La Lógica Matemática después de Hilbert y su perspectiva.

6.1.- Introducción.

Esta Parte-III (Capítulos 6, 7, 8 y 9) tiene tiene cuatro objetivos específicos bien definidos:

1) Se pretende cerrar de una forma exhaustiva el estudio de la Lógica y de su relación con la Matemática desde una perspectiva actual, abordando el análisis de lo que consideramos *las fronteras de la Lógica* (Capítulo-6 y 7).

2) El segundo objetivo consiste en el estudio y extracción de las consecuencias epistemológicas de un conjunto de ciencias Matemáticas y Exactas desarrolladas a lo largo de los últimos 80 años (Capítulo-7).

3) En muchos aspectos, estas nuevas teorías contienen elementos que podrían ser interpretados desde una perspectiva no realista, lo que nos lleva a reconsiderar y valorar el *realismo robusto* que en la Parte-I hemos adjudicado a Kant. Además se intenta reinterpretar el sentido de las aparentes críticas por el mismo Kant de su enfoque realista realizadas desde su consideración del *punto de vista transcendental* (Capítulo-9).

4) Se cierra la actual valoración de Kant con el estudio de ciertas investigaciones realizadas en los últimos 10 años y que sugieren que los procesos visuales y gráficos en la Matemática de Euclides representan un lenguaje en el que se expresa una lógica relacional que era también la propia de la Matemática clásica, al igual que la de gran parte de la moderna. E intentamos justificar que la *práctica* matemática de la Matemática de Euclides que estaba en la base de los análisis de Kant no era esencialmente distinta de la *práctica* de la Matemática moderna, en contra de lo que se pensaba a comienzos del siglo XX bajo la influencia del enfoque logicista planteado por Russell. Y considerando su fundamento en los estudios previos de las neurociencias y de las ciencias cognitivas, estas investigaciones plantean, desde un punto de vista más general, un nuevo enfoque de la epistemología con un sólido fundamento *naturalista* (Capítulo-8).

Todos los análisis de esta Parte-III considerados en su conjunto refuerzan considerablemente las conclusiones obtenidas en las Partes-I y II de nuestros análisis de Kant y Hilbert, rompiendo con gran parte de los lugares comunes en los estudios del siglo XX, y además les da una nueva perspectiva en un contexto en el que la situación en la epistemología de la Matemática es muy distante de la hegemónica hace ahora 100 años a raíz de la publicación de los *Principia* de Russell. En el Capítulo-6 se aborda el primer objetivo y se estudia el origen de la Lógica Matemática desde mediados del siglo XIX, ampliándose con los resultados obtenidos en los últimos 80 años desde la muerte de Hilbert. Se realiza aquí un análisis singular del Cálculo de Conectivas ya que, pese a su simplicidad, permite el desarrollo de un amplio abanico de reflexiones, con frecuencia críticas. Además, éste era para los *finitistas radicales* el único campo puramente lógico y sin contaminación de consideraciones conjuntistas o de otro tipo. Y se aborda un estudio de las Lógicas no-standard que han ido surgiendo desde enfoques críticos paralelamente a la consolidación de la Lógica standard. También se estudia en este Capítulo-6 la evolución del pensamiento lógico de David Hilbert y los debates en torno a la FOL y SOL y que, aparentemente, se cerraron en torno a

1958. Hay varias modalidades de las Lógicas no-standard que no se incluyen en este estudio y que se tratan ampliamente al comienzo del Capítulo-7: las Lógicas no-monotónicas, las Lógicas multivariantes, la *fuzzy logic* y las redes neuronales. Se pretende explorar las nuevas fronteras de la Lógica, que pensamos que podrían desarrollar esa disciplina en el futuro en la dirección del lenguaje formal de los sistemas expertos y de los sistemas que *aprenden*, y en conexión con nuevas ciencias como la simulación de los procesos cerebrales y las neurociencias.

6.2.- La revolución de la Lógica en el siglo XX. Breve reseña histórica.

En la segunda mitad del siglo XIX y las primeras décadas del XX se produjo una profunda revolución en la Matemática y la Lógica que cambió profundamente las concepciones imperantes a lo largo de más de 2000 años en estas disciplinas. Los nuevos enfoques y desarrollos, que también trajeron nuevos problemas, han producido en 150 años un salto cualitativo y cuantitativo sin precedentes en las ciencias, que aún estamos viviendo, y que también tuvieron un fuerte influjo y consecuencias en la Filosofía; por ejemplo, como hemos ya explicado, muchos de los análisis de las obras de Kant realizados en los últimos 100 años adolecen del defecto de que identifican términos que aparecen en sus obras (como analítico o sintético) con los significados que se derivan de estos nuevos enfoques, en particular del *logicismo*, y también corrientes claves de la filosofía moderna como la *filosofía analítica* deben entenderse en parte como una consecuencia de esta revolución. El propósito de este Capítulo es exponer algunos de estos cambios y sus consecuencias en relación con la Matemática y la Lógica de una forma crítica y describir también algunas limitaciones de los enfoques logicista y formalista que surgieron en la Epistemología de la Matemática con estos cambios; muchas de las consideraciones críticas ya han surgido a lo largo de este trabajo. Considerada como Cálculo Lógico, tal Lógica podría considerarse como una parte de la Matemática moderna y tiene por tanto sentido preguntarse por el rol de la intuición en esta disciplina, lo cual será nuestro segundo objetivo. En el contexto de este trabajo, debería clarificarse la conexión con la noción de intuición que podría aplicarse aquí, si es que eso tuviera sentido, con las concepciones de la intuición en Kant y Hilbert ya estudiadas. Usaremos inicialmente para ilustrar algunas reflexiones el Cálculo de Proposiciones (Enunciados o Conectivas), cuyo precedente está en la lógica megárico-estoica y que es una parte fundamental que le faltaba a la lógica aristotélica[342]. Nos serviremos aquí, por tanto, de la parte de la Lógica Formal más sólida y menos conflictiva, el Cálculo de Enunciados exponiendo las tres distintas formas de abordarlo, su conexión con el Método Axiomático de Hilbert y su engarce con la fundamentación de la Matemática moderna. Este Cálculo, que al no necesitar cuantificadores evitaría en principio la problemática asociada a la Teoría de Conjuntos, nos servirá como un auténtico *case study* para obtener algunas reflexiones

[342] Peano fue el primero que consideró la importancia de la Lógica de Conectivas para una clarificación de la Matemática, puesto que, según él, la mayoría de los teoremas de la Matemática tienen la forma de implicación, y la Lógica aristotélica, que es básicamente una lógica de inclusiones, no parecía de utilidad para la Matemática. Hoy esto es un lugar común. Por ejemplo, Friedman (1992, 56-57 y 65) al señalar esto, y siguiendo la opinión de Russell, liga la interpretación de Kant de la Matemática precisamente a esas deficiencias de la lógica aristotélica, única accesible para Kant. Para Russell (1903, 457), "en los días de Kant, la lógica formal estaba en un estado mucho más retrasado que en el presente y era todavía posible sostener, como hizo Kant, que no se había producido un gran avance desde Aristóteles y que no parecía que iba a darse ningún cambio en el futuro. El silogismo todavía permanecía como el tipo de razonamiento correcto; y el silogismo era ciertamente inadecuado para las matemáticas". Y no sólo en los días de Kant sino, en realidad, hasta mediados del siglo XIX como señala Moore (1988, 96): "before the twentieth century, there was no reason to believe that the kind of logic that a mathematician used would affect the mathematics that he did. Indeed, during the first half of the nineteenth century the Aristotelian syllogism was still regarded as the ultimate form of all reasoning".

generales fundamentales sobre la Epistemología de la Matemática. Como está fuera de toda duda que para Kant la Lógica formal (aunque en su limitada versión aristotélica) es *analítica y a priori* y que, por tanto, para él no era Matemática, no abordaremos un estudio de este tema en Kant. Sin embargo, puesto que algunas de las interpretaciones más influyentes de la Matemática moderna, cuando menos las interpretaciones filosóficas y epistemológicas derivadas del *logicismo* (Russell) y del *formalismo* (Hausdorff, Curry y Bourbaki), basan la proscripción de la intuición de la Matemática moderna precisamente en el rol que en ésta tendría la Lógica Formal, tiene un interés fundamental aclarar si dentro de la propia Lógica considerada como ciencia autónoma se puede hablar de intuición y en qué sentido. Las limitaciones que aparecen en la propia Lógica si se considera simplemente como un cálculo de signos, ayudarán a aclarar y a fundamentar mejor las críticas desarrolladas a lo largo del trabajo a las concepciones *logicista* y *formalista* de la Matemática, lo cual es otro objetivo. Las observaciones críticas que haremos tomando como base el Cálculo de Proposiciones en sus tres formas de presentación tienen como objetivo una relativización de dicho cálculo, en el sentido de resaltar que este cálculo captura una parte, sin duda fundamental, del razonamiento humano, pero sólo una parte; las diferencias para la Didáctica, por ejemplo, que presentan las tres distintas exposiciones del cálculo revelarían que la forma de razonar humana desborda de alguna forma dicho cálculo.

En 1847 Geoge Boole publica una pequeña obra de 82 páginas, *The mathematical analysis of Logic*, aparecida simultáneamente con *Formal Logic* de De Morgan, y en 1854 publica *An Investigation of the Laws of Thought*. Dando por supuesto que es posible una ciencia de la mente, sus operaciones, según Boole, deberían hallarse sujetas a leyes que poseen verdad absoluta. El camino que Boole considera más conveniente para el descubrimiento de estas leyes es el de valerse en lo posible del lenguaje. Para él, el lenguaje no es meramente un medio para expresar el pensamiento, sino un instrumento de la razón humana. En el uso estricto del lenguaje, así considerado, estarían implicadas operaciones de la mente que, desde esa base, podrían descubrirse fácilmente. Por cuanto que la lógica posee un lenguaje peculiar, debería haber también leyes que rijan las combinaciones de sus signos. La pretensión *psicologicista* de Boole será obtener estas leyes a partir de las leyes de la mente. Así quedarían conectados lenguaje, pensamiento y lógica. Para ello crea un simbología[343]. Y con estos elementos de lenguaje simbólico Boole aborda el problema de la formalización de proposiciones[344]. Su objetivo y su enfoque quedan perfectamente explicados en el Prefacio y la Introducción a *The mathematical analysis of Logic*[345]. Está claro el psicologismo

---

[343] Los signos del lenguaje lógico booleano se clasifican en: 1.- Signos literales : x, y z, ... que en "Laws of Tought" representan ya meramente "clases de cosas" por lo cual Boole entiende "colección de cosas", incluyendo los casos extremos denotados por "Nada" y "Universo". 2.- Signos de operación: +, -, aunque en realidad la yuxtaposición de símbolos literales equivaldría también a otra operación, que podríamos entender como intersección de clases. 3.- Signo de relación: =

[344] Cfr. el Estudio Introductorio de Esteban Requena Manzano al "Análisis Matemático de la Lógica" (Boole, 1847 (1979), pp. 10-38).

[345] "Aquellos que están familiarizados con el estado actual de la teoría del Algebra Simbólica saben que la validez de los procesos de análisis no depende de la interpretación de los símbolos que se emplean, sino solamente de las leyes de su combinación. Todo sistema de interpretación que no afecte a la verdad de las relaciones supuestas es igualmente admisible, y de ahí que el mismo proceso pueda, bajo un esquema de interpretación, representar la solución de una cuestión sobre las propiedades de los números; bajo otro, la de un problema geométrico; y bajo un tercero, la de un problema de dinámica o de óptica" (Boole, 1849 (1979), p.39)."Tomando por fundamento este principio general, me propongo establecer el Cálculo de la Lógica y postular para el mismo un lugar entre las formas reconocidas del Análisis Matemático, aunque por su objeto e instrumentos deba permanecer, por el presente, solo. Lo que hace posible a la Lógica es la existencia en nuestras mentes de nociones generales –nuestra capacidad de concebir una clase y designar a sus miembros individuales por un nombre común. La teoría de la Lógica está así íntimamente conectada con el lenguaje. Un intento satisfactorio de expresar proposiciones lógicas por símbolos, cuyas leyes de combinación se

subyacente al enfoque de Boole. Las teorías de Boole fueron completadas y perfeccionadas por Jevons, Peirce y Schröder. El trabajo de estos autores tenía sus raíces en ciertas propuestas de Leibniz que, durante más de 150 años, filósofos como Kant y otros no consideraron de interés. En su temprana obra *De Arte Combinatoria*, escrita en 1666, Leibniz escribió: "si dispusiéramos de un cuerpo de signos que se ajustasen al propósito de poder tratar todas nuestras ideas de un modo tan claro, tan verdadero y tan detallado como son tratados los números en Aritmética o las líneas en la Geometría del Análisis, podríamos llevar a cabo en el tratamiento de toda cuestión, mientras se encontrase sometida al control del razonamiento, todo lo que podemos llevar a cabo en Aritmética y Geometría". Boole expresa detalladamente esa misma idea en (Boole, 1849 (1979), 45). En realidad, no pensaba que su cálculo fuera una alternativa a la silogística de Aristóteles, sino más bien que ésta podía ser interpretada dentro de su cálculo y no había una ruptura conceptual con la tradición de considerar la Lógica como es estudio de "las leyes del pensamiento", como señala Moore (1988, 96): "when the continuous development of mathematical logic began in 1847, with the publication of George Boole's The Mathematical Analysis of Logic, Aristotelian logic was treated as one interpretation of a logical calculus. Like his predecessors, Boole understood logic as "the laws of thought" and so his work lay on the boundary of philosophy, psychology, and mathematics (1854,1)". Simplemente desarrollaron la idea de crear un cálculo ininterpretado de carácter esencialmente combinatorio, siguiendo el modelo del Algebra, y en el que se podían interpretar tanto la lógica de conectivas como la silogística de Aristóteles, entre otros casos. El mismo Boole dio varias interpretaciones: una en términos de clases, otra en términos de proposiciones y otra en términos de probabilidades[346], aunque tanto él como sus coetáneos que hemos mencionado no hacían ninguna distinción entre "tipos" de Lógica; las distinciones entre lógica de conectivas, lógica de enunciados de primer orden, lógica de segundo orden, etc. tendrían que esperar aún cincuenta años. Para todos ellos "su" sistema era "la Lógica".

Pero aunque Leibniz prestó con frecuencia atención a esa idea que retomaron estos autores, jamás la desarrolló mínimamente. Por otro lado, la parte fundamental de sus escritos lógicos no fueron publicados hasta 1901 por L. Couturat[347]. Al principio la Lógica Matemática (esta denominación fue introducida posteriormente por Peano) se redujo a una teoría de clases, aunque ya Boole indicó que se podría interpretar como un Cálculo de Enunciados. La primera persona que mantuvo que la Teoría de Enunciados era más importante fue Hugh Mc Coll, quien defendió en una serie de artículos sobre el "Cálculo de Enunciados Equivalentes" publicados en 1879 el punto de vista de que el fin de la Lógica es sólo la Teoría de Enunciados y que la principal partícula conectiva al respecto es una especie de implicación. Esto se convirtió pronto en una opinión generalizada. Sin embargo, antes de Peano nadie hizo uso de la Lógica de Enunciados para clarificar los argumentos de la matemática ordinaria, viendo por tanto en la Lógica, inicialmente, un instrumento para aclarar y dar rigor al razonamiento en la Matemática. Peano fue también el primero en dar a la nueva Lógica el nombre de "Lógica Matemática" por considerarla como un instrumento para la Matemática. Y nadie sostuvo antes de Peano que la implicación es la relación principal en la

---

fundarían en las leyes de los procesos mentales que representan, sería, en tal medida, un paso hacia el lenguaje filosófico" (Boole, 1849 (1979), 42).

346 "Eventually, a modified version of Boole's logic would become propositional logic, the lowest level of modern logic. When Boole wrote, however, his system functioned in effect as all of logic, since, within this system, Aristotelian syllogistic logic could be interpreted. Boole influenced the development of logic by his algebraic approach, by giving a calculus for logic, and by supplying various interpretations for this calculus. His algebraic approach was a distinctly British blend, following in the footsteps of Peacock's "permanence of form" with its emphasis on the laws holding for various algebraic structures" (Moore, 1988, 97).

347 Un estudio detallado de Leibniz y de sus planteamientos matemáticos en Javier Echeverría Ezponda (1979, 1981, 1991, 1997a, 1999b, 2000, 2003 y 2011) y Marisol De Mora Charles (1993, 1994, 2009a y 2009b).

Matemática, por ser implicaciones todos o casi todos los enunciados que son verdad en cualquier sistema matemático. En esta tesis de Peano se basa la definición de la Matemática que daría Russell años después al inicio de sus *Principles of Mathematics*[348], si bien Russell convierte la observación de Peano de que la mayoría de los enunciados matemáticos son implicaciones en la afirmación totalmente distinta de que todos los enunciados con forma de implicación son enunciados matemáticos.

El propósito de Peano fue hacer que las demostraciones matemáticas fuesen rigurosas y estuviesen libres de incoherencias. Su punto de vista era que el valor de una demostración y su calidad de buen o mal argumento no depende del gusto o sentimientos interiores, sino de que el argumento tenga una propiedad de validez objetiva. Sostuvo que, al no ser la vieja Lógica aristotélica de mucha utilidad en Matemáticas, puesto que los argumentos matemáticos no son silogísticos, se había juzgado por algunos, entre otros Descartes, que lo que se presenta *claramente* a la mente como verdadero es la única prueba de una argumentación correcta, y cita las palabras de Duhamel: "la argumentación se hace por el sentimiento de la evidencia, que no necesita de ninguna regla, ni se deja sustituir por ninguna". El punto de vista de Peano sobre la demostración fue una reacción a tales opiniones. Para poner las demostraciones matemáticas en una forma rigurosamente razonada, Peano emprendió la tarea de descubrir todas las ideas y leyes de la Lógica que se usan en Matemáticas y de inventar un cuerpo de signos para la clara notación de esas ideas y la clara enunciación de esas leyes. Una inmensa mayoría de los signos, notaciones y convenciones de Peano llegaron a ser normales en Lógica Matemática después de ser empleados por Whitehead y Russell en sus *Principia Mathemática* (1910). Necesitaba también listas de axiomas y definiciones con una enunciación clara y explícita de los puntos de partida de la teoría a desarrollar, y realizó un trabajo muy importante en este campo, lo que le llevó de forma natural a plantearse lo que hoy llamaríamos "problemas metamatemáticos", inaugurando de hecho esta disciplina. En torno a él se formó en Italia un grupo de expertos interesados por las bases axiomáticas de la Matemática y por el uso del lenguaje simbólico construido para los teoremas y argumentos de la Matemática, que ejercieron el control de la publicación periódica *Rivisti de Matemática* (1891) y colaboraron en la producción del libro *Le formulaire de Mathématiques* (1894) en la que el lenguaje de signos usados es distinto de los símbolos correspondientes en los manuales al uso de la Matemática de la época y fue el lenguaje internacional de Peano *Latino Sine Flexione* para el desarrollo detallado de sus teorías. En la misma época, Gottlob Frege, profesor de Matemáticas en la Universidad de Jena publicó sus libros *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1879) y las dos partes de *Die Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet* (1893-1903), además de numerosos artículos, que pasaron completamente desapercibidos. De hecho fue completamente ignorado hasta que Russel en su obra *Principles of Mathematics* (1903) dio cuenta de su obra[349]. Se han hecho diversas conjeturas sobre la

---

[348] "La Matemática pura es la clase de todas las proposiciones de la forma "p implica q", donde *p* y *q* son proposiciones conteniendo una o más variables, las mismas en las dos proposiciones, y ni *p* ni *q* contienen constantes, salvo constantes lógicas (...) La anterior definición de la Matemática pura es, sin duda, bastante inusual" (Russell, 1903, 3). Russell fue el primer filósofo que, como principio, desterró completamente la *intuición* de la Matemática.

[349] Esta es la opinión más general en la literatura. Sin embargo Moore (1988, 129) señala que se debe exclusivamente a la valoración al respecto que hizo Russell, y sostiene que Frege era ampliamente conocido y comentado en Alemania e Inglaterra en los círculos especializados: "there is a widespread misconception, due largely to Russell (1919, 25n), that Frege's *Begriffsschrift* was unknown before Russell publicized it. In fact, Frege's book quickly received at least six reviews in major mathematical and philosophical journals by researchers such as Schröder in Germany and John Venn in England. These reviews were largely favourable, though they criticized various features of Frege's approach. The *Begriffsschrift* failed to persuade other logicians to adopt Frege's approach to logic because most of them (Schröder and Venn, for example) were

razón de este hecho. Bochenski señala que "es un hecho curioso como hubieron de pasar veinte años hasta que se fijó la atención en este pensador, y otros veinte años más hasta que se reconoció la perfecta precisión de su método, por obra de Lukasievicz...La suerte corrida por la obra de Frege se debió en parte a su simbolismo. No es, desde luego, que resulte especialmente difícil de leer...pero es realmente demasiado original, choca excesivamente con los usos milenarios de la humanidad para ser aceptada" (Bochenski, 1956, 283)[350]. Otros han dado también un argumento de peso. Su obra, que podríamos calificar fundamentalmente de metalógica o metamatemática, al no ser exactamente ni matemática "normal", ni lógica "normal", ni filosofía "normal" ni álgebra de la lógica, se salía ampliamente de la lógica que se hacía usualmente en el periodo 1875 a 1900. La importancia del pensamiento de Frege nos obligará a citarlo y a analizarlo en varios puntos pero, para los efectos de esta parte del trabajo, nos referiremos exclusivamente a su concepción de la relación entre Lógica y Aritmética. Su teoría era que el número es una idea que existe independientemente de la mente y que es susceptible de ser analizada en términos de ideas lógicas, lo cual permite dar de ella una definición completamente satisfactoria con la exclusiva ayuda de la Lógica y, dando un paso más, afirmaba que la Aritmética misma es una parte de la Lógica. De acuerdo con Frege, Russell dirá más tarde que la Aritmética "es sólo un desarrollo, sin necesidad de añadir nuevos axiomas, de una cierta rama de la lógica general".

El punto capital de la aritmética de Frege es su definición de *número cardinal*, cuya más sencilla ejemplificación son los elementos de la serie 0,1,2,3,...Para Frege un número cardinal es una propiedad de una clase. Por ejemplo a la pregunta ¿cuál es el número de estudiantes de la UPV en la actualidad? se contestará adecuadamente indicando un número cardinal el cual, según Frege, sería una propiedad de la clase "estudiante de la UPV en la actualidad"; pero por una tal clase Frege, a diferencia de Russell, no considera el listado de objetos que caen bajo tal clase, sino tal clase como idea. El platonismo de Frege es evidente, en oposición al psicologismo y nominalismo de Boole[351].

En 1903 Bertrand Russell publicó *Principles of Mathematics* donde sostiene la opinión de que toda la Matemática puede ser obtenida como el fruto de la Lógica: de todas la ideas de la Matemática pueden darse definiciones que utilicen exclusivamente ideas que son parte de la Lógica; de todos los teoremas de la Matemática pueden darse demostraciones que utilicen

already working in the Boolean tradition. (See [Bynum 1972, 209-35] for these reviews, and see [Nidditch 1963] on similar claims by Russell concerning Frege's work in general.)". Aunque ese conocimiento de su obra no contradice la opinión de Bochenski en el sentido de que no fue en absoluto comprendido, y el mismo Moore señala en esta cita otra posible causa de su no aceptación.

350 "El simbolismo de Frege tiene la notable propiedad de ser bidimensional. Con ello se sale del marco de la práctica histórica de la Humanidad, que ha fijado casi siempre sus pensamientos en escritura unidimensional. Hay que reconocer que esta innovación revolucionaria tiene un gran mérito: ante todo el de haber proporcionado una considerable amplitud a las posibilidades expresivas de la escritura. Pero esto fue justamente demasiado revolucionario: el simbolismo de Frege pareció a la mayoría ininteligible...Russell confiesa en 1903 que hubiera aprendido mucho de él si lo hubiera conocido, pero como no lo conoció siguió a Peano...La Lógica moderna, a pesar de la menor profundidad de pensamiento de su autor si se le compara con Frege, entronca con el simbolismo de Peano" (Bochenski, 1956, 331).

351 Frege formula rigurosamente la definición de número cardinal de una clase x diciendo que ese número es la clase de todas las clases y tal que x e y tienen entre sí una relación uno-a-uno, es decir si y sólo si cumplen las cuatro condiciones: 1) cada elemento de x puede ser agrupado con algún elemento de y, 2) cada elemento de y puede ser agrupado con algún elemento de x, 3) si cualesquiera elementos a y b de x están agrupados con un determinado elemento c de y, entonces a y b son el mismo elemento de x, 4) si un determinado elemento a de x está agrupado con elementos c y d de y, entonces c y d son el mismo elemento de y. A partir de esta definición y con el recurso de los instrumentos de la Lógica Frege logró obtener los teoremas de la aritmética ordinaria, al término de larguísimas cadenas deductivas, en forma de complejos de signos.

exclusivamente axiomas y definiciones que son parte de la Lógica. Los *Principles* constituyen una larga exposición y discusión de este punto de vista, pero no suministran un desarrollo detallado, con las consiguientes cadenas de deducciones que sirvan de soporte a este punto de vista. Este desarrollo detallado, en lo que concierne a la Aritmética, es ofrecido en los *Principia Mathematica*, concebido inicialmente como el segundo volumen de los *Principles* y publicado como obra independiente en tres tomos entre 1910 y 1913. El cuarto tomo, que estaba previsto para la Geometría, nunca se publicó. En él se intenta unir en un sistema general el álgebra lógica de Boole-Schröder, la simbología de Peano y las teorías de Frege, Cantor y Peano, cuyas perspectivas y finalidades difieren originalmente no sólo del álgebra lógica, sino también entre sí. También se intenta abordarlas las sospechas de inconsistencias, algunas ya demostradas por Burali-Forti y por el propio Russell. Y éste fue el origen de la llamada "crisis fundacional" que hemos analizado en parte en nuestro estudio sobre Hilbert. La solución dada por Hilbert queda debilitada por el cuestionamiento del método finitista por los teoremas de Gödel, y ya expusimos las líneas de investigación, que llegan hasta nuestro días, tendentes a superar los teoremas por la vía de debilitar las exigencias del método finitista. El mismo Russell intentó otra solución con su teoría de los tipos. La matemática moderna ha aceptado como una solución del problema una "adecuada" axiomatización formal de la teoría de conjuntos del estilo del sistema de Zermelo-Fraenkel o alguna de sus variantes, y ha seguido trabajando[352]. Pero, en realidad, todos los sistemas anteriores, incluyendo el asumido por la matemática moderna actualmente, son de hecho soluciones *ad-hoc* de las que muchos lógicos creen que no resuelven el fondo del problema. Da la impresión de que los sistemas formales se construyen axiomáticamente incorporando como axiomas *los necesarios* en función de lo que se quiere demostrar. De hecho la investigación lógica dedicada a este problema es una de las más activas. Véase (Ferreirós, 2008), (Field, 2008) y (Field, 2007) para una completa información de las distintas estrategias para abordar el problema y del estado de la investigación actual. Según Hartry Field (2008, viii) "en los últimos veinte años ha habido una montaña de importante trabajo técnico sobre el tópico". Según él además "las paradojas muestran que hay algo erróneo en relación con patrones de razonamiento firmemente asentados, tanto si se trata de patrones con una constitución de significados como si no. Lo que resulta de interés es plantearse cómo podría encontrarse la mejor forma de modificar ese razonamiento: encontrar una nueva forma de razonar tal que podamos convencernos a nosotros mismos de que es intuitivamente aceptable" (Field, 2008, 17). Parece, pues, poco justificada la arrogancia de los logicista y formalistas al sostener como fundamento de su nominalismo el supuesto de que los fundamentos de la Matemática moderna están firme y definitivamente asentados y pretender algo así como que la Matemática hubiera alcanzado el punto omega de su desarrollo. Más aún: pese al enorme impulso que la revolución en la Lógica y la Matemática del siglo XX ha supuesto para estas disciplinas en muchos aspectos, sería ilusorio pensar que se han fijado estándares inamovibles, entre otras cosas porque dichos estándares dejan muchos problemas sin resolver, o mejor dicho, como irresolubles. El rápido desarrollo de la computación en las últimas décadas y el desarrollo incluso de métodos probabilísticos de demostración bien pueden suponer un nuevo impulso que hagan olvidar algunos de los planteamientos actuales y los problemas que han creado. Como señala Leo Corry en su trabajo "The Development of the idea of Proof" en *The Princeton Companion to Mathematics*:

> "Algunos matemáticos incluso creen que las demostraciones asistidas por computador y, aún con mayor importancia, las demostraciones generadas por computador son el futuro de la

[352] Aunque la hipótesis del continuo se ha demostrado por Cohen en 1963 que es independiente de ZFC y se sigue investigando (Ferreirós, 2008, 155), (Woodin, 2001).

> disciplina en su conjunto. Bajo este (actualmente minoritario) punto de vista nuestras concepciones presentes de lo que es una demostración matemática aceptable quedarían pronto obsoletas" (Corry, 2008, 142).

En resumen, en la evolución que va de Boole a Russell se había pasado en un periodo de escasos 50 años del programa de Boole de fundar la Lógica como una rama de la Matemática al programa de reducir la Matemática a la Lógica Simbólica. Es evidente que Kant no tenía ni la más remota sospecha de tales planteamientos, pero es relevante para nuestros propósitos que conceptos claves como son analiticidad, axioma, definición, demostración e intuición adquieren en el contexto del programa logicista un significado completamente distinto al que tenían en Kant (o en Euclides). Esta evolución, y la propia formulación de estas corrientes filosóficas y de la epistemología de la Matemática, es inseparable de la evolución de la concepción de la Lógica en el periodo 1850- 1950. Ferreirós (2001, 441-484) realiza un magistral estudio al respecto, destacando la existencia de dos fases bien diferenciadas en ese desarrollo[353]: Una primera fase, que duraría hasta los años 20, y en la que, junto al desarrollo de una tipología de la Lógica (Lógica de Proposiciones, Lógica de Predicados, FOL, SOL, etc), se produce una expansión de la misma noción de Lógica: la Teoría de Conjuntos sería Lógica, la noción de número sería Lógica, la Matemática sería Lógica; y paralelamente surgen una serie de tendencias filosóficas y epistemológicas sobre esa base con pretensiones de *objetividad científica* (fundada en la supuesta *objetividad* de un lenguaje formal que es en realidad un mero *constructo* mental) y *totalidad explicativa*, y que en mi opinión constituyen un tipo de *reduccionismo* y una *metafísica* de nuevo cuño. Una segunda fase, que duraría hasta los años 50, se caracterizaría por un proceso de reducción de la noción de Lógica y de su ámbito propio, un refinamiento de los procesos formales que pondrían en evidencia sus mismas limitaciones y la estrecha dependencia de los resultados y de los métodos del *lenguaje* en el que se expresan, y que culminaría en la aceptación general de la FOL como el lenguaje y la Lógica suficiente y necesaria para la Matemática. En las siguientes páginas analizaremos los argumentos de Ferreirós y los ampliaremos. Pero yo añadiría una tercera fase que abarcaría desde los años 80- 90 hasta el presente y que se caracterizaría por cuatro componentes que se evidencian en este trabajo:

1º) Un ambiente generalizado de duda acerca de las posibilidades de avanzar en el programa que podríamos llamar "Lógica clásica" y una conciencia de sus limitaciones, aún en la forma restringida que ésta adopta a partir de los años 50. Esto da lugar a una expansión de múltiples programas de investigación en "Lógicas no-standard", de los que damos amplia referencia en los Capítulos-6 y 7.
2º) Una conciencia, y un análisis, de los condicionamientos culturales y de las tradiciones científicas que moldearon la forma en que se desarrollo y finalmente cuajó la llamada "Lógica standard". Un buen ejemplo de esto es el trabajo de Ferreirós más arriba mencionado.
3º) Un *revival* de algunos autores, y muy particularmente de Hilbert y de Frege (autores que, por otra parte, han sido fundamentales en el desarrollo *real* de la Lógica tal y como hoy se concibe), pero enfocados desde una perspectiva inédita y enfrentada a las interpretaciones usuales hasta hoy de su pensamiento, y que abren las posibilidades de nuevos desarrollos[354].
4º) Una explosión de resultados, nuevas teorías y nuevas disciplinas en Matemáticas que ha tenido lugar totalmente al margen de los planteamientos y restricciones de la Lógica y la Epistemología, y que encuentran su justificación en su *aplicabilidad*. Paralelamente se ha

---

[353] "Then, we proceed to interpret the historical course of development reviewed in section 1, which can broadly be described as a two-phased movement of expansion and then restriction of the scope of logical theory. We shall try to pinpoint ambivalences in the process, and the main motives for subsequent changes" (Ferreirós, 2001, 441).

[354] En lo que respecta a Hilbert, esto constituye una parte fundamental de este trabajo.

producido una tendencia en la Epistemología hacia un enfoque *naturalista* de la Matemática, aún no bien definido, y probablemente como reacción racional al conjunto del cuadro aquí descrito.

Por otra parte, y en un ámbito más general que la Lógica, deben señalarse dos aspectos fundamentales relacionados estrechamente con lo anterior. En primer lugar, el interés -particularmente en el ámbito anglosajón- por la epistemología de Kant y su fundamentación de la Matemática, que ha dado lugar a lecturas de este autor totalmente alejadas de las predominantes durante un siglo. Hay que destacar que precisamente Hilbert y Frege se declaraban kantianos, en el sentido de que justificaban su epistemología de la Matemática en su lectura personal de Kant. Uno de los objetivos principales de este trabajo es determinar con precisión la conexión en este aspecto entre Hilbert y Kant. Y en segundo lugar, el desarrollo espectacular de la computación y las teorías que fundamentan la inteligencia artificial, la teoría de la información y las neurociencias, no ha sido aún asimilado por los filósofos, cuyas disquisiciones epistemológicas no han integrado los desarrollos en estos campos. Para terminar, señalemos que ese proceso de restricción del dominio de la Lógica lleva a algunos autores a postular que el único campo específicamente lógico es precisamente la Teoría de Conectivas (con sus variantes no standard), que es el tópico que examinamos a continuación[355].

6.3.- El Cálculo de Proposiciones (o de Enunciados o de Conectivas). Un *philosophically sensitive case study*.

El Cálculo de Proposiciones, a pesar de su sencillez, permite una reflexión sobre algunos aspectos importantes de la Lógica Matemática y sus implicaciones filosóficas, obviando la problemática que implican los cuantificadores. Además tiene unas propiedades metamatemáticas perfectas: es consistente, es completa y es decidible. Realizaremos, pues, un comentario de esta teoría (en sus tres modalidades: la teoría semántica, la deducción natural de Gentzen y los sistemas axiomáticos formales). Además, para algunos *finitistas* radicales este Cálculo coincidiría exactamente con *la* Lógica, siendo el Cálculo de Predicados (y más aún los cálculos desarrollados en un lenguaje de segundo orden) Lógica *más* algo no estrictamente lógico. Aunque en un manual moderno de Lógica la Lógica de Proposiciones, también llamada de Conectivas, (es decir, la desarrollada al tomar como unidad la sentencia como un todo, en lugar de fijarse en sus partes) se presenta en los primeros temas como la Lógica más elemental, una lógica de conectivas, lo cierto es que en el desarrollo moderno de la Lógica fue posterior a la Lógica de Predicados, aunque históricamente precedió a la de

---

[355] "Indeed, the viewpoint that logic proper is nothing but sentential logic had some proponents in the history of our subject. Controversy over that thesis was the great divide separating the Aristotelians from the Stoics, which of course stand as the greatest partisans of logic-as-connective-theory. But even in contemporary times, members of the Hilbertian school showed a tendency to restrict logic proper to the theory of the connectives. Here we notice the impact of the foundational atmosphere surrounding the emergence of modern logic. Hermann Weyl seems to have been the first who, in *Das Kontinuum* [77], labelled quantificational deductions as 'transfinite inferences' [*transfinite SchluBweisen*]. In the context of constructivist criticism of abstract mathematics and set theory, that denomination implies that quantification theory is open to doubt and in no way can be presented as evident. This contradicted old convictions regarding what logic ought to be (…). Authors of this period thought that, if anything deserves the name of logic, it must be acceptable to both constructivists and classicists, it must be in some sense 'finite'. The logicians in Hilbert's group, too, during the 1920s, consistently called the basic propositions of quantification theory 'transfinite axioms', a terminology which again implies that they properly pertain to abstract mathematics. (This may reflect the influence of Weyl, for it is likely that Hilbert knew at least parts of his work, begun at Gottingen in the early 1910s, and it is certain that Hilbert's collaborator Bernays knew it.) Hilbert him self contrasts the propositional layer of 'finite logic' with the 'transfinite propositions of our usual mathematics'." (Ferreirós, 2001, 452).

Aristóteles. La Lógica de Aristóteles era una Lógica de Predicados, y hay que remontarse a las escuelas megáricas y estoicas para encontrar un antecedente de la Lógica de Proposiciones o Conectivas. Curiosamente la desarrollaron totalmente, y en comparación, mucho mejor que Aristóteles la de predicados, en el sentido de que la lógica aristotélica sólo consideraba en la práctica la relación de inclusión. Aunque la conocemos poco y fragmentariamente se sabe que tenía un alto grado de formalización y estaba perfectamente axiomatizada:

> "La Lógica sentencial estoica parece haber sido rigurosamente axiomatizada, y precisamente dentro de la distinción expresa entre axiomas y reglas de inferencia" (Bochenski, 1956, 137).

> "...con Megáricos y Estoicos surgió una Lógica sentencial, la segunda gran creación de los griegos en el terreno de la Lógica, justamente lo que faltaba casi por completo en la Lógica aristotélica. Al mismo tiempo llevaron, como ya hemos observado, la consideración formal hasta una concepción formalística de la Lógica, apoyados en una Sintaxis y una Semántica pormenorizadas. Esta Lógica, incomprendida durante siglos, merece también que se la reconozca como una grandiosa creación en el orden del espíritu" (Bochenski, 1956, 120).

En este Cálculo en su forma moderna, y que se desarrolló en los siglos XIX y XX, se plantea primeramente la formalización del lenguaje natural en un lenguaje formal simbólico y posteriormente los principios de la inferencia válida. El análisis de los principios de inferencia válida puede ser enfocado de tres formas equivalentes en sus resultados: el método semántico o teoría interpretativa, el método de deducción formal (sistemas formales) y el método de la deducción natural de Gentzen. Los tres métodos producen el mismo conjunto de fórmulas lógicamente válidas (verdaderas), llamadas también tautologías o leyes lógicas, pero tienen importantes diferencias metodológicas que nos permitirán algunos comentarios. Cuando empleamos el lenguaje para formular afirmaciones verdaderas o falsas estamos haciendo un *uso apofántico* del lenguaje, también llamado uso declarativo o enunciativo. La Lógica se ocupa básicamente del discurso apofántico, es decir, aquél que se caracteriza porque sus afirmaciones tienen un valor de verdad. Estudia primeramente la formalización del lenguaje natural en un lenguaje formal y posteriormente los principios de la inferencia válida. La Lógica más elemental es la Lógica de Proposiciones o Cálculo de Conectivas o Cálculo de Enunciados, donde el elemento básico en la formalización del lenguaje es la proposición o enunciado simple[356]. El conjunto de *fórmulas bien construidas* (fbc) obtenidas con los

---

[356] Básicamente un enunciado con un verbo (explícito o implícito) y con las siguientes limitaciones: 1.-Proposiciones de acción con sujeto no determinado (impersonales) "hace sol", "llueve". 2.-Proposiciones de atribución de propiedades a sujetos determinados y concretos: "Pedro es alto", "los ángulos internos de este triángulo suman 180º". 3.-Proposiciones de relación entre sujetos concretos: "Pedro es primo de Luis" , "Bilbao está entre San Sebastián y Santander", "En este triángulo el lado 'a' es perpendicular al lado 'b' ". Estas proposiciones se representan en el lenguaje formal por una letra minúscula a partir de la p, y eventualmente se subindizan y forman un conjunto potencialmente infinito numerable de símbolos de proposiciones (*atómicas*). Las proposiciones elementales admisibles se pueden conectar en el lenguaje ordinario, formando proposiciones más complejas (*no atómicas o moleculares*), mediante *conectivas* (partículas verbales llamadas en la gramática natural *conjunciones*), que usualmente son: negación, disyunción, conjunción, implicación y coimplicación. La definición rigurosa de un lenguaje formal para el cálculo de proposiciones requiere la especificación de su *alfabeto* y de sus *reglas de sintaxis*. Las expresiones existenciales o universales, que no se refieren a un individuo concreto, quedan excluidas del cálculo. Para incluirlas se amplía el cálculo con la introducción de variables y cuantificadores, entrando a considerar la estructura de la sentencia, y dando lugar al Cálculo de Predicados o Lógica de primer orden (LPO o FOL) que, como hemos dicho, no vamos a analizar inicialmente. Con ello se introduce de lleno la problemática de los conjuntos y del infinito actual, y con ello aparecerá el problema de las paradojas e inconsistencias, así como la necesidad de determinar qué es un objeto y en qué tipo de objetos podemos pensar con fundamento. La introducción de la teoría de conjuntos y su problemática se amplía cuando nos extendemos a la Lógica de segundo orden (SOL) en donde las variables pueden variar sobre un rango que incluya propiedades, relaciones o funciones.

criterios sintácticos especificados constituye el *Lenguaje Formal del Cálculo de Proposiciones*. Es un conjunto potencialmente infinito, pero cualquier fbc tiene un conjunto finito (tan grande como se quiera) de símbolos y un conjunto P finito de componentes proposicionales (fórmulas atómicas). El objetivo fundamental que se plantea ahora es determinar la clase de este conjunto de fórmulas que son verdaderas bajo cualquier interpretación de sus átomos, y que se denominan *tautologías o leyes lógicas*. El caso del Cálculo de Conectivas (o de Enunciados) que estamos considerando es especialmente interesante porque en él toda fórmula es *decidible*, esto es, en un número finito de pasos de un cálculo se puede decidir si es una tautología o no, lo cual no ocurrirá en otros cálculos ampliados. Además también es una teoría *completa* y *consistente*. Hay 3 formas formalmente equivalentes de analizar la clase de las tautologías y de construir un cálculo para *decidir* si una fórmula es una tautología, y son equivalentes (en el sentido de que determinan la misma clase) pero sus enfoques, y las implicaciones de ellos, y que podríamos podríamos considerar de carácter metalógico o filosófico o pedagógico (y por tanto psicológico), son muy distintos. Estos tres métodos son: el método semántico, el método axiomático y el método de la deducción natural de Gentzen.

Hay que hacer notar que la simple formalización de las proposiciones aquí planteada conlleva una drástica reducción de la capacidad expresiva del lenguaje, en particular de su cualidad modal, aún limitándonos a su uso apofántico. Así las expresiones “me gusta, pero no lo compro” y “me gusta y no lo compro” se formalizarían igualmente por $p \wedge \sim q$. René Thom (1971, 75-77) analiza varios ejemplos donde la pérdida de capacidad expresiva *modifica* sustancialmente la lógica del enunciado. “Aunque es bastante obvio, este hecho parece habérseles escapado a los autores de muchos libros de texto (...) no solamente presentan ejercicios extravagantes e inútiles (...) sino que en su intento de operar siguiendo reglas Booleanas con significados de todas las frases construibles en el lenguaje ordinario, los lógicos proceden a una reconstrucción del universo delirante y fantasmagórica” (Thom, 1971, 76). Véase también Tarski (1944).

El *método semántico* (o *Teoría Interpretativa*) se basa en que a cada proposición atómica se le puede asignar cada uno de los valores de verdad: Verdadero=V=1, Falso=F=0, siendo indiferente desde el punto de vista formal el *criterio de asignación de valores de verdad*, con lo que tendremos una lógica bivalente, y las conectivas se definen semánticamente con precisión por la forma en que asignan valores de verdad a las moléculas en función de las asignaciones posibles a los átomos. Dejando aparte la negación, que es una conectiva monádica, las demás son conectivas diádicas. El número de *posibles* conectivas diádicas vendría dado por el número de posibles colocaciones de 1 y 0 (con repetición) en la última columna de la tabla, es decir, variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4 = $2^4 = 16$. El hecho de que sólo se utilicen las 4 primeras sólo se puede explicar porque en el lenguaje natural sólo existen esas conjunciones, y las otras 12 restantes no existen en el lenguaje natural. La coimplicación se introduce a veces como un nuevo símbolo definido. A partir de esto se puede obtener la *evaluación semántica* de cualquier fbc, es decir sintácticamente correcta, asignando todos los posibles valores de verdad a la familia de átomos, a continuación evaluando las moléculas de primer nivel según las definiciones anteriores, luego las de segundo nivel, etc.[357]. Un hecho relevante es que en el conjunto de fbc

[357] Cada línea de una tabla corresponde a una asignación de valores de verdad a los átomos y se dice que es una *interpretación*, y si la última columna de la tabla en esa fila es 1 significa que esa interpretación hace verdadera la fórmula y se dice que esa interpretación es un *modelo* para la fórmula, en cambio si la última columna en esa fila es 0 se dice que la interpretación es un *contramodelo*. Si la última columna tiene unos y ceros, significa que hay interpretaciones que son modelos e interpretaciones que son contramodelos y se dice que la fórmula es una *contingencia*. Si la última columna son todos 1, significa que todas las interpretaciones

del Cálculo de Proposiciones, toda fórmula es por tanto *decidible*, es decir se puede evaluar si es verdadera (tautología) o no, y eso en un número *finito* de pasos. Y la evaluación se puede hacer con un simple programa de ordenador.

La asignación de un valor de verdad a una proposición en el Cálculo depende de la consideración de todas los posibles asignaciones de valores de verdad a sus proposiciones atómicas, siendo indiferente la forma en que se realicen estas asignaciones. Sin embargo, cuando se hacen afirmaciones de hechos fácticos (por ejemplo "llueve") lo relevante es la forma de asignar el valor de verdad del enunciado y su concordancia con el objeto. Esto vale también para cualquier teoría científica. Por ejemplo, en la afirmación "la velocidad de la luz es constante" su verdad depende de la medición empírica del hecho, y de la forma en que se diseñe e implemente dicha medición y su concordancia con el objeto, y no se su derivabilidad lógica de otros enunciados; si en la teoría formalizada dicho enunciado no es derivable, siendo sin embargo experimentalmente verdadero, eso demostraría que la teoría es insuficiente o está mal formulada y debería ampliarse o reformularse para que el enunciado sea derivable. O sea, que la derivabilidad lógica (el ser "analítico" en el sentido logicista) es una propiedad estricta de los sistemas formales, y la formalización (y axiomatización) completa de una teoría científica es más una cualidad expositiva que consolida la teoría –mostrando su consistencia, etc- que una cualidad intrínseca a la teoría, lo cual, como vimos, era exactamente la postura de Hilbert en relación con las axiomatizaciones en la Matemática. Dentro del mismo Cálculo de Enunciados veremos que la asignación de verdad a un enunciado en la Teoría Semántica es equivalente a la derivabilidad en un Sistema Formal, por lo que en este contexto verdadero equivale a derivable (demostrable). Un sistema axiomático va de tautología a tautología, y cualquier referencia al objeto queda eliminada. Una consecuencia de lo anterior es que se modifican radicalmente los conceptos de axioma y definición. Así para Russell (1910) "una definición es una declaración de que cierto símbolo o combinación de símbolos que se introducen por primera vez significan lo mismo que cierta otra combinación de símbolos de los cuales ya se conoce el significado (...) teóricamente toda definición es superflua" (Russell, *Principia*, tomo-I, pag. 12). Ciertamente esto es así en un sistema formal. Pero pocos científicos estarán de acuerdo en que esta definición tan restrictiva de "definición" sea válida fuera de un sistema formal y seguramente convendrán en que en cualquier teoría juega un papel capital otro concepto de definición: precisamente el concepto de definición que Russell utiliza al definir "definición". Una definición es la delimitación conceptual de un objeto de la teoría. En la Matemática moderna se ha impuesto la "definición indirecta", esto es la definición de un objeto de la teoría exclusivamente a través de sus relaciones con otros objetos, dando así lugar a lo que podríamos llamar una "visión estructuralista" de la Matemática; una teoría matemática sería una estructura de relaciones. De hecho, tampoco el logicismo es homogéneo en su concepción de la definición y, aunque lo que se ha heredado hasta nuestros días como enfoque predominante sea el nominalismo de Russell, era muy distinta al respecto la opinión sustentada por Frege. Como señala Körner (1960, 40), "La diferencia entre las dos ramas del logicismo, la nominalista de Russell y la realista de Frege, reside ante todo en sus dos concepciones distintas de la *definición*". Para Frege, definir un objeto no equivale a crearlo, sino a delimitar lo que existe por derecho propio. La definición contextual de los objetos lógicos no bastaría porque no pone de manifiesto su carácter de entidades independientes, y postularlos sería igualmente improcedente porque, si no existen, ninguna postulación logrará darles existencia, y si existen, existirán independientemente de su postulación. Una definición tampoco garantiza (según Frege, no más en zoología que en

posibles son un modelo, o sea, que la fórmula es verdadera independientemente de la verdad de las proposiciones, y se dice que la fórmula es una *tautología o ley lógica*. Por fin, si la última columna son todos 0, se dice que la fórmula es una *contradicción*.

Lógica) que no se encontrara vacía de contenido la noción definida. Si la razón de una definición es *delimitar un objeto* entonces, según Frege, *ha de demostrarse que existe.* Frege analiza este problema y da los criterios para una tal demostración en *Grundlagen der Arithmetik,* (parágrafos 55-56) y *Grungesetze,* (vol. I, parag. 3).

Si consideramos ahora la subfamilia de todas las tautologías del Cálculo de Proposiciones, subconjunto del conjunto de todas las fbc[358], una axiomatización de ésa es una selección de varias fórmulas de la subfamilia de tautologías (axiomas) y de una o varias reglas de inferencia (derivación formal)[359] que permitan llegar mediante su aplicación a las fórmulas de la subfamilia. El conjunto de axiomas debe ser *suficiente (completitud)*, es decir, debe poder generar todas las fórmulas de la subfamilia. Debe de ser *consistente*, es decir, de los axiomas no se debe poder derivar una contradicción; si los axiomas son fórmulas de la subfamilia esta propiedad está asegurada. Y es deseable que los axiomas sean *independientes*, es decir, que si se elimina un axioma, éste no se pueda deducir del resto de axiomas. Así, estas fórmulas de (fórmulas verdaderas, leyes lógicas o tautologías) se dividen en dos grupos: los *axiomas*, que se suponen verdaderos, y los *teoremas*, que son verdaderos porque se pueden derivar de los axiomas; una fórmula (fbc) del Cálculo no es verdadera si no es un axioma ni se puede derivar formalmente de los axiomas. Así la noción de *verdadero* se convierte en el sistema en la noción de *demostrable* o *derivable*. Además un tal sistema axiomático tiene un

---

[358] El Cálculo de Proposiciones es isomorfo con la estructura algebraica de Algebra de Boole. Pero el Algebra de las Partes de un Conjunto también, y lo mismo sucede con el Algebra de Circuitos. Si llamamos Algebra de Boole a la estructura de signos sin interpretar, al asignar a cada signo atómico el significado de una proposición, y a las conectivas siguientes: $\begin{matrix} \wedge = \textit{conjunción} \\ \vee = \textit{disyunción} \\ \sim = \textit{negación} \end{matrix}$ entonces el conjunto de todas las fórmulas bien construidas tiene estructura de Algebra de Boole, podríamos llamarle el Algebra de Boole del Cálculo de Proposiciones. Pero si asignamos a cada signo atómico el significado de un subconjunto de un conjunto X, y a las conectivas: $\wedge =$ intersección de conjuntos, $\vee =$ unión de conjuntos, $\sim =$ complementación de conjuntos, tenemos una interpretación que se puede llamar el Algebra de Boole de las partes de un conjunto X. Y si X son los resultados elementales de un experimento aleatorio, lo anterior representa el Algebra de Boole de los sucesos probabilizables. Y si cada signo atómico simboliza un conmutador eléctrico (o cualquier dispositivo de dos estados (válvulas en redes de tuberías, relés, diodos, transistores), 1=cerrado (conectado), 0=abierto(desconectado), y las conectivas significan: $\wedge =$ conexión en serie, $\vee =$ conexión en paralelo, $\sim p =$ otro conmutador que alterna con p: si p está abierto, $\sim p$ está cerrado, y al revés, entonces estamos en el Algebra de Boole de Circuitos. Así que podría decirse que se ha realizado el programa que Boole exponía en la cita transcrita más arriba: La estructura de Algebra de Boole, bajo una interpretación es la Lógica de Predicados, y bajo otra, otra teoría de otro campo; para Boole, consecuente con su nominalismo, la estructura de signos sin interpretar sería la teoría matemática. Con concepciones análogas, se fue creando a principios del siglo XX la distinción entre *matemática pura* y *matemática aplicada*. Sin embargo, el desarrollo vertiginoso a partir de la segunda mitad del siglo de nuevas teorías matemáticas en todos los campos, el desarrollo de la computación informática, y otros cambios ha diluido la distinción y ha hecho volver ciertas cosas hacia atrás. También podría decirse en el ejemplo considerado que *todas las interpretaciones* son teorías matemáticas, y que son isomorfas. La diferencia de las distintas teorías radicaría en sus objetos y en la naturaleza de esos objetos. La conexión entre el Cálculo de Proposiciones y el Algebra de Conjuntos también se puede establecer de la siguiente forma; Si X es un conjunto y consideramos todas las proposiciones que se pueden enunciar sobre elementos de X, para cada proposición p existe un único subconjunto A_p formado por todos los elementos de X que hacen la proposición verdadera. Además en 1938 Marshall Stone probó el llamado Teorema de Representación de Stone según el cual, toda Algebra de Boole es isomorfa a un álgebra de Boole de conjuntos. Todo esto demuestra, de un lado que la teoría de conjuntos y su problemática ya está íntimamente ligada a la lógica, aún antes de introducir los cuantificadores y el Cálculo de Predicados, y de otro lado, que toda desviación de la Lógica respecto a la aristotélica o la booleana deberá intentar modelizarse matemáticamente mediante un cierto alejamiento de la teoría de conjuntos usual.

[359] Las reglas de inferencia se construyen para que conserven “la verdad”: de “la verdad” de las fórmulas de una cadena se asegura “la verdad” de la última fórmula.

carácter *formal*. Puesto que el significado de una fórmula no tiene relevancia y las reglas de inferencia sólo operan sobre la forma –secuencia de signos de la fórmula-, sólo es relevante la *forma* de la fórmula[360]. En un Sistema Formal Axiomático la elección de los axiomas se puede hacer atendiendo a diversos criterios: economía, agilidad en las demostraciones, independencia del sistema de axiomas, etc. En una teoría científica “suficientemente desarrollada”, si se la quiere axiomatizar, es deseable introducir en los criterios de elección de axiomas el carácter de que sean significativos y relevantes en relación al objeto, lo cual, como vimos era una actitud fundamental en Hilbert. En este contexto, y sólo en este contexto, sería donde tiene sentido la “definición” de *definición* de Russell (1910): “una definición es una declaración de que cierto símbolo o combinación de símbolos que se introducen por primera vez significan lo mismo que cierta otra combinación de símbolos de los cuales ya se conoce el significado (...) teóricamente toda definición es superflua” (Russell, *Principia*, tomo-I, pag. 12).

Gerhard Gentzen planteó en 1934 un nuevo tipo de demostración de los argumentos, que llamó *método de deducción natural* (Gentzen, 1934). Este método es una presentación de la lógica como *sistema de reglas de inferencia* que se caracteriza por aproximar extraordinariamente la demostración formal a la demostración intuitiva (a diferencia de lo que sucede con la demostración axiomática o “no natural”). Se trata entonces de una aplicación más ajustada de la lógica al razonamiento común (tanto en la vida cotidiana como en la ciencia), es decir, de dar cuenta formalmente de los procedimientos naturales de deducción. El comportamiento de razonamiento de un individuo consiste en pasar de unos enunciados (premisas) a otro (conclusión). Y esto sólo puede hacerse en virtud de alguna regla de inferencia. Tanto las premisas como la conclusión no tienen que ser verdaderos formalmente (desde el punto de vista de la forma de razonar común), los razonamientos ordinarios no están constituidos casi nunca por premisas formalmente verdaderas, sino por premisas admisibles. La Lógica se podría definir como la ciencia del razonamiento coherente, y ser coherente consiste en *aceptar como verdadero lo que se seguiría de las premisas si éstas fueran verdaderas*. Por tanto hay una diferencia fundamental entre los dos modos de demostración:

1º) La demostración axiomática parte de enunciados formalmente válidos (axiomas o teoremas ya demostrados, tautologías del cálculo proposicional) para obtener fórmulas del mismo tipo y 2º) La deducción natural parte de enunciados que son indeterminados en su valor de verdad (premisas que no se sabe si son verdaderas o falsas) para obtener fórmulas que serían verdaderas si las premisas lo fueran. El método consiste, por tanto, en hacer un cálculo de reglas más fiel al modo de razonar natural que el método axiomático, es decir, se intenta formalizar la deducción natural. Se trata de presentar la lógica proposicional como un cálculo natural por reglas de inferencia sobre el lenguaje proposicional[361].

---

[360] De forma resumida. Un sistema formal S para el Cálculo Proposicional se define por una cuaterna (A,F,X,R) donde: A: es el *alfabeto* del sistema, es decir, el conjunto de todos los símbolos que se pueden utilizar en el sistema. F: es el conjunto de *reglas de sintaxis* que indican la manera de combinar esos símbolos para obtener las *fórmulas bien construidas* del sistema. X: es el conjunto de *axiomas* o conjunto de fórmulas asumidas válidas en el sistema sin necesidad de demostración. R: es el conjunto de *reglas de inferencia* del sistema; una regla de inferencia es el enunciado de una instrucción para realizar una inferencia válida, es decir, para inferir una fórmula válida de otra que también lo es.

[361] El Sistema de Deducción Natural de Gentzen se basa en ocho reglas de inferencia básicas, dos (una de introducción y otra de eliminación) por cada una de las cuatro conectivas fundamentales: negación, conjunción, disyunción e implicación. La Deducción Natural de Gentzen es un Cálculo que sigue fielmente la forma de razonar humana.

6.4- Algunas observaciones críticas.

En el lenguaje natural un *argumento, razonamiento o deducción* es una cadena de enunciados $P_1, P_2, ..., P_n, Q$ (que aquí limitaremos a los del tipo traducible al cálculo), de las cuales todas menos la última se llaman *premisas* y la última se llama *conclusión*. Un argumento se llama *válido* o una deducción *correcta* cuando no hay ninguna asignación de valores de verdad a los átomos que haga verdad todas las premisas y a la conclusión falsa. Se dice entonces que la conclusión Q es consecuencia lógica del conjunto de premisas $P_1, P_2, ..., P_n$. Si hubiera alguna asignación de valores de verdad a los átomos (interpretación) que hicieran las premisas verdaderas y la conclusión falsa, se dice que el argumento es no válido. A cada *argumento o razonamiento* le corresponde una *fórmula bien construida del Cálculo* $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$, y el *argumento es válido* si y sólo si la fórmula asociada $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ es una *tautología en el cálculo*. Esto se demuestra por el Teorema de la Deducción, que es un metateorema que además se demuestra por reducción al absurdo. En consecuencia, la evaluación semántica de un argumento equivale a la evaluación de su fórmula asociada en el cálculo. Pero como hemos ya justificado, la validez del argumento se puede demostrar también equivalentemente en un sistema axiomático o en el sistema de deducción natural de Gentzen (derivando la fórmula asociada)[362].

Por ejemplo, en el diálogo platónico "Menón" (81a-86c) Sócrates trata de probar, con ayuda de la experiencia y de la lógica, su famosa "teoría de la reminiscencia", según la cual el aprendizaje del conocimiento científico se reduce al recuerdo o reminiscencia de la visión de las ideas en una vida extramundana. La parte "experimental" de su prueba (cuya importancia comentaremos posteriormente) consiste en demostrar ante testigos que un joven esclavo, totalmente desprovisto de formación matemática, puede llegar por sí mismo, si se le somete a un interrogatorio adecuado, al establecimiento de principios y teoremas de geometría, y esta parte ocupa la mayor parte del Diálogo de Platón. La parte lógica demuestra que *el argumento* de Platón es correcto o válido, como demostramos en la siguiente nota por el método semántico[363]. La demostración dentro de un sistema formal axiomático se reduce a una

---

[362] Los dos siguientes metateoremas muestran la equivalencia entre la Teoría Semántica y la Teoría de la Demostración: Teorema de Post: Toda fórmula válida (formalmente verdadera en la teoría de la demostración) es una tautología (fórmula semánticamente verdadera en la teoría interpretativa). Teorema de Kalmar: Toda tautología (fórmula semánticamente verdadera en la teoría interpretativa) es una fórmula válida (fórmula formalmente válida en la teoría de la demostración).

[363] "*Sócrates*: Y, ¿esta ciencia que él ahora tiene, no es necesario que, o bien la haya recibido en un cierto momento de esta vida, o bien la haya tenido siempre (fuera de esta vida)? *Menón*: Sí. *Sócrates:* ¿Acaso ha tenido él (en la presente vida) un maestro de geometría? Imagino que tú debes saberlo bien, dado que ha nacido y se ha criado en tu casa. *Menón*: Tengo la absoluta certeza de que jamás ha tenido maestro alguno. *Sócrates*: Y, sin embargo, tiene estas opiniones, ¿no? *Menón*: Parece indiscutible que las tiene, Sócrates. *Sócrates*: Si no las adquirió en esta vida, es preciso que las haya tenido en otro tiempo y que de antemano estuviera provisto de ellas. *Menón*: Es evidente". (Menón, 85 d-e, Traducción de C. García Gual y E. LLedó). La formalización del argumento es como sigue: p: la ciencia la ha recibido en un cierto momento de su vida, q: la ciencia la ha tenido siempre (fuera de esta vida). Fórmula asociada: $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$.
Evaluación:

p	**q**	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Luego la fórmula es una tautología y el argumento de Platón es correcto o válido. De acuerdo con los Teoremas (Metateoremas) de Kalmar y Post, más arriba mencionados, esto es equivalente a demostrar la manipulación de símbolos físicos según reglas fijas, y que tienen lugar por manipulación espacial y secuencial (temporal), pero sin denotación, y aún los mismos teoremas carecen de significado. Este era el planteamiento de Hilbert en Lógica. Aunque puede pensarse que las demostraciones en el Cálculo de Proposiciones carecen de interés puesto que los enunciados se pueden decidir algorítmicamente y por procedimientos de computación a partir de las tablas de verdad, cosa que en una Lógica ampliada, por ejemplo el Cálculo de Predicados, no es en general posible, son interesantes para aclarar la naturaleza de la construcción y del problema. Pero en la forma de razonar dentro de un sistema axiomático el procedimiento se aleja mucho de la forma de razonar de los humanos. Es por ello que la *Teoría de la Deducción Natural de Gentzen* es mucho más comprensible y manejable, y más recomendable desde un punto de vista pedagógico. Hay un *aspecto psicológico en la deducción* que no puede ignorarse cuando hablamos de las formas de conocer *humanas* y de las características de una teoría. Más aún, la mayoría de las argumentaciones humanas no tienen no tienen la forma del implicador megárico-estoico, que es el adoptado por la Lógica moderna, en el cual el antecedente falso hace la implicación verdadera en cualquier caso. De hecho, por lo general, las argumentaciones no tratan sólo de mostrar la validez del argumento sino de convencer de la verdad del consecuente, para lo cual se esfuerzan en convencer de la verdad de las premisas, que es lo que hace Sócrates en la larga parte "experimental" obviada en la cita que hemos aportado. Se podría decir por tanto que el único argumento puramente lógico irrefutable, y que constituye la base del razonamiento humano, es el *Modus Ponens*. Así en el argumento antes transcrito del Menón, en la larga "parte experimental" del argumento que hemos obviado, Sócrates trata de convencer de la verdad de sus premisas, y esta parte es básica en toda teoría científica y no tiene nada que ver con la lógica del argumento, pero sin embargo es básico en el razonamiento de Sócrates. En una *teoría científica* sobre un campo de la realidad esta parte es fundamental, pero implica la *consideración del objeto* y no se puede hacer prescindiendo del *carácter significante del lenguaje*. Todos estos aspectos están en la base de los programas de investigación que han dado lugar en los últimos 50 años a las distintas *Lógicas no-standard*.

Si nos limitamos estrictamente a la Lógica, esa parte "experimental" de la argumentación humana quedaría ciertamente excluida, y el método axiomático parecería el más adecuado para el análisis y exposición de la teoría (en este caso, el análisis de la clase de las tautologías o leyes lógicas). Tal y como vimos al estudiar la posición de Hilbert en la elaboración de su *programa finitista*, la forma que tiene Hilbert de introducir los *elementos ideales* es utilizando el método axiomático que ya había desarrollado en los *Grundlagen der Geometrie* e incorporando a la teoría axiomatizada el cálculo lógico, a través de un grupo de axiomas –en este caso serían los del Cálculo de Enunciados-, de forma que en su sistema la axiomatización del Cálculo tiene una importancia teórica esencial, y las fórmulas serían formas sin significado pero también las propias demostraciones serían estructuras de signos dispuestos en el espacio, figuras [*Figur*], que se reconocerían intuitivamente, entendiendo por intuición ese reconocimiento no discursivo de formas que ya presentaban los signos numéricos originales:

> "Ahora bien, en tanto que no expresan afirmaciones finitistas, los enunciados ideales, esto es, las fórmulas, carecen de todo significado, por lo que no podemos aplicarles las operaciones lógicas de manera concreta [inhaltlich] como a los enunciados finitistas. Se hace entonces necesario someter a un proceso de formalización análogo tanto a las operaciones lógicas como a las demostraciones mismas. Pero este proceso requiere a su vez una reformulación de las

fórmula en uno cualquiera de los sistemas formales antes presentados, o en el sistema de deducción natural de Gentzen.

relaciones lógicas en fórmulas (...) Por fortuna, esa misma armonía [preestablecida] se pone de manifiesto en relación con nuestra problemática permitiéndonos hallar como algo ya elaborado de manera avanzada el cálculo lógico" (GA, tomo III, 176).

Y es evidente que lo mismo valdría para las propias demostraciones dentro de la estricta teoría lógica del Cálculo de Enunciados axiomatizado, por lo que si aquí se pudiera hablar de intuición sólo cabría hacerlo en los términos estrictos de esa versión hilbertiana limitada de *intuición de formas o de manipulación de signos* que ya hemos comentado detenidamente. En el Cálculo de Proposiciones tampoco tendría sentido hablar de *elementos ideales*, por cuanto que, al no introducir cuantificadores, todos los procesos y todos los objetos son de hecho finitos. Sin embargo, y por oposición a la Aritmética, tampoco existen esos enunciados elementales y esos signos con referencia a objetos finitos particulares (números) fundamentales en la interpretación de Hilbert de la Aritmética, por lo cual tampoco tiene sentido hablar aquí de intuición en ese sentido, y mucho menos de intuición en el sentido en que la usaba Hilbert en relación con la Geometría. Por tanto, considerada como teoría matemática, el Cálculo de Enunciados (y en general la Lógica) tendría un estatus epistemológico muy especial. A menos que se considere como válida la concepción del *formalismo* representado por Curry: "La Matemática es la Ciencia de los *sistemas formales*", en cuyo caso el Cálculo de Enunciados (y en general la Lógica) tendría el mismo estatus que la Aritmética o la Geometría, en cuanto sistema formalizado y axiomatizado de enunciados puramente formales. Pero ya hemos demostrado que esta concepción no es sensata ni razonable y prescinde de las notables diferencias entre los objetos de esas disciplinas, los cuales determinan diferencia metodológicas y formales importantes. Así, pues, la pregunta es ¿qué tiene de específico la Lógica que no tenga otra teoría matemática, y se puede hablar en ella de *intuición*? Y aún, ¿es la Lógica realmente una teoría matemática?

Si descartamos la interpretación del *formalismo* de Curry y del *logicismo* representado por Russell, en realidad dos variantes interrelacionadas de un *nominalismo* en el enfoque del problema, el problema seguiría sin embargo siendo complicado porque, por una parte, el Cálculo de Enunciados (por centrarnos en la parte menos problemática de la Lógica) sería Matemática en cuanto Cálculo, según la concepción moderna de la Matemática, pero por otra parte carecería de la referencia a la *intuición* de un objeto real o construible (según el enfoque de Kant) y, por lo tanto, no sería Matemática en el sentido kantiano[364]. Y de hecho, Kant y Hilbert coinciden en un formalismo extremo en su concepción de la Lógica. Este formalismo hilbertiano en relación con la Lógica puede haber sido una de las causas que favorecieron la

---

[364] Después de su análisis de la *Estética Transcendental*, Kant aborda la segunda división principal de la *Crítica, la Lógica Transcendental*, considerando en primer lugar la *lógica formal común*, lo que quiere decir la lógica formal aristotélica tradicional de su época, y en ella considera que sus juicios son *analíticos y a priori*, con lo cual la lógica formal no sería Matemática según su concepción. Para Stephan Körner "Sus puntos de vista sobre la naturaleza de esta lógica son enteramente compatibles con los resultados de los más importantes avances científicos acaecidos desde su muerte, con la excepción del importante hecho de que consideraba ese sistema como el conjunto total de la lógica. Ahora, como en su época, las proposiciones de la lógica son consideradas como *a priori* y como algo que trata sobre la forma y no sobre el contenido de su materia" (Körner, 1955, 43). En este trabajo no abordamos el estudio del tratamiento de la Lógica por Kant ni, más generalmente, de su *Lógica Transcendental*. Pero debe señalarse que la *Lógica Trascendental* no sólo incluye el tratamiento de la lógica formal de su época sino que pretende una tarea más general que podemos resumir en tres objetivos básicos: primero, separar aquellos conceptos *a priori* que sin ser matemáticos (según su concepción) son aplicables a la percepción, como la *causalidad*, y diferenciarlos de otros tipos de conceptos; segundo, mostrar cómo la aplicación adecuada de tales conceptos conduce a *juicios sintéticos a priori*; y tercero, mostrar cómo la aplicación inadecuada de conceptos *a priori* y de *ideas* (esto es, nociones generales, como la libertad moral, que no son ni aplicables a la percepción ni abstraídas de ella) conducen a determinados errores y confusiones de largo alcance a los que nuestra constitución humana nos hace propensos.

imagen dominante durante años de un Hilbert como paladín del formalismo también en la Matemática, dada la importancia que las discusiones sobre la Lógica tuvieron en el *debate fundacional.* Pero, por otro lado y centrándonos exclusivamente en los distintos enfoques expuestos más arriba en relación con el Cálculo de Enunciados, puede observarse que, aún siendo formalmente equivalentes, hay un matiz decisivo en sus respectivas perspectivas, aunque este análisis no aparece en ninguna parte en Hilbert. Para aclarar el problema de fondo la pregunta podría ser: si se quiere enseñar y alcanzar un dominio de la Lógica, cuál sería la estrategia más adecuada ¿estudiar y analizar los Diálogos de Platón o desarrollar un curso de Lógica Matemática? Seguramente la Lógica Matemática ayudaría a analizar mejor los Diálogos, pero sólo con ella no se aprendería absolutamente nada de Lógica. El enfoque de Gentzen incide en esta peculiaridad. Parece que el *razonamiento* humano opera con *reglas de inferencia* y que, por otro lado, actuarían sobre *contenidos semánticos*, siendo imposible para los humanos razonar sin dichos contenidos referidos a un *objeto*. La Deducción Natural de Gentzen obvia esos contenidos, pero se ajusta mejor a *la forma de razonar* de los humanos y es didácticamente muy superior, aunque sea formalmente equivalente, a la axiomática. Se puede decir que es un método más *intuitivo*, y aquí en sentido de *intuición* se referiría a que se ajusta más a la estructura cognitiva de los humanos, y tendría necesariamente connotaciones *semánticas o / y ontológicas*.

Se puede mencionar aquí el hecho de que, cuando se introdujeron en los años 60 los nuevos planes de Matemáticas en muchos países europeos, de acuerdo con el enfoque formalista y logicista, se modificaron los curriculums con la perspectiva de formar a los alumnos en un dominio precoz del razonamiento abstracto, introduciendo como asignatura clave la teoría de conjuntos[365]. René Thom (1971) ya alertaba sobre el grave error pedagógico, pero también filosófico de dicho planteamiento. "Regreso ahora a mi primer punto, la teoría de conjuntos. Es esta la letanía esencial invocada por aquellos que reivindican la así llamada matemática moderna. Algunos afirman que el uso de la teoría de conjuntos permitirá una completa renovación de la enseñanza de las matemáticas, gracias al cual el estudiante medio será capaz de adquirir la maestría en su curriculum matemático (...) Pero esto no es ni matemáticas ni siquiera lógica (...) Considerado el problema en su conjunto, el excesivo optimismo depositado en el uso de los *símbolos* de la teoría de conjuntos tiene sus raíces en un error filosófico. Se cree que a través de la enseñanza del uso de esos símbolos sería posible hacer explícito el mecanismo subyacente a todo razonamiento y deducción" (Thom, 1971, 75). Thom resalta la importancia que tenía *el contenido o la referencia* de esos símbolos, tanto para los que en el siglo XIX se propusieron la creación de la Lógica Matemática como un cálculo, que se pretendía que fuera auxiliar para formular con más rigor los enunciados de la propia Matemática, como para la Lógica clásica: "El hombre del siglo XX ha descubierto entusiásticamente los silogismos Darapti y Celarent pensados por los escolásticos medievales. Pero, ¡qué enorme deterioro ha tenido lugar! Cuando en el siglo XIX Boole escribió el célebre tratado sobre la estructura del álgebra que lleva su nombre[366] no vació en titularlo "Una investigación de las Leyes del Pensamiento". La creencia ingenua de que toda deducción encuentra su modelo en manipulaciones conjuntistas es compartida por filósofos modernos como los neopositivistas. Ni Aristóteles, ni los escolásticos medievales compartían esta ilusión. (...) La lógica aristotélica *tenía su base en una rica y compleja ontología de la sustancia*" (Thom, 1971, 75). Para Aristóteles este punto estaba, en efecto, claro, como expresa su famosa frase de la Metafísica: "Decir de lo que es que no es, o de lo

[365] Ya hemos visto que el Algebra de Boole de Conjuntos es isomorfa al Cálculo de Enunciados.

[366] Isomorfa al Cálculo de Enunciados.

que no es que es, es falso y decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero" (Metafísica, Γ , 727)[367].

Thom (1971, 74-77) analiza varios ejemplos para demostrar los límites de la teoría de conjuntos (y del cálculo de enunciados) en relación con problemas específicamente lógicos si se quiere prescindir totalmente de una perspectiva *semántica* u *ontológica*, para concluir que "todos estos puntos muestran los estrechos límites de la teoría de conjuntos para describir el pensamiento ordinario. *El razonamiento cotidiano* se remite a profundos mecanismos psíquicos, tales como la *analogía* que nunca pueden ser reducidos al nivel de operaciones conjuntistas. Un factor importante en tales casos es el isomorfismo organizativo entre *campos semánticos* que están homológicamente asociados (...) E incluso en la matemática pura, no es en absoluto cierto que cada deducción pueda tener un modelo conjuntista (...) y la vieja aspiración de Bourbaki es, sin lugar a dudas, solamente una ilusión" (Thom, 1971, 77)[368]. De hecho ya en 1933 Alfred Tarski, partiendo de la aceptación los planteamientos de Hilbert en relación con la Lógica y su Teoría de la Demostración, que ya hemos estudiado, se planteó un avance en esta dirección. Partiendo inicialmente de una postura axiomática, y más específicamente hilbertiana, de la noción de consecuencia lógica, fue desarrollando progresivamente una metodología y un enfoque *semántico* que culminaría en los años 50-60 con la *teoría de modelos*, desarrollada conjuntamente con sus discípulos de Berkeley, y que transformaron radicalmente la Metamatemática consolidándola como una ciencia estricta. Un estudio de Tarski excede los límites de este trabajo, pero podemos indicar, como se observa en su temprano artículo citado, que su punto de partida es un intento de aproximación a *una concepción intuitiva de la noción de verdad*: "Nos gustaría que nuestra definición hiciera justicia a *las intuiciones* que se desprenden de la concepción aristotélica clásica de *verdad*, intuiciones que quedan reflejadas en las conocidas palabras de Aristóteles [antes citadas, F.S.] en su obra *Metafísica*" (Tarski, 1944, 343). Como señala Hartry Field (2008, vi), en los últimos veinte años se ha realizado un enorme trabajo técnico en este campo de la Lógica y desde muy distintas aproximaciones, de modo que hoy ya el el enfoque de Tarski se puede considerar como *una* de las maneras de abordar la noción de *verdad* y de afrontar los problemas relacionados (como los de las antinomias). Pero el trabajo de Tarski, y su punto de partida (aunque éste se comparta de una forma crítica), confirman la tesis que queremos sostener en este trabajo de que hay también una noción de *intuición* que sería válida en el campo estricto de la Lógica, con una referencia semántica u ontológica, y es un punto que habría que investigar el determinar qué características comunes y diferenciadoras tendría ese sentido del término *intuición* aplicable en la Lógica con los sentidos de la intuición que Kant y Hilbert sostenían en el campo de la Matemática, y que han sido estudiados en este trabajo. Porque tal vez el término *intuición* no sería el adecuado para definir este matiz en la Lógica que aquí hemos señalado. Porque, como hemos visto en este trabajo, parece que en el razonamiento humano también operan otros mecanismos: la conceptualización *difusa*, las implicaciones *no monotónicas*, las argumentaciones por *analogía* y los mecanismos de decisión por *prueba y error*, por ejemplo.

---

[367] Citado por Tarski (1944, 343). Una discusión de las versiones modernas de este enunciado y de la problemática que involucra, en Tarski (1944, 343 y ss). Este artículo, "The semantic conception of Truth", es una versión no técnica de un artículo publicado en alemán (Tarski, 1935) que a su vez se publicó originalmente en polaco en 1933. Las referencias están en el mismo artículo.

[368] Las palabras con las que Thom cierra su trabajo demuestran, una vez más, con cuanta facilidad puede confundirse en relación con la epistemología de las matemáticas un realismo platónico, que era de hecho la posición de Thom, con una actitud empirista : "Nadie puede razonablemente escapar a la impresión de que las más importantes estructuras matemáticas (estructuras algebraicas, estructuras topológicas) se presentan como datos fundamentales impuestos por el mundo exterior, y que su diversidad irracional encuentra su única justificación en la realidad" (Thom, 1971, 77).

6.5.- Lógicas no-standard.

Se presentan aquí las nociones de *lógicas intensionales, lógicas modales, lógicas relevantes* (*o lógicas de relevancia*), *lógicas paraconsistentes, lógica intuicionista,* y que se pueden englobar bajo el epígrafe de *lógicas no-standard,* y se hace un resumen de su historia y el estado actual de la investigación y de sus aplicaciones, así como una discusión de sus motivaciones y de las críticas a algunos de sus planteamientos realizadas por autores relevantes como Quine y Russell. Las *lógicas multivariantes,* la *lógica difusa (fuzzy logic),* las *lógicas no monotónicas* y las *redes neuronales* no aparecen en este apartado y se estudian separadamente en el Capítulo-7. La razón es que tienen unas características comunes que, como razonamos allí, las situaría en una nueva perspectiva que representaría los retos de la Lógica actual.

6.5.1.-Lógicas intensionales.

Existe una diferencia entre lo que un término designa y lo que significa. En cierta forma, el significado determina la designación, pero no es sinónimo. Por ejemplo (Fitting, 2012), las expresiones "la estrella matutina" y "la estrella vespertina" designan el mismo planeta (Venus) pero no tienen el mismo significado. En este sentido, los *significados* se llaman *intensiones* y los objetos designados, *extensiones.* Los contextos en los que la extensión es lo que importa, se llaman extensionales, mientras que los contextos en los que la extensión no es suficiente, se llaman intensionales. Las matemáticas son un contexto típicamente extensional; escribimos 2+3 = 3+2 aunque el significado de ambos miembros difiere. Sin embargo la pedagogía de las matemáticas son un contexto intensional; la igualdad anterior no es una identidad desde el punto de vista del significado, y esa diferencia es lo que aporta un plus al conocimiento del alumno. Las igualdades de extensiones en un contexto intensional no funcionan. La lógica intensional intenta estudiar a la vez la "designación" y el "significado", así como las relaciones entre ambos. Muchos textos modernos consideran la distinción reciente, pero se remontaría a los lógicos de Port Royal, quienes distinguían entre "comprehensión" y "denotación"[369]. John Stuart Mill hacía la distinción entre "connotation" y "denotation", y Frege entre "Sinn" (sentido, *sense*) y "Bedeutung" (referencia, *reference*), mientras que Carnap estableció la distinción entre "intension" y "extension". Pero en realidad, con pequeños matices de autor en autor, la dicotomía esencial es entre lo que un término *significa* y lo que *denota.* La verdad es que la distinción estaba ya en Aristóteles: "Ein zentrales Kennzeichen der aristotelischen Philosophie ist die Unterscheidung von Inhalt und Umfang der Wortbedeutungen. Aristoteles argumentiert ausdrücklich sowohl zugunsten dieser Unterscheidung selbst als auch zugunsten des systematischen Primats der *Intension* … Explizit formuliert wird diese Unterscheidung von *Intension* und *Extension* und dem Vorrang der *Intension* in Met.X.1. und zwar in bezug auf den Begriff der Einheit" (Burkhard Hafemann, *Aristóteles' transzendentaler Realismus: Inhalt und Umfang erster Prinzipien in der Metaphysik,* Walter de Gruyter Verlag, Berlin, New York, 1998, pp. 175 y ss.). En la lógica clásica de primer orden la intensionalidad no juega ningún papel, está diseñada para la formalización de los razonamientos matemáticos. Los sistemas formales en los que las características intensionales pueden ser formalizadas se conocen como *lógicas intensionales.* En el siglo XX se han realizado varios intentos en esa dirección que están asociados a Church, Carnap, Marcus, Montague, Tichý, Bressan y Gallin. Pero la forma moderna de enfocar el problema tiene indubitablemente su origen en Frege (1892). Ese trabajo comienza con un largo recital de las dificultades que involucra la noción de "igualdad". No llegó a desarrollar

---

[369] "recognition that designating terms have a dual nature is far from recent. The Port-Royal Logic used terminology that translates as 'comprehension' and 'denotation' for this" (Fitting, 2012).

un mecanismo conceptual para manejar lo relacionado con el “sentido” (en cuanto opuesto a la “referencia”) pero definió los términos bajo los cuales tendría lugar la discusión posterior. Dio las grandes líneas de una teoría de la *intensionalidad*, pero no llegó a desarrollar una *lógica intensional*. Alonzo Church (1951) aborda el problema directamente y construye una lógica formal en la que los términos tienen tanto sentidos como denotaciones. Para un estudio de sus desarrollos véase también (Church 1946) donde aparecen por primera vez sus ideas de forma resumida, y (Church 1973 y 1974). Una discusión reciente de sus desarrollos y perspectivas en (Anderson 1984 y 1998). Para Fitting (2012), existe una relación de influencia mutua entre la obra de Church en este campo y la de Carnap. Las ideas de Church se exponen inicialmente en (Church 1946), y el libro de Carnap aparece en 1947 (Carnap 1947). Unos años más tarde Church desarrolla detalladamente esas ideas en (Church 1951) y la segunda edición del libro de Carnap aparece en 1956. Para Fitting “each man had an influence on the other, and the references between the two authors are thoroughly intertwined”. Si Church hizo el primer intento de formalizar una lógica intensional, Carnap (1947 y 1956) desarrolló un método para tratar las intensiones y las extensiones creando una semántica en la que entidades específicas de la teoría de modelos se identificaban con las intensiones. Aunque se basó en la obra de Frege, sus desarrollos parten básicamente de las ideas al respecto expuestas por Wittgenstein en el *Tratactus*, donde Wittgenstein introduce un antecedente de las “semánticas del mundo” con su noción de *states of affaires*, que puede ser identificado con el conjunto de todas las verdades del mundo: “(1.13) The facts in logical space are the world”. “(2.0123) If I know an object I also know all its possible occurrences in states of affairs. (Every one of these possibilities must be part of the nature of the object.) A new possibility cannot be discovered later”.

Carnap desarrolla su teoría a partir de estas ideas, y la idea fundamental en su trabajo es que las intensiones, cualquiera que sean las entidades en las que se consideran, pueden ser expresadas en una formulación matemática precisa a través de funciones sobre los estados, mientras que las extensiones serían algo relativo a estados singulares Las ideas de Carnap fueron extendidas y formalizadas por Richard Montague (1960 y 1970), Pavel Tichý (1971 y 1988) y Aldo Bressan (1972) de forma independiente. Todos hacían uso de alguna versión de la noción de “semánticas posibles del mundo” de Kripke/Hintikka, y todos trataban la intensionalidad funcionalmente. Por otra parte, Marcus (1946, 1947 y 1961) demostró que se podían desarrollar coherentemente sistemas modales formales que incluyeran a los cuantificadores y a la identidad (Fitting, 2012). Estos autores incorporan de una u otra forma a su análisis la *lógica modal*.

6.5.2.- Lógicas modales.

Una *lógica modal* es un sistema formal que intenta capturar el comportamiento deductivo de algún grupo de operadores modales. Los operadores modales son expresiones que califican la verdad de los juicios. Por ejemplo, en la oración “es necesario que 2+2=4”, la expresión “es necesario que” es un operador modal que califica de *necesaria* a la verdad del juicio “2+2=4”. En un sentido más restringido, sin embargo, se llama *lógica modal* al sistema formal que se ocupa de las expresiones “es necesario que” y “es posible que”. La lógica modal sólo agrega dos símbolos al vocabulario de la lógica proposicional: el símbolo □ que representa la expresión del lenguaje natural “es necesario que”, y el símbolo ◊, que representa la expresión “es posible que”. Ambos símbolos se prefijan a proposiciones, de modo que “□ p” se lee “es necesario que *p*”, y “◊ p” se lee “es posible que *p*”[370].

[370] En la lógica modal clásica, ambos símbolos son interdefinibles por medio del otro y de la negación; así:

$\Diamond p = \neg \Box \neg p$

$\Box p = \neg \Diamond \neg p$

Se suele considerar como el inicio de la moderna lógica modal la obra de Clarence Irwing Lewis (1912, 1918 y 1932), quien criticó el uso de la *implicación material* que está en la base de la moderna lógica formal tal y como fue configurada por Frege, Peano, Russell y Whitehead. Dentro de los lenguajes lógicos podemos distinguir dos tipos de relaciones de consecuencia entre premisas y conclusión: la consecuencia lógica y la deducibilidad. La relación de consecuencia lógica es una relación *semántica* en el sentido de que es una relación entre las premisas bajo una interpretación y la conclusión bajo la misma interpretación. La relación de deducibilidad es una relación *sintáctica* porque queda caracterizada por un conjunto de reglas (un sistema deductivo) que atienden solamente a la forma de las premisas y conclusión. Se entiende habitualmente que la relación de consecuencia lógica es *más básica* y que el objetivo de un sistema deductivo es caracterizar en términos puramente sintácticos la relación de consecuencia lógica. La consecuencia lógica se caracteriza de un modo satisfactorio en un sistema deductivo cuando nos permite deducir *sólo* consecuencias lógicas (y se dice entonces que el sistema es consistente o correcto, *sound*), y *todas* las consecuencias lógicas (y se dice entonces que es completo, *complete*). En lógica clásica hay una sola relación de consecuencia lógica y distintos sistemas deductivos para caracterizarla (sistemas axiomáticos, *tableaux*, deducción natural, sistemas de Gentzen). Esto no es así en lógica modal. En lógica modal hay distintos sistemas modales que caracterizan distintas relaciones de consecuencia lógica. En este sentido más que de *lógica modal* debería hablarse de *lógicas modales*. La *implicación material*, base de la lógica clásica moderna, da lugar a razonamientos válidos (que se conocen como "paradojas de la implicación material") y que al interpretarse dan lugar a argumentos de apariencia absurda o poco naturales[371], donde está claro que no parece que haya una relación de consecuencia lógica entre premisas y conclusión. Lewis (1912 y1918) y Lewis & Langford (1932) analizó este problema y propuso un nuevo condicional más adecuado para recoger el significado de la expresión "si... entonces" del lenguaje natural y lo llama *implicación estricta*. El nuevo condicional requiere, para ser verdadero, una relación más fuerte entre el antecedente y el consecuente que el condicional clásico. Lewis define su condicional estricto en términos del condicional clásico más la noción de necesidad: "*p* implica estrictamente *q*" si y sólo si $\Box(p \rightarrow q)$. Hay que matizar que el fundador de la *lógica modal*, C. I. Lewis, definió la lógica modal en términos de fórmulas que no contenían el símbolo □ como un símbolo primitivo[372]. El objetivo de la lógica es caracterizar la diferencia entre argumentos válidos y argumentos inválidos, de forma que un sistema lógico para un lenguaje se puede caracterizar como un conjunto de axiomas y reglas diseñado para demostrar rigurosamente la validez de los argumentos expresables en ese

---

Esto implica que en principio, sólo es necesario tomar uno de los dos símbolos como primitivo, ya que el otro puede ser definido a partir de éste y del vocabulario de la lógica proposicional. En general, el símbolo que se toma como primitivo es el de necesidad. La gramática nos indica qué secuencias de signos del vocabulario están bien construidas. A estas secuencias se las llama fórmulas bien formadas. La gramática de la lógica modal es igual a la de la lógica proposicional, excepto que añade una regla para los operadores modales: Si Φ es una fórmula bien formada, entonces □ Φ también lo es. La regla de inferencia más propia de la lógica modal se llama N (o regla de *Necesitación*), y dice que si una fórmula Φ es un teorema, entonces "es necesario que Φ" también es un teorema.

371 Por ejemplo, las siguientes implicaciones: $q \models p \rightarrow q$, $\neg p \models p \rightarrow q$, $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \models (p \rightarrow s) \vee (r \rightarrow q)$, $(p \wedge q) \rightarrow r \models (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$, $\neg (p \rightarrow q) \models p$. Así, la fórmula 3 se puede interpretar: Si hoy es lunes entonces mañana es martes y si hoy es miércoles entonces mañana es jueves. Por lo tanto, o bien, si hoy es lunes entonces mañana es jueves, o bien, si hoy es miércoles entonces mañana es martes.

372 Lewis pretendía desarrollar una lógica de condicionales que estuviera libre de las llamadas "paradojas de la implicación material", por ejemplo, los teoremas mencionados en la nota anterior o los clásicos A→(~A→B) y B→(A→B). Introdujo el símbolo -3 para la "implicación estricta" y desarrolló una lógica donde ni A -3 (~A -3 B), ni B -3 (A -3 B) son demostrables. La práctica actual sustituye A -3B por □(A→B), y usa la lógica modal regida por □ con resultados similares. Lewis y Langford (1932) desarrollaron cinco sistemas axiomáticos distintos (S_1 a S_5) con distintas propiedades.

lenguaje, lo cuál puede ser más difícil de lo que parece. Debe asegurarse que el sistema es *correcto (sound)*, es decir, que todo todo argumento demostrable por medio de los axiomas y reglas es *válido*, y debe asegurarse que el sistema es *completo (complete)*, es decir, que todo argumento válido tiene una demostración en el sistema. Pero para tal demostración el concepto de *validez* debe ser definido rigurosamente y es la semántica formal de una lógica la que suministra una definición de *validez* por medio del comportamiento respecto a la *verdad* de los enunciados del sistema. En la Lógica de Proposiciones la *validez* puede ser definida exactamente mediante las *tablas de verdad* que expresan la verdad del enunciado para todos los posibles valores de verdad de sus premisas. Sin embargo, las tablas de verdad no sirven para explicar la *validez* en las *lógicas modales* porque no hay tablas de verdad para expresiones como "es necesario que" (Garson, 2012). Es decir, la verdad de un enunciado con un contenido modal no depende exclusivamente del valor de verdad de sus enunciados constitutivos. Por ejemplo, el enunciado "es posible que Sócrates no sea un filósofo" se puede considerar verdadero aunque contenga el subenunciado falso "Sócrates no es un filósofo", porque podemos concebir que es posible que Sócrates no se interesó por la filosofía . Pero si sustituimos ese enunciado falso por otro igualmente falso como "un círculo tiene 4 ángulos", el enunciado modal "es posible que un círculo tenga 4 ángulos" es ahora falso, porque no podemos concebir ningún "mundo" en el que eso suceda. Así la semántica para las *lógicas modales* se puede definir mediante la introducción de la noción de "mundos posibles". Esto lo desarrolló Saul Kripke (1963 y 1965) creando "los modelos de Kripke" o *Kripke semantics*. Con los conceptos de "posible" y "necesario" los lenguajes ofrecen posibilidades adicionales a "verdadero" y "falso" para caracterizar los enunciados. Algunos enunciados falsos serían sin embargo posibles, y algunos enunciados verdaderos serían además necesarios. Para determinar si un enunciado es posible deberíamos poder imaginarnos una situación factible en la que ese enunciado sea verdad. Es lo que Kripke denomina *un mundo posible*. Además existen enunciados que son verdad en cualquier situación imaginable, por tanto serían necesarios (por ejemplo, "un círculo es redondo"). La situación en la que de hecho vivimos sería un *mundo posible* , el *mundo real* (*actual word)*. Un enunciado es posible si es verdadero en un mundo posible; es necesario, si es verdadero en todos los mundos posibles. Un enunciado es *contingente* cuando es verdadero en al menos un mundo posible y es falso en al menos un mundo posible, es decir, si es posible pero no necesario. A partir de aquí Kripke formalizó y presentó un sistema axiomático (el sistema K) para desarrollar una lógica modal con esta semántica[373]. El sistema K es el que menos axiomas utiliza, precisamente por eso es

[373] El sistema K resulta de añadir al Cálculo de Proposiciones clásico un solo axioma modal (el axioma K) y la Regla de Necesitación expuesta más arriba. Axioma K: $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$. Lectura informal: Si es necesario que ϕ implica ψ ,entonces: si es necesario ϕ, también lo es ψ. A ello se le añade una semántica formal que discutimos más abajo. Se pueden considerar otros axiomas. Los más habituales se indican en la siguiente tabla:

Nombre	Axioma
K	$\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$
T (o M)	$\Box\phi \to \phi$
4	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$
5	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$
B	$\phi \to \Box\Diamond\phi$

Añadiendo a K distintos axiomas o combinaciones de axiomas se obtienen distintos sistemas de *lógicas modales* (o modelos). Los más importantes considerados actualmente son:

Sistema	Axiomas
K	K
T	K, T
S4	K, T, 4
S5	K, T, 5
B	K, T, B

el más débil, es decir, el que menos teoremas puede demostrar. Es un punto muy debatido cuáles serían los axiomas que deberían incluirse. Diferentes conjuntos de axiomas permiten demostrar distintos teoremas y, frecuentemente, se eligen los axiomas en función de los teoremas que se quieren demostrar, y este es precisamente uno de los argumentos de las críticas realizadas a las *lógicas modales,* especialmente de las críticas de Quine.

La *semántica de Kripke* se conoce también como *Hintikka-Kripke semantics* en consideración al hecho de que Jakko Hintikka (1957, 1962 y 1963) presentó antes estos mismos planteamientos de forma independiente. Estos artículos de Hintikka están reunidos en el libro *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator* (Hintikka, 1997) cuyo mismo nombre remite a Gottfried Wilhelm Leibniz como una referencia y un antecedente. Aunque en realidad fueron desarrollados incluso antes por Stig Kanger (1957). Un análisis de los trabajos de Kanger expuestos con notaciones modernas, en (Lindström, 1998). La formulación de Kripke y sus notaciones se han considerado la forma canónica a partir de la cuál se han desarrollado los estudios posteriores. Pero por el camino, a partir de Lewis, han quedado otros intentos fallidos como el de Oskar Becker (1930), el principal discípulo de Husserl, quien intentó desarrollar una asociación entre la *lógica modal* y la *fenomenología*. Sin embargo, las reflexiones de Becker inspiraron a Gödel (1932), quien demostró que existe una estrecha conexión entre el sistema S_4 de Lewis y la *lógica intuicionista*. La *lógica modal* en sentido estricto se refiere a la introducción en la *lógica proposicional* de los operadores modales "es necesario" (formalizado por □) y "es posible" (formalizado por ◊), y en este sentido estricto la *lógica modal* se suele denominar *lógica alethica,* porque se ocupa de las modalidades aléticas (la necesidad, la posibilidad y la contingencia), también se le llama la *lógica modal clásica*. Se han desarrollado con posterioridad otras lógicas modales que interpretan estos operadores de otro modo y que introducen también otros operadores modales, dando lugar a las lógicas modales temporal, deóntica, doxástica y epistémica[374]. La semántica modal clásica diseñada por Kripke (1959, 2), propone desempolvar la idea siguiente de Leibniz para resolver el problema de la decisión (i.e., disponer de un método para determinar cuándo una fórmula es verdadera o falsa) en los sistemas modales: una proposición es necesaria si y sólo si es verdadera en todos los mundos posibles[375]. Por otra parte, hay que señalar que, si el

---

[374] (Garson, 2008):

Logic	Symbols	Expressions Symbolized
Modal Logic	□	It is necessary that ..
	◊	It is possible that …
Deontic Logic	O	It is obligatory that …
	P	It is permitted that …
	F	It is forbidden that …
Temporal Logic		
	G	It will always be the case that …
	F	It will be the case that …
	H	It has always been the case that …
	P	It was the case that …
Doxastic Logic		
	Bx	x believes that …

[375] Kripke (1963, 84) diseña una semántica en donde tenemos una estructura (G, K, R), donde G representa el mundo actual, K es el conjunto de todos los mundos posibles incluyendo a G, y R es una relación de diferentes tipos (reflexiva, simétrica, transitiva, de equivalencia, etc.) que pertenece al conjunto producto de K con K, en dependencia del sistema para el que intentemos construir la semántica. Es una función binaria con dominio de definición en un lenguaje L y en K, y rango de valores en el conjunto. De modo que (A, H) = V significa que la proposición A es verdadera en un mundo H que pertenece a K. Los mundos son puntos y es un modelo que evalúa todas las proposiciones de L en todos los puntos. De este modo es obvio que definiendo la posibilidad en el sentido usual más arriba señalado, una proposición es posible si es verdadera en al menos uno de los mundos posibles. Esta semántica ha tenido otras versiones, como la de Carnap (1947), elaborando una versión de la famosa noción de Wittgenstein (1922) de *posibles estados de cosas*

comienzo de la moderna *lógica modal* se suele fechar en el trabajo de Lewis, tiene importantes antecedentes ya desde la antigüedad. Las primeras discusiones acerca de una *lógica modal* se encuentran ya en los *Analíticos Primeros* y en *De Interpretatione* de Aristóteles, quien no sólo observó que la necesidad implica posibilidad (pero no viceversa) sino además indicó que las nociones de necesidad y posibilidad eran interdefinibles, desarrollando también una silogística modal (además de la silogística categórica). De hecho Aristóteles es el fundador de la *lógica modal*. Además de la *cualidad* (afirmación o negación) y de la *cantidad* (singular, universal, particular o indefinida), sostiene que los enunciados categóricos tienen también un *modo* que consiste en el hecho de que el predicado que se predica del sujeto se hace de *modo actual, o necesario, o posible o imposible*, y los cuatro últimos modos se expresan por medio de operadores modales que modificarían el predicado. Desarrolla un análisis de las consecuencias en *De interpretatione* § 9 y *12–13* y construye una silogística modal en *Analytica priora 1.8–22*. Su obra fue ampliada y desarrollada por sus discípulos de la escuela peripatética Teofastro de Ereso (c. 371–c. 287 AC) y Eudemo de Rodas (finales del siglo IV AC). Otras aportaciones fueron hechas por los Megáricos y Estoicos, y más adelante por William Ockham y John Duns Escoto, y en el siglo XVII Gottfried Wilhelm Leibniz replanteó el estudio y acuñó el término "mundos posibles" que se usa hoy en un sentido análogo. Un análisis detallado de todos estos precedentes y sus aportaciones en (Bobzien, 2008), en (Hughes & Creswell, 1968 y 1993), que contiene una excelente bibliografía de fuentes históricas, y en (Bochenski, 1956). Se han hecho aplicaciones de las *lógicas modales* a la Física Cuántica y, especialmente, a la Teoría de la Computación. Aunque prácticamente ningún libro las menciona –la excepción es (Goldblatt, 1992, 1993 y 2006) que contiene una información exhaustiva al respecto-, existen importantes aplicaciones y conexiones con las Matemáticas, especialmente con el Algebra y la Topología. Véase también (Tarski & Jónsson, 1951) y (Tarski & McKinsey, 1948).

Sin embargo, existe también una importante línea crítica de la *lógica modal*, siendo la más sólida la de W.V.O. Quine. La posición de Quine podría resumirse diciendo que se oponía abiertamente a las consideraciones modales en los dominios extensionales, en los que, en su opinión la lógica clásica representaba un camino seguro, y admitía su posibilidad en los dominios intensionales, que en su opinión quedaban de alguna forma al margen de la lógica. Creía que las limitaciones que introducían los operadores modales a ciertas leyes lógicas no justificaban su utilidad en los campos en los que la lógica clásica basada en la *implicación material* había demostrado su eficacia. Y, lo que en su opinión era peor, las consideraciones modales llevarían necesariamente a las distinciones entre *lo esencial* y *lo accidental* que estaría en la base de la *ontología esencialista* de Aristóteles. En realidad, la postura de Quine tuvo tres fases diferenciadas. En una primera época alrededor de 1943, en sus *Notas sobre la existencia y la necesidad* y en *El sentido de la nueva lógica*, Quine adoptó una postura de relativa tolerancia con la lógica modal, siempre que la existencia se interprete como mera

---

(state of affairs), y hablando de posibles descripciones de estados. En la idea original de Wittgenstein (1922, 2.202) "la figura representa un posible estado de cosas en el espacio lógico", i.e., el signo, la proposición, nos habla de la posible existencia o no de determinados hechos atómicos. El mundo se componía para Wittgenstein, en cierta forma, de la conjunción de todas las proposiciones verdaderas (Wittgenstein, 1922, 1.11; 1.12). Para Carnap (1947, 9) una clase "de proposiciones que contenga para cada proposición atómica o bien esa proposición o su negación, pero no ambas, y ninguna otra proposición, es llamado una descripción de un estado". Así pues, Carnap está en condiciones de considerar una proposición como L-verdadera (i.e., lógicamente necesaria) si y sólo si es verdadera en todas las descripciones de estados. Estas variantes de semánticas para contextos modales utilizando nociones similares a la formulación original de Leibniz no fueron pocas pero, pese a todo, la versión de Kripke (1959), aunque con modificaciones que él mismo introdujo más tarde, es la más importante en la actualidad, posiblemente debido a que apareció acompañada de un teorema de completitud para el sistema S_5 de Lewis.

existencia lógica y la necesidad se reduzca a una simple necesidad analítica, pues tomada como una modalidad *de dicto* este tipo de necesidad se suele atribuir a las relaciones meramente lógicas que los entes de razón mantienen consigo mismos, y que de algún modo se extienden a los nombres propios en cuanto son descripciones abreviadas cuya formulación requiere la mediación de esas relaciones meramente analíticas. Pero en un segundo momento, alrededor de 1953, en *Los dos dogmas del empirismo* y en *Los tres niveles de tratamiento de la modalidad*, Quine además de enfrentarse a Church y Marcus (Barcan), también rebatió la postura fregeana de Carnap en su segunda época, cuando éste inició una semántica constructiva, que dio entrada al principio de tolerancia en la verificación, y que se fundamentó a su vez en una lógica modal comprometida con una ontología intencional platónica. Ahora Quine reformuló sus argumentos en contra de la modalidad, insistiendo en los contextos opacos en los que se usan los nombres propios y comunes, y en la conexión inevitable que siempre se establece entre la lógica modal y la necesidad metafísica *de re* que es característica del esencialismo aristotélico. Finalmente en su última época, alrededor de 1960 hasta hoy, principalmente en su obra *Palabra y objeto*, rechaza incluso la lógica modal precuantificada que había tolerado en épocas anteriores, pues piensa que incluso este tipo de lógica modal se acaba comprometiendo con el esencialismo aristotélico y lleva sin remedio a admitir la distinción entre propiedades esenciales y accidentales (Ortiz de Landazuri, 1985), (Nubiola, 1984). En el fondo, lo que subyace al rechazo de Quine es su ontología naturalista que implica una consideración lingüística o representacional de las relaciones analíticas y un rechazo de las posiciones ontológicas esencialistas, posición que hunde firmemente sus raíces en la epistemología kantiana tal y como la hemos considerado en este trabajo. Además, tenía buenas razones desde la perspectiva de los planteamientos que había realizado respecto a la lógica. Tanto los giros de modalidad como los de actitud proposicional plantean serios problemas al proyecto lógico de Quine y también a su concepción de la lógica y a su epistemología. Por ejemplo, en contextos modales no podemos considerar válido el principio de extensionalidad en el que se basa la evaluación lógica de los enunciados en la gramática normada de la que se habla en (Quine 1970) y que es un elemento principal de su concepción lógica (Quine 1953b[1980], 80 y ss). Consiguientemente, en tales contextos se plantean problemas de cuantificación y valoración de variables individuales cuya solución es básica para el establecimiento de una lógica de las modalidades. De este modo, el problema de la no sustituibilidad *salva veritate* en contextos modales, o fallo del principio de sustitución de la identidad (SI), es un problema paradigmático que responde al fallo del principio de extensionalidad, por lo que podemos decir que para Quine los contextos modales son, por lo general, contextos intensionales. Esta inadecuación de las leyes de la identidad viene acompañada de otro conjunto de problemas que también son fundamentales para su filosofía: la inadecuación de las leyes de la cuantificación de la lógica de predicados de primer orden en estos mismos contextos modales, donde también falla la ley de generalización existencial (GE). Ruth Marcus (Barcan) (1990) criticó y discutió las posiciones de Quine defendiendo los desarrollos de las *lógicas modales* en los que ella misma fue un punto clave, y dando lugar a un debate al respecto con Quine. En efecto, las objeciones de Quine no son tan evidentes. El sugestivo nombre de "mundos posibles" ha despertado ciertamente la imaginación de los metafísicos contemporáneos, por ejemplo David Kellog Lewis (1973 y 1986), que se toman dicho nombre como una noción objetiva según su significado literal. Pero en la *teoría de modelos* es simplemente una pieza del aparato matemático susceptible de muchas y variadas aplicaciones e interpretaciones que no involucran en modo alguno una ontología esencialista. Por ejemplo, en la Teoría de la Computación se interpretan usualmente "mundos posibles" como "los estados posibles de un computador, y "mundo real" como "el estado actual de un computador". Debe también indicarse que la identificación usual de "semántica" con "teoría de modelos" es confusa y da lugar a malentendidos, por lo cual a veces se habla de "semánticas formales" como sinónimos de "teorías de modelos" distinguiéndolas de "semánticas materiales" (o "semánticas lingüísticas").

La posición de Russell respecto a la *lógica modal* es hoy en día un asunto más controvertido. Hasta muy recientemente se consideraba que tenía una actitud poco favorable e incluso despreciativa, siguiendo en eso los análisis de Russell que hizo en su día el propio Kripke[376]. Pero muy recientemente Jan Dejnozka ha realizado varios trabajos en los que presenta unos resultados totalmente opuestos. Para Dejnozka (1990, 383), "the scholarly objective of this paper is to combat this view …I show that Russell repeatedly offered a modal theory and that he repeatedly upheld Leibniz's multiplicity of possible worlds… further studies of Russell reveals that not only was Russell concerned with modal logic, but he did have a modal theory, and even developed it throughout his philosophical career". En (Dejnozka, 1990 y 1999) desarrolla extensamente esta interpretación e intenta justificar su tesis de que Russell desarrolló una teoría modal usando los cuantificadores. Más aún, sostiene que también desarrolló una concepción de la *lógica de la relevancia*, de la que hablamos más adelante*:* "this book is an exhaustive study of Russell on modality and relevance. Russell used notions of ordinary quantificational logic to define and analyze away the basic notions of modal logic. Modal notions are eliminated across the board. The ordinary individual and universal quantifiers are used to simulate modal notions. Literally speaking, Russell has banished modality from logic, yet functionally speaking, he has achieved an S5 modal logic based on a rich and sophisticated theory of modality … I impute seven S5 logics to Russell and show that Russell states the key to his modal theory in at least nine works over a period of at least thirty-six years. I explain five modal 'howlers' which Russell has been accused of, as based on misunderstandings. Russell's modal logic anticipates Carnap, Tarski, McKinsey, Almog and Etchemendy and has predecessors in Bolzano and Venn" (Dejnozka, 1999). Un excelente análisis de la historia de las *lógicas modales* y sus perspectivas en (Goldblatt, 2006).

---

[376] Por ejemplo (Kripke, 1973), afirma que no solamente Russell tenían una teoría "plainly incompatible with our direct intuitions of rigidity", sino que además una de las razones para ello era que Russell "did not considered modal questions". Nicholas Rescher (1979, p. 146)) va más allá y afirma que Russell "with his massive influence and deliberately held negative views toward modal conceptions" sería casi el principal responsable "for the stunned development of modal logic for two generations". Y ciertamente hay argumentos suficientes a favor de esta interpretación, a pesar de las escasas manifestaciones de Russell sobre este tema. Existen pasajes ocasionales en su obra en donde discute las nociones aléticas de *necesidad, posibilidad e imposibilidad*, particularmente en "Necessity and Possibility" (1905) y en "The Philosophy of Logical Atomism" (1956) en los que, con décadas de separación, Russell mantiene los mismos puntos de vista. La posición de Russell en estos escritos parecen avalar la opinión de Kripke y Rescher. Russell parece mantener una total aversión a la idea de una modalidad proposicional como un tema propio de la lógica, aduciendo que no hay ninguna noción lógica fundamental de *necesidad* y, consecuentemente, tampoco de *posibilidad*. Por lo que respecta a la lógica, las proposiciones serían simplemente verdaderas o falsas y las consideraciones modales serían extrañas a los propósitos de la lógica. La siguiente cita es expresiva de su punto de vista: "The traditional view was that, among true propositions, some were necessary, while others were merely contingent or assertoric; while among false propositions some were impossible, namely, those whose contradictories were necessary, while others merely happened not to be true. In fact, however, there was never any clear account of what was added to truth by the conception of necessity" (Russell, "Introduction to Mathematical Philosophy, p. 165). Y parece que, eliminando las nociones modales del campo de la lógica, las asociaba al desarrollo de una *teoría de la probabilidad semántica*: "The subject of probability is one which is naturally associated with modality: the probability of a proposition's being true may be supposed to be [a] measure of its greater or less degree of possibility … Thus it would be necessary, in order to show that modal distinctions are never required, to produce a theory of probability in which no such distinctions are invoked" (Russell, "Necessity and possibility", p. 519).

6.5.3.- Lógicas relevantes.

Pero la crítica a la *implicación material* ha dado lugar también al desarrollo de otras *lógicas no-standard* distintas de las *lógicas modales*, entre las que sobresalen las *lógicas relevantes (o de la relevancia)*. Hugh MacColl (1908) sostuvo, al igual que Lewis (1912), que las paradojas de la *implicación material* eran contraintuitivas y que las fórmulas dejaban de ser válidas si interpretáramos el signo de implicación " →" como representante del concepto de implicación que teníamos antes de haber aprendido la lógica clásica. Además sostenía que las así llamadas "paradojas de la implicación material" tenían su origen en que en cada una de ellas el antecedente sería *irrelevante* para el consecuente, por lo que debería desarrollarse una lógica basada en una implicación *relevante*. Ivan Orlov (1928) realizó una propuesta en este sentido que se basaba en una restricción sintáctica en el Cálculo Proposicional de forma que premisas y conclusión deberían compartir fórmulas atómicas. El trabajo de Orlov se analiza en (Došen,1990) y (Stelzner, 2002). No es muy conocido que Bolzano (1837) realizó ya varios trabajos en este tema con los que Stelzner (2002) encuentra una gran conexión en la obra de Orlov. Véase también Dosen (1990). Se estableció así una restricción sintáctica que pretendía forzar que las premisas y la conclusión de una inferencia se "mantuvieran en el mismo tópico" asegurando la *relevancia* de la conexión en la inferencia; este principio se conoce por *variable sharing principle*, y dice que ninguna fórmula de la forma A→ B se puede demostrar en la *lógica relevante* si A y B no tienen al menos una variable proposicional (también llamada a veces *letra proposicional*) en común y que ninguna inferencia puede ser válida si las premisas y la conclusión no comparten al menos una variable proposicional.

Ackermann (1956) y Church (1951b) realizaron varios trabajos pioneros en esta línea. Sin embargo, este principio sintáctico es una condición necesaria, pero no suficiente, para una *lógica relevante*; la suficiencia se alcanza mediante una semántica adecuada que asegure que las premisas y la conclusión "stay on topic" (Mares, 2012). Se han desarrollado varias semánticas con ese propósito. Alasdair Urquhart (1972) desarrolló una semántica llamada *semilattice semantics*" , y en base a sus ideas se desarrollaron otras análogas por Kit Fine (Fine 1974) y J. Michael Dunn (Dunn, 1973 y 1986) que se pueden considerar como "semánticas basadas en una relación ternaria"[377]. Una característica de las *lógicas relevantes* es que son *lógicas paraconsistentes*.

---

[377] La idea que hay detrás de ellas es bastante simple: Para superar las supuestas deficiencias de la *implicación material*, Lewis añadió de hecho una nueva conectiva a la lógica clásica, la *implicación estricta.* Tras las semánticas de Kripke, enunciados como A → B son verdaderos en un mundo w si y sólo si , para todo w′ tal que w′ es accesible por w, o bien A cae en w′ o bien lo hace B. De modo que en las semánticas de Kripke para una *lógica modal* la relación de accesibilidad es una relación binaria entre pares de mundos. Sin embargo, desde el punto de vista de la *lógica de la relevancia*, la teoría introducida por la *implicación estricta* sigue siendo *irrelevante* porque siguen siendo válidas fórmulas como p → (q → q). Al igual que las semánticas de las lógicas modales, las semánticas de las lógicas relevantes relativizan la verdad de las fórmulas a mundos, pero utilizando una relación ternaria entre mundos, lo que permite que haya mundos en los que q → q falle y, por tanto, también falle p → (q → q). La condición de verdad en estas semánticas es la siguiente: A → B es verdadera en un mundo a si y sólo si, para todos los mundos b y c tales que Rabc (R es la relación de accesibilidad), o bien A es falso en b o bien B es verdadero en c. Un tratamiento de la relevancia que no utiliza una relación ternaria, en Priest (1992 y 2008). Pero las lógicas determinadas por estas semánticas son bastante débiles. Los sistemas lógicos más usuales de *lógicas relevantes* desarrollados hasta la fecha son la lógica E, la lógica R, la lógica NR y lógica S. El uso de mundos no binarios, y posiblemente inconsistentes, requiere unas condiciones de verdad para la negación distintas de la negación clásica. En 1970 Richard and Val Routley inventó el "operador estrella" para tratar la negación, un operador entre mundos que ha sido interpretado de distintas formas (Dunn, 1993). Otros tratamientos de la negación en Wansing (2001).

6.5.4.- Lógica paraconsistente (o inconsistency tolerant logic).

Una lógica paraconsistente (Priest & Tanaka, 2013) es un sistema lógico que pretende manejar las contradicciones discriminando y profundizando en sus causas. Este tipo de lógicas comenzaron a discutirse en 1910, aunque se pueden encontrar referencias ya en los escritos de Aristóteles, si bien el término "paraconsistente" fue acuñado por Francisco Miró Quesada en 1976 (Priest, 2002, p. 288 y §3.3.). En la lógica clásica, al igual que en la intuicionista y en muchas otras, las contradicciones implican la verdad de cualquier enunciado. Esta curiosa propiedad, se conoce como el "principio de explosión" (*principle of* explosion) o *ex contradictione sequitur quodlibet*, o más brevemente, *ex contradictione, quodlibet* (ECQ), que se expresa formalmente por la fórmula $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$. Así, si una teoría contiene una contradicción es una teoría trivial (todo enunciado sería un teorema). La característica definitoria de las *lógicas paraconsistentes* es que rechazan el *principio de explosión* o ECQ. Las *lógicas paraconsistentes* son más débiles que la lógica clásica, es decir, pueden deducir como válidas menos proposiciones y, por tanto, no pueden ser consideradas como extensiones de la lógica clásica sino, al contrario, como restricciones. En cierta forma, las *lógicas paraconsistentes* son más conservativas que la lógica clásica, lo que les permite ser más expresivas que ésta, incluyendo la jerarquía de metalenguajes de Tarski. Según Feferman (1984), "natural language abounds with directly or indirectly self-referential yet apparently harmless expressions—all of which are excluded from the Tarskian framework". Las *lógicas paraconsistentes* pretenden superar esta limitación expresiva y captar las razones de la contradicción formal. Su motivación primordial es la convicción de que debería ser posible razonar con *información inconsistente* de una forma controlada y discriminante. Algunos autores han objetado que es simplemente imposible en lógica que un enunciado y su contrario sean verdad (David Lewis, 1998, pp. 97-110), y otros sostienen que la negación en las *lógicas paraconsistentes* no es realmente una negación sino un operador que opera como un juicio *subcontrario* (Slater, 1995), (Béziau,2000). Una investigación de las distintas aproximaciones a las *lógicas paraconsistentes*, en (Bremer, 2005) y (Priest, 2002). Una amplia familia de *lógicas paraconsistentes* se desarrollan con detalle en (Carnielli & Congilio & Marcos, 2007).

6.5.5.- Lógica intuicionista.

La *lógica intuicionista* se puede describir de forma resumida como la *lógica clásica* sin la ley del Tercio Excluso o *Tertium Non Datur* (LEM – *Law of Excluded Middle* o PEM-*Principle of Excluded Middle*): $(A \vee \neg A)$, pero con la Ley de Contradicción: $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ (Moschovakis, 2010). En los apartados 5.2 y 5.3.2 de Capítulo-5 hemos expuesto ya los orígenes, significado y consecuencias de estos planteamientos. Estas ideas planteadas inicialmente por Brouwer estaban ya claramente enunciadas en su pequeño opúsculo *Leven, Kunst en Mystik* (Brouwer, 1905 (1996)) y desarrolladas casi completamente en su tesis doctoral *On the Foundations of Mathematics* (Brouwer, 1907)[378]. La denegación por Brouwer

[378] Brouwer (1908) sostenía que la LEM había sido inicialmente abstraída de situaciones finitas y posteriormente extendida sin justificación a enunciados acerca de colecciones infinitas de objetos. Planteó unos ejemplos iniciales al respecto, conocidos como *week counterexamples.* Así, por ejemplo, si *x, y* son variables con rango en los números naturales 0, 1, 2 …, y si B(x) es una formalización del enunciado "existe un y>x tal que ambos y e y+2 son números primos", entonces ni el enunciado $A= \forall x\ (B(x)$ ni el enunciado $\neg A= \neg\forall x\ B(x)$ pueden ser afirmados como verdaderos, puesto que no existe ningún método para decidir, para un determinado número x, cuál de los dos es verdadero, por lo que $\forall x(B(x) \vee \neg B(x))$ no puede ser afirmado de acuerdo con el estado actual de nuestros conocimientos. Y, por tanto, $(A \vee \neg A)$ no puede ser un enunciado verdadero puesto que ni A ni $\neg A$ pueden ser demostrados. Además de otros *week counterexamples* (van Atten, 2011b) Brower aportó más tarde los llamados *strong counterexamples* (van Atten, 2011c), (Heyting, 1956, chs. III y VIII). Para muchos autores, estos *counterexamples* se basaban siempre en un enunciado que no ha sido aún probado ni refutado en la Matemática (por ejemplo, la *Conjetura de Goldbach*: todo número par mayor que dos puede escribirse como la suma de dos números primos –posiblemente iguales-; por ejemplo, 4=2+2, 6=3+3, 8=5+3, …).

de la *Ley del Tercio Excluso* se fundamenta en realidad, como criticaba Hilbert, en consideraciones puramente filosóficas acerca de los que *debería ser* la Matemática y en una consideración muy restrictiva de la *demostración*. Se han desarrollado sistemas formales para el Cálculo Proposicional, para el Cálculo de Predicados y para la Aritmética intuicionistas por Heyting (1930), Gentzen (1934) y Kleene (1952). Gödel (1933) demostró la equiconsistencia de las teorías intuicionistas y clásicas. Kripke (1965b) dio una semántica con respecto a la cuál la lógica intuicionista sería correcta y completa y que coincide con el sistema modal S4. La lógica intuicionista se puede entender como una subclase de la lógica clásica, aunque se demuestra que tiene el mismo rigor de consistencia que la lógica clásica; más precisamente, Glivenko (1929) demostró para el Cálculo Proposicional que "(Teorema de Glivenko): Una fórmula proposicional arbitraria A es clásicamente demostrable si y sólo si ¬¬A es intuicionistamente demostrable". el teorema no se puede generalizar al Cálculo de Predicados, pero existen numerosos resultados sobre las interrelaciones (Moschovakis, 2010, 4.1)[379]. La formalización de la lógica intuicionista en un *sistema de tipo Hilbert* se desarrolla guiada por la llamada B-H-K (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) interpretación de la noción de *verdad* intuicionista[380]. El éxito de la *matemática intuicionista* en la *teoría de la computación* se debe a su enfoque *constructivista*, más que a su filosofía, enfoque que comparte como vimos con otras corrientes (incluyendo el *programa finitista*, especialmente en sus interpretaciones más estrictamente constructivistas como la de Herbrand) y podría desligarse de los postulados filosóficos de Brouwer. Como señala van Atten (2012), la exposición standard hoy en día de la lógica intuicionista se expresa en términos de la llamada *interpretación B-H-K* (o *Proof Interpretation*, según la terminología de Heyting), presentada por Troelstra y Van Dalen en *Constructivism in mathematics* (1988)[381]. Es dudoso que la *lógica intuicionista* tenga una

---

[379] Moschovakis (2010, 1), establece una comparativa precisa entre la lógica intuicionista y sus consecuencias y la lógica clásica.

[380] Aquí la independencia de los operadores lógicos &, ∨, →, ¬, ∀, ∃ contrasta con la situación en la lógica clásica donde, por ejemplo, (A ∨ B) es equivalente a ¬(¬A & ¬B), y ∃xA(x) es equivalente a ¬∀x¬A(x). Desde el llamado *punto de vista B-H-K* un enunciado de la forma (A ∨ B) afirma que, o bien una demostración A o bien una demostración de B ha sido construida; en tanto que ¬(¬A & ¬B) afirma que ha sido construido un algoritmo que efectivamente convierte cualquier par de construcciones que demuestren ¬A y ¬B , respectivamente, en la demostración de una contradicción conocida. Aunque, como hemos dicho, la lógica intuicionista se puede considerar en cierta forma una subclase de la lógica clásica, Gödel (1933) observa que la lógica y la aritmética intuicionistas serían en cierto sentido más *ricas* que las clásicas por cuanto que esa distinguen como distintas fórmulas que son clásicamente equivalentes (como acabamos de mostrar) pero que, al mismo tiempo, tendría el mismo rigor de consistencia de la lógica clásica. Sin embargo, no hay una equivalencia entre la Aritmética desarrollada por Heyting (1956) y el Análisis de Bishop (1967) y los correspondientes clásicos. Además, en los desarrollos posteriores a los fundadores se produce una mezcla con las escuelas de Kolmogorov, Markov, Smirnov y otros *constructivistas* rusos que no sostenían las posiciones filosóficas intuicionistas e incluso, como vimos, con defensores del *programa finitista* como Herbrand. Dedicamos un apartado en este trabajo a la *Matemática constructivista*, en la cual se entremezclan de forma interesante todas esas corrientes y cuyas interrelaciones intentaremos analizar, así como su diferencia con la posición de Hilbert y, en especial, en lo tocante a la *intuición* en la Matemática y en lo referente a las lecturas de Kant realizadas por Brouwer y Hilbert. Una exposición detallada de la *lógica y matemática intuicionista*, así como de su evolución y desarrollo actual en : (Moschovakis, 2010), (van Atten, 2011a, 2011b y 2011c), (van Atten, 2012), (van Dalen, 1981, 1999 y 2000), (Troelstra & Schwichtenberg, 2000), (Dummett, 1977 (2000)), (Troelstra & van Dalen, 1988), (van Stigt, 1990).

[381] "(H1) A proof of A ∧ B is given by presenting a proof of A and a proof of B.

(H2) A proof of A ∨ B is given by presenting either a proof of A or a proof of B (plus the stipulation that we want to regard the proof presented as evidence for A ∨ B).

(H3) A proof of A → B is a construction which permits us to transform any proof of A into a proof of B.

(H4) Absurdity ⊥ (contradiction) has no proof; a proof of ¬A is a construction which transforms any hypothetical proof of A into a proof of a contradiction.

entidad propia con independencia de los *prejuicios* filosóficos del intuicionismo de Brouwer, y su relevancia se debe, en todo caso a que desembocó en una forma de *constructivismo* en Matemáticas que, junto a otras modalidades del mismo, tienen un rol fundamental en la moderna *teoría de la computación*.

Para terminar, hay que mencionar el especial tratamiento que hace Brouwer de la *negación*. Desde el punto de vista intuicionista, decir que una proposición A es verdadera significa fundamentalmente afirmar que existe una construcción que se describe correctamente por el enunciado A; la proposición A adquiere el valor de verdad por la construcción. De acuerdo con Brouwer, decir que una proposición A es falsa que es imposible realizar una tal construcción, y se denota $\neg$A; tal imposibilidad se puede reconocer, o bien inmediatamente (por ejemplo, la imposibilidad de identificar "1 unidad" con "2 unidades") en donde se observa inmediatamente que la construcción pretendida está bloqueada (Brouwer 1907, 127)/(Brouwer 1975, 73); o bien de forma mediata demostrando que una proposición A es contradictoria reduciéndola a un enunciado falso conocido (por ejemplo, mostrando que A $\rightarrow$ 1=2) (Brouwer 1954, 3). Eso equivale a definir $\neg$A de otra manera: $\neg A := A \rightarrow 1=2$. En ambos casos se trata de una "negación como imposibilidad", y se conoce como "strong negation". Sin embargo Brouwer utiliza también una noción débil de la negación, conocida como "week negation", en donde no se excluye que algún día se pueda encontrar una demostración de A o $\neg$A, y aquí el afirmar la *negación débil* de A no significa asignar un valor "verdadero" o "falso" ni a A ni a $\neg$A . Por ello algunos autores (Barzin & Errera, 1927) han sostenido que este tratamiento de la *negación débil* por Brouwer equivale de hecho al uso de una *lógica trivalente*. Pero la realidad es que Brouwer en ningún momento desarrolla una tal lógica, quedando dichos enunciados en una especie de limbo de difícil clasificación; este tipo de enunciados desempeñan un papel fundamental, como ya hemos mencionado, en sus "weak counterexamples" (van Atten, 2012, 2.3 y 2.4). Por último, la *filosofía de la Matemática* de Brouwer, que está en la base de su *programa fundacional*, se basa según él expresamente en una lectura de Kant que, de acuerdo con nuestra interpretación, es

---

(H5) A proof of $\forall x A(x)$ is a construction which transforms a proof of $d \in D$ (D the intended range of the variable x) into a proof of A(d).

(H6) A proof of $\exists x A(x)$ is given by providing $d \in D$, and a proof of A(d)". (Troelstra & Van Dalen, 1988, 7)

Troelstra y Van Dalen indicaban que las especificaciones anteriores se remontaban a la interpretación de Heyting (1934) (de ahí la "H" de las especificaciones) y puesto que la motivación de Heyting en esa exposición era clarificar la concepción de la lógica en el programa fundacional de la Matemática de Brouwer, debería añadirse la siguiente especificación:

"(H0) A proof of an atomic proposition A is given by presenting a mathematical construction in Brouwer's sense that makes A true" (Troelstra & van Dalen 1988, 9).

El problema es que nociones tales como "construction", "presenting", "transformation" y "proof" pueden ser entendidas de formas muy diferentes, como de hecho lo han sido. Además, "there have been different ideas as to how one may justify that concrete instances of clauses H3 and H4 indeed work for any (possibly hypothetical) proof of the antecedent. Logical principles that are valid on one understanding of these notions may not be valid on another" (van Atten, 2012, 1.1). También es posible interpretar dichas especificaciones de una forma que validara los principios de la lógica clásica (Troelstra & van Dalen 1988, 9, 32–33). Para van Atten, "in the context of the foundational programs of intuitionism and constructivism, all notions are of course understood to be effective; but even then there is room for differences of understanding. Such differences can have mathematical consequences. On some understandings, intuitionistic logic turns out formally to be a subsystem of classical logic (namely, classical logic without the Principle of the Excluded Middle). But that is not the understanding of intuitionistic mathematicians, who, in analysis, have constructed intuitionistically valid instances of the schema $\neg\forall x(Px \vee \neg Px)$, while classically there can be none" (van Atten, 2012, 1.1).

difícilmente sostenible; analizamos este punto detenidamente en el apartado 5.2 y 5.3 del Capítulo-5 dedicados al *constructivismo*.

6.6.-Lógica, Matemáticas y Pensamiento. Una perspectiva histórica: Lógica de primer orden, Lógica de segundo orden y Matemática. Hilbert y el lenguaje lógico de la Matemática.

Hay que situar en un contexto adecuado todos los resultados expuestos anteriormente *relativizando* la importancia que realmente tienen para la *Matemática real* (*inhaltliche Mathematik*, en la terminología de Hilbert). Pues una perspectiva histórica de la génesis de la lógica (y del lenguaje) en que se expresan pone bien a las claras *la contingencia* de esos mismos desarrollos, en el sentido de que la *objetividad* o *realidad* de los entes matemáticos queda restringida, o mejor dicho, y radicalmente en contra del solipsismo de Brouwer, definida por el *lenguaje* utilizado. El problema de fondo para una fundamentación de la Matemática según el programa de Hilbert, desde esta perspectiva, radicaría más bien en las deficiencias e insuficiencia expresiva de la Lógica Formal tal y como hoy la conocemos, y que en modo alguno se puede considerar una *teoría necesaria (absoluta)*. Debiéndose discutir además el carácter *ontológico* de los objetos matemáticos si fuera el caso que, de alguna forma, transcienden al lenguaje en el que nos expresamos. Y esto se conecta también con las posibilidades y formas de *traducir* una teoría matemática y sus objetos a, por ejemplo, el lenguaje natural. ¿Existe alguna respuesta a todo esto que sea compatible con un enfoque *naturalista* de la Matemática y que obvie un *esencialismo*, por ejemplo aristotélico, o el *platonismo*? Estos problemas subyacían a los debates que duraron hasta los años 50 en torno a la FOL y a la SOL, distinción que inicialmente planteó el mismo Hilbert.

La Lógica de primer orden (FOL, first order logic), también llamada lógica de predicados o cálculo de predicados, es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden. Los lenguajes de primer orden son, a su vez, lenguajes formales con cuantificadores que alcanzan sólo a variables de individuo de un cierto dominio, y con predicados y funciones cuyos argumentos son sólo constantes o variables de individuo. Es una extensión de la Lógica de Conectivas en la que, lo que en la Lógica de Conectivas era una fórmula atómica *p* que representaba un enunciado, se convierte en una fórmula más compleja que refleja la estructura predicativa del enunciado, asignando un símbolo al enunciado que se predica del sujeto e introduciendo variables que permiten la cuantificación del sujeto sobre un dominio; por ejemplo: “Juan es bueno” B(j), “todo hombre es bueno” $\forall x(H(x) \to B(x))$, “existe algún hombre bueno” $\exists x(H(x) \wedge B(x))$. Aquí el dominio podría ser todos los seres de la tierra, por ejemplo; pero la designación del dominio puede cambiar la estructura de la fórmula, con lo cual el lenguaje viene esencialmente determinado por la elección del dominio. Por ejemplo, si el dominio fuera “todos los hombres”, el enunciado anteriormente formalizado “todo hombre es bueno” se traduciría ahora con otra fórmula por $\forall x : B(x)$. Y los dominios nos remiten directamente a la Teoría de Conjuntos. La Lógica de segundo orden (SOL, second order logic) es una extensión de una lógica de primer orden en la que se añaden variables para propiedades, funciones y relaciones, y cuantificadores que operan sobre esas variables[382]. Así se expande el poder expresivo del lenguaje sin tener que

[382] Existen de hecho muchas posibles extensiones a una lógica de segundo orden, según como se estructuren los cuantificadores. Así, existen diversos tipos de lógicas de segundo orden según el tipo de variables adicionales introducidas respecto a las existentes en la lógica del primer orden. Es decir, existen diferentes formas de extender una lógica de primer orden a una lógica de segundo orden entre ellas: La lógica de segundo orden monádica (LSOM), en la que se añaden sólo variables para subconjuntos de un cierto dominio. La lógica de segundo orden completa (LSOC), en la que se introducen todos los tipos de variables posibles y los cuantificadores pueden referirse, por tanto, a cualquier de ellas. Una lógica de segundo orden incluye

agregar nuevos símbolos lógicos. Pero sin embargo resulta que tiene peores propiedades metateóricas. Se puede crear así una jerarquía ascendente definiendo Lógicas de orden superior (*High-order-logics*), es decir se puede definir una Lógica de orden-k para cualquier entero positivo k. Todas ellas, incluyendo la de primer orden, son extensiones de la Lógica de Conectivas, se pueden denominar en su conjunto *Lógica clásica* (Shapiro, 2009) y se basan en el uso de la *implicación material*, cuya crítica estaba precisamente en la base del origen de las *lógicas modales* y de las *lógicas de la relevancia*, como vimos anteriormente. El nacimiento y desarrollo de las lógicas de primer orden y de segundo orden clásica fue un proceso gradual desde finales del siglo XIX y la cuestión de qué lenguaje sería el adecuado para expresar los problemas matemáticos fue de hecho un asunto muy controvertido y ligado al desarrollo de la Teoría de Conjuntos que no se solventó hasta 1958 por el consenso mayoritario de los lógicos en que la lógica y los lenguajes de primer orden serían los adecuados. Como señala Ferreirós (2001, 448-449), cuyo análisis seguimos muy estrechamente en muchos puntos de este apartado, "presenting in a nutshell the results of our quick historical overview, we can say that around 1900 logic was conceived as a theory of sentences, sets and relations; after World War I and as late as 1930 the exemplar for modern logic was a higher-order system, simple type theory; and only around 1940-1950 did the community of logicians as a whole come to agree that the paradigm logical system is FOL … Given those historical traces, one is naturally led to wonder whether FOL constitutes what might be called a natural unity. Is it a system that sooner or later had to be adopted, once an interest in logical matters had arisen, or is it perhaps a compromise between the natural and the contingent? …Throughout history, philosophers have proposed many diverse definitions of logic. Here I shall just examine a couple proposed by influential writers, in order to show the implausibility of a purely rational justification of the modern delimitation of (elementary) logic". E incluso hoy en día podemos observar una reivindicación de las lógicas de segundo orden como el lenguaje adecuado para las Matemáticas por parte de algunos autores[383].

Si uno analiza los manuales de Lógica de cada época, se presenta en ellos en cada caso la teoría como un todo cerrado, una relación de conceptos estática, en cuyo lenguaje se analizan, por ejemplo, las teorías matemáticas. Pero la realidad, aún centrándonos en los últimos 100 años, es muy otra. El análisis de la evolución histórica de esas teorías en ese corto lapso de tiempo prueba una *contingencia* de sus resultados y una cierta *arbitrariedad* determinada por su misma evolución en la cuál los conceptos básicos son *construidos* mentalmente mediante la selección de ciertas características del lenguaje natural y la ignorancia de otras, y determinada también por la tradición cultural y científica heredada. Por otra parte merece la pena señalar que la mayor parte de los matemáticos, salvo los que han dedicado parte de sus esfuerzos a la lógica, son completamente ajenos a esto y en su mayoría ni siquiera saben distinguir entre una lógica de primer orden y una de segundo orden, y sin embargo realizan su creación matemática perfectamente al margen de ello. Luego hay una diferencia sustancial entre la *práctica* matemática y el *análisis lógico (formal)* de sus teorías, diferencia que correspondería a la distinción de Hilbert entre *inhaltliche Mathematik* y *formal*

---

cuantificadores de varios tipos; además de cuantificadores de primer orden que requieren variables como las de la lógica de primer orden, existen cuantificadores para subconjuntos o propiedades, que no pueden aparecer en una lógica de primer orden. De la misma manera que en la lógica de primer orden, la lógica de segundo orden puede contener signos no-lógicos para construir un lenguaje de segundo orden específico. La lógica de segundo orden contiene fórmulas de primer orden y fórmulas de segundo orden. Una fórmula de lógica de segundo orden se llama fórmula de primer orden si todos sus cuantificadores cuantifican variables de primer orden (pudiendo contener además variables de segundo orden libres). Para más detalles (Enderton, 2012).

383 (Shapiro, 1985, 1990 y 1991), (Montague, 1965), (Hellman, 1989), (Rossberg, 2004), (Väänänen, 2001), (Boolos, 1975, 1984 y 1998), (Eklund, 1996), (Rossberg, 2004) y (Bueno, 2010).

Mathematik. Esto implica también ciertamente una crítica a la ambición, por excesiva, que planteaban las aspiraciones del *programa finitista* en Hilbert, en línea con las observaciones de Gödel. Puede señalarse también que esta ambición excesiva del *programa finitista* (o tal vez mejor, esa fe excesiva en las posibilidades de la Lógica matemática de su época) presenta una cierta contradicción con las concepciones que Hilbert sostenía sobre la Matemática en las manifestaciones que hemos analizado. La clave tal vez estaría en su creencia en la noción por él mil veces repetida de "la armonía preestablecida", que, según declara expresamente, sería totalmente distinta a la noción análoga de Leibniz, pero en la que nunca queda claro qué significaría exactamente ni en qué se diferenciaba de la noción sostenida por Leibniz. Parece evidente que la formación filosófica de Hilbert, y sus formulaciones filosóficas, eran bastante menos elaboradas que las de otros relevantes contemporáneos suyos como, por ejemplo, Weyl, Reichenbach, Poincaré o Frege, aunque sí tenía una filosofía de la Matemática bien definida.

La evolución de la Lógica a partir de los trabajos de Boole y De Morgan fue rápida, pero enmarcada dentro de la tradición heredada. Ya indicamos más arriba que Boole intentó demostrar que la silogística de Aristóteles podía interpretarse dentro de su modelo y dedicó los capítulos iniciales de su *Mathematical Analysis of Logic* a trasladar las proposiciones básica de Aristóteles y las figuras del silogismo a su cálculo. Pero el mismo Frege, 50 años más tarde dedica el capítulo-1 de su *Begriffsschrift* a interpretar la silogística de Aristóteles dentro de su modelo. Las propuestas innovadoras de Boole, De Morgan y Venn eran de hecho una parte muy marginal de las investigaciones lógicas del siglo XIX que, en su mayor parte, se movían en torno a una investigación formalista (siguiendo el modelo propuesto por Kant y Herbart) y, en otra dirección, a la llamada *lógica dialéctica* (que poco o nada tenía que ver con la anterior) siguiendo a Hegel y a otros autores[384]. Y ya vimos también que Kant

[384] Esta corriente de la Lógica (mejor dicho, que se autodenominaba *Lógica*) como se plasma por ejemplo en la "Lógica" de Hegel, puede considerarse totalmente al margen de lo que hemos denominado *Lógica tradicional*. En el caso de Hegel, por ejemplo, se identifica totalmente con su Metafísica y puede considerarse un intento de desarrollar unas categorías para una comprensión "total" del mundo, desde el punto de vista de una Epistemología puramente especulativa. Se desarrolló con gran vigor en Alemania donde encontró sus máximos detractores en Herbart y Lotze, ambos continuadores de Kant en este campo. Pero pueden encontrarse sus antecedentes en los movimientos que surgieron en el siglo XVII. Se trataría de encontrar una *nueva lógica* que fuera un instrumento para nuevos descubrimientos, al estilo de los nuevos métodos inductivos de Bacon: "In the 17th century, the goal was to create a new logic that would turn Aristotle's theory obsolete -it would be an instrument of discovery, as exemplified in the inductive methods of Bacon. A different tradition endowed logic with a metaphysical, ontological, or perhaps cosmic, meaning" (Ferreirós, 2001, 459). El trabajo de Hegel, Feuerbach, Scheling y Fichte en este campo encontró su continuación en la "lógica dialéctica" de Karl Marx, centrada en una *lógica* que pretendía ser adecuada para la comprensión de los fenómenos sociales e históricos; aunque se trata nuevamente de un cuadro de *categorías metafísicas*, muchas de clara raíz hegeliana (superestructura, tasa de ganancia, clase, fuerza de trabajo, capital, partido dirigente, dictadura del proletariado, contradicción –Wiederspruch-, contraposición –Gegensatz-, superación –Aufhebung-, …). No puede en este caso despacharse alegremente esa construcción conceptual como inútil para el análisis sociológico e historiográfico, como demuestra su incorporación a los análisis más amplios y fundamentados de Max Weber o, en una línea radicalmente distinta, de Henri Lefebvre. La caricatura de la teoría marxista vino en la forma soviética del *materialismo dialéctico* basado en la obra de Lenin "Materialismo y Empirocriticismo", supuesta crítica científica de la obra de Mach, y que se desarrolló posteriormente a través de varias obras editadas entre 1930 y 1970 por la Academia de Ciencias de la URSS. Precisamente en los años 60 y 70 se desarrolló en Francia la segunda caricatura de la *lógica dialéctica* como un intento de crear una *lógica de la historia* (muy en la línea de Hegel) y del cual se podría señalar como obra de referencia el libro de Henri Lefebvre "Lógica formal, Lógica dialéctica", construido en torno a la oposición *sincronía-diacronía*; hoy se puede considerar que es una de esas reliquias arqueológicas del pensamiento que nos regalan de cuando en cuando los franceses cuando se ponen a reflexionar sobre el pensamiento alemán. En todo caso, la llamada *lógica dialéctica* no tenía desde el principio nada que ver con lo que se entiende por *Lógica* desde la antigüedad. Ferreirós (2001, 456) señala tres líneas guías para su delimitación: Primero, la Lógica tiene que ver con el análisis de las condiciones de la deducción, intentando

planteaba la investigación Lógica de un modo extremadamente formalista, a partir de la distinción que hacía entre "materia" y "forma" de un argumento, aunque dentro de lo que Bochenski denomina *classical Logic.* Para Ferreirós (2001, 456) esta denominación es ambigua puesto que tendría varios significados más que el denotado por Bochenski (1956), y se decanta por *traditional Logic*. Kneale (1962) denota ese mismo significado por *Post-Renaissance Logic*. Todos coinciden en que se trata de la teoría lógica tal y como era usualmente presentada desde el siglo XVII hasta alrededor de 1850, y cuyo modelo sería la *Lógica de Port-Royal* plasmada en el libro de Arnaul & Nicole (1662) y al que todos consideran el tratado prototípico de ese largo periodo, y al que Kant también se refería. Kant era considerado una referencia fundamental al respecto, como lo prueban, por ejemplo los comentarios del mismo De Morgan (1858, 74-76)[385]. Los tratados de Lógica *tradicional* del siglo XIX tenían típicamente tres partes: las dedicadas a los *conceptos, juicios y silogismos*, respectivamente, y eventualmente una cuarta parte dedicada a cuestiones metodológicas. Ferreirós (2001, 458) señala como prototipos los *Elements of Logic* de Whately (1827) y *Neue Darstellung der Logik* de Drobisch (1836). Era evidente que la obra de Boole señalaba un nuevo camino, y muchos lógicos lo percibieron inmediatamente. Los primeros avances posteriores a la obra de Boole, y basados en su perspectiva, fueron realizados por Jevons, De Morgan, Schröder, Peirce y Frege. En particular, Charles Sanders Peirce y Gottlob Frege realizaron de forma independiente una separación de la noción de *cuantificador* de la de *conectiva* lógica, y una introducción de las nociones de *relación* y *función* en la lógica simbólica. Ciertamente no inventaron la noción de cuantificador, que tenía firmes raíces ya en la Antigüedad: "what happened circa 1880, in the work of Peirce and Frege, was not that the notion of quantifier was invented but rather that it was separated from the Boolean connectives on the one hand and from the notion of predicate on the other" (Moore, 1988, 98).

Peirce modificó el sistema de Boole en dos direcciones fundamentales. De un lado (Peirce, 1865), reinterpretó la adición lógica booleana + como la unión bajo la interpretación de clases y como la disyunción inclusiva en el caso de proposiciones, mientras que Boole la interpretaba sólo para clases disjuntas o disyunción excluyente; de otro lado (Peirce, 1870) investigó e incluyó en el sistema booleano la noción de *relación* que De Morgan (1859) había introducido en la lógica formal. Aunque Jevons rechazó la extensión del sistema booleano a relaciones, el planteamiento de Peirce fue en general aceptado. Además (Peirce, 1883), mediante uniones e intersecciones de clases (sumas y productos en su terminología) aplicadas a las relaciones logró separar la noción de cuantificación de las conectivas booleanas. Posteriormente (Peirce, 1885) volvió a tratar el tema de los cuantificadores dándole un

---

establecer las condiciones para que un argumento sea correcto. Segundo, la Lógica tiene aplicabilidad universal, no dependiendo de las condiciones del objeto ni de consideraciones de existencia; es el llamado *principio de universalidad*. Ambos principios fueron ya establecidos por Aristóteles (*Tópicos*, libro A, 2, 101a36-101b3) y por los Estoicos (Bochenski, 1956). Tercero, y esto fue enfatizado particularmente por Kant, la Lógica se ocupa de la *forma* de los argumentos y deducciones, nunca de su *materia*. Para un estudio del estado y evolución de la lógica en Alemania en el siglo XIX, cfr. (Ueberweg, 1882) y (Peckhaus, 1997, 1998 y 1999).

[385] "Kant is famous for his conservativeness regarding logical theory, but he contributed in an important way to make precise the traditional conception of logic" (Ferreirós, 2001, 456). Existía en todo ese periodo una fuerte tendencia a mezclar el análisis lógico de los argumentos con el análisis de los procesos mentales correspondientes, como queda por ejemplo de manifiesto en el mismo título de la primera obra de Boole "The Laws of Thought", o en el hecho de que la obra mencionada prototípica de la Lógica de Port-Royal hable de "ideas" para referirse a los "enunciados". Es este psicologicismo contra el que Kant se posicionó rotundamente, como vimos en la Primera Parte de este trabajo. Las obras de Boole, De Morgan y Venn se inscribían en esta tradición, pero desarrollando la idea de un tratamiento algebraico del análisis siguiendo el planteamiento propuesto en su día por Leibniz, y recogiendo también el espíritu del desarrollo matemático de la época.

enfoque que tendría una gran influencia en la Lógica en tanto que muchos autores, como Schröder, Lowënheim y el mismo Hilbert en su primera etapa, seguirían su planteamiento. En primer lugar, definió los cuantificadores como parte de lo que él denominó "first-intentional logic of relatives [relations]" de una forma que enfatizaba su analogía con la aritmética[386], aunque en su tratamiento un fórmula con cuantificador podía ser *infinita* en contraste con el tratamiento que daría Peano a este tema y para quien la Lógica se reducía a un repertorio de fórmulas todas finitas. Además la sintaxis no se podía distinguir totalmente de la semántica porque al introducir los cuantificadores aplicables a un determinado dominio había que establecer inicialmente el dominio y, si este era infinito, se debían considerar fórmulas de longitud infinita. En segundo lugar, usó los cuantificadores para cuantificar relaciones en lo que él llamó "second-intensional logic" que, de hecho, era una versión de una lógica de segundo orden[387] y los aplicó en este contexto para definir la identidad, cosa que no se podría hacer en una lógica de primer orden (Peirce, 1885, 199). Sin embargo raramente volvió a este tema y, en todo caso, no aplicó su SOL a la Matemática, en contraste con Frege. Cfr. (Moore, 1988, 98-105).

El sistema lógico de Frege era significativamente distinto del de Boole y estaba orientado esencialmente a una lógica de segundo orden. Moore (1988, 101) recalca que en los *Begriffsschrift* (1879), su primera obra de Lógica, Frege está claramente motivado por las nociones de Leibniz de un *calculus ratiocinator* (un cálculo formal para los razonamientos) y una *lingua characteristica* (una lengua universal) y en esa línea desarrolla un lenguaje bidimensional, muy distinto del unidimensional desarrollado anteriormente por Boole y los análogos de Peano, Russell y Hilbert, y en base al cual pretendía fundamentar la Aritmética. Para su Lógica toma de la Matemática las nociones de *función* y *argumento* como sustitutas de las tradicionales de sujeto y predicado, e introduce un cuantificador universal que cuantifica tanto argumentos como funciones, con lo que de hecho crea una Lógica que más tarde sería denominada de segundo orden, aunque en su sistema no se separan las Lógicas de primer y segundo orden. Hace un uso intensivo de los cuantificadores sobre funciones en los *Begriffsschrift* (1879, secciones 11 y 26) al tratar del Principio de Inducción y desarrolla sus planteamientos en los *Grundlagen der Arithmetik* (1884, sección 53) donde define "un concepto que cae bajo un concepto superior, o sea, un concepto de segundo orden", que sería análogo a una función de funciones sobre individuos, lo que hoy en la Matemática moderna se llamaría un *operador*. En su obra más madura profundiza en esta dirección e incluso modifica su terminología. Así, en *Funktion und Begriff* (1891) cambia su terminología de "función (o concepto) de segundo orden" a "función de segundo nivel (zweiter Stufe)", y un tratamiento más elaborado de estas funciones, incluyendo cuantificación sobre ellas, lo desarrolla en *Grundgesetze der Arithmetik* (1893 y 1903), en donde la cuantificación sobre funciones del segundo nivel juega un papel central y en donde dos de los seis axiomas de su lógica pertenecen claramente a una lógica de segundo orden. En esa obra establece también una jerarquía de niveles de cuantificación pero "nevertheless, he stated his axioms as second-order (not third-order or ω-order) prepositional functions. Frege developed a second-order logic,

---

[386] "Here, in order to render the notation as inconical as possible, we may use $\sum$ for *some*, suggesting a sum, and $\prod$ for *all*, suggesting a product. Thus $\sum_i x_i$ means that x is true of some one of the individuals denoted by *i* or $\sum_i x_i = x_i + x_j + x_k + etc$. In the same way, $\prod_i x_i = x_i x_j x_k etc.$ If x is a simple relation, $\prod_i \prod_j x_{ij}$ means that *every* i is in this relation to *every* j, $\sum_i \prod_j x_{ij}$ that *some one* i is in this relation to *every* j. It is to be remarked that $\sum_i x_i$ and $\prod_i x_i$ are only similar to a sum and a product; they are not strictly of that nature, because the individuals of the universe may be innumerable" (Peirce, 1885, 194-95).

[387] Moore (1988, 129) señala que el primero que indicó los desarrollos de Peirce de una SOL fue Martin (1965).

rather than a third-order or ω-order logic, because, in his system, second-level concepts could be represented by their extensions as sets and thereby appear in predicates as objects (1893, 42)" (Moore, 1988, 102), aunque nunca emprendió una separación de su lógica de primer orden del resto. Su postura metodológica y su posición filosófica quedaban claramente definidas en los dos debates que mantuvo con Schröder y Hilbert. En 1883 (Frege, 1883,1) respondió a las críticas de Schröder realizadas tres años antes[388] y señaló que "no pretendo representar una lógica abstracta por medio de fórmulas, sino expresar un contenido (*Inhalt*) a través de una escritura de signos de una forma más exacta y clara de la que es posible a través de las palabras", lo que marcaba una ruptura radical con el planteamiento puramente combinatorio y algebrista iniciado por Boole y seguido en mayor o menor medida por todos los demás autores hasta aquí citados. Otro punto clave para entender adecuadamente el pensamiento de Frege está en el debate que sostuvo con Hilbert y que ya ha sido mencionado varias veces en este trabajo. Lo más relevantes es que el debate se centra expresamente sobre la *existencia* de los objetos matemáticos. Hilbert le responde el 29 de Diciembre de 1899 a Frege en respuesta a su carta del 27 de Diciembre:

> "Usted escribe: 'Denomino axiomas a las proposiciones que son verdaderas pero que no son demostradas porque nuestro conocimiento de ellas surge de una fuente muy diferente de la lógica, una fuente que podría llamarse intuición espacial. De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen entre sí'. Encuentro muy interesante leer esta frase de su carta, ya que por lo que a mí se refiere siempre que he pensado, escrito y dado clases sobre estos temas, he dicho justo lo contrario: Si los axiomas dados arbitrariamente no se contradicen entre sí en todas sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Para mí, este es el criterio de verdad y existencia" (Hilbert en: Frege, 1980a, 39).

Para Frege ni la consistencia de los axiomas (que suponen una definición indirecta de los objetos), ni la definición directa de un objeto ni tampoco su postulación garantizan la existencia de un objeto matemático, "no más en Matemática que en Zoología". Estos existirían o no con independencia de su definición (que puede ser vacía) o su postulación. Pero mientras que en Zoología existen criterios objetivos y empíricos para determinar la existencia o no de un objeto, éste no es el caso en Matemática. Y Frege no apunta a ningún criterio de verificación de existencia más allá de su ambigua y no analizada noción de "intuición" que en él reviste un aspecto metafísico. Para ser más exactos, exige que se aporte un "modelo" que probaría la existencia de esos objetos, aunque su noción de "modelo" no está claramente definida. Así, en su carta del 6 de Enero de 1900 a Hilbert (Frege 1980a, 46-91) sostenía enérgicamente que la consistencia de un sistema de axiomas implicaba la

[388] Ernst Schröder, que comenzó sus trabajos en Lógica (Schröder, 1877) dentro de la línea trazada por Boole, leyó el *Begriffsschrift* de Frege y publicó una amplia recensión crítica (Schröder,1880). Aunque elogiosa en muchos aspectos y resaltando su conexión con los planteamientos de Leibnitz, criticaba fundamentalmente el método de escritura bidimensional desarrollado por Frege que, en su opinión, era superfluo y debería ser sustituido por el formalismo de Boole. La respuesta de Frege, tres años más tarde, la mencionamos en el texto principal. En esencia marca un distanciamiento de los planteamientos algebristas de Boole y resalta la importancia del *contenido* (Inhalt) en su sistema. Además resaltaba que su notación permitía aplicar la cuantificación a una parte de una fórmula, mientras que el sistema de Boole no. Esa separación de los cuantificadores de las conectivas, que también desarrolló independientemente Peirce como ya vimos, Schröder no la valoró, aunque adoptó esta separación posteriormente en el segundo volumen de sus *Lectures on the Algebra of Logic* (1891), introduciendo la notación de Peirce para los cuantificadores. Schröder vio con claridad la conexión entre los cuantificadores y la teoría de conjuntos, insistiendo reiteradamente en que no podía considerarse un conjunto que contenga todos los objetos pues, en ese caso, se produciría una contradicción (Schröder, 1890, 246), anticipando las paradojas en la teoría de conjuntos cuya posibilidad se abría con estos desarrollos. El principal fallo de su sistema fue el no distinguir las relaciones de pertenencia e inclusión, denotándolas ambas con el mismo símbolo, lo que fue muy criticado por Frege (1890). En el tercer volumen (1895), dedicado al "álgebra y la lógica de las relaciones" aborda varios desarrollos de Dedekind en Matemáticas dentro del contexto de una lógica de segundo orden (Moore, 1988, 103).

existencia de un modelo para ese sistema. La única forma de probar la consistencia de un sistema de axiomas sería, por tanto, el exponer un modelo de él. Para él la clave del error de Hilbert radicaba en una confusión entre conceptos de primer nivel y conceptos de segundo nivel (usando su terminología), y la *existencia* sería un concepto de segundo nivel. Sus argumentos aparecen más detallados en (1903b, 370-371). Para Moore (1988, 105), "it is precisely here that his system of logic, as found in the *Fundamental Laws*, differs from second-order logic as it is now understood".

Hilbert insistió repetidamente en su posición en este tema hasta el final de sus días. Parece claro que en el fondo, para él, la consistencia de un sistema axiomático implicaba la existencia de un modelo, aunque durante mucho tiempo eso no dejó de ser un artículo de fe. Para Hilbert quien, como vimos es sus múltiples manifestaciones citadas en la parte-II de este trabajo, también creía en una *inhaltliche Mathematik* y en una realidad de los objetos matemáticos, el matemático debía *limitar* sus procedimientos a las herramientas de su disciplina al margen de consideraciones metafísicas que no podía verificar –siguiendo una línea muy kantiana- y la consideración de nociones como "intuición" sólo podría hacerse apelando a *intuiciones de formas* que tuvieran una justificación epistemológica sólida; es decir, siguiendo un punto de vista estrictamente kantiano (en el sentido de la interpretación que aquí hemos hecho de Kant). El poder pensar un objeto *sin contradicción* implicaría ya para él algún tipo de existencia y verdad, idea que en realidad ya estaba en Kant (Röd, 1974). Aquí hay en mi opinión un punto débil en su pensamiento. Tanto la posibilidad de "pensar un objeto" como el hacerlo con o sin contradicción dependen esencialmente del lenguaje utilizado, y en Hilbert no hay ninguna reflexión en esta dirección. Aunque en la práctica realizó aportaciones fundamentales para la clarificación de esta problemática; por ejemplo, veremos en el siguiente apartado que fue el primero en establecer la distinción clara entre lógicas y lenguajes de primer y segundo orden, dando lugar a una controversia sobre cuál sería el adecuado para la Matemática, controversia que tardaría 50 años en resolverse (provisionalmente). La importancia determinante del lenguaje para la mera posibilidad de pensar un objeto queda perfectamente ilustrada en un análisis histórico de la evolución de la Lógica, la cual en gran parte consistía en la creación de un lenguaje artificial. Así, por ejemplo, la separación de los cuantificadores de las conectivas y la asignación de un signo específico para éstos realizada por Peirce, Schröder y Frege introducía de lleno el *conjunto* y su problemática como un objeto en el corazón de la Lógica, hasta el punto que en torno a 1900 se consideró que la Teoría de Conjuntos *era* Lógica. Y no se trata de que la cuantificación no se hubiera considerado de una u otra forma en la historia anterior de la Lógica; la diferencia radica en que no existía el lenguaje adecuado para manejarla y diferenciarla como un *objeto*. Análogamente, los enunciados de segundo orden aparecen ocasionalmente a lo largo de toda la historia de la lógica, pero sin que nadie observara que se trataba de enunciados objetivamente distintos de los de primer orden. Así, en la *Port-Royal Logique* (Arnauld & Nicole, 1, 272) podemos leer: "toda amistad es agradable; existen amistades peligrosas, por tanto algunas cosas peligrosas son agradables", y también (1, 268): "todas las virtudes son dignas de encomio; el ser paciente es una virtud, luego el ser paciente es digno de encomio". Es evidente que "la amistad", "la virtud" y "el ser paciente" son relaciones y por tanto esos silogismos son enunciados de segundo orden. Pero aquí sucede lo mismo que con las partículas "todo" y "algún" en la silogística de Aristóteles, las cuales no pueden considerarse una auténtica cuantificación aunque, de algún modo, favorecieran y anticiparan el nacimiento y desarrollo de ésta. Se trataría de un uso e interpretación de esas partículas en un *exemplar* (la silogística aristotélica) distinto de los de el *exemplar* de la moderna lógica de enunciados con cuantificación, siguiendo el análisis de Ferreirós (2001), quien trata el problema utilizando la noción kuhniana de *exemplar*, menos general (y en opinión de Ferreirós menos vaga) que la de *paradigma*[389]. Sin embargo, los enunciados de segundo orden eran en general una rareza en la lógica clásica. Es en el siglo XIX cuando aparecen como setas en los tratados de Matemáticas, sobre todo en las obras de Cauchy, Bolzano, Weirstrass, Dedekind, Cantor y Zermelo. Además, se maneja en ellos un uso sistemático de la cuantificación antes de que ésta se planteara en la Lógica. De hecho, los desarrollos lógicos de Frege y de Peano probablemente fueron en gran parte inspirados por su profundo conocimiento del trabajo de los trabajos matemáticos de esos autores[390]. Obsérvese la aparente similitud entre el siguiente silogismo aristotélico y la formulación de Peano del principio de inducción: “Todas las propiedades de los animales son propiedades de los hombres; La libre movilidad es una propiedad de los animales, Luego la libre movilidad es una propiedad de los hombres”. Principio de inducción: “Toda propiedad de los números que se aplica al 0 y que, en caso de aplicarse a n también se aplica a n+1, es entonces una propiedad de todos los números”.

Aunque ambos contienen enunciados de segundo orden, el principio de inducción en la formulación de Peano no tiene forma de silogismo, lo cual por un lado evidenciaba la insuficiencia de la lógica aristotélica para captar el razonamiento matemático. Pero además la partícula “todo” tiene en el razonamiento de Peano una función cuantificacional precisa,

[389] Ferreirós (2001) resalta la importancia y utilidad de la noción kuhniana de *exemplar* (una reelaboración en la obra madura de Kuhn de su inicial noción de *paradigma*) para el análisis de la evolución histórica de las nociones básicas de la Lógica y la Matemática, siendo su artículo un brillante desarrollo de esta tesis. Dos ejemplos claros serían la silogística aristotélica y la lógica estoica: “Perhaps more surprising will be my use of the Kuhnian notion of an exemplar as an extremely useful tool in understanding the historical evolution of this branch of modern mathematics. I would go as far as saying that I consider this notion capable of shedding much light on the development of branches of mathematics in general. Obvious examples could be found in the case of modern abstract algebra, specifically in the exemplary role played by group theory. First-Order Logic itself has served as the paradigm for a modern logical system and its metatheoretical study (it can be argued that the treatment of other systems, e.g., modal logic, has mimicked that of first-order logic). In this connection, readers might consider the present paper as a case-study in the employment of that Kuhnian tool for the historiographical and philosophical analysis of mathematics... Readers should keep in mind that I shall refrain completely from employing the broader and much vaguer notion of a paradigm, in the sense of what Kuhn once termed a ‘disciplinary matrix’” (Ferreirós, 2001, 442). “In his famous *Structure of Scientific Revolutions*, Kuhn expressed concern with the fact that scientists may share knowledge, without sharing a set of rules that univocally determine that knowledge. His proposal was that scientists’ knowledge involves shared paradigms, or more precisely exemplars in Kuhn’s later terminology. An exemplar is a noteworthy instance of theory- in-application, such as Newton's treatment of the solar system, or Lavoisier’s of combustion and oxygen. I contend that exemplars have also played a key role in the development of logical and other mathematical theories. (As I remarked at the beginning, we shall avoid the broader notion of a paradigm in the sense of ‘disciplinary matrix’.) The classical period left two main, distinct sets of logical exemplars, embodied in Aristotle’s doctrine of the syllogistic figures, and the Stoic doctrine of the so-called “unprovables”, basic inference rules from which all rules of sentential logic were supposed to follow” (Ferreirós, 2001, 457). Así el conocimiento de un mismo objeto sería un elemento de dos *exemplars* distintos cuando el marco conceptual del análisis es substancialmente distinto. Por ejemplo, el enunciado “todo hombre es mortal” sería una instancia del enunciado de la silogística aristotélica “todo A es B” y también una instancia del enunciado del cálculo de predicados de primer orden “$\forall x : A(x) \rightarrow B(x)$” sobre el dominio, por ejemplo, de los seres vivos; el marco conceptual de los análisis respectivos es tan distinto que permite hablar de dos *exemplars* distintos: “although we are still referring to the same prototype sentences, strictly speaking we are dealing with new exemplars. (The reader should recall that an exemplar is an archetypal instance of theory-in-application; the substantial change at the level of theoretical analysis involves, strictly speaking, a change of exemplars)” (Ferreirós, 2001, 463).

[390] Esto es particularmente claro en el caso de Frege. En los *Begriffsschrift*, pero especialmente en su artículo del mismo año sobre las aplicaciones de la su ideografía *Anwendungen der Begriffsschrift* (Frege, 1879b) donde pone abundantes ejemplos aritméticos y geométricos para ilustrar la capacidad de su sistema formal para expresar y tratar relaciones y argumentos matemáticos.

primero sobre el dominio de las propiedades numéricas y segundo sobre el dominio de los números naturales, que son conjuntos bien definidos (aunque infinitos). Sin embargo, el silogismo de Aristóteles se podría parafrasear eliminando el "todo" y sin precisar un dominio: Si una propiedad se aplica a los animales, se puede aplicar a los hombres, etc. Lo relevante aquí es el conjunto "animales" y su subconjunto "hombres" aunque el razonamiento se refiera a una propiedad de estos. Los distintos *exemplars* en la historia de la Lógica se caracterizan por la selección de ciertas partículas o estructuras del lenguaje, por el análisis y determinación de su significado y funcionamiento, y por la elaboración de un lenguaje (más o menos) formal para su posterior tratamiento de una forma que pretende ser exacta y unívoca. Así, por ejemplo, la silogística de Aristóteles y sus posteriores elaboraciones medievales se basan en la selección de los siguientes cuatro enunciados, que él creía que eran los prototipos de una proposición y en cuyas interacciones él creía que se fundamentaba la Lógica: Todo A es B, Algún A es B, Ningún A es B, Algún A no es B. Cabe destacar que las partículas "todo" y "algún" no tenían una vinculación claramente determinada con las variables A y B que introducía, por lo que no se trataba de cuantificaciones sino más bien de enunciados que permitirían expresar un argumento en lo que él denominaba su "forma normal", estructurado de acuerdo con las "figuras" silogísticas. Además no consideraba en principio relaciones como objeto de sus argumentos, aunque su consideración de las variables A, B, C,… como predicados abstractos en sus argumentos preparaba de alguna forma la introducción de enunciados de segundo orden y de cuantificadores.

La Lógica estoica, muy anterior a la aristotélica y sin embargo olvidada durante siglos, representa un *exemplar* totalmente distinto basado en la consideración de las partículas "si … entonces", "no", "y" y "o", y a la que ya nos hemos referido varias veces. Crearon una lógica de enunciados basado en esas conectivas, por lo que sabemos perfectamente axiomatizada, y consideraron que los predicados no formaban parte de las consideraciones lógicas. Resulta curioso que, en una especie de viaje de ida y vuelta, se detecta una fuerte tendencia en la escuela de Hilbert a considerar la Lógica de conectivas como la única parte que en propiedad pertenece a la Lógica[391]. Hermann Weyl parece haber sido el primero que en su trabajo *Das Kontinuum* (Weyl, 1918) etiquetó las deducciones cuantificacionales como "inferencias transfinitas" (transfinite Schlussweisen). En el contexto de los debates de la época, dominada por la crítica constructivista a la llamada "matemática abstracta" y a la teoría de conjuntos, eso debe entenderse como que la teoría cuantificacional no era en modo alguno evidente y estaría sujeta a dudas. Para Ferreirós (2001, 252), "authors of this period thought that, if anything deserves the name of logic, it must be acceptable to both constructivists and

[391] Hemos expuesto y analizado esta Lógica en su versión moderna en este Capítulo-6, destacando las diferencias de matiz desde el punto de vista epistemológico entre sus tres diferentes formulaciones formales: la teoría interpretativa, la teoría axiomática y la teoría de la deducción natural de Gentzen. "Indeed, the viewpoint that logic proper is nothing but sentential logic had some proponents in the history of our subject. Controversy over that thesis was the great divide separating the Aristotelians from the Stoics, which of course stand as the greatest partisans of logic-as-connective-theory. But even in contemporary times, members of the Hilbertian school showed a tendency to restrict logic proper to the theory of the connectives. Here we notice the impact of the foundational atmosphere surrounding the emergence of modern logic" (Ferreirós. 2001, 452). Curiosamente esa misma tendencia se observa en cierto modo en Frege si consideramos la definición de la Lógica que ofrece en *Der Gedanke*: "Just as 'beautiful' points the way for aesthetics and 'good' for ethics, so does a word like 'true' for logic. All sciences have truth as their goal; but logic is also concerned with it in quite a different way: logic has much the same relation to truth as physics has to weight or heat. To discover truths is the task of all sciences; it fails to logic to discern the laws of being true" (Frege, 1918, 58). Como señala Ferreirós (2001, 451), "however, there is no reason to think that Frege's definition might lead to a delimitation of elementary logic in accordance with FOL. It would rather seem that, on this definition, the scope of elementary logic would not go beyond classical sentential logic. (The same happens with Wittgenstein's definition or elucidation of logic in terms of tautologies)".

classicists, it must be in some sense 'finite'." Y los autores de la escuela de Hilbert denominaban sistemáticamente en sus trabajos lógicos durante los años 20 a los enunciados de la teoría cuantificacional como "axiomas transfinitos". El propio Hilbert destaca el contraste entre los enunciados de la "lógica finita" con los de "nuestra matemática usual" y se pregunta por el camino que nos lleva de lo finito e intuitivo a lo transfinito y se responde el mismo diciendo que "Obviously already with the use of the concepts 'all' and 'there is'." (Hilbert, 1923, 181). Hilbert intentó evitar esta problemática con la introducción del símbolo τ, posteriormente sustituido por ε, y con el desarrollo del ε-cálculo como una alternativa al uso de cuantificadores y que ya hemos expuesto y analizado en la Parte-II. Es muy clarificador el trabajo de Von Neumann *Zur Hilbertschen Beweistheorie* (Von Neumann, 1927) en donde clasifica los axiomas que formalizarían la lógica y la matemática clásica en seis grupos. El grupo-I se denomina "lógica" y contiene solamente esquemas de axiomas basados en el condicional y la negación. Los grupos I a III incluyen la identidad y la aritmética de Peano pero sin la inducción matemática, bajo el nombre de "grupos finitos". "All of this suggests that 'pure logic' comes down to sentential logic and is strictly finite" (Ferreirós, 2001, 453). A continuación vienen los grupos "transfinitos" de axiomas, empezando por el grupo-IV que Von Neumann denomina "grupo-τ" y en donde usa ese enfoque de Hilbert para introducir las partículas "todo" y "existe algún" como cuantificadores[392]. No es por eso sorprendente el que fuera precisamente Hilbert el primero que estableció rigurosamente la diferencia entre FOL y SO. La selección de las partículas del lenguaje que determinan la Lógica, su interpretación y la determinación de los objetos a los que se aplican no son temas técnicos automáticamente evidentes; están íntimamente ligados al lenguaje en el que se expresan y a la misma noción de lo que se entiende por Lógica. Además de con la distinción entre conectivas y cuantificadores, esto es particularmente ilustrativo con la cópula "es"[393]. Quine en su obra temprana (Quine, 1940) la considera una constante lógica, lo que le lleva a incluir la teoría de conjuntos como una parte de la Lógica, coincidiendo en esto con Frege, Dedekind, Peano, Schröder y Russell, que incluían en la lógica elemental alguna forma de la teoría de conjuntos. A primera vista puede parecer lo correcto, si tenemos en cuenta que uno de los usos frecuentes de "es" en el lenguaje natural se corresponde con alguna forma de inclusión o de pertenencia, nociones básica de la teoría de conjuntos. Pero ya De Morgan (1858) alertó del error subyacente de considerar la partícula "es" como un término

---

[392] El siguiente texto (Von Neumann, 1927) es muy ilustrativo: "The axiom-schemas of group IV contain the typical 'transfinite' or 'impredicative' inferences of classical mathematics, but it is not possible to found it exclusively on their basis. For classical mathematics embraces yet another non-intuitionistic element, which goes farther a certain portion of set theory. It is necessary to emphasize this expressly: the edifice of classical mathematics is insecure and exposed to the assaults of skeptics at two points, namely, the concept "all" and the concept of "set". One should neither identify these two fundamentally different things (which nevertheless happens frequently), nor forget one because of the other [über das andere]. Criticism of mathematics started with "set" and only slowly proceeded to "all", which however is today the main point of attack for intuitionists. But one should not forget that, even if their objections to "all" were in a certain sense refuted, one has not yet done anything for the set-concept. (Certain analogies speak for an identification of the transfinite principle "all" with the transition finite-denumerable, and of the transfinite principle "set" with the transition denumerable-continuum)".

[393] Quine en su obra temprana *Mathematical Logic* (Quine, 1940 (1972), pp.21 y ss) plantea un argumento que se remonta a Aristóteles para justificar su selección de las constantes lógicas. El vocabulario lógico consistiría de aquellas expresiones que comparten todas las ciencias independientemente de su vocabulario específico, es decir, de partículas tales como "si … entonces", "no", "y", "o", "todo", "alguno" y la cópula "es", y que sería un vocabulario de aplicabilidad universal, la intersección de los vocabularios de todas las ciencias. Consecuentemente con su consideración de la cópula "es" como un término sincategoremático, incluye la teoría de conjuntos como parte integral de la Lógica. Posteriormente (Quine, 1970) rechaza radicalmente este punto de vista y excluye explícitamente la teoría de conjuntos de la Lógica, limitando la Lógica a la FOL.

sincategoremático, sosteniendo que debía considerarse como un término categoremático que expresaría una relación entre objetos, más precisamente, sería una relación asimétrica y transitiva y en modo alguno una conectiva lógica. Pero este enfoque fue ignorado por todos los lógicos del siglo XIX y comienzos del XX[394]. Además de la selección de las partículas supuestamente relevantes existe un segundo nivel de selección a la hora de fijar su significado, su funcionamiento y su alcance. Ya vimos en la Parte-II que la diferencia entre las lógicas no-standard desarrolladas en el siglo XX y la lógica standard se basaban en las distintas interpretaciones de la conectiva "si … entonces". Acertadamente escribió Tarski, precisamente en relación con esa conectiva, que:

> "Underlying our whole construction is the division of all terms of the language discussed into logical and extra-logical. This division is certainly not quite arbitrary.... On the other hand, no objective grounds are known to me which permit us to draw a sharp boundary between the two groups of terms. It seems to be possible to include among logical terms some which are usually regarded by logicians as extra-logical without running into consequences which stand in sharp contrast to ordinary usage" (Tarski, 1936 (1956), pp. 418-419).

Para concluir, podemos decir que a principios del siglo XX la concepción de la ya llamada Lógica Matemática se expresaba muy bien en la siguiente definición de Russell: "The subject of symbolic logic is formed by three parts: the calculus of propositions, the calculus of classes, and the calculus of relations" (Russell, 1903, parágrafo 13). Y también: "Considered as a formal calculus, mathematical logic has three analogous branches, namely (1) the calculus of propositions, (2) the calculus of classes, (3) the calculus of relations" (Russell, 1910, 92). Así, la Lógica se expandía hasta abarcar como fundamento propio no sólo la lógica de proposiciones sino la lógica de enunciados, la teoría de conjuntos y también el cálculo de relaciones (esto es, lo que más tarde se denominaría SOL) y al cual la mayoría de autores consideraban la lógica propia de los razonamientos matemáticos. Y con ello se extendió el enfoque logicista que consideraba los conceptos matemáticos como un mero desarrollo de consideraciones lógicas. El supuesto paraíso se derrumbaría precisamente a raíz de la, una vez más, genial obra de Hilbert, quien fue el primero que estableció una distinción rigurosa entre FOL y SOL iniciando un proceso de involución y restricción del dominio de la Lógica que duraría 50 años. Aunque curiosamente las secuelas filosóficas del logicismo perdurarían casi hasta nuestros días en distintas versiones de la llamada filosofía analítica.

6.7.- La evolución del pensamiento lógico de David Hilbert y la FOL.

En la Parte-II de este trabajo hemos analizado la concepción que Hilbert tenía de la Lógica y sus manifestaciones fundamentales al respecto. Se presentaba allí su enfoque inicial o programático y lo que podríamos denominar su posición madura, pero esta posición tuvo una evolución en la que en muchos estadios no extraía todas las consecuencias que se podrían considerar desde sus planteamientos, lo que explicaría en parte las críticas de Herbrand y Skolem. Lo primero que llama la atención es, en su primera época, su confianza (podríamos decir fe) en que la Lógica había alcanzado el punto omega de su desarrollo, encontrándose "totalmente desarrollada" como una teoría completa -que encontramos en virtud de esa nunca bien explicada "armonía preestablecida"- y en la que de hecho intentaría basar su *programa finitista*, argumentación que explicaría por sí sola las debilidades ya expuestas de dicho programa[395]. Esta sería la debilidad metodológica más fuerte que se le podría imputar, puesto

---

[394] "Had this viewpoint won the day, the history of logic would have been quite different, and logicism would never have arisen" (Ferreirós, 2001, 450).

[395] "La Teoría de la Demostración, que a continuación discutiremos, representa igualmente un ejemplo de armonía preestablecida. Esta teoría se sirve del llamado Cálculo Lógico, desarrollado con anterioridad con fines muy diferentes" (Hilbert, GA, tomo III, 192). "¿Cómo puede ocurrir esto? Por suerte para nosotros

que de hecho sería él precisamente el que iniciaría en la Lógica un desarrollo que supondría un vuelco total de la concepción de la Lógica y su relación con la Matemática dominantes a comienzos del siglo XX. Sería su obra *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928), escrita con Ackermann, la primera que haría una distinción clara entre FOL y SOL creando las bases de un cambio radical en las concepciones dominantes, principalmente debido a la obra de lo que podríamos denominar sus discípulos críticos: Löwenheim, Skolem, Herbrand, Gödel, Gentzen, Weyl y la llamada *escuela postulacionista americana* (Edward Huntington y Oswald Veblen), aunque la crítica o el desarrollo que éstos realizaron fuera en cada caso en distintas direcciones, si bien de alguna forma complementarias[396]. Para Ferreirós (2001, 445), "the first really modern treatise of formal logic is not *Principia Mathematica*, but Hilbert & Ackermann's *Grundzuge der theoretischen Logik*. The book is noteworthy because here one can find, for the first time in a treatise on logic, a study of FOL as a separate system (under the name of 'restricted functional calculus'), posing the question of its metatheoretical properties,e.g., completeness". Aunque es cierto que es esa obra la FOL aparece como un subsistema y que en la mente de Hilbert se mantiene la opinión general de la época de que la Matemática era esencialmente un asunto que sólo podía tratarse en una SOL –o sea, con con un cálculo de relaciones-; así, en numerosos pasajes de esa obra aduce ejemplos matemáticos defendiendo esa tesis (Hilbert & Ackermann, 1928, 82-92). La obra culmina describiendo el llamado "cálculo funcional extendido", una versión singular de la *teoría de tipos* de Russell, insistiendo en que dicha teoría era el vehículo lógico adecuado para tratar los números reales (Hilbert & Ackermann, 1928, 114-115). Para algunos autores, el interés que movió a Hilbert a destacar la FOL como un subsistema sería su utilidad de cara al desarrollo de la *Beweisstheorie* en el sentido de su metodología, expuesta en numerosas referencias ya citadas, de moverse progresivamente de los sistemas más simples a los más complejos y de justificar lo infinito a través de lo finito[397]. En *Über das Unendliche*, llega a presentar una escala de funciones (que él llamaba *tipos de variable*) y desarrolla una cuantificación sobre funciones de cualquier nivel (Hilbert, 1926, 183-184). Probablemente pretendía en el fondo establecer la consistencia de la Matemática de forma escalonada, partiendo de los sistemas más elementales. Habiendo ya demostrado que un subsistema muy elemental de la Aritmética era consistente, esperaba poder demostrar la consistencia de la totalidad de la Aritmética (incluyendo la inducción matemática) y a continuación la de los números reales (recordemos que su demostración de la consistencia de la Geometría era relativa a la consistencia de los

---

entra aquí en escena la misma armonía preestablecida que observamos tan frecuentemente en la historia del desarrollo de las ciencias, precisamente esa armonía de la que Einstein, por ejemplo, saca provecho cuando, para su Teoría de la Gravitación, encuentra completamente elaborado el Cálculo General de Invariantes; nosotros encontramos el Cálculo Lógico elaborado ya de forma avanzada" (Hilbert, 1926, 176).

[396] La importancia de la distinción que ahí hacía Hilbert tal vez no fue entendida bien ni por él mismo, como le reprocharían Herbrand y Skolem, y haría falta un largo proceso para que la comunidad científica sacara todas sus consecuencias, al igual que sucedería con la distinción entre sintaxis y semántica de un lenguaje formal: "During the nineteenth and early twentieth centuries, there was no generally accepted classification of the different kinds of logic, much less an acceptance of one kind as the correct and proper one. (Infinitary logic, in particular, appeared in many guises but did not begin to develop as a distinct branch of logic until the mid-1950s.) Only very gradually did it become evident that there is a reasonable such classification, as opposed merely to the cornucopia of different logical systems introduced by various researchers. Likewise, it only became clear over an extended period that in logic it is important to distinguish between syntax (including such notions as formal language, formula, proof, and consistency) and semantics (including such notions as truth, model, and satisfiability). This distinction led, in time, to Godel's Incompleteness Theorem (1931) and thus to understanding the limitations of even categorical axiom systems" (Moore, 1988, 96). La historia del origen, la evolución y la hegemonía final de la FOL está ampliamente investigada. Véase: (Goldfarb, 1979), (Dreben & van Heijenoort, 1986), (Moore, 1980, 1988, 1997, 1998), (Eklund, 1996), (Ferreirós, 2001), (Rossberg, 2004) y (Bueno, 2010).

[397] Cfr. (Ferreirós, 2001, 446).

reales). Por lo que está claro que estaba pensando en una sucesión de niveles que deberían asegurarse progresivamente. En un apéndice manuscrito a sus apuntes del curso que dictó en Göttingen en el semestre de invierno de 1922-1923 están listados ocho de tales niveles[398]; el Análisis se situaba en el nivel cuarto y la lógica de orden superior en el nivel quinto (Moore, 1988, 116-117). Pero incluso antes de ese curso de 1922 y, por tanto, bastante antes del libro citado publicado en 1928, ya podemos encontrar tales planteamientos, en particular su separación de la FOL como un sistema independiente; de hecho, a partir de 1917 en que empieza a publicar de nuevo sobre asuntos lógicos después más de 10 años de no ocuparse del tema. Así, en su curso del semestre de invierno de 1917-1918 (Hilbert, 1917, 190) ya aparecen los planteamientos posteriormente impresos en 1928 en su libro con Ackermannn, siendo esa su primera exposición de su concepción madura de la Lógica (Moore, 1988, 113). Hilbert comenzó el curso inmediatamente después de su conferencia en Zurich titulada *Axiomatisches Denken*, en donde resaltaba el rol del método axiomático en diversas ramas de la Matemática y de la Física. En el curso consideraba el método axiomático en sus aplicaciones a dos disciplinas: la Geometría y la Lógica, pero además de enfatizar las cuestiones relativas a al independencia y la consistencia –como en la conferencia- se extendía además sobre el problema de la completitud. Separa claramente la FOL bajo el nombre de "cálculo funcional" como un subsistema, pero al tiempo aboga por un sistema lógico al menos tan fuerte como el que hoy conocemos por SOL para el tratamiento de la Matemática[399]. Parece que Hilbert ya nunca se separó de este punto de vista, que repitió en su libro con Ackermann de forma más rotunda: "As soon as the object of investigation becomes the foundation of.. .mathematical theories, as soon as one wishes to determine in what relation the theory stands to logic and to what extent it can be obtained from purely logical operations and concepts, then the extended calculus [of logic] is essential" (Hilbert & Ackermann 1928, 86).

La evolución del pensamiento lógico de Hilbert es inseparable de su concepción del rol del método axiomático y de su programa finitista. De acuerdo con el programa que ya se esbozaba en los *Grundlagen* (1899), demostró en 1904 la consistencia de un subsistema muy

---

[398] El curso se titulaba *Logische Grundlagen der Mathematik*. Una copia parcial se guarda en los archivos de la Universidad de Göttingen. Un artículo con parecido nombre se publicó en 1923: "Die logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen* 88: 151-65, y reeditado en (Hilbert GA, tomo I, 1935, pp. 178-191). Otros cursos importantes impartidos por Hilbert y de los que se conservan apuntes son: "Logische Prinzipien des mathematischen Denkens" (semestre de verano, 1905), "Prinzipien der Mathematik" (semestre de verano, 1908), "Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik" (semestre de verano, 1910), "Einige Abschnitte aus der Vorlesung über die Grundlagen der Mathematik und Physik" (semestre de verano, 1913), "Prinzipien der Mathematik und Logik" (semestre de invierno, 1917). Algunas copias se pueden encontrar en el *Hilbert's Nachlass* en el *Handschriftenabteilung of the Niedersachsische Staats- und Universitatsbibliotek in Göttingen* y otras se guardan en el "Giftschrank" en el *Mathematische Institut* de Göttingen, junto con otras no mencionadas aquí. Algunas están accesibles online en el link de la Universidad de Göttingen aportado en la Bibliografía. Algunos de estos cursos han sido estudiados y publicados recientemente por William Ewald y Wilfried Sieg (Hilbert, 2006).

[399] "With what we have considered thus far [first-order logic], foundational discussions about the calculus of logic come to an end—if we have no other goal than formalizing logical deduction. We, however, are not content with this application of symbolic logic. We wish not only to be in a position to develop individual theories from their principles purely formally but also to make the foundations of mathematical theories themselves an object of investigation—to examine in what relation they stand to logic and to what extent they can be obtained from purely logical operations and concepts. To this end the calculus of logic must serve as our tool. Now if we make use of the calculus of logic in this sense, then we will be compelled to extend in a certain direction the rules governing the formal operations. In particular, while we previously separated propositions and [prepositional] functions completely from objects and, accordingly, distinguished the signs for indefinite propositions and functions rigorously from the variables, which take arguments, now we permit propositions and functions to be taken as logical variables in a way similar to that for proper objects, and we permit signs for indefinite propositions and functions to appear as arguments in symbolic expressions" (Hilbert 1917, 188).

débil de la Aritmética y posteriormente (Hilbert, 1922, 170) de uno análogo muy relacionado con el anterior, y sostuvo allí que también había demostrado la consistencia de la Aritmética, incluyendo el Principio de Inducción Matemática, lo que se demostró que era erróneo (Moore, 1988, 119). No volvió a escribir nada sobre Lógica desde 1905 hasta 1922, cuando reaccionó frente a los planteamientos de Brouwer y Weyl planteando su *Beweistheorie*, resaltando el tratamiento de los sistemas axiomáticos de la Matemática como pura sintaxis y que se distinguirían de lo que denominó *Metamathematik*, y en donde el significado estaría permitido. El objetivo declarado era establecer la consistencia del Análisis y de la Teoría de Conjuntos y establecer la decidibilidad de cualquier problema matemático (*Entscheidungsproblem*), objetivos ya expresados en (Hilbert, 1900b). Ya hemos explicado más arriba cómo y por qué para Hilbert la *consistencia* implicaba *existencia* en su tratamiento formal de la Matemática. En este largo camino, también su tratamiento de la cuantificación experimentó una evolución, desde el uso de la notación de Schröder y Peirce al comienzo de sus trabajos hasta la creación del ε-cálculo. Pero la clara separación de la FOL que había realizado tuvo sus consecuencias. Cuando Thoralf Skolem en 1923 sostuvo, para escándalo de todos, la propuesta radical y sin precedentes de que que la Teoría de Conjuntos debería formularse en la FOL, ya sabía que, a causa del recientemente descubierto Teorema de Lowenheim-Skolem, en la FOL ni para la Teoría de Conjuntos ni para los números reales era posible dar una axiomatización *categórica*, puesto que ambos tendrían un modelo numerable y otros infinitos no-numerables. Una década después, Skolem (1933, 1934) consiguió demostrar que los Postulados de Peano tampoco caracterizaban de forma única (salvo isomorfismo) a los números naturales dentro de la FOL. Y el Teorema Ascendente (*Upward Lowenheim-Skolem Theorem*), cuya primera versión se publicó como un Apéndice a (Skolem, 1934), permitía demostrar más en general que en FOL ningún sistema axiomático que tuviera un modelo infinito podía ser *categórico*[400], es decir, que el lenguaje de la FOL no permitía

[400] La noción de *categoricidad* fue acuñada por Eward Huntington y Oswald Veblen, pertenecientes al grupo de matemáticos llamado *American Postulate Theorists* (la llamada *escuela postulacionista americana*) quienes, como vimos, estaban muy influenciados por Hilbert. En 1902, cuando Huntington establecía una axiomatización de los números reales en base a sucesiones, introdujo el término “sufficient” con el significado de que "there is essentially *only one* such assemblage [set] possible that satisfies a given set of axioms” (Huntington, 1902, 264), especificando que este término significaba que “any two models are isomorphic” (Huntington, 1902, 277). En el curso de las investigaciones realizadas por Veblen en 1904 sobre los fundamentos de la Geometría, después de su estancia en Göttingen, se planteó la adecuación del término usado por Huntington y al parecer John Dewey le sugirió el uso de “categorical” para un sistema de axiomas tal que cualesquiera dos de sus modelos fueran isomorfos. En su trabajo Veblen caracterizó el sistema axiomático de Hilbert en los *Grundlagen* como “categorical” y añadió que para tales sistemas categóricos “the validity of any possible statement in these terms is therefore completely determined by the axioms; and so any further axiom would have to be considered redundant, even were it not deducible from the axioms by a finite number of syllogisms” (Veblen 1904, 346). cfr. (Moore, 1988, 108-109). Esta noción ha tenido un desarrollo posterior en la segunda mitad del siglo XX dentro de la Teoría de Modelos. Se dice que una teoría es k-categórica (o categórica en k) si tiene exactamente un modelo de cardinalidad k (salvo isomorfismo). En 1965 Michael D. Morley demostró el llamado *Teorema de Categoricidad de Morley* que establece que si una teoría de primer orden en un lenguaje numerable es categórica en alguna cardinalidad no numerable, entonces es categórica en todas las cardinalidades no numerables. El teorema fue extendido por Saharon Shelah en 1974 a lenguajes infinitos no numerables: si el lenguaje tiene una cardinalidad k infinita no numerable y la teoría es categórica en algún cardinal infinito no numerable mayor o igual que k, entonces es categórica en todos los cardinales mayores que k. El tema dio lugar a una amplia literatura en los años 60 y 70, coincidiendo con el interés por la Teoría de Modelos y con la aceptación de la FOL, dando lugar a la llamada *teoría de la estabilidad* y a la *teoría de clasificación* planteada por Shelah. Cfr. (Morley, 1965), (Shelah, 1974 y 1990), (Marker, 2002), (Rautenberg, 2008) y (Hodges & Scanlon, 2013). Ya hemos mostrado que la FOL no puede caracterizar la noción de *infinitud*. Por tanto tampoco puede caracterizar la noción de *finitud* y, en definitiva, no puede caracterizar la *cardinalidad*: Si la finitud fuera caracterizable en la FOL, existiría un conjunto de enunciados de primer orden cuyos modelos serían precisamente aquéllos con dominio finito. Eklund (1996, 150) demuestra que del supuesto de que un conjunto de enunciados Γ tenga modelos finitos de

captar adecuadamente la noción de infinito. Según Moore (1988, 96), "several versions of second-order logic (sometimes including an infinitary logic) were common before *Principia Mathematica*. First-order logic—stripped of all infinitary operations—emerged only with Hilbert in (1917), where it remained a subsystem of logic, and with Skolem in (1923), who treated it as *all* of logic". En realidad, la reivindicación de Skolem –que contó con la airada oposición de Zermelo (quien acuñó el término despectivo de *skolemism*) (Zermelo, 1931, 85) y de muchos otros- era doble: de un lado, sostenía que *toda* la Lógica se reducía a la FOL[401], de otro, que la Teoría de Conjuntos debería ser formulada en la FOL. Esta segunda reivindicación se impuso con el tiempo. Hoy, de hecho, no sólo la Teoría de conjuntos sino toda la Matemática se formula en el lenguaje de la FOL, bien sea a partir del sistema axiomático de ZF o del de ZFC, y tanto las formulaciones como las demostraciones en una lógica más fuerte están proscritas para la mayoría de la comunidad científica. Surge la pregunta de la razón de ello, teniendo en cuenta que en la FOL ningún sistema axiomático es categórico y que la FOL es demasiado débil para permitir definir la noción de infinito, y también surge la pregunta acerca del proceso histórico que llevó a la actual aceptación del la FOL como el lenguaje adecuado para las teorías matemáticas. Para Moore (1988) fue determinante la insistencia de Skolem en sus argumentos y la influencia progresiva de sus artículos. Ciertamente es innegable que Skolem mantuvo siempre una posición consistente en el sentido de reivindicar la FOL como *toda* la Lógica y de separar, por ejemplo, la Teoría de Conjuntos de ella, sosteniendo además que debería ser formulada dentro de la FOL, despojándola de el papel que se le atribuía como fundamento de la Matemática y, en conjunto, separando la Matemática de la Lógica. Para él la relación de pertenencia ϵ perdería su posición privilegiada en el sistema, debiendo ser tratada como cualquier otra relación sobre un dominio. Puesto que ningún sistema axiomático es categórico en FOL, la Teoría de Conjuntos y cualquier otra teoría matemática tendrían un carácter relativo: "I believed that it was so clear that the axiomatization of set theory would not be satisfactory as an ultimate foundation for mathematics that, by and large, mathematicians would not bother themselves with it very much. To my astonishment I have seen recently that many mathematicians regard these axioms for set theory as the ideal foundation for mathematics. For this reason it seemed to me that the time had come to publish a critique" (Skolem 1923, 232). Para Von Neumann, "no categorical axiomatization of set theory seems to exist at all. And since there is no axiom system for mathematics, geometry, and so forth that does not presuppose set theory, there probably cannot be any categorically axiomatized infinite systems at all. This circumstance seems to me to be an argument for intuitionism" (Von Neumann, 1925, sección 5). Puesto que no hace ninguna mención a que estos problemas no aparecerían en SOL, Moore concluye que incluso en esa fecha tan avanzada Von Neumann no tenía clara la distinción entre FOL y SOL. Lo mismo le achaca a Gödel, Fraenkel y Zermelo (Moore, 1988, 125). Sin embargo Gödel aparece en su trabajo de 1980 (Moore, 1980) como un paladín de la FOL, aunque con buen criterio, retiró esta apreciación de su artículo de 1988. Gödel trabajó de hecho en toda su carrera en diversos sistemas lógicos[402], lo cual no quiere decir que no fuera consciente de la

una cardinalidad finita arbitraria se sigue que tiene también un modelo infinito y, por tanto, la noción de finitud no es caracterizable dentro de la FOL.

401 Esta posición fue también defendida, probablemente de forma independiente, por Quine (1941, 144-145). Para Moore (1988, 128), "after the emergence of a distinct infinitary logic in the 1950s (thanks in good part to Tarski) and after the introduction of generalized quantifiers (thanks to Mostowski [1957]), first-order logic is clearly not *all* of logic". Referencias acerca de investigaciones recientes sobre lógicas más fuertes que la FOL en (Barwise & Feferman, 1985).

402 Para Moore, "after 1930 mathematical logic became increasingly identified with first-order logic. The logicians (such as Gödel and Skolem) who had argued for a more restrictive logic had triumphed. (Moore 1980, p. 129). La referencia a Gödel desaparece en (Moore, 1988). También para Stewart Shapiro: "From [the late 30s] the explicit controversy over higher-order languages subsided, and most logicians began to

diferencia entre FOL y SOL. Una defensa clara de la FOL sólo aparece en su correspondencia con Zermelo, publicada en (Grattan-Guinness, 1979) y (Dawson, 1985), y como señala con acierto Eklund, no parece plausible que estas opiniones fueran determinantes para otros científicos, quienes en su mayoría muy probablemente no tuvieron ninguna noticia de esta correspondencia[403].

En la Conferencia de Zurich de 1938, Skolem enfatizó la relatividad, no sólo de la Teoría de Conjuntos, sino de toda teoría matemática. Bernays adujo que esto podría ser una prueba de la inadecuación de la FOL: "the axiomatic restriction of the notion of set [to first-order logic] does not prevent one from obtaining all the usual theorems... of Cantorian set theory.... Nevertheless, one must observe that this way of making the notion of set (or that of predicate) precise has a consequence of another kind: the interpretation of the system is no longer necessarily unique.... It is to be observed that the impossibility of characterizing the finite with respect to the infinite comes from the restrictiveness of the [first-order] formalism. The impossibility of characterizing the denumerable with respect to the nondenumerable in a sense that is in some way unconditional—does this reveal, one might wonder, a certain inadequacy of the method under discussion here [first-order logic] for making axiomatizations precise?" (Bernays en [Gonseth 1941], 49-50). Skolem insistió en que la FOL era el lenguaje adecuado para la Matemática. Sus razones eran que en la SOL no se podía establecer con precisión las distinciones sintaxis-semántica y matemática-metamatemática (o lógica-metalógica) y que se introducían necesariamente *consideraciones ontológicas* de tapadillo.

---

accept the Skolem-Gödel proposal that only the first-order languages are appropriate for their work" (Shapiro 1991, 192). Eklund (1996, 148) resalta que en esas páginas ambos autores se referían a (Skolem, 1922), un artículo en el que no aparece la más mínima referencia a favor de la FOL; aunque sí es cierto que posteriormente Skolem defendería vigorosamente esa posición. La tesis de Eklund es que esa defensa no fue tan decisiva como, en base a esos textos standard, se suele aceptar generalmente. Por otra parte, en lo que se refiere a Gödel, es un hecho que trabajó en distintas lógicas y lenguajes. Moore alega que "influenced by Hilbert and Skolem, Gödel operated within a . . . finitistic tradition of logic. Thus he confined his researches to first-order logic" (Moore 1980, 129). Que Gödel operaba esencialmente dentro de la tradición finitista parece evidente. Pero, como señala Eklund, "the latter statement appears to be quite far from the truth" (Eklund, 1996, 160). Gödel trabajó dentro de muy diferentes áreas y sistemas y en modo alguno se restringió en sus investigaciones a la FOL. Por ejemplo, si observamos el Volumen I de sus "Collected Works" que contiene sus trabajos publicados entre 1929 y 1936, vemos que Gödel trabaja a veces dentro de la FOL standard (o como Gödel la llamaba, *der engere Funktionkalkül*), pero otras veces trabajaba dentro de la *teoría de tipos*, por ejemplo en (Gödel, 1931), y en muchos otros trabajos discutía la lógica intuicionista. "If we also see to Gödel's reviews of the works of other authors, we find that Gödel worked within still other systems" (Eklund, 1996, 159-160). Como hemos indicado en (Moore, 1988) desaparece toda referencia a Gödel como motor de la aceptación de la FOL. Pero en Shapiro (1991), la supuesta propuesta de Skolem-Gödel a favor de la FOL aparece como decisiva para la aceptación de la FOL. Eklund (1996) niega con abundantes datos que se pueda hablar de una tal propuesta y, en todo caso, que ésta fuera decisiva en la aceptación de la FOL, contradiciendo la versión generalmente aceptada al respecto.

[403] Sobre el fondo del problema, sus palabras ya en su disertación doctoral (1929) son profundas y clarividentes: "Brouwer, in particular, has emphatically stressed that from the consistency of an axiom system we cannot conclude without further ado that a model can be constructed. But one might perhaps think that the existence of the notions introduced through an axiom system is to be defined outright by the consistency of the axioms and that, therefore, a proof has to be rejected out of hand. This definition, … however, manifestly presupposes the axiom that every mathematical problem is solvable. Or, more precisely, it presupposes that we cannot prove the unsolvability of any problem. For, if the unsolvability of some problem (say, in the domain of real numbers) were proved, then, from the definition above, it would follow that there exist two non-isomorphic realizations of the axiom system for the real numbers, while on the other hand we can prove that any two realizations are isomorphic" (Gödel, 1929, section 1).

Todavía en el coloquio de París de 1958 criticaba la noción de Tarski de verdad "porque presupone la noción general de conjunto" (Skolem, 1958, 13)[404].

La pregunta entonces es, ¿cuál fue la causa real por la que en 50 años se impuso la FOL como la lógica y el lenguaje adecuado para la Matemática? y ¿qué razones de fondo justifican una u otra opción? Y para nosotros también es relevante una tercera cuestión: ¿qué postura tenía Hilbert al respecto? Una causa en mi opinión relevante para esa aceptación general es el posicionamiento y la defensa que hizo Quine de la FOL, que sin ninguna duda fue ampliamente difundido y leído, por lo menos entre los filósofos, como reconocen todos los autores aquí mencionados. Porque la posición al respecto puede tener distintas motivaciones entre los filósofos y entre los lógicos matemáticos, como señala Eklund (1996), quien analiza las posibles razones para ello de unos y otros, ya que parece que ambos han optado, aunque posiblemente por diferentes razones, por la FOL. Resume así su punto de vista sobre las causas principales de esa evolución:

> "The development had several distinct (though presumably related) causes. Among these are (a) the exclusion of set theory from the realm of logic, which exclusion was probably partly caused by the discovery of the set-theoretic paradoxes and the axiomatic treatment of set theory, (b) the then only recently clearly made distinction between syntax and semantics, (c) the presentation of first-order logic as a distinct subsystem of logic in Hilbert and Ackermann's influential textbook (1928) and Gödel's proof of the completeness of this logical system, (d) finitist and nominalist qualms about the objects over which second-order variables were supposed to range, (e) Skolem's first-order formulations of Zermelo set theory and Peano arithmetic and Bernays' and Gödel's first-order formulations of NBG set-class theory. Needless to say, (a)-(e) are not independent of each other; there are connections between them" (Eklund, 1996, 164).

Además señala también la influencia del análisis de Tarski de *verdad lógica* y *consecuencia lógica*. Estos análisis han sido discutidos de forma muy crítica por John Etchemendy (1990), quien concluía que no eran extensionalmente correctos. Todavía hoy uno de los argumentos más influyentes en contra de la SOL es que en ésta los enunciados que no pueden demostrarse verdaderos ni falsos quedan fuera de toda consideración; por ejemplo, el enunciado de la SOL que expresa la hipótesis del continuo resulta verdadero o falso dependiendo de la teoría de conjuntos subyacente, con lo que no sería *lógicamente* verdadero o falso, y eso indicaría una seria deficiencia de la SOL. Pero este razonamiento depende crucialmente de nuestra concepción de "verdad lógica" y de "verdad en un modelo", es decir, del análisis de *verdad* introducido por Tarski. Para Etchemendy la deficiencia estaría en el

---

[404] Moore (1988, 124-128) enfatiza la importancia de los trabajos de Skolem y de Herbrand, y de la decidida aceptación por Quine de este punto de vista, en la aceptación general de la FOL como el sistema lógico y el lenguaje adecuados para la Matemática. Sin embargo Eklund (1996) critica este planteamiento y resalta la contradicción que representa en la argumentación de Moore el hecho de que destaque la influencia de Skolem en la aceptación de la FOL y de que al tiempo subraye la confusión de Bernays, Von Neumann e incluso Gödel en algunos escritos relativamente tardíos, como más arriba hemos citado, entre la FOL y SOL. Para Eklund, la importancia de Skolem en la aceptación general de la FOL debería relativizarse, o mejor dicho, la importancia de su defensa de la FOL al respecto. Es innegable la importancia de Skolem en el desarrollo de la FOL. Pero Eklund subraya que no fue muy leído hasta avanzados los años 30. Por ejemplo, van Heijenoort (1981, 112) indica que, "*Skolem 1922* seems to have had few readers. It called forth, so far as I know, only two responses, a review by Fraenkel (1927) and a mention by von Neumann (1925, p. 232)". Para Paul Benacerraf (1985, 113), incluso en fecha tan tardía como 1929 estaría claro que Zermelo no había leído el artículo de 1922 de Skolem. Para Eklund (1996, 154), "this might be some indication of just how unnoticed *Skolem 1922* went. I should also point out that the evidence that Skolem's paper went unnoticed *ipso facto* is evidence that Skolem's ideas were not very well known: for the evidence that Skolem 1922 was not very widely read is precisely that other authors seemed ignorant of, and hardly ever commented on, Skolem's ideas". Véase también al respecto (Goldfarb, 1979, 357) y (van Heijenoort, 1967, 291).

análisis de Tarski y no en la SOL. Puesto que el análisis de Tarski de verdad lógica y de consecuencia lógica sólo da resultados relevantes en la FOL, Eklund conjetura que "this faulty analysis, favouring first-order logic, might seem to coincide too well in time with the development toward first-order for it to be a mere coincidence. There seems then to be a very interesting answer to the question of what the connection is between the acceptance of first-order logic and the acceptance of Tarski's model-theoretic analyses of the notions of logical truth and logical consequence. A plausible suggestion is that the acceptance of first-order logic as standard as well as the acceptance of Tarski's analyses had to do with the emerging interest in *model theory*" (Eklund, 1996, 165). De forma más general, podemos plantearnos las ventaja e inconvenientes que pueden considerarse en ambos sistemas. Se pueden fijar cinco líneas críticas fundamentales contra la SOL:

1) No es axiomatizable (la FOL sí) y, al revés que la FOL, es esencialmente incompleta.

2) Se pueden definir en ella muchas semánticas, y no hay un criterio para elegir entre ellas (Putnam, 1980), y por tanto no está claro cómo esta lógica debería ser interpretada.

3) La SOL tiene fuertes implicaciones ontológicas: (a) implica un compromiso ontológico en su definición de clases o conjuntos (Resnik, 1988), y (b) de acuerdo con Quine (1970), "it is nothing more than set theory in sheep's clothing".

4) Considerando el principal inconveniente de la FOL, el hecho de que en ella ninguna teoría axiomatizada pueda ser categórica, no haría que la SOL fuera mejor, y eso en el siguiente sentido: si la FOL no puede caracterizar adecuadamente los sistemas matemáticos, dada la existencia de diversas interpretaciones no isomórficas de un sistema axiomático en la FOL, la SOL tampoco puede caracterizarlos adecuadamente, dada la existencia de diferentes interpretaciones semánticas de las teorías expresadas en la SOL (Melia, 1995)[405].

5) Frente a lo que sostienen todavía hoy los defensores de la SOL (Shapiro, 1985), esta lógica no resolvería adecuadamente el problema de un correcto acceso referencial a los objetos matemáticos (Azzouni, 1994).

Para Otávio Bueno (2010, 366), estas críticas se plantean desde focos muy diversos: las dos primeras surgirían de planteamientos *metalógicos* (acerca de la incompletitud y la existencia de diversas semánticas en la SOL); la tercera involucraría un planteamiento *ontológico* relativo a la implicación de la SOL con la teoría de conjuntos; la cuarta se referiría a un aspecto *metodológico*, específicamente, a la adecuación de los modelos de las teorías expresadas en la SOL; y la quinta se remitiría a una problemática *epistemológica* en relación con el acceso referencial a los objetos matemáticos en teorías de segundo-orden. "If these criticisms were correct, serious problems would be faced by second-order logic. In this paper, I argue that the second-order theorist can solve each of these difficulties … It may well be that further problems will appear. But I hope I have established that this logic is far more robust than the above critics have supposed" (Bueno, 2010, 366 y 382). La posición de Bueno no es una excentricidad, aunque en los artículos citados en el párrafo anterior se defiende una posición contraria a la suya y que representa la mayoritariamente aceptada. Ya indicamos más arriba que, en nuestra opinión, la opción mayoritaria por la FOL que se impuso a partir de los años 50 se puede considerar como un cierre en falso o provisional.

Otros autores contemporáneos relevantes mantienen una posición análoga a la de Bueno, por ejemplo, (Shapiro, 1985, 1990 y 1991), (Montague, 1965), (Hellman, 1989),

[405] "If the mere existence of many non-isomorphic interpretations of first-order mathematical theories shows that first-order languages are unable to characterize certain mathematical systems, then the mere existence of many interpretations of second-order theories seems equally well to show that second-order languages are unable to characterize the relevant mathematical systems" (Melia, 1995, 129).

(Rossberg, 2004), (Eklund, 1996), (Väänänen, 2001) y (Boolos, 1975, 1984 y 1998) rebatiendo la defensa de la FOL y las críticas a la SOL realizadas por (Putnam, 1976 y 1980), (Resnik, 1988), (Quine, 1970), (Azzouni, 1994) y (Melia, 1995). Un análisis detallado de los argumentos de este debate excede los límites de este trabajo; sólo se indica aquí lo que considero que es el núcleo de sus respectivas argumentaciones. Para resumir, para los actuales defensores de la SOL, en las configuraciones teóricas de primer orden, (1) o bien no se pueden formular ciertas nociones y teorías matemáticas, (2) o bien, si eso se puede hacer, todas aquellas teorías con dominios infinitos (por ejemplo los números reales, fundamentales en la práctica matemática) no pueden ser caracterizadas unívocamente; mientras que en las configuraciones de segundo orden, (1) somos capaces de formular nociones más allá de los límites de los lenguajes de primer orden y (2) muchas teorías importantes con dominios infinitos pueden caracterizarse categóricamente (Bueno, 2010, 370)[406]. Además, algunas aparentes ventajas de la FOL sólo se deberían a su debilidad; por ejemplo, su completitud se debería al hecho de que muchos enunciados simplemente no se pueden formular en un lenguaje de primer orden. En los argumentos de los defensores de la FOL, y ya en los mismos trabajos de Skolem, subyace básicamente la inseguridad derivada de una suspicacia sobre el rol de los cuantificadores en la SOL que, al poder tomar valores sobre *todas* las relaciones y funciones de los objetos, amplían la referencia del lenguaje a dominios esencialmente infinitos creando dudas razonables sobre la validez de las leyes lógicas; se trata precisamente del problema que, como vimos en la Parte-II, Hilbert planteó como fundamental en sus primeros trabajos lógicos de 1900-1905. Este argumento puede haber sido decisivo en la aceptación mayoritaria de la FOL como *toda* la Lógica y, en definitiva, parece que la exigencia planteada por Hilbert de fundamentar la Matemática y la Lógica sobre conjuntos, fórmulas y métodos finitos ha sido asumida por la comunidad científica como *el método seguro* para abordar el infinito y, en sus casos extremos, lleva a sostener que *la* Lógica se reduce exclusivamente al Cálculo de Conectivas (que, como vimos, es equivalente a la Teoría de la Computación)[407].

Ferreirós realiza un brillante análisis del contexto en el que se realizó en los años 50 el consenso entre los lógicos en torno a la FOL y del proceso que desembocó en él. Señala que “the implications of Gödel’s results were extremely compelling because foundational work focused on proof theory and hinged on the question of consistency for formal systems” (Ferreirós, 2001, 478). La FOL surgiría a partir de un análisis sobre los fundamentos de la noción de *demostración matemática*, y se impuso en tanto y cuanto que desde esa perspectiva parecía ser la lógica adecuada para codificar las demostraciones matemáticas, la

[406] Además existen argumentos a favor de la SOL desde otros puntos de vista, como señala Bueno (2010, 370): “As a further argument for second-order logic—at least for those with nominalist inclinations!—note that several nominalist proposals have adopted versions of this logic as part of their strategies to reduce ontological commitment to mathematical objects. This is the case of Field’s fictionalism [at least as presented in Field (1980), see Field (1989) for a first-order version] and Hellman’s modal-structural interpretation (Hellman 1989)”.

[407] Para Ferreirós (2001, 441) “There is reason to think that, like so many other conceptual systems, First-Order Logic is the sound and satisfactory outcome of a fascinating combination of rational argument and historical contingencies”. Pero la influencia de los trabajos de Hilbert fueron determinantes en una elección en la que progresivamente se fue modificando la misma noción de “Lógica”: “One can explain the discrepancy by considering that the secondary literature frequently presupposes the present notion of logic, as if it were ahistorical. While concentrating upon technical details, historians have tended to forget changes in the overall conception of the subject” (Ferreirós, 2001, 443). El giro que se produjo en los años 30 fue decisivo; muchos autores comenzaron a enfatizar el hecho de que una axiomatización de la teoría de conjuntos, y por tanto los fundamentos de la matemática abstracta, sólo requería el sistema de la FOL. Por ejemplo (Tarski, 1935), (Quine, 1936), (Bernays, 1937), (Gödel, 1940a, 1940b, 1940c y 1940d). Además, “of course, recent advances in the metatheory of logic due to Gödel constituted the clinching argument for a restriction of logic to FOL” (Ferreirós, 2001, 448).

axiomatización de esas teorías y el estudio de sus propiedades metateóricas. Y esa perspectiva llegó a ser hegemónica básicamente por el trabajo de Hilbert y de su escuela, aunque el mismo Hilbert se negara a extraer esa consecuencia. El hecho es que en los años 50 en el campo de la Lógica sólo Alonzo Church (1956) defendió explícitamente la argumentación de Hilbert y mantenía una discusión sobre la utilidad de la lógicas de orden superior para la formulación de las teorías matemáticas[408]. Resulta sorprendente que este posicionamiento tan reciente (y discutido y discutible) por la FOL aparezca en los manuales actuales de Lógica como "la teoría clásica". En palabras de Ferreirós (2001, 479), "it is a clear symptom of the hyperactivity that characterized mathematical logic in the 20th century, that we now view such a recent product as a classical theory". Ferreirós resalta en su artículo la *contingencia* de tal resultado, en el sentido de mostrar cómo fue la consecuencia de *una* posible evolución de las investigaciones Lógicas a partir de los trabajos iniciales de Boole. Termina con una sugerente historia contrafactual[409] que pone más en valor los posicionamientos de Hilbert y Church. Desde el punto de vista de la *práctica matemática*, o desde el punto de vista de la Matemática como ciencia sólida y autojustificada por sus aplicaciones (y este era un artículo de fe que estaba detrás de todo el trabajo de Hilbert), un sistema lógico como la SOL que permite capturar de forma fiel las formas de razonamiento empleadas en la Matemática y que tiene suficientes recursos para capturar conceptos que se suponen bien definidos en ella, como conjunto, buen orden, cardinalidad, etc, sería sin duda preferido a un sistema como la FOL que no posea estas características (Eklund, 1996, 150), (Corcoran, 1973, 34) y (Shapiro, 1991, ch.V). Shaphiro (1985, 1990, 1991) defiende convincentemente que sólo en el contexto de la SOL la práctica matemática puede ser adecuadamente representada. Bueno (2010) realiza una detallada refutación de los argumentos actuales contrarios a estos análisis.

Esta era también en gran parte la perspectiva de fondo de Hilbert, aunque las exigencias de su *Beweisstheorie* le forzaban en otra dirección, por lo que su postura en el debate debe una vez más matizarse y estudiarse en el detalle, más aún si observamos la evolución de sus planteamientos en Lógica. Al comienzo del epígrafe hemos destacado algunos aspectos de su evolución desde sus primeros trabajos al respecto en torno a 1900 hasta su libro con Ackermann (1928), libro en el que se planteó en imprenta por primera vez la FOL como un

---

[408] But introductory courses in mathematical logic concentrated more and more on FOL, presenting its study as the quintessential example of how modern logic was to be done. Also around this time we find the earliest philosophical partisans of FOL, as was notably the case of Quine" (Ferreirós, 2001, 448). Véase (Quine, 1953 y 1979) y (Ferreirós, 1997).

[409] "I have defended that the history of logic would have looked quite different had the Stoic set of exemplars taken the role of the Aristotelian ones. We would have a much more trivial story, to be sure, leading rather directly to sentential logic, and later to complementary or alternative systems (modal logic, intuitionistic propositional logic). Logicism would never have been formulated, and quantification theory would perhaps have been regarded as an extremely basic mathematical system, of which the great philosopher Aristotle got a glimpse. Considering Zermelo and his reaction to "Skolemism"?or, as one might say, FOL-mania?one can think of other deviant historical scenarios. Imagine a world in which the 20th century begins with some author who offers such a convincing solution to the paradoxes, that everybody agrees. (This might have been a clear presentation of the iterative conception of sets, which was somehow present in the practice of 19th-century mathematicians.) Imagine, further, that this solution makes set theory appear as a consistent mathematical theory that does not belong to logic. Within such a context, the strong interest in formal systems and proof theory, that was so characteristic of the 1920s and 1930s, might not have emerged. But, without this, the key reasons for focusing on FOL would have disappeared from the scene. The main foundational theme of the era might have been, not consistency, but a semantic question the codification of crucial mathematical notions such as that of natural number and real number, meaning the categorical characterization of such notions. Had this been the case, the recommendations of Hilbert and Church would have been heard and second-order logic would probably have taken the paradigmatic role that was played, in fact, by FOL" (Ferreirós, 2001, 479-480). Véase también otra recreación de este escenario en (Shapiro, 1990).

subsistema. Por las citas más arriba utilizadas de su estrecho colaborador Bernays podemos suponer que casi con total seguridad estaba al tanto de los debates sobre la FOL, la SOL y la Matemática, aunque no hay ni una sola manifestación suya sobre esta problemática. Pero el hecho de que siguiera trabajando en la SOL (por ejemplo en su libro con Ackermann de 1928) y, sobre todo, la evolución de su tratamiento de la cuantificación son bastante clarificadores. De un lado, parece que se resistía a abandonar el uso de la SOL, probablemente debido a su gran capacidad expresiva y a que parecía el lenguaje adecuado para la Matemática (la mayor parte de los enunciados matemáticos son sobre propiedades o relaciones) siguiendo la misma línea de Frege o Zermelo; por otro lado, parece sensible a las objeciones y a la opción de Skolem que, en el fondo, suponen un *finitismo* radical. Podemos conjeturar que no tenía clara la solución del dilema y que, por una parte intentó superarlo modificando el tratamiento de la cuantificación (que está en la base de las objeciones a la SOL) y, por otra parte, confiaba en que en la Lógica Matemática los *elementos ideales* pudieran desempeñar un papel análogo al que con éxito desempeñaban en la Matemática, si se lograban construir en este campo tales *elementos ideales*. Y esto se debería alcanzar a través de su *Beweistheorie*. En 1905 su tratamiento de la cuantificación se plantea en la más absoluta fidelidad a la tradición de Peirce-Schröder, permitiendo así fórmulas infinitas –por oposición al tratamiento de Peano que no las admitía-[410]. Además, y también en la tradición de Peirce-Schröder, en las fórmulas todos los cuantificadores cuantificaban una variable con valores en un mismo dominio fijado (en esos trabajos aquí citados, los números naturales). Para Moore (1988, 108), "thus Hilbert's conception of mathematical logic, circa 1904, embodied certain elements of first-order logic but not others. Above all, his use of infinitary formulas and his restriction of quantifiers to a fixed domain differed fundamentally from first-order logic as it was eventually formulated. When in 1918 he began to publish again on logic, his basic perspective did not change but was supplemented by *Principia Mathematica*"[411]. Pero posteriormente (Hilbert, 1923) intentó

---

[410] Por ejemplo, en (Hilbert, 1905, 178) considera la expresión "para todo x, A(x)" como una simple abreviatura de la fórmula (infinita): A(1) u. A(2) u. A(3) u. … , y la expresión "para algún x, A(x)" como una abreviatura de la fórmula (infinita): A(1) o. A(2) o. A(3) o. …, donde u. significa "und" y o. significa "oder". Análogamente en (Hilbert, 1923, 155) aunque con una formalización algo mayor, serían abreviaturas respectivas de A(1) ∨ A(2) ∨ A(3) ∨ … y de A(1) & A(2) & A(3) & …

[411] La figura de Bertrand Russell es central en toda esta historia, tanto por la importancia objetiva de esta obra citada como por la influencia que el autor tuvo. "The 'logical' contradictions, as they were called by then, meant a very important in the evolution of the notion of logic and the first great motivation for putting bounds to the previous conceptual expansion. It is only natural that there were authors who resisted the conclusion that logicism was dead, and who tried to minimize the necessary restrictions of logical theory. Russell was foremost among them. His theory of types was an attempt to rescue as much as possible of Frege's viewpoints, while remaining safe from contradictions. The outcome of his enterprise, the monumental *Principia Mathematica*" (Ferreirós, 2001, 467). Los *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead, 1910) fueron desde su publicación hasta bien entrados los años 30 el referente indiscutido de lo que la mayoría de expertos consideraban el sistema *natural* de la Lógica, concepto que saltaría por los aires en los años 30 y con él el *logicismo* (aunque sorprendentemente perduraría su influencia en Filosofía y Epistemología). En la obra desarrolla la *teoría ramificada de tipos*, una teoría bastante compleja que a los *tipos* superpone los *órdenes*, y diseñada para evitar las contradicciones detectadas en la teoría de conjuntos. Por suerte, a partir de la parte II del libro éste se puede leer suponiendo sólo la teoría simple de tipos. Consisten fundamentalmente en un lenguaje lógico de segundo orden en el que se define la teoría de conjuntos. Su influencia fue grande; el primer tratado verdaderamente moderno de Lógica, el que escribió Hilbert con Ackermann (1928), usaba la teoría ramificada de tipos diseñada por Russell, aunque en la edición de 1938 ya sólo utilizaba la simple. En contra de lo que muchos, principalmente filósofos, mantienen y parecen creer, los *Principia* no son una obra de Lógica; a lo largo de sus 3 tomos y más de 2000 páginas se fundamenta la teoría de conjuntos y, a partir de ella, se desarrollan diversas partes fundamentales de la Matemática: en la parte-I se presentan los elementos de la Lógica Matemática (desde conectivas y cuantificadores –incluyendo los de orden superior- hasta la teoría de clases y relaciones); en las partes II y III se desarrolla la aritmética de cardinales finitos e infinitos y en la parte V, la teoría de ordinales; en la parte VI se introducen los enteros, racionales y reales y se fundamenta la teoría de la medida; y todo ello utilizando exclusivamente métodos lógicos. Estaba previsto

un cuarto volumen con una parte dedicada a la geometría, que nunca se publicó. Aunque causa asombro por sus inmensas deducciones por métodos estrictamente lógicos, no por ello se puede decir que deriva la Matemática de la Lógica, ya que su Lógica se fundamenta en la Teoría de Conjuntos, es decir es aún una lógica interpretada, y los desarrollos se fundamentan en esa misma Teoría de Conjuntos, que hoy en día no se considera parte de la Lógica sino una teoría matemática con fuertes compromisos ontológicos. La primera obra que se escribió de Lógica sin interpretar sería, repitiéndolo una vez más, la de Hilbert y Ackermann. "Strangely enough, however, many seem to forget that type theory is a formal system for set theory -taking this expression in the wide sense of the informal theories established by Cantor *et al.* before 1900- and that *Principia Mathematica* is a handbook on the set-theoretical foundations of mathematics. This forgetfulness may well reflect the fact that Russell's work was more consequential for the history of elementary logic, than for set theory or even mathematics as a whole" (Ferreirós, 2001, 467). Pronto muchos autores llegaron al convencimiento de que la teoría simple de tipos era un sistema más adecuado para la fundamentación de la Matemática, por ejemplo (Ramsey, 1925), pero esta teoría no fue un sistema lógico riguroso hasta el trabajo realizado por Hilbert y su escuela: "Simple type theory only became a rigorous logical system under the influence of Hilbert's metamathematics, in the hands of Gödel and Tarski. Whitehead and Russell did not yet formulate a truly formal system, completely specified in full precision; they were still working with an interpreted system, like Frege" (Ferreirós, 2001. 169). Cuando Russell decía que para cada función proposicional $\varphi(x)$ existe su correspondiente clase, quería significar que podemos sustituir cada predicado o atributo de una clase por su correspondiente función proposicional $\varphi(x)$ (*principio de comprehensión*). Eso implica postular la existencia previa de un conjunto dado de atributos, lo que Quine calificó de un enfoque platónico. La consideración de $\varphi(x)$ simplemente como una fórmula con variable libre y sin significado alguno era un planteamiento fuertemente formalista propuesto por el enfoque de Hilbert de la Lógica; serían Gödel (1931) y Tarski (1935) quienes de forma independiente presentarían una definición axiomática de la teoría simple de tipos en estos términos y Hilbert y Ackermann la incorporaron en la 2ª edición (1938) de los *Grundzüge der Logik*. Estos desarrollos fueron posteriormente utilizados por muchos autores, entre ellos el mismo Tarski (1941) o (Carnap, 1929 y 1931) y también por matemáticos como Van der Waerden, para una fundamentación conjuntista de las teorías matemáticas. Cfr. (Ferreirós, 2001, 167-171). La interpretación del significado y alcance de los *Principia* ha estado muy condicionado por las propias opiniones filosóficas de Russell y las explicaciones que él mismo dio acerca de esa obra, y que es sin duda la opinión que más difusión ha alcanzado en el ámbito filosófico. Por ejemplo, aún hoy en día, en la entrada "Principia Mathematica" de la *Stanford Encyclopedy of Philosophy* (Irvine, 2010), puede leerse todavía una presentación fundamentalmente filosófica de la obra desde un punto de vista logicista. En palabras del autor: "Principia Mathematica reaffirmed clear and interesting connections between logicism and two of the main branches of traditional philosophy, namely metaphysics and epistemology, thus initiating new and interesting work in both of these areas" (Irvine, 2010, 3) lo cual, desde el punto de vista histórico, tiene mucho de verdad; la influencia de la obra de Russell fue fundamentalmente filosófica. Como es bien conocido, Russell defendía el *logicismo*, esto es, la opinión de que toda la Matemática podía deducirse por medios enteramente lógicos a partir de nociones lógicas, y los *Principia* serían la prueba. Esta opinión podría ser comprensible si tenemos en cuenta que en esa época el proceso expansivo de la Lógica estaba en su apogeo y que generalmente se consideraba a la Teoría de Conjuntos, al contrario que hoy en día, como una parte de la Lógica; y en la medida en que las nociones matemáticas en los *Principia* se fundamentan en nociones conjuntistas, su reivindicación era plausible en esa época. Tampoco estaba establecida en esa época la inseguridad acerca del control de las deducciones en los lenguajes de segundo orden, por lo que era razonable que Russell estuviera totalmente seguro de la validez de sus deducciones en la lógica de segundo orden en la que formuló su teoría. Pero la discrepancia de Hilbert con Russell, como vimos, iba en dos direcciones; de un lado estaba la discrepancia radical de Hilbert con el condicionamiento de la Matemática por una prescripción filosófica o epistemológica normativa previa, pues su tesis fundamental era la autonomía de la Matemática; de otro lado estaba su radical distinción entre Lógica y Matemática como ciencias diferentes, y precisamente su trabajo y el de su escuela desmontó en 20 años el *logicismo*. Lo esencial tanto en los planteamientos matemáticos como en los lógicos y filosóficos de los *Principia* puede encontrarse en la obra "Principles of Mathematics" que Russell (1903) publico 7 años antes (si bien, según indica allí, la escribió íntegramente en 1900), aunque sin los minuciosos desarrollos matemáticos correspondientes que desarrolla en los *Principia*. Es decir, se puede considerar esta obra como una memoria o proyecto de los *Principia* que, en principio, estaba concebido como el tomo-II de los "Principle". En los "Principle" expresa Russell los objetivos: "The present work has two objects. One of these, the proof that all pure mathematics deals exclusively with concepts definable in terms of very small number of fundamental logic concepts, and that all its propositions are deducible from a very small number of fundamental logic principles … The other object of this work, which occupies Part I, is the explanation of the fundamental concepts which mathematics accepts as indefinable. This is a purely philosophical task" (Russell, 1903, XV). Y por si no estaba ya suficientemente claro: "The nature of number, of infinity, of space, time and motion, and of mathematical inference itself, are all questions to which, in the present work, an answer professing itself demonstrable with mathematical certainty be given –an answer which, however, consist in reducing the above problems to problems in pure logic" (Russell, 1903, 3-4). Y además como colofón: "The fact that all Mathematics is Symbolic Logic is one of the greatest discoveries of our age; and when this fact has been established, the remainder of the principles of mathematics consists in the analysis of Symbolic Logic itself" (Russell, 2003, 5). También aclara en el Capítulo-I lo que entiende por "pure mathematics": "Pure mathematics is the class of all propositions of the form '*p* implies *q*', where *p* and *q* are propositions containing one or more variables, the same in the two propositions, and neither *p* nor *q* contains any constants except logical constants". Él mismo observa que "The above definition of pure mathematics is, no doubt, somewhat unusual" (Russell, 1903, 3). Más que inusual yo diría que inapropiada y mal construida. En primer lugar, se diría que Russell está definiendo más bien una subclase de los enunciados del cálculo de conectivas (o del cálculo de predicados de primer o segundo orden, si admite cuantificadores) con los que identifica a la Matemática, o, más en general, enunciados dentro de los cuales estarían enunciados de la forma "si x es mortal, entonces es hombre", enunciados que ni el mismo Russell consideraba matemáticos; de hecho el sólo demuestra enunciados de aritmética, geometría, etc. Lo primero que uno piensa a partir de aquí es que Russell era mucho mejor matemático que filósofo, aunque adquiriera su fama como filósofo, pues tal fallo no es admisible en un filósofo; o bien que Whitehead hizo mucho mejor su trabajo que el propio Russell, pues ya sabemos (Russell, 1948) que se repartieron el trabajo de forma que la parte matemática quedó bajo la dirección de Whitehead y la filosófica a cargo de Russell, aunque hubo naturalmente un trabajo conjunto. Sin embargo, un poco más adelante en la página 7 nos aclara que ese enunciado no sería matemático debido al carácter concreto de "hombre" y "mortal"; él utiliza el ejemplo de "x is a Greek implies x is a man" y dice que "but the statement is not one of pure mathematics, because it depends upon the particular nature of *Greek* and *man*". Por tanto está claro que identifica la Matemática con una subclase de enunciados del cálculo formal de conectivas o de predicados. Lo que resulta evidente es que su principal interés es evitar toda referencia a un objeto. También especifica lo que entiende por Lógica: "Symbolic or Formal Logic –I shall use these terms as synonyms- is the study of the various general types of deduction … is essentially concerned with inference in general, and is distinguished from various special branches of mathematics mainly by its generality … The subject of Symbolic Logic consists of three parts, the calculus of propositions, the calculus of classes, and the calculus of relations" (Russell, 1903, 10-11). Esta definición sólo puede entenderse en el contexto, más arriba explicado, del zénit del periodo expansivo de la noción de Lógica y en la que se incluía la teoría de conjuntos y los lenguajes de segundo orden; esto permite explicar su pretensión de haber realizado una fundamentación lógica de la matemática cuando, en realidad, construyó una fundamentación conjuntista. De todas formas, su definición más arriba citada de la Matemática sí contiene una clara pretensión logicista; lo que sucede es que no define a la Matemática en absoluto. Parece claro que su motivación tenía un fuerte componente de *a priori* filosófico: "On fundamental questions of philosophy , my position, in all its chief features, is derived from Mr. G. E. Moore. I have accepted from him the non-existential nature of propositions (except such as happen to assert existence) and their independence of any knowing mind; also the pluralism which regards the world, both that of existents and that of entities, as composed of an infinite number of mutually independent entities, with relations which are ultimate, and not reducible to adjectives of their terms or of the whole which these compose" (Russell, 1903, xviii). También determina su postura en relación con la filosofía de la Matemática de Kant, tal y como se le entendía a Kant en aquella época en el ámbito anglosajón; su interpretación también está muy influenciada por el análisis de Kant realizado por Vaihinger (1881 y 1892), como él mismo señala. Esto se aprecia especialmente en el Capítulo LII titulado "Kant's theory of space" donde en el parágrafo 432 ya titulado para que no haya dudas "The present work is diametrally opposed to Kant", afirma: "The questions of chief importance to us, as regards the kantian theory of, are two, namely, (1) are the reasonings in mathematics in any way different from those of Formal Logic? (2) are there any contradictions in the notions of time and space? If these two pillars of the Kantian edifice can be pulled down, we shall have successfully played the part of Samson towards his disciplines" (Russell, 1903, 457). No podemos aquí analizar en detalle la interpretación que hace Russell de la filosofía de Kant de la Matemática y de su epistemología, ni la refutación que realiza y que se reparte en varias partes de la obra. Sí podemos destacar que sigue estrechamente la realizada por Friedman (o mejor dicho, al revés) y que hemos expuesto y criticado en la primera parte de este trabajo. Las posiciones de Russell en 1903 y en 1910 son destacables en otro aspecto: su honradez intelectual y su capacidad de evolución. Justamente 6 años antes publicó *An Essay on the Foundations of Geometry* (Russell, 1897), obra basada en la disertación que tuvo que defender en 1895 en su examen en el *Trinity College*. Sus agradecimientos en esa obra se dirigían a: Prof. Klein (Geometría), Mr. Bradley, Sigwart y Dr. Bosanquet (Lógica) y Prof. James por su obra "Principles of Psychology" de la que obtuvo "sugerencias útiles". Una mención de agradecimiento se la dedica también a A. N. Whitehead, tratar la cuantificación de forma que se evitaran fórmulas infinitas y toda referencia a dominios infinitos; ese fue el origen del ε-cálculo. En su trabajo ya citado de 1923 utilizó una forma del Axioma de Elección que "debería ser *finitista*". Con ello pretendía eliminar el uso directo de cuantificadores, uso que situaba como una característica esencialmente *infinitista* de la Lógica: "Now where does there appear for the first time something going beyond the concretely intuitive and the finitary? Obviously already in the use of the concepts 'all' and 'there exists'" (Hilbert, 1923, 154)[412]. A continuación Hilbert introducía lo que llamaba "el Axioma Transfinito", una versión del Axioma de Elección que utilizaba el operador τ y con el que pretendía evitar tales cuantificadores sobre dominios infinitos. Muy pronto lo sustituyó por el operador ε[413], con el cual el llamado "Axioma Transfinito" tomaba la siguiente forma: $A(x) \rightarrow A(\varepsilon_x(A(x)))$, donde ε denotaba una función de elección universal que podría actuar también sobre propiedades. Este operador aparece por primera vez en sus notas manuscritas de preparación del curso de invierno 1922-1923 de Göttingen y se usó en publicaciones en (Ackermann, 1925) y (Hilbert, 1923 y 1926). Se desarrolla ampliamente en (Hilbert & Ackermann, 1928)[414], aunque ya en (Hilbert, 1922, 157) había expresado la necesidad de hallar una formulación del Axioma de Elección "que fuera tan evidente como 2+2=4". Sus intenciones son pues claras: hallar una expresión del Axioma de Elección que evite las objeciones formuladas a su uso en conjuntos infinitos y desarrollar un cálculo que evite los cuantificadores[415] sobre dominios infinitos y que consista exclusivamente de

---

documentando así la antigüedad de su mutua colaboración, y una mención especial a John McTaggart Ellis McTaggart. La obra es abiertamente kantiana con un marcado psicologicismo, siguiendo las interpretaciones que entonces se hacían de la epistemología de Kant y es, de hecho, fundamentalmente una discusión de esa epistemología teniendo en cuenta los modernos desarrollos de las ciencias exactas y naturales, de los que muestra un profundo conocimiento enciclopédico. Un resumen de su posición en aquel momento: "It was only through Kant, the creator of the modern Epistemology, that the geometrical problem received a modern form" (Russell, 1897, 1). No fue éste el único cambio radical en la trayectoria intelectual de Russell. Casi al final de sus días, después de la larga y conflictiva relación que mantuvo con Wittgenstein, estaba absolutamente convencido de que sus planteamientos en los *Principles* y los *Principia* eran radicalmente erróneos (Russell, 1956 y 1975). Es precisamente esa profunda honradez intelectual y esa búsqueda incansable de la verdad lo más atractivo de su historia intelectual. Honradez y búsqueda que aplicó también estrictamente en el ámbito público y en el activismo político, campo en el que se equivocó tantas o más veces que en el que estamos aquí estudiando. Los *Principia*, además de en las ediciones referenciadas en la Bibliografía, son accesibles online en: **http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupid?key=**olbp32608. Las notaciones que usa son, en general, las de Peano, que se han impuesto de forma generalizada en sus grandes líneas en los textos modernos. Los *Principia* tienen sin embargo algunas particularidades ya en desuso; una información completa sobre sus notaciones en: Linsky, Bernard, "The Notation in Principia Mathematica", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.):**http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/pm-notation**

412 Y añadía: "For finite collections the universal and existential quantifiers reduce to finite conjunctions and disjunctions, yielding the Principle of the Excluded Middle … these equivalences are commonly assumed, without further ado, to be valid in mathematics for infinitely many individuals as well. In this way, however, we abandon the ground of the finitary and enter the domain of transfinite inferences. If we were always to use for infinite sets a procedure admissible for finite sets, we would open the gates to error … In analysis...the theorems valid for finite sums and products can be translated into theorems valid for infinite sums and products only if the inference is secured, in the particular case, by convergence. Likewise, we must not treat the infinite logical sums and products: A(1) & A(2) & A(3) & . . . and A(1) v A(2) v A(3) v ... in the same way as finite ones. My proof theory … provides such a treatment" (Hilbert, 1923, 155).

413 Si A(x) no contiene variables libres distintas de x, entonces el ε-término ε_x A(x) denota un objeto c tal que A(c) es verdad. Si A(x) contiene otras variables librea además de x, entonces ε_x A(x) denota a una función de esas variables que da un valor para x tal que A(x) es verdad, dada una asignación de valores para las otras variables libres.

414 Cfr. (Moore, 1988, 117-119).

415 Se definen los cuantificadores en términos del operador ε de la siguiente manera:

fórmulas finitas que produzcan los mismos resultados[416]. El ε-análisis de la cuantificación sería por diversas razones muy atractivo para los finitistas: (i) permite mantener toda demostración como una cadena finita en la que el operador-ε se usa sólo un número finito de veces. Además, (ii) sólo un número finito de elementos se necesitan como ε-términos, de forma que sólo un número finito de elementos se consideran en una demostración[417]. Hilbert probablemente pensaba que a través del ε-análisis como sustituto (o interpretación) de la cuantificación se podría demostrar la consistencia de un sistema lógico exclusivamente por medios finitos mediante asignaciones reiteradas de valores a los ε-términos, asignaciones que podrían se hechas de forma efectiva sobre un dominio finito. Esto recuerda a los planteamientos de Herbrand, quien expresaba una idea muy parecida a través de su noción de *expansiones*[418], y cuyas críticas y sugerencias Hilbert tuvo muy probablemente en cuenta cuando desarrolló esta teoría. Goldfarb (1979, 365), por ejemplo, intenta demostrar que la obra de Herbrand tuvo una considerable importancia en la demostración de los ε-teoremas de Hilbert-Bernays. Pero aunque parece un instrumento diseñado para la FOL, Hilbert lo utiliza también en un contexto de SOL, al igual que Ackermann y Bernays; un ejemplo prototípico es (Ackermann, 1924) cfr. (Eklund, 1996, 162-165). Además Hilbert planteó como uno de los cuatro problemas a resolver fundamentales para su programa un problema esencialmente de segundo-orden: demostrar la consistencia del ε-Axioma al actuar sobre el conjunto de funciones de la teoría de números (Hilbert, 1929, 4). Y poco después intenta plantear desde un punto de vista finitista una regla de inferencia en el campo infinito, la *ω-regla* (Hilbert, 1931), probablemente en un primer intento de abordar los resultados de Gödel (Feferman 1986). Podemos dar, pues, por bien establecidos algunos hechos básicos. En primer lugar, David Hilbert fue el primero que estableció la diferencia entre FOL y SOL, al considerar la FOL como un subsistema de la Lógica. Además planteó algunos problemas a resolver dentro de la FOL, algunos de los cuales fueron resueltos por sus colaboradores y discípulos[419]. Pero, en segundo lugar, aunque todos los planteamientos finitistas llevaban irremisiblemente a privilegiar la FOL (tal y como entendieron Skolem y Herbrand) e incluso a plantearse el reducir *la* Lógica al Cálculo de Conectivas, Hilbert se resistió al abandono de la SOL y, como

---

El cuantificador existencial $\exists x : A(x)$ se define como equivalente a $A(\varepsilon_x A(x))$

El cuantificador universal $\forall x : A(x)$ se define como equivalente a $A(\varepsilon_x(\neg A(x)))$

[416] Un estudio detallado de este operador lo hemos realizado en el Capítulo-5, y las investigaciones de su uso llegan hasta nuestros días (Zach, 2003, 2004 y 2009), pero el éxito de dicho operador de cara a las intenciones de Hilbert es muy discutible. Así, por ejemplo, para Eklund (1996,164), "We have indeed two distinct problems: one concerns grasp of quantification over infinite domains; the other concerns grasp of infinite objects. But it seems that an answer to the problem of our grasp of infinite objects *ipso facto* should be an answer to the question of how we can grasp quantification over infinite domains: for it would show how, in general, we can grasp infinite totalities. The ε-analysis of quantification does not provide us with an answer to the question how we can grasp infinite objects -on the contrary it provides a means for evading that problem- and it seems that any distinct solution to this as yet unsolved problem would render ε-analysis of quantification obsolete. Hence there is a conflict between the ε-analysis of quantification and allowing infinite objects in the range of the variables".

[417] Pero el que sólo se necesite un conjunto finito para aplicar el ε-operador, no quiere decir que sólo se pueda utilizar en tal caso. Hilbert y sus discípulos lo utilizan también con frecuencia sobre conjuntos infinitos y en la SOL; un caso paradigmático por su importancia sería (Ackermann, 1924b).

[418] Herbrand usa el término *rèduite*, que literalmente se traduciría por *reducción.* Golfarb (y siguiéndole, también Eklund) lo traduce por *expansion.* Influenciado por las ideas de Hilbert, a quien, como hemos visto más arriba consideraba incoherente con sus propios planteamientos, Herbrand se propuso abordar la teoría de la cuantificación de una forma finitísticamente aceptable. Su teoría es analizada por (Eklund, 1996, 162) y (Goldfarb, 1979, 357-364). Las obras completas de Herbrand en inglés en (Goldfarb, 1971) y referencias de los originales en francés en la Bibliografía de este trabajo.

[419] Por ejemplo, en (Hilbert & Ackermann, 1928, 69) propuso demostrar la completitud de la FOL (sin identidad). Un año más tarde Gödel (1929) hizo la demostración para los casos de con y sin identidad.

hemos visto, siguió trabajando en ella hasta el final; existen numerosos pronunciamientos suyos que pueden interpretarse como una defensa de una Lógica por lo menos tan fuerte como la SOL[420]. Además, en tercer lugar, no existe (casi) ningún pronunciamiento suyo sobre ese debate[421], aunque podemos estar seguros de que estaba bien informado de él[422]. Sólo existe una explicación clara de su posición al respecto y que formuló en su libro con Ackermann (1928) y que abunda en la interpretación de su posición aquí expuesta:

> "The restricted functional calculus [FOL] was sufficient, as long as one had no other aim than the formalization of logical inference, as long as it was only a matter of developing isolated theories of themselves, in a purely formal way, from their principles. But as soon as one makes the foundations of the theories, particularly mathematical theories, the subject of investigation, as soon as one wishes to test in which connection they stand to logic, and to what extent they can be won from purely logical operations and concepts, then the expanded functional calculus [SOL] is indispensable" (Hilbert & Ackermann, 1928, 86).

Podemos por tanto inferir, en cuarto lugar, que seguía creyendo que el lenguaje de segundo orden era el adecuado para el planteamiento de la teorías matemáticas. Aunque era consciente de que eso implicaba que de alguna forma la Lógica así entendida encontraba un fundamento en la Matemática, punto que le enfrentó radicalmente a Frege y con todos los enfoques logicistas (que ya había criticado con frecuencia, como se refleja en varias citas mencionadas más arriba en este trabajo), y de hecho esa idea estaba muy clara desde la etapa inicial de sus trabajos de Lógica y la mantuvo hasta el final de sus días:

> "Arithmetic is often considered to be a part of logic, and the traditional fundamental logical notions are usually presupposed when it is a question of establishing a foundation for arithmetic. If we observe attentively, however, we realize that in the traditional exposition of the laws of logic certain fundamental arithmetic notions are already used, for example, the notion of set and, to some extent, also that of number. Thus we find ourselves turning in a circle, and that is why a partly simultaneous development of the laws of logic and of arithmetic is required if paradoxes are to be avoided" (Hilbert, 1905, 131).

Aunque no indicó en ninguna parte cómo debería procederse en ese *simultaneous development*. Me parece claro, y más teniendo en cuenta su consideración de la existencia de

---

[420] "Now if we make use of the calculus of logic in this sense, then we will be compelled to extend in a certain direction the rules governing the formal operations. In particular, while we previously separated propositions and [prepositional] functions completely from objects and, accordingly, distinguished the signs for indefinite propositions and functions rigorously from the variables, which take arguments, now we permit propositions and functions to be taken as logical variables in a way similar to that for proper objects, and we permit signs for indefinite propositions and functions to appear as arguments in symbolic expressions" (Hilbert, 1917, 188). Y en su libro con Ackermann de 1928 es más rotundo: "As soon as the object of investigation becomes the foundation of … mathematical theories, as soon as one wishes to determine in what relation the theory stands to logic and to what extent it can be obtained from purely logical operations and concepts, then the extended calculus [of logic] is essential" (Hilbert & Ackermann, 1928, 86).

[421] Aunque sí podemos fijarnos en el tratamiento que daba a las distintas lógicas en sus trabajos. En su obra madura de 1917 a 1928 trata a la FOL como un subsistema de toda la Lógica la cual, para él en esa época sería la teoría ramificada de tipos de Russell, considerando que la Teoría de Conjuntos y el Principio de Inducción Matemática no admitía un tratamiento adecuado en la FOL. (Hilbert, 1917, 189-200) y (Hilbert & Ackermann, 1928, 83-92). Véase también (Moore, 1989, 116). Se puede encontrar un pronunciamiento suyo sobre el debate que expresa claramente su posición en (Hilbert & Ackermann, 1928, 86) y que citamos a continuación en el texto principal.

[422] Entre sus estrechos colaboradores, Bernays (1928a) escribió brevemente sobre la SOL y también (Bernays & Schönfinkel 1928, 347-48) discutieron con bastante detalle el llamado "formalismo extendido de segundo orden" y mencionando el procedimiento de decisión de Löwenheim (1915) para lógicas monádicas de segundo orden y remarcando cómo las cuestiones de validez en la FOL pueden ser expresadas por medio de fórmulas de segundo orden. Véase (Moore, 1989, 119).

una absorción de parte de la Aritmética *dentro* de la Lógica, que Hilbert tenía en mente la posibilidad (y necesidad) de *elementos ideales* dentro de la Lógica que desempeñaran el mismo rol que desempeñan en la Matemática, justificando el manejo del infinito por métodos finitos análogamente al Análisis (recuérdese su referencia a la "convergencia" en la cita al respecto (Hilbert, 1923, 155) más arriba transcrita). Podemos concluir, en quinto lugar, que en este aspecto obtuvo un rotundo fracaso. Ni de sus investigaciones ni de las realizadas hasta hoy en el marco del *programa finitista* y que hemos expuesto en este trabajo se ha obtenido una respuesta conclusiva en la línea propuesta por Hilbert. En sexto lugar, de todo lo expuesto aquí y en la parte II en relación con el trabajo de Hilbert en la Lógica, se puede afirmar que Hilbert tenía en este campo una visión formalista extrema, exactamente igual que Kant; salvando naturalmente las distancias que marcan los distintos niveles de desarrollo de esta disciplina en las dos épocas. Pero en la medida el avance de las investigaciones confirmaban paulatinamente que una Lógica estrictamente formalista sólo podía desarrollarse consecuentemente en un lenguaje de primer orden y que esa teoría sería equivalente a la teoría de la computación, su programa *finitista* de fundamentación de la Matemática chocaba con sus convicciones realistas sobre la naturaleza profunda de la Matemática, la *inhaltliche Mathematik*; y de ahí que mantuviera hasta el final sus trabajos en la SOL. Dilema que nunca pudo resolver y que sigue irresuelto a día de hoy. Y en séptimo y último lugar, hay que decir que ese fracaso es relativo en dos sentidos importantes. Por una parte, ninguna de las líneas de investigación abiertas en el siglo XX (y que como hemos visto han ido en prácticamente todas las direcciones concebibles) han cerrado el problema de la definición de "la" Lógica y de la fundamentación de la Matemática[423] ; la tesis que hemos intentado defender es que la actual aceptación mayoritaria de la FOL es en realidad un cierre en falso (o sería mejor decir un cierre desde una perspectiva sesgada). No es lo mismo sostener que, a partir de la formulación de los axiomas de ZF o ZFC sea posible "formular" la mayor parte de la Matemática actual en un lenguaje de primer orden (lo cuál puede resultar un éxito para facilitar las demostraciones de consistencia y estructurar sistemas axiomáticos), a decir que ese lenguaje sea el adecuado para una fundamentación de la Matemática. Además, la mayor parte de los textos y trabajos de Matemática siguen utilizando un lenguaje de segundo orden en la mayor parte de las formulaciones, en abierta contradicción con las prescripciones y usos de la Lógica moderna; y, por si fuera poco, el lenguaje de los textos de Matemáticas no es en absoluto un lenguaje formal. En él los símbolos y fórmulas pueden considerarse simplemente abreviaturas de "nuevos conceptos" bien definidos de carácter técnico para los que no existe una palabra adecuada en el lenguaje natural, o bien esquemas informales de razonamiento. Así el *gap* entre la práctica matemática usual y las prescripciones supuestas en las concepciones dominantes en la Lógica Matemática significa una importante relativización del valor de estas concepciones. Por otra parte, si bien Hilbert y su escuela no han podido culminar con éxito un desarrollo de su programa lógico, su éxito es indiscutible en lo que se refiere al marco general de la investigación. Sus diferenciaciones entre sintaxis y semántica, entre matemática y metamatemática, entre verdad y validez, entre FOL y SOL y su estudio y fundamentación de los sistemas axiomáticos y de la formalización constituyen el marco conceptual general en el que se desarrollan absolutamente todas la líneas de investigación desde 1930.

Existe también una línea de defensa de la FOL desde el punto de vista filosófico. Ésta surgió en los años 50, precisamente cuando se impuso entre los lógicos el consenso sobre la

[423] "During the 1930's some key figures in the community of logicians came to pin-point FOL as the basic system for actual research in logic and foundations. The context in which this decision was taken was that of foundational work, more precisely work on axiomatic set theory and Hilbertian metamathematics. In this way, the mathematical context underscored its primacy and effected another turn of the screw" (Ferreirós, 2001, 448).

FOL, y fue iniciada principalmente por Quine (1941, 1953, 1953b y 1970) y se mantiene hasta nuestros días, probablemente muy influenciada por el posicionamiento a favor de la FOL de los positivistas lógicos quienes mayoritariamente han formulado las teorías científicas en este lenguaje. Es imposible definir fundadamente la posición de Hilbert al respecto puesto que en su época el debate era exclusivamente técnico entre lógicos y matemáticos. Pero si atendemos al análisis de su filosofía de la Matemática que hemos realizado en la parte-II no sería difícil conjeturar cuál sería su posición. Las objeciones a la SOL desde el campo filosófico se dirigen fundamentalmente en tres direcciones. Bueno (2010) discute los argumentos más actuales en este campo. En primer lugar el debate se centra en un punto que se solapa con la discusión en el campo puramente lógico, el problema de la *categorizidad*. Melia (1995) cuestiona la argumentación de Shapiro (1985) de que la existencia de modelos no isomorfos de una teoría en los lenguajes de primer orden cuestiona la capacidad de esos lenguajes para la formalización de las Matemáticas[424]. Bueno (2010, 377) indica que "there is a huge difference between the many *non*-isomorphic interpretations of first-order mathematical theories and the many *isomorphic* interpretations of second-order ones", alegando el argumento estructuralista de Shapiro (1997): si existe una teoría única salvo isomorfismo, es irrelevante el carácter de un objeto asignado a una constante o variable de la teoría; lo relevante es que en ese campo se constata esa estructura relacional, y eso no sucede cuando existen modelos no isomorfos y aquí no se podría hablar en propiedad de una teoría. La respuesta de Melia es, en opinión de Bueno (2010, 378), más bien un argumento contra el estructuralismo[425].

La opinión de Hilbert (y de Kant) podemos conjeturar que estaría más cerca de la visión estructuralista. En la medida en que para Hilbert (al igual que para Kant), aunque sin duda *creía* en la realidad objetiva de los objetos matemáticos, el acceso a esos objetos sólo era posible a través de las relaciones medibles entre ellos y a través de la *intuición*, que para ambos sería una intuición sensible que se concretaría en una intuición de las *formas*, el planteamiento estructuralista –por cierto, característica dominante de la Matemática actual- sería el enfoque natural. Esa intuición formal se concretaría en Hilbert, por analogía con la Aritmética elemental, en una intuición espacial de las formas (signos) del lenguaje en el que se expresa la teoría, y de todo lo anteriormente expuesto se puede deducir claramente que ese lenguaje impone unas limitaciones a esa teoría (y en gran parte determina sus propiedades).

En segundo lugar, la discusión se refiere a un problema epistemológico: el problema del acceso referencial a los objetos matemáticos, que, como se ve por lo expuesto en el párrafo anterior, está íntimamente relacionada con el problema anterior[426]. Las discusiones

---

[424] "If the mere existence of many non-isomorphic interpretations of first-order mathematical theories shows that first-order languages are unable to characterize certain mathematical systems, then the mere existence of many interpretations of second-order theories seems equally well to show that second-order languages are unable to characterize the relevant mathematical systems" (Melia, 1995, 129).

[425] "When Melia argues that, due to the existence of different interpretations of second-order theories, they are not better than first-order ones, he assumes that a structuralist position in the philosophy of mathematics is not sustainable. For Melia assumes that different isomorphic interpretations (of second-order theories) are on a par with different non-isomorphic interpretations (of first-order theories). But it is crucial for the structuralist to distinguish between these two kinds of interpretation … So when Melia assumes that isomorphic and nonisomorphic interpretations are on a par, he is assuming that structuralism (with the use of a second-order language) is ultimately inadequate as a framework to formulate mathematical theories. After all, Melia is denying the importance of the distinction (between the two kinds of interpretation) upon which structuralism rests … Therefore, its denial cannot be assumed in a criticism of second-order logic" (Bueno, 2010, 377-378).

[426] Azzouni (1994, 7) plantea el problema de cómo podemos referirnos a los objetos matemáticos, dado que éstos no son objetos que interactúan en relaciones de causa-efecto, problema que denomina "the puzzle of referential access to mathematical objects". Intenta a continuación demostrar que, frente a quienes como

sobre este problema se remontan a los orígenes de la misma distinción entre FOL y SOL y, en el campo filosófico, fueron determinantes en la posición de Quine (1970) a favor de la FOL. La argumentación de Bueno y Boolos no es universalmente compartida; por ejemplo, Resnik (1988) critica la aproximación de Boolos sobre la base de que en el lenguaje natural los "cuantificadores en plural" ("existen objetos" como sustitución de "existe una clase") se entienden en el lenguaje natural en términos de clases o conjuntos y "thus, according to Resnik, we do not have a grasp of plural quantifiers independently of the notion of class, and hence cannot simply assume these quantifiers in the metalanguage of our semantics. As opposed to Boolos's view, by using these quantifiers, we do not avoid ontological commitment to classes after all" (Bueno, 2010, 374). Se puede concluir que en el campo filosófico el debate está lejos de estar cerrado, por lo que también aquí la opción mayoritaria por la FOL se puede considerar un cierre en falso o provisional, desde el punto de vista de la fundamentación de la Matemática.

Para terminar podemos establecer tres conclusiones más. Primero, que la mayor parte de las consideraciones más arriba expuestas tratan de cuestiones esencialmente lingüísticas: las capacidades o posibilidades de tal o cual sistema lingüístico para expresar o capturar propiedades de estructuras de razonamiento (la consistencia, la completitud) o para expresar o capturar teorías sobre objetos o relaciones entre objetos (muchas de los cuales se utilizan ya con éxito incluso en campos aplicados, por ejemplo el sistema de los números reales). Como

---

Shapiro (1985) creen que el marco adecuado son los lenguajes de segundo orden, dentro de la FOL es posible abordar el problema con estructuras lingüísticas que tendrían exactamente las mismas propiedades que sus correspondientes en la SOL. Para ello elabora un ingenioso mecanismo basado en una restricción de la clase de los modelos del cálculo de predicados de primer orden. Considera un teoría no-standard de modelos para la FOL, que denomina "truncated model theory", y que tiene los mismos modelos que la SOL con la semántica standard. Luego establece la equivalencia entre la FOL con la "truncated model theory" y la SOL monádica (Azzouni, 1994, 14–15) y demuestra cómo trasladar un enunciado de la SOL monádica al lenguaje de la "truncated logic", y por fin construye una aplicación biyectiva entre los dos sistemas. Azzouni observa que la "truncated logic" tiene exactamente las mismas propiedades metalógicas que la SOL monádica con la semántica standard y ambas lógicas tendrían la misma capacidad para caracterizar estructuras infinitas y tendrían los mismos modelos, y en ese sentido serían equivalentes. Bueno (2010, 381) objeta que " in my view, the arguments Azzouni put forward are far from being decisive. First, note that the truncation was obtained, in a clearly *ad hoc* way, assuming the information provided by second-order logic about which models to exclude from the class of first-order models. It is because we have second-order logic at our disposal that we are able to construct the equivalent truncated logic (the former provides heuristic guidelines for the construction of the latter). So, Azzouni can only maintain the adequacy of his construction if he assumes that second-order logic solves the problem of referential access in the first place … Far from establishing the inadequacy of second-order logic to accommodate the referential access, the truncation spells out the advantage of this logic, since it allows us to clearly distinguish between an *ad hoc* construction (which assumes second-order logic, but only mimics its features) and an adequate, original one (the class of categorical theories achieved through the proper resources of the second-order language)". Y a continuación menciona *la bicha*, el auténtico problema de fondo que ha inspirado desde los años 20 la suspicacia frente a la SOL, y que constituye el tercer y fundamental aspecto del debate filosófico actual al respecto: el compromiso ontológico que implican las formulaciones de segundo orden, de una parte presuponiendo la teoría de conjuntos que se introduce como parte de las formulaciones, y de otra parte presuponiendo la existencia de objetos o colecciones con la propiedad de infinitud. Y argumenta que, desde ese aspecto la construcción de Azzouni es más débil que la SOL puesto que no dispone de los recursos de ésta para tratar la problemática: "in other words, in order to achieve the expressive power of second-order languages in a first-order setting, Azzouni *has to introduce set-theoretic notions*. But *without any recourse to these notions*, second-order logic is able to achieve its expressive power. So the most we can say Azzouni has established is that, without set-theoretic talk, first-order logic lacks the expressive power of second-order logic" (Bueno, 2010, 382). A continuación cita el trabajo de Boolos que, según él, demuestra que las formulaciones de segundo orden no presuponen la teoría de conjuntos: "as we saw, the point of Boolos's plural interpretation of second-order quantifiers is precisely to establish that we are not committed to set-theoretic talk in order to provide a semantics for (monadic) second-order logic".

ya hemos explicado, los sistemas lingüísticos formales construidos por la Lógica Simbólica parten además de una selección de partículas del lenguaje natural, una reflexión sobre sus usos y una segunda selección de esos usos. En los modernos tratados de Lógica esta fase del análisis desaparece pero, sin remontarnos a las *Laws of Thought* de Boole, todavía Russell, por ejemplo, dedicaba al problema un capítulo entero de los *Principles* bajo el título *Proper Names, Adjectives and Verbs*. En segundo lugar, observando el amplio recorrido histórico y crítico por los desarrollos realizados en los últimos 150 años en la Lógica standard y de las no-standard, podemos destacar unos pocos casos singulares que poseen unas características distintas de las de la mayoría. Se trata de la lógica difusa, las lógicas no monotónicas y las redes neuronales, así como teorías conexas como los sistemas expertos, la teoría de la probabilidad y la estadística, la inteligencia artificial y la teoría de la información. Todos estos campos presentan varias características comunes:

a) Han sido desarrollados fundamentalmente en los últimos 60 años.

b) No surgen del universo standard de discusión en el que se mueve la Lógica en estos años, es decir, no se plantean como respuestas a la problemática conceptual y metodológica de la Lógica que hemos considerado hasta aquí.

c) Todos ellos, aunque no existe una teoría unificada que los englobe, apuntan en una misma dirección: a sistemas (o máquinas) que son capaces de aprender, es decir, que son capaces de modificar sus propias reglas de funcionamiento y decisión según la respuesta del entorno (y/o según sus propias conclusiones lógicas); incluyendo en el concepto “entorno” a sus propios mecanismos de funcionamiento, que pueden por tanto ser analizados por ellos mismos. Ciertamente, se pueden plantear interesantes problemas filosóficos a partir de aquí como la pregunta de si de alguna manera tales sistemas (o máquinas) presentarían con ello, o podrían desarrollar con ello, una forma de conciencia o autoconsciencia, pero esto excede nuestros propósitos.

d) La rápida obtención de aplicaciones prácticas, muchas de las cuales ya están en el campo industrial, obteniendo así su justificación epistemológica en lo que nosotros hemos considerado reiteradamente que sería la justificación propia de la Matemática: su aplicabilidad al mundo real.

Por otra parte, todos estos campos comparten con el conjunto de teorías anteriormente estudiadas lo que ya es un bagaje común a todas las ciencias exactas después de Hilbert: las distinciones conceptuales básicas más arriba comentadas tales como sintaxis – semántica, etc. y la atención al rigor formal y al control de la relación de consecuencia y de los mecanismos de demostración. Y en tercer lugar, la conclusión anterior debe ponerse en conexión con esta otra: de la observación detenida de los debates en el seno de la lógica standard y del surgimiento y evolución de las no-standard se puede concluir que desde los años 30 no ha habido un desarrollo significativo y resolutivo en ninguna de las múltiples líneas de investigación desarrolladas, más allá de la importante aclaración de algunos conceptos en debate y del planteamiento coherente de nuevas posibles líneas de desarrollo, de las cuales, ninguna de ellas ha alcanzado el consenso de la comunidad científica. Y el consenso alcanzado en torno a la FOL es 60 años después todavía cuestionado por importantes científicos.

Y mientras, las Matemáticas han seguido su imparable desarrollo al margen de las prescripciones y legitimaciones de la Lógica y la Epistemología. El panorama en la investigación lógica, por expresarlo con una metáfora gráfica, se asemeja mucho al de los debates medievales en torno a la tipología de los ángeles. En mi opinión, no se trata de que los actuales esquemas conceptuales en que se desarrolla el trabajo (y que tanto deben a Hilbert y a su escuela) no sean válidos, sino que muy probablemente haría falta una perspectiva distinta y superior para que pudieran ser fructíferos. En esta línea, pienso que las últimas líneas de investigación aquí comentadas representan lo que podríamos denominar *la frontera de la Lógica* en tanto que, si a partir de ellas se consiguiera un *hardware* y un *software* que permitiera simular el funcionamiento de la capacidad cognitiva humana[427] se abriría claramente una nueva perspectiva. En tal caso la Lógica cambiaría su carácter pasando a formar parte de las Ciencias Experimentales, aunque posiblemente sus resultados y teorías se expresarían en los marcos teórico, conceptual y lingüístico desarrollados por la Lógica en el siglo XX, que también adquirirían otra perspectiva.

Ahora estamos en condiciones de responder a la pregunta fundamental planteada por Russell: “are the reasonings in Mathematics in any way different from those of Formal Logic?” (Russell, 1903, 457). La respuesta es *jain*. Por un lado, *ja* pues no difieren en cuanto que los razonamientos en ambos casos *pueden* formalizarse idénticamente en los esquemas o fórmulas de un Cálculo lógico. Por otro lado, *nein* puesto que los razonamientos en Matemáticas discurren sobre objetos con contenido concreto, si bien abstracto, y ya hemos explicado que el aspecto formal standard de la implicación es sólo un aspecto (importante) del razonamiento humano cuando el hombre razona sobre política, sobre filosofía o sobre matemática; aspecto sobre el que la Lógica del siglo XX ha realizado una gigantesca tarea de clarificación. Pero Russell se hacía esa pregunta en relación con la filosofía de la Matemática de Kant, la cual quería refutar, y en particular en relación con el uso que hace Kant (según su interpretación) de las representaciones visuales (y de la intuición) en Geometría. Añade: “what is essential, from the logical point of view, is, that the *a priori* intuitions supply methods of reasoning and inference which formal logic does not admit; and these methods, we are told, make the figure (which may of course be merely imagined) essential to all geometrical proofs” (Russell, 1903, 456-457). Ya hemos rebatido en la Parte-I este argumento de Russell (y Friedman) desde el punto de vista de que la intuición kantiana no estaba principalmente relacionada con el proceso de deducción en el que en todo caso no interfería, si bien este proceso podía utilizar la intuición espacial como un procedimiento heurístico; el rol de la intuición kantiana tenía que ver esencialmente con la percepción del objeto y la construcción de los conceptos. Por otro lado, lo que no se le ocurrió a Russell es pensar en que los procedimientos visuales en Euclides (y en Kant) podían ser también un soporte expresivo para el desarrollo de una lógica formal, que es lo que parecen demostrar algunas investigaciones recientes, como veremos a continuación.

[427] Esta posibilidad está también muy ligada al desarrollo de las neurociencias y al conocimiento del funcionamiento del cerebro humano, campo en el que en los últimos 20 años se están produciendo desarrollos notables.

CAPÍTULO-7

Las fronteras de la Lógica y los sistemas representacionales de la ciencia moderna. Valoración desde un punto de vista kantiano

7.1.- Las fronteras de la lógica y la simulación del cerebro humano.

7.1.1.- Las diferencias entre Lógica y Matemática

Hasta aquí hemos expuesto con un enfoque crítico la evolución de la Lógica standard en los últimos 150 años y el enorme trabajo realizado en lo que podríamos considerar su objeto principal: la clarificación de la *consecuencia lógica*; y desde un punto de vista más general, la clarificación del *proceso de razonamiento humano*. Podemos concluir que:

1) La Lógica difiere claramente de la Matemática fundamentalmente por la naturaleza de sus respectivos objetos y por sus métodos para abordarlos.

2) Paralelamente al análisis de la evolución de la Lógica hemos observado las deficiencias de sus desarrollos reales, deficiencias que, casi desde el principio, han dado lugar al desarrollo de las llamadas *lógicas no-standard*. La mayoría de éstas, así como los respectivos argumentos críticos en base a los que se desarrollaron, las hemos expuesto en el Capítulo-6. Pero unas pocas fueron excluidas de esa exposición. La razón es que presentan una característica que juzgamos relevante: o bien se alejan en sus fundamentos de la tradicional teoría de conjuntos, o bien surgen como sistemas formales que pretenden capturar la *lógica* de los patrones de razonamiento en sistemas que *aprenden* y/o en *contextos vagos o difusos*. Y estas técnicas no-standard son las que vamos a examinar aquí brevemente, las cuales están relacionadas, en nuestra opinión, con las *nuevas fronteras de la Lógica* que deberían dar lugar a unos desarrollos que dejen obsoletos los debates del siglo XX. Todas estas lógicas no-standard, algunas muy recientes, han logrado rápidamente un amplio espectro de aplicaciones. También hay que destacar su amplio uso en los departamentos de Computación e Inteligencia Artificial, en cuya problemática y necesidades se inspiraron en gran parte, así como sus muy recientes aplicaciones en campos específicos de carácter teórico de la Matemática, la Aritmética y la Metamatemática (Mortensen, 2013), (Brady, 2005), (Restall, 2007), (Meyer, 1976), (Meyer & Mortensen, 1984), (Priest, 1997 y 2000), (Hatcher, 1982).

En nuestra investigación nos toparemos necesariamente con algunas importantes teorías científicas que se han desarrollado y/o consolidado en los últimos 60 años, muchas en íntima conexión con las lógicas aquí analizadas: la Termodinámica, la Teoría de la Información, la Teoría de Supercuerdas, la Mecánica Cuántica, la Estadística Bayesiana, la Teoría de la Probabilidad, la Teoría de la Posibilidad, entre otras. Aquí, además de una descripción de lo esencial de esas teorías (que fundamentalmente se realiza en nota a pie de página) se ha tratado de realizar un ejercicio de análisis filosófico en el sentido que hemos considerado sustancial a la *filosofía kantiana*: “una crítica sobria”, pero bien documentada. Se pretende demostrar el papel fundamental que aún puede y debe tener la Filosofía para el *conocimiento* en esta época de *explicaciones científicas* del mundo. Aparte del posible éxito que pudiera tener nuestro intento, encontramos en este periodo ejemplos relevantes de esta función de la Filosofía. Así, veremos veremos que fue Frank Ramsey (1926) quien al discutir desde un punto de vista filosófico los planteamientos de Keynes en relación con la Teoría de la Probabilidad inició de hecho la Teoría Bayesiana 20 años antes de que De Finneti comenzara a esbozarla. El estudio especialmente minucioso que hacemos de la Teoría de la Probabilidad, de la que disponemos de todos los registros respecto al proceso de su creación, su formalización, evolución y aplicaciones, nos dará la oportunidad de confirmar nuestras nociones sobre el carácter de una teoría matemática y el rol de la Lógica en ella, confirmando también nuestros análisis de Hilbert y Kant. Y nuestro análisis del significado de una *explicación científica del mundo*, a la luz de los ejemplos concretos analizados, nos permitirá cerrar un hueco que quedaba abierto en nuestro análisis de Hilbert: ¿qué filosofía científica tenía Hilbert?

7.1.2.-Las *Lógicas no monotónicas*.

La Lógica clásica y las no-standard hasta aquí estudiadas tienen la propiedad de *monotonicidad*; esto significa que en esos sistemas lógicos *la relación de consecuencia* es monotónica: el añadir una fórmula a la teoría no da lugar nunca a una reducción del conjunto de consecuencias previas; o sea que, desde un punto de vista general, las inferencias deductivamente válidas no son nunca “anuladas” por nueva información. Pero en los últimos 30 años se han elaborado una serie de formalismos lógicos “devised to capture and represent defeasible inference, i.e., that kind of inference of everyday life in which reasoners draw conclusions tentatively, reserving the right to retract them in the light of further information. Such inferences are called “non-monotonic” because the set of conclusions warranted on the basis of a given knowledge base, given as a set of premises, does not increase (in fact, it can shrink) with the size of the knowledge base itself” (Antonelli, 2012). Han surgido básicamente ante las necesidades de capturar procesos, y de la programación informática, en los campos de inteligencia artificial, robótica, sistemas expertos y redes neuronales, en donde aparecían problemas –fundamentalmente ligados con el *aprendizaje* de los sistemas y la *autorregulación* y *adaptación*- para los que el formalismo de la lógica convencional no suponía un marco adecuado para captar los procesos de *inferencia reales*. En palabras de uno de los pioneros (Reiter, “A Logic for Default Reasoning”, 1980), “various forms of default reasoning commonly arise in Artificial Intelligence. Such reasoning corresponds to the process of deriving conclusions based upon patterns of inference of the form ‘in the absence of any information to the contrary, assume...’. Reasoning patterns of this kind represent a form of plausible inference and are typically required whenever conclusions must be drawn despite the absence of total knowledge about a world”.

Esto implica una revisión y una modificación de la *relación de consecuencia* clásica. Así han surgido a partir de finales de los años 70 diversos formalismos (lógicas no monotónicas) que constituyen distintas lógicas cuya relación de consecuencia no es monotónica, inspiradas en las problemática concreta de distintos campos, y que intentan crear un marco formal para el manejo de varios tipos de *razonamiento*: el *razonamiento por defecto* (reasoning by default), donde las consecuencias pueden ser deducidas solamente de la falta de evidencia en contrario; el *razonamiento abductivo* (abductive reasoning), donde la consecuencias se deducen únicamente en tanto que se consideran las explicaciones más *plausibles*; varias importantes aproximaciones al *razonamiento cognitivo* (reasoning about knowledge), donde la ignorancia de una consecuencia debe ser anulada cuando la consecuencia llega a ser conocida; y, finalmente, la *revisión de creencias* (belief revision), donde nuevos conocimientos pueden contradecir las antiguas *creencias* –que sería una alternativa a las *lógicas paraconsistentes* que, como vimos, pretenden manejar la inconsistencia más que removerla-. En esta dirección han surgido distintos formalismos: *default logic, defeasible logic, autoepistemic logic, belief revision logic, answer set programming, closed world assumption* y *circumscription*. Su importancia desde un punto de vista epistemológico, y no sólo lógico, exigiría un análisis monográfico, del que se podrían extraer nuevas perspectivas para los temas tratados en este trabajo. Una descripción resumida de estas lógicas y de su problemática, así como amplia bibliografía en: (Antonelli, 2012), (Makinson, 2005), (Gabbay et alt., 1994). Sobre los trabajos pioneros a partir de finales de los 70 (J. McCarthy, D. McDermott, J. Doyle y R. Reiter) véase (Gingsberg, 1987). En 1980 se publicó un monográfico especial dedicado a estos nuevos formalismos por *Artificial Intelligence Journal* (vol. 13, 1980). Un estudio reciente sobre las Lógicas no-monotónicas de gran impacto, donde se analiza sus implicaciones epistemológicas y con amplia bibliografía reciente en (Leitgeb, 2004).

7.1.3.- Redes neuronales, simulación cerebral y computación.

La segunda de las lógicas no standard desarrolladas en los últimos 30 años, y que no hemos incluido en nuestro estudio de estas lógicas realizado en el Capítulo-6 por las razones explicadas anteriormente, es la denominada *redes neuronales*. Vamos a realizar aquí una breve descripción de esa técnica situándola en el contexto más amplio de las investigaciones cerebrales y de la computación, y extrayendo las conclusiones más relevantes para nuestros fines. Las *redes neuronales* (RNA,) se pueden considerar desde varios puntos de vista:

-Una nueva forma de computación, inspirada en modelos biológicos.

-Un modelo matemático compuesto por un gran número de elementos de procesamiento informático organizados en niveles.

-Redes interconectadas masivamente en paralelo de elementos simples (usualmente adaptativos) y con organización jerárquica, las cuales intentan interactuar con los objetos del mundo real del mismo modo que lo hace un sistema nervioso biológico.

-Una lógica que pretende replicar una característica fundamental de los mecanismos cognitivos humanos: la capacidad de aprendizaje, entendida como modificación de los propios mecanismos de respuesta, en función de la información recibida y del diagnóstico de los errores propios. Esto se basa al menos en: una memoria a corto plazo, una capacidad asociativa y una capacidad clasificatoria.

Y de hecho esos fueron sus objetivos desde sus planteamientos iniciales y con los primeros modelos desarrollados en 1943 por los neurólogos McCulloch y Pitts[428], quienes

---

[428] Llamaron a este modelo matemático *threshold logic* (McCulloch, Warren; Walter Pitts (1943), "A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity", *Bulletin of Mathematical Biophysics* 5 (4): 115–133).
Años más tarde, en 1949, el psicólogo Donald Hebb desarrolló sus ideas sobre el aprendizaje neuronal, que resumió en la llamada "regla de Hebb" (*Hebbian learning*) (Hebb, Donald, 1949, *The Organization of Behavior*. New York: Wiley). Hebb creó una hipótesis de aprendizaje basado en los mecanismos de plasticidad neuronal que ahora se conoce como *Hebbian learning* o *regla de Hebb*; se considera una típica regla de aprendizaje sin supervisión o autoaprendizaje y comenzaron a aplicarse a modelos de computación a partir de 1950 en las llamadas *máquinas de Turing de tipo-B*. Farley y Wesley A. Clark (1954) fueron los primeros que usaron máquinas computacionales, entonces llamadas *calculators*, para simular una *red Hebbiana* (*Hebbian network*) en el MIT. Otras redes neuronales sobre máquinas computacionales fueron creadas por Rochester, Holland, Habit y Duda en 1956 (Farley, B.G.; W.A. Clark 1954, "Simulation of Self-Organizing Systems by Digital Computer", *IRE Transactions on Information Theory* 4 (4): 76–84) y (Rochester, N.; J.H. Holland, L.H. Habit y W.L. Duda 1956, "Tests on a cell assembly theory of the action of the brain, using a large digital computer", *IRE Transactions on Information Theory* 2 (3): 80–93). En la década de los cincuenta, Minsky comienza a construir la primera neurocomputadora basada en modelos de redes neuronales que imitan al cerebro (Minsky, M.; S. Papert 1969, *An Introduction to Computational Geometry*, Mass: MIT Press). En 1958, Frank Rosemblatt desarrolló lo que denominó *el perceptrón simple* (*Perceptron*) y en 1962, presenta los resultados de una máquina a la que denominó "perceptron", la cual reproducía una estructura neuronal muy simplificada, capaz de aprender a reconocer y clasificar determinadas figuras (Rosenblatt, F., 1958, "The Perceptron: A Probalistic Model For Information Storage And Organization In The Brain", *Psychological Review* 65 (6): 386–408). Se fundamentaba en un algoritmo para simular patrones de reconocimiento que sólo usaba la adición y la sustracción; pero también describió matemáticamente un algoritmo de patrones de reconocimiento para implementarse con circuitos complejos de varios perceptrones y que no pudo computarse efectivamente hasta el desarrollo por Paul Werbos en 1975 del llamado *backpropagation algorithm* (Werbos, P.J.,1975, *Beyond Regression: New Tools for Prediction and Analysis in the Behavioral Sciences*, Mass: MIT Press). En 1960 Widrow y Hoff desarrollaron el

ADALINE (ADAptive LInear NEuron), que fue la primera aplicación industrial real. En los años siguientes, se redujo la investigación, debido a la falta de modelos de aprendizaje y el estudio de Minsky y Papert sobre las limitaciones del perceptrón; publicaron un libro en el que se ponían de manifiesto las limitaciones de los perceptrones de una capa. Esto hará que se pierda interés en el campo de las redes neuronales hasta la década de los 80, en que el estudio de nuevas arquitecturas de redes y la mayor potencia de los ordenadores permiten el diseño de redes muy eficientes en tareas en las que otros procedimientos de tipo simbólico encuentran dificultades. El desinterés hasta los 80 tuvo lugar a pesar del éxito espectacular de algunas de sus aplicaciones. Por ejemplo, *Logic Theorist* fue uno de los primeros programas y fue desarrollado Allen Newell, Herbert Simon y J.C. Shaw entre 1955 y 1956. Fue capaz de probar 38 de los primeros 52 teoremas del Capítulo 2 del libro *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, e incluso encontró para algunos nuevas y más elegantes demostraciones. Cfr. Crevier, Daniel (1993), *AI: The Tumultuous Search for Artificial Intelligence*, New York, NY: BasicBooks, pp. 44–46; McCorduck, Pamela (2004), *Machines Who Think* (**http://www. pamelamc.com/ html/ machines_who_think.html**) (2nd ed.), Natick, MA: A. K. Peters, Ltd., pp. 161–170; Russell, Stuart J.; Norvig, Peter (2003), *Artificial Intelligence: A Modern Approach* (**http:/ / aima. cs. berkeley.edu/**) (2nd ed.), Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, p. 17. También es el caso de *Mycin*, un sistema experto desarrollado a principios de los años 70 por Edward Shortliffe, en la Universidad de Stanford. Su principal función consistía en el diagnóstico de enfermedades infecciosas de la sangre; además, *Mycin* era capaz de "razonar" el proceso seguido para llegar a estos diagnósticos, y de recetar medicaciones personalizadas a cada paciente (según su estatura, peso, etc.). Resulta interesante aquí observar los problemas legales y éticos que planteó su uso a los expertos. Cfr. Shortliffe, E.H.; Buchanan, B.G. (1975). "A model of inexact reasoning in medicine", *Mathematical Biosciences* 23 (3–4): 351–379; Buchanan, B.G.; Shortliffe, E.H. (1984). *Rule Based Expert Systems: The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project*, Reading, MA: Addison-Wesley. Sin embargo, en los años 80, volvieron a resurgir las RNA gracias al desarrollo de la "red de Hopfield" desarrollada por J. Hopfield en 1982 y en la que se utilizan funciones de energía para entender las redes dinámicas. Cohen y Grossberg desarrollan en el 83 el principio de la memoria direccional. En 1986 Rumulhart, Hunton y Williams redescubren el algoritmo de *back-propagation* (que, como hemos dicho, fue desarrollado en 1974 por Paul Werbor) para el aprendizaje de redes neuronales. Por estas fechas, y gracias a las nuevas tecnologías de fabricación de microchips, comienzan a construirse redes neuronales implementadas en silicio (mucho más rápidas que las de software) y en especial, al algoritmo de aprendizaje de retropropagación ideado por Rumelhart y McLellan en 1986 que fue aplicado en el desarrollo de los perceptrones multicapa. Pero no se produjeron hasta muy recientemente grandes desarrollos ni aplicaciones relevantes. Es a partir del año 2000 cuando se ha producido un salto cualitativo y cuantitativo, debido en gran parte a los grandes avances de la computación y al enfoque de las técnicas desde el punto de vista de la IA. Se producen además competiciones internacionales que premian las aplicaciones. Información sobre estos desarrollos y bibliografía actual: 1)**http://www.kurzweilai.net/how-bio-inspired-deep-learning-keeps-winning-competitions** 2012 Kurzweil AI Interview mit Jürgen Schmidhuber zu den acht Wettbewerben, die sein Deep Learning Team zwischen 2009–2012 gewann. 2) Graves, Alex; and Schmidhuber, Jürgen; "Offline Handwriting Recognition with Multidimensional Recurrent Neural Networks", in Bengio, Yoshua; Schuurmans, Dale; Lafferty, John; Williams, Chris K. I.; and Culotta, Aron (eds.), *Advances in Neural Information Processing Systems* 22 (NIPS'22), December 7th–10th, 2009, Vancouver, BC, Neural Information Processing Systems (NIPS) Foundation, 2009, pp. 545–552. 3) A. Graves, M. Liwicki, S. Fernandez, R. Bertolami, H. Bunke, J. Schmidhuber. "A Novel Connectionist System for Improved Unconstrained Handwriting Recognition". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 31, no. 5, 2009. 4) Bengio, Y. (2009). *Learning Deep Architectures for AI.*. Now Publishers.**http://www.iro.umontreal.ca/~bengioy/papers/ftml_book.pdf.** 5) Schmidhuber, Jürgen; "My First Deep Learning System of 1991 + Deep Learning Timeline 1962-2013", **http://www.idsia.ch/~juergen/firstdeeplearner.html**. 6) Fukushima, K.: "Neocognitron: A self-organizing neural network model for a mechanism of pattern recognition unaffected by shift in position". *Biological Cybernetics*. 36, Nr. 4, 1980, S. 93–202. 7) Y. LeCun, B. Boser, J. S. Denker, D. Henderson, R. E. Howard, W. Hubbard, L. D. Jackel. "Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition". *Neural Computation*, 1(4):541-551, 1989 **http://yann.lecun.com/exdb/publis/pdf/lecun-89e.pdf**. 8) M. Riesenhuber, T. Poggio. "Hierarchical models of object recognition in cortex". *Nature neuroscience*, 1999. **http://riesenhuberlab.neuro.georgetown.edu/docs/publications/nn99.pdf** . 9) D. C. Ciresan, U. Meier, J. Masci, L. M. Gambardella, J. Schmidhuber. "Flexible, High Performance Convolutional Neural Networks for Image Classification". *International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2011, Barcelona)*, 2011. **http://www.idsia.ch/~juergen/ijcai2011.pdf**. 10) D. Ciresan, A. Giusti, L. Gambardella, J. Schmidhuber. "Deep Neural Networks Segment Neuronal Membranes in Electron Microscopy Images". In *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 2012)*, Lake Tahoe, 2012.

describieron el cálculo lógico de las redes neuronales y perfilaron el primer módulo formal de una neurona elemental. Desde un punto de vista más teórico, Claude Shannon, quien inauguraba la Teoría de la Información en 1948, publicó en 1950 el artículo "A Chess-Playing Machine" analizando el problema del juego automático de ajedrez, y en 1953 publicó "Computers and Automata" donde se planteaba como interrogante si podría construirse una máquina que: 1) localice y repare sus propias averías, 2) que se programe a sí misma y 3) que *aprenda*.

La Conferencia de Dartmouth (1956) organizada por John McCarthy, Marvin Minsky, Nathaniel Rochester y Claude Shannon, fundó las bases de esta disciplina bajo el lema: "to proceed on the basis of the conjecture that every aspect of learning or any other feature of intelligence can in principle be so precisely described that a machine can be made to simulate it". Es por tanto desde el principio un programa de investigación multidisciplinar que abarca distintos aspectos de la Lógica, la Matemática, la Computación, la Neurociencia y la Psicología además de la Ingeniería y la Física, aspectos estos últimos que se han reforzado en los últimos años con los desarrollos de las nanotecnologías. Y hoy en día podría ser considerada como una disciplina de la Inteligencia Artificial (IA). Las características fundamentales de las RNA que se han logrado construir hasta el momento son:

1) Aprenden de la experiencia: Las RNA pueden modificar su comportamiento como respuesta a su entorno. Dado un conjunto de entradas (quizá con las salidas deseadas), las RNA se ajustan para producir respuestas consistentes. Una amplia variedad de *algoritmos de entrenamiento* se han desarrollado, cada uno con sus propias ventajas e inconvenientes.

2) Generalizan de ejemplos anteriores a los ejemplos nuevos: una vez que la RNA esté entrenada, la respuesta de la red puede ser, hasta un cierto punto, insensible a pequeñas variaciones en las entradas, lo que las hace idóneas para el reconocimiento de patrones.

3) Abstracción de la esencia de las entradas: Algunas RNA son capaces de abstraer información de un conjunto de entradas. Por ejemplo, en el caso de reconocimiento de patrones, una red puede ser *entrenada* en una secuencia de patrones distorsionados de una

---

http://www.idsia.ch/~juergen/nips2012.pdf 11) D. Ciresan, A. Giusti, L. Gambardella, J. Schmidhuber. "Mitosis Detection in Breast Cancer Histology Images using Deep Neural Networks". MICCAI 2013. **http://www.idsia.ch/~juergen/miccai2013.pdf**. 12) A. Krizhevsky, I. Sutskever, G. E. Hinton. *ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks. NIPS 25*, MIT Press, 2012. **http://www.cs.toronto.edu/~hinton/absps/imagenet.pdf**. 13) M. D. Zeiler, R. Fergus. "Visualizing and Understanding Convolutional Networks". TR arXiv:1311.2901 [cs.CV], 2013. **http://arxiv-web3.library.cornell.edu/abs/1311.2901**. 14) D. C. Ciresan, U. Meier, J. Schmidhuber. "Multi-column Deep Neural Networks for Image Classification". *IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition CVPR 2012* **http://www.idsia.ch/~juergen/cvpr2012.pdf**. 15) D. C. Ciresan, U. Meier, J. Masci, J. Schmidhuber. "Multi-Column Deep Neural Network for Traffic Sign Classification". *Neural Networks, 2012* **http://www.idsia.ch/~juergen/nn2012traffic.pdf**. 16) **http://www.neuronalesnetz.de/**. 17) Stuttgart Universität: : **http://www.ra.cs.uni-tuebingen.de/SNNS/**.

Bibliografía actual: Günter Daniel Rey& Karl F. Wender: Neuronale Netze. *Eine Einführung in die Grundlagen, Anwendungen und Datenauswertung*. Huber, Bern 2008; Helge Ritter& Thomas Martinetz& Klaus Schulten: *Neural Computation and Self-Organizing Maps. An Introduction*. Addison Wesley, Reading MA 1992; Simon Haykin: *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*. 2. edition, international Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ 1999; John Hertz& Anders Krogh& Richard G. Palmer: *Introduction to the Theory of Neural Computation*. Addison-Wesley, Reading MA 1999; Wolfgang Ertel: *Grundkurs Künstliche Intelligenz. Eine praxisorientierte Einführung*. 2. überarbeitete Auflage. Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2009;

Páginas en español con amplia bibliografía y recursos: Universidad Politécnica de Madrid: **http://www.gc.ssr.upm.es/inves/neural/ann2/anntutorial.html**, Universidad de La Coruña: **http://sabia.tic.udc.es/mgestal/cv/RNAtutorial/index.html** letra. Una vez que la red sea correctamente entrenada será capaz de producir un resultado correcto ante una entrada distorsionada, lo que significa que ha sido capaz de aprender algo que nunca había visto[429].

Las RNA están inspiradas desde sus orígenes en la biología, esto significa que están formadas por elementos que se comportan de manera análoga a las neuronas (en las funciones más elementales) y están organizadas de una forma similar a la del cerebro, pero las analogías no son muchas más. Además, las RNA construidas hasta la fecha ni de lejos han podido alcanzar el tamaño y complejidad de un cerebro humano y las capacidades de sus "neuronas" son infinitamente más limitadas que las de sus correspondientes biológicos[430]. Pero en su concepción funcionan igual y las conexiones se inspiran en la *sinapsis*[431] que controla las

---

[429] Además se caracterizan por: 1) *Aprendizaje Adaptativo*: Las RNA aprenden a realizar tareas a partir de un conjunto de datos dados en el proceso de aprendizaje. Capacidad de aprender a realizar tareas basadas en un entrenamiento o en una experiencia inicial. 2) *Auto-organización*: Pueden crear su propia organización o representación de la información recibida. 3) *Operación en tiempo real*: Las operaciones realizadas pueden ser llevadas a cabo por computadores paralelos, o dispositivos de hardware especiales que aprovechan esta capacidad. 4) *Tolerancia a fallos parciales*: La destrucción parcial de una red daña parcialmente el funcionamiento de la misma, pero no la destruye completamente. Esto es debido a la redundancia de la información contenida. La destrucción parcial de una red conduce a una degradación de su estructura; sin embargo, algunas capacidades de la red se pueden retener, incluso sufriendo un gran daño. Esta plasticidad reproduce una característica esencial del cerebro humano. 5) *Fácil inserción* dentro de la tecnología.

[430] Al igual que el cerebro, una RNA se compone de un conjunto masivamente paralelo de unidades de proceso muy simples y es en las conexiones entre estas unidades donde reside la inteligencia de la red. Sin embargo, en términos de escala, un cerebro es muchísimo mayor que cualquier RNA creada hasta la actualidad, y las neuronas artificiales también son más simples que su contrapartida animal. Biológicamente, un cerebro aprende mediante la reorganización de las conexiones sinápticas entre las neuronas que lo componen. De la misma manera, las RNA tienen un gran número de procesadores virtuales interconectados que de forma simplificada simulan la funcionalidad de las neuronas biológicas. En esta simulación, la reorganización de las conexiones sinápticas biológicas se modela mediante un mecanismo de pesos, que son ajustados durante la fase de aprendizaje. En una RNA entrenada, el conjunto de los pesos determina el conocimiento de esa RNA y tiene la propiedad de resolver el problema para el que la RNA ha sido entrenada. Por otra parte, en una RNA, además de los *pesos* y las *conexiones*, cada neurona tiene asociada una función matemática denominada *función de transferencia*. Dicha función genera la señal de salida de la neurona a partir de las señales de entrada. La entrada de la función es la suma de todas las señales de entrada por el peso asociado a la conexión de entrada de la señal. Se calcula que un cerebro humano tiene del orden de más de 10^{11} neuronas, varias veces las estrellas que tiene la Vía Láctea, y cada una tiene del orden de 1000 sinapsis a la entrada y otras 1000 a la salida.

[431] El término *sinapsis* (del griego σύν *syn juntos* ; ἅπτειν *capturar, agarrar fuerte*) designa el mecanismo por el que las células del sistema nervioso (neuronas) se comunican entre sí transmitiendo información y se comunican con otro tipo de células transmitiendo estímulos (órdenes). El concepto y el mecanismo fue inicialmente descrito por el español Santiago Ramón y Cajal (1856-1934), premio Nobel de Medicina y Psicología en 1906, y a quien se considera el padre de la Neurociencia, pero el término fue acuñado en 1897 por el neurofisiólogo británico Charles Scott Sherrington (1857-1952), premio Nobel de Medicina en 1932. El funcionamiento concreto de estos mecanismo no se empiezan a conocer con detalle hasta los años 60; hay que tener en cuenta que, por ejemplo, la *sinapsis química* se produce entre las células a una distancia de 20 a 30 nanómetros y hasta muy recientemente no teníamos ninguna posibilidad de observar y medir efectos en esas magnitudes. Existen básicamente dos tipos de sinapsis: la química y la eléctrica. Una descripción detallada, en la siguiente página de un proyecto financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología español: **http://www.biopsicologia.net/Nivel-3-participacion-plastica-y-funcional/1.1.1.-Sinapsis.html**. Bibliografía: Nicholls JG, Martin AR, Wallace BG y Fuchs PA: *From Neuron to Brain*. 4a ed. Sunderland, Massachusetts: Sinauer Associates, 2001; Kandel ER, Schwartz JH, Jessell TM: *Principios de neurociencia*. Madrid: McGraw-Hill, 2001, 4ta ed.; Karp, Gerald: *Biología celular*. México: McGraw-Hill, 1998; Elias, Lorin J.; Saucier, Deborah M. (2006). *Neuropsychology: Clinical and Experimental Foundations*. Boston: Pearson/Allyn & Bacon. Una completa descripción, con las explicaciones de la terminología correspondiente e imágenes de microscopio electrónico, en la siguiente página de la Universidad de Mainz: **http://www.uni-mainz.de/FB/Medizin/Anatomie/workshop/EM/EMSynapse.html**. Tampoco existe aún una completa descripción anatómica del cerebro ni un conocimiento completo de las distintas regiones

conexiones neuronales biológicas. Las redes neuronales desarrolladas hasta ahora se clasifican según dos criterios: A) Según su arquitectura y B) Según el aprendizaje. La clasificación según su arquitectura[432] tiene un interés desde el punto de vista de la ingeniería. Para nuestros

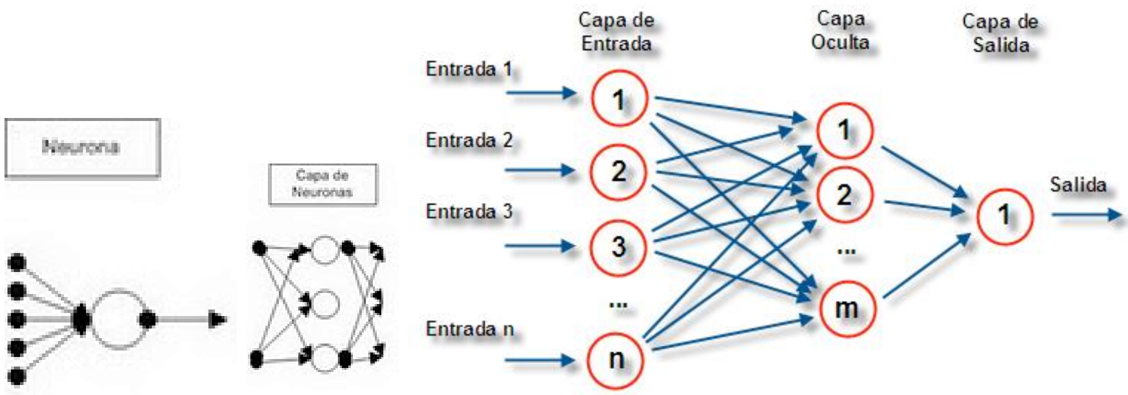
---

cerebrales y su especialización funcional. El atlas del cerebro humano que está sirviendo a los científicos hasta hoy mismo se inició con el trabajo del psiquiatra y neurólogo alemán Korbinian Brodmann, quien realizó el primer mapa de la corteza cerebral en 1909, dividiéndola en unas 50 áreas diferenciadas. En 1925 Constantin Freiherr Von Economo publicaba sus estudios sobre la corteza cerebral, definiendo siete regiones separadas denominadas lóbulos, a las que se le atribuían distintas funciones cerebrales. El problema de estos estudios anatómicos es que siempre se han basado en la técnica histológica por cortes, en la que desaparece la tercera dimensión, el eje Z, que hay que imaginarlo. En Junio de 2013, la revista *Science* publicó los resultados de un equipo de investigación de Jülich, Alemania, que ha desarrollado la reproducción del cerebro en 3D más fidedigna hasta la fecha, que ha desvelado que los cálculos de Brodmann y Von Economo no eran tan precisos como se pensaba. Este logro ha sido posible gracias al trabajo conjunto de científicos del Centro de Investigación Jülich y el Instituto Celile y Oskar Vogt para la Investigación Cerebral de la Universidad Heinrich Heine de Düsseldorf. Cfr. (*BigBrain: An Ultrahigh-Resolution 3D Human Brain Model*, **http://www.sciencemag.org/content/340/6139/1472**, *Science* 21 June 2013:Vol. 340 no. 6139 pp. 1472-1475). Actualmente existen muchos mapas del cerebro humano, pero la novedad que introduce éste en concreto es que permite observarlo desde todos los ángulos posibles y en una altísima resolución. La precisión y exhaustividad de este modelo ha requerido mucha mano de obra. Se han necesitado diez años para terminar de cortar un cerebro humano sano de una mujer de 65 años, en 7.400 secciones de 20 micras de grosor. El cerebro estaba metido en una masa de cera de parafina, y los delicados cortes se fueron realizando con una herramienta llamada microtomo. El siguiente paso fue escanear cada corte generando una imagen digital de alta resolución (13.000 por 11.000 píxeles). Hasta ahora, los modelos más fiables tenían una resolución máxima de un milímetro con lo que se quedaban en el nivel macroanatómico, de lo que se ve a simple vista. Pero este modelo permite acercarse al nivel neuronal, para poder observar la distribución celular del cerebro en 3D. Gracias a esta mejora, se ha descubierto que los límites de determinadas zonas de la corteza cerebral no están donde se pensaba. Esto redefine ya el tradicional mapa del cerebro humano al constatar los científicos que ciertas áreas no empiezan y acaban donde se creía. Esto se explica por la constitución de la corteza cerebral repleta de pliegues, que hace que sea muy complicado delimitar dónde empieza y dónde acaba cada zona cortical. Al unificar todas las imágenes en el ordenador, el sistema informático permite simular una reproducción del cerebro original en 3D, al que se pueden realizar virtualmente todos los cortes posibles que se deseen. El modelo está disponible en internet de manera gratuita. Los autores han decidido ofrecer esta valiosa herramienta a toda la comunidad científica buscando generar sinergias positivas: **https://bigbrain.loris.ca/main.php**. Este proyecto, denominado *Big Brain* forma parte del proyecto más amplio a 10 años llamado *The Human Brain Proyect*, financiado por la UE y del que hablamos un poco más adelante. Se trata de una ambiciosa iniciativa internacional con la intención de reproducir pieza por pieza un cerebro humano en su totalidad sirviéndose de técnicas de supercomputación. El objetivo a largo plazo es esclarecer todas las dudas sobre el funcionamiento del cerebro, para así desarrollar nuevos tratamientos para enfermedades cerebrales y crear nuevas tecnologías de supercomputación basándose en los modelos de nuestra propia inteligencia. En realidad no se trata de un programa con un planteamiento empírico al estilo del *proyecto genoma*; para hacernos una idea de la complejidad del cerebro humano, se estima que un proyecto de este estilo con las actuales técnicas de computación necesitaría varios centenares de años para desarrollar tal mapa cerebral. Por ello se plantea utilizar técnicas de simulación y comparar su funcionamiento con el de los cerebros humanos reales. Cabe mencionar que un 7% del proyecto es español. La página del proyecto: **https://www.humanbrainproject.eu/**.

[432] Una primera clasificación de las redes de neuronas artificiales que se suele hacer es en función del patrón de conexiones que presenta. Así se definen tres tipos básicos de redes: a) Dos tipos de redes de propagación hacia delante o acíclicas en las que todas las señales van desde la capa de entrada hacia la salida sin existir ciclos, ni conexiones entre neuronas de la misma capa de red neuronal y su clasificación: 1) Arquitectura Monocapa. Ejemplos: perceptrón, Adaline. 2) Arquitectura Multicapa. Ejemplos: perceptrón multicapa. Y b) Las redes recurrentes que presentan al menos un ciclo cerrado de activación neuronal. Ejemplos: Elman, Hopfield, máquina de Boltzmann. Respecto de la arquitectura de la redes, las distinciones básicas son: neurona, red unicapa y red multicapa:

propósitos tiene más interés resaltar la clasificación según el tipo de aprendizaje (concepto que sustituye aquí al usual de *programación* en la teoría de la computación). El aprendizaje se basa en el entrenamiento de la red con patrones. El proceso de aprendizaje se basa en que la red ejecute los patrones de forma iterativa hasta que se muestren respuestas satisfactorias. Es decir, los pesos sinápticos se ajustan para dar respuestas óptimas para el conjunto de patrones de entrenamiento[433]. Los modelos supervisados y no supervisados pueden ser aplicados para extraer y cancelar ruido de las señales. Una vez que la red ha sido entrenada y probada puede adaptarse por sí misma a los cambios. Una aproximación basada en redes neuronales artificiales puede aprender los modelos específicos de cada sistema de red y proporcionar aproximaciones aceptables de los sistemas. En los últimos 15 años estos sistemas han encontrado multitud de aplicaciones en muy distintos campos[434]. Las características de las

---



-Las Redes Monocapa: cuentan con una capa de neuronas, que intercambia señales con el exterior y que constituyen a un tiempo la entrada y la salida del sistema. Una de las redes mas representativas de este modelo es la *red de Hopfield*, que ha tenido una gran influencia en el desarrollo posterior de redes neuronales.

-Las Redes Multicapa: están formadas por dos o más capas de neuronas conectadas entre ellas. Dependiendo de cómo sean estas conexiones se puede hacer otra subdivisión: 1) Redes con conexiones hacia delante: Este tipo de redes contienen solo conexiones entre capas hacia delante. Esto implica que una capa no puede tener conexiones a una que reciba la señal antes que ella en la dinámica de la computación. 2) Redes con conexiones hacia atrás: En este tipo de redes pueden existir conexiones de capas hacia atrás y por tanto la información puede regresar a capas anteriores en la dinámica de la red. Las redes consideradas hasta ahora no tienen conexiones entre pesos de la salida de una capa a la entrada de la misma capa o anteriores. Las redes que poseen esta característica son conocidas como *redes recurrentes*. Las redes recurrentes no tienen memoria, es decir, la salida solamente está determinada por las entradas y los pesos. Las capas recurrentes redireccionan previas salidas a entradas. Su salida es determinada por su entrada y sus salidas previas, por lo que se puede asemejar a la memoria a corto plazo de los seres humanos.

[433] Podemos distinguir varios tipos de aprendizaje: 1) *Aprendizaje Supervisado*: la red dispone de los patrones de entrada y de salida que queremos obtener para esa entrada, y en función de ellos se modifican los pesos de las sinapsis para ajustar la entrada a la salida. 2) *Aprendizaje No Supervisado*: consiste en no proporcionar a la red los patrones de salida, sino sólo los de entrada y dejar que la red los clasifique en función de características comunes que encuentre entre ellos. 3) *Aprendizaje Híbrido*: No se proporcionan los patrones objetivo, sino que sólo se dice si la respuesta acierta o falla ante un patrón de entrada. 4) *Aprendizaje Reforzado*: se sitúa a medio camino entre el supervisado y el autoorganizado. En alguno de estos tipos se sitúan las redes neuronales (de distinta arquitectura) más comunes: Perceptrón, Adaline, Perceptrón multicapa, Memorias asociativas, Máquina de Boltzmann, Máquina de Cauchy, Propagación hacia atrás (backpropagation), Redes de Elman, Redes de Hopfield, Red de contrapropagación, Redes de neuronas de base radial, Redes de neuronas de aprendizaje competitivo, Mapas Autoorganizados (RNA) (Redes de Kohonen), Crecimiento dinámico de células, Gas Neuronal Creciente, Redes ART (Adaptative Resonance Theory).

[434] Algunas de las aplicaciones más destacadas son: 1) Reconocimiento de patrones de clasificación: reconocimiento de voz, de caracteres manuscritos,...2) Análisis y reconocimiento de imágenes, formas,...Diagnostico clínico. 3) Análisis de series temporales y predicción: modelos meteorológicos, predicción del comportamiento, predicción de series temporales. 4) Robótica. Una especie de redes neuronales artificiales se ha aplicado en conjunción con los algoritmos genéticos (AG) para crear

RNA las hacen bastante apropiadas para aplicaciones en las que no se dispone a priori de un modelo identificable que pueda ser programado, pero se dispone de un conjunto básico de ejemplos de entrada (previamente clasificados o no). Asimismo, son altamente robustas tanto al ruido como a la disfunción de elementos concretos y son fácilmente paralelizables.

Se ven así las amplias posibilidades que permite esta tecnología, ya al alcance de cualquier programador. Algunos paquetes de software convencional con gran implantación en el mercado, como el paquete estadístico SPSS, incluyen ya opciones para trabajar con redes neuronales. Pero además, cualquier programador puede incluir ya en un programa específico una red neuronal. El SNNS (*Stuttgart Neural Network Simulator*) es un software de simulación para redes neuronales desarrollado en el *Institute for Parallel and Distributed High Performance Systems* de la Universidad de Stuttgart. El objetivo del proyecto SNNS fue la creación de un entorno de simulación eficiente y flexible para la investigación y aplicación de redes neuronales[435]. Las redes neuronales las podemos caracterizar considerando, primero que son un intento de imitar nuestra forma de pensar, y segundo, que por otro lado son un magnífico algoritmo basado en la paralelización masiva, al contrario que los sistemas informáticos habituales que se basan en procesar las cosas en serie. Esa, es también la forma que tiene el ser humano de pensar. Con un paradigma convencional de programación en ingeniería del software, el objetivo del programador es modelar matemáticamente (con distintos grados de formalismo) el problema en cuestión y posteriormente formular una solución (programa) mediante un algoritmo codificado que tenga una serie de propiedades que permitan resolver dicho problema. En contraposición, la aproximación basada en las RNA parte de un conjunto de datos de entrada suficientemente significativo y el objetivo es conseguir que la red aprenda automáticamente las propiedades deseadas. En este sentido, el diseño de la red tiene menos que ver con cuestiones como los flujos de datos y la detección de condiciones, y más que ver con cuestiones tales como la selección del modelo de red, la de las variables a incorporar y el preprocesamiento de la información que formará el conjunto de entrenamiento. Asimismo, el proceso por el que los parámetros de la red se adecuan a la resolución de cada problema no se denomina genéricamente *programación* sino que se suele denominar *entrenamiento neuronal*.

Por ejemplo, supongamos una red que se va a aplicar al diagnóstico de imágenes médicas; durante la fase de entrenamiento el sistema recibe imágenes de tejidos que se sabe son cancerígenos y tejidos que se sabe son sanos, así como las respectivas clasificaciones de dichas imágenes. Si el entrenamiento es el adecuado, una vez concluido, el sistema podrá

---

controladores para robots. La disciplina que trata la evolución de redes neuronales mediante algoritmos genéticos se denomina Robótica Evolutiva. En este tipo de aplicación el genoma del AG lo constituyen los parámetros de la red (topología, algoritmo de aprendizaje, funciones de activación, etc.) y la adecuación de la red viene dada por la adecuación del comportamiento exhibido por el robot controlado (normalmente una simulación de dicho comportamiento). Hay cinco aplicaciones tecnológicas ya muy extendidas: 1. Reconocimiento de textos manuscritos; 2. Reconocimiento del habla; 3. Simulación de centrales de producción de energía; 4. Detección de explosivos; 5. Identificación de blancos de radares.

[435] El simulador consta de dos componentes principales: a) núcleo escrito en C y b) una interfaz gráfica. El núcleo opera con las estructuras de datos de las redes neuronales y realiza todas las operaciones de aprendizaje y prueba. También puede ser utilizado como un programa en C. Permite trabajar con topologías arbitrarias de redes. Adicionalmente, permite que el usuario extienda los programas añadiendo funciones de activación, funciones de salida y funciones de aprendizaje, que se escriben como programas en C y se enlazan con el núcleo del simulador. La interfaz gráfica XGUI (X Graphical User Interface) permite la representación gráfica en 2D y 3D de las redes neuronales y controla el núcleo durante una ejecución. El paquete SNNS se puede obtener en la página de la Universidad de Stuttgart: **http://www.ra.cs.uni-tuebingen.de/SNNS/**. El programa permite crear una red de la complejidad que se quiera, visualizarla en 2D o 3D, entrenar la red y visualizar los errores cometidos por la red.

recibir imágenes de tejidos no clasificados y obtener su clasificación sano/no sano con un buen grado de seguridad. Las variables de entrada pueden ser desde los puntos individuales de cada imagen hasta un vector de características de las mismas que se puedan incorporar al sistema (por ejemplo, procedencia anatómica del tejido de la imagen o la edad del paciente al que se le extrajo la muestra).

Para terminar, en las modernas implementaciones del software de RNA realizadas en los últimos 10 años, y que tantas aplicaciones han tenido en distintos campos como ya hemos reseñado, la aproximación inspirada en la biología ha sido en gran parte abandonada y sustituida por una aproximación más práctica fundamentada en la Estadística y el Procesamiento de Señales; en muchos de estos sistemas las redes neuronales, o partes de una red neuronal (tales como las neuronas artificiales) son componentes de grandes sistemas que combinan tanto elementos adaptativos como no adaptativos. Se trata, no tanto de reproducir el funcionamiento y la arquitectura de los sistemas biológicos como de diseñar sistemas con una aproximación más general orientados a la resolución de problemas concretos, donde lo importante es conseguir las *funcionalidades* que caracterizan a la inteligencia de base biológica. Obsérvese aquí el paralelismo con el enfoque cognitivo kantiano (tal y como nosotros lo hemos descrito) en el sentido de desarrollar una *teoría funcional* de la cognición humana y sin referencias directas al *hardware* biológico neuronal o al *software* (psicología).

Hay que señalar que, en lo que se refiere a las perspectivas, el escenario más probable es que dentro de aproximadamente 15 años estemos hablando de este tema desde un plano totalmente distinto. El programa HBP (*Human Brain Project*) financiado por la Unión Europea para los próximos 10 años con 1500 millones de euros, el programa BI (*Brain Initiative*) financiado por el gobierno americano para los próximos 10 años con 3000 millones de dólares, además de otros programas de consorcios privados[436], como los programas que

---

[436] Por ejemplo, el 10 de Mayo de 2014 se publicó en la revista *Proceedings of the IEEE* (vol. 102, May 2014, pp. 699-716) un artículo del equipo de científicos de la Universidad de Stanford dando cuenta de los resultados del programa *Neurogrid* que desarrolla dicha Universidad desde hace 7 años, dirigido por el Dr. Kwabena Boahen:**http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6805187&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fstamp%2Fstamp.jsp%3Ftp%3D%26arnumber%3D6805187**.Han logrado fabricar una placa informática basándose en el cerebro humano que es 9.000 veces más rápida que la de un ordenador convencional y, además, tiene unos requisitos energéticos 40.000 veces menores. Consiste en 16 chips "nerviosos" que juntos son capaces de simular el rendimiento de un millón de neuronas y miles de millones de conexiones sinápticas. El resultado es una placa que deja atrás a cualquier otra simulación anterior del cerebro con un consumo mínimo: "In this paper, we describe the design of Neurogrid, a neuromorphic system for simulating large-scale neural models in real time. Neuromorphic systems realize the function of biological neural systems by emulating their structure. Designers of such systems face three major design choices: 1) whether to emulate the four neural elements—axonal arbor, synapse, dendritic tree, and soma—with dedicated or shared electronic circuits; 2) whether to implement these electronic circuits in an analog or digital manner; and 3) whether to interconnect arrays of these silicon neurons with a mesh or a tree network. The choices we made were: 1) we emulated all neural elements except the soma with shared electronic circuits; this choice maximized the number of synaptic connections; 2) we realized all electronic circuits except those for axonal arbors in an analog manner; this choice maximized energy efficiency; and 3) we interconnected neural arrays in a tree network; this choice maximized throughput. These three choices made it possible to simulate a million neurons with billions of synaptic connections in real time—for the first time—using 16 Neurocores integrated on a board that consumes three watts". Como explican en el artículo, "desde una perspectiva puramente energética, un cerebro es realmente difícil de igualar. El cerebro humano, con 80.000 veces más neuronas que Neurogrid, consume solo tres veces más energía". Aunque el coste de fabricación del prototipo asciende a los 40000 dólares, calculan que en una producción en masa se reducirían a 400 dólares la unidad. continua. Es en la vertiente médica donde *Neurogrid* parece que puede aportar resultados importantes en el corto plazo, pues es capaz de emular por software gran parte de los procesos cerebrales conocidos. Sobre el papel este dispositivo, evolucionado en una forma algo más compacta, sería ideal para implantar en una extremidad ortopédica gracias a que obtiene un rendimiento incluso superior que

está desarrollando IBM, junto con la probable convergencia y estrategia cooperativa de todos estos programas, va a cambiar previsiblemente muy radicalmente todos los estudios en las ciencias cognitivas, en la neurología y en la computación[437]. Podemos pensar que en un plazo

---

el del cerebro. Conectado a las terminaciones nerviosas, y siempre en teoría, podría transformar en movimiento los impulsos neuronales sin apenas retraso. No obstante, como explican los investigadores, el órgano humano tiene la ventaja de funcionar de un modo "salvajemente paralelo", o lo que es lo mismo, que sus núcleos son capaces de procesar distintas informaciones al mismo tiempo, al contrario que sucede con los sistemas informáticos, que no inician un proceso hasta que no se han concluido otros de los que dependen. Otros proyectos paralelos son el *SyNAPSE Project*, que comentamos un poco más abajo, de IBM y que apuesta por rediseñar los chips para emular la habilidad de las neuronas para establecer diversas conexiones sinápticas, una característica que ayuda al cerebro a solucionar problemas sobre la marcha: **http://www.research.ibm.com/cognitive-computing/neurosynaptic-chips.shtml#fbid=9axPM7dWzZQ**, y el *BrainScales* de la Universidad de Heidelberg, que busca reproducir lo más exactamente posible el comportamiento de las neuronas y sus sinapsis; para ello han desarrollado chip, el HICANN, que simula 512 neuronas con 223 circuitos sinápticos y que se está utilizando, de modo experimental, para medir el efecto de determinados fármacos sobre el cerebro. es un proyecto en el que desde 2011 colaboran 19 grupos de investigación de 10 países europeos: **http://brainscales.kip.uni-heidelberg.de/**.

[437] El programa HBP (*Human Brain Project*) **https://www.humanbrainproject.eu/** es un megaproyecto financiado por la Comisión Europea con 1500 millones de euros y en el que participarán durante diez años más de 130 instituciones de investigación, laboratorios y empresas en todo el mundo, 80 de ellas europeas. La finalidad del proyecto es "tratar de desvelar qué hace que el cerebro humano sea único, los mecanismos básicos que hay detrás del conocimiento y el comportamiento, y también qué pasa cuando falla", señala el neurocientífico Henry Markram, coordinador del proyecto desde la Escuela Politécnica Federal de Lausana (EPFL) **http://www.epfl.ch/**, institución suiza que lidera la iniciativa, basada en parte en un proyecto original de esa escuela, el *Blue Brain Project*. Según Markram, el desarrollo del HBP traerá no solo un conocimiento más profundo del cerebro y de cómo tratar mejor las enfermedades cerebrales. También servirá como un acelerador tecnológico para mejorar los superordenadores y desarrollar sistemas totalmente nuevos inspirados en el funcionamiento y las capacidades del cerebro. El planteamiento de realizar un mapa empírico del cerebro al estilo del *proyecto genoma* se ha descartado por imposible con las actuales tecnologías. "Nosotros vamos a ser muy pragmáticos en el HBP. Sabemos que es imposible mapear experimentalmente el cerebro. Algunos científicos están diciendo que se puede hacer como con el genoma humano, pero no es más que una ilusión", subraya Markram. Según un símil utilizado frecuentemente en neurociencia, el número total de células, incluyendo neuronas, células vasculares y glía en el cerebro humano es mayor que el número de estrellas en la Vía Láctea. El neurocientífico dice que con métodos convencionales, "se necesitarían unos 20.000 experimentos para mapear un solo circuito neuronal y en el cerebro hay unos 90.000 millones de neuronas. Además, para comprender plenamente el funcionamiento de todas las sinapsis y de cómo interactúan con las neuronas en otras partes del neocórtex, tendrían que rastrear 100 billones de conexiones, algo experimentalmente imposible", insiste. Llevaría siglos hacerlo con la tecnología actual e incluso con futuros desarrollos. Entonces, añade, "si no podemos hacer un mapa experimental del cerebro, haremos un modelo predictivo. Vamos a predecir su biología, el número de neuronas, el tipo de neuronas, las conexiones, dónde están localizadas las proteínas... Tenemos que desarrollar una ciencia completamente nueva que se llamará neurociencia predictiva". **https://www.humanbrainproject.eu/discover/the-community/overview** . **http://www.ted.com/talks/henry_markram_supercomputing_the_brain_s_secrets**. Así pues, el gran reto del HBP será simular el funcionamiento del cerebro en sus diferentes capas, desde el genoma y niveles celulares a neuronas, circuitos, regiones y finalmente el cerebro entero, empezando con ratones y luego con humanos. En vez de mapear las estructuras neurales pieza a pieza, se intentarán desentrañar algunos de los principios subyacentes que gobiernan la morfología y la arquitectura del cerebro. Y se utilizarán superordenadores para, con miles de simulaciones estadísticas, predecir la forma en que las neuronas tienden a combinarse. Después se comprobarán los modelos con los datos experimentales y, en teoría, se podrán predecir esas estructuras y utilizarlas para realizar *ingeniería inversa* del cerebro humano. Otro objetivo del programa consiste en reunir y clasificar los millones de datos, artículos científicos y datos clínicos de pacientes en los hospitales dispersos por todo el mundo, en una gran base de datos organizada. Para todo ello será necesario construir supercomputadores que superen ampliamente las prestaciones de los actuales. Varias empresas colaboradoras en el proyecto como IBM, Cray, Intel y Bull están trabajando para conseguir superordenadores 1.000 veces más veloces que los actuales. Estas firmas se han comprometido a construir las primeras máquinas *exaescala* (qué operarán a trillones de operaciones por segundo) hacia el año 2020. Algunas valoraciones, extraídas de la página oficial del proyecto, de varios colaboradores del proyecto, que

sitúan la perspectiva: "The Human Brain is the most complex system that we know of. We would like to develop some kind of 'google' brain where we can zoom in and out, see it from different perspectives and understand how brain structure and function is related. The ultimate aim of the Human Brain Project is to understand the human brain. This is only possible when we understand the structural organization of the human brain" (Prof. Katrin Amunts, Institute of Neuroscience and Medicine, Forschungszentrum Jülich). "The Human Brain Project will be a leader in the creation of new technology for simulation, for visualization and for big data handling in Europe" (Prof. Thomas Lippert, Institute for Advanced Simulation, Jülich Supercomputing Centre, leader of the High Performance Computing subproject). "Collaborate, collaborate, collaborate. This is our opportunity" (Prof. Karlheinz Meier, University of Heidelberg, Co-director of the HBP and co-leader of the Neuromorphic Computing Subproject). Aproximadamente el 7% del proyecto es español. Este proyecto es muy complementario con el BI (*Brain Initiative*) financiado por el gobierno de los Estados Unidos: **http://www.whitehouse.gov/share/brain-initiative** , **http://www.nih.gov/science/brain/**. El 11 de Marzo de 2014 el Presidente Obama propuso doblar la financiación del proyecto de los 100 millones de dólares anuales a los 200 millones, lo que supondría una financiación de 2000 millones de dólares en los próximos 10 años **http://brainfeedback.nih.gov/president-obamas-proposal-to-double-federal-funding-for-the-brain-initiative/**. El programa estaría así financiado por: the US National Institutes of Health (NIH), the National Science Foundation and Defense Advanced Research Projects Agency. El programa tiene inicialmente un enfoque distinto al europeo y con un carácter más empírico. Tomando como modelo el *proyecto genoma*, se propone mapear selectivamente cada neurona y sus actividad en ciertas zonas cerebrales. Las perspectivas son de una iniciativa colaborativa entre ambos proyectos. Recientemente el Presidente Obama nombró responsable para conseguir la coordinación de ambos proyectos al congresista Chaka Fattah. Este ha declarado el 20 de Marzo de 2014 en la revista *Nature* que la coordinación está asegurada, que las primeras reuniones ejecutivas al efecto serán en el otoño de 2014 y que han sido invitados a incorporarse países como Canadá, Australia e Israel, por lo que parece que al final se tratará de un macroprograma cooperativo.
http://www.nature.com/news/brain-mapping-projects-to-join-forces-1.14871
http://www.huffingtonpost.com/rep-chaka-fattah/thinking-ahead-the-future_b_3865818.html
Muy complementarios a estos proyectos son algunos programas desarrollados por grandes corporaciones. El más interesante es el caso de IBM. Esta empresa, que llegó a ser famosa por sus grandes innovaciones (desde el programa FORTAN que revolucionó la investigación científica en Matemáticas e Ingeniería en los años 70, hasta la invención del cajero automático, los discos duros o el diskette), que fue una cantera de premios Nobel en los años 70 y 80 y que pareció desaparecer de la primera línea a finales de los 80 debido a su apuesta por los macroordenadores y el auge espectacular de los ordenadores personales y de Microsoft, ha seguido trabajando con una perspectiva consistente y, de hecho, es una de las empresas que más invierten en investigación; por ejemplo, invierte actualmente en I+D más que Amazon, Google, Microsoft y Apple juntas. Los resultados se evidencian en las patentes registradas: El año pasado certificaron un total de 6.478, cifra que alcanza la suma de las patentes de Accenture, Amazon, Apple, HP, Intel y Oracle. Su programa estrella es la *computación cognitiva*, dirigido por el Dr. Dharmendra Modha desde el año 2006. No existe en su página web ninguna explicación técnica de los principios y el funcionamiento de ese *cognitive computer programming language* que nos permita ver las diferencias con la programación convencional, y ningún miembro del equipo ha publicado en las revistas científicas ninguna comunicación al respecto; sólo está disponible en la página web una descripción genérica, casi de intenciones: "Cognitive computing systems learn and interact naturally with people to extend what either humans or machine could do on their own. They help human experts make better decisions by penetrating the complexity of Big Data". El Dr. John Kelly (Watch Director of IBM Research) da alguna información adicional, también en la web: "John Kelly discuss the computing of the past and the coming cognitive era: Big Data growth is accelerating as more of the world's activity is expressed digitally. Not only is it increasing in volume, but also in speed, variety and uncertainty. Most data now comes in unstructured forms such as video, images, symbols and natural language - a new computing model is needed in order for businesses to process and make sense of it, and enhance and extend the expertise of humans. Rather than being programmed to anticipate every possible answer or action needed to perform a function or set of tasks, cognitive computing systems are trained using artificial intelligence (AI) and machine learning algorithms to sense, predict, infer and, in some ways, think". En la práctica, sólo podemos juzgar por alguno de los productos que ya han presentado al público: 1) El *supercomputer Watson*, cuyo desarrollo ha costado 14 años de trabajo y que se hizo famoso en 2011 en USA por su participación en el programa televisivo *Jeopardy!* al derrotar uno tras otro a todos los concursantes. Una versión mejorada ha sido puesta en 2014 a disposición del público online (previo pago) y la empresa espera que sea un éxito en campos como el diagnóstico médico:
http://www.research.ibm.com/cognitive-computing/watson/index.shtml#fbid=9axPM7dWzZQ, 2) Los *Neurosynaptic chips* Los chips cerebrales representarían uno de los avances más importantes de la

de 15 años muy probablemente, además disponer de un conocimiento minucioso del cerebro, de su arquitectura, funcionamiento y funciones, se comercializará una nueva generación de computadores que dispondrán de habilidades consideradas típicamente humanas: capacidad de aprendizaje, autorregulación, memoria de su historia (¿una forma de autoconciencia?) y posiblemente capacidad de comunicarse inteligentemente, además de una capacidad de procesamiento infinitamente superior a la humana. Todo esto, que incipientemente ya se vislumbra en los sistemas que hemos analizado en este apartado, cambiará radicalmente el plano de discusión sobre la cognición humana y sobre la ciencia, además de abrir un debate filosófico a un nuevo nivel sobre algunas cuestiones sustanciales: la relación hombre-máquina, el carácter y fundamento de la conciencia, y la naturaleza última de la inteligencia y de la misma vida.

7.1.4.-Lógicas multivariantes, Lógica difusa y Teoría de la Posibilidad.

La *fuzzy logic* (o *lógica difusa* o *lógica borrosa*) representa un caso totalmente distinto a todos los anteriores. Mantiene la *implicación material* de la moderna lógica clásica, así como todas las leyes de la lógica clásica incluyendo la LEM. Su punto de partida es una modificación de la teoría de conjuntos que está en la base de la lógica y la matemática standards y que fue planteada por Zadeh (1965 y 1975). Su teoría se puede considerar desde un cierto punto de vista como una generalización de las *lógicas multivariantes* desarrolladas en los años veinte, y que incorporan otros valores de verdad a los tradicionales "verdadero" y "falso" (Lucasievic, 1918, 1920 y 1921), (Kleene, 1935), (Post, 1921), (Reichenbach, 1932), (Gödel, 1932). Desde otro punto de vista, consiste en la formalización de la noción de *vaguedad*. La Lógica clásica de proposiciones es, como vimos, isomorfa al álgebra de Boole de conjuntos y se basa, por tanto, en la relación de *pertenencia*, que es una relación binaria entre los elementos y el conjunto. Implica una definición nítida del conjunto y una definición nítida y exacta de la relación de pertenencia (y de la propiedad conceptual que define el conjunto). Se puede describir en términos funcionales por la *función característica del conjunto*: $1_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$. Lukasievicz (1920), preocupado por los planteamientos de la *Lógicas modales*, que ya hemos discutido, consideró la posibilidad de introducir un nuevo

---

computación cognitiva. IBM los presentó al mundo en 2011 como un sistema capaz de recrear el funcionamiento de las neuronas mediante sofisticados logaritmos y circuitos de silicio, que en este caso simulan la actividad de 256 neuronas. Por primera vez, la compañía mostraba los resultados de un ambicioso proyecto iniciado en 2006, SyNAPSE, consagrado a las investigaciones sobre computación cognitiva, aplicando conocimientos procedentes de la nanociencia, la neurociencia y la supercomputación. También hay una referencia muy escueta en su página web. 3) El más reciente hallazgo de la compañía en esta silenciosa carrera de innovación es la llamada *sangre electrónica*. En realidad, se trata de un fluido de electrolitos cuya misión es refrigerar -al mismo tiempo que nutre de energía- a los ordenadores a través de una red de tubos de silicio que imita el sistema circulatorio humano. Parece que el cerebro humano es también una máquina de alta eficiencia energética y ecológica; se calcula que consume 20 watios diarios y utiliza menos del 2% de la energía en refrigeración; en contraste, nuestros computadores actuales gastan cientos de veces más y consumen el 90-95% en refrigeración. El sistema estaría integrado en un supercomputador del cual, según indican en su página web, dispondrían ya de un prototipo y que, según dicen, sería el primer sistema informático del mundo basado en bioprocesadores. Hemos dejado fuera de nuestra consideración algunos proyectos de investigación que desarrollan algunos laboratorios y que estarían más retrasados en esta primera fase, como son la *computación cuántica* y el *hardware molecular* (el intento de construir ordenadores donde los chips de silicio actuales se sustituyan por moléculas biológicas y sea precisamente la *sinapsis* celular la que establezca la comunicación). Algunas referencias en las siguientes páginas: **http://molchip.unizar.es/res_qubit.html**, **https://www.elec.york.ac.uk/research/projects/Molecular_Software_and_Hardware_for_Programmed Chemical_Synthesis.html**, **http://www.aragoninvestiga.org/tag/chips-moleculares/**, **http://electroiq.com/blog/2002/02/hp-ucla-receive-patent-for-molecular-electronics/**, **http://gcc.ls.fi.upm.es/es/**.

valor ½ a la pertenencia[438], que él interpretaba como "posibilidad", mientras que Kleene (1952), que desarrolló un sistema análogo lo interpretaba como "no se conoce si es cierta o falsa" y Bocvar (1938 y 1943), que también desarrolló otro sistema análogo, como "paradójico o sin sentido". En todos los casos, el cálculo desarrollado hace que varias leyes lógicas de la lógica bivariante dejen de ser tautologías, aproximándose mucho a los resultados de la lógica intuicionista (Trillas, 1980, 77) (Black, 1977, anexo). Aunque esas leyes dejan de ser tautologías, tampoco son antilogías, pasan a ser "posibles". Posteriormente Lukasievicz (1970) desarrolló, solo y en colaboración con Tarski, sistemas multivariantes en los que los valores posibles de verdad son la sucesión $\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., \frac{n}{n-1}, 1\right\}$ y en el que en lugar del "principio del tercero excluido" aparece lo que podríamos llamar el "principio del n-ésimo excluido". Su algebrización fue realizada por Wajsberg (1935). Todos estos sistemas tuvieron pronto algunas aplicaciones en la teoría de circuitos[439]. Emil Post (1921) desarrolló de forma independiente un sistema multivalente que lleva su nombre, con el propósito explícito de perfeccionar esa parte de los *Principia* de Whitehead y Russell. El sistema fue algebrizado en varias etapas y también se desarrollaron aplicaciones a los circuitos no binarios[440] y, de hecho, estos sistemas lógicos se diseñaron con la perspectiva explícita de esas aplicaciones. Puede pensarse en un circuito eléctrico en el cual, en vez de conmutadores que sólo abren y cierran (valores 1 y 0) hay reóstatos que permiten abrir, cerrar o dejar pasar una corriente de una cierta intensidad, y con ello las lámparas intercaladas no estarán únicamente encendidas o apagadas, sino que pueden estar, por ejemplo, a media luz o a un tercio de luz, con lo que teóricamente sería posible tenerlas a una cantidad de luz que sea cualquier fracción de 1, siendo posible una simulación de tales sistemas lógicos. Y es posible también una representación gráfica de los conjuntos análoga a los diagramas de Venn y en la que la pertenencia se representa gráficamente de forma progresiva (Trillas, 1980, 86- 89). Este enfoque aplicado que estaba en el origen de la lógicas multivariantes desde el principio contrasta fuertemente con el origen e inspiración de la lógica intuicionista desarrollada a partir de los prejuicios filosóficos de Brouwer, y que ya hemos analizado. En palabras de Lukasievicz (1920):

> "Si el nuevo sistema de lógica tiene o no importancia práctica, es algo que sólo podrá determinarse cuando se examinen en detalle fenómenos lógicos, y en especial los que se dan en las ciencias deductivas, y cuando las consecuencias de la filosofía indeterminista, que es el sustrato metafísico de la nueva lógica, se comparen con los datos empíricos".

Aunque esa lógica no sería tan nueva. Se remontaría a Aristóteles (*De Interpretatione*, 9) cuando éste analiza la proposición "mañana habrá una batalla naval", y precisa que si en este momento la proposición es cierta, la futura batalla naval sería necesaria y el futuro estaría determinado, lo que sucedería análogamente si la proposición fuera falsa. Sin embargo, no asigna un tercer valor de verdad a este tipo de proposiciones *contingentes de futuro* y por ello otros consideran inadecuado atribuirle la fundación de la lógica trivalente. Con más

---

[438] En su trabajo original de 1916 le asignaba el valor 2, que luego corrigió.

[439] Estudios detallados de estos sistemas en: J. B. Rosser & A. R. Turquett, "Many-valued Logics", Amsterdam: North-Holland 1952. A.A. Zinoviev, "Philosophical Problems of Many-Valued Logics", Dordrecht: Reidel Publishing Company 1963. R. Ackermann, "Introduction to Many-Valued Logics", London: Menthuen 1967. N. Rescher, "Many-Valued Logic", New York: McGraw-Hill 1969. David C. Rine (edit.), "Computer Science and Multiple-Valued Logic", Amsterdam: North-Holland 1977. J. Michael Dunn & George Epstein, " Modern Uses of Multiple-Valued Logic", Boston: Reidel 1977.

[440] P. C. Rosenbloom, "Post algebras I. Postulates and General Theory", *Amer. J. of Maths.*, 64 (1942), 167-188. T. Trakzyc, "Axioms and some properties of Post Algebras", *Coll. Math.*, 10 (1963), 193-209. G. Epstein, "The lattice theory of Post Algebras", *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 95 (1960), 300-317.

fundamento se le puede atribuir a Guillermo de Occam (1298-1349), quien en su obra *Summa Logica* al comentar el citado pasaje de *De Interpretatione* de Aristóteles parece crear un sistema trivalente dando un esbozo de las correspondientes tablas de verdad. Y definitivamente fue N. N. Vasilev (quien fuera profesor de Lobachewsky en Kazan) quien en 1909 desarrolló mínimamente el primer sistema conocido con tal nombre; su idea, paralela a la de Lobachewsky de eliminar el postulado de las paralelas de la axiomática de Euclides, consistió en eliminar de la lógica aristotélica el principio del *tercio excluso*. También pueden encontrarse dudas respecto a la *ley de bivalencia* (toda proposición es o bien verdadera o bien falsa) en muchos tratadistas antiguos, o bien defensas rotundas de su validez (lo que presupone la discusión de una duda); por ejemplo, aparece afirmada como un principio fundamental de su didáctica por Crisipo (281-208 a.C) –en muchos tratados de lógica se designan aún hoy como "lógicas no-crisipianas" a aquéllas que niegan el principio de bivalencia-, y terminantemente rechazado por los epicúreos. Para Lukasiewicz la disputa tenía un trasfondo metafísico: los que afirman la validez de ese principio serían decididos deterministas, mientras que sus oponentes tendrían una visión indeterminista del mundo (Trillas, 1980, 74- 76). Pero además de las *proposiciones contingentes de futuro* también las *proposiciones experimentales* presentan con frecuencia un grado de indeterminación de verdad. El tema lo estudió a fondo Reichenbach (1944), quien intentó aplicar la lógica trivalente para una fundamentación de la lógica de la Mecánica Cuántica, planteando la asignación de probabilidades como grados de validez de un enunciado.

Los conjuntos difusos introducidos por Zadeh (1965) aparecen así como una generalización natural de esas lógicas multivariantes, y en donde un subconjunto A de un universo Ω viene definido por la función característica

$$1_A(x):\Omega\to[0,1]$$

$$\forall x\in\Omega,$$

donde:

$$1_A(x)=1 \text{ significa } x\in A$$

$$1_A(x)=0 \text{ significa } x\notin A$$

y el "grado" de pertenencia se difumina sobre el continuo (0,1), en lugar de sobre 3 o n valores. Sin embargo, la perspectiva de una generalización de las lógicas multivariantes no fue el asunto que inspiró a Zadeh para el desarrollo de su teoría. Dos años antes (Zadeh, 1962) de su famoso artículo (1964), ya expresaba con claridad sus motivaciones y perspectiva:

> "There is a fairly wide gap between what might be regarded as 'animate' system theorists and 'inanimate' system theorists at the present time, and it is not at all certain that this gap will be narrowed, much less closed, in the near future. There are some who feel that this gap reflects the fundamental inadequacy of conventional mathematics –the mathematics of precisely defined points, sets, probability measures, etc.- for coping with the analysis of biological systems, and that to deal effectively with such systems, which are generally orders of magnitude more complex that than man-made systems, we need a radically different kind of mathematics, the mathematics of fuzzy or cloudy quantities which are not describable in terms of probability distributions. Indeed, the need for such mathematics is becoming increasingly apparent even in the realm of inanimate system, for in most practical cases the a priori data as well as the criteria by which the performance of a man-made system are judged are far from being precisely specified or having accurately-known probability distributions".

Este punto de vista lo ha expresado Zadeh reiteradamente, aunque salvo en (Zadeh, 1969) en que se refería a los sistemas biológicos, lo ha ido matizando poniéndolo fundamentalmente en relación con los sistemas hombre-máquina y desplazando el énfasis a los problemas del lenguaje subyacentes al proceso cognitivo (Zadeh, 1972, 1973, 1977, 1981, 1984, 1994, 1996, 1997, 1999)[441]. Y para Dubois & Prade (2000, 2), "the necessity of combining granularity and flexibility in the representation of information is the core of Zadeh (1996, 1997, 1999)'s presentation of fuzzy sets as tool for 'computing with words'. This point highlights the importance of the interface between the data emanating from the physical world and the categories human beings are most comfortable with in expressing their perceptions and their knowledge". Estos planteamientos obtuvieron inicialmente una crítica tajante por parte de destacados científicos. Así en 1972 el reputado científico de la ingeniería de control R. E. Kalman (Zadeh & Kalman, 1974) sostenía que "*fuzzification* is a kind of scientific permissiveness; it tends to result in socially appealing slogans unaccompanied by the discipline of hard scientific work and patient observation". Y para Mario Bunge (1983), "as for the claim that fuzzy sets have become respectable for being the subject of a mathematical theory, it is like saying that crime has become honourable since the inception of criminology. Using fuzzy sets in modelling reality is a confession of defeat. The point is not to be able to speak exactly about inexactness but to reduce the later and, if possible to eliminate it altogether. Dirt must be recycled or eliminated, not be shoved under the carpet, let alone exhibited proudly". Y Susan Haack (1979, 1996) indica que "to put it briefly and bluntly, I suspect that fuzzy logic is methodologically extravagant and linguistically incorrect …Resort to fuzzy logic by no means avoids the complexities of regimentation … introduces enormous complexities of its own, … and still requires the imposition of artificial precision"[442]. Pero parece que en nuestro tiempo, como en la época de Euclides, la prueba de fuego de la validez de una teoría matemática radica en su aplicabilidad. Sólo en su primera década se produjeron avances significativos en el desarrollo de una "matemática difusa", especialmente en el campo del Algebra, así como una explosión de aplicaciones tecnológicas en áreas como la ingeniería, el control de sistemas, la robótica y la inteligencia artificial. En el año 2000 Dubois y Prade emprendieron la tarea de editar una serie de manuales, publicados por Kluwer Academic Publishers, que permitieran determinar el estado de desarrollo del tópico. Estimaron en más de 35.000 los trabajos científicos publicados sobre la materia, y en crecimiento exponencial. Además de los desarrollos teóricos de una *matemática difusa,* incluyendo porciones del Análisis y la Topología (Dubois & Prade, 2000, 4-9), lo más espectacular consistía en el grado de desarrollo de sus aplicaciones prácticas en campos tecnológicos y científicos tan diversos como el control de procesos, la ingeniería civil, la detección de fallos, el control de calidad, la robótica, la programación de producción, sistemas ecológicos, medicina y diversas áreas de la economía y las finanzas (Zimmermann, 1999). Y también en investigación básica en algunas ciencias experimentales como, por ejemplo, lenguajes formales fuzzy y autómatas, modelos basados en conjuntos fuzzy en mecánica cuántica y en física matemática, y fuzzy hardware (Patyra & Mlynek, 1996; Patyra, 1996; Kandel & Langholz, 1997). Quizás la crítica más sutil que se produjo (y que aún se produce) es la proveniente de los probabilistas bayesianos. Por ejemplo, para Laviolette y Seaman (1994) "we do not claim that Fuzzy Set

---

441 Así en (Zadeh, 2000, xiv) afirma que: "Linguistic concepts, and specially the concepts of a linguistic variable and linguistic if-then rules have long played a major role in fuzzy logic and its applications. But CW [computing with words] moves much further in this direction by the development of a fuzzy-logic-based machinery for computing and reasoning with a much wider class of propositions drawn from a natural language …In the computational theory of perceptions, the objects of computation are perceptions expressed as propositions in a natural language. The importance of CTP [computational theory of perceptions] derives from the fact that much of human reasoning is perception rather that measurement based …An important concept which is suggested by CW is that of precisiated natural language, PNL. Basically, PNL is a subset of a natural language which is equipped with constraint-oriented semantics and admits of translation into the the generalized constraint language GCL".

442 Citados en (Dubois & Prade, 2000, 3).

Theory is never applicable to real problems, but that Probability Theory provides a complete and uniquely optimal means for solving problems and managing uncertainty".

7.2.- La Teoría de la Probabilidad y sus desarrollos. La noción de *medida* como el núcleo de la teoría moderna de la ciencia y sus sistemas representacionales.

7.2.1.- La Teoría de la Probabilidad y la Teoría de la medida.

La Teoría de la Probabilidad, que como ya vimos Zadeh distingue claramente desde el principio de la Teoría de Conjuntos Borrosos, parece tener en una aproximación superficial una cierta conexión y analogía con esta última teoría. En primer lugar, la aproximación matemática a la *vaguedad* y el manejo de la *incertidumbre* parecen ser objeto común a ambas teorías. En segundo lugar, la función indicadora de un conjunto borroso $1_A : \Omega \to [0,1]$ que es base de la teoría parece tener una clara conexión formal con la función de masa de probabilidad $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ que define el espacio de probabilidad de una variable aleatoria o, incluso con la función de probabilidad P: A → [0,1]. Además algunos autores disienten de la opinión de Zadeh. Así, Bart Kosko mantiene que la Teoría de la Probabilidad se podría considerar una subteoría de la Fuzzy Logic que sólo consideraría ciertos tipos de incertidumbre (Kosko, 1990, 1994). Sin embargo, la diferencia entre ambas teorías es en realidad radical. La Teoría de la Probabilidad en la formulación de Kolmogorov (1933), formulación hoy universalmente aceptada, parte del *espacio muestral* **Ω** sugerido por Von Misses[443] que puede representar los resultados posibles –no necesariamente numéricos- de un experimento. En el caso del lanzamiento de un dado, sería el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}, y en el caso del lanzamiento de dos monedas sería el conjunto de parejas ordenadas {(c,+), (c,c), (+,c), (c,c)}. A continuación considera la familia de todos los *sucesos* que pueden ocurrir en ese experimento (o a los que se puede apostar) y que vienen representados por los subconjuntos A de **Ω** que son estables para las operaciones conjuntistas de "unión", "intersección" y "complementación", lo que asegura la estabilidad para las operaciones lógicas de disyunción, conjunción y negación si los conjuntos se dan por comprehensión a través de una proposición p(x). Esa familia A de sucesos tiene la estructura matemática de Algebra de Boole y coincide con el conjunto potencia de **Ω** si **Ω** es finito. Pero si se admiten conjuntos **Ω** infinitos, entonces debe admitirse la estabilidad para uniones, intersecciones y

[443] La primera formulación matemática axiomatizada de la Teoría de la Probabilidad fue en realidad la de Richard von Mises (1919). Pero además de ser mucho más compleja que la de Kolmogorov se basaba en la noción de *Kollektiv*, considerada de difícil justificación. Kolmogorov aceptó sin embargo parte de la construcción de von Mises, en particular su noción de *espacio muestral*. Para muchos la noción de *Kollektiv* era un concepto casi metafísico innecesario. El mismo von Mises reconocía que no admitía una construcción matemática explícita: "dass man die 'Existenz' von Kollektivs nicht durch eine analytische Konstruktion nachweisen kann, so wie man etwa die Existenz stetiger, nirgends differentierbarer Funktionen nachweist. Wir müssen uns mit der abstrakten logischen Existenz begnügen, die allein darin liegt, dass sich mit den definierten Begriffe widerspruchsfrei operieren lässt" (von Mises, 1919, 60). El problema era que para Von Mises la noción primitiva era la de los *Kollektivs*, mientras que en el sistema de Kolmogorov la noción primitiva era la de probabilidad. En palabras de von Mises (1919) "Erst das Kollektiv, dann die Wahrscheinlichkeit". Las dos propiedades que caracterizan a los *Kollektivs* son, de un lado, la existencia de un límite de las frecuencias relativas en toda sucesión de mediciones (regularidad global) y, de otro lado, la invarianza de ese límite de las frecuencias relativas bajo ciertas operaciones de selección (irregularidad local). Esto le permitía justificar la interpretación frecuencialista de la noción de probabilidad; el *Kollektiv* sería una abstracción representando las propiedades de una serie de repeticiones independientes de un experimento que permitiría formular rigurosamente (a través de una definición) la probabilidad de un atributo como un límite de las frecuencias relativas de tal atributo en la serie. Algunos denominan a su teoría "frecuencialismo estricto" (van Lambalgen, 1996).

complementaciones finitas o infinitas numerables, con lo que se tiene la estructura más general de σ-Algebra, y existen varias, incluyendo el conjunto potencia; y si Ω es infinito no numerable (es decir, si tiene la potencia del continuo) debe elegirse una σ-álgebra estrictamente más pequeña que el conjunto potencia y que excluye los subconjuntos "patológicos", o "conjuntos no medibles"; en el caso de $\mathbb{R}$ se trata de la σ-Algebra boreliana Ɓ. A continuación introduce una función P: Ⱥ → [0, 1] que a cada suceso A de la σ-Algebra le asocia un número P(A) que representaría "la probabilidad de que ocurra", y esta función es de carácter aditivo –como las medidas usuales de área, volumen, peso, etc-: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son disjuntos (sucesos incompatibles). La noción fundamental de *variable aleatoria* pone en relación esa medida con la métrica usual de $\mathbb{R}$, permitiendo la observación empírica de fenómenos numéricos asociados a ese espacio de probabilidad y llevando a una tipología de las leyes aleatorias más frecuentes (*distribuciones* de probabilidad). Y, por fin, la teoría se presenta totalmente axiomatizada. Podemos observar varias características fundamentales:

1º) La teoría asume como base la teoría booleana de conjuntos, donde un conjunto está siempre bien definido y la relación de pertenencia es nítida. Esta es la diferencia fundamental desde un punto de vista conceptual con la *Fuzzy Logic*, que parte de la construcción de una teoría de conjuntos modificada y claramente diferenciada de la tradicional aristotélico-booleana y sobre la que se construyen los demás conceptos de la teoría.

2º) Supone la aceptación de conjuntos transfinitos y, en particular, de la construcción clásica de los números reales. Aunque en su formulación Kolmogorov, que estaba próximo a las tesis intuicionistas como ya vimos, los evitó y renunció a la estructura de σ-álgebra. Pero a partir de ahí, todos los que aceptaron su sistema partieron de su generalización.

3º) Permite utilizar todo el aparato del Análisis clásico.

4º) La *función de probabilidad* "P" es una función aditiva, como la totalidad de las medidas usuales en la Matemática y la Física (peso, volumen, área, longitud, etc). Sin embargo, la *función de posibilidad* "pos" que se considera en la Teoría de la Posibilidad, y que se construye en base a la *Fuzzy Logic*, es una medida de máximo[444].

---

[444] Es decir, si A y B son conjuntos disjuntos (en el sentido difuso) $pos(A \cup B) = \max\{posA, posB\}$, mientras que si A y B son conjuntos disjuntos (en el sentido standard), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Prácticamente todas las medidas que se consideran en la Matemática y la Física tienen la propiedad de aditividad, que se considera casi definitoria de una medida. En este sentido, la Teoría de la Posibilidad sería un caso atípico. La Teoría de la Posibilidad fue planteada por L. A. Zadeh en 1978 (Zadeh, 1978) con posteriores aportaciones (Zadeh, 1981 y 1994). Un resumen completo de su evolución y significado, con amplia bibliografía en (Dubois & Nguyen & Prade, 2000). El objetivo era construir un modelo con restricciones flexibles de elementos *vagos* de información descritos a través de conjuntos difusos. Así se logró "a basic non-classical theory of uncertainty, different from but related to probability theory" (Dubois & Nguyen & Prade, 2000, 343). Se consiguió desarrollar una teoría de distribuciones de posibilidad, una teoría de la *medida de la posibilidad* y de la *necesidad* bajo el *principio de mínima especificación* que subyace al conjunto de la teoría, así como de las nociones de *independencia posibilística y condicionamiento posibilistico* y una teoría de la integración adecuada, basadas en la en las integrales de Choquet y las integrales de Sugeno (Dubois & Nguyen & Prade, 2000, 402-423). Las aplicaciones de esta teoría son hasta la fecha muy limitadas y las críticas por parte de eminentes estadísticos bayesianos son todavía abundantes. Por ejemplo: Stallings (1977, "Fuzzy set theory versus Bayesian statistics", *IEEE trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 216-219); Tribus (1978, "Comments on fuzzy sets, fuzzy algebras an fuzzy statistics", *Proc. IEEE*, 67, 1168-1169); French (1984, "Fuzzy decision analysis: some criticisms", *TIMS Studies in Management Sciences*, 20, 29-44); Cheeseman (1988, "Probabilistic versus fuzzy reasoning", *Uncertainty in Artificial Intelligence 1*, L. Kanal & J. Lemmer (edits.), North Holland, Amsterdam, 85-102); Laviolette & Seaman (1994, "The efficacy of fuzzy representations of uncertainty", *IEEE trans. on Fuzzy Systems*, 2, 4-15); Laviolette et alt. (1995, "Fuzziness vs. probability", *Technometrics*, 37, 249-259). Respuestas a estas

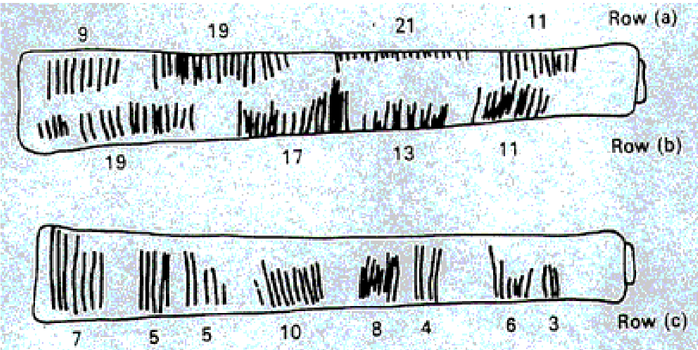
5º) La Teoría de la Probabilidad se puede considerar como un caso particular de la moderna Teoría de la Medida (Billingsley, 1979 y Feller, 1968). La Teoría de la Medida, entendida en sentido amplio, es la teoría de un proceso consustancial a la *actividad* matemática desde la más remota antigüedad. El proceso de determinar la unidad para medir una magnitud, los procedimientos y herramientas (aparatos de medida) para su medición efectiva y la estructura lógica y relacional de esas mediciones de distintas magnitudes relativas a un determinado campo de observación, podría decirse que constituyen el núcleo básico de todo proceso de *matematización* de un campo de la realidad, y se detecta en los periodos más antiguos de la historia humana de los que tenemos algún registro. Podría así afirmarse que la *actividad matemática* es una actividad cognitiva asociada con las capacidades y/o estructuras cognitivas innatas del ser humano. Pero lo que en la actual Matemática se llama *Teoría de la Medida* (Halmos, 1950) es, en cierto sentido más restrictivo pues se refiere a la teoría matemática de ese nombre desarrollada entre 1850 y 1940, aunque en otro sentido es también más general pues esa teoría pretende ser una teoría abstracta de *todas las posibles* concepciones y procedimientos para la medición de una magnitud cuantitativa o cualitativa[445].

---

visiones críticas, en Bezdek (1994, "Fuzziness vs. probability: the n-th. round", *IEEE trans. on Fuzzy Systems*, 2, 1-42) y Zadeh (1995, "Discussion: Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive", *Technometrics*, 37, 271-276) y Dubois & Prade (2000). Un enfoque original de la polémica con una interpretación geométrica en Bart Kosko (1990, "Fuzziness vs. Probability", *Int. J. General Systems*, vol. 17, 211-240). Literatura posterior al año 2000: Lodwick (2003, "Introductory Notes on Possibility Theory and Fuzzy Set Theory, **www-math.ucdenver.edu/~wlodwick/m4-5779/introfuzzysets** ; Dubois & Prade & Smets (2007, "A definition of subjective possibility", *International Journal of Approximate Reasoning*, Volume 48, Issue 2, June 2008, Pages 352–364); B.R. Cobb & P.P. Shenoy (2006, "On the plausibility transformation method for translating belief function models to probability models", *International Journal of Approximate Reasoning*, 41 pp. 314–330); D. Dubois & L. Foulloy & G. Mauris & H. Prade (2004, "Possibility/probability transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities", *Reliable Computing*, 10, pp. 273–297); D. Dubois & H. Prade (2002, "Quantitative possibility theory and its probabilistic connections", P. Grzegorzewski (Ed.) et al., *Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis*, Physica Verlag, Heidelberg, Germany, pp. 3–26); G. Klir & R.M. Smith (2001, "On measuring uncertainty and uncertainty-based information: recent developments", *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 32, pp. 5–34); P. Smets (2002, "Decision making in a context where uncertainty is represented by belief functions"; R.P. Srivastava& T.J. Mock (Eds.), *Belief Functions in Business Decisions*, Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 17–61); B. Kosko & O. Osoba & S. Mitaim (2011, "Bayesian Inference With Adaptative Fuzzy Priors and Likelihood", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 41, nº 5). Las obras más importantes de Zadeh están reunidas y comentadas en: *Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy system: Selected papers by Lotfi A. Zadeh*, G.J. Klir & B. Yuan (edit.), Singapore: World Scientific, 1996. Una excelente revisión de sus aplicaciones con amplia bibliografía en:, G.J. Klir & B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*, Upper Sadler River, NJ: Prentice Hall PTR, 1995.

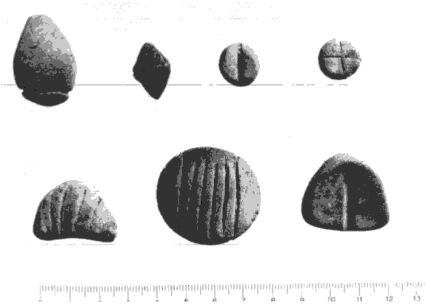
[445] La Teoría de la Medida moderna, concebida como una teoría abstracta y rigurosa de todo tipo de medida, se inició con Weierstrass ("Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale", *Jahresbericht über das Königl. Katholische Gymnasium zu Braunsberg 1848/49*, S. 1-23. Digitalisat und Volltext im Deutschen Textarchiv: **http://www.deutschestextarchiv.de/book/show/weierstrass_integrale_1849**).Todas las obras digitalizadas de Weierstrass son accesibles online en: **http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/autoren/weierstr/**. La teoría fue desarrollada por Riemann (1850), Lebesgue (1902, 1904 y 1910), Stieljes (1895), Vitali (1908), Dehn (1901), Borel (1898 y 1909), Riesz (1907 y 1909), Hausdorff (1927), Fréchet (1915 y 1921), Carathéodory (1914 y 1927), Radon (1913), Nikodym (1930), Banach (1932), Cartan (1940), Sacks (1937), Dieudonné (1948), Bischof (1941), von Neumann (1936) y Menger (1928). Una exposición completa y perfecta de la teoría, con amplia bibliografía, en: Paul R. Halmos (1950, *Measure Theory*, New York: Van Nostrand. Reedición, New York: Springer Verlag, 1974)**.** Una exposición completa de la teoría y su relación con la Teoría de la Probabilidad, que aún hoy no ha sido superada, en: Patrick Billingsley (1979 [1995, 3ª edición], "Probability and Measure", New York: John Wiley and Sons. Anniversary Edition, New York: Wiley 2012). Cfr. también (Feller, 1968 y 1971). Pero el que hizo un planteamiento global del significado de una medida y sobre la construcción de instrumentos de medida, incluyendo medidas de aspectos psicológicos (inaugurando así la psicometría) además de físicos, fue Hermann von Helmholtz (1887, "Zahlen und Messen,

erkenntnistheoretisch betrachtet", en H. von Helmholtz *Schriften zur Erkenntnistheorie*, 70-108, Berlin: Julius Springer 1887 [1921]. Traducción inglesa: "Numbering and Measuring from an epistemological viewpoint", en *H.von Helmholtz Epistemological Writtings*, 70-114, Dordrecht: Reidel 1977. Una traducción anterior: *Counting and Measuring*, Princeton: Van Nostrand, 1930). En este periodo se desarrollaron también de forma espectacular todo tipo de instrumentos de medida: termómetros, barómetros, velocímetros, voltímetros, microscopios, etc. El mismo Helmholtz es directamente responsable de la creación de diversos instrumentos de medida (Patton, 2012). A partir de los años 20 se desarrollaron también diversos aparatos de medida para observar la realidad subatómica, como el microscopio electrónico desarrollado entre 1925 y 1930 por Ernst Ruska y Max Knoll. El debate que surgió en los años 30 en relación con la interpretación de las mediciones de los entes subatómicos y sobre su tipo de existencia, debido a los resultados de la Mecánica Cuántica, así como el propio debate sobre las interpretaciones de la Probabilidad, muestran hasta qué punto el problema de la medida y los aparatos de medida está íntimamente relacionado con la misma concepción del *tipo de existencia* de los objetos observados. Una descripción de este debate en relación con la Mecánica Cuántica, con amplia bibliografía, en (Krips, 2013). Pero la *medición* aparece en todas las culturas de las que tenemos algún registro histórico. Puede considerarse como la manifestación más evidente de que la Matemática es esencialmente una *actividad humana* que refleja una capacidad cognitiva innata que se adecúa y adapta a los patrones representacionales de cada época. Los textos matemáticos más antiguos disponibles son la tablilla de barro Plimpton 322 (c. 1900 a. C.), el papiro de Moscú (c. 1850 a. C.), el papiro de Rhind (c. 1650 a. C.) y los textos védicos Shulba Sutras (c. 800 a. C.). En todos estos textos se menciona el teorema de Pitágoras, que parece ser el más antiguo y extendido desarrollo matemático después de la aritmética básica y la geometría. Mucho antes de los primeros registros escritos, hay dibujos que indican algún conocimiento de matemáticas elementales y de la medida del tiempo basada en las estrellas. Por ejemplo, los paleontólogos han descubierto rocas de ocre en una caverna de Sudáfrica de aproximadamente 70.000 años de antigüedad, que están adornados con hendiduras en forma de patrones geométricos. También se descubrieron artefactos prehistóricos en África y Francia, datados entre el 35.000 y el 20.000 a. C., que sugieren intentos iniciales de cuantificar el tiempo. Cfr. *Old Mathematical Objects*: **http:/ / www. math. buffalo. edu/ mad/ Ancient-Africa/ ishango.html** y *Matemáticas en África central antes de la colonización*: **http:/ / etopia. sintlucas. be/ 3. 14/ Ishango_meeting/ Mathematics_Africa. pdf.** Hay evidencias de que las mujeres inventaron una forma de llevar la cuenta de su ciclo menstrual: de 28 a 30 marcas en un hueso o piedra, seguidas de una marca distintiva. Más aún, los cazadores y pastores empleaban los conceptos de *uno*, *dos* y *muchos*, así como la idea de *ninguno o cero*, cuando hablaban de manadas de animales. El hueso de Ishango, encontrado en las inmediaciones del río Nilo, al noreste del Congo, puede datar de antes del 20.000 a. C. Una interpretación común es que el hueso supone la demostración más antigua conocida de una secuencia de números primos y de la multiplicación por duplicación. Cfr. (Thom, Alexander, Archie Thom, 1988, "The metrology and *geometry of Megalithic Man", pp 132-151 en C.L.N. Ruggles, ed., Records in Stone: Papers in memory of Alexander Thom*. Cambridge Univ. Press).



Fuente: *The Ishango Bone*, is a bone tool handle approximately 20,000 years old.
http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html
http://www.naturalsciences.be/expo/ishango/en/ishango/riddle.html

Este problema fue abordado desde una perspectiva filosófica muy general por Helmholtz (1887) y su trabajo tuvo sin duda una gran influencia si tenemos en cuenta, además de su reconocido prestigio, el hecho de que fueron discípulos suyos Heinrich Rudolf Hertz, Max Planck, Heinrich Kayser, Eugen Goldstein, Wilhelm Wien, Arthur König, Henry Augustus Rowland, A. A. Michelson, Wilhelm Wundt, Fernando Sanford y Michael I. Pupin, además de los contactos directos que mantuvo con destacados científicos de la época (Patton, 2012). En sus planteamientos se observa la estrecha conexión de la noción de medida, y de la construcción de aparatos adecuados, con el problema más general de la determinación del *tipo de existencia* que atribuimos a los objetos observados –que a veces sólo pueden ser observados indirectamente con mediciones de sus efectos-. Esto se planteó claramente en el debate que surgió en los años 30 entre Bohr, Heisenberg, Einstein Podolsky, Rosen y Von Neumann en relación con las mediciones y los entes subatómicos y las interpretaciones de la Mecánica Cuántica; es lo que se conoce como *the measurement problem* (Krips, 2013). En ese debate jugó un papel importante las referencias a la concepción de Kant de la Física; pero se partía de la interpretación de la epistemología kantiana marcadamente psicologicista dominante en la época, como la defendida por Johannes Müller (precisamente mentor de Helmholz). El análisis de las concepciones de Kant respecto a la Física es un tema fundamental que, aunque íntimamente relacionado con nuestra investigación, se sale ampliamente de nuestros objetivos. Pero parece natural plantearlo como el proyecto de investigación que debería seguir a éste que desarrollamos aquí. Y algo muy análogo a lo planteado por *the measurement problem* lo planteó con gran lucidez en su obra "Truth and Probability" Frank Ramsey en relación con las interpretaciones de la función de probabilidad (Ramsey, 1926) [446].



Fuente: The picture given above shows Sumerian clay tokens whose use began about 11,000 years ago **http://www.sumerian.org/tokens.htm**.

Referencias bibliográficas sobre la historia de la medición y tipos de medidas y escalas: Heinz-Dieter Haustein, *Weltchronik des Messens – Universalgeschichte von Maß und Zahl, Geld und Gewicht*, Berlin: de Gruyter, 2001; Heinz-Dieter Haustein, *Quellen der Meßkunst – Zu Maß und Zahl, Geld und Gewicht*, Berlin: de Gruyter, 2004; Helmut Kahnt, Bernd Knorr, *Alte Maße, Münzen und Gewichte: ein Lexikon*. Berlin, Bibliographisches Institut, 1986; Bruno Kisch, *Scales and Weights: A Historical Outline*, New Haven: Yale University Press, 1965; *Babylonian Mathematics*, **http://hvhs.nbed.nb.ca/hodgin/number_systems/babylonian.htm**; Cfr. también:

A History of Measurement and Metrics, **http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/obmetrology.html**; *History of Measurement*, **http://ellerbruch.nmu.edu/CS255/JONIEMI/metricsystem.html**; *Old Babylonian Weights and Measures*, **http://www.cftech.com/BrainBank/OTHERREFERENCE/WEIGHTSandMEASURES/MetricHistory.html**; Department of Weights and Measures: General Information, **http://www.brocktonmass.com/weights/history.html**.

[446] Aunque los planteamientos matemáticos de De Finetti, que inauguraron la Teoría Bayesiana de la Probabilidad, fueron ya planteados desde un punto de vista filosófico con bastante antelación por Ramsey, en realidad esta concepción se puede remontar a Leibniz. Así para Marisol De Mora, "la probabilidad numérica era para Leibniz una noción primordialmente epistemológica, a diferencia de Pascal, Fermat y los demás autores, para quienes el cálculo de las *chances* era fundamentalmente aleatorio. Los grados de probabilidad de que habla Leibniz son grados de certeza. La doctrina de las *chances* no trata para Leibniz de las características físicas de una situación de juego sino de *nuestro conocimiento* de esas situaciones" (De Mora, 1993, 242).

Estos debates sólo reflejan la complejidad intrínseca que han alcanzado las representaciones mentales que ha desarrollado el ser humano para *comprender* y *manipular* la realidad, de forma que una actividad humana primitiva determinada en primera instancia por una capacidad cognitiva innata, cual es la *actividad matemática* que se expresa desde tiempos inmemoriales por medio de la *medición*, ha alcanzado el grado de complejidad que corresponde a la medición de los efectos de los objetos que postulan esas representaciones, objetos que tienen una *forma de existencia* muy distinta a la de los objetos de nuestro entorno cotidiano. Si bien es verdad que los instrumentos de medida fabricados aumentan y expanden nuestros sentidos, esta expansión modifica la misma noción de *sensibilidad*; podemos tener *sensibilidad empírica* de objetos no detectables por la luz, ni por el sonido, ni por el tacto, ni por el gusto. Pero esa determinación sensible de esos objetos está muy ligada a los mismos aparatos de medida creados para medir “sus interacciones y efectos”[447], si bien nada asegura que aunque las interacciones detectadas sean las predichas por la teoría correspondiente, los mismos objetos postulados por esa teoría tengan la estructura que determina esa teoría o, incluso, que tengan una existencia real; podría suceder que esas interacciones se puedan algún día explicar mejor por otros objetos postulados por una teoría más general. Esto explica la profusión de más y más nuevas partículas que predicen las modernas teorías físicas conforme esas teorías se amplían o generalizan.

Hay que señalar que la Teoría de la Probabilidad en la formulación de Kolmogorov no dice nada de la forma de asignación de esa función P y su interpretación[448], simplemente supone que la asignación se ha realizado (mediante la agregación de las masas de probabilidad de los *átomos* o *singeltons*) y estudia la estructura teórica de sus enunciados. En la práctica, parece que el modelo es perfecto cuando se trata de estudiar fenómenos aleatorios que permiten experimentación y repetición, y en donde las probabilidades se asignan observando la evolución de las frecuencias y confirmando la interpretación de Von Mises (1931 y 1936). Para Von Mises la probabilidad era una cualidad intrínseca de los cuerpos, como el peso o la densidad, y determinada por su estructura: “Die Wahrscheinlichkeit, Sechs zu zeigen, ist eine physikalische Eigenschaft eines Würfels, von derselben Art, wie sein Gewicht, seine Wärmedurchlässigkeit, seine elektrische Leitfähigkeit usw” (von Mises, 1936,16). Kolmogorov participaba de esta opinión y resaltaba la importancia de la interpretación de la noción de probabilidad en su modelo. Parece que Hilbert era de la misma opinión siendo para él la teoría de la probabilidad también una rama de la Física, y así es como la presenta al plantear el *6º problema* en el Congreso Matemático de 1900 que tuvo lugar en Paris[449]. De hecho, el *6º problema* lo tituló “6.- Mathematische Behandlung der

---

[447] Este punto de vista lo sostuvo ya con claridad Poincaré.

[448] Una exposición completa y sintética de las distintas interpretaciones de la Teoría de la Probabilidad y con bibliografía esencial es la realizada por Alan Hájek (2012). El tema dista de estar cerrado, como lo demuestra las recientes discusiones sobre la relación de esta teoría con la Teoría de la Información y con la Teoría de la Posibilidad que comentamos más adelante.

[449] Los 23 problemas planteados por Hilbert en el Congreso de 1900 pretendían ser una perspectiva del estado y retos de la disciplina para el siglo XX. En la siguiente página del Department of Mathematics and Computer Science de la Universidad de Clark puede consultarse el estado actual de cada uno de ellos y las investigaciones realizadas al respecto en los últimos 113 años:

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/toc.html. Y también en la página de Wilkipedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems. Aunque todos estaban por resolver en aquel momento y muchos resultaron ser muy influyentes en el desarrollo de la Matemática del siglo XX, muchos autores consideran el listado desenfocado; algunos están planteados de forma demasiado ambigua (por ejemplo, los problemas primero y quinto) como para plantear una respuesta, y Hilbert no fue capaz de ver alguna de las líneas de desarrollo más importantes del siglo XX, como la Topología, la teoría de Grupos o la Teoría de la Medida; tampoco planteó ni vislumbró la evolución de la Lógica Matemática, en cuya evolución él mismo llegaría a ser un pilar fundamental. Y también olvida la Teoría de Funciones de Variable Compleja.

Axiome der Physik", y en donde proponía una completa axiomatización de la Física, siguiendo el modelo de los *Grundlagen*, y fundamentalmente de la Mecánica y de la la Teoría de la Probabilidad:

> "Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sin in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik. Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung angeht, so scheint es mir wünschenswert, dass mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwickelung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speziell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe" (Hilbert, 1900, 272).

Y a continuación cita expresamente los trabajos de Georg Bohlmann. La respuesta no se hizo esperar y en su disertación en Zurich en 1904 Rudolf Laemmel planteó las reglas de la probabilidad total y compuesta como axiomas, y en 1907 en su disertación en Göttingen, dirigida por el propio Hilbert, Ugo Broggi presentó un sistema con sólo dos axiomas: el que establece que el suceso seguro tiene probabilidad 1 y la regla de la probabilidad total; define la probabilidad, siguiendo la tradición, como una razón de cantidades, que son el número de casos para los conjuntos finitos y medidas de Lebesgue para los conjuntos geométricos[450] . Antoni Lomnicki (1923), basándose en algunos desarrollos de la Teoría de la Medida de Carathéodory, propuso en su artículo que la probabilidad debería siempre ser entendida como una densidad sobre un conjunto; este artículo aparece listado en la bibliografía de los *Grundbegriffe* de Kolmogorov, así como el artículo de Sergei Bernstein (1917) donde éste demuestra que la Teoría de la Probabilidad puede ser fundamentada en base a axiomas cualitativos para coeficientes numéricos que midan las *probabilidades de verdad* de proposiciones. En la discusión participaron también fundamentalmente, además de los ya mencionados, Schwarz, Steinhaus, Slutski, Cantelli, Borel, Frechét, Carathéodory, Poincaré y Reichenbach y se definieron dos características claras en la construcción de la teoría: su fundamento *frecuencialista* y el énfasis progresivo en su relación con la teoría abstracta de la medida desarrollada paralelamente en esos años por Lebesgue, Borel, Fréchet, Radon, Nikodym y Carathéodory, principalmente. La obra de Kolmogorov no fue propiamente un trabajo de investigación con aportaciones originales; se trataba de una síntesis de ambas líneas con la particularidad de que eliminaba la complejidad de la construcción de von Mises y conseguía una axiomatización total basada en la teoría de la medida[451]. Y aunque sólo

---

De los problemas de Hilbert claramente formulados, los problemas 3, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19 y 20 tienen una solución aceptada por consenso. Por otro lado, los problemas 1, 2, 5, 9, 15, 21 y 22 tienen soluciones de aceptación parcial, pero existe cierta controversia al respecto de si la solución resuelve realmente el problema. Esto deja sin resolver el 8 (la hipótesis de Riemann) y el 12, ambos dentro de la teoría de números. En esta clasificación los 4, 6 y 16 son demasiado vagos como para que algún día se les pueda declarar resueltos. En el año 2000 Rüdiger Thiele, de la Universidad de Leipzig, descubrió en los manuscritos de Hilbert otro problema (el 24) sobre la teoría de la demostración y que fue tachado y retirado por el mismo Hilbert. El problema 24 retirado también caería en esta última clase. Muchos consideran que los problemas planteados poco antes por Felix Klein y poco después por Hermann Weyl y por John Von Neumann tienen más entidad y están mejor planteados. Sin embargo, la lista de Hilbert fue aceptada inmediatamente por la comunidad matemática de su época. Para explicar esto hay que tener en cuenta que se trataba de una pequeña comunidad de expertos, todos europeos, y que se conocían todos entre sí, y que Hilbert estaba en aquel momento en la cúspide de su prestigio. En relación con el problema 6, que es el que aquí nos ocupa, hay una discusión exhaustiva en el artículo de Leo Corry "Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905)", *Archive for History of Exact Sciences,* 51 (1997).

[450] Fragmentos de estas disertaciones son reproducidas por Schneider (1988): la de Laemmel en (Schneider, 1988, 359-366) y la de Broggi en (Schneider, 1988, 367-377).

[451] Siguiendo sus tendencias cercanas al intuicionismo, fue muy cuidadoso en el tratamiento de los conjuntos infinitos. Así, no consideró la estructura de σ-álgebra. Esto fue corregido por los tratadistas posteriores en sus

dedicaba dos páginas a discutir el significado y la interpretación de la noción de probabilidad, éstos eran un tema fundamental en todos los trabajos en los que se basaba. La discusión sobre la idoneidad de los modelos de von Mises y Kolmogorov duró hasta 1937. En Octubre de ese año la Universidad de Ginebra organizó un simposio sobre el tema, en el marco de las discusiones sobre la fundamentación de la Matemática. Maurice Fréchet ejerció de presidente; asistieron también Cramér, Doeblin, Feller, De Finetti, Heisenberg, Hopf, Lévy, Neyman, Pólya, Steinhaus y Wald, y enviaron comunicaciones Bernstein, Cantelli, Glivenko, Jordan, Kolmogorov, von Mises y Slutsky. Allí Fréchet (1937)[452] expuso sus críticas al sistema de von Mises. Fundamentalmente criticaba su complejidad, en contraste con la axiomatización de Kolmogorov, el carácter innecesario y metafísico –en su opinión- de la noción primitiva de *Kollektiv* en la que se basaba, las sospechas de inconsistencia y, principalmente que a su juicio von Mises confundía consideraciones matemáticas con consideraciones fácticas. Por otra parte, la axiomatización de Kolmogorov tenía en cuenta los desarrollos abstractos de la Teoría de Medida, con la que se conectaba a través de una noción primitiva de probabilidad.

La unanimidad en la Conferencia de Ginebra fue total y a partir de aquí se aceptó el sistema de Kolmogorov como el planteamiento canónico de la Teoría de la Probabilidad, aunque todavía hoy hay quienes piensan que el sistema de Von Mises tenía mucha mayor profundidad intelectual y que debería replantearse (van Lambalgen, 1996)[453]. La discusión continuó hasta los años cincuenta, centrada principalmente en el significado de la noción de probabilidad en Física de Gases, en la Mecánica Estadística y en la Mecánica Cuántica, siendo significativas, además de los trabajos básicos de Einstein (1905, 1906 y 1956) por los que obtuvo el Nobel, las aportaciones de Reichenbach (1949), Keynes (1921), Popper (1938, 1957 y 1959), Ramsey (1926 y 1928) Wiener (1976), Carnap (1950), Church (1940b), Savage (1954) y de muchos de los autores más arriba citados[454]. Pero los manuales de Estadística (ciencia que se desarrolló a partir de los años 20 y que se fundamentó en la Teoría de la

---

manuales, aunque aún hoy en las exposiciones elementales que se usan en muchas Facultades se adopta el enfoque finitista de Kolmogorov, por ejemplo en (Newbold, 2013).

452 Las actas fueron publicadas por Hermann (Paris, 1938) en 8 facsímiles dentro de su serie *Actualités Scientifiques et Industrielles*. Los primeros 7 facsímiles aparecieron en 1938 con los números 734 a 740; el octavo, que era el resumen que realizó De Finetti del coloquio, apareció en 1939 con el número 766. cfr. (Fréchet, 1938), (De Finetti, 1939) y (Feller, 1938).

453 Una discusión detallada de los debates, los personajes y los procesos que llevaron a este punto en (Shafer & Vovk, 2013) y (van Lambalgen, 1996).

454 El debate en realidad no se ha cerrado. En 2002 Caves, Fuchs y Schacks (“Quantum Probabilities as Bayesian Probabilities”, *Phys. Rev.* A 65, 022305) plantearon una interpretación del sentido de la Teoría de la Probabilidad en la Mecánica Cuántica basada en la concepción bayesiana de la Teoría de la Probabilidad; en esta aproximación, la probabilidad cuantifica el grado de creencia en la ocurrencia de un suceso (que no admite repetición) sin una conexión a priori con una frecuencia límite. Y sostienen que las probabilidades para sistemas cuánticos individuales deben de ser comprendidas dentro de esa aproximación bayesiana. La distinción entre probabilidades clásicas (frecuencialistas) y cuánticas no radicaría en la definición, sino en la naturaleza de la información que codifican. Ello les lleva, por ejemplo, a reinterpretar completamente la función de onda hasta convertirla en una abstracción, con lo que se aligeran las paradojas derivadas de la mecánica cuántica. En este sentido, fundamenta matemáticamente la idea de Niels Bohr de que la función de onda es un formalismo estrictamente simbólico útil solo para el cálculo. Este modelo, que se apoya en la estadística bayesiana, sugiere que la función de onda no está vinculada a una realidad objetiva; por el contrario, afirma que debería entenderse como una herramienta que el observador utilizaría para asignar un valor a su percepción acerca de la propiedad que posee el sistema cuántico considerado. Consecuentemente, un mismo suceso cuántico tendría tantas funciones de onda como observadores; el resultado de la combinación de sus observaciones sería una visión coherente de lo observado. Aplicado a la paradoja del “gato de Schrödinger”, el modelo afirma que la función de onda no describe una propiedad objetiva del gato, sino una propiedad subjetiva del observador. El gato o está vivo o está muerto. La superposición es de las expectativas del observador, no de la realidad observada. Esta teoría se denomina “bayesianismo cuántico” o, según su abreviatura en inglés, *QBism*.

Probabilidad) y de Teoría de la Probabilidad presentaban la teoría como cerrada y básicamente enfocada como un Cálculo y prescindiendo de su posible interpretación[455].

7.2.2.- El Bayesianismo, la Mecánica Estadística y el Qbism.

Ha quedado en estos años demostrado que el modelo funciona perfectamente cuando se aplica a campos de la realidad que admiten repetición y/o experimentación y, por tanto, las probabilidades se pueden asignar como límites de frecuencias; de alguna forma, y de acuerdo con la interpretación de Von Mises, esas asignaciones miden una regularidad subyacente que es estructural. Pero también se intenta aplicar el Cálculo a fenómenos de decisión bajo incertidumbre que no admiten repetición; este caso es muy frecuente en Economía, por ejemplo. Bruno de Finnetti, quien estuvo desde el principio en los debates de construcción de la Teoría de la Probabilidad –como vimos, asistió a la Convención de Ginebra de 1937- sostuvo que en estas situaciones la probabilidad asignada a un suceso mediría *el grado de certeza subjetivo* que el observador considera adecuado. Así se inauguró la Teoría Bayesiana de la Probabilidad (De Finetti, 1951 y 1970). El problema lo había planteado ya desde un punto de vista filosófico el filósofo, matemático y economista británico Frank Ramsey (1926). Desde el principio la dificultad estuvo en garantizar la objetividad e intersubjetividad de tales asignaciones. Desarrollada la teoría en los últimos 40 años, tal objetividad se ha encontrado en *el mecanismo* de reasignación de la probabilidades de acuerdo con el incremento de información recibida (basándose en el teorema de Bayes[456]) y, en lo que respecta a la asignación de las probabilidades a priori (*prior probabilities*) en el uso del principio de máxima entropía y de la teoría de los grupos de transformaciones que ya se aplicaban en la Mecánica Estadística (Jaynes, 1968 y 2003).

7.2.3.- La Termodinámica, la Teoría de la Información y la Epistemología Bayesiana. La noción de *entropía.*

---

[455] La obra de Feller (1968) se considera todavía hoy como “la biblia” de la Teoría de la Probabilidad, aunque a partir de los años 60 se han publicado miles de manuales con distintos enfoques y niveles; algunos mejores en muchos aspectos que la obra ya clásica de Feller, como el de Renyi (1970) o Parzen (1960 y 1962). En muchas Facultades, sobre todo de Economía, Sociología, Psicología y Negocios, se utilizan manuales en donde se presenta la Teoría de la Probabilidad y la Estadística Inferencial a un nivel matemático elemental, y también al margen de interpretaciones, simplemente como un Cálculo con sus aplicaciones, por ejemplo (Newbold et alt., 2014) y (Lind et alt., 2013). El manual de Newbold alcanzó su 9ª edición en 2013 y el de Lind su edición 15ª en 2014.

[456] El Teorema de Bayes, como enunciado matemático, se demuestra de forma casi trivial dentro del sistema axiomático de Kolmogorov. Sin embargo su significado excede a su enunciado formal e implica un mecanismo de lógica inductiva y, de hecho, en ese sentido es la base de la llamada “Estadística Bayesiana”. Este significado aparecía ya en primer término en los trabajos del reverendo Bayes, quien lo descubrió y formuló originalmente. Su artículo, titulado *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, fue publicado póstumamente un año después de su fallecimiento, redescubierto por Concordet y sus conclusiones aceptadas por Laplace en 1871, hasta que Boole en sus *Laws of Thought* (1854) lo cuestionó en base a la dificultad de objetivar las asignaciones de probabilidad. El artículo se puede consultar online en: **http://www.stat.ucla.edu/history/essay.pdf** . Una biografía de Bayes en MacTutor de la Universidad de St. Andrews: **http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Bayes.html**. Amplia información sobre el enfoque bayesiano en la página de la *International Sociey for Bayesian Analysis*: **http://bayesian.org/**. Los fundamentos del moderno enfoque bayesiano y amplia bibliografía en (De Finetti, 1951, 1955 y 1970), (Jaynes, 1956, 1957, 1968, 1973, 1979, 1988 y 2003) y (Williamson, 1999, 2002 y 2005a, b y c). Estudios de conjunto con amplia bibliografía en: Alan Hàjek, “Interpretations of Probability”, 2012; **http://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/**, Eagle, 2010; James Joyce, “Bayes' Theorem”, 2008: **http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/bayes-theorem/**. Desde un punto de vista más general, estos desarrollos han dado lugar a lo que recientemente se ha denominado “epistemología bayesiana”: Jeffrey, 1983 y 1992; Fitelson, 2001, y W. Talbott, 2008, “Bayesian Epistemology” **http://plato.stanford.edu/archives/fall2001/entries/epistemologybayesian/**.

La Teoría Bayesiana de la Probabilidad puede considerarse, en parte, una subclase de la Teoría de la Información[457] - la cual sería también el contexto general en el que se podría

[457] La Teoría Matemática de la Información fue iniciada por Claude Shannon en 1948 con su artículo *A Mathematical Theory of Communication*. Parece ser que inicialmente Shannon no fue consciente de la interrelación entre su noción de *entropía* en la Teoría de la Información y la ya entonces usual en Termodinámica. Shannon trabajaba como ingeniero en la Bell Telephone Laboratories y pretendió hacer un modelo para cuantificar la "pérdida de señal" en las comunicaciones a través de una línea telefónica. Parece ser que fue en 1949 en una reunión de trabajo con John Von Neumann cuando se adoptó este nombre por sugerencia de Von Neumann. Según Tribus (1971) describe el diálogo entre Shannon y von Neumann, relatado por Shannon: "My greatest concern was what to call it. I thought of calling it 'information', but the word was overly used, so I decided to call it 'uncertainty'. When I discussed it with John von Neumann, he had a better idea. Von Neumann told me, 'You should call it entropy, for two reasons. In the first place your uncertainty function has been used in statistical mechanics under that name, so it already has a name. In the second place, and more important, nobody knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage". La *entropía de la información* , también llamada *entropía de Shannon* es un concepto mucho más general que el de la entropía en Termodinámica o en Mecánica Estadística, y está presente allí donde hay cantidades desconocidas que pueden ser descritas solamente por medio de distribuciones de probabilidad. Jaynes (1957) estableció que la *entropía termodinámica* puede interpretarse como un caso particular de la *entropía de la información de Shannon,* la cual mide la incertidumbre de una fuente de información. Esta entropía se puede considerar como la cantidad de información promedio que contienen los símbolos usados en la transmisión de una información. Los símbolos con menor probabilidad son los que aportan mayor información; por ejemplo, si se considera como sistema de símbolos a las palabras en un texto, palabras frecuentes como "y", "el" o "que" aportan poca información, mientras que palabras menos frecuentes como "gato" o "llueve" aportan más información. Si de un texto dado borramos un "el", seguramente no afectará a la comprensión y se sobreentenderá, no siendo así si borramos la palabra "gato" del mismo texto original. Cuando todos los símbolos son igualmente probables (distribución de probabilidad equiprobable), todos aportan información relevante y la entropía es máxima. El suponer esto inicialmente se denomina el *principio de máxima entropía.* El concepto de entropía es usado en termodinámica, mecánica estadística y teoría de la información. En todos estos casos la entropía se concibe como una "medida del desorden" y, así, la entropía puede ser considerada como una medida de la incertidumbre y de la información necesarias para, en cualquier proceso, poder acotar, reducir o eliminar la incertidumbre. Sería la cantidad de "ruido" que un sistema libera al transmitir información. Supongamos una variable aleatoria que describe el estado de un suceso tiene un grado de indeterminación inicial igual a 1/k , es decir, existen k estados posibles del suceso y supongamos que todos los estados equiprobables, es decir, la probabilidad de cada estado $p_i=1/k$. Por ejemplo, si un mensaje viene comunicado por ceros y unos $p_i=1/2$ para cada signo (estado). La exigencia de construir una medida aditiva obliga a tomar logaritmos. Así, la probabilidad p_i de un determinado estado para cada signo del mensaje permite definir la cantidad de información de un estado

$c_i = \log_2(k) = \log_2(\frac{1}{1/k}) = \log_2(\frac{1}{p_i}) = \log_2(1) - \log_2(p) = -\log_2(p)$. Y si cada estado tiene una probabilidad p_i no necesariamente igual, la entropía de un signo sería la media ponderada de la cantidad de información: $\mathrm{H} = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2(p_i)$. Y la entropía de un mensaje X es el valor medio ponderado de la cantidad de información de los diversos estados del mensaje: $\mathrm{H}(X) = -\sum p(x_i)\log_2 p(x_i)$, que representa una medida de la incertidumbre media acerca de la cantidad de información del mensaje, y donde H es la letra griega *tau* mayúscula. Si el mensaje estuviera codificado con diez signos 0, 1 …9, entonces se usarían logaritmos en base 10, y en general en base *b* si el lenguaje constara de *b* signos. Esto determina la unidad de la entropía: *bit* si es en base 2, *nat* si es en base e (logaritmos neperianos), y *dit* o *digit* si es en base 10. En el artículo de Shannon aparece como

$$H = -K\sum_{i=1}^{k} p(i)\log p(i),$$

donde log son logaritmos neperianos y K una constante de cambio de unidades.

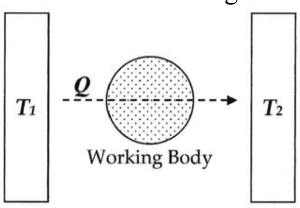
La *entropía de la teoría de la información* está estrechamente relacionada con la *entropía termodinámica,* como podría sospecharse por la coincidencia de la forma de la ecuación. En la termodinámica se estudia un sistema de partículas cuyos estados X (usualmente posición y velocidad) tienen una cierta distribución de probabilidad, pudiendo ocupar varios microestados posibles (equivalentes a los símbolos en la teoría de la información). La entropía termodinámica es igual a la entropía de la teoría de la información de esa concebir la Termodinámica como un caso particular (Martínez, 1992)- y, por otra parte, sería una teoría de inferencia inductiva aplicada a la teoría del conocimiento (Jaynes, 1956 y 1957). Pero las técnicas que ha desarrollado se aplican con éxito en campos muy diversos de *decisión bajo incertidumbre*, como son las decisiones de inversión o los software antivirus. Probablemente la razón de su éxito en campos muy diversos es que la Teoría Bayesiana proporciona un marco cuantitativo y lógico para lo que constituye la esencia de todo proceso de investigación: un proceso de integrar, acumular e interpretar información: "investigators assess the current state of knowledge regarding the issue of interest, gather new data to address remaining questions, and then update and refine their understanding to incorporate both new and old data" (Cowles, Kass & O'Hagan, "What is Bayesian Analysis", **http://bayesian.org/Bayes-Explained**). Y de hecho se ha intentado recientemente justificar este punto de vista y los desarrollos realizados en la Estadística Bayesiana como una nueva epistemología, denominada "epistemología bayesiana". En palabras de Talbott (2001): "Bayesian epistemology did not emerge as a philosophical program until the first formal axiomatizations of probability theory in the first half of the 20th century. One important application of Bayesian epistemology has been to the analysis of scientific practice in *Bayesian Confirmation Theory*. In addition, a major branch of statistics, *Bayesian statistics*, is based on Bayesian principles. In psychology, an important branch of learning theory, *Bayesian learning theory*, is also based on Bayesian principles. Finally, the idea of analyzing rational degrees of belief in terms of rational betting behaviour led to the 20th century development of a new kind of decision theory, *Bayesian decision theory*, which is now the dominant theoretical model for the both the descriptive and normative analysis of decisions. The combination of its precise formal apparatus and its novel pragmatic selfdefeat test for justification makes Bayesian epistemology one of the most important developments in epistemology in the 20th century, and one of the most promising avenues for further progress in epistemology in the 21st century". Todas estas teorías, cuyo primer modelo fue la Termodinámica[458], se basan, en última instancia, en la noción de *entropía* del sistema y en un modelo probabilístico.

---

distribución (medida usando el logaritmo neperiano) multiplicada por la constante de Boltzmann k, la cual permite pasar de nats a J/K. Cuando todos los microestados son igualmente probables, la entropía termodinámica toma la forma: k log(N). En un sistema aislado, la interacción entre las partículas tiende a aumentar su dispersión, afectando sus posiciones y sus velocidades, lo que causa que la entropía de la distribución aumente con el tiempo hasta llegar a un cierto máximo (cuando el mismo sistema es lo más homogéneo y desorganizado posible); lo que es denominado segunda ley de la termodinámica. La diferencia entre la cantidad de entropía que tiene un sistema y el máximo que puede llegar a tener se denomina *neguentropía*, y representa la cantidad de organización interna que tiene el sistema. A partir de esta última se puede definir la *energía libre de Gibbs*, la que indica la energía que puede liberar el sistema al aumentar la entropía hasta su máximo y puede ser transformada en trabajo (energía mecánica útil) usando una máquina ideal de Carnot. Cuando un sistema recibe un flujo de calor, las velocidades de las partículas aumentan, lo que dispersa la distribución y hace aumentar la entropía. Así, el flujo de calor produce un flujo de entropía en la misma dirección (Jaynes, 1957). No todo el mundo acepta el enfoque unificador de Jaynes, como explica Balescu (1975), y los manuales actuales de Termodinámica van desde los que presentan la disciplina casi como una ciencia empírica al estilo de los de Carnot o Clausius, los que la presentan a partir de un enfoque abstracto como el iniciado por Carathodory (1909), y los que siguen el enfoque unificador de Jaynes (1957). Un excelente estudio de los distintos enfoques, su génesis e interrelaciones en (Uffink, 2006). Una presentación moderna del tema en (Gray, 2013).

[458] El concepto de *entropía*, y el mismo término, fue acuñado por el físico alemán Rudolf Clausius en 1865. En realidad el concepto lo definió él mismo ya en 1854, definiéndolo como una función termodinámica que denotó S y denominó *Verwandlinginhalt* (contenido de la transformación) y que renombró en 1865 como *Entropie*; mediría una propiedad intrínseca de la materia caracterizada porque su valor se incrementa al crecer la ineficacia de la energía total del sistema. Las conclusiones de Clausius se basaron en el estudio que hizo sobre el trabajo del ingeniero francés Sadi Carnot –algunos sugieren que eligió en su honor la letra S para denotar la función de entropía-, quien en 1824 publicó "La potencia motriz del fuego", una investigación

sobre los principios que regían la transformación de la energía térmica (calor) en energía mecánica (trabajo). El tema llevaba ya casi 2 siglos planteado para los científicos como un problema relacionado con la ingeniería a partir de la construcción de las primeras máquinas de vapor. Se consideraban como ejemplo algunas máquinas de vapor desarrolladas en Inglaterra, como la desarrollada por Thomas Savery en 1698 (**http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Savery**), la máquina de Newcomen de 1712 (**http://en.wikipedia.org/wiki/Newcomen_engine**) y el triciclo desarrollado en 1769 por el francés Nicolas-Joseph Cugnot (**http://en.wikipedia.org/wiki/Steam_tricycle**). Todos estos ingenios tenían el problema de que menos del 10% de la energía invertida se transformaba en energía motriz, el resto se disipaba en calor. En 1803 el matemático Lazare Carnot publico su obra "Principios Fundamentales del Equilibrio y el Movimiento" donde establecía los fundamentos de la eficiencia de una máquina, desarrollaba el concepto de "transformation-energy" como la perdida de energía en calor y fricción, y daba una primera formulación rudimentaria de lo que hoy se denomina la 2ª ley de la termodinámica. Se pueden encontrar antecedentes de esta Ley ya en la *Summa Theologica* de Tomás de Aquino: "I answer that, It is impossible for an effect to be stronger than its cause"(**http://www.newadvent.org/summa/2029.htm#article3**), y que se puede interpretar como "el principio de que la causa tiene que ser más grande que el efecto" (A.C. Lloyd, "The Principle That the Cause Is Greater than Its Effect", *Phronesis*, Vol. 21, No. 2 (1976), pp. 146-156, (**http://www.jstor.org/discover/10.2307/4181986?uid=3737952&uid=2&uid=4&sid=21103671093747**). Lazare Carnot murió en el exilio en 1823, y sus investigaciones fueron continuadas por su hijo Sadi Carnot, y en cuyo trabajo se basó Clausius en su memoria de 1854. Clausius expone su teoría madura en 1856 en la obra *Die mechanische Wärmetheorie* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1856 y 1879; reedición: Adegi Graphics LLC, Port Chester, New York 1999; traducción inglesa: "The Mechanical Theory of Heath", MacMillan, London 1879. Edición digital por Google Books, Universidad de Harvard, 2005, **http://books.google.es/books?id=8LIEAAAAYAAJ&redir_esc=y**). Para Clausius (1854), podemos calcular el cambio de entropía ΔS al pasar la cantidad de calor Q de la temperatura T_1, por medio del "working body" del fluido, a la temperatura T_2 de la siguiente forma: Si denotamos $S = Q/T$, entonces el cambio de entropía, o "equivalence-value" (*Verwandlinginhalt*) en la terminología de Clausius en ese primer trabajo, sería para esa transformación: $\Delta S = S_{final} - S_{inicial} = (\frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1}) = Q(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1})$, razonamiento que ilustraba con el siguiente diagrama de la "máquina de calor" de Sadi Carnot (1824):



En su obra ya citada de 1865, Clausius cambia la terminología y especifica que "I propose to name the quantity S the entropy of the system, after the Greek word [τροπη trope], the transformation. I have deliberately chosen the word entropy to be as similar as possible to the word energy: the two quantities to be named by these words are so closely related in physical significance that a certain similarity in their names appears to be appropriate". La teoría fue posteriormente desarrollada y perfeccionada por Hermann von Helmholtz, Ludwig Boltzmann (1877), el físico americano J. Willard Gibbs (1876), James Clerk Maxwell (1871) y Max Planck (1903), discípulo de Helmholtz. En 1877 Ludwig Boltzmann planteó una formulación alternativa de la función de entropía como $S = k_B \ln \Omega$, o bien $S = k \ln p$, que es la fórmula que está escrita en la lápida de la tumba de Boltzmann en Viena. En la fórmula, $k_B = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann y se obtiene a partir del cociente R/N_0, siendo R la constante universal de los gases y N_0 el número de Avogadro, y expresa la relación entre un estado macroscópico y un estado microscópico. Ω es el número de microestados consistente con un macroestado dado. Boltzmann entendía la entropía como una medida estadística del "desorden", y este concepto fue refinado poco después por Willard Gibbs, convirtiéndose en el pilar de la mecánica estadística. Las leyes básicas de la termodinámica son: La Ley cero. La Ley cero de la termodinámica nos dice que si tenemos dos cuerpos llamados A y B, con diferente temperatura uno de otro, y los ponemos en contacto, en un tiempo determinado t, estos alcanzarán la misma temperatura, es decir, tendrán ambos la misma temperatura. Si luego un tercer cuerpo, que llamaremos C se pone en contacto con A y B, también alcanzará la misma temperatura y, por lo tanto, A, B y C tendrán la misma temperatura mientras estén en contacto. De este principio podemos inducir el de temperatura, la cual es una condición que cada cuerpo tiene y que el hombre ha aprendido a medir mediante sistemas arbitrarios y escalas de referencia (escalas termométricas). La Primera Ley. La Primera ley de la termodinámica se refiere al concepto de energía interna, trabajo y calor. Nos dice que si sobre un sistema con una determinada energía interna, se realiza un trabajo mediante un proceso, la energía interna del sistema variará. A la diferencia de la energía interna del sistema y a la cantidad de trabajo le denominamos calor. El calor es la energía transferida al sistema por medios no mecánicos. Pensemos que nuestro sistema es un recipiente metálico con agua; podemos elevar la temperatura del agua por fricción con una cuchara o por calentamiento directo en un mechero; en el primer caso, estamos haciendo un trabajo sobre el sistema y en el segundo le transmitimos calor. Cabe aclarar que la energía interna de un sistema, el trabajo y el calor no son más que diferentes manifestaciones de energía. Es por eso que la energía no se crea ni se destruye, sino que, durante un proceso solamente se transforma en sus diversas manifestaciones. La Segunda Ley. En términos sencillos dice lo siguiente: No existe un proceso cuyo único resultado sea la absorción de calor de una fuente y la conversión íntegra de este calor en trabajo. Este principio (Principio de Kelvin-Planck) nació del estudio del rendimiento de máquinas y mejoramiento tecnológico de las mismas. El concepto de entropía fue introducido por primera vez, como dijimos, por R. J. Clausius a mediados del siglo XIX, y también formuló un principio para la Segunda ley: “No es posible proceso alguno cuyo único resultado sea la transferencia de calor desde un cuerpo frío a otro más caliente”. En base precisamente a este principio, Clausius introdujo el concepto de entropía, la cual es una medición de la cantidad de restricciones que existen para que un proceso se lleve a cabo y nos determina también la dirección de dicho proceso. La segunda ley de la termodinámica ya fue enunciada por S. Carnot en 1824. Se puede enunciar de muchas formas, pero una sencilla y precisa es la siguiente: “La evolución espontánea de un sistema aislado se traduce siempre en un aumento de su entropía”. La palabra entropía fue utilizada por Clausius en 1850 para calificar el grado de desorden de un sistema. Desde este punto de vista la segunda ley de la termodinámica está diciendo que los sistemas aislados tienden al desorden, a la entropía. Este desorden se concreta en la mayor o menor producción de energía disponible o no disponible, y sobre esta base, también podemos definir la entropía como el índice de la cantidad de energía no disponible en un sistema termodinámico dado en un momento de su evolución. Según esta definición, en termodinámica hay que distinguir entre energía disponible o libre, que puede ser transformada en trabajo y energía no disponible o limitada, que no puede ser transformada en él. Para comprender conceptualmente lo dicho, analicemos el ejemplo de un reloj de arena, que es un sistema cerrado en el que no entra ni sale arena. La cantidad de arena en el reloj es constante; la arena ni se crea ni se destruye en ese reloj.

Esta es la analogía de la primera ley de la termodinámica: no hay creación ni destrucción de la materia-energía. Aunque la cantidad de arena en el reloj es constante, su distribución cualitativa está constantemente cambiando: la cavidad inferior se va llenando, mientras la cavidad superior se vacía. Esta es la analogía de la segunda ley de la termodinámica, en la que la entropía (que es la arena de la cavidad inferior) aumenta constantemente. La arena de la cavidad superior (la menor entropía) es capaz de hacer un trabajo mientras cae, como el agua en la parte superior de una catarata. La arena en la cavidad inferior (alta entropía) ha agotado su capacidad de realizar un trabajo. El reloj de arena no puede darse la vuelta: la energía gastada no puede reciclarse, a menos que se emplee más energía en ese reciclaje que la que será desarrollada por la cantidad reciclada. Se han dado muy distintas formulaciones de esta ley, que evidencian la diversidad de criterios en la exposición de la Teoría Termodinámica. Incluimos a continuación un listado de las formulaciones más importantes, y que son equivalentes Cfr. (Martínez, 1992, 31-32): (1857) Clausius lo enunció diciendo que no puede fluir continuamente calor de un foco frío a otro caliente sin recibir energía del exterior (que puede ser trabajo o calor a otra temperatura). (1870) Kelvin-Planck (1897): no se puede transformar calor en trabajo cíclicamente a partir de un solo depósito térmico. (1877) Boltzmann: el estado macroscópico de un sistema aislado es tanto más probable cuanto mayor número de microestados Ω comprenda, y llamando entropía de un estado a $S=k.\ln\Omega$, el sistema tiende a evolucionar hacia el macroestado con Ω máxima. (1912) Carathéodory: no todos los posibles estados de equilibrio en el entorno de uno dado son alcanzables a través de procesos adiabáticos. (1923) Lewis-Randall: si llamamos ineversibilidad (entropía) a $\Delta S = \Delta U / T$ para un sistema patrón, la irreversibilidad global de todo proceso natural es positiva. La irreversibilidad de un proceso natural (no patrón) se define como el ΔS mínimo necesario para devolver el sistema a sus condiciones iniciales. (1948) Shannon-Jaynes-Tribus: La incertidumbre sobre el estado de un sistema aislado con ruido tiende a un valor máximo con el tiempo. Es decir, $S \rightarrow S_{\max}$ compatible con las ligaduras existentes, siendo $S = -k.\Sigma p_i \ln(p_i)$, donde k es una constante conocida y p_i la probabilidad de los diferentes estados i (cuánticos) accesibles bajo esas condiciones (las cuales pueden ser muy difíciles de calcular, pero ese es otro problema). (1960) Callen: existe una función homogénea de primer grado de las variables conservativas y aditivas de un sistema, $S=S(U,V, n_i)$, que es máxima en el estado de equilibrio al que tienden naturalmente los sistemas al liberar sus restricciones. (1965) Hatsopoulos-Keenan: la capacidad de realización de trabajo útil de una sustancia aislada decrece, o permanece constante, con el tiempo. (1980) Woods: en la evolución adiabática entre dos estados con el mismo volumen y la misma energía mecánica el sistema sólo puede recibir trabajo, no dar. La noción de entropía, y muy en particular la segunda ley, ha dado lugar a multitud de especulaciones filosóficas como, por ejemplo, la predicción de la extinción del universo por enfriamiento. Al igual que sucedía con las especulaciones basadas en los teoremas de Gödel, es difícil encontrar un mínimo

7.2.4.- IP theory (*information processing epistemology*).

Sin llegar a integrarse en la concepción bayesiana, el propio enfoque unificador de la Teoría de la Información, que hemos descrito en las notas anteriores, ha dado lugar en los últimos años a una concepción epistemológica que se conoce con el nombre de *information processing epistemology* (epistemología del procesamiento de la información) y que enfoca el proceso cognitivo humano como un proceso progresivo de tratamiento de la información disponible, usando medios lógicos y las habilidades cognitivas humanas –que tendrían una base psicológica y neurológica- tales como la *analogía* y la *intuición*, estableciendo un paralelismo entre el comportamiento de la mente humana y el de un computador (Ashcraft, 1994), (Myers, 2014), (Miller, 2011)[459]. Esta teoría ha resucitado el debate que surgió en

rigor científico en tales planteamientos. La teoría termodinámica sólo tiene validez en el contexto de la definición precisa de un sistema termodinámico. Y eso supone una fuerte reducción conceptual. Como señala Isidoro Martínez (1992, 24), "Cuanto más se profundiza en el análisis de los sistemas termodinámicos más detalles se descubren y más complejo aparece ante el observador. Para solventar esta complejidad intrínseca que no tiene límites (aún conociendo la posición y velocidad de todas las moléculas quedarían sin especificar un sin fin de grados de libertad internos) y poder abordar el problema, el observador renuncia a considerar detalles de escala mucho menor que la de su interés, lo cual se establece matemáticamente aceptando una incertidumbre máxima en la descripción del estado de los sistemas infinitesimales de escala menor que la suya. Se puede así resumir el método termodinámico de la manera siguiente: la Naturaleza se presenta en general muy complicada para el observador, excepto en un estado trivial (llamado de equilibrio) que queda determinado por unos pocos parámetros (para los sistemas compresibles por la energía interna U, el volumen V, y las cantidades de sustancia n_i), tal que su distribución (p.e., u_k y n_i, en cada V_k) sea la de máxima incertidumbre. Pero los sistemas (naturales o artificiales) de interés práctico no suelen estar en equilibrio; ¿cómo estudiar entonces un mundo tan complicado con un modelo tan simplificado? La solución es que siempre se podrá dividir el sistema en subsistemas lo suficientemente pequeños como para que éstos puedan considerarse en estado de equilibrio por lo que al observador respecta". Es decir, el análisis está muy determinado por el observador, por su elección de las escalas que separan los procesos macroscópicos de los microscópicos y por su selección de las variables relevantes. En realidad existe solamente un estado real del sistema, y la entropía no es una función de ese estado; es una función del estado real del sistema sólo a través de la descripción de un modelo macroscópico *subjetivamente escogido*. Boltzmann introdujo la teoría de la probabilidad en el modelo como medida de estados microscópicos que no podemos medir con exactitud, introduciendo el punto de vista de la Mecánica Estadística.

Los trabajos de Jaynes (1957) demostraron que la Teoría Termodinámica se puede entender como una aplicación particular de la más general teoría de la información (que comentamos en otra nota). De forma general, se puede definir la función de entropía de un sistema como $S = -k \sum p_i . \ln p_i$, siendo k una constante de cambio de unidades que en Informática suele elegirse k=l/ln2 bit y en Termodinámica $k=1{,}38.10^{-23}$ J/K, y p_i las probabilidades de los estados. Cuando del estado de un sistema no se conozcan más que algunos datos y exista incertidumbre sobre otros grados de libertad, la única elección plausible es la de mínimo sesgo: adjudicar la incertidumbre máxima (máxima entropía) al estado del sistema, compatible con los datos disponibles. Y a esto es lo que se llama el *principio de máxima entropía* y que ha dado lugar a la nota. Puesto que las probabilidades son multiplicativas (si son independientes), se utiliza la función logaritmo para convertir S en una medida aditiva. El concepto se importó directamente en la Mecánica Cuántica por John Von Neumann (1927) como $S = -k_B . Tr(\rho . \ln \rho)$, donde ρ es la *matriz de densidad* de un sistema cuántico y Tr es la traza de la matriz resultante. Se produce así, de hecho, una unificación conceptual entre distintas teorías científicas de campos muy diversos, lo cual, junto a esa dependencia del punto de vista del observador que mencionábamos más arriba, es una conclusión metodológica relevante para nuestra discusión. Y esta unificación está muy relacionada con el enfoque bayesiano de la Teoría de la Probabilidad (Jaynes, 1988). Cfr. (Martínez, 1992), (Moran & Shapiro, 1988), (Prigogine, 1987), (Tribus, 1961), (Jaynes, 1956, 1957, 1968, 1988 y 2003), (Uffink, 2006).

[459] La *information processing theory* (IP theory) surge en los Estados Unidos en torno a los años 90 del siglo XX como una aproximación al estudio del desarrollo cognitivo dentro de la tradición experimental de la psicología americana, sosteniendo la tesis de que el desarrollo mental de un individuo debe considerarse en términos de un proceso de maduración que va modificando los componentes básicos iniciales de la mente infantil en función de la información recibida y de su procesamiento. La teoría se basa en la idea fundamental de que los humanos procesan la información recibida y, como consecuencia modifican las propias estructuras

mentales que perciben la información, más allá de un comportamiento que meramente respondiera a los estímulos. Desde esta perspectiva, consideran que la mente es como un computador que analiza la información obtenida del entorno y, según el *standard information-processing model* del desarrollo mental, la maquinaria mental incluiría: 1) los mecanismos para obtener información, 2) una memoria activa para manipular esa información, 3) una memoria de largo plazo que salva esa información para poder ser utilizada en el futuro. En base a ello intenta explicar cómo va madurando el cerebro de un niño y avanzando en su habilidad para procesar y responder a la información que obtiene a través de sus sentidos. Esta teoría pone el énfasis en un patrón de desarrollo continuo, en contraste con las teorías del desarrollo cognitivo que, como la de Jean Piaget, consideran que el desarrollo evoluciona por estados o niveles. Los procesos cognitivos incluirían como elementos *funcionales* básicos (compárese con nuestra descripción del proceso cognitivo kantiano) la percepción, reconocimiento, imaginación, pensamiento, juicio, razonamiento, resolución de problemas, conceptualización y planificación, entre otros. Y dichos procesos cognitivos emergerían desde el lenguaje humano a través de la imaginación y los símbolos. En el análisis se enfatiza el paralelismo con un computador: "Another aspect of this theory is that it is explicitly analogous to a computer's processor. The basic IP model has three components: sensory register (SR), short-term memory (STM) or working memory, and long-term memory (LTM). The corresponding components of the computer are input devices or registers, the CPU, and hard drive storage, respectively. This metaphor is superficially valid, but as it is taken to its limits, the mechanical comparison breaks down. However, knowing that this model is a cognitive processing model and knowing that the model is based on an explicit metaphor with a computer is helpful in understanding IP theory" (Orey, 2014).

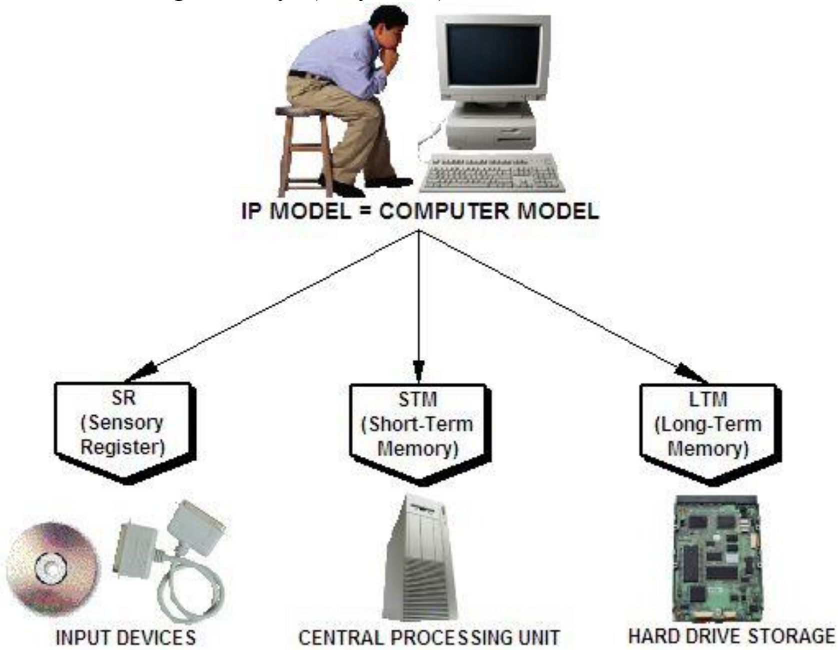


Figure 1. *The Inspiration web above shows how Information Processing can be likened to the model of a computer. The Sensory Register would include input devices like CDs. Short Term Memory includes the Central Processing Unit. Long Term Memory would be viewed as the hard drive or storage. By Tiffany Davis, Meghann Hummel, and Kay Sauers (2006).*

(Fuente: University of Georgia: **http://epltt.coe.uga.edu/index.php?title=Information_processing**).

Esta teoría ve a los seres humanos como máquinas que obtienen información *activamente*, la procesan y la acumulan, modificando según la información recibida su propio mecanismo cognitivo. El contexto social y sus influencias son, en general, ignorados, poniendo el foco en los procesos sistémicos internos (Miller, 2011). La Naturaleza proveería el *hardware*, como sistema de procesamiento neurológico pre-programado para atender a estímulos específicos y estructurado como una máquina de procesamiento económica y eficiente. La *IP theory* combina procesos de desarrollo cuantitativos y cualitativos. Los desarrollos cualitativos ocurrirían a través de la emergencia de nuevas estrategias a partir de la información procesada, del desarrollo de habilidades representacionales (tales como la utilización del lenguaje para representar conceptos), o de la obtención de reglas para resolver problemas. El incremento de nuestro conocimiento base, la habilidad para recordar más items en la memoria activa o el incremento de la capacidad de asociación entre procesos cognitivos asociados, serían ejemplos de cambios cuantitativos. Los componentes cuantitativos y cualitativos interactúan frecuentemente para desarrollar nuevas y más eficaces estrategias cognitivas dentro del sistema de procesamiento (Miller, 2011). Cfr. (Johnson-Laird, 1988), (Pavio, 1986), (Ashcraft, 1994), (Myers, 2014), (Miller, 2011), (Orey, 2014). También véase Huitt, W. (2003): *The information processing* relación con la teoría cognitiva kantiana entre *Nature* y *Nurture*, aunque ahora disponemos de infinitas posibilidades más para separar y medir ambas influencias. Hoy están identificados los genes que condicionan determinadas habilidades y ciertas patologías, existen estudios empíricos del grado de determinación de la herencia en ciertas características, y disponemos de un conocimiento del cerebro que permiten fijar las zonas cerebrales que regulan algunas actividades, así como teorías más o menos contrastadas del funcionamiento del cerebro en esas zonas[460]. Las discusiones sobre el posible *innatismo* en la teoría del conocimiento de Kant, y nuestra interpretación al respecto, las hemos desarrollado en la Parte-I de este trabajo.

7.3.- ¿Qué es una *explicación científica del mundo*? Ejemplo de una pseudociencia: la Teoría de las Supercuerdas. Conclusiones.

De nuestro excurso por la Teoría de la Probabilidad, hasta llegar a la Teoría de la Información y al Análisis Bayesiano, podemos extraer cuatro importantes conclusiones para nuestros propósitos:

1) En nuestro análisis de los *Elementa* podíamos especular acerca de los debates que previsiblemente estuvieron detrás de esa gigantesca construcción intelectual. En nuestro estudio de los *Grundlagen* disponíamos además de las numerosas manifestaciones explícitas de Hilbert sobre sus propósitos, sobre los objetivos de su construcción y, además, disponíamos de las numerosas obras de su época que dibujaban bien el contexto intelectual en la que surgió esta obra. Pero en relación con la Teoría de la Probabilidad podemos estudiar los detalles de la evolución de la teoría a través de los escritos del grupo de científicos que la pergeñaron, escuchar sus debates en tiempo real, sus reuniones, sus acuerdos y desacuerdos, en definitiva, la génesis detallada de la teoría hasta llegar al sistema axiomático de

---

approach to cognition. Educational Psychology Interactive. Valdosta, GA: Valdosta State University: **http://www.edpsycinteractive.org/topics/cognition/infoproc.html.** Una aplicación del uso de gráficos para el aprendizaje y una discusión sobre el conocimiento visual en Lloyd P. Rieber (2000), *Psychological Foundations of Instructional Graphics*: **http://www.nowhereroad.com/cgl/chapter4/**. Este tema del conocimiento visual será objeto de un detenido análisis en las próximas páginas.

[460] El origen de la distinción entre *Nature* (en el sentido de *innatismo* o *nativismo*) y *Nurture* (en el sentido de *empirismo* o *behaviorismo*) se suele establecer en Sir Francis Galton (1822-1911), quien acuñó la expresión *nature and nurture*, aunque la contraposición ya aparecía, por ejemplo, en Shakespeare (*La Tempestad*, 4.1). El punto de vista de que el comportamiento humano está determinado totalmente o casi totalmente por el entorno fue denominado por John Locke (1632-1704) "tabula rasa". En términos modernos la dualidad se puede expresar como *determinismo genético* vs *ambientalismo* o *behaviorismo*. Durante el siglo XX fueron dos tendencias enfrentadas, pero hoy parece existir consenso en que tanto los genes como el ambiente tienen una influencia interactiva. El problema reside en medirla en cada caso. Y se han multiplicado en los últimos 10 años los estudios concretos para determinar de forma cuantitativa la influencia relativa de ambos factores y su interrelación. Cfr.: Esposito, E. A.& Grigorenko, E.L., & Sternberg, R. J. (2011), "The Nature-Nurture Issue (an Illustration Using Behaviour-Genetic Research on Cognitive Development)". In Alan Slater, & Gavin Bremner (eds.), *An Introduction to Developmental Psychology*: Second Edition, BPS Blackwell; Ceci, Stephen J.& Williams, Wendy M., eds. (1999). *The Nature–nurture debate: the essential readings*. Malden (MA): Blackwell Publishing; Coll, Cynthia Garcia& Bearer, Elaine L.& Lerner, Richard M., eds. (2004). *Nature and Nurture: The Complex Interplay of Genetic and Environmental Influences on Human Behavior and Development*. Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum; Goldhaber, Dale. *The Nature-Nurture Debates: Bridging the Gap* . New York: Cambridge University Press 2012; Elman, J. L.& Bates, E. A., Karmiloff-Smith, A.& Johnson, M. H.& Parisi, D. & Plunkett, K. (1996) *Rethinking Innateness: Connectionism in a Developmental Framework*. Cambridge, MA: MIT Press. Una exposición muy sintética de ambos planteamientos y con una amplia y selecta bibliografía en: Steven Pinker, "Why nature & nurture won't go away", *Dædalus Fall* 2004, American Academy of Arts & Sciences. Accesible online: **http://pinker.wjh.harvard.edu/articles/papers/nature_nurture.pdf**. Hemos visto en la Parte-I que el problema estaba ya planteado mucho antes de que Galton lo formulara, por ejemplo en la obra de Tetens, y que Kant lo abordó. En la Parte-I hemos analizado detalladamente esa problemática en Kant.

Kolmogorov. Y también la evolución posterior de la problemática, hasta llegar a la Teoría de la Información y al Análisis Bayesiano, nos permite juzgar las limitaciones de un modelo matemático concreto y el proceso de su superación. En el estudio que hemos realizado podemos encontrar lo que sería la esencia de la Matemática: una *actividad* orientada a la resolución de problemas de un determinado campo de las ciencias empíricas que opera en una primera fase a través de la *matematización* del problema, determinando variable medibles relevantes, construyendo conceptos adecuados para la comprensión de esas variables y determinando sus interrelaciones y leyes a través de un método mixto entre la *inferencia inductiva*, propio de las ciencias experimentales, y la pura deducción lógica. En una segunda fase, el análisis lógico de la teoría construida lleva a una axiomatización de la teoría y a la demostración de sus resultados por métodos formales; análisis en el que la conexión de la teoría con sus objetos iniciales se desdibuja y en donde la relación con el lenguaje en el que se expresa la teoría pasa a un primer plano. En una tercera fase la teoría misma así formalizada pasa a ser objeto de estudio, estableciendo sus conexiones con otras teorías matemáticas y permitiendo, eventualmente, una teoría más general de acuerdo con la tensión *unificadora* que caracteriza a la ciencia moderna.

2) Esta tensión *unificadora*[461] queda patente en el proceso, descrito más arriba, que lleva a desarrollar la Termodinámica dentro de la Teoría de la Información, y ésta y la Teoría

---

[461] Por ejemplo, en la Física moderna la búsqueda de una teoría que unificara las cuatro fuerzas fundamentales: la interacción débil (nuclear débil), la interacción atómica (nuclear fuerte), la electromagnética y la gravitacional, se ha convertido en la búsqueda del Santo Grial. Durante algún tiempo pareció que la solución se encontraría dentro de la reciente *teoría de las supercuerdas*, pero la evolución de esa teoría cada vez hacia mayores niveles de dispersión y complejidad parece que ha hecho disipar esa esperanza. Además, el hecho de que esta teoría no sea *falsable* ni *predictiva* ha hecho que muchos la califiquen como una pseudociencia. Parece que la tendencia a la unificación de las teorías científicas está ligada precisamente a la *simplicidad* conceptual. La *teoría de las supercuerdas*, que inicialmente se denominó *teoría de las cuerdas*, es una teoría de gran interés desde un punto de vista epistemológico. Surgió modestamente en los años 60 como un intento de buscar una explicación para las interacción fuerte, y se denominó inicialmente *teoría de cuerdas*. En 1968, un joven físico teórico llamado Gabriele Veneziano se esforzaba por encontrar un sentido lógico para varias propiedades de la fuerza nuclear fuerte observadas experimentalmente. Veneziano, que entonces era un investigador del CERN, el laboratorio europeo de aceleración de partículas de Ginebra, Suiza, había trabajado durante varios años en distintos aspectos de este problema, hasta que un día tuvo una revelación impactante. Para su sorpresa, se dio cuenta de que una esotérica fórmula inventada dos siglos antes con fines meramente matemáticos por el matemático suizo Leonhard Euler –la llamada función beta de Euler- parecía ajustarse de un golpe a la descripción de numerosas propiedades de partículas que interaccionan fuertemente entre sí (Veneziano, G. ,1968, “Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories”, *Nuovo Cimento* A 57: 190–7). La observación de Veneziano proporcionó una poderosa envoltura matemática para muchas características de la fuerza nuclear fuerte y puso en marcha un intenso frenesí de investigaciones encaminadas hacia la utilización de la función beta de Euler, y diversas generalizaciones de ésta, para describir la enorme cantidad de datos que se estaban recogiendo en varios aceleradores de partículas atómicas repartidos por todo el mundo. Sin embargo, la observación de Veneziano era en un sentido incompleta. La función beta de Euler parecía funcionar, pero nadie sabía por qué. Era una fórmula en busca de su explicación. Esto cambió en 1971 cuando los trabajos de Yoichiro Nambu, de la Universidad de Chicago, Holger Nielsen, del Niels Bohr Institute, y Leonard Susskind, de la Universidad de Stanford, revelaron los principios físicos que, según ellos, se ocultaban detrás de la fórmula de Euler. Estos físicos demostraron que, si se construía un modelo de partículas elementales considerándolas como pequeñas cuerdas vibradoras unidimensionales, sus interacciones nucleares se podían describir con toda exactitud mediante la función de Euler. Según su razonamiento, si los trozos de cuerda eran suficientemente pequeños, podrían seguir pareciendo partículas puntuales y, por consiguiente, podrían ser coherentes con las observaciones experimentales. En esencia, el modelo consistía en considerar que los electrones no eran ni partículas ni ondas sino que eran entes con una estructura interna; esa estructura consistía en pequeños filamentos (cuerdas) que vibraban en distintas frecuencias armónicas, y el modelo predecía un comportamiento en escalas de medida superiores (que nuestros aparatos de medida podrían detectar) compatibles con el comportamiento observable partícula-onda del modelo standard. Poco después la teoría cuántica logró la inclusión de la fuerza fuerte en sus cálculos, por lo que la teoría de las cuerdas quedó un

poco de lado. Además no tardó mucho tiempo en llegar la demostración de que la descripción de la fuerza nuclear fuerte mediante cuerdas fallaba. A principios de la década de 1970, unos experimentos con altas energías capaces de comprobar el mundo subatómico más a fondo demostraron que el modelo de cuerdas realizaba cierto número de predicciones en contradicción directa con las observaciones. Al mismo tiempo, se estaba desarrollando la teoría cuántica de campos aplicada a las partículas puntuales, en el marco de la cromodinámica cuántica, y su abrumador éxito en la descripción de la fuerza nuclear fuerte hizo que se llegara al abandono de la teoría de cuerdas. La mayoría de los físicos de partículas pensó que la teoría de cuerdas había quedado olvidada. Pero algunos físicos la siguieron desarrollando, y encontraron que podía servir para describir la fuerza de gravedad en vez de la fuerza fuerte. A mediados de los 70, dos físicos, el Dr. Schwartz y el Dr. Jöel Scherk, trataron de transformar uno de los defectos de la teoría de cuerdas en una virtud: quizás la persistente aparición del gravitón en las ecuaciones no era accidental. Quizás lo que estaban viendo no era un modelo de la fuerza fuerte, sino un modelo de la gravedad. En palabras de Schwarz (2001): "the string theory introduced in early 1971 by Ramond, Neveu, and myself has two-dimensional world-sheet supersymmetry. This theory, developed at about the same time that Golfand and Likhtman constructed the four-dimensional super-Poincaré algebra, motivated Wess and Zumino to construct supersymmetric field theories in four dimensions. Gliozzi, Scherk, and Olive conjectured the spacetime supersymmetry of the string theory in 1976, a fact that was proved five years later by Green and myself". Cfr.: Y. Nambu, "Quark Model and the Factorization of the Veneziano Model," p. 269 in *Proc. Intern. Conf. on Symmetries and Quark Models*, Wayne State Univ., 1969 (Gordon and Breach, NY 1970); Y. Nambu, "Duality and Hydrodynamics", Lectures at the *Copenhagen Summer Symposium* (1970); L. Susskind, "Dual-Symmetric Theory of Hadrons I," *Il Nuovo Cim*. 69A, 457 (1970); A. Neveu & J. H. Schwarz, "Factorizable Dual Model of Pions," *Nucl. Phys*. B31, 86 (1971); A. Neveu, J. H. Schwarz, & C. B. Thorn, "Reformulation of the Dual Pion Model", *Phys. Lett*. 35B, 529(1971); A. Neveu & J. H. Schwarz, "Quark Model of Dual Pions", *Phys. Rev*. D4, 1109 (1971). Y si la gravedad se podía describir con la teoría de cuerdas, quizás también las otras fuerzas podrían reformularse de la misma manera. Todo se unificaría en un mismo paquete. Se planteaba la posibilidad de una teoría que unificara las cuatro interacciones fundamentales de la física moderna. Sin embargo, existían numerosas evidencias empíricas que contradecían la teoría y, además, se descubrieron inconsistencias en la propia teoría. Estudios posteriores llevados a cabo durante las décadas de 1970 y 1980 demostraron, de un modo todavía más desolador, que la teoría de cuerdas y la mecánica cuántica padecían sus propios conflictos sutiles. Resultó que, una vez más, la fuerza gravitatoria se resistía a incorporarse a la descripción microscópica del universo. La mayoría de los físicos abandonaron toda investigación en este campo. Cfr: Brian Greene, *The Elegant Universe*, New York: W. W. Norton, 1999. Traducción española, Barcelona: Drakontos, 2001; John H. Schwarz, "String Theory Origins of Supersymmetry", *Nucl.Phys.Proc.Suppl*. 101 (2001) 54-61. Accesible online: **http://arxiv.org/abs/hep-th/0011078**. Sin embargo, un grupo de físicos siguieron con la línea de investigación y en 1984 un célebre artículo de Michael Boris Green y John Schwarz (Green, M. B.; Schwarz, J. H. ,1984, "Anomaly cancellations in supersymmetric D = 10 gauge theory and superstring theory", *Physics Letters* B 149) cambió el panorama. Cfr. también: M. B. Green & J. H. Schwarz, "Supersymmetrical Dual String Theory", *Nucl. Phys*. B181 (1981) 502; "Supersymmetrical String Theories", *Phys. Lett*. 109B (1982) 444; M. B. Green & J. H. Schwarz, "Covariant Description of Superstrings", *Phys. Lett*. 136B (1984) 367. En palabras de Brian Green, referenciado más arriba en esta nota, (2001, 123): "En una publicación decisiva que culminaba más de doce años de intensa investigación largamente ignorada y a menudo rotundamente rechazada por la mayoría de los físicos, Michael Green y John Schwarz demostraron que el sutil conflicto cuántico que padecía la teoría de cuerdas se podía resolver. Además, también demostraron que la teoría resultante tenía capacidad suficiente para abarcar las cuatro fuerzas y todo tipo de materia. Cuando la noticia de este hallazgo se difundió entre los físicos a nivel mundial, cientos de físicos de partículas abandonaron sus proyectos de investigación para poner en marcha con todos sus recursos un asalto a lo que parecía ser el último campo de batalla teórico en la antigua búsqueda de un modo de comprender los mecanismos más profundos del universo". Comenzó un proceso, que se desarrolló entre 1984 y 1986, que se denomina *la primera revolución de la teoría de las supercuerdas*. Se publicaron más de mil trabajos de investigación sobre la teoría de cuerdas que intentaban demostrar de forma concluyente que numerosas características del modelo estándar -características que se habían descubierto durante décadas de esmerada investigación- emergían naturalmente y de una manera sencilla a partir de la grandiosa estructura de la *teoría de cuerdas*. Sin embargo, en la práctica, la teoría presentaba dificultades que parecían insuperables. De un lado se trabajaba con aproximaciones a ecuaciones aproximadas (no se podían fijar las ecuaciones exactas del modelo) y además aparecían numerosas inconsistencias que se intentaban resolver añadiendo dimensiones al modelo. Se llegó hasta un modelo de 26 dimensiones. La mayoría de los físicos abandonaron nuevamente la investigación en este campo. Los científicos de este campo celebran anualmente una conferencia que se llama "Strings", y en la "Strings 1995" celebrada en la Universidad del Sur de California, Edward Witten, de la Universidad de Princeton y primer físico que ha obtenido la medalla Fields otorgada por la International Mathematical Union (1990), presentó un programa de investigación, poniendo en marcha lo que se ha denominado "la segunda revolución en la teoría de las supercuerdas". Cfr.: Edward Witten, University of Southern California , Los Angeles, "Future Perspectives in String Theory", March 13-18, 1995, En E. Witten: *Some problems of strong and weak coupling*; I. Bars& P. Bouwknegt& J. Minahan, D. Nemeshansky& K. Pilch, H. Saleur& N. Warner (editors) *Proceedings of Strings '95: Future Perspectives in String Theory*, USC, Los Angeles, March 13-18, 1995.(World Scientific, Singapore, 1996), **http://physics.usc.edu/Strings95/program.html**; Witten, Edward (1995), "String theory dynamics in various dimensions", *Nuclear Physics* B 443 (1): 85–126. Accesible online: **www.arXiv:hep-th/9503124**. Witten sugirió que las hasta entonces 5 teorías de cuerdas existentes no serían de hecho teorías distintas sino aproximaciones a una única teoría denominada *M-theory*, y proponía demostrarlo utilizando el hecho de que las cinco teorías se podían poner en correspondencia una con otra utilizando la noción de *dualidad*. Desde entonces, las investigaciones, a las que se incorporaron nuevamente con renovado entusiasmo muchos físicos y matemáticos, han podido demostrar esos isomorfismos y han logrado formular la M-teoría. Pero el proceso ha ido acompañado de una creciente complejidad y de la utilización de mecanismos matemáticos ad-hoc para asegurar la consistencia de la teoría. Así, se introdujo las entidades llamadas *D-branas* (*D-branes*), que podrían ser los objetos fundamentales que constituyen incluso las cuerdas. Se introdujo la exigencia de *supersimetría* (una simetría especial que transforma bosones y fermiones entre sí y por ende unifica las partículas de spin entero y semientero. El spin es una propiedad básica de las partículas elementales, que determina, por ejemplo, que éstas satisfagan el principio de exclusión de Pauli -fermiones- o no lo satisfagan -bosones-), lo que dio lugar al cambio del nombre de la teoría a *teoría de las supercuerdas* (*superstring theory*). Se introdujo también la técnica de *compactificación* para reducir las dimensiones de los modelos. Y todo ello acompañado de la introducción progresiva de técnicas matemáticas más y más complejas que muy pocos mortales pueden controlar. Pero, ni se ha podido obtener en 40 años la más mínima evidencia empírica que confirme siquiera en parte la teoría ni se resolvieron los problemas fundamentales que, desde un punto de vista epistemológico, se pueden objetar a la teoría. Estos son: 1) La *multidimensionalidad* del modelo. Aunque la mente humana no es capaz de pensar geométricamente en más de 3 dimensiones, puede de hecho pensar en más de 3 dimensiones mediante manipulaciones algebraicas y simbólicas adecuadas, como demuestra la *teoría de la relatividad*, que es un modelo en 4 dimensiones espacio-temporales. El problema consiste en que la multidimensionalidad de la *teoría de supercuerdas* se alcanza exclusivamente por la adición arbitraria de dimensiones exclusivamente para asegurar la consistencia del modelo, y además no existe ninguna posibilidad real de medir empíricamente, aunque sea de forma indirecta, ningún efecto físico que justifique la existencia de alguna de esas dimensiones.2) La teoría no es *predictiva*. No predice ningún efecto que pueda ser medido con nuestros aparatos de medida. Se limita a intentar integrar en una teoría consistente las observaciones empíricas que se justifican en el modelo standard, y además cuando aparecen contradicciones se modifica el modelo teórico con la creación de elementos *ad-hoc* que salven la inconsistencia. 3) La teoría tiene un grado extremo de *indeterminación*. Se estima que sólo la *M-theory* tiene del orden de 10^{1500} posibles modelos. Es decir, la teoría explicaría (en el supuesto de que fuera cierta) el comportamiento físico de ese número de *mundos posibles*, y sólo uno de esos sería el nuestro, siendo prácticamente imposible determinar cuál es éste al no ser predictiva la teoría. 4) La teoría no es *falsable*, ni previsiblemente podrá serlo en mucho tiempo, si es que eso fuera posible alguna vez, lo que es dudoso. Para entender esto debe considerarse la capacidad que hoy tenemos para *medir* en el mundo microscópico y las escalas existentes. La idea básica de la teoría es que los constituyentes fundamentales de la realidad son cuerdas de una longitud de Planck (cercano a 10^{-35} m) que vibran a frecuencias de resonancia. Cada cuerda en teoría tiene una única resonancia, o armonía. Diferentes armonías determinan diferentes fuerzas fundamentales. La tensión en la cuerda es del orden de las fuerzas de Planck (10^{44} Nw). El *gravitón* (nombre propuesto para la partícula que llevaría la fuerza gravitacional), por ejemplo, es predicho por la teoría que sea una cuerda con amplitud cero. Pero no se pueden detectar ni él ni sus interacciones. Si bajamos en el mundo microscópico a más o menos el nivel de $10^{-9.7}$ metros, aquí podemos encontrar la molécula del agua, a 10^{-15} encontramos al protón y al neutrón, en 10^{-18} nos encontramos los quarks up, down y strange, en 10^{-19} tenemos a otros dos quarks charm y bottom, si bajamos un poquito más a 10^{-22} vemos al quark top, en 10^{-24} estamos con nuestro famoso neutrino. En todos estos niveles podemos medir algo. Debe entenderse que todas esas llamadas *partículas* no tienen el tipo de *existencia* que tiene una bola de billar; se trata de entes con significado dentro de una teoría que predice unas interacciones concretas y unos efectos, efectos que podemos medir con nuestros instrumentos de medida. Pero si bajamos 9 órdenes de magnitud más, a unos 10^{-35} metros, estamos en la llamada *longitud de Planck* y ya no podemos bajar más, ni medir nada. La longitud de Planck está definida por la siguiente ecuación: $l_P = \sqrt{\frac{hG}{2\pi c^3}} \approx 1.616199 * 10^{-35}\ \text{metros}$, siendo c es la velocidad de la luz en el vacío, G es la constante de gravitación universal, y h es la Constante de Planck reducida. A estos niveles la tensión en la cuerda (si existiera) sería del orden de las fuerzas de Planck (10^{44} Nw), es decir una energía del orden de 10 elevado a 19 miles de millones electronvoltios, que es alrededor de mil billones de veces mayor que las energías actualmente disponibles en nuestros aceleradores de partículas. Sobre estos aceleradores y sus actuales programas de investigación, véase: **http://home.web.cern.ch/topics/large-hadron-collider**, **http://wlcg.web.cern.ch/**, **http://en.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider**. Por lo tanto, no tenemos ninguna posibilidad de medir los efectos de los entes que constituyen la teoría (cuerdas, supercuerdas, D-branas –*D-branes*) y ésta no es *falsable*. Puesto que la consistencia, la sofisticación y la belleza no son las propiedades que definen de por sí una teoría científica, aunque casi todas las teorías científicas relevantes las tengan, muchos autores consideran a esta teoría una *pseudociencia*. Así, para Mario Bunge ("The philosophy behind pseudoscience", *Skeptical Inquirer*, vol-30.4, July/August-2006): "String theory is a suspicious character. It looks scientific because it tackles an open problem that is both important and difficult, that of constructing a quantum theory of gravitation. For this reason, and because it has stimulated mathematics, it is attracting some of the brightest young brains. But the theory postulates that physical space has six or seven dimensions rather than three, just to secure mathematical consistency. Since these extra dimensions are unobservable, and since the theory has resisted experimental confirmation for more than three decades, it looks like science fiction, or at least, failed science". Para Bunge (2006), la física de partículas estaría inflada con sofisticadas teorías matemáticas que postulan la existencia de entidades extrañas que no interactúan de forma apreciable, o para nada en absoluto, con la materia ordinaria, y como consecuencia, quedan a salvo al ser indetectables. Puesto que estas teorías se encuentran en discrepancia con el conjunto de la Física, y violan el requerimiento de falsacionismo, pueden calificarse de pseudocientíficas, incluso aunque lleven pululando un cuarto de siglo y se sigan publicando en las revistas científicas más prestigiosas. La *teoría de cuerdas* es imposible de falsear debido a su naturaleza intrínseca: tiene la suficiente flexibilidad matemática como para que sus parámetros se puedan moldear para encajar con cualquier tipo de realidad observada. Por eso algunos físicos la llaman con cierta ironía la TOE (Theory of Everything). Para algunos la situación tendría semejanza, pero a escala gigantesca, con el reciente *escándalo Bogdanov* (2002), dos hermanos que consiguieron publicar en prestigiosas revistas científicas teorías absurdas y carentes de sentido. El físico alemán Max Niedermaier concluyó que se trataba de pseudociencia, escrita con una densa jerga técnica, para esquivar el sistema de revisión por pares de la física teórica. Según el físico-matemático John Baez, su trabajo "es una mezcolanza de frases aparentemente plausibles que contienen las palabras técnicas correctas en el orden aproximadamente correcto. Pero no hay lógica ni cohesión en lo que escriben". Según el físico Peter Woit en la revista *Nature*: "el trabajo de los Bogdanoff resulta significativamente más incoherente que cualquier otra cosa publicada. Pero el creciente bajo nivel de coherencia en todo el campo les permitió pensar que habían hecho algo sensato y publicarlo"(**http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=72790295**). (**http://en.wikipedia.org/wiki/Bogdanov_affair**). Eso, que ya pasó en las ciencias sociales con el famoso *escándalo Sokal*, ha pasado recientemente donde parecía imposible: en las ciencias exactas. Para muchos, es el nivel de confusión reinante y el carácter altamente especializado y sofisticado de las matemáticas empleadas lo que explicaría, no sólo el *caso Bogdanov*, sino el más sorprendente de que una teoría pseudocientífica como la *teoría de cuerdas* ocupe el trabajo de cientos de científicos desde hace 40 años (John Baez. *The Bogdanoff Affair* **http:/ / math. ucr. edu/ home/ baez/ bogdanoff/** . El llamado escándalo Sokal ocurrió en 1996. Sokal, profesor de física en la Universidad de Nueva York, envió un artículo pseudocientífico para que se publicase en la revista postmoderna de estudios culturales *Social Text*, editado por la Universidad de Duke. Pretendía comprobar que una revista de humanidades "publicará un artículo plagado de sinsentidos, siempre y cuando: a) Suene bien; y b) apoye los prejuicios ideológicos de los editores (contra las ciencias exactas)". El artículo, titulado "Transgressing the Boundaries: Towards a Transformative Hermeneutics of Quantum Gravity", se publicó en el número de primavera/verano de 1996 de *Social Text* y sostenía la asombrosa tesis de que la gravedad cuántica era un constructo social; es decir, que la gravedad existe sólo porque la sociedad se comporta como si existiera, por lo tanto si no creyéramos en ella no nos afectaría. El mismo día de su publicación, Sokal anunciaba en otra revista, *Lingua Franca*, que el artículo era un engaño. El hecho causó un monumental escándalo académico. Sokal dijo que su artículo era "un pastiche de jerga postmodernista, reseñas aduladoras, citas grandilocuentes fuera de contexto y un rotundo sinsentido, que se apoyaba en las citas más estúpidas que había podido encontrar sobre matemáticas y físicas hechas por universitarios genéricamente llamados 'postmodernos' de humanidades". En 1997 Sokal publicó el libro *Impostures Intellectuelles* (París: Odile Jacob, 1997) en donde, además de resumir las consecuencias del escándalo, incluye una dura crítica al *relativismo epistémico* que considera a la ciencia como "un relato más". Más detalles y referencias en: **http://en.wikipedia.org/wiki/Sokal_affair**. El *affaire Bogdanov* parecía un caso semejante que, aunque sin intención de probar nada, demostraba que algo análogo pasaba en el núcleo de las *ciencias duras*. Otras opiniones críticas más detalladas sobre la *teoría de cuerdas* pueden leerse en: Peter Woit's Not Even Wrong weblog (**http:// www. math. columbia. edu/ ~woit/ wordpress/ ?cat=2**); P. Woit (Columbia University) *String theory: An Evaluation*. (**http://arxiv.org/ abs/ physics/ 0102051**), Feb de la Probabilidad dentro del Análisis Bayesiano. Esto nos lleva a preguntarnos por la naturaleza de la *explicación científica del mundo*[462]. Michael Friedman (1974) y Philip

---

2001, e-Print: physics/0102051; P. Woit, *Is String Theory Testable?* (**http:/ / www. math. columbia. edu/ ~woit/ testable. pdf**) INFN Rome March 2007; Lee Smolin's The Trouble With Physics webpage (**http:/ / www. thetroublewithphysics. com**); The Trouble With String Theory (**http:/ / www. slate. com/ id/ 2149598/**); The Great String debate. Wisecracks fly when Brian Greene and Lawrence Krauss tangle over string theory (**http:/ / www.symmetrymagazine. org/ cms/ ?pid=1000481**); S. Kachru, R. Kallosh& A. Linde % S. P. Trivedi, "de Sitter Vacua in String Theory", *Phys.Rev*.D68:046005,2003(**http:/ / arxiv.org/ abs/ hep-th/0301240**). En el lado contrario, la página web oficial de la teoría, con todo tipo de informaciones y links a instituciones académicas: *The Official Superstring theory website*: **http://superstringtheory.com/index.html**.

Según otros, en cambio, la *teoría de supercuerdas* no pasaría de ser un *divertimento* matemático. O incluso para otros se trataría en realidad de una teoría matemática. El tema para nosotros es importante. Parece claro que la *teoría de las supercuerdas* no es una teoría científica de las ciencias de la naturaleza (de la física) por las razones expuestas más arriba. Se trataría en este sentido de *pseudociencia*. Parece claro que ese hecho evidencia un problema grave en la comunidad científica en tanto que importantes instituciones científicas financian el trabajo de cientos de investigadores aplicados a una tal investigación, y cientos de artículos se publican anualmente por el mecanismo de revisión por pares en las más prestigiosas revistas de Física con un contenido meramente especulativo y, eso sí, con un formalismo matemático apabullante de modo que, en la práctica, sólo pueden ser mínimamente entendidos por unos pocos especialistas del mismo campo. Parece, pues, también claro que esa teoría utiliza profusamente complejas teorías matemáticas y, en ese sentido, sería adecuado el calificativo de *divertimento* matemático. Pero, ¿se podría hablar realmente de una teoría matemática? Es claro que no. Ni es una teoría matemática en el sentido de la geometría euclídea (contruida ella y sus conceptos a través de la abstracción a partir de objetos y relaciones medibles del mundo físico), ni es una teoría matemática en el sentido de la teoría de Galois o la teoría de la medida, por ejemplo (construidas ellas y sus conceptos a partir de abstracciones de *objetos matemáticos* de otras teorías matemáticas). Está claro que no todo discurso o explicación que utilice un lenguaje matemático es una *explicación científica del mundo* y tampoco una *teoría matemática*. Este mismo problema aparece en realidad en las distintas teorías de la Cosmología moderna. ¿Qué aportan de científico, aparte de su sofisticado lenguaje matemático, que sea distinto de lo que aportaba la cosmología de Giordano Bruno? Nada. Se trata de pura especulación filosófica (aunque no filosófica en el sentido de Kant) sin el más mínimo carácter científico.

[462] El tema de qué caracteriza una *explicación científica del mundo* está ya planteado desde el Renacimiento y, en realidad, desde los presocráticos. El debate moderno en el siglo XX (Woodward, 2011) surge con el trabajo de Carl Hempel (Hempel 1942, 1965, y Hempel & Oppenheim 1948), aunque se pueden encontrar otros relevantes defensores de sus propuestas incluso anteriores: (Popper 1935, Braithwaite 1953, Gardiner, 1959, Nagel 1961). Hempel desarrolla el llamado *modelo deductivo-nomológico* o *DN-model* según el cual una *explicación científica* tiene dos componentes principales (Hempel, 1965, 247): un *explanandum* (enunciados describiendo el fenómeno que quiere ser explicado) y un *explanans* (los enunciados que se aportan como explicación del fenómeno). Se deberían cumplir varias condiciones: primero, "the *explanandum* must be a logical consequence of the *explanans* … and the sentences constituting the explanans must be true" (Hempel, 1965, p. 248), segundo que la explicación debería tener la forma de un argumento válido en el que el *explanandum* se deduzca como conclusión de las premisas contenidas en el *explanans*, siendo esto el componente deductivo del modelo, y tercero que el *explanans* debe contener al menos una "law of nature" que debe ser una premisa esencial en la deducción, de forma que se invalidaría la explicación si se eliminara esa premisa. Esta última característica justifica la calificación de "nomológico" de modelo. El término deriva del griego νόμος o *nomos* que significa "ley". Según (Woodwards, 2011), "*nomological* being a philosophical term of art which, suppressing some niceties, means (roughly) *lawful*". Existen varias variantes de este modelo que fue el generalmente adoptado por los *empiristas lógicos* en el siglo XX y no se comenzó a cuestionar hasta los años 80. Wesley Salmon (1984, 1994 y 1997) desarrollo el *CM-model* (Causal Mechanical Model) y el modelo de la *relevancia estadística* (*SR-model*) (Salmon, 1971) que, en gran parte ya fue planteado por Hempel en sus últimos artículos. Michael Friedman (1974) y Philip Kitcher (1976 y 1989) desarrollaron el *modelo unificacionista*. Una explicación resumida de estos modelos en (Woodward, 2011) **http://plato.stanford.edu/archives/win2011/entries/scientific-explanation/**. Cfr. también: G. Randolph Mayes (California State University/Sacramento, 2014), "Theories of Explanation", en *Internet Encyclopedia of Philosophy* (edited by J. Fieser) **http://www.iep.utm.edu/explanat/**. Una investigación crítica de los distintos modelos en (Salmon, 1989) y (van Frassen, 1982 y 1989). Cfr. también las siguientes obras, que son antologías del tema que contienen los artículos fundamentales: Pitt, J. (ed.), 1988, *Theories of Explanation*. New York: Oxford University Press; Ruben, D., (ed.), 1993, *Explanation*, Oxford: Oxford

Kitcher (1981 y 1989) sostienen precisamente que una *explicación científica del mundo* es un proceso explicativo gradual dirigido por la tendencia a la unificación. Es lo que se denomina el *modelo unificacionista.* Para Woodward (2011, 25), "the basic idea of the *unificationist account* is that scientific explanation is a matter of providing a unified account of a range of different phenomena. This idea is unquestionably intuitively appealing. Successful unification may exhibit connections or relationships between phenomena previously thought to be unrelated and this seems to be something that we expect good explanations to do. Moreover, theory unification has clearly played an important role in science. Paradigmatic examples include Newton's unification of terrestrial and celestial theories of motion and Maxwell's unification of electricity and magnetism. The key question, however, is whether our intuitive notion (or notions) of unification can be made more precise in a way that allows us to recover the features that we think that good explanations should possess". Kitcher (1989, 423) sostiene que "science advances our understanding of nature by showing us how to derive descriptions of many phenomena, using the same pattern of derivation again and again, and in demonstrating this, it teaches us how to reduce the number of facts we have to accept as ultimate". Para Woodward (2011, 29) existiría un punto flaco en este modelo: "is Kitcher's account of unification sufficiently discriminating or nuanced to distinguish those unifications having to do with explanation from other sorts of unification? The worry is that it is not. The conception of unification underlying Kitcher's account seems to be at bottom one of descriptive economy or information compression—deriving as much from as few patterns of inference as possible. Many cases of classificatory and purely formal unification involving a common mathematical framework seem to fit this characterization (…) Another illustration of the same general point is provided by the numerous statistical procedures (factor analysis, cluster analysis, multidimensional scaling techniques) that allow one to summarize or represent large bodies of statistical information in an economical, unified way and to derive more specific statistical facts from a much smaller set of assumptions by repeated use of the same pattern of argument". Sin embargo se puede aducir que debería hacerse una diferencia

---

University Press. Para Woodward (2011, 4) "many philosophers think of concepts like 'explanation', 'law', 'cause', and 'support for counterfactuals' as part of an interrelated family or circle of concepts that are 'modal' in character (…) And why was discussion, at least initially, organized around 'explanation' rather than 'causation', since (as we shall observe) it is often the latter notion that seems to be of central interest in subsequent debates and since the former notion seems (to many contemporary sensibilities) somewhat vague and ill-defined? At least part of the answer to this last question seems to be that (again as explained in more detail below) Hempel and other defenders of the DN model inherited standard empiricist or Humean scruples about the notion of causation. They assumed that causal notions are only (scientifically or metaphysically) acceptable to the extent that it is possible to paraphrase or re-describe them in ways that satisfied empiricist criteria for meaningfulness and legitimacy (…) Part of the initial appeal of the topic of "scientific explanation" was thus that it functioned as a more respectable surrogate for (or entry point into) the problematic topic of causation". Sobre el estado actual del debate, Mayes (2014, 9) considera que "Most philosophers of science would agree that our understanding of explanation is far better now than it was in 1948 when Hempel and Oppenheim published *Studies in the Logic of Explanation*. While it serves expository purposes to represent the DN model and each of its successors as fatally flawed, this should not obscure the fact that these theories have brought real advances in understanding which succeeding models are required to preserve. At this point, fundamental disagreements on the nature of explanation fall into one of two categories. First, there are metaphysical disagreements. Realists and anti-realists continue to differ over what sort of ontological commitments one makes in accepting an explanation. Second, there are meta-philosophical disagreements. Naturalists and non-naturalists remain at odds concerning the relevance of scientific inquiry (namely, inquiry into the way scientists, ordinary people and computers actually think) to a philosophical theory of explanation. These disputes are unlikely to be resolved anytime soon. Fortunately, however, the significance of further research into the logical and cognitive structure of explanation does not depend on their outcome".

entre las explicaciones científicas en el análisis de un campo concreto de la realidad, que utilizan técnicas de *unificación* que sólo pretenden simplificar el análisis y que presuponen una legalidad teórica que simplemente se aplica, y las explicaciones científicas con generalidad suficiente y pretensiones de establecer unas leyes en un campo de la realidad. Por ejemplo, la esencia de los métodos estadísticos multivariantes como el análisis factorial que menciona Woodward radica en la reducción de las dimensiones explicativas del problema concreto de determinar la relación entre un gran número de variables medidas, pero ni establece cómo determinar esas variables ni pretende derivar una marco teórico general para un campo de la realidad; es decir, se trata casi de una metodología de análisis empírico. Refiriéndose a la génesis de los marcos explicativos teóricos generales, Kitcher (1989) introduce un punto de vista que ha ido desarrollando posteriormente, en especial en su análisis de la Matemática (Kitcher, 1984, 1988 y 2005). Se trata de un punto de vista *naturalista* en el que, además de considerar la Matemática como una *actividad* humana previa al moderno lenguaje escrito (y aún más previa al moderno lenguaje simbólico formal), resalta el rol que en la génesis de las teorías científicas tiene *la comunidad de científicos* de la época y sus opiniones y formación. Este factor que, como hemos mencionado varias veces, también resaltó Cassirer, ya hemos visto cómo opera, cuando realizamos nuestro detenido análisis del proceso que llevó a la aceptación generalizada en los años 50 de la FOL.

Hilbert no se explayó demasiado en explicaciones filosóficas y ya vimos las dificultades interpretativas que planteaba su noción de *armonía preestablecida* “en un sentido muy distinto al postulado por Leibniz”. En nuestra opinión, esta noción y las explicaciones que añade en las citas que hemos aportado en la Parte-II respecto de su concepción de las relaciones entre las ciencias, serían perfectamente coherentes y quedarían explicadas dentro de una concepción *unificacionista* de la *explicación científica* análoga a la desarrollada por Friedman y Kitcher. Y esta es una conclusión importante para nuestro trabajo. Podemos decir que Hilbert tenía una filosofía de la ciencia con una concepción *unificacionista* y, además, como vimos en su momento, de un marcado carácter *naturalista*. Y ese es el marco en el que debe entenderse su producción científica.

3) En el proceso de creación de una teoría matemática, como hemos visto en el caso de la Teoría de la Probabilidad, el *momento formal* es un momento casi final del proceso, y al que preceden los procesos de abstracción, creación de conceptos y simbolización. En ese *momento formal*, que algunos consideran erróneamente el propiamente matemático, el lenguaje y la deducción lógica –dentro de una lógica relacional- desempeñan un papel fundamental.

4) La justificación de una teoría matemática aparece aquí nuevamente ligada a su *aplicabilidad*. Por ello, si decidimos plantear el problema de la *existencia* de los objetos matemáticos –aún huyendo de todo planteamiento ontológico esencialista y entendiendo esa existencia simplemente como el contenido semántico de los objetos definidos en el lenguaje matemático-, parece que el planteamiento de Hilbert en su interpretación restrictiva de la Matemática (Lógica formal, Teoría de la Demostración) y que defiende en su controversia con Frege, sosteniendo que la *existencia* se identifica con la *consistencia*, sólo puede interpretarse desde la reducción de la Matemática que hace allí Hilbert a los aspectos sintácticos del lenguaje, pero que contradice su propia concepción más amplia de la *inhaltliche Mathematik*. La exigencia de Frege de un *modelo* para garantizar la *existencia* de un objeto matemático parece más concordante con la concepción de Kant que exigía la *constructibilidad* para garantizar dicha existencia, siendo para ambos la *consistencia* el requisito necesario de la *posibilidad*. Pero, como vimos, luego el mismo Hilbert en sus trabajos matemáticos adopta *de facto* ese mismo punto de vista e incluso en los mismos *Grundlagen* adopta ese punto de vista al recurrir a la *intuición* para seleccionar los grupos de

axiomas, defendiendo ese recurso a la *intuición* en numerosos pasajes. Sería esa *aplicabilidad* (la aportación de un *modelo*, en términos de Frege) a determinados (e incluso a veces distintos) campos de la *realidad medible* la que garantizaría la *existencia* de los objetos matemáticos (ya sea como contenidos semánticos o como objetos ideales) y justificaría una teoría matemática. La *Fuzzy Logic*, como con razón sostiene Zadeh, tiene unos fundamentos radicalmente distintos a los de la Teoría de la Probabilidad, que acabamos de discutir, en sí misma, en sus aplicaciones y en sus implicaciones. Mientras que la Teoría de la Probabilidad se basa explícitamente en la Teoría de Conjuntos clásica, construyendo sus conceptos (función de masa, función de distribución, función característica, función generatriz, variable aleatoria, distribución de probabilidad, momentos, etc) a partir de nociones de la Matemática standard, y usa en sus razonamientos en todo momento la Lógica standard, la *Fuzzy Logic* se construye sobre la base de una ruptura explícita con la Teoría de Conjuntos standard, elaborando la noción de Conjunto Borroso o Difuso (*fuzzy set*) y las correspondientes operaciones (unión, intersección, etc) borrosas. Las nociones matemáticas básicas posteriores, tales como relación binaria, retículo, función, etc, deben ser redefinidas y se les asocia una simbolización diferenciada de las correspondientes nociones usuales. Las teorías matemáticas correspondientes tienen necesariamente una complejidad mucho mayor, aunque las teorías standard (incluyendo la Teoría de Conjuntos) siempre pueden considerarse como un caso particular límite de la correspondiente teoría difusa. La pregunta es si se gana algo al introducir tal complejidad; se entiende, algo que no se pueda abordar desde la teoría clásica. Esta, como vimos, era la crítica que hacían algunos bayesianos, para quienes el enfoque bayesiano de la Teoría de la Probabilidad permitiría un marco suficiente y más sencillo para abordar los problemas que se planteaba la matemática borrosa. La respuesta, una vez más, la ha dado *la práctica*. Parece que las aplicaciones más importantes de la Teoría de la Probabilidad, incluyendo sus desarrollos bayesianos, de producen en contextos en donde lo determinante es la *incertidumbre*, mientras que la espectacular explosión de aplicaciones de la Lógica Difusa y sus ampliaciones matemáticas se ha producido en contextos donde lo relevante es la *vaguedad*. Es posible que los críticos bayesianos tengan razón y que los problemas concretos de esas aplicaciones puedan ser abordados y resueltos desde las técnicas y perspectivas probabilísticas, pero el hecho cierto es que eso no se ha producido y los investigadores han encontrado el marco teórico adecuado para sus aplicaciones el la Lógica Difusa y sus extensiones matemáticas. También es verdad que una gran mayoría de estas aplicaciones, especialmente en el ámbito de la ingeniería, utilizan solamente aspectos muy puntuales de la teoría (Dubois & Prade, 2000). Un hecho relevante, y que no se suele mencionar en los manuales, es que en la Lógica Difusa y sus extensiones matemáticas, aunque en sus fundamentos parten de una Lógica no-standard que tiene implicaciones a la hora de clasificar las leyes lógicas, en sus demostraciones y razonamientos usa la Lógica standard y los patrones de formalización usuales. Esta aparente contradicción ha sido observada por distintos autores como Arbib (1979) y Parikh (1991), quienes resaltaron la paradoja de intentar modelar con *métodos exactos* la relación de pertenencia a *categorías imprecisas*[463]. Como indican Dubois y Prade (2000, 14):

> "The precision of membership grades is more a philosophical problem than a practical one. A fuzzy membership function is still an idealization, but in same cases a better one than a crisp set. The reason is that going from discontinuous representations (using crisp sets) to continuous one (membership functions) we gain in robustness: moving the thresholds defining the support or the core of fuzzy sets only modifies membership grades slightly. Hence the precision of membership function is less important than the precision of the thresholds defining an interval representation of a linguistic category. In finite or discrete settings, no decent scholar in fuzzy

---

[463] Cfr., Arbib M., "Review Article on fuzzy set theory", *Bulletin of the Americal Mathematical Society,* 83, 946-951 (1977); Parikh, R. "A test for fuzzy logic", *SIGACT News*, 2, 49-50 (1991)

> set theory seriously believes in precise numerical membership grades, say, that a penguin could be a bird at level 4. Membership grades can be elements of a chain (…) Moreover the context-dependent nature of fuzzy sets acknowledged by Zadeh, is often forgotten by discurssants".

Podemos en definitiva decir que la *Fuzzy Logic* y los desarrollos matemáticos asociados a ella constituyen una rama de la Lógica y la Matemática standard, desarrollada con lenguaje y métodos standard, construida expresamente para abordar los problemas y contextos definidos por la *vaguedad de las categorías*. En resumen: de nuestro análisis de algunas de las teorías científicas desarrolladas en los últimos 60 años, y en general muy interrelacionadas entre sí, podemos extraer varias conclusiones relevantes:

1) La Teoría de la Probabilidad, y las subsiguientes extensiones como la Inferencia Estadística o la Estadística Bayesiana, y sus aplicaciones en otras teorías como la Mecánica Cuántica, la Termodinámica, la Teoría de la Información o la Inteligencia Artificial, prueban que la Matemática es fundamentalmente una *actividad* orientada a la resolución de problemas de un determinado campo de las ciencias empíricas (y en otros casos como en la Teoría de la Medida o la Teoría de Galois, a un nivel de abstracción superior, sus objetos son construcciones conceptuales de otras teorías matemática) y que opera en una primera fase a través de la *matematización* del problema, determinando las variables medibles relevantes, construyendo conceptos adecuados para la comprensión de esas variables y determinando sus interrelaciones y leyes a través de un método mixto entre la *inferencia inductiva*, propio de las ciencias experimentales, y la pura deducción lógica. En una segunda fase, el análisis lógico de la teoría construida lleva a una axiomatización de la teoría y a la demostración de sus resultados por métodos formales; análisis en el que la conexión de la teoría con sus objetos iniciales se desdibuja y en donde la relación con el lenguaje en el que se expresa la teoría pasa a un primer plano. En una tercera fase la teoría misma así formalizada pasa a ser objeto de estudio, estableciendo sus conexiones con otras teorías matemáticas y permitiendo, eventualmente, una teoría más general de acuerdo con la tensión *unificadora* que caracteriza a la ciencia moderna.

2) Esta tensión *unificadora* queda patente en el proceso, que hemos descrito, que lleva a desarrollar la Termodinámica dentro de la Teoría de la Información, y ésta y la Teoría de la Probabilidad dentro del Análisis Bayesiano. Esto nos lleva a preguntarnos por la naturaleza de la *explicación científica del mundo*. Ciertamente que la teoría llamada *unificacionismo* (Michael Friedman, 1974 y Philip Kitcher, 1981 y 1989) y su interpretación posterior desde un enfoque *naturalista* (Kitcher, 1984, 1988 y 2005) se ajusta bien a las conclusiones de nuestro estudio pero, a nuestro juicio, no resulta suficiente. Muchas de las distintas teorías que desde 1930 se han propuesto y que hemos examinado someramente *tienen algo de verdad*. Podríamos decir así que una *explicación científica del mundo* es un discurso sobre la realidad que tiene *algo de todas las propiedades propuestas*. Este criterio nos sirve muy bien para identificar lo que *no* es una teoría científica, o sea, para identificar una *pseudociencia*; este sería el caso de la Teoría de las Supercuerdas, como bien señalaba Mario Bunge (2006).

3) Incidentalmente hemos sacado una conclusión relevante para nuestro trabajo: muy probablemente Hilbert tenía una concepción de la ciencia muy cercana o coincidente con la llamada *unificacionista* que hemos resaltado más arriba. Esto explicaría muy bien algunas de sus manifestaciones sobre las teorías científicas y su noción de la "armonía preestablecida" que no estaban suficientemente esclarecidas en nuestra investigación anterior.

4) La conclusión 2ª nos lleva a un punto importante respecto a la Matemática, a su *aplicabilidad* y a la concepción formalista y/o logicista de la Matemática como un simple lenguaje formal o juego formal de signos. Si, como hemos concluido, debemos entender la Matemática como una *actividad* humana orientada a la resolución de problemas que se

caracteriza en primer término por el hecho de que sus objetos son entes conceptuales (o bien creados por un proceso de *matematización* de un campo concreto de la realidad empírica –Teoría de la Probabilidad-, o bien mediante un proceso de abstracción de los entes conceptuales de otras teorías matemáticas –Teoría de la Medida, Teoría de Galois, Geometría según el *programa de Erlangen*-) y si, sin entrar en disquisiciones ontológicas sobre dichos entes: A.- su *posibilidad* se prueba por la *consistencia* de la teoría (Kant, Hilbert) y B.- su *existencia* se prueba por la aportación de un *modelo* (Frege) o de una *construcción en la intuición* (Kant). Y entonces, la *aplicabilidad* de esa teoría constituye la prueba del nueve que asegura la *existencia* (sea del tipo que fuera) de esos entes conceptuales y su utilidad para una *explicación científica* del mundo y, por tanto, el mismo carácter científico de esa teoría matemática. Pero la concepción de la Matemática como un sistema formal de signos sin sentido ni referencia que posibilita su aplicación a un discurso en el que los objetos que se postulan ni pueden medirse, ni pueden medirse tampoco sus interacciones, lleva directamente a lo que hemos calificado de *pseudociencia*; éste sería el caso de la Teoría de Supercuerdas, pero también de muchas teorías cosmológicas que pululan hoy en día por las revistas científicas. Además, esa concepción de la Matemática, que hemos visto que no se ajusta ni a su génesis ni a su práctica, supone la negación del carácter científico de la misma Matemática.

5) De nuestro análisis de la evolución de la Lógica standard en el siglo XX, y de la pléyade de lógicas no-standard que se han desarrollado fundamentalmente a partir de 1950 y que hemos estudiado en el Capítulo-6, y algunas también en este Capítulo-7 (lógicas no-monotónicas, lógica borrosa, redes neuronales), podemos concluir que:

A.- Los distintos desarrollos de la Lógica en el siglo XX permiten decir que hoy conocemos con mucha más profundidad la *consecuencia lógica* y la problemática asociada a ella.

B.- El hecho mismo del desarrollo de multitud de lógicas no-standard y los planteamientos críticos que las motivaron, y que también hemos examinado, es una evidencia de que, como dice Harrty Field (2008), “hay algo que se nos escapa en nuestro análisis del razonamiento”.

C.- Las lógicas no-standard analizadas en este capítulo (lógicas no-monotónicas, lógica borrosa y redes neuronales) comparten el enfoque de intentar capturar o reproducir algunas características esenciales del razonamiento humano que no puede abordar la lógica standard: la posibilidad de que las conclusiones modifiquen las premisas aceptadas, el manejo de la *vaguedad* en la definición de los conceptos –característica muy ligada al lenguaje natural-, la capacidad de *aprendizaje* y la simulación de los procesos neuronales en los que se basa el *razonamiento* y el *aprendizaje*. Además, los programas de investigación en marcha (HBP, BI, BBP y otros estudiados más arriba) asociados al desarrollo de nuevas técnicas de computación, hacen prever que en un plazo de 15 años se modificarán radicalmente los términos en los que hasta ahora planteamos los debates sobre IA, computación, neurociencia, epistemología, cognición y lógica.

D.- El espectacular crecimiento de teorías y técnicas matemáticas en los últimos 100 años ha sido totalmente independiente del marco considerado por la Lógica, y sin ningún condicionamiento por los desarrollos de las investigaciones lógicas. Más aún: no hay absolutamente ninguna nueva teoría matemática y ningún manual de Matemáticas que siquiera mencione el sistema ZF o ZFC, por ejemplo, y menos aún que use alguno de sus axiomas en las demostraciones. Como señala Leitgeb (2009), usualmente ni siquiera tratan la Teoría de Conjuntos y, si la tratan, lo hacen a un nivel muy elemental presentado una teoría *naïve*. Nuevamente se constata la independencia de la Matemática respecto de la Lógica.

Parece también evidente tras nuestro análisis que la expresión de una teoría matemática se modifica sensiblemente según el lenguaje que se utilice y la capacidad expresiva de éste, y que en los últimos 100 años, en comparación con épocas precedentes, se ha reforzado la formalización en la expresión de estas teorías a través de un lenguaje de signos escrito donde -siguiendo a Hilbert- operaría la intuición de formas. Pero que, en todo caso, la Matemática aparece como una *actividad* humana que aplica "su lógica" como una noción primitiva no explicitada; una *actividad* que parece ligada a capacidades cognitivas innatas del ser humano y que se remonta a la más remota antigüedad, como hemos visto. Y si tenemos en cuenta que la construcción de lenguajes formales artificiales es un hecho absolutamente reciente (y en términos históricos, también el mismo lenguaje natural escrito), cabe preguntarse por la posibilidad de que *la misma actividad, las mismas capacidades cognitivas y la misma lógica* se hayan podido expresar a lo largo de la historia a través de otros sistemas lingüísticos. Por ejemplo, a través de un lenguaje visual. Y esta es la hipótesis que exploramos en el siguiente Capítulo.

CAPÍTULO-8

El cambio moderno de paradigma epistemológico en la cognición matemática y su influencia en la interpretación de la filosofía de la Matemática en Kant y Hilbert.

8.1.- Pensamiento Visual, Lenguaje y Cognición.

8.1.1.- Imágenes mentales y pensamiento.

Los estudios realizados en los años 90 por diversos neurólogos (Kosslyn 1975, 1980 y 2005, Kosslyn & Koenig, 1995 y Kosslyn & Ganis & Thomson, 2001, 2006a y 2006b) y que se centraron en el estudio del funcionamiento cerebral en los procesos de pensamiento con *imágenes mentales* y en su comparación con el funcionamiento cerebral en los procesos basados en una visualización directa (*perception and imagery*) pretendían dar una base científica –más allá de un enfoque psicológico- al debate abierto en los años 70 por Pylyshyn (1973, 1981, 2002 y 2003) y que sostenía que las *representaciones* que fundamentan la experiencia con imágenes mentales serían del mismo tipo que las usadas en el lenguaje natural, es decir, análogas a las basadas en representaciones de proposiciones, lo que dio lugar a una controversia centrada en la naturaleza de las representaciones internas que subyacen a la experiencia de visualización (Tye, 1991) y que se conoció como *the imagery debate*. Es este un campo en el que se entrecruzan investigaciones de psicología, AI, simulaciones por computador, neurología y lingüística. Un brillante resumen de la historia de este debate, con las aportaciones clave y amplia bibliografía, se puede ver en (Kosslyn, 1994 y 2005) y en (Eysenck & Keane, 2005)[464]. En gran parte, el núcleo del tema versa sobre la naturaleza y mecanismos de las *representaciones*[465] en los procesos cognitivos, centrándose después en los

---

464 La obra de Eysenck & Keane (2005) es un manual universitario sobre Psicología Cognitiva de gran éxito (va en la séptima edición) que aporta un estudio desde todos los puntos de vista y con bibliografía actualizada del tema así como de las investigaciones empíricas neurocerebrales, y también presenta de forma crítica las múltiples teorías que se han desarrollado en los últimos 50 años en este campo. Aunque a veces peca, como muchos manuales universitarios, de una excesiva simplicidad. Por ejemplo, despacha la teoría cognitiva de Kant en cuatro líneas adscribiéndola sin mayores matices al innatismo: “The most commonly used construct to account for complex knowledge organisation is the schema. A schema is a structured cluster of concepts; usually, it involves generic knowledge and may be used to represent events, sequences of events, percepts, situations, relations, and even objects. The philosopher Kant (1787) originally proposed the idea of schemata as innate structures used to help us perceive the world. Kant was strongly nativist in his view that innate, a priori structures of the mind allow us to conceive of time, three-dimensional space, and even geometry (even though many school children might disagree)” (Eysenck & Keane, 2005, 276). En relación al tema que nos ocupa es fundamental su Capítulo-9 titulado “Knowledge: Propositions and Images”.

465 “For centuries philosophers, linguists, and psychologists have puzzled over how we organise and represent the world “inside our heads”. A *representation* is any notation or sign or set of symbols that “re-presents” something to us, in the absence of that thing. Mental representation deals with the what and how of representation in the mind. Paivio (1986) has proposed that the problem of mental representation might be the most difficult problem to solve in all of the sciences. Of course, topics that experts find difficult, become waking nightmares for students. You should, therefore, read this chapter carefully and thought fully. This chapter and the following one are foundational. For the most part, we deal with research that has been carried out some years ago, but is of fundamental importance to cognitive psychology. In this chapter, we discuss the different ways in which knowledge appears to be organised (i.e., objects, relations, schemata) and how it can be represented in different formats (i.e., images or propositions). In Chapter 10, we look in more detail at objects, concepts, and categories. In subsequent chapters, we consider how this knowledge is used in other

procesos de razonamiento basados en *imágenes mentales*. Aunque la importancia para el pensamiento de los razonamientos con *imágenes mentales* fue ya resaltado hace más de 2000 años por Aristóteles, parece que el primero que en los tiempos modernos intentó abordar esta problemática sobre una base experimental fue Sir Francis Galton[466]. El debate se reabrió de

---

mental activities, like reading, speaking, problem solving, and reasoning. In general, several distinctions can be made between representations (see Figure 9.1). A broad distinction can be made between the *external representations* of everyday life (e.g., writing, pictures, and diagrams) and our "internal", *mental representations*. Mental representations can be viewed from two main perspectives: symbolic and analogical representations. However, with the emergence of connectionism, theorists have proposed the notion of sub-symbolic, mental representations; these are "distributed representations" stored as patterns of activation in connectionist networks (see Chapter 1). Most of this chapter presents the traditional symbolic view, but later we review the alternative connectionist position" (Eysenck & Keane, 2005, 266).

[466] "Historically, visual imagery has been studied for a long time. Over 2000 years ago, Aristotle regarded imagery as the main medium of thought. Furthermore, orators in ancient Greece used imagery-based, mnemonic techniques to memorise speeches (see Yates, 1966); a technique that is still used today as an aid to improving one's memory. This interest in imagery can be traced in a continuous line through philosophers, like Bishop Berkeley at Trinity College Dublin, to the 19th-century research of Galton (see Mandler & Mandler, 1964). Galton (1883) distributed a questionnaire among his eminent scientific colleagues, asking them to, for example, imagine their breakfast table that morning. Surprisingly enough, several reported no conscious mental imagery at all. As in Galton's studies, much of this early research relied on the use of introspective evidence. During the behaviourist era, when introspection fell into disrepute and mental representations were in a sense "banned", research on imagery lay fallow for a number of years. However, with the emergence of cognitive science, the study of mental representations once again became respectable. The main motivation behind this push was the perceived necessity to be representationally precise about the possible cognitive mechanisms. Nowadays, many researchers are working on the structure of imagery. In this section, we report on three sets of studies which illustrate several important properties of mental images" (Eysenck & Keane, 2005, 270). Aristóteles trata el tema, señalando su carácter fundamental en la cognición humana, principalmente en *De Anima* 428a-b, y también al menos en otros cuatro lugares: *Topica* 163b28, *De Anima* 427b18, *De Memoria* 452a12–16, *De Insomniis* 458b20–22). Para Thomas (2010, 2-2), "Aristotle's Greek word, that is commonly and traditionally translated as '[mental] image' is "phantasma" (plural: phantasmata), a term used by Plato to refer to reflections in mirrors or pools (or the liver), amongst other things, but which Aristotle seems to reserve to appearances in the psyche. Aristotle describes *phantasmata* as being analogous to paintings or wax impressions (*De Memoria* 450a-b), and as "a residue of the actual [sense] impression" (*De Insomniis* 461b; cf. *Rhetorica* 137a 28) or "a movement resulting from an actual exercise of a power of sense" (*De Anima* 429a 1–3). Some modern scholars, it should be noted, have questioned the translation of 'phantasma' as 'image', in part because Aristotle does not always seem to think of *phantasmata* as inner pictures, and also because he seems to think of them as playing a role in perception itself (Nussbaum, 1978; Schofield, 1978; Birondo, 2001). As Hume distinguished impressions from ideas, contemporary colloquial English distinguishes between percepts and the mental images that we experience when we fantasize, daydream, or recall some experience from memory. Aristotle's concept of *phantasma* seems to collapse this distinction. It has thus been suggested that "phantasma" would be better translated as 'appearance' (Lycos, 1964) or 'presentation' (Beare, 1906) rather than as 'image'. However, contemporary scientific theories of imagery (see sections 4.4 and 4.5) also, for the most part, do not make a sharp distinction in kind between mental images and percepts, and are virtually unanimous in holding (as, indeed, did Hume) that both are varieties of a single species. In any case, it is abundantly clear that, in many even if not all cases, Aristotle uses "phantasma" to refer to what we now call a *mental image*. *Phantasmata* have several functions paralleling those ascribed to imagery by modern folk psychology (and some scientific psychology). In particular, they are central to Aristotle's theory of memory (*De Memoria et Reminiscentia*; see Sorabji, 1972) and to his theory of thought. Not only does remembering essentially involve the recall of imagery of past experiences, but, he tells us, "It is impossible to think without an image [phantasma]" (De Memoria 450a 1; cf. De Anima 431a 15–20 & 432a 8–12). *Phantasmata* also play a key role in his account of desire and motivation (e.g. De Anima 431a — see Nussbaum, 1978): When some desirable object is not actually present to our senses, exerting its pull on us directly, our motivation to strive to obtain it is driven by our awareness of its (memory or fantasy) image. (This idea is still found in modern, scientific theories of desire (McMahon 1973; Kavanagh et al., 2005; Andrade et al., 2009).) Aristotle also apparently held that linguistic meaning derives from imagery, spoken words being but the symbols of the inner images (De Interpretatione 16a 5–9; De Anima 420b 29–32; see Modrak, 2001). Today, few theorists of language take this notion seriously (but see Paivio, 1986, 2007; Prinz, 2002), but it was almost universally accepted until

forma más general con el trabajo de Pylyshyn (1973)[467] y a partir de los años 90 con los trabajos de Kosslyn. Inicialmente la confrontación fundamental se encuentra entre la posición de Pylyshyn, que sostiene que el razonamiento en base a imágenes mentales es equiparable al razonamiento con los sistemas lingüísticos usuales –psicológicamente de origen verbal- y por tanto que opera de algún modo con proposiciones, y el enfoque de Kosslyn, quien ya en 1975 sostuvo que el razonamiento en base a imágenes mentales tiene un origen y funcionamiento distinto a los sistemas representacionales de origen lingüístico y, por tanto, no opera con proposiciones sino con *esquemas pictoriales*, basadas en experiencias visuales previas del sujeto, y transformaciones geométricas espaciales que constituirían *la gramática* de ese lenguaje, si es que se le pudiera considerar un lenguaje[468]. El enfoque de Kosslyn ha sido muy

---

relatively recent times (Wollock, 1997; and see section 3.3 below). Very arguably, Aristotle's views about imagery (*phantasmata*) cannot be fully understood in isolation from his views about imagination (phantasia), which he defined as "(apart from any metaphorical sense of the word) the process by which we say that an image [phantasma] is presented to us" (*De Anima* 428a 1–4). Aristotle has been accredited with the very invention of the concept of imagination (Schofield, 1978), and certainly it seems fair to say that the roots of most subsequent discussions of the concept can be traced back to his work (even though, for him, it did not have the strong association with creativity and aesthetic insight that it has since acquired, mostly through the influence of the Romantic movement) (Watson, 1988; White, 1990; Thomas, 1999a). Unfortunately, however, Aristotle's remarks about phantasia, suggestive and influential though they are, are scattered widely amongst the surviving texts, and the only extended discussion of the concept (in *De Anima* III.3) is particularly difficult to interpret, not only because the text that has come down to us seems to be more than usually corrupt (Nussbaum, 1992), but also because of the richness and density of its arguments and its peculiarly oblique approach to the ostensible subject matter. After over two millennia of discussion, scholars still do not agree about crucial aspects of Aristotle's conception of phantasia, and thus about his view of the fundamental nature of imagery". Una discusión más amplia sobre la posición y la influencia de Aristóteles en el tema en: **http://plato.stanford.edu/entries/mental-imagery/hellenistic-modern.html**. El tema es importante para nuestros propósitos, pues ya vimos en la Parte-I cómo la teoría cognitiva de Kant (y su misma terminología) estaba muy influída por el pensamiento de Aristóteles (o por la interpretación que Kant hizo de Aristóteles). Nuestro estudio sugiere la necesidad de una investigación más amplia de esa conexión. Un análisis detallado del tópico de las *imágenes mentales* a lo largo de la historia de la Filosofía se encuentra en (Thomas, 2010) **http://plato.stanford.edu/entries/mental-imagery/** e incluye valiosos apéndices sobre las técnicas mnemónicas usadas en la Antigua Grecia y una amplia bibliografía: **http://plato.stanford.edu/entries/mental-imagery/bibliography-mental-imagery.html**. Entre los filósofos modernos destaca por su oposición al reconocimiento del valor cognitivo de las *imágenes mentales* (tal y como se entendían al comienzo del siglo XX) Wittgenstein y, en general, todos los filósofos analíticos.

[467] "This paper presents a critique of contemporary research which uses the notion of a mental image as a theoretical construct to describe one form of memory representation. It is argued that an adequate characterization of 'what we know' requires that we posit abstract mental structures to which we do not have conscious access and which are essentially conceptual and propositional, rather than sensory or pictorial, in nature" (Pylyshyn, 1973, 1). Así, Pylyshyn se oponía a la concepción que consideraba esta actividad mental como una *actividad cuasi-perceptual*, enfoque que sostenía el primer Kosslyn (1975); los planteamientos de Kosslyn han evolucionado notablemente hasta poder hablar de un segundo Kosslyn (Gianquinto, 2007) que desarrolla una teoría de los procedimientos computacionales del cerebro humano en el tratamiento de las imágenes mentales, sin renunciar a considerar su fundamento en una actividad cuasi-perceptual. Otros autores han planteado recientemente la posibilidad de que todas estas teorías sean, en realidad, un intento de fundamentar una teoría de la *imaginación humana* (Thomas, 1999).

[468] En realidad los enfoques de Pylyshyn y Kosslyn no representan perspectivas totalmente incompatibles para una teoría cognitiva que integre los procesos de razonamiento con *imágenes mentales*, siempre que en la descripción de esos procesos se pueda codificar un *lenguaje* y su correspondiente gramática. Así, para Thomas (2010, 4-6) "the analog-propositional debate and the enactive theory of imagery concern themselves primarily with the nature and underlying mechanisms of the phenomenon, and have thus had relatively little direct impact on views about the function of imagery in cognition. In fact, both of the best known cognitive theories of imagery, the quasi-pictorial theory of Kosslyn (1980, 1994, 2005; Kosslyn, Thompson, & Ganis, 2006) (especially as philosophically glossed by Tye (1991)), and the description theory of Pylyshyn (1973, 1978, 2003b), portray imagery as embedded within and dependent upon a more fundamental, language-like mental representational system, mentalese, from which it derives much or all of its semantic content. Thus neither of these theories did much to challenge the post-Wittgensteinian consensus (see section 3.3) that

refinado en los años recientes, considerándose en realidad en él dos teorías: la inicial (Kosslyn, 1975) y la segunda (Kosslyn, 1994 y 2005), esta última apoyada sobre una pléyade de recientes estudios neurológicos y de simulaciones por computación en AI. Parece que todos los estudios empíricos avalan la tesis de Kosslyn, y se puede considerar demostrado que en los razonamientos con imágenes mentales se activan las zonas cerebrales que son comunes con las experiencias de visualización[469], y no las que corresponden a la actividad lingüística (Reed, 2010), (Brant, 2013). Todo ello ha incrementado el rol que se asigna a estas actividades mentales en los procesos cognitivos: "imagery is a basic form of cognition, and plays a central role in many human activities – ranging from navigation to memory to creative problem solving -. One of the reasons I find imagery an exciting topic is that it is likely to be one of the first higher cognitive functions that will be firmly rooted in the brain. We are well on our way toward understanding how visual mental images arise from brain activity, and in this book I will describe how such information has illuminated the mechanisms that produce,

continues to give imagery, at most, a minor, auxiliary role in cognition, with most of the burden being carried by either natural language or the more basic and more flexible representations of the hypothetical mentalese". Los términos del debate moderno original pueden verse en (Paivio, 1971). Allan Paivio (1986) intentó superar ese debate proponiendo la llamada *teoría de la codificación dual* (dual-coding theory), una teoría de la cognición que partía de su convicción de que la formación de imágenes mentales ayudaba al aprendizaje y mejoraba la comprensión. Según él, existirían dos formas a través de las cuales se podría razonar sobre un conocimiento adquirido y así expandir de hecho ese conocimiento: mediante asociaciones verbales y mediante imágenes visuales. La teoría postula que ambas codificaciones se utilizan para *representar* la *información* y para procesarla. Las informaciones visuales y verbales se procesarían por diferentes canales en la mente humana creando *representaciones* separadas para la información procesada en cada canal, y existirían unos códigos de traducción o asociación que conectarían las representaciones almacenadas en ambos canales. El proceso se podría esquematizar así (Paivio, 2006b):

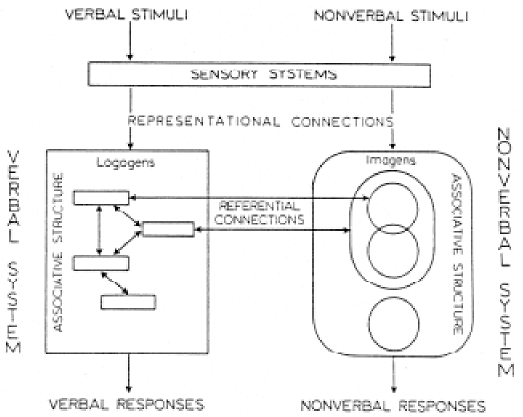


Figure 1. Structural model of dual coding theory showing the representational units and their referential and associative interconnections. The referentially unconnected units correspond to abstract-word logogens and "nameless" imagens, respectively. From *Mental representations: A dual coding approach* by Allan Paivio, Oxford University Press, Inc., 1986.

El problema es doble: por una parte, descubrir las codificaciones y mecanismos cerebrales que conectan esos dos canales así como sus mecanismos precisos de funcionamiento, y por otra parte, debería descartarse el que existan otros canales además de esos dos. En su último libro (Paivio, 2006a) y en su reciente conferencia en la Universidad de Michigan (Paivio, 2006b) el autor describe los avances experimentales que confirmarían la teoría y, sobre todo, destaca la potencia pedagógica de los métodos de enseñanza que asumen esa teoría, particularmente en Matemáticas, aportando numerosos resultados estadísticos de centros de enseñanza de USA (Paivio, 1971, 1986, 2006a y 2006b). Estudios críticos en (Reed, 2010) (Thomas, 2010) y (Eysenck & Keane, 2005).

469 Kosslyn, sobre todo en su segunda fase, distingue claramente las *imágenes mentales*, cuya adquisición se asociaría con la *memoria* (una facultad psíquica), de las *imágenes visuales* que se adquirirían por experiencia sensorial: "Mental imagery occurs when perceptual information is accessed from memory, giving rise to the experience of "seeing with the mind's eye", "hearing with the mind's ear", and so on. In contrast, perception occurs when information is registered directly from the senses. Mental images need not be simply the recall of previously perceived objects or events; they can also be created by combining and modifying stored perceptual information in novel ways" (Kosslyn & Ganis &Thomson, 2006b, 195). La *memoria* tiene un rol fundamental en todas las teorías aquí consideradas. Un estudio brillante y clásico sobre el rol de la memoria antes de la época de la imprenta, y que es citado profusamente por casi todos los autores aquí considerados, es (Yates, 1966).

maintain, interpret and transform visual mental images" (Kosslyn, 1994, 1). Pero, por un lado, no se conocen todavía a fondo los mecanismos concretos con los que opera esa actividad cerebral ni sus posibles conexiones con el lenguaje verbal y, por otro lado, los resultados experimentales pueden ser interpretados, y de hecho lo son, dentro de muy diferentes contextos teóricos. Además hay dos puntos fundamentales en el *razonamiento con imágenes mentales* que no están suficientemente dilucidados: 1) cómo, a partir de una *representación concreta*, puede generarse una conclusión de validez universal en un dominio determinado, y 2) cómo la inferencia lógica se interpreta y opera a través de esa presunta *gramática* de transformaciones espaciales mentales.

Pero el trabajo empírico que permite ya la descripción exacta de cómo operan las transformaciones admisibles en ese lenguaje[470] y su asociación con la actividad de regiones cerebrales concretas, así como su traducción a un lenguaje computacional y las consiguientes simulaciones por ordenador ha sido gigantesco en estos últimos 15 años y, en gran parte, determinan ya la evolución de la discusión[471]. Para algunos autores (Thomas, 1999 y 2010) se trataría sólo de los primeros pasos para el desarrollo de una teoría de la *imaginación humana*: "other recent work has sought to explore the relationship between current conceptions of mental imagery and the more resonant, but more nebulous, notion of *imagination* (and related concepts such as *insight* and *creativity*) (White, 1990; Brann, 1991; Finke et al., 1992; Thomas, 1997a,b, 1999a,b, 2006; Kind, 2001; McGinn, 2004; Blain, 2006). Perhaps the most ambitious claims in this regard are those of Arp (2005, 2008), who comes at the matter from the controversial perspective of *evolutionary psychology*. Arp suggests that an innate, evolved capacity for what he calls scenario visualization is unique to the human species, and is the crucial factor that has made our high-level creative problem-solving abilities possible. From this perspective, it is in large part thanks to our capacity to form and manipulate mental imagery that humankind has been able to out-compete rival species, and develop our complex cultures and technologies" (Thomas, 2010, 4-6). En definitiva, podemos resumir diciendo que

---

[470] "In a series of experiments the mental rotation of a variety of imaged objects has been examined (e.g., Cooper,1975; Cooper & Podgorny, 1976; Cooper & Shepard, 1973; Shepard, 1978 for a review; Shepard &Metzler, 1971). For example, Cooper and Shepard presented subjects with alphanumeric items in either their normal form or in reversed, mirror-image form (see Figure 9.6). In the experiment subjects were asked to judge whether a test figure was the normal or reversed version of the standard figure. The test figures were presented in a number of different orientations (see Figure 9.6). The main result was that the farther the test figure was rotated from the upright standard figure, the more time subjects took to make their decisions (see Figure 9.7). These experiments have been carried out on a variety of different objects, indicating that there was some generality to the findings; for instance, digits, letters, or block-like formshave been used. (For more recent research on mental rotation see Cohen & Kubovy, 1993; Takano, 1989;Tarr & Pinker, 1989.) The impression we get from these experiments is that visual images have all the attributes of actual objects in the world. That is, that they take up some form of mental space in the same way that physical objects take up physical space in the world—that these objects are mentally moved or rotated in the sameway that objects in the world are manipulated (see later sub-section on re-interpretation). In short, the image seems to be some "quasi-spatial simulacrum of the 3-D object" (see Boden, 1988). This view, however, is not wholly justified as there are conditions under which mental rotation effects differ from physical (…) Even in our initial description of the nature of imagery, it was hard not to mention the idea that there are propositional aspects to imagery. Some years ago, this conflict between propositions and images became the subject of considerable debate (see Anderson, 1978; Bannon, 1981; Pylyshyn, 1973, 1979, 1981, 1984). We will not rake over the embers of this debate here (see Eysenck & Keane, 1995,Chapter 9, for details; also Kosslyn, 1994). The upshot of this has been that images are a distinct representational format with distinct functional significance over and above propositional representations (later, in Kosslyn's theory)" (Eysenck & Keane, 2005, 287).

[471] Amplias referencias y bibliografía sobre los experimentos, desarrollos computacionales e investigaciones neurocerebrales desarrollados en los últimos 20 años, en (Brant, 2013), (Eysenck & Keane, 2005), (Gazzaniga & Ivry & Mangun, 1998) y (Kosslyn, 1994 y 2005), y desde un punto de vista esencialmente epistemológico en (Giaquinto, 2007 y 2008), (Mancosu 2005 y 2008) y (Manders, 2008). Un estudio y bibliografía desde un punto de vista más filosófico en (Thomas, 2010).

todas estas perspectivas consisten en un intento de profundizar en la noción de *representación* (el omnipresente y multisemántico término kantiano de *Vorstellung*), asumiendo que el pensamiento humano opera con *representaciones* de objetos y conceptos pero que esas *representaciones* deben considerar no sólo las clásicas que se corresponden en un discurso verbal (o en los lenguajes escritos o formales de origen verbal) con *proposiciones* sino también, y muy fundamentalmente, con *representaciones* basadas en *imágenes mentales* y procesos visuales. La investigación de este tópico que, como hemos visto, se remonta a la Antigua Grecia, se pretende hacer por primera vez apoyándose en el conocimiento concreto de la estructura cerebral, es decir, del *hardware* y del *software* del pensamiento humano, y dentro de un enfoque global computacional (lo que enlaza con las teorías modernas de la información que hemos analizado más arriba). Pero además, las conexiones que se vislumbran con nociones como la *imaginación* o la *creatividad* nos llevan a la reflexión –al analizar las teorías cognitivas de Aristóteles y de Kant- de que había ya en la teoría cognitiva de Kant (y en la de Aristóteles, en la que, como ya vimos se basaba Kant muy fundamentalmente por lo menos en el aspecto terminológico) un poderoso aparato conceptual para entender los aspectos principales de los procesos cognitivos humanos. No hemos analizado en este trabajo, por ejemplo, la concepción kantiana de la *imaginación*, que sin embargo tiene un rol de primer orden en su teoría cognitiva y en su conexión con su noción de *intuición*, y menos aún su conexión con la correspondientes nociones en Aristóteles. Por ello se plantea como una continuación natural de este trabajo un proyecto de investigación de estos aspectos en Aristóteles y Kant, y su interrelación, y que además podría aportar interesantes perspectivas generales a las investigaciones aquí descritas.

8.1.2.- El pensamiento visual en la Matemática moderna y la filosofía de la Matemática kantiana.

Apoyándose explícitamente en estos desarrollos de las ciencias cognitivas, se han desarrollado muy recientemente varios estudios específicamente epistemológicos centrados en el rol de las imágenes mentales y visuales en la Matemática (Mancosu 2005 y 2008, Giaquinto 2007 y 2008, Miller, 2001 y Manders 2008), y basándose en éstos un grupo de investigadores de la *Carnegie Mellon University* han intentado codificar la sintaxis y semántica visual de los *Elementa* de Euclides y traducir sus razonamientos a un lenguaje formal de primer orden y, finalmente, se ha desarrollado un programa de ordenador que realiza en un lenguaje formal los razonamientos diagramáticos y visuales de los *Elementa* reproduciendo así por computación las demostraciones de Euclides, pero ahora traducidas a un lenguaje formal simbólico según la concepción moderna (Mumma, 2006, 2010, 2011 y 2012), (Avigad & Dean & Mumma, 2009), (Dean, 2008), (Northrop, 2011). Según Marcus Giaquinto (2007, vi), "Christopher Peacocke's penetrating work on concepts, in particular his landmark volume *A Study of Concepts*, opened avenues that had previously seemed impassable to me, and Stephen Palmer's work on visual shape perception was itself an education for me [and Stephen Kosslyn's work on visual imagery and its uses], and it provided resources which, combined with Chris Peacocke's insights, enabled me to explain and substantiate a Kantian claim: the possibility of synthetic a priori knowledge in geometry". La traducción de los argumentos visuales y diagramáticos de Euclides a un lenguaje formal de primer orden y su desarrollo por computación demuestran una vez más nuestra tesis de que, en contra de la opinión general basada en los análisis logicistas que parten de Russell, no existe de hecho una ruptura entre la *práctica* matemática de Euclides, y su lógica, y la moderna.

El trabajo de Giaquinto (2007 y 2008) es especialmente relevante desde el punto de vista de la Matemática. Apoyándose explícitamente en estos recientes desarrollos de las ciencias cognitivas, aborda desde un punto de vista epistemológico los usos, desarrollos y razonamientos en base a *imágenes mentales* en la historia de la Matemática, y eso según las distintas disciplinas: Matemática elemental, Geometría, Algebra y Análisis Matemático[472] . Como dice Giaquinto (2007, v), "this book is not a mathematical text …, not a psychological investigation …, nor a How-To manual … It is a work of epistemology. But unlike almost all other writing in epistemology of mathematics, it is constrained by results of research in cognitive science and mathematics education. So the book hat interdisciplinary roots". Comienza por estudiar la forma en que se adquieren los *conocimientos* geométricos básicos, analizando ejemplos concretos y confrontándolos con los experimentos de las ciencias cognitivas realizados en los últimos 20 años. La conclusión fundamental es que, si se poseen ciertos *conceptos* geométricos elementales (por ejemplo el *concepto* de cuadrado perfecto), es posible adquirir *creencias* acerca de propiedades intrínsecas de ese *concepto* a través de *experiencias visuales* de carácter casi *perceptual*, y que dichas *creencias* tendrían el carácter de auténtico *conocimiento*[473], posibilitando *razonamientos* generales en base a objetos (perceptuales) *particulares*: "in short, having appropiate concepts enables one to 'see general in particular'." (Giaquinto, 2007, 39). Su análisis le permite concluir que esa forma de adquirir conocimientos es no-analítica y no-empírica y que "given that 'non-analytic' and 'non-empirical' translates as 'synthetic *a priori*', we arrived at a view that is at least close to Kant's often dimissed view that there can be synthetic *a priori* knowledge" (Giaquinto, 2007, 47). Eso no quiere decir que Giaquinto sostenga la tesis de Kant de que todos los conocimientos (y enunciados) matemáticos son "sintéticos y *a priori*". Primero, porque no llega a esa conclusión cuando analiza posteriormente otras partes de la Matemática. Su posición es de que "Kant claimed explicitly that *all* mathematical judgements are synthetic *a priori*. I take it that he was restricting his attention to true judgements. Even so, I think the claim is too strong on any plausible interpretation of the key terms. The dominant view in recent times is that no mathematical knowledge is synthetic *a priori* (…) My view is that, for an epistemically relevant and Kant-like interpretation of the key terms, this claim is too false" (Giaquinto, 2007, 49). Y ahí pone el dedo en la llaga, como hemos visto en la Parte-I de este trabajo cuando hemos analizado los significados de términos claves como analítico, sintético, *a priori* y *a posteriori*, puesto que, como vimos, existe una notable confusión entre los distintos autores sobre el significado de dichos términos. Pero por su parte no hay el más mínimo intento de clarificar estos términos (y el uso que él hace de ellos), por lo que su análisis adolece de una grave indefinición conceptual. Y, lo que es más grave, no ofrece ninguna explicación del modo y los mecanismos por los que el sujeto adquiriría esos *conceptos* de objetos matemáticos perfectos que posibilitarían un conocimiento general a partir de objetos visuales singulares. En el capítulo-4 explica y justifica los mecanismos a través de los cuales sostiene que es posible *descubrir* verdades matemáticas a través de

[472] Hay que decir que lo ha tenido fácil para encontrar ejemplos (su mérito está en la justificación, en la interpretación de sus aspectos cognitivos y en las conclusiones epistemológicas), pues la Matemática está llena de este tipo de razonamientos y podría incluso decirse que eran los predominantes hasta 1800. Y además, en realidad, los matemáticos nunca los han despreciado. Podrían señalarse, por ejemplo, en el siglo XX las siguientes obras fascinantes de matemáticos que señalan estos métodos como esenciales a la disciplina: (Hadamard, 1945), (Polya, 1945 y 1956), (De Guzmán, 1977) y (Hilbert & Cohn-Vossen, 1932). Este último, que escribió David Hilbert con su discípulo Cohn-Vossen en base a los cursos de Geometría que Hilbert impartió en torno a 1921 –y que recientemente se han publicado, véase la Bibliografía- se titula significativamente *Anschauliche Geometrie*. Fue traducido al inglés en 1956 con el desafortunado título de *Geometry and Imagination*; claro que era una época en que se consideraba a Hilbert como el paladín del formalismo más extremo. Hay que decir que muchos de los ejemplos que presenta Giaquinto estaban ya en ese libro, en el de Hadamard o en los de Polya.

[473] "My short answer to the question is that in having geometrical concepts we have certain general belief-forming dispositions that can be triggered by visual experiences; and if that happens in in the right circumstances, the beliefs we acquire constitute knowledge" (Giaquinto, 2007, 35).

procesos y razonamientos visuales. Primeramente señala la diferencia entre *el descubrimiento* y *la justificación* de una verdad matemática, que es una distinción fundamental que en realidad se remonta a Aristóteles[474]. “Estilo expositivo”, que significa *ordo* (orden, disposición…) o *método*; también a veces *lógica*. Lo que Aristóteles formula es que en el conocimiento y en las explicaciones razonadas en especial, es decir, en teorías científicas, hay que distinguir entre la forma y/o tiempo en que conocemos o aprendemos (hoy se dice punto de vista de la “adquisición” frente al de la “justificación”) y la forma en que las cosas relacionan entre sí. Porque para él, el orden de adquisición no tiene por qué coincidir con el orden real. Aristóteles sostiene que lo primero que conocemos (lo “primero para nosotros”, *priora nobis*) son los fenómenos externos de las cosas (forma, color, etc.), pero eso es secundario en el en-sí de la realidad (lo “primero para/según la naturaleza”, *priora naturae*), que sería la sustancia, no lo accidental. Algo análogo ocurre con el problema de las causas: las conocemos a través de sus efectos; éstos son lo primero para nosotros (en la adquisición del conocimiento de las causas), pero las causas son, en el orden ontológico, lo primero. Es evidente que en su distinción subyace un profundo orden ontológico. A la hora de exponer el conocimiento adquirido se podría seguir el orden de la adquisición, o bien un orden axiomático (de justificación racional), o bien el orden real, etc. Euclides o Newton podrían haber escrito sus *Elementa* y *Principia* describiendo los procesos cognitivos por los que ellos llegaron a descubrir sus teoremas y leyes. En principio es una cuestión de estrategia pedagógica, pero a veces ligado también a la naturaleza del objeto. De hecho, y ahí está el interés teórico, no todos los campos del conocimiento se comportan igual. El tema ha sido tratado con detalle y amplia bibliografía por Julián Pacho (1995, 38-43 y 145).

Este es un punto clave para cualquiera que conozca la historia de la Matemática. La mayoría de los teoremas matemáticos han surgido en contextos no formalizados, incluso con frecuencia como simples *conjeturas*, y su demostración (salvo en el caso de la Geometría euclídea, donde la demostración se daba frecuentemente por construcción, aunque hay que decir que esos resultados nos han llegado ya como un *corpus* completo a través de los *Elementa* y que no conocemos nada del proceso de gestación y de las discusiones que lo generaron) ha estado ligada al desarrollos de una teoría formalizada en ese campo, que luego se refinaba y a veces se subsumía en un campo más general que permitía una demostración *más elegante*. Pero además, el proceso de axiomatización desarrollado por Hilbert en los *Grundlagen*, en donde los enunciados geométricos se traducían en enunciados analíticos que daban lugar a demostraciones puramente analíticas sin ninguna conexión con los originales de los *Elementa*, plantea un punto de vista *expositivo* de un tipo distinto consustancial a las ciencias modernas. Giaquinto sostiene que en el *descubrimiento* de verdades geométricas los

---

[474] La distinción aristotélica “primero para nosotros” y “primero según la naturaleza” se encuentra en Aristóteles (*Met.*, I, 982a 20 - 982b 7; *Anal. post.* I, 72a 1 sgs.; *Anal pri.* II, 68b 35 sgs; *Top.*, 105a 16 sqq.) Según esta distinción, lo que nos es dado inmediatamente (*priora nobis*), las realidades empíricas, sólo satisface al conocimiento sensible, mientras que lo “primero según la naturaleza” (*priora naturæ*) sólo es cognoscible mediante el entendimiento (*Anal. post.*, II, 88b, 30; 90b, 27; cfr. también Leibniz: *Nouv. Essais*, II, 4, § 1). Ahora bien, *priora naturæ* es precisamente equivalente a la “cosa en sí”, “lo primero”, “lo universal”, “la causa...” (cfr. p. ej. Boethius: *In Isag. Porphyrii* II, in: *Corpus scrip. eccl. lat.* (1906) 48, 1, II 157; Averroes: *In Phys.*, ed. Venezia 1562, 4.6-8; Th. de Aquino: *Summa* Th. I, 11, 2 ad 4; I, 77, 4c; I, 85, 2-3). De esta distinción está tomado el binomio cartesiano “orden de las razones/orden de las cosas”. Como Descartes parte en sus *Meditaciones* del *cogito* y después llega a demostrar la existencia de Dios, que a su vez garantiza al *cogito*, muchos sostuvieron que su metafísica partía de un principio que, en realidad, no era el primer principio en el orden real (Dios). Descartes respondió diciendo que el texto aducido no seguía el “orden de las cosas”, sino el “orden de las razones” y, según él, también el de la adquisición del conocimiento: Dios es lo primero en el orden ontológico, pero no es lo primero que conocemos si partimos de una duda radical.

procesos visuales tienen un rol fundamental. Analiza a fondo varios ejemplos de los que deduce que "visual imagination seems to play an important role in extending geometrical knowledge" (Giaquinto, 2007, 50), y además "visualizing may be thought of as a kind of internal experiment, a process that constitutes both performing the experiment and observing its outcome" (Giaquinto, 2007, 57). Y concluye: "while the experience of visualizing is similar to the experience of seeing, the *epistemic role* of visualizing can be utterly different from the primary, evidence-providing role of seeing (…) we can say that visualizing in this case is part of an *a priori* means of adquiring belief (…) it is a part of an *a priori* means of discovery (…) [and] thus the process is essentially visual" (Giaquinto, 2007, 67). Y esto sí que constituye un análisis muy próximo al propio del esquema cognitivo kantiano, tal y como nosotros lo hemos interpretado, y en donde la *construcción de conceptos* que se realiza en la *intuición* constituiría la clave para la caracterización de los enunciado matemáticos. A esa conclusión parece también llegar Gianquinto en relación con la Geometría: "there is no analysis of meanings, and no deduction from definitions in the process. In philosophers' jargon the process is *a priori* but not analytic; rather it consists in the operation of a synthesis of visually triggered belief-forming dispositions. Hence it may be appropriately regarded as a synthetic *a priori* route to knowledge (…) So we have some reason to accept Kant's view (or a view close to it) that some geometrical knowledge may be synthetic *a priori*" (Giaquinto, 2007, 68). Está claro que su posición no coincide con la de Kant[475], para quien *todo* enunciado matemático (y no sólo geométrico) sería sintético *a priori*, pero demuestra que, a la luz de una epistemología apoyada en los modernos estudios neurocerebrales, la posición de Kant (al menos en parte) no es en absoluto disparatada, sino que está bien fundada de acuerdo con los modernos desarrollos de las ciencias cognitivas. En su análisis de otras partes de la Matemática, los resultados de Giaquinto son menos concluyentes en relación con la importancia de los procesos visuales, pero hay que destacar su análisis de los *razonamientos diagramáticos*, que tanta importancia tienen incluso hoy en extensas áreas de la Matemática moderna[476]. Partiendo de la distinción entre una demostración y la presentación de una demostración (*a proof* and *a presentation of a proof*) su análisis (Giaquinto, 2007, 71- 89) le lleva a la conclusión de que en algunas demostraciones hay partes de un razonamiento que involucran diagramas y en las que éstos no son ni superfluos ni reemplazables, lo que plantea la necesidad de dilucidar la naturaleza del razonamiento diagramático en relación con el habitual razonamiento proposicional de origen verbal. Naturalmente que encuentra también otros ejemplos en los que el razonamiento diagramático es meramente auxiliar y reemplazable, aunque con frecuencia esencial desde un punto de vista heurístico o pedagógico. Se plantea así una dualidad en el rol de los razonamientos diagramáticos. Aunque ese rol parece ser distinto habitualmente en la Geometría, el Algebra, el Análisis y la Teoría de Números, para Giaquinto no tiene sentido una distinción radical entre los métodos de estas disciplinas [477], pues todas ellas se basarían en la ejecución de las mismas habilidades cognitivas, fundadas todas esencialmente en la *visualización*, que sería en última instancia la clave de toda habilidad matemática. Así, en su análisis de las *líneas numéricas mentales*

[475] Sobre este punto Giaquinto (2007, 48) sólo se remite a los siguientes pasajes de la *KrV*: Introduction V.1 B14; B16; A25/B39-41, pero no incluye las citas y tampoco las comenta. Más adelante (2007, 123-127) cita los pasajes B14 y B15-16 y los comenta en el contexto de la discusión sobre el carácter empírico o no empírico de la Aritmética elemental y discute la concepción de Mill.

[476] Los *razonamientos diagramáticos* eran, por lo que sabemos, los preferidos de los pitagóricos, que los utilizaban incluso para demostrar teoremas de la teoría de números. En el ejemplo concreto que analizamos en el siguiente apartado se podrá entender su carácter.

[477] "Now I want to argue for a more aggressive claim: any division of mathematical thinking into just two kinds –algebraic-geometric, symbolic-diagrammatic, or whatever- is liable to be misleading" (Giaquinto, 2007, 253).

(*mental number lines*), que esencialmente consistirían en representaciones mentales de los números naturales y de los reales junto con la noción de orientación izquierda-derecha (Giaquinto, 2007, 90-120), llega a la conclusión de que, probablemente basadas en estructuras mentales innatas[478], están en la base de nuestra construcción del cálculo numérico y de nociones básicas como la *magnitud* y el *tiempo*. En su análisis de los aspectos visuales del cálculo numérico (Giaquinto, 2007, 121-136) y del Algebra (Giaquinto, 2007, 191-212) remarca la importancia en estos campos de los razonamientos diagramáticos y la posibilidad de considerar los símbolos como *formas espaciales* manipulables por transformaciones espaciales y sin contenido semántico[479], llegando a un enfoque muy similar al de Hilbert – aunque no le menciona en ningún momento[480]. Parece lógico si tenemos en cuenta que la posición de Hilbert en este punto se basaba en su interpretación de la intuición kantiana en su aspecto restrictivo de *intuición de formas*, y Giaquinto reflexiona de hecho desde la misma perspectiva que Kant y su identificación con la lectura de la filosofía de la Matemática kantiana que hemos realizado nosotros es total cuando concluye que "one might say that the role of visualizing is conceptual rather than empirical" (Giaquinto, 2007, 156). La mayor ventaja de estos cálculos ininterpretados sería que facilitan el estudio de *estructuras abstractas* (Guiaquinto, 2007, 205). Y concluye que "symbolic and spatial thinking, then, are not mutually exclusive; on the contrary symbolic thinking falls within spatial thinking" (Giaquinto, 2007, 241), dentro de la más genuina interpretación hilbertiana de Kant. Giaquinto resalta con ejemplos concretos la importancia de esta noción *visual* de la *intuición geométrica* en los desarrollos de la Matemática moderna que pretenden una cognición de *estructuras abstractas* (tanto finitas como infinitas). Y en esto consiste en realidad el desarrollo fundamental de la Matemática moderna que marca una diferencia con los desarrollos de la Matemática hasta el siglo XIX, y no en lo señalado anteriormente por Russell o Cassirer (su carácter *deductivo*). La relevancia del análisis de Giaquinto (2007, 214-

---

[478] "Is this interaction just a lucky accident? Probably not. The fact that we so easily acquire and internalize a mental number line, as well as the fact that some of us form a mental number line independently of school instruction, suggests that we have an innate propensity to form a number line representation once we have acquired a written numeral system. Such a propensity may be a special case of a disposition to represent totally ordered systems of items, such as alphabets, as a line. It is also an instance of the disposition found in innovative mathematicians to integrate symbolic and diagrammatic representations, a disposition whose fruitfulness is beyond dispute" (Giaquinto, 2007, 116).

[479] "Substitution, relocation, copying, deletion, and insertion are among the major classes of symbol manipulation. Some or all of these are performed in visual imagination, when moving from one term or formula to another. It is likely that in *some* case, especially symbol relocation, the visualizing has a motor element. Kosslyn distinguishes between motion-encoded and motion-added transformations in visual imaging" (Giaquinto, 2007, 203). "An advantage of rules of formal symbol manipulation is that they can be applied asemantically, that is, without any thought of what the composite symbol or its constituents express or denote. Thus one source of possible error is removed (…) Of course, formal rules cannot be used to make new discoveries or prove old ones unless they can be justified, and their justification has to be semantic" (Giaquinto, 2007, 193-194).

[480] Giaquinto sólo se refiere a Hilbert al considerar un pasaje en el que Gödel comenta la posibilidad de extender la concepción del *programa finitista* propuesto por Hilbert (Giaquinto, 2007, 231), pero desarrollando sólo el planteamiento de Gödel. También cita varias veces sin comentarios la obra de Hilbert y Cohn-Vossen (1932), de donde ha extraído varios ejemplos. Resulta curioso el hecho de que no lo cite expresamente ni lo relaciones con las tesis expuestas en sus obras, ni siquiera al comentar la interpretación de las transformaciones algebraicas como *percepción de formas*, según la propuesta de Hilbert, y resulta curioso porque en el primer trabajo publicado por Giaquinto (1983) *Hilbert's philosophy of mathematics* se trataba precisamente del *programa finitista* de Hilbert, del que concluía su vigencia parcial. Además, en su trabajo publicado en 2002 *The Search for Certainty. A Philosophical Account of Foundations of Mathematics*, realizaba un análisis exhaustivo de las contradicciones en la Matemática moderna, y su mismo título *The Search for Certainty* es ya todo un programa sobre su contenido. Tal vez habría que buscar la razón en el carácter del trabajo de Giaquinto que comentamos, que no es en absoluto un tratado sino una obra muy breve en donde remarca ciertos puntos clave con citas mínimas.

267) consiste en que prueba que los métodos, y los mecanismos epistemológicos, son sin embargo básicamente los mismos que en la matemática clásica. Claro está que en estas teorías estructurales modernas la intuición geométrica desempeña un rol a niveles distintos. Por ejemplo, el la teoría de grupos abelianos los objetos pueden interpretarse como objetos matemáticos muy diferenciados; por ejemplo, puede considerarse el grupo de los enteros con la suma, o bien el grupo de la rotaciones de un espacio vectorial euclídeo con la adición de ángulo de rotación. En la teoría general, los objetos pueden considerarse intuitivamente como puntos y utilizar razonamientos diagramáticos, y también el desarrollo algebraico de la teoría las transformaciones de símbolos ininterpretados se basan en una intuición geométrica ya descrita; aunque, interpretada la teoría como el grupo de rotaciones de un espacio vectorial euclídeo, se le puede añadir también la intuición geométrica propia de esos objetos genuinamente geométricos.

En lo que se refiere al Análisis, que en la época de Kant tampoco estaba desarrollado, el análisis de Giaquinto es meramente una introducción que exigiría por la importancia del tema un estudio más a fondo y, de hecho, podría dar lugar a una tesis doctoral completa. Es, con diferencia, su parte más débil. Sólo indicaremos algunas líneas maestras a nuestro juicio, al vuelo de su descripción. El Análisis Matemático (o Cálculo Infinitesimal) se desarrolló y consolidó en el siglo XIX, a partir de las primeros esbozos iniciados por Newton y Leibniz, de la mano de Cauchy, Weierstrass, Dirichlet y Dedekind (y podríamos añadir a Cantor), y en su desarrollo se mezclan los problemas lingüísticos para la precisión de las variaciones numéricas "infinitamente pequeñas" e "infinitamente grandes", con el manejo de la noción de infinito, con la creación y desarrollo de la noción de *conjunto,* con la creación y desarrollo de la noción de *función* y con la creación y precisión de la noción del *conjunto de números reales*. Y este proceso está asociado a la aparición de contradicciones en la teoría y de entes extraños que desbarataban todo intento de comprensión intuitiva, lo que fue precisamente el origen de la *crisis fundacional* de los años 20. Aquí hay que resaltar el fascinante estudio del tema realizado por el Prof. Ferreirós (2007, 2008 y 2012) y al que remitimos al lector encarecidamente. Giaquinto (2007, 163-190) comienza resaltando la diferencia de opiniones entre los matemáticos actuales con respecto al rol de la intuición geométrica en el Análisis. Contrapone la opinión de Littlewood, quien "thought that a diagram could provide proof of an analytic theorem", con la de Landau, cuya obra está enteramente construida en base a argumentos analíticos y sin ninguna referencia gráfica[481]. Y según él mismo señala, "visual

[481] Se refiere a (J. Littlewood, *Littlewood's* Miscellany, Cambridge: Cambridge University Press, 1953 (1986)) y a (E. Landau, *Differential and Integral Calculus*, trans. Hausner and Davis, New York: Chelsea 1950 (1934)). En este punto Giaquinto parece estar bastante perdido; no sólo las referencias están totalmente desfasadas, sino que parece decantarse por una obra clásica, a medio camino entre ambas, como la de Tom M. Apostol (T. Apostol, *Mathematical Analysis*, Reading Mass.: Addison Wesley, 1957) y (T. Apostol, *Calculus*, New York: Wiley, 1967). Ambas obras están traducidas al español en la editorial Reverté. Sin embargo, su información es poco exhaustiva y poco convincente. Él mismo debería saber que, a lo largo del siglo XX, la bibliografía anglosajona del Cálculo, y todavía más la rusa, era predominantemente con aplicaciones geométricas. Mi favorito es, con diferencia, la obra de Michael Spivak (M. Spivak, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1967. Existe traducción española en Editorial Reverté, 1992 y 2003), y que es la que utilizo en mis clases de Cálculo. Claro, que donde Landau necesita sólo 200 páginas, Spivak necesita más de 1000. Pero es que tampoco la elección de Landau es muy acertada. Basta consultar a cualquiera de los colaboradores de Bourbaki (por ejemplo, la obra *Análisis* de Jean Dieudonné), para encontrar el extremo opuesto a Spivak y aún más claro que en Landau; esta tendencia ha tenido una amplia influencia en la Universidad española, y bastaría aquí citar la obra de los profesores de la Universidad de Zaragoza J. Garay, J.L. Cuadra y M. Alfaro, "Una Introducción al Cálculo Infinitesimal", Departamento de Teoría de Funciones, Zaragoza 1974; excelente libro de 325 páginas, sin un solo gráfico o referencia visual, simplemente una pura demostración analítica. Claro, que es un libro excelente para aquél que ya domina el Cálculo, porque la pregunta aquí es fundamentalmente de índole didáctica: ¿qué es lo esencial para dominar el Cálculo, *al margen de sus esfuerzos de justificación*, que en gran parte sólo podrían realizarse analíticamente? O dicho

thinking is also immensely useful in other ways when learning calculus and analysis. This is shown by frequent use of diagrams in teaching and texts introducing calculus. I doubt that there is a soul who could have made much headway in calculus without any use of diagrams". Pero, tras de su análisis de algunos teoremas (Rolle, Cauchy, Lagrange y el Teorema del Punto Fijo) concluye que, aunque es posible que pudiera desarrollar un papel central en el *descubrimiento* de algunos teoremas del Análisis (Giaquinto, 2007, 174), no se adapta sin embargo a las exigencias que implica el Análisis. Se basa en dos puntos. En su primera conjetura indica que "this is a common view: visualizing in analysis, though heuristically useful, is not a means of discovery, let alone proof (…), or is there something peculiar about analysis which bars visualizing except as provider of illustration and stimulus? (…) Why does visualizing so often fails as a means of discovering (even simple) general theorems in analysis, when in Euclidean geometry the reverse is true? (…) thus there is a tight intrinsic link between the perceptual concept and the geometrical concept (…) But analytic concepts are not intrinsically linked to perceptual concepts" (Giaquinto, 2007, 163 y 178). Esta falta de "link", explicada como siempre sin abrir un auténtico debate de naturaleza filosófica y más bien en un plano de conjetura, pone de nuevo el dedo en la llaga de algo que para nosotros es esencial en nuestra lectura de Kant: la naturaleza que liga la *construcción* de conceptos con la naturaleza del objeto. Más interesante si cabe es su segunda conjetura, y que se basa en la distinción "between a proof an idea for a proof" (Giaquinto, 2007, 180) y que repite de forma análoga en varios pasajes. En efecto, aunque tampoco abre un debate filosófico –y ni siquiera una referencia-, la relación entre un debate *explicativo* y un debate *justificativo* se remontaría ya a Aristóteles, y aquí tendría una importancia clave por la complejidad de los conceptos involucrados. Para terminar, culmina con éxito su trabajo al demostrar (Giaquinto, 2007, 137-162) cómo es posible, a partir de un objeto concreto (visual o imaginado como tal) llegar a un teorema de validez general: "first I describe two examples of what look like acceptable routes to general theorems in which visualizing has a non-redundant role (…) I give a positive account of how it is possible to use visual imagery together with arithmetical concepts to reach a general theorem in a reliable way". Nuevamente aquí sus *demostraciones* son *contra-ejemplos*, pero la importancia de recurrir a la *conceptualización* y demostrar la existencia de ese *link* los hace relevantes. A pesar de sus defectos, algunos aquí reseñados, la investigación de Giaquinto es muy importante desde cuatro aspectos fundamentales:

1º) Primero, plantea una nueva forma de hacer epistemología de la Matemática. Una epistemología restringida y autolimitada por los avances realizados en los últimos tiempos en las ciencias cognitivas y neurociencias. El mayor fallo de Giaquinto consiste en pretender un desarrollo desde cero, sin plantear ninguna discusión filosófica digna de tal nombre y obviando incluso los planteamientos de autores recientes de la Matemática como Hilbert, y que abre un camino sesgado. Porque el camino fructífero viene de la confluencia de ambos planteamientos. El hecho cierto de que estemos en su obra planteando la posibilidad de una convergencia, en base a los resultados más recientes de las ciencias cognitivas, con los planteamientos realizados por Kant en filosofía de la Matemática y cien años menospreciados, sitúa la evidencia de que Kant no contó evidentemente con estos resultados cognitivos. Ciertamente que es sólo el primer intento, pero en general bastante exitoso. Como indica Giaquinto (2007, 264-265), "interest in visual thinking in mathematics is having a revival somewhat ahead of interest in mathematical discovery and explanation. In recent years there has been considerable effort in showing the efficacy of visual methods as means of proof (…) The indications of this preliminary study are that valuable taxonomy of visual thinking in mathematics is likely to be complicated and may need several dimensions: it will take some

de otra forma, ¿la Pedagogía del Cálculo está más cercana a su procedimiento *genético*, de creación, o a su procedimiento *justificatorio*? En una primera fase a nivel elemental, creo que a su procedimiento genético.

time to emerge (…) Here is abundant terrain for research. Contributions can be expected from mathematics education, history and philosophy of mathematics, and computer science; but above all I would look to, and advocate, research in the cognitive sciences. As yet we have barely started".

2º) Segundo, la convergencia que Giaquinto se plantea con la Filosofía de la Matemática de Kant es real. Si bien no suscribe la afirmación de Kant en toda su extensión, en el sentido de que *todo* enunciado matemático sería sintético y *a priori*, sí confirma la coincidencia con Kant en lo que se refiere a la Matemática de Euclides y a una parte relevante de la Matemática moderna. Nosotros sólo podíamos hasta hoy conocer y reflexionar sobre las consecuencias en nuestro campo consciente de los procesos cerebrales; es lo que se podría llamar el *epifenómeno*, y que tradicionalmente se ha denominado *filosofía*, *epistemología* o *teoría del conocimiento*. Giaquinto vuelve la vista a los fenómenos subyacentes, muy recientemente conocidos. Parece (véase el apartado anterior) que los modernos desarrollos de la ciencias cognitivas y neurocerebrales sostienen la existencia de dos sistemas cognitivos diferenciados, bien situados en determinadas áreas cerebrales, y que generan la existencia de estímulos cognitivos en sus respectivas áreas, produciendo la existencia de un *pensamiento* único, cada uno con su propia codificación. Puede suponerse que el cerebro genera espontáneamente los mecanismos de codificación y descodificación, dentro de una teoría general de la información. Dichos mecanismos son aún poco conocidos, pero el avance en este campo no se ha detenido. Recientemente Jack Gallant (2014) y su equipo de la Universidad de Berkeley han descrito el éxito obtenido al obtener imágenes cerebrales, descodificarlas con potentes algoritmos diseñados al efecto, y obtener sobre una pantalla imágenes correspondientes a los que el sujeto visualizaba; hasta la fecha sólo se han obtenido imágenes concretas (rostros, árboles, objetos) pero no de ideas o imágenes abstractas[482] . Para Gallant, el objetivo de estas investigaciones debería centrarse en el desarrollo de un decodificador que tradujese los pensamientos en lenguaje verbal: "se convertiría en el traductor universal definitivo, y podría utilizarse hasta para controlar un coche con el pensamiento", concluye. Algunos de los científicos que están trabajando en la decodificación de los pensamientos ya habían logrado con anterioridad reconstruir con cierta precisión las caras de las personas en las que estaban pensando un grupo de voluntarios; en este experimento llevado a cabo por investigadores de la Universidad de Yale (Cowen & Chun & Kuhl, 2014) se utilizó un software más preciso para asociar las señales del cerebro con las características faciales[483]. Parece natural que se investigue, y se debe investigar porque, como

---

[482] La página del Prof. Gallant y de su equipo en la Universidad de Berkeley: **http://gallantlab.org/**, **http://neuroscience.berkeley.edu/users/users_profile.php?id=12**. "Computational encoding models that accurately predict brain activity have many practical uses. First, they provide a critical foundation for other work aimed at rehabilitation of visual function; after all, one needs to understand how a system functions before one can hope to repair it. Second, these models provide a new tool for neurological evaluation and diagnosis. Third, the models can be inverted in order to decode brain activity, providing a direct and principled way to do 'brain reading', and to build brain-machine interfaces (BMI) and neural prosthetics" Jack Gallant (2014, **http://neuroscience.berkeley.edu/users/users_profile.php?id=12**).

[483] Alan S. Cowen, Marvin M. Chun, Brice A. Kuhl, "Neural portraits of perception: Reconstructing face images from evoked brain activity", *NeuroImage*, vol.94, 12-22, 2014. Accesible online (previo pago): **http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053811914001633**.
Para los autores, "This methodology not only represents a novel and promising approach for investigating face perception, but also suggests avenues for reconstructing 'offline' visual experiences—including dreams, memories, and imagination—which are chiefly represented in higher-level cortical areas". Todas estas investigaciones se iniciaron hace aproximadamente 10 años. Las primeras investigaciones y estudios evaluatorios más recientes: Cfr., Haxby, J. V. et al. *Science* 293, 2425–2430 (2001); Cox, D. D. & Savoy, R. L. et al. *NeuroImage* 19, 261–270 (2003); Horikawa, T., Tamaki, M., Miyawaki, Y. & Kamitani, Y. *Science* 340, 639–642 (2013); Kay, K.N.& Naselaris, T.&Prenger, R.J., & Gallant, J.L. (2008). "Identifying natural images from human brain activity". *Nature*, 452, 352-355. Una discusión más general con amplia bibliografía

apunta Giaquinto, estamos hablando de lo que parece un nuevo enfoque de la epistemología y, en general, de las ciencias cognitivas (incluyendo aquí la didáctica).

3º) En relación con lo anterior debe matizarse lo siguiente. El objetivo de la investigación principal, esto es, la determinación de las características principales del sistema cognitivo kantiano y su aplicación a la filosofía de la Matemática, así como su interpretación –a veces más restrictiva y, en un sentido más general, más amplia- por Hilbert, y el rol que en ambos jugaba la intuición, ha quedado dilucidado en las partes I y II de este trabajo. En esta parte-III el objetivo fundamental consiste en aclarar la validez o virtualidad de ambos esquemas cognitivos, según los resultados de las ciencias modernas y sus sistemas representacionales. Y en este campo no pueden existir dogmas *a priori*. Si hace 250 años Kant, con una apoyatura científica mínima, llegó donde llegó, eso habla del poder que, pese a todo, parece que tiene todavía hoy la Filosofía (entendida como "una crítica sobria"). Si hoy descubrimos, a la luz de lo comentado más arriba, que su epistemología de la Matemática parece esencialmente válida en su interpretación de la Matemática de su época y de una gran parte (o de toda) la Matemática actual, no quiere decir que una modificación de su interpretación, o incluso una modificación radical, devalúe su valor, que en el peor de los casos sería histórico. Más aún, el esquema cognitivo kantiano es *sólo una propuesta*. Y han podido existir otras propuestas, algunas en gran parte equivalentes como la propuesta de fundamentación de la Matemática realizada a principios del siglo XX por el neokantiano Ernst Cassirer, que tal vez pudieran permitir en su desarrollo capacidades explicativas superiores. Pero esto excede a nuestro trabajo, cuyas exigencias son más modestas; en la evaluación final del trabajo cuando estaremos en condiciones de juzgar la validez actual de la epistemología de la Matemática de Kant y Hilbert, que es nuestro objetivo, y hasta qué punto.

4º) En la obra de Giaquinto aparecen reiteradas referencias a la importancia que su interpretación tendría para una correcta Didáctica de la Matemática. Eso también se sostiene reiteradamente para Kosslyn. Y está en plena concordancia con lo reiteradamente expuesto en este trabajo, en la línea defendida por René Thom, entre otros. Una continuación directa de este trabajo consistiría en explicitar las consecuencias aquí contenidas para una Didáctica de la Matemática.

Desde un punto de vista mucho más crítico, Jeremy Avigad (2009) realiza un amplio repaso sosteniendo la mayoría de las críticas que hemos planteado más arriba. Señala que "the historical context I have provided is relevant insofar as it is impossible to provide a meaningful assessment of Giaquinto's project without addressing the broader question of the role that psychological data can or should play in the philosophy of mathematics. Since my remarks will be generally critical, I want to make one point clear up front: Giaquinto has written an important book". Avigad cita la significativa afirmación de Frege en los *Grundlagen*, que ya hemos citado varias veces, de que "must be a sharp separation of the psychological from the logical, the subjective from the objective", y añade que "that attitude has held firm, at least in analytic philosophy, to the present day" (Avigad, 2009, 3). Esa era, como vimos, precisamente la posición de Kant pero en relación con la Lógica. Nuevamente aparece aquí la confusión de la Lógica con la Matemática que, a estas alturas, debería estar ya suficientemente clarificada. Pero Avigad parece plantearse la posibilidad de que la Matemática exceda con mucho a la Lógica, y en cierta forma la supere: "but a lot has changed since the turn of the twentieth century (…) Many now feel that if the philosophy of mathematics is to have any bearing on mathematics itself, the subject has to attend to the

---

en: David Cyranoski, *Nature* 486, 178–180 (14 June 2012) **http://www.nature.com/news/neuroscience-the-mind-reader-1.10816**.

kinds of value judgments that govern everyday mathematical practice, and provide a more realistic description of the goals and purpose of mathematical activity. In this last respect, the goal of navigating a complex world with limited cognitive resources seems to be a reasonable candidate, in which case the nature of those cognitive resources becomes relevant. Moreover, psychology now seems much better equipped to deliver" (Avigad, 2009, 3). Y una acusación recurrente al planteamiento de Giaquinto es la de "psicologismo". Avigad se remonta al explicar los planteamientos de Giaquinto a Wundt y al primer Husserl[484]. Pero si los planteamientos de estos autores a comienzos del siglo XX pudieran considerarse psicologistas (como precisamente los planteamientos dominantes sobre Kant en esa época), las consideraciones de fondo de Giaquinto tienen muy poco que ver con la psicología. Se trataría de neurociencia y ciencias cognitivas, que tendrán sus implicaciones específicas en el campo de la psicología, pero que de lo que en realidad se ocupa es de sus consecuencias en el campo de la epistemología de la Matemática y cuyos resultados no pueden obviarse. Precisamente el planteamiento de Giaquinto resulta, en cierto modo, un reverso del planteamiento que realizó Hilbert en los *Grundlagen der Geometrie*. Hilbert consiguió con éxito traducir la obra exclusivamente geométrica de Euclides a un sistema formal de proposiciones, y realizó las demostraciones geométricas mediante transformaciones analíticas. Además consiguió extraer un sistema de axiomas que facilitara esas demostraciones. No se trata aquí de saber si con esa *exposición* se favorece el aprendizaje de la Geometría o se dificulta (de nuevo la distinción aristotélica entre el discurso expositivo y el creativo); se enmarcaba en el amplio movimiento analítico que dominó el siglo XX. Pero Giaquinto realiza el proceso inverso: no sólo la Geometría euclídea, sino una gran parte de la Matemática moderna pueden ser *traducidas* a un lenguaje visual siendo evidente el carácter de sus demostraciones. Tal vez la reticencia de Avigad a reconocer el carácter innovador de esta perspectiva se oculte en un par de pequeñas líneas:

> "What roles do diagrams play in proofs? What kinds of information can be recorded in diagrams, and what are the consequences that can validly and transparently be inferred? How do we distinguish between features of the diagram that are essential from the ones that are incidental? These questions provide a basis for rich and rewarding epistemological inquiry" (Avigad, 2009, 12).

Y estas cuestiones son realmente esenciales. Se trata de la validez objetiva y de la intersubjetividad que, hasta la fecha, no han sido convenientemente resueltas dentro del enfoque visual. Pero Avigad demuestra un profundo conocimiento de los mecanismos matemáticos cuando indica que, contra toda lógica y contra todo estudio analítico, "the point is simply that in ordinary mathematical practice, certain inferential steps are taken to be immediate and in need of no further explanation. Understanding the mathematics involves accepting these inferences" (Avigad, 2009, 12). A pesar de su enfoque general negativo Avigad parece ver en el fondo una posibilidad[485]. Aunque muchas de sus observaciones están

---

[484] Wilhelm Wundt (1832- 1920) desarrolló la mayor parte de su trabajo en la Universidad de Leipzig. considerado como psicólogo experimental (precisamente la categoría a la que Kant excluyó de toda influencia en su epistemología, aunque, eso sí, con 120 años de diferencia) se le considera un pensador neokantiano aunque, en realidad su influencia decisiva fue John Stuart Mill. Husserl lo cita con frecuencia en su primera época de fundamentación de la Matemática y Avigad (2009) los pone en relación, conectándolos a ambos con los supuestos subyacentes a la obra de Giaquinto. Puede parecer exagerado a la vista de nuestro análisis, pero alguna conexión debe haber, puesto que la obra de Wundt es profusamente citada por los autores que desarrollaron en USA en los años 70 del siglo XX (y a los que nos hemos referido más arriba) el *imagery debate* que estaba en la base de los recientes desarrollos neurológicos y cognitivos.

[485] "But this does not mean that these are the only reasonable approaches. I have argued that some of the basic presuppositions of Giaquinto's project are problematic, but that does not rule out the possibility that other ways of incorporating psychological data into the philosophy of mathematics will be more fruitful. And even if Giaquinto's book does not succeed in attaining its stated goals, it succeeds in a more important way.

muy lejos de ser demostradas, el trabajo de Giaquinto constituye el primer paso, obviamente con muchos huecos, para investigar una nueva epistemología de la Matemática. Y parece bastante claro que desde su enfoque las tajantes distinciones entre la Matemática anterior al siglo XIX y la Matemática moderna se difuminan notablemente, de acuerdo con la tesis que sostenemos[486].

8.1.3.- Un nuevo enfoque de los *Elementa* de Euclides y de los *Grundlagen* de Hilbert.

El trabajo de Giaquinto lleva al planteamiento de tres líneas de investigación bien diferenciadas: Primero, el desarrollo de un trabajo epistemológico que detecte las regularidades sintácticas y semánticas de los procedimiento matemáticos de visualización y, por tanto, de su carácter intersubjetivo. Segundo, el análisis de las distintas partes de la Matemática moderna involucradas en su obra, y su exposición sistemática desde un punto de vista visual. Tercero, el análisis de la Matemática anterior al siglo XIX, y en particular la de Euclides, para profundizar en su análisis visual y justificar su correspondencia con las exposiciones analíticas del siglo XIX, aspecto que ya había abordado Hilbert[487]. Parece que en los últimos seis años ha tenido lugar un desarrollo fundamentalmente en este último sentido. Se ha producido en los últimos años un intento de explicar los trabajos de Euclides desde una nueva perspectiva. Giaquinto (2007, 84) señala ya el trabajo pionero de Nathaniel Miller (2001) quien en su tesis doctoral demuestra que la totalidad de los teoremas exclusivamente geométricos de Euclides se pueden demostrar mediante un razonamiento diagramático, que él denomina el sistema **FG** (*formal diagrammatic system of Euclidean geometry*). Los sistemas diagramáticos no son reemplazables, salvo tal vez por otros sistemas diagramáticos y, como

---

Giaquinto's explorations of various types of visual reasoning in mathematics, and his exploration of geometric, arithmetic, analytic, symbolic, and structural reasoning, show that our capacities for mathematical thought are structured in deep and subtle ways. A variety of disciplinary approaches will be needed if we are to appreciate the subject in all its complexity and grandeur. By challenging us to embrace the complexity and think about how different disciplinary perspectives fit together, Giaquinto has done us a great service" (Avigad, 2009, 13).

[486] Paolo Mancosu en su artículo "Visualization in Logic and Mathematics" (Mancosu, 2005), y aunque el libro principal de Giaquinto aún no había sido publicado, intenta presentar un resumen de las diversas influencias que han confluido en este movimiento que presenta como "el regreso a lo visual como un cambio en el estilo matemático". Para él consistiría básicamente en dos corrientes bastante distintas. De un lado, pensadores como Giaquinto, influidos por los aspectos psicológicos, neurológicos o cognitivos, que plantean un cambio en las prioridades epistemológicas del análisis de la Matemática, y entre los que se puede incluir a (Kosslyn, 1980 y 1983), (Shepard & Cooper, 1982), (Denis, 1989), (Larkin & Simon, 1987), (Glasgow et alt., 1995), (Kaufmann, 1979) y (Kaufman, 1979). (Butterworth, 1999) y (Deheane, 1997) incorporan los últimos avances en el estudio del funcionamiento cerebral en relación con el cálculo numérico, pero aportan relativamente pocos elementos visuales. Para una referencia exhaustiva de los autores de este tipo en ese periodo, véase (Antonietti et alt., 1995). Y de otro, un grupo de pensadores cuyo interés en los argumentos visuales está motivado en gran parte por la *proof-theoretic foundational tradition*, y que han conseguido rescatar en gran parte los antiguos razonamientos diagramáticos y geométricos de su indefinición y ambigüedad (Allwein & Barwise, 1996), (Shin, 1994), (Barwisw & Etchemendi, 1996). Y podríamos añadir ahora un tercer grupo con autores como Jeremy Avigad y el grupo de investigadores de la *Carnegie Mellon* (Mumma, Dean, Northrop) quienes, sin tener un enfoque lógico tan estricto como los anteriores, se han inspirado en ellos. Así, para Mancosu (2005, 21), "while Giaquinto was mainly concerned with discovery … Barwise and Etchemendy focus on proof". También señala (Mancosu, 2005, 20) que la reacción contra una concepción puramente simbólica de la Matemática ha tenido también una reacción dentro de la propia disciplina, con tratados que presentan el tópico desde una perspectiva geométrica en Topología, en Análisis Complejo, etc. Por ejemplo (Fomenko, 1994) y (Needham, 1997). O también más recientemente a (Marquis, 2009) con su obra "From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory".

[487] Keneth Manders realiza una amplia exposición lógica y geométrica del uso de los razonamientos diagramáticos en Euclides y, en general, en la geometría. Incorpora las referencias bibliográficas más actuales sobre el tema. Véase (Manders, 2008a y 2008b). Markus Giaquinto (2008a y 2008b) utiliza muchos de los diagramas de Euclides, a los que se refiere Manders, para un estudio epistemológico más general.

Giaquinto (2007, 84) subraya, “certainly one cannot follow this argument in FG without visual thinking”. Ciertamente que existe aquí una estructura de sintaxis y semántica aún no bien estudiada y, más allá, una correspondencia con las estructuras sintácticas y semánticas de los predicados verbales en los lenguajes de origen visual. De forma que la seguridad (*sound*) que los razonamientos sobre predicados verbales nos facilitan, pueden traducirse, en ciertas circunstancias aún no bien especificadas, en *pensamientos visuales*.

Por otro lado, el trabajo realizado por Mumma (2006 y 2010) supone un cambio cualitativo. En su Tesis doctoral (2006 y 2010) titulada *Intuition formalized: Ancient and Modern Methods of Proof in Elementary Geometry* y supervisada precisamente por Jeremy Avigad, desarrolla una explicación de casi la totalidad de las demostraciones geométricas de los *Elementa* a través de un sistema formal, denominado **Eu**, y que caracteriza todas las demostraciones de Euclides como esencialmente diagramáticas; se trata de un sistema formal de demostración que contiene una tipología simbólica diagramática y reglas para manejar lógicamente el uso de esos símbolos en las demostraciones y “within the system one can produce derivations that match Euclid’s arguments closely, often step for step”. Esto se produce por un esquema particular de inferencia en donde los invariantes posicionales de una configuración geométrica son aislados en un diagrama. Mumma sostiene que esto ha sido posible obviando los postulados de continuidad implícitos como primitivos en Euclides bajo el supuesto, fundamentado en una progresiva aritmetización de la Matemática que afecta también a áreas muy importantes de la Matemática moderna, de que “continuous geometrical notions, such as those Euclid takes as primitive, are not taken to have a solid mathematical foundation until they are reduced to discrete, arithmetical ones” (Mumma, 2014). Pero Mumma es consciente también de las implicaciones ontológicas en relación con la geometría euclídea, es decir, en relación con el carácter de las figuras y de los puntos, algo ajeno a otras ramas de la Matemática, y “in my analysis of Euclid, mathematical content is not separated from Euclid’s mathematical reasoning. Correct application of the inference scheme of the analysis requires an understanding of certain geometric concepts”. El trabajo realizado no sería puramente diagramático, sino que los resultados se justificarían tanto desde una simbología sentencial como diagramática, y apela a la propuesta de Hannes Leitgeb en relación con la teoría de la demostración en el sentido de que “the semantic and intuitive components of mathematically proofs are epistemically interdependent” (Leitgeb, 2009) por lo que “what **Eu** isolates as sentential in Euclid’s proofs would fall on the semantic side of Leitgeb distinction, while what they isolate as diagrammatic would fall on the intuitive side” (Mumma, 2014). Mumma se plantea algunas preguntas fundamentales para él sin respuesta: ¿cuál sería la naturaleza de las representaciones mentales intuitivas (i.e. no-proposicionales) que fundamentarían las inferencias que serían instancias de los esquemas de inferencia de su análisis? ¿Cuál sería la relación entre esas representaciones internas con los símbolos externos en los que consiste una derivación en **Eu**? En su trabajo (Mumma, 2008b) intenta comparar su formalización en **Eu** con el trabajo realizado por Nathaniel Miller (2001 y 2007) con el sistema **FG**, al que nos hemos referido más arriba, comparando sus ventajas e inconvenientes. Para Mumma, ambos trabajos explotan el hecho de que las inferencias diagramáticas de Euclides dependen exclusivamente de la topología del diagrama. También en ambos sistemas los símbolos consideran el hecho de que los diagramas de Euclides consisten en objetos discretos que se individualizan en las demostraciones exclusivamente por su topología. La diferencia entre **FG** y **Eu** radicaría en la forma en la que se asegura una demostración para alcanzar el grado de generalidad de los resultados de Euclides. Mientras que **Eu** especifica un procedimiento para interpretar un diagrama ya construido en términos de otro que debería construirse, **FG** recurre a una enumeración de todos los casos y reconstruye todos los pasos: “there is in **Eu** a context dependence to diagram use, which enables one to bypass the (something very long) case analyses required by **FG**” (Mumma, 2008b, 222). Pero además, Mumma sostiene que la comprensión de las propiedades lógicas de **Eu** permite llevar a implementar el sistema en un programa de computador, lo que debería ser según él el próximo paso. La razón es que “claims formulated in **Eu** have a natural interpretation in terms of first order formulas composed of the primitives of such an axiomatization” (Mumma, 2008b, 234), y sería relativamente rutinario chequear la consistencia relativa de **Eu** con la de cualquier axiomatización moderna de la geometría elemental, entre las que tendríamos que incluir la axiomatización de Hilbert en los *Grundlagen*. Sin embargo, respecto al tema de la completitud de tal sistema, reconoce los defectos de **Eu**, y se remite a un sistema más general denotado por **E** y que se esboza en (Avigad, Dean y Mumma, 2009). La perspectiva de una computación efectiva de **Eu** parece que se cumplió en poco tiempo y Benjamin Northrop (2011) en su Tesis titulada *Automated Diagrammatic Reasoning. A proof checker for the language of E* parece haber construido un tal sistema de computación para el sistema ampliado **E**. Sólo quedan por extraer las consecuencias lógicas y epistemológicas, que en este texto ya se apuntan[488].

Sin embargo, en un texto muy reciente Nathaniel Miller (2012) intenta demostrar que el sistema **Eu** tenía graves problemas de inconsistencia, conclusión a la que llega repasando detenidamente los procedimientos que determinan los diagramas. Pero además señala que “we have shown here that Eu is inconsistent, unable to derive many simple correct claims, and contains a construction rule that may be undecidable” (Miller, 2012, 20) y encima “this result shows that almost none of the propositions in Book IV of Euclid's Elements are provable in Eu” (Miller, 2012, 16) y para terminar “Eu is unsound, incorrect, and inconsistent” (Miller, 2012, 9). Podría pensarse que esos defectos podrían corregirse con una redefinición de algunos aspectos básicos, pero Miller sostiene que eso es imposible dada su estructura general y que el sistema **FG** propuesto por él mismo tendría muchas mejores propiedades metamatemáticas. Aún en este supuesto, eso no desbarataría ni la nueva vía emprendida por Mumma ni la suya propia. Porque Mumma, además de sus propuestas técnicas que pueden ser discutibles en aspectos puntuales, intenta extraer las consecuencias epistemológicas para la Matemática de estos planteamientos. Así, dedica el Capítulo-2 de su Tesis “Eu, Euclid, and Hilbert” a contrastar la diferencia entre sus planteamientos y los desarrollados de David Hilbert en los *Grundlagen* 110 años antes y comparando con las distintas interpretaciones de los *Elementa*: “in this chapter I explore how **Eu** illuminates the mathematics of Euclid’s *Elements* and Hilbert’s *Foundations*” (Mumma, 2006, 123). En esta comparación entre las características de la epistemología de la Matemática entre Euclides, Kant y Hilbert (y **Eu**) realizada en apenas 40 páginas (Mumma, 2006, 123-161), Mumma aborda un número excesivo de temas, sin una clara conexión entre ellos, a veces de forma confusa y repetitiva y

---

[488] El sistema creado por Northrop en su tesis, denominado **EPC** (E Proof Checker), es un programa de software escrito en Java que permite verificar las demostraciones realizadas en el estilo diagramático de Euclides escritas en el sistema diagramático **E**, creado por Avigad, Dean y Mumma (2009), es decir, las traduce a representaciones geométricas. El programa se puede bajar e instalar de **http://www.bennorthrop.com/e/e-proof-checker.php.** Northrop describe en su tesis las características esenciales del método de Euclides: “euclidean proofs all maintained a similar structure: specific geometric configurations (e. g. points, lines, circles, etc) were constructed on a diagram, and then inferences were made based on this configuration, to the eventual outcome of some new proposition. Some of this methods of inference mapped directly to definitions, postulates, or propositions previously established, but others appealed to an intuitive diagrammatic reasoning which the reader was presumed to have had. Euclid would simply ‘read off’ properties from the diagram, and assume that the reader would trust that this inferential leap was indeed generally valid (and not a specious artifact of the specific diagram that was drawn” (Northrop, 2011, 3). Northrop resalta que muy recientemente un grupo de filósofos y matemáticos “have sought to revisit Euclid’s *Elements*” para intentar dar un sentido riguroso a sus razonamientos diagramáticos. El trabajo de Northrop sería la demostración computacional de la validez de sus resultados.

en gran parte con una deficiente e insuficiente justificación. Se trata más bien de afirmaciones gratuitas que se supone que deberían justificarse por el contexto. Con todo, hay algunos temas que deberían resaltarse. Para empezar, resalta ante todo la idoneidad de **Eu** para capturar la exposición geométrica de los *Elementa* y también la de cualquier axiomatización moderna y, en especial, la de Hilbert. Para él la razón de la adecuación de **Eu** a los *Elementa* debería buscarse el que los razonamientos implícitos que constituirían la parte lógica de esa obra quedan reflejados en las transformaciones diagramáticas de su sistema, de tal forma que la *lógica* quedaría incorporada a su sistema visual; sería algo así como una traducción visual del cálculo proposicional[489]. Está claro que se trata de una propuesta fundamentalmente lógica, un mecanismo de traducción visual del cálculo proposicional, y también está claro que no había leído a Giaquinto, entre otras razones, porque su trabajo fue posterior. Nosotros lo hemos incluido aquí como una continuación de las propuestas de Giaquinto porque sus conclusiones pueden leerse en el sentido de esa propuesta. Vemos aquí una reaparición significativa de los términos clásicos en relación con las propiedades de un sistema axiomático, pero esta vez en relación con sistemas inferenciales *visuales* en lugar de analíticos. Lo que está sin aclarar desde un punto de vista epistemológico es el carácter de esos razonamientos lógicos, la relación entre los esquemas diagramáticos y los analíticos, y, lo que parece más relevantes, la relación entre los esquemas lógicos y los intuitivos. En la obra de Mumma, las reiteradas referencia a la *intuición* quedan absolutamente inexplicadas, así como el rol que ésta jugaría. Esto es todavía más claro en su defensa de la adecuación de **Eu** al sistema axiomático desarrollado por Hilbert.

En su interpretación de Hilbert y su aportación con los *Grundlagen*, Mumma llega a conclusiones muy parecidas a las principales que hemos obtenido en la Parte-II. Para él, el trabajo de Hilbert en los *Grundlagen* se caracterizaría esencialmente por su carácter *sintético*. En relación con la Geometría, los autores distinguen sistemáticamente entre axiomatizaciones analíticas y sintéticas, y la de Hilbert tendría el mismo carácter fundamental que la de Euclides usualmente reconocida como sintética, en contra del punto de vista habitual en el siglo XX y, sin embargo, "Hilbert took the synthetic perspective seriously. It played for him a non-trivial role in shaping the character of an axiomatic foundation of elementary geometry" (Mumma, 2006, 140). Como él mismo reconoce, "I first consider how it is difficult to see in synthetic methods anything significant if we understand them in purely logical terms" (Mumma, 2006, 134). Y consiguientemente en su interpretación las continuas referencias a la *intuición* en Hilbert, que el autor considera coincidiendo con nosotros que serían fundamentales, quedan envueltas en una vaguedad e indefinición, aunque él mismo dice que "it is necessary to make clear what these basic intuitive facts are". Hay que decir que muchos de sus comentarios (Mumma, 2006, 140) sobre Hilbert no se basan directamente en los *Grundlagen* o en las conferencias de la época que hemos analizado en la Parte-II, sino en las recientes ediciones de Hallett y Majer de los manuscritos de cursos impartidos por Hilbert en Göttingen (Hilbert, 2004). Y concluye que "accordingly, for Hilbert, the role of intuition in

---

[489] "In this sense, the moves one must make in the logical proof are essentially the same as the moves one must make in the demonstration of an Eu proof to establish a result. From a logical point of view, these moves are all that is required to prove the theorem. There is no need to represent, as Eu does, a particular instance of the theorem in a particular diagram. It is enough to carry out the argument with general geometric principles, be they represented by logical sentences or by rules for manipulating diagrams. This perhaps was Leibniz's point in saying that the 'force of the demonstration is independent of the figure drawn … it is the universal propositions, i.e. the definitions, axioms, and theorems already demonstrated, which make the reasoning, and which would sustain it though the figure were not there'. This raises the question: why include the construction in an Eu proof, if all the information necessary for the proof is present in the demonstration? The answer, recall, has to do with the way proofs in the Elements are presented and read" (Mumma, 2006, 159).

the foundations of elementary geometry is robust" (Mumma, 2006, 141). Además, también Hallett llega a posiciones próximas a las nuestras al concluir que "Hilbert defends a position according to which geometry is pure mathematics in much the way that arithmetic is, and yet still has intuitive content and is still a natural science" (Hilbert, 2004, 46). Mumma también señala que, de acuerdo con la sugerencia de Ulrich Majer (1995), comentada ampliamente en la Parte-II, que "the geometric topics Hilbert list fall safely within the sinthetic tradition. And these he connects to basic facts of our daily experience" (Mumma, 2006, 140) y que se relacionaba íntimamente con los enunciados análogos de Husserl y a los que se refiere Mumma explícitamente citando el artículo de Majer (2006, 142). Pero para Mumma, "it may be possible to develop such a theory. But it is not necessary. We do not need to consider any extramathematical (y aquí quiere decir lógica) facts about the nature of spatial cognition. Hilbert's primitives and axioms can be adequately understood as performing a definite mathematical task: to characterize the diagrammatics proof of **Eu**" (Mumma, 2006, 142), con lo cual se contradice a sí mismo en sus afirmaciones anteriores respecto al compromiso *intuitivo* de Hilbert pues claro que, sea lo que este fuera, superaba el aspecto lógico. Mumma se acerca a la esencia del problema cuando señala una importante característica de la Matemática moderna, según se comienza a entender en los últimos 10 años. Señala que "examples abound in mathematics of proofs which are valued not because they establish a previously unknown truth, but because they provided new insight into an accepted truth. This suggests that mathematicians look to proofs not just to satisfy themselves that a theorem is true, but to achieve an *understanding* of *why* it is true" [el énfasis es mío, FS]. Es decir, no se trata tan sólo de demostrar la verdad de un teorema, en lo que los lógicos han aportado mucho, sino de demostrar además el *porqué* y generar un *entendimiento* de ese proceso[490]. Y en esto la referencia esencial es el *objeto*[491].

---

[490] Coincide en su análisis con Jamie Tappenden, según indica Mumma, para quien "it is of course a truism that in mathematical practice we seek understanding, not just logical cogent argument" (Tappenden, 2005, 147-214). Según él se trataría de dar las demostraciones que son equivalentes respecto de su valor cognitivo lógico en términos que evidencien su capacidad para engendrar *entendimiento* (understanding). También coincide con la opinión de Avigad (2010a), que se expresa en idéntico sentido. Para Avigad, "the philosophy of mathematics has long been concerned with determining the means that are appropriate for justifying claims of mathematical knowledge, ant the metaphysical considerations that render them so. But, as of late, many philosophers have called attention to the fact that a much broader range of normative judgments arise in ordinary mathematical practice; for example, questions can be interesting, theorems important, proofs explanatory, concepts powerful, and so on. The associate values are often loosely classified as aspects of 'mathematical understanding' .". A pesar de las críticas realizadas por Avigad a Giaquinto, la filosofía de la Matemática de Avigad es bastante sutil y muy documentada; una explicación breve y precisa se encuentra en las conferencias que en 2010 impartió en Paris y Pittsburg (Avigad, 2010a). Para Avigad sería precisamente el desarrollo de las ciencias computacionales, con sus esquemas y diagramas gráficos, una de las causas de este cambio de perspectiva, y otra causa sería el desarrollo de programas de software que reproducen y mejoran, o encuentran nuevas, demostraciones en Matemática. El rigor, por tanto, se desplaza desde los planteamientos teóricos del cálculo proposicional a los planteamientos prácticos de sus aplicaciones computacionales, en los que el rigor lógico está asegurado. También para (Mancosu, Jorgensen & Pedersen, 2005,1), "in the 20th century philosophy of mathematics has to a great extent been dominated by views developed during the so-called foundational crisis in the beginning of that century. This view have primarily focused on questions pertaining to the logical structure of mathematics and questions regarding the justifications and consistency of mathematics … the focus has turned thus to a consideration of what mathematicians are actually doing when they produce mathematics … in connection with an understanding of mathematics".

[491] Y esto implica un compromiso ontológico, más allá, o por debajo de la relación de consecuencia lógica. Para Mancosu (2008b), éste es uno de los más recientes giros de la filosofía de la Matemática, y que permite también entender a autores anteriores al siglo XX de otra manera. Pero, sobre todo, sostiene que es una propuesta de investigación. Y el estudio de las consecuencias de la *visualización* en la Matemática, o la revisión de Euclides, serían sólo una parte de esa perspectiva. Para Mancosu (2008b, 2), "the ontology of mathematics could also benefits from a closer look at how interesting ontological issues emerge both in

8.1.4.-Valoración y análisis de un ejemplo concreto.

Las conclusiones de Mumma (2006 y 2009), aunque planteadas desde una perspectiva distinta y menos general que las de Giaquinto –quien reivindica a Mumma y Miller como un avance significativo en sus perspectivas-, confirman también algunas conclusiones esenciales de nuestra investigación sobre Kant y Hilbert. Es evidente que todos los análisis anteriores refuerzan considerablemente las conclusiones obtenidas en las Partes-I y II de nuestros análisis de Kant y Hilbert, rompiendo con gran parte de los lugares comunes en los estudios del siglo XX. Y es claro también que la situación en la epistemología de la Matemática es muy distante de la hegemónica hace ahora 100 años a raíz de la publicación de los *Principia* de Russell. Para analizar algunas de las implicaciones metodológicas sugeridas y su relación con nuestro análisis de Kant y Hilbert y el rol de la intuición, podría ser de interés el plantear un ejemplo concreto que permita *comprender*[492] los conceptos involucrados.

---

connection to some of the epistemological problems mentioned above (for instance, issues concerning the existence of 'natural kinds' in mathematics) and for mathematical practice itself (issues of individualization of objects and structuralism in category theory)". Sin embargo, sostiene, su mayor beneficio sería la ampliación del rango de la epistemología de la Matemática al considerar las "different epistemic virtues" (Mancosu, 2008b, 15) que el análisis de la *práctica* matemática puede arrojar de las distintas interpretaciones (y demostraciones) de una teoría o de un teorema. Las características ontológicas de un objeto se pueden manifestar más fácilmente por su *comportamiento* en la *práctica*, si es que queremos huir de una definición esencialista que, desde la perspectiva kantiana, está excluida. Aunque sería posible desde una perspectiva platónica como la de Gödel o René Thom; el problema es que nadie ha podido hasta hoy definir esos entes con exactitud, si excluimos un acto de fé metafísico. Pero Mancosu se equivoca al considerar que la situación en la filosofía y epistemología de la Matemática previa a este cambio de punto de vista en el siglo XXI, y que "engendered an extremely narrow view of mathematical epistemology within mainstream philosophy of mathematics, due partly to the over-emphasis on ontological questions … to the problem of access to 'abstract objects' " (Mancosu, 2008b, 1-2). Al contrario, las cuestiones ontológicas de la Matemática fueron desechadas en beneficio o bien de la búsqueda de una fundamentación puramente lógica de la Matemática, o bien de la priorización de la inferencia lógica en su análisis, si exceptuamos los casos de Hilbert -que como hemos visto fue en general muy mal comprendido en el siglo XX- y Gödel.

492 Este concepto de *understanding*, al que nos hemos referido un poco más arriba, parece que se entiende perfectamente cuando se lee. Pero el análisis de su significado en este contexto presenta matices y un contenido conceptual muy amplio. Para *entender* una teoría matemática y el *porqué* de su evidencia, una demostración puramente inferencial de su verdad no es suficiente. Aquí habría que incorporar ese proceso de *visualización*, y los conceptos epistemológicos y neurológicos que, como hemos visto, implican. Pero, además, un concepto clave en esta perspectiva que ha alcanzado recientemente una gran relevancia es la noción de *mathematical explanation*. Para Mancosu (2008c, 134), "mathematical explanation goes back to the Greeks, the recent revival in the analytic literature is a welcome addition to the philosophy of mathematics". El significado se suele dividir entre las *explicaciones matemáticas* de los hechos científicos y las *explicaciones matemáticas* de las teorías matemáticas. La discusión comenzó con los trabajos de Mark Steiner (1978a y 1978b) y de Philiph Kitcher (1975). El debate en relación con la aportación y el significado de las teorías matemáticas a los hechos científicos experimentales podemos obviarla, puesto que se sale de nuestro tema. Aunque muchas veces el desarrollo de una teoría matemática *dentro* del contexto científico empírico (física, biología, sociología, economía, etc) aporta en sí un conocimiento, una *explicación* de una cualidad superior para esa teoría matemática, aunque sólo sea por el hecho de encontrar un *modelo* real. Además, esa discusión desborda el marco puramente epistemológico y tiene muchas conexiones con la historia de la Matemática y con la Filosofía en general. Aunque nadie hasta la fecha ha podido dar una explicación convincente de esa *aplicabilidad* y menos aún del hecho de que un mismo modelo matemático se aplica a realidades empíricas absolutamente distintas. Véase (Batterman, 2001), (Colyvan, 2001 y 2002), (Melia, 2000 y 2002), (Shapiro, 2000), (Leng, 2005) y (Baker, 2005). Centrándonos en la *explicación* de las teorías matemáticas, Mancosu (2008c, 138) sostiene que las discusiones en curso se basan en dos enfoques, el de Steiner (1978a y 1978b) y el de Kitcher (1975, 1984 y 1989). Como señala Mancosu (2008c, 141), "the history of the philosophy of mathematics shows that a major conceptual role has been played by the opposition between proofs that convince but do not explain and proofs that in addition to providing the requiered conviction that the results is true also shows *why* it is true". Desde un punto de vista filosófico, esa tradición comenzaría con la distinción aristotélica entre *to oti* y *to dioti*, y sería una tradición con un largo recorrido en los escritos de muchos matemáticos (Harari, 2008), (Kitcher, 1975) y (Mancosu, 1996, 1999,

La distinción entre los tipos de demostración, que los matemáticos realizan habitualmente, se fundamenta en gran parte en una distinción que se remonta a Aristóteles con su distinción entre *to oti* y *to dioti*, que hemos discutido en parte en la nota anterior (Aristóteles, *Analytica posteriora*, A13, 22 a 78 y B3, 90b 9-10 y A2, 71)[493], y que fue

---

2000 y 2001). Esta oposición entre *explanatory and not-explanatory proofs* no es solamente una oposición de contenido filosófico o histórico, sino que se puede considerar un *dato* fundamental de la práctica matemática y que suele llevar muchas veces a los protagonistas a expandir las notaciones matemáticas creando nuevos conceptos que ello conlleva y, a veces, a nuevas generalizaciones. El punto de vista de Steiner (1978a y 1978b) consiste en hacer hincapié en esta contraposición de demostraciones y en analizar sus procedimientos y consecuencias, aunque no se apoye explícitamente en la distinción aristotélica. Pero a veces, estas nuevas generalizaciones llevan a un cambio conceptual que genera una nueva disciplina y en la que la antigua se sumerge, creando nuevos estilos de demostración y una visión más general (por ejemplo, la inmersión de los números reales en el cuerpo de los complejos, y en el que se cumple el Teorema Fundamental del Algebra). Y esto lleva a una descripción más global y holística que la basada exclusivamente en la oposición simple de *explanatory and not-explanatory proofs*, el cual sería el punto de vista de Kitcher (1975, 1984 y 1989). Steiner (Mancosu, 2008c, 143) discute y rechaza algunas características que en principio harían posibles los modelos demostrativos explicativos como grado de abstracción o generalidad de una demostración, visualización, etc. y propone que "that to explain the behaviour of an entity, one deduces the behaviour from the essence or nature of the entity (Steiner, 1978a, 143). Para evitar las dificultades de las nociones a las que recurre introduce el concepto de *characterizing property*, la cual significaría "a property unique to a given entity or structure within a family or domain of such entities or structures", y lo que distinguiría a las demostraciones explicativas de las no explicativas sería la manera en la que involucra en la demostración a esas *propiedad característica* y las variaciones de esa propiedad que permitirían una generalización. Unas críticas a este modelo en (Resnik & Kushner, 1987), (Hafner y Mancosu, 2005) y (Weber & Verhoeven, 2002). Para Kitcher, que tiene una teoría mucho más elaborada, la cuestión principal es "how does mathematics grow?" (Kitcher, 1984, 194) que le lleva a considerar como fundamental la expansión del lenguaje matemático a través de una generalización. Y ahí distingue entre generalizaciones significantes y no significantes, que marcarían la distinción entre demostraciones explicativas y no explicativas. Pero, además de discutir el sentido de las generalizaciones significativas, Kitcher plantea además la rigorización y la sistematización "as sources of understanding and explanation" (Kitcher, 1984, 227). Y en su ultima obra, donde plantea un *modelo científico unificacionista*, que ya hemos discutido anteriormente, subraya la relevancia de esta perspectiva para la Matemática: "the fact that the unification approach provides an account of explanation, and explanatory asymmetries, in mathematics stands to its credit" (Kitcher, 1989, 437). Una explicación detallada de esta perspectiva en (Hafner & Mancosu, 2008). Estudios detallados del tema en (Hafner & Mancosu, 2005) (Cellucci, 2008a, 2008b y 2011a) y (Mancosu, 1999b, 2000, 2001, 2008c). Pero el *understanding*, además de entenderse en términos de *visualización* y de *explicación matemática*, incorporaría muchos otros conceptos como "the purity of method". Michael Detlefsen (2008) analiza la idea de "purity as an ideal of proof" y Michael Hallett (2008) analiza la perspectiva de "the purity of method in Hilbert", y de su análisis, que en gran parte coincide con el nuestro, podemos concluir que ésta era una de sus perspectivas principales de Hilbert para el desarrollo de la Matemática y que compartía una "visión unificacionista" de la ciencia. Muchas ideas parecen, sin embargo, que se repiten en estos análisis, aunque de otra forma. Por ejemplo, estas nociones de "pureza", que también se remontan a Aristóteles (Detlefsen, 2008, 179-181) tienen, en realidad, mucho en común con la concepción básica expresada por Steiner. El problema tiene mucho que ver con la concepción realista o nominalista de los objetos matemáticos. En un brillante estudio Orna Harari (2008) de la Universidad de Tel- Aviv examina la cuestión de "why in Proclus' view genetic processes provide demonstrative explanations, in light of the interpretation of Aristotle's theory of demonstration in late antiquity. I show that in this interpretation mathematics is not an explanatory science in the strict sense because its objects, being immaterial, do not admit causal explanation. Placing Proclus' account of demonstrative explanation in this context, I argue that this account is aimed at answering the question whether mathematical proofs provide causal explanation as opposed to grounds. I show further that Proclus can answer this question in the affirmative due to his realist view of mathematical objects and the priority he ascribes to causal relations over logical relations". De modo que muchas de estas cuestiones hunden sus raíces en la más remota antigüedad, cuestiones que hemos olvidado, y de cuyo estudio tal vez podamos obtener nuevas conclusiones. Así, aunque esa noción de *understanding* parezca entenderse a la primera, su análisis nos lleva a una riqueza de matices de gran complejidad que supone una significativa ampliación en la epistemología de la Matemática.

[493] En las citas señaladas Aristóteles hace la distinción: *to oti* (*demonstratio quia*) = demostración/explicación de qué (esto es el caso), y *to dioti* (*demonstratio propter quid*) = demostración/explicación de por qué (esto es

ampliada por Descartes. Cellucci (2011a, 5-8) observa que la distinción de Descartes añade un importante matiz. La distinción de Aristóteles entre *demonstration that* y *demonstration why* y la de Descartes entre *axiomatic demonstration* y *analytic demonstration* sugiere dos diferentes aproximaciones a una *demostración explicativa;* mientras que la *demostration why* aristotélica tendría un carácter estático, la *analytic demonstration* cartesiana tendría un carácter dinámico:

> "According to the static approach, a demonstration of P is explanatory if it is an axiomatic demonstration that gives an answer to the question: Why is the case that P? according to the dynamic approach, a demonstration of P is explanatory if it is an analytic demonstration that gives an answer to the question: How can one arrive to P?" (Cellucci, 2011a, 7).

Y en el siguiente ejemplo veremos que incluso esa distinción se queda corta pues, en efecto, pueden existir distintas demostraciones de cada tipo planteadas desde campos matemáticos diversos y con distinto grado de *evidencia intuitiva*. Vamos a considerar el enunciado de la teoría elemental de los números naturales, conocido desde la Antigüedad, en el que se asegura que la suma de los n primeros números naturales se puede calcular considerando la mitad del producto de ese número n por su sucesor $n+1$, y daremos cuatro demostraciones de naturaleza radicalmente distinta.

---

o no el caso). Este tema ha sido estudiado detenidamente en (Cellucci, 2011a) y también, con todas sus implicaciones, incluso las heurísticas, en (Cellucci, 2005, 2008a, 2008b y 2014), (Hafner & Mancosu, 2005) y (Mancosu, 1999b, 2000, 2001, 2008c). Cellucci traduce ambos términos, respectivamente, por *demonstration that* y *demonstration why* (Cellucci, 2011a, 4), o también *knowing that* y *knowing why*, porque el tema está muy relacionado con nuestra discusión anterior sobre los tipos de conocimiento (conocimiento explicativo y no explicativo). La relación entre *demostraciones explicativas* y *comprensión* (*understanding*), que también fue objeto de nuestra discusión anterior, es tratado por Cellucci en (Cellucci, 2011a, 13 y ss.), donde concluye que "genuine understanding can come only from a genuine explanation. In particular this can be said of demonstration", donde resume las relaciones entre los tres conceptos. Para Aristóteles, la distinción entre "knowing that (*to oti*)" y "knowing why (*to dioti*)", llevaría a una distinción paralela entre dos clases de demostración, que la mayoría de los matemáticos suelen resaltar, y establece que mientras que en una "demonstration that (*tou oti*)" la causa no estaría establecida, en la "demonstration why (*tou dioti*)" la causa sí quedaría establecida, por lo que la primera daría lugar a un conocimiento *no explicativo* y la segunda a un conocimiento *explicativo*. E incluye un buen número de ejemplos. Cellucci razona indicando que para Aristóteles, de acuerdo con su concepto de demostración, sólo sería realmente una demostración (y, por tanto, originaría un auténtico *conocimiento*) las *demonstration why*, y, además habría que distinguir entre las demostraciones puramente matemáticas y las *aplicaciones* de una demostración matemática al conocimiento de una ciencia natural. Existen, sin embargo, autores modernos que niegan la relevancia de una tal distinción para la matemática, basándose en el hecho de que las *demonstration that* coincidirían con las modernas demostraciones basadas en un sistema axiomático y, por lo tanto, serían demostraciones plenas que no exigirían nada más (Resnik & Kushner, 1987, 151-155), (Sierpinska, 1994, 19-76), lo que contradice las afirmaciones explícitas de numerosos matemáticos y se fundamentaría en el moderno supuesto de que "una demostración matemática es sinónimo de demostración axiomática" (Sierpinska, 1994, 19). Para Cellucci, "but this is only one concept of demonstration. As it will be argued in this paper, there is also another concept of demonstration, according to which demonstration is a means for discovery solutions to problems. Therefore, the assumption that 'demonstration' is synonymous with 'axiomatic demonstration' is unjustified" (Cellucci, 2011a, 2). Esta posición ha sido argumentada hasta la saciedad en este trabajo, y coincide con las posiciones de Polya (1945 y 1956), De Guzman (1977), y otros varios autores ya discutidos anteriormente. La distinción fue matizada por Descartes quien, aunque el método axiomático (llamado por él *método sintético*) "demuestra la conclusión claramente" no sería satisfactorio "puesto que no demostraría como el *objeto en cuestión fue descubierto*"; el método correcto, llamado por Descartes *método analítico*, consistiría en que "el análisis mostraría el verdadero camino por el que un objeto es descubierto metódicamente (…) y serían las causas las que se demostrarían por sus efectos (…) lo que serviría, no sólo para demostrarlas, sino para explicarlas" (Descartes, 1996, VII, 155-156) y por lo que "existiría una gran diferencia entre una mera demostración y una explicación" (Descartes, 1996, II, 198).

<u>1) Demostración standard.</u> Denotamos con P(n) al enunciado: $\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Entonces el enunciado P(n) es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

1.- Si n=1, entonces P(1) es trivialmente cierto: $1 = \frac{1(2)}{2}$

2.- Supongamos que P(n) fuera cierto para n=k, siendo k un número natural cualquiera.
Bajo este supuesto (hipótesis de inducción) sería cierto: $\sum_{i=1}^{i=k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.

Veamos que, bajo ese supuesto, P(n) será cierto para el siguiente n=k+1:

$$\sum_{i=1}^{i=k+1} i = (1+2+...+k)+(k+1) \underset{h.i.}{=} \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Luego, teniendo en cuenta 1.- y 2.-, por el Principio de Inducción Completa
(o Matemática o de Peano) se sigue que P(n) es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esta es la demostración habitual en cualquier manual de Matemática moderna. Obsérvese que los conceptos fundamentales involucrados son:

- el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales como un conjunto infinito bien definido con la suma como estructura de semigrupo conmutativo. La suma puede definirse en términos del “sucesor”, y el producto en términos de la suma.
- la relación conjuntista de “pertenencia” $\in$.
- el Principio de Inducción Completa (Matemática o de Peano).

Algunos comentarios. Ya vimos en la Parte-II las dificultades de fundamentación que estas tres nociones involucraban, y las discusiones al respecto en la primera década del siglo XX. Por lo demás, es una demostración puramente matemática, en la que se entremezclan fórmulas simbólicas con argumentos en el lenguaje natural. Una demostración lógica exigiría definir un número natural a través de la función “sucesor”, demostrar el Teorema de Peano, y hacerlo a través de una cadena simbólica sin consideraciones en el lenguaje natural. Por supuesto que se puede hacer, pero desvirtuaría totalmente el carácter del teorema.

<u>2) Demostración algebraica.</u> Todo el mundo recuerda la anécdota de Gauss quien, con 10 años, fue requerido por el maestro de su escuela a calcular la suma de los 100 primeros números naturales. La demostración que ofreció Gauss en pocos segundos fue:

1	2	3	4	…	100
100	99	98	97	…	1
101	**101**	**101**	**101**	**…**	**101**

Se colocan los números ordenados de izquierda a derecha del 1 al 100 en la primera fila.
Se colocan los números ordenados de derecha a izquierda del 100 al 1 en la segunda fila.
Se suma cada una de las 100 columnas, siendo siempre el resultado igual a 101.

Luego 101 multiplicado por 100 columnas, es decir, 100 x 101 equivale al doble de la suma requerida. Así:

1+2+3+4+ … +100 = $\frac{(100)(101)}{2}$. El resultado se puede generalizar con toda facilidad sustituyendo 100 por n, y 101 por (n+1), como indica la siguiente tabla:

1	2	3	4	…	n
n	n-1	n-2	n-3	…	1
n+1	**n+1**	**n+1**	**n+1**		**n+1**

Y con el mismo argumento: 1+2+3 … +n = $\frac{n(n+1)}{2}$ c.q.d.

Además, en esta demostración y en las dos que le siguen el enunciado del teorema se puede presentar a estilo de Euclides, es decir, obviando cualquier referencia a consideraciones conjuntistas y a conjuntos infinitos:

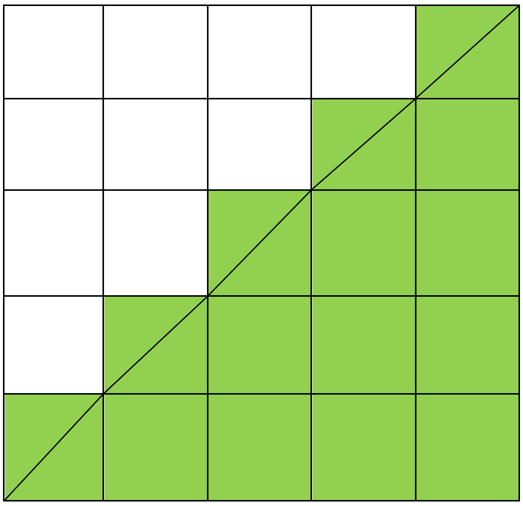
Teorema: para cualquier número natural *n* tan grande como se quiera, se verifica que:

1+2+3 … +n = $\frac{n(n+1)}{2}$

Algunos comentarios. En esta demostración la *ordenación espacial* en filas y en columnas es esencial, e igualmente la suma de filas y columnas. Esto corrobora la afirmación de Giaquinto de que en las demostraciones algebraicas aparece un fuerte componente espacial. Además, los símbolos pueden considerarse en cierto sentido asemánticos; es evidente que en su demostración inicial Gauss se inspiró en su concepción general de las propiedades de los números naturales, pero en una etapa posterior, si entre las operaciones de los símbolos sólo consideramos la suma con la estructura de semigrupo conmutativo, el teorema se mantiene siempre. Y si identificamos el símbolo “1” con la rotación en el plano en sentido dextrógiro de ángulo π / 4, y la suma como composición de rotaciones, el teorema tiene una interpretación sobre la familia de rotaciones dextrógiras de ese ángulo en el plano. Hilbert recalcó estas propiedades del álgebra y las aplicó intensivamente también a la Lógica.

3) Demostración geométrica.

El gráfico superior consiste en un rectángulo que se ha subdividido en 5 rectángulos por lado de longitud = 1, por lo que el área de cada rectángulo será también igual a 1. Observando las columnas se ve que el área de la primera columna es 1, el de la segunda es 2, etc, t el de la quinta es 5. Luego la suma total será 1+2+3+4+5, es decir, la suma de los 5 primeros números naturales. Puesto que la estructura de la figura no se modifica, podemos considerar en general un rectángulo de lado igual a *n* en lugar de a 5, y la suma de las columnas sería 1+2+3+ …+ *n*, es decir, el área sombreada en verde. Generalizamos el resto de la demostración a *n* en lugar de a 5.



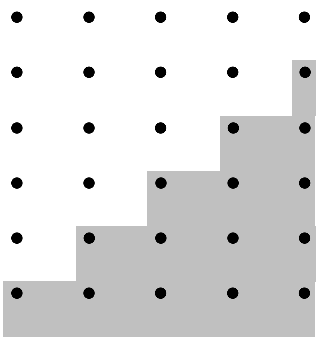
El área total del rectángulo es trivialmente $n \, . \, n$

Pero el área sombreada en verde se descompone en el área del triángulo inferior (es decir = *n* . *n* / 2) más el área de la mitad de los *n* rectángulos rayados en verde en la mitad superior (es decir, *n* / 2). Luego:

$$1+2+....+n=\frac{n.n}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{c.q.d.}$$

Algunos comentarios. En esta demostración sólo es necesario *poseer el concepto de rectángulo perfecto*, que implica que el área es 1, y el *concepto de suma*. Si el sujeto posee esos conceptos (y Kant y Giaquinto dan explicaciones diversas de esa posibilidad), y de hecho todo el mundo los posee, el teorema sería *sintético y a priori*.

4) Demostración diagramática.



El gráfico superior es una representación esquemática del dibujo geométrico anterior. Cada punto (*dot*) representa regiones acotadas del plano y se le asigna el valor 1. El área del rectángulo tiene el valor (5 . 6). Pero el área de cada triángulo mitad sería 5 .6 / 2 = 15. Y ese valor corresponde a la suma de las columnas del triángulo inferior 1+2+3+4+5. Al igual que en el ejemplo anterior es evidente que el razonamiento se puede generalizar inmediatamente a cualquier *n*.

Otra forma de demostrarlo, muy al gusto de los pitagóricos:

La superficie de puntos que contiene el rectángulo es (5.6) y, en general, n (n+1).
El rectángulo se descompone en dos "números triangulares".
Los dos "números triangulares" se pueden superponer con movimientos simples del espacio, y coinciden, por lo que su superficie es la misma.
Así, el área del rectángulo es el doble de la de un "número triangular".
Luego la superficie de el "número triangular" es (5.6) / 2. Y, en general, n (n + 1) /2

Algunos comentarios. Valen los comentarios de la demostración anterior. Pero además las representaciones diagramáticas introducen un elemento nuevo en la relación entre los conceptos y las estructuras lógicas que los relacionan. Es una técnica muy usada, no sólo por los pitagóricos que incorporaban un sentido místico, sino en la Matemática moderna: en álgebra, investigación operativa, teoría de grafos, y especialmente en computación. Aunque cada especialista crea los gráficos y los aplica a su manera, se han desarrollado recientemente estudios modernos para dar una taxonomía y una explicación a sus relaciones lógicas. Véase, por ejemplo, (Allwein & Barwise, 1996), (Shin, 1994) y (Mumma, 2008, 2010, 2011 y 2012).

Es evidente que para un matemático, cualquiera de estas demostraciones es perfectamente correcta. Se trata de demostraciones *evidentes*. Pero para cualquier persona normal la demostración más difícil de comprender, y sobre todo en relación a *su evidencia*, es la denominada demostración standard. Obsérvese también las diferencias sustanciales que plantean estas demostraciones desde el punto de vista de una Didáctica de la Matemática. En los últimos 100 años los lógicos y los matemáticos se han afanado, y sus resultados han sido espectaculares, en afinar unos desarrollos que generen una *demostración formal*, es decir, la demostración de la verdad de un enunciado, pero con independencia de la *comprensión* del objeto y del *porqué* de esa verdad, por usar los términos de la sugerencia de Mumma. El análisis de los procedimientos mentales y de los conceptos epistemológicos (y de sus condicionamientos neurológicos y cognitivos) que producen el conocimiento de los objetos matemáticos ha sido dejado de lado. Aunque en otro sentido menos preciso, Wittgenstein (1956, III-60) señalaba ya la importancia de ese *understanding*:

> "It might be said: '- that every proof, even of a proposition which has already been proved, is a contribution to mathematics'. But why is it a contribution if its only point was to prove a proposition? Well, one can say: 'the new proof shews (or makes) a new conexion' ".

Cellucci (2011a, 8-13) señala que una gran parte de las publicaciones científicas de Matemáticas se presentan bajo las premisas de una demostración axiomática, "it is rather the observation that many discoverers do not present their discoveries as they were made, that is, by the analytic method, but in a completely different way, specifically, by the axiomatic method". Posiblemente hay varias razones para ello. Para Davis & Hersch (1986, 66), "in mathematical papers certain 'heuristic' reasonings are deemed 'inessential' or 'irrelevant' for purposes of publication". Y Cellucci añade que "or perhaps because discoverers are not fully aware of the processes by which the discovery came about, or feel uneasy to reveal that such processes were not rigorously deductive". Pero, en mi opinión, la razón última es el convencimiento generado en el siglo XX –en gran parte debido a una errónea interpretación del método axiomático propuesto por Hilbert- de el carácter prioritario del método axiomático *en la Matemática*, y no tan sólo en su exposición[494]. Como vimos, es una distorsión total de

[494] Como indican, por ejemplo las afirmaciones de Gowers (2002, 36-40) de que "an axiomatic demonstration is an argument that puts a statement beyond all possible doubt (…) and this does mathematics unique" o de Bass (2003, 769) de que "the characteristic that distinguishes mathematics from all other sciences is the nature of mathematical knowledge and its certification by means of mathematical proof, that is, proof bases on the deductive axiomatic method, which makes mathematics the only science that thus pretends to claims of absolute certainty".

los planteamientos de Hilbert, para quien el método axiomático era fundamentalmente un método de investigación de la estructura lógica de una teoría, más aún que de su exposición, y requería el estar en posesión de un desarrollo completo de esa misma teoría. Además, el método axiomático en una demostración encubriría su carácter fundamentalmente *retórico*, lo cual, más que darle un carácter peyorativo, resaltaría en cambio su importancia si tenemos en cuenta que el objetivo principal de una demostración (por encima de la estrecha concepción de la lógica formal) es precisamente *persuadir de su verdad* a un colectivo (Hardy, 1929, 18), (Davis & Hersh, 1986, 58) y (Kitcher, 1991, 7). Pero sus consecuencias deductivas dependen totalmente de la elección de los axiomas, y eso sólo puede hacerse *desde fuera* de la teoría, como Hilbert, quien eligió los *grupos* de axiomas, más que los axiomas que en su sistema no eran independientes, basándose en su *intuición* geométrica[495].

De todo lo anteriormente expuesto podemos concluir que la filosofía de la Matemática de Kant y su extensión, y en parte restricción, a través de la interpretación de Hilbert ofrecen una interpretación consistente y, por lo que se ve, bastante segura para la mayor parte de la Matemática moderna. Pero la primera obra que aborda esta problemática desde una perspectiva moderna es la de Giaquinto, y sus sugerencias, especialmente en lo que se refieren a la revisión de las distintas partes de la Matemática moderna, constituyen la primera aportación seria en esa dirección y, como él mismo indicaba, confirman en parte algunas afirmaciones clave de Kant. La relevancia de estas diferentes demostraciones radica en que revelan *different epistemic virtues* (Mancosu, 2008b, 15), y la investigación de estas *virtudes* no ha sido hasta la fecha bien estudiada.

8.2.- La identidad de la *práctica* matemática y el cambio de perspectiva epistemológica.

En el análisis realizado anteriormente queda claro que se ha producido un cambio de punto de vista sustancial en la epistemología de la Matemática. Para Mancosu (2008b, 1-19) el punto original de inflexión estuvo en la disolución de la oposición analítico- sintético por Quine (1951), tal y como se entendía en el siglo XX, que ya hemos analizado, y que era distinta de la mantenida por Kant. Y su continuación estaría en varias observaciones del influyente trabajo de Lakatos (1976) "Proofs and Refutations". A partir de aquí se

[495] Cellucci, en esa misma dirección, señala "the illusoriness of the justification role of axiomatic demonstration" justificando, con argumentos ya presentados en este trabajo, que sería una ilusión pensar que una demostración axiomática puede establecer la *certeza* de un enunciado y que las matemáticas serían una ciencia que puede pretender alcanzar una presunción de certeza absoluta; una demostración axiomática sólo evidencia la verdad de la consecuencia desde los supuestos dados. Pero en la elección de esos supuestos estaría la clave del problema, y también su dificultad, puesto que exigiría una *intuición del objeto*, y también con frecuencia explicitar conexiones con diversas teorías que se condicionan (Van Benthem, 2008, 38). Sin embargo Cellucci no comparte esa concepción intuitiva. Para él, aunque "the existence of an objective distinction between explanatory and non-explanatory demonstrations (…) is actually relevant to mathematical practice", teniendo especialmente en cuenta que el crecimiento de la Matemática no puede considerarse simplemente acumulativo, como sostienen quienes creen que sólo depende de los axiomas, por ejemplo (Devlin, 1990, 34), pero sin embargo "the addition of really innovative results shows a basic feature with analytical demonstrations" (Cellucci, 2011a, 12). Aunque no comparte afirmaciones análogas a muchas de las expuestas en este trabajo, como que "it is the mathematical intuition that makes mathematics. Without it, we would have nothing to prove (since) the mathematical theorems comes from intuition (…) and demonstration is only a testing process that we apply to these suggestions of our intuition" (Wilder, 1944, 318). Para Cellucci (2011a, 14), "discovery is an entirely rational process, which requires no appeal to intuition (…) then discovery is not a matter of intuition but logic –of course, non-deductive logic, because the analytic method involves non-deductive rules". Pero esta opinión supone una concepción *no racional ni lógica* de la intuición, lo cual, como hemos visto, no sería el caso dentro del sistema kantiano ni en su extensión por Hilbert.

desarrollaron distintas concepciones epistemológicas de la Matemática estudiadas en el artículo de Mancosu y que, desde hace aproximadamente 20 años tienen un papel protagonista, algunas de las cuales hemos expuesto más arriba. Sin embargo, no parece razonable que dos artículos, por muy influyentes que hayan sido, puedan cambiar la orientación global de una disciplina de este tipo. Podemos aventurar, como conjetura, que existía entre los científicos a partir de los años 50 –y esos artículos pudieron reforzar y reorientar la atmósfera intelectual- un convencimiento progresivo o sensación del agotamiento de la filosofía analítica, del empirismo lógico y, a la postre, de la misma Lógica (como se deduce del estudio crítico de su evolución y del de las lógicas no-standard). No puede ser tampoco ninguna casualidad el incremento exponencial de los estudios sobre Kant y la filosofía crítica, que hemos analizado en la Parte-I de este trabajo, y que se produjo en el mundo anglosajón a partir de los años 70, ni el reciente revival de los estudios sobre Frege, o de autores neokantianos como Cassirer.

Pero lo cierto es que la realidad de la epistemología de la Matemática no tiene ahora nada que ver con la que se vivió a comienzos del siglo XX a raíz de la publicación de los *Principia*. Y aunque existen filósofos y matemáticos que la consideran una obra nociva y proponen borrar de un plumazo todas las perspectivas abiertas en el siglo XX y reelaborar una filosofía y epistemología de la Matemática desde nuevas perspectivas -y a veces con notable éxito, como se puede comprobar en la obra de Corfield (2003)-, la mayoría de científicos enfocan la situación como una ampliación notable de las perspectivas de la disciplina. Desde nuestro punto de vista, los estudios anteriores plantean una vuelta a la consideración del *objeto*, y tratándose de objetos abstractos y desde un punto de vista realista, a la consideración de las relaciones estructurales entre los *conceptos* que los definen y que se priorizan sobre las relaciones lógicas. Y en este contexto, la filosofía de la Matemática de Kant no sólo ha dejado de ser anatema, sino que muchos de sus planteamientos son confirmados por los estudios y teorías más arriba descritos. Aquí estamos estudiando exclusivamente la vigencia actual de la filosofía de la Matemática de Kant (y de Hilbert) para una *explicación* de la Matemática, incluyendo la moderna. Si la respuesta es afirmativa, y nuestra tesis es que sí lo es, eso no quiere decir que *sea la mejor*. Sería tal vez posible desarrollar una epistemología de la Matemática más comprehensiva y más explicativa o, incluso tal vez se puedan encontrar planteamientos alternativos, como por ejemplo los realizados por el neokantiano Ernst Cassirer, y que pudieran llegar a tener un potencial explicativo incluso superior [496]. Es decir,

---

[496] Ernst Cassirer es conocido en la actualidad fundamentalmente por su monumental obra *Philosophie der symbolischen Formen. (1. Die Sprache, 1923; 2. Das mythische Denken, 1925; 3. Phänomenologie der Erkenntnis, 1929)*, donde sostiene que el hombre es, antes que un ser racional, un "animal simbólico" que utiliza símbolos para configurar el mundo cultural. En este sistema de símbolos es donde se manifiesta el espíritu humano expresándose en el lenguaje, el mito, la religión y la ciencia. En Cassirer la Crítica de la razón se convierte en una Crítica de la cultura. Pero sus aportaciones no se limitan a la filosofía de la cultura. Cassirer, "defends the autonomy of the methodologies of the various special sciences by arguing that language, myth, and art are each 'symbolic forms' by which we come to represent a structured world of objects" (Heis, 2008, 5). Educado en la Universidad de Marburg bajo la dirección de Hermann Cohen y Paul Nartop, bajo cuya dirección leyó su tesis en 1899 con el título *Kritik der mathematischen und naturwissenschaftlichen Erkenntnis*, fue más conocido en su época como uno de los representantes destacados de la *escuela del idealismo lógico Neo-kantiano de Marburg*. Para Michael Friedman (1999 y 2005), Alan Richardson (1998) y A. W. Carus (2007), esta escuela tuvo una influencia muy destacada en el *positivismo lógico*. Muy recientemente se ha producido un auténtico *revival* en relación con los trabajos sobre filosofía de la Matemática de Cassirer, incluyendo sus estudios históricos, y en especial sobre el pensamiento de Kant. En ellos Cassirer nunca se separó de su trabajo filosófico sistemático: "in fact, his systematic treatise on the philosophy of the exact sciences, *Substance and Function*, was originally intended to be the third volume of *Erkenntnisproblem*, his history of philosophy from the Renaissance to Kant (Ferrari, *Ernst Cassirer: Stationen einer philosophischen Biographie*, 2)" (Heis, 2008, 5), obra que para Guyer (2006, 14) le convertiría a Cassirer en "the greatest of all moderns historians of philosophy". Para Stephen French (2001,

2) existe actualmente "an on going revival of interest in Cassirer's work, both on the continent and among English-speaking philosophers", y de la misma opinión es Heis (2008, 3). Y especialmente sobre su filosofía de la Matemática. Lo fundamental de la obra sobre la Matemática, y en general sobre las ciencias exactas, de Cassirer está en su libro *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik* (1910), pero sus tesis esenciales sobre la Matemática estaban ya en el artículo "Kant und die moderne Mathematik. Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik" que publicó en la revista *Kant-Studien* (1907). Aunque desde 1800, para lo bueno y para lo malo casi todos los desarrollos filosóficos, y en especial en la Matemática, pueden interpretarse como una respuesta a Kant (Coffa, 1982), para Cassirer en 1907 estaba claro, siguiendo los planteamientos hegemónicos en su época, que el nuevo enfoque de Russell era el correcto, pero con matices: "die (moderne) Mathematik ist —nach einer Definition, die Gregor Itelson vorgeschlagen und die Couturat angenommen hat— „die Wissenschaft der geordneten Gegenstände": sie erstreckt sich auf alle qualitativen Beziehungen überhaupt, sofern sie nach einer strengen begrifflichen Regel erkennbar sind. Es entspricht somit dem logischen Rangverhältnis der Probleme, wenn wir —im Gegensatz zu der Darstellung Russells und Couturats— sogleich den Begriff der Ordnung an die Spitze stellen und erst von ihm aus den Zugang zum Begriff der Zahl zu gewinnen suchen. Hierbei gilt es zunächst, die allgemeinsten Bestimmungen zu betrachten, die der Logik der Relationen zu Grunde liegen" (Cassirer, 1907, 8). Y añade que "Die Einheit der Mathematik liegt fortan nicht mehr in ihrem Objekt —vermag sie doch die Lehre von Größe und Zahl, die Ausdehnungslehre, wie die allgemeine Mannigfaltigkeitslehre, die Theorie der Bewegung, wie die der Kräfte gleichmäßig zu umfassen— : sie liegt in der deduktiven Methode, die in all ihren Anwendungen die nämliche bleibt und auf denselben Grundlagen beruht" (Cassirer, 1907, 31). Y aquí comete el error de aceptar la valoración de los cambios que introduce la Matemática *moderna*, inspirada en la propuesta entonces hegemónica de Russell y que, como hemos demostrado, no es el verdadero *cambio* introducido. Aunque su solución añade matices relevantes en otra dirección, que matizan dicha aceptación. Considera la Matemática y la Física un *continuum*, pero no en el sentido de que la Matemática sea una ciencia empírica en el sentido definido por Stuart Mill, sino en el sentido de que "mathematical knowledge and physical knowledge are of the same kind. Both are characterized by introductions of 'ideal elements' which in both areas play essentially the same role" Mormann (2008, 150). Mormann ha estudiado el rol que la introducción de elementos ideales juega en la creación de las teorías matemáticas y en el desarrollo de sus conceptos, así como el rol fundamental de estos procesos en la filosofía de la Matemática de Cassirer. Además Mormann pone de relieve la importancia en el pensamiento de Cassirer de "some kind of Hegelian flavour in that the conditions of objectivity of science were given through its historical development" (Mormann, 2008, 155), estableciendo una perspectiva naturalista en el pensamiento de Cassirer, y en la interpretación que éste hace de la epistemología kantiana. Pero la principal desviación de Cassirer de la ortodoxia kantiana –tal y como se entendía en su tiempo y todavía hoy en día por algunos (Friedman, 2000)-, "was to give up Kant's sharp separation between understanding and sensibility as two faculties of the mind. Following his teacher Hermann Cohen, Cassirer replaced Kant's two faculties of the mind by a single comprehensive activity of 'pure thought'(reines Denken)", coincidiendo en esta apreciación con Ryckman (1991). "Pure thought primarily expressed itself in the progressive evolution of the mathematized empirical sciences. The formal kernel of the neo-kantian 'pure thought' in Cassirer's sense was the new relational or functional logic inaugurated by Frege, Peano, Russell and others" (Mormann, 2008, 156). Y consecuente con el *Geist der Zeit*, Cassirer rechaza el uso de la intuición como base de la construcción de conceptos (y en la demostración) en la Matemática. Esencialmente, Cassirer rechaza la *Transcendental Aesthetik* y, haciendo uso de elementos de la fundamentación de la Aritmética desarrollados por Richard Dedekind, pretende realizar una actualización de la noción de construcción de conceptos como base de la fundamentación de la Matemática kantiana, manteniendo su carácter sintético, en el sentido de que el progreso matemático estaría basado en la introducción por los matemáticos de nuevas estructuras (elementos ideales, como el plano proyectivo complejo) que no estarían incluidas en las viejas estructuras pero que las unifican bajo un nuevo punto de vista (Heis, 2007, v). Hemos visto en este trabajo que este tratamiento de los *elementos ideales* es también el que adopta Hilbert para su fundamentación de la Lógica Matemática y su tratamiento del infinito, aunque sin grandes disquisiciones filosóficas, aspecto que también destaca Friedman (2011). Sin embargo, la desviación es más aparente que sustantiva (desde la perspectiva de la lectura de Kant que se defiende en este trabajo, no, naturalmente, desde la interpretación predominante en la época), considerando que de lo que la construcción kantiana realmente trata, en relación con la filosofía de la Matemática, es de la construcción de sus conceptos (y objetos), para cuya descripción el filósofo crea un metalenguaje totalmente original. Según él, los conceptos matemáticos se construirían como formas sensibles intuidas en el espacio y en el tiempo, que serían las formas a priori de la sensibilidad. Esta dimensión espacio-temporal sería, como dice Strawson (1966), "a visual or phenomenal space", cuya estructura sería de forma natural euclídea por la determinación de las características cognitivas humanas. Joongol Kim (2006) resalta este punto cuando comenta

el esquema cognitivo kantiano es *sólo una propuesta*, pero una propuesta muy atractiva para la ciencia actual, aunque la valoración de otras excede a nuestros propósitos. El objetivo aquí es juzgar y valorar la validez actual de la epistemología de la Matemática de Kant y Hilbert, y hasta qué punto. La filosofía de la Matemática de Kant surge de una reflexión sobre la Matemática de su tiempo, que era fundamentalmente la de Euclides. Kant, en sus interpretaciones, está embebido de lo que Daniel Sutherland (2004b) denomina "the Greek Mathematical Tradition", que priorizaba las interpretaciones geométricas a las aritméticas. Y esto se manifiesta en el análisis que hace el autor de nociones como magnitud, proporción, punto, etc., aspectos sobre los que Euclides no ofrece interpretaciones filosóficas, y que Sutherland pone en relación con las interpretaciones de estos puntos en las obras de Wolf y Baumgarten. Se demuestra que, además de los razonamientos puramente matemáticos, estaba en el origen de la epistemología kantiana de la Matemática una interpretación filosófica de aspectos conceptuales de ésta de origen específicamente griego. Para Sutherland, "the best evidence for the influence of the Greek mathematical tradition is the strong similarity between it and Kant's own views; I will argue for the influence by bringing out this similarities …I will be emphasizing some of the most basic features of Greek mathematics, features that were entrenched in the time of Euclid and persisted in the mathematical tradition that descended from it …that tradition still had currency in Kant's time, allowing Kant to make allusions and tacit references to it" (Sutherland, 2004b, 1-2). Según Sutherland el punto clave sería la concepción kantiana de la *magnitud* y, en particular, de las magnitudes espacialmente extendidas de las construcciones geométricas, y Kant intentaría explicar nuestra cognición de las propiedades matemáticas de esas *magnitudes*, "for which intuition is indispensable". Y sostiene que aunque "Kants theory of magnitudes has been largely overlooked", esas *magnitudes* sostiene que constituirían el corazón de la teoría kantiana de la cognición

desmontando la opinión de Carnap de que "Kant's doctrine must be abandoned, then, because no laws of geometry, mathematical or physical, can be a priori and synthetic". Cassirer vio en la fundamentación de la Aritmética del matemático Richard Dedekind un modelo para una versión moderna de la tesis fundamental de Kant de que la Matemática es esencialmente una *cognición racional* a partir de la "construcción de conceptos", y estaba convencido de que los nuevos sistemas de conceptos matemáticos deberían primero hacer inteligibles sus objetos matemáticos, y esto sería un paso para justificar una revolución ontológica en la Matemática moderna y, así, actualizar la idea básica de Kant de que la unidad de la Matemática radica en su método (Heis, 2008, 6, 23 y 32). El siglo de la revolución en las Matemáticas (XIX) fue también el de una profunda crisis en la Lógica. Era una opinión general que la Lógica aristotélica de inclusiones era absolutamente inadecuada para explicar el razonamiento usado en las emergentes ciencias naturales y exactas, en particular en Matemáticas y Física. Además, siguiendo a Kant en este punto, sería necesaria una Lógica sin un componente ontológico, lo que no era el caso de la Lógica aristotélica. Por ejemplo, Lotze –el más famoso lógico alemán de la época- explica en detalle las razones de las deficiencias de la Lógica aristotélica (y también de la booleana) para explicar las peculiares inferencias en Matemáticas (Logik, book I, chapter Three, "the Theory of Inference", 1874). Heis (2007, 288) analiza cuidadosamente sus argumentos y su influencia en el pensamiento de Frege y Cassirer. Resalta que "what is interesting and novel in Lotze's criticism, though, follows directly from Lotze's non-Aristotelian, functional model of the structure and formation of concepts" (Heis, 2007, 294). Para Friedman (2011, 6), "Nevertheless, and here is where Cassirer diverges from most of the analytic tradition, this modern theory of the concept only provides us with a genuine and complete alternative to Aristotelian abstractionism and philosophical empiricism when it is embedded within the genetic conception of knowledge. What is primary is the generative historical process by which modern mathematical natural science successively develops or evolves, and pure mathematics and pure logic only have philosophical significance as elements of or abstractions from this more fundamental developmental process of 'productive synthesis' aimed at the application of such pure formal structures in empirical knowledge". Los trabajos de Heis (2007, 2008 y 2011) y de Mormann (2008, 2009, 2012a, 2012b y 2014), junto con el trabajo fundamental de Ferreirós (2007) en la parte relacionada con Dedekind, Zermelo y Cantor, plantean un nuevo enfoque del trabajo de Cassirer en relación con la Matemática, y de su relación con Kant, muy sugerente. Deberían ser el punto de partida de una investigación específica que podría, en mi opinión, dar lugar a una filosofía de la Matemática incluso más *explicativa* que la de Kant. Pero esto, por desgracia, se aparta de nuestra investigación actual.

matemática[497] (Sutherland, 2004a, 2004b, 2005b, 2006, 2008 y 2010). Este tipo de enfoque, que va más allá de los análisis lógicos, diagramáticos o visuales de los autores estudiados más arriba, es aplicado también por Lisa Shabel (2003) en su estudio de los *Elementa* y en la búsqueda de una génesis de la epistemología kantiana de la Matemática (Shabel, 2003, 2004 y 2006). En su libro (Shabel, 2003) basado en su tesis doctoral (1997), Shabel sigue la misma perspectiva que Sutherland e intenta una aproximación al origen del pensamiento de Kant, pero centrándose esta vez, en lugar del antiguo pensamiento matemático griego, en la obra de Euclides tal y como era entendida en el ámbito alemán del siglo XVIII[498] y en el pensamiento matemático de esa época en Alemania en donde, siguiendo a Sutherland, estaría todavía muy viva la "tradición del pensamiento matemático griego". Aunque el objeto es la fundamentación de la Matemática de Kant, ese tema ocupa tan sólo un tercio del libro; otro tercio se dedica a estudiar la obra de Euclides y su interpretación en esa época, y el otro tercio a estudiar el pensamiento matemático de Wolff. Y consigue una recreación perfecta del ambiente matemático de la época, sobre el que Kant reflexionó, teniendo en cuenta que en los 30 años anteriores a la publicación de la *KrV* Kant fue profesor de matemáticas al nivel universitario elemental. Y este análisis de la *práctica* matemática de su época y de su interpretación es fundamental para poder entender el alcance de su pensamiento y el sentido de algunas de sus expresiones.

En su análisis de los *Elementa*, Shabel (2003, 136) está perfectamente al corriente de los estudios más arriba citados de Allwein & Barwise (1996), Hammer (1995), Shin (1994), que estaban en la base de los trabajos de Miller, Mumma, Dean y Avigad, así como de los de Keneth Manders "but his work is (as far as I know) unpublished as yet". Pero su objetivo, y aquí se establece una diferencia significativa con estos autores, no era estudiar las propiedades lógicas de los razonamientos diagramáticos y su justificación filosófica desde nuestra moderna perspectiva, sino comprender la forma en que Euclides los introducía en sus razonamientos y el sentido lógico que tenían para él: "my interest in Euclid's *Elements* will thus be focused on the role of the diagram in Euclid's reasoning. I will analyze the definitions, postulates, and common notions as well as several demonstrations presented in the *Elements* to show that Euclid's reasoning relies on a kind of "diagrammatic knowledge", i.e., information that is read directly from the constructed diagram. In the course of of my analysis, I will show that Euclid's project is not a foundational one: he was not seeking to ground or rigorize the pre-existing elements of plane geometry, as is commonly supposed, but rather was developing the original objects and methods of elementary geometry" (Shabel, 2003, 5).

[497] Kant distingue dos tipos de magnitudes: *quantum* y *quantitas*, y las entiende en el sentido que sugiere el latín, la primera en un sentido más concreto y la segunda en un sentido más abstracto. En los Axiomas de la Intuición Kant da una definición de *quantum* y añade que todas las *apariencias* en ese sentido *son* magnitudes (B202-3). En este sentido, esta noción de magnitud de Kant no se corresponde con la usual hoy en Matemáticas; para Kant, un palo en movimiento no es que *contenga* o se describa por magnitudes, es que él mismo *es* una magnitud. Este tema ha sido estudiado recientemente también por Friedman (1992 y 2000), Parsons (1984), Longuenesse (1998). La distinción entre las concepciones concreta y abstracta de una magnitud en Kant se analiza en (Sutherland, 2004).

[498] En una nota a las *Reflexionen zur Mathematik* de Kant [*Kant Handschriftlicher Nachlass*, Band I, Druck und Verlag von Georg Reimer, pp. 24-25], el editor subraya que Kant probablemente no habría leído a Euclides en su versión original, sino que muy posiblemente hubiera utilizado la traducción más común en Alemania en aquella época: *Euklids Elemente, fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz*, Halle: im Verlag der Buchhandlung des Waysenhauses. Como todas las de la época, establecía ciertas modificaciones y comentarios, que en algunas ediciones eran bastante amplios. Shabel (2003, 44) analiza varias de esas versiones y de otras coetáneas inglesas y francesas que tenían muchos puntos en común. Muy posiblemente Kant también estudiaría la presentación que hiciera Wolff de éstos [*Elementa Matheseos Universae*, Hildesheim: Georg Olms Verlag 1968] quien, según su concepción racionalista, ordena los *Elementa* de otra manera y bajo otros epígrafes (Shabel, 2003, 42).

Y por ello caracteriza la teoría de Euclides como una teoría *pre-formal*[499]. Shabel (2003, 140) utiliza el término *informal* o *pre-formal* en el sentido de Lakatos (1978). Lakatos, sin embargo, presenta la geometría de Euclides como un caso de una teoría formal ideal, lo que no tiene ningún sentido desde la perspectiva actual, con lo que coincide Shabel tras su análisis[500]. Es de destacar que Shabel coincide con nuestros análisis respecto a las características axiomáticas de los *Grundlagen* que, como vimos, conservan el sentido de la intuición en la elección de los grupos de axiomas y no llevan al sistema axiomático más sencillo posible: "I suspect that Hilbert's reasoning retains some aspects of informal mathematical reasoning" (Shabel, 2003, 140). Al estudiar la obra de Wolff[501], Shabel la compara también con otros destacados matemáticos de la época o algo anteriores como Descartes, Barrow, Leibniz, Newton, Viète, Guisnèe, L'Hospital, MacLaurin y Simpson, dando lugar a un auténtico fresco sobre la *práctica* matemática de la época. La conclusión, fundamental para nuestros propósitos, es que no existe una diferencia significativa entre la *práctica* de la Matemática del siglo XVIII y la *práctica* de la Matemática actual. Cierto que en esa época era un lugar común el considerar que las definiciones matemáticas se caracterizaban por determinar *definiciones de conceptos* "claros y distintos", mientras que muchos matemáticos actuales se decantan por *definiciones relacionales indirectas*, pero eso es más bien una técnica expositiva alternativa, que no excluye las definiciones directas de conceptos. Respecto a la noción kantiana básica de *construcción de conceptos*, Shabel indica que "it is important to realize that the clear and distinct perception invoked by various mathematicians of the early modern period is *always* a perception of a geometrical construction, or the possibility of such" (Shabel, 2003, 87). Pero ya hemos visto que la *construcción conceptual* puede visualizarse por construcciones geométricas, incluso en el Algebra (Hilbert), dado el rango privilegiado que la geometría euclídea tiene en el sistema perceptivo humano. Así, "the relations between such objects are observed on the basis of a combination of a clear and distinct perception of the constructed objects; clear and distinct perception of the mathematical propositions (axioms and theorems) that hold of such; and clear and distinct perception of the rules for expressing those relationships symbolically" (Shabel, 2003, 87).

Shabel subraya que esa distinción "clara y distinta" no es la de las expresiones simbólicas que representarían a los objetos matemáticos, sino de los mismos objetos así construidos, por lo cual "the early moderns cannot be understood as investigating patterns or abstract mathematical structures". Y este sería el cambio más significativo en la evolución de la Matemática del siglo XX: la capacidad de abordar estructuras abstractas en los sistemas

---

[499] "the constructed Euclidean diagram, which is characterized by the definitions, postulates and common notions of Euclid's *Elements* justifies certain assumptions implicit in classical mathematical reasoning. Moreover, reference to the content of a constructed diagram can warrant deductive steps in geometric reasoning: recognizing this capacity, we see that the constructed diagram plays an indispensable demonstrative role in Euclidean proof procedures. It follows that the proof procedure employed in Euclid's *Elements* are simultaneously informal *and* compelling: that is, though the diagram dependence of Euclid's demonstrations distinguishes them from the formal, axiomatic proofs we now deem ideal, it does *not* diminish their persuasiveness" (Shabel, 2003, 36-37).

[500] El mejor estudio moderno y el más completo sobre la obra de Euclides es (Mueller, 1981). Shabel lo utiliza profusamente justo a las obras de (Reed, 1995), (Kline, 1972) y (Greenberg, 1972).

[501] Shabel estudia fundamentalmente 3 textos de Wolf que con toda seguridad fueron consultados por Kant: *Mathematisches Lexikon, Elementa Matheseos Universae* y *Der Anfangs-Gründe aller Mathematischen Wissenschaften zu Bequemerem Gebrauche der Anfänger* (Wolff, 1679-1754). Como indica "they provide a touchstone for research into the state of early modern mathematics. Being popular and comprehensive textbooks for the teaching of college level mathematics, the reveal not only which disciplines comprised the subject of mathematics proper at or around the middle of the eighteenth century, but also the extent to which the advanced mathematical research of the previous century had been absorbed into college level teaching" (Shabel, 2003, 41).

simbólicos representacionales, aunque a ese estudio se aplicarían las mismas reglas epistemológicas y cognitivas que en la Matemática usual (Hilbert). Sin embargo esto plantea un problema, en especial en relación con las teorías físicas, desde una *concepción realista* de la naturaleza –como la que hemos postulado de Kant-. Analizaremos el problema en el último apartado del Capítulo-9 al estudiar el *punto de vista transcendental*. Cierto también que en esa época la preeminencia de la Geometría euclídea era aplastante, considerando otras ramas como accesorias o instrumentales, por ejemplo el Algebra, que sería una simple técnica de simbolización y simplificación de los cálculos. Se ha producido en el siglo XX una inusitada expansión de todas las ramas de la Matemática, y se ha producido también un cambio en la valoración de la importancia de las distintas ramas y una aritmetización de gran parte de la Matemática. Pero nada de eso cambia los *procesos cognitivos* ni *las técnicas intelectuales* con los que se abordan los distintos problemas que, como estos autores y los anteriores demuestran, son básicamente los mismos: la manipulación simbólica, los procedimientos visuales de conceptualización, la medida de magnitudes[502]. En definitiva, que tanto las obras de Shabel y Sutherland, como las anteriores de Giaquinto. Miller, Mumman, Dean, Avigad y Northrop avalan nuestra tesis de la *identidad* de la *práctica matemática* y de los procedimientos cognitivos de la Matemática entre la clásica y la moderna, y yo diría que a lo largo de toda su historia. La importancia que la Matemática moderna atribuye al *rigor* en las demostraciones es una consecuencia directa del desarrollo de la Lógica Matemática en el siglo XX y de la hegemonía de la filosofía analítica y del empirismo lógico. Nadie duda de que es un gran avance que, desde un punto de vista matemático, se puede considerar la consecuencia de una algebrización de la Lógica. Pero, como aclara el ejemplo examinado más arriba, ese análisis de la inferencia lógica no puede abarcar toda la riqueza de las demostraciones matemáticas; y es aquí donde los análisis de *demostraciones informales*, de lógicas no-monotónicas, de lógicas difusas y de redes neuronales –más arriba analizados- constituyen un intento serio de ampliar la explicación. La identidad de esa *práctica matemática* es una de las razones que avalan la vigencia de la epistemología de la Matemática de Kant y de su teoría del conocimiento. Pero también de una concepción *naturalista* de la Matemática que, como vimos, era uno de los elementos distintivos de la interpretación de Hilbert, y que está muy en la línea de filósofos modernos como Philiph Kitcher y Penelope Maddy. Y si nos atenemos a la cita que incluye Shabel al comienzo de su obra, también de Kant:

> "Claims to philosophical cognition generally enjoy the fate of opinions and are like the meteors, the brilliance of which is no guarantee of their endurance. Claims to philosophical cognition vanish, but mathematics endures" –Immanuel Kant, Inquiry concerning the distinctness of the principles of natural theology and morality, 2:283[503].

---

[502] Para Wolff, la Matemática "ist eine Wissenschaft alles auszumessen, was sich ausmessen lässt" (Wolff, 1965, 863). Debe señalarse la importancia de la *medida de magnitudes* (ya sea de objetos directos de la vida cotidiana, ya sea de mediciones indirectas de los *efectos* entre magnitudes medibles de entes postulados en la Física de partículas) tenía en nuestra distinción entre una ciencia y una pseudociencia.

[503] "Die philosophischen Erkenntnisse haben mehrentheils das Schicksal der Meinungen und sind wie die Meteore, deren Glanz nichts für ihre Dauer verspricht. Sie verschwinden, aber die Mathematik bleibt". Kant: AA II, Vorkritische Schriften II , (1757-1777), S.283. (Akk. 2: 283).

CAPÍTULO-9

Valoración de las *representaciones (Vorstellungen)* en las ciencias modernas y discusión del punto de vista transcendental.

9.1.- El carácter de las *representaciones* en la ciencia moderna.

Y con ello terminamos en el punto de partida de nuestro trabajo (Capítulo-3), pero con una nueva perspectiva. Nuestra investigación sobre la teoría cognitiva de Kant, su epistemología de la Matemática y el rol de la intuición se centraba en la Estética Transcendental, con las limitaciones que ello conlleva, aunque los resultados han sido claros. Pero, por un lado, sus mismas afirmaciones en la Lógica y en la Dialéctica Transcendental plantean para muchos aparentes contradicciones con sus afirmaciones anteriores, lo que da lugar hoy incluso a interpretaciones de su concepción de la ciencia muy distintas de las aquí planteadas y que encajarían con concepciones del moderno antirealismo[504]. Y por otro lado, la

---

[504] Bas Van Fraassen es el representante más destacado del moderno anti-realismo. En *The Scientific Image* (1980) polemiza con las interpretaciones filosóficas desarrolladas entre 1950 y 1980. Para Van Fraassen, el auge de las interpretaciones realistas de la ciencia tenía su causa en la conciencia del fracaso del positivismo lógico en su esfuerzo por reducir el análisis de la ciencia a meros análisis sintácticos de las proposiciones correspondientes y de sus relaciones: "today, however, no one can adhere to any of these philosophical positions [the phenomenalism of Ernst Mach, the conventionalism of Henri Poincaré, the fictionalism of Pierre Duhem, the logical empiricism of Hans Reichenbach, the logical positivism of Rudolf Carnap] to any large extent. Logical positivism, especially, even if one is quite charitable about what counts as a development rather than a change of position, had a rather spectacular crash" (Van Fraassen, 1980, 2). Y concluye (1980, 41) que "the positivist picture of science no longer seems tenable". Van Fraassen defiende un nominalismo anti-realista (1980, 159). Su concepción surgió de su lectura de las 5 demostraciones sobre la existencia de Dios en Tomás de Aquino: "but now I must report on the reasons which have converted me to total belief in scientific realism. This change of mind was a sudden occurrence, taking me unawares when I was reading Aquinas. Like Saul on the road to Damascus, I was struck by blinding light, and I saw. What I saw was that the medieval attempts to prove the existence of God have modern analogues demonstrating the correctness of scientific realism" (Van Fraassen, 1980, 204). Y a continuación resume una por una las 5 demostraciones de Santo Tomás de Aquino introduciendo después de cada una de ellas lo que piensa que son las "demostraciones" modernas de la validez del realismo científico. Cabe también preguntarse a qué noción de "realismo" se está realmente refiriendo. El mismo indica (1980, 229, nota-2) que parte de la posición de J.J.C. Smart (*Philosophy of Scientific Realism*, London: Routledge and Kegan Paul, 1963, Ch.II): "the number of such expositions is currently growing in a geometric progression, however, and it may not be too optimistic to hope that scientific realism will soon be a widely accepted philosophical dogma". Veremos más adelante que las formulaciones positivas de Van Frassen no resisten una comparación con los análisis desde una perspectiva que nosotros hemos considerado esencialmente realista, aunque matizada, como la de Kant. Propone denominar a su concepción de la ciencia "empirismo constructivo" y cuyo fundamento sería que para la aceptación de una teoría sería suficiente su "adecuación empírica" y esa creencia haría innecesaria cualquier creencia añadida sobre la correspondencia con cualquier ente real o incluso su referencia: "*science aims to give us theories which are empirically adequate: and acceptance of a theory involves as belief only that it is empirically adequate*. This is the statement of the anti-realist position I advocate ; I shall call it *constructive empiricism*" (1980, 12). El empirismo constructivo haría superflua cualquier creencia añadida sobre la correspondencia de los términos teóricos de la ciencia con la realidad: "on the view of acceptance of theories which I have advocated under the name of constructive empiricism, it does not require belief that all significant aspects of the models have corresponding counterparts in reality. This applies to many aspects discussed by philosophers of science: space-time, elementary particles, fields, and, finally alternative possible states and courses of events. The locus of possibility is the model, not a reality behind the phenomena" (Van Fraassen, 1980, 202). Los argumentos utilizados por Van Fraassen *parece* que se apoyan en numerosos ejemplos y contraejemplos de la Física moderna, resultando difíciles de entender sin un alto dominio de la

Física y siendo por tanto difícil de argumentar sin ese conocimiento que, más que apoyarse sus propuestas en esos ejemplos, ésas son en realidad interpretaciones de estos ejemplos, pero desde sus supuestos. Por otra parte, aunque en el desarrollo de muchos conceptos aplica un análisis lingüístico –fundamentalmente semántico- (y esta sería la parte mejor construída de su trabajo), lo cierto es que precisamente los términos clave de su propuesta carecen de todo tipo de análisis semántico e incluso de toda precisión; por ejemplo "empirically adequate", "fact", "reality", "phenomena", "belief", "truth", "data", "theory", "constructive" (como adjetivo de *empiricism*), "observable things and events", y muchos más. En toda su obra no hay ni una sola definición de esos términos, y menos aún un análisis lingüístico de sus usos. Para el término clave "empirically adequate", él mismo reconoce la necesidad de una aclaración (1980, 12) y la intenta en el Capítulo-3, titulado *To Save The Phenomena*, y que se centra en la tesis de que "a theory is empirically adequate exactly if what it says about the observable things and events in this world, is true –exactly if it *saves the phenomena*" (ibid.). Por desgracia, en todo el Capítulo-3 queda sin aclararse qué entiende él por *the phenomena*. Por ello, de muchas de esas nociones sólo podemos obtener una vaga idea por el contexto. Pero aún así algunas de sus interpretaciones sí quedan claras. Por ejemplo, parece claro que tiene una idea rígida y unívoca de "lo que es real" (en su caso sería mejor decir "de lo que no es real") y de la noción de "verdad". Veamos algún ejemplo para dilucidar sus ideas y compararlas con nuestra interpretación realista de Kant. Supongamos por un momento que existen en efecto distintos "mundos" o "universos" paralelos a distintos niveles de dimensión cósmica, y un individuo racional de uno de esos mundos de dimensión tal que nuestro cosmos sería un microcosmos –llamémosle *hombrecillo verde*- plantea una teoría sobre el funcionamiento de nuestro universo. En una primera instancia en su modelo el sistema solar aparece como un punto del cual logra medir una serie de magnitudes: distancia a la estrella alfa-centauro, movimiento del sistema solar respecto a su galaxia, etc. ¿Sería *el sistema solar* un objeto real? Por un lado, el *sistema solar* existe como un "punto" en su modelo teórico, y eso es una forma de existencia, luego en cierta forma real puesto que sobre ese "punto" aplica mediciones de magnitudes observables y, en la medida en que el conjunto se ajusta a las observaciones y a las predicciones, considera que esa teoría es *empirically adequate*. Desde un punto de vista filosóficamente pobre (sin especificar el significado de los datos, ni de los conceptos de la teoría, ni del sistema cognitivo del sujeto) con esta concepción podría estar de acuerdo cualquier científico: sin ello no se puede *aceptar* una teoría científica. El problema es que para Van Fraassen esto es *lo único* relevante. Porque además "el punto" *sistema solar* de su modelo tiene una *referencia* que le da otra dimensión de realidad: existe realmente en el universo ese objeto referenciado, como podemos constatar los que vivimos en el sistema solar; otra cosa es *el nivel de conocimiento* que su modelo le da al *hombrecillo verde* de ese objeto y que, a ese nivel, sería muy pobre. Y este es el segundo problema de la teoría de la ciencia de Van Fraassen: no tiene ninguna visión *gradualista* del conocimiento. Supongamos que el *hombrecillo verde* avanza a un segundo nivel en sus investigaciones y descubre que "el punto" *sistema solar* es un conjunto con una estructura. De esta forma crea un modelo científico en el que aparecen el Sol, la Tierra, Júpiter, etc. como "puntos" con una dinámica propia y unas interrelaciones. Y supongamos que crea dos modelos científicos alternativos: el modelo ptolemaico, incluyendo además de esos objetos los periciclos, y el modelo heliocéntrico anterior a Kepler con sus órbitas circulares. Como se sabe, el modelo ptolemaico se impuso durante casi 2000 años al modelo muy anterior heliocéntrico (fue ya propuesto por Demócrito) porque el artificio de los periciclos permitía predecir las efemérides astronómicas a la perfección, en lo que el modelo heliocéntrico, con sus órbitas circulares, no acertaba nunca. Es decir, se impuso fundamentalmente por ser *empirically adecuate*. Y supongamos que eso mismo le pasaba al *pequeño hombrecillo verde*. Es decir, la *adecuación empírica*, lejos de ser lo único relevante como sostiene Van Fraassen, es más bien la *conditio sine qua non* para empezar a reconocer una teoría como científica, aunque *pueda ser falsa*. Van Fraassen analiza estos dos modelos cosmológicos y sus implicaciones en (Van Fraassen, 1980, 45 y ss). Y supongamos ahora que alguien en el universo del *hombrecillo verde* elabora la teoría de la gravitación y desarrolla un modelo heliocéntrico con las correspondientes órbitas elípticas. Ahora ambos modelos serían *adecuados empíricamente*: medirían igual los datos observables y podrían predecir con exactitud las efemérides astronómicas. Podemos hacer aquí dos observaciones: primero, que en esta situación, con ambos modelos, el *grado de conocimiento* del objeto real "sistema solar" ha aumentado sensiblemente respecto de el primer modelo galáctico concebido por el *hombrecillo verde* y, segundo, que la *realidad objetiva* –más allá de la *realidad en su modelo*- de los objetos involucrados puede sin embargo ser dudosa para *el hombrecillo verde,* suponiendo que no tenga un aparato de medida que le de una percepción visual en tiempo real. ¿Es real la Tierra? ¿Son reales los epiciclos? ¿Son reales las órbitas elípticas predichas? ¿O son sólo conceptos creados en los modelos por las capacidades cognitivas del *hombrecillo verde*? (Véase al respecto los artículos de Carnap "The Methodological Status of Theoretical Concepts" (Carnap, 1958) y de Maxwell "The Ontological Status of Theoretical Entities" (Maxwell, 1964)). Está claro que la respuesta sólo podrá llegar cuando el *hombrecillo verde* construya un aparato observacional adecuado (óptico o de otro tipo, pero ajustado a sus capacidades cognitivas) para poder determinar en tiempo real la posición de cada astro y su mayor parte de las afirmaciones y de los ejemplos matemáticos aportados por Kant se refieren casi exclusivamente a la Geometría euclídea, por lo que se plantea la duda de si su epistemología de la Matemática se podría generalizar de algún modo a toda la Matemática y, en especial, a la Matemática actual en la que, además de una expansión sin precedentes de sus teorías, se ha producido un cambio ya reseñado en la percepción del Algebra como manipulación sobre objetos simbólicos y en la aritmetización de gran parte de la Matemática.

---

velocidad; y en ese caso rechazaría el sistema ptolemaico por irreal. Y así su *grado de conocimiento* del sistema solar habrá aumentado sensiblemente. Aunque es evidente que no es total. La Tierra seguiría siendo para él "un punto" en su modelo así como en su conocimiento, y el *conocimiento completo* consistiría en que viviera en la Tierra, o consiguiera recrear esa vivencia, y tuviera *nuestra sensibilidad*. El ejemplo plantea una analogía con nuestro estudio del microcosmos. No podemos saber a ciencia cierta si los *electrones* o los *bosones de Higgs* son *objetos reales*, como la Tierra, o son artificios del modelo, como los epiciclos. Al menos hasta que desarrollemos aparatos observacionales más adecuados, o teorías más adecuadas –además de *empíricamente adecuadas*-. Y aquí se acaban las posibilidades de mantener la analogía, porque al tratarse del estudio de los constituyentes de la materia de nuestro mundo cotidiano, sus propiedades no pueden ser las de esa materia y no tenemos un acceso a esos objetos de acuerdo con nuestra constitución *sensitiva*; los objetos postulados por el modelo sólo pueden captarse por su comportamiento en variables que establece el modelo. Y esas variables, sus características medibles y la misma medición *las pone el sujeto*. Por lo que aparece necesariamente un grado de indeterminación de su carácter ontológico. Aquí sí podría decirse que la *adecuación empírica* en la observación de los datos y en la predicción (por muy ambiguo y mal especificado filosóficamente que estos términos parezcan, y en Van Frassen lo son) y que postula Van Fraassen sería necesariamente, de momento, la única característica cognitiva que podemos manejar para la aceptación de un modelo científico. Al menos hasta que aparezcan nuevos modelos teóricos igualmente empíricamente adecuados pero con mayor *capacidad explicativa* y que provean un *mayor conocimiento* del objeto. Pero esta perspectiva es muy distinta a proponer la *adecuación empírica* como *la única* característica *deseable* de un modelo científico, que es lo que sostiene Van Fraassen. La obra de Van Fraassen es brillante en su conocimiento de los detalles de las teorías científicas desarrolladas en el siglo XX y en su dominio de los debates sobre los fundamentos de la Física desarrollados entre 1950 y 1980, así como en el desarrollo de análisis lingüísticos semánticos sobre algunos términos o propuestas realizadas, incluyendo interpretaciones que son puntualmente muy sugestivas. Pero los problemas de fondo consisten en que, en primer lugar, muchas de sus nociones clave no contienen el más mínimo análisis filosófico ni especificación concreta; en segundo lugar, que carece totalmente de una teoría cognitiva que explique *cómo* el sujeto adquiere sus conocimientos, los procesa, crea conceptos y representaciones y *construye* modelos científicos; y en tercer lugar, que también carece de una teoría de la *verdad* y no posee una visión *gradualista* del conocimiento. Y en relación al nombre que elige para su teoría de la ciencia, su calificación de *empirismo* sería adecuada, puesto que parece que resucita de nuevo el paradigma de *lo dado*, aunque sin una elaboración epistemológica clara, por lo que su propuesta resulta una propuesta empirista muy tosca y simple. Para valorar la vigencia de la teoría de Van Frassen sobre el realismo debería tenerse también en cuenta lo dicho en este trabajo acerca del surgimiento y aplicabilidad de algunas de las teorías científicas desarrolladas en los últimos 80 años (termodinámica, teoría de la probabilidad, teoría de la información, etc). Allí hemos visto y justificado el rol fundamental que la *referencia* a un objeto real ajeno al modelo desempeña en el mismo origen de la teoría y en su aplicabilidad, desde un punto de vista cognitivo y epistemológico. Al desdeñar estos aspectos, la teoría de Van Fraassen no aporta ningún elemento novedoso que *amplíe la comprensión de la ciencia*, y supone, de hecho, un retroceso respecto de teorías epistemológicas más elaboradas como, incluso, las de algunas versiones del empirismo o del positivismo lógico (Reichenbach, Carnap), y muy en contra de la aspiración inicial de Van Fraassen. Una información detallada de las tesis de Van Fraassen, con referencias recientes a análisis desde distintos enfoques, en (Monton & Mohler, 2014). Sin embargo, aunque nuestros comentarios se han basado en la obra más popular de Van Fraassen en la que pretende justificar su cruzada anti-realista, en otras obras desarrolla una teoría de la ciencia que sería neutra respecto a la polémica realismo-antirealismo, y en donde los conceptos están mucho más afinados. Basándose en la noción habitual de la física moderna de *espacios de estados* o *espacios de fases*, Van Fraassen desarrolla una teoría que, pese a sus diferencia terminológicas, es muy análoga en su enfoque semántico y en sus resultados a la *teoría estructuralista de la ciencia* de Wolfgang Stegmüller y Carlos Ulises Moulines. Las comparamos y analizamos críticamente en una nota posterior (véanse las Notas 505 y 507).

Además hemos visto que las modernas teoría científicas[505] –de las que hemos analizado varios ejemplos paradigmáticos de la segunda revolución científica que surge a partir de 1940-, parecen que sugieren el *carácter subjetivo* en la determinación de ciertos objetos de la realidad empírica, que son aprehendidas por construcciones matemáticas que refuerzan ese *carácter subjetivo* y que parecen que operan más bien sobre símbolos que sobre objetos reales.

Una característica fundamental de los sistemas representacionales de las ciencias modernas es, como hemos visto en nuestro análisis, la postulación de objetos que hemos caracterizado como objetos *que tienen una forma de existencia distinta* de los objetos del mundo cotidiano de los humanos. Y esto en el sentido de que no se pueden percibir, si es que existen, por medio de los *sentidos* humanos directamente; se pueden *percibir* midiendo sus *efectos e interacciones* con aparatos construidos *ex profeso* lo cual, si bien por un lado se puede considerar como una extensión de la *sensibilidad* humana, por otro implica que esa *percepción* está en gran parte determinada por esos aparatos y por las unidades de medida y criterios de medida adoptados (y eso en gran medida *convencionalmente*, aspecto que destacó Poincaré). Y por ello el *realismo* adquiere distintos matices según el enfoque *ontológico* que se considere. Puesto que esta problemática estaba ya en el seno del modelo de la Mecánica de Newton –si bien no tan claramente como en las modernas teorías físicas-, cabría conjeturar si Kant era consciente de la problemática[506], lo que explicaría la permanente tensión entre su *realismo empírico* y las críticas planteadas por él mismo desde el punto de vista *transcendental*; el clarificar esta conjetura exigiría un análisis a fondo de sus escritos sobre la Física, lo cual se plantea como una continuación natural de esta investigación.

Todo ello pone en cuestión, tanto el carácter inequívocamente realista que hemos asignado a la teoría cognitiva de Kant, como la posibilidad de generalizar su epistemología de la Matemática. Y esto es lo que vamos a discutir aquí.

Además, aparecen a lo largo de este estudio tres temas que exigirían una investigación posterior, que sería complementaria a este análisis, pero de gran relevancia. En primer lugar, un tema que subyace a todos estos análisis es la relación entre la Matemática y el lenguaje, y la posibilidad y el sentido de la *traducción* de una teoría matemática, aspectos que implicarían

---

[505] Para Echeverría Ezponda, "La filosofía de la ciencia en el siglo XX, por lo menos a partir de la Segunda Guerra Mundial, aglutina a sus cultivadores en dos grandes bandos que, prescindiendo de las innumerable posiciones intermedias, podrían denominarse, respectivamente, *lógicos de la ciencia e historiadores de la ciencia* (...) la llamada concepción estructural, al principio llamada no-lingüística, iniciada por Sneed en 1971 y continuada por autores como Stegmüller, Adams, Balzer y Moulines, pretende ser la síntesis de los dos bandos precedentes, conjugando el estudio histórico minucioso de las teorías con el ulterior análisis, altamente formalizado, de su estructura y evolución" (Echeverría, 1987, 13). Analizando a continuación la evolución histórica de la Teoría de Conjuntos desde las concepciones iniciales de Cantor, extrae unas deficiencias en el enfoque de este proceso desde la concepción estructuralista, concluyendo que "la tentativa de separar la investigación propiamente matemática de la investigación filosófica, sea ésta fundamentista o no, implica dejar de lado toda una serie de datos históricos tan válidos como los distintos modelos parciales que fueron siendo los ámbitos de aplicación progresiva de la teoría cantoriana" (Echeverría, 1987, 20). Véase la Nota-507.

[506] Por ejemplo, la noción de *masa* en la Mecánica de Newton planteaba ya esa problemática. La *masa* de un cuerpo no se puede decir qué significa, salvo por sus interrelaciones con otras variables medibles, ni se puede medir directamente, ni tenemos *percepción* de ella (salvo por la sensación de peso). Aparece simplemente como una constante de varias ecuaciones entre variables medibles. Podemos determinar su medida indirectamente, en gran parte por *convención* (Poincaré). Por ejemplo, podemos definir una *masa* de 1 Kilogramo-masa como la masa de un cuerpo que es atraído al nivel del mar con la *fuerza* de 1 Kilopondio (y esa fuerza sí la podemos medir). Así pues, la existencia de magnitudes físicas fundamentales que no se pueden medir directamente ni, en realidad, determinar su *significado objetivo* estaba ya en la mecánica newtoniana. Habría que determinar si Kant era consciente de su importancia para sus contundentes puntos de vista realistas de la Estética Transcendental.

también un estudio del carácter de los objetos matemáticos y de su tipo de existencia[507]. En segundo lugar, aparece como primordial un estudio paralelo a éste acerca del pensamiento de

---

[507] En este análisis es relevante el trabajo del lógico y matemático holandés Evert Willem Beth. Desde su inicial adscripción al movimiento neokantiano, y específicamente a la escuela de Marburg, fue evolucionando su pensamiento en el sentido de plantear una interpretación semántica de la Lógica y la Matemática que en la epistemología de la ciencia implicaba una alternativa al empirismo y positivismo lógico fundamentado en una visión exclusivamente sintáctica. Aunque esas ideas estaban ya latentes en su misma tesis doctoral (Beth, 1935), su pensamiento maduro se desarrolla en (Beth, 1951, 1959, 1963, 1964 y 1965), apoyándose en los trabajos de Tarski y en los de los matemáticos Birkhoff y Von Neumann *The logic of Quantum Mechanics* (1936) y *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (von Neumann, 1955), así como en algunos trabajos de Hermann Weyl. Su influencia fue determinante en los trabajos de Patrick Suppes (1972, 1974 y 1988), su discípulo Joseph D. Sneed (1971), Frederick Suppe (1974, 1989 y 2000) y Ronald Giere (1988). De una u otra forma estas influencias están detrás de los dos principales modelos semánticos actuales de la teoría de la ciencia, el desarrollado por Van Fraassen y el de la llamada *teoría estructural de la ciencia* desarrollada por Wolfgang Stegmüller y su discípulo Carlos Ulises Moulines, las cuales, pese a sus diferencias terminológicas, presentan muchos puntos de concordancia. Un estudio comparativo minucioso de ambas teorías, en la tesis doctoral de Germán Guerrero (2003) y sus artículos posteriores (Guerrero, 2007, 2008 y 2012). La *teoría estructural de la ciencia* se puede decir que se plantea en la obra de Sneed *Logical Structure of Mathematical Physics* (1971) y aparece definitivamente cerrada y madura en la monumental obra de Balzer, Moulines y Sneed *An Architectonic for Science. The Structuralist Program* (1987). Esta teoría, más que partir de la clásica concepción de una *teoría* como un conjunto de proposiciones, asume un mecanismo interpretativo entre diversos sistemas lingüísticos (*modelos*) para la aprehensión de la "realidad", asumiendo la noción de *modelo* planteado en los años 70 por Bourbaki y desarrollándolo sobre una base *conjuntista* que debería ser semánticamente interpretado sobre un *dominio de referencia*. En palabras de Moulines, "de todas las teorías de la ciencia que actualmente están en discusión, el programa estructuralista de reconstrucción de las teorías es, en mi opinión, el enfoque en el que la síntesis de las diferenciaciones metodológicas antes citadas se ha llevado a cabo de la manera más consecuente y prometedora. Por un lado, este enfoque pertenece al campo de la teoría formal de la ciencia en el sentido de que no sólo se hace uso de la lógica formal, sino también de los conceptos y métodos de la teoría de modelos tarskiana y de los medios de representación de la teoría de conjuntos elemental. En esto último se ve inspirado sobre todo por los trabajos previos de Patrick Suppes y sus colaboradores, quienes ya han reconstruido una gran porción de las ciencias empíricas con medios relativamente elementales de la teoría de conjuntos y utilizando el método que se conoce como '*axiomatización por medio de un predicado conjuntista*'. Tarski y Suppes son, pues, los dos precedentes metodológicos inmediatos de la concepción estructuralista, tal como ésta fue iniciada por Joseph Sneed, reelaborada y divulgada por Wolfgang Stegmüller (1952, 1957, 1965, 1976 y 1979), y que ha culminado (al menos por el momento) en la obra conjunta *An Architectonic for Science*" (Moulines, 1996b, 96-97). Para Moulines (1996b, 97-98), "el estructuralismo metacientífico debe su nombre a su punto de partida reconstructivo, a saber, la propuesta metodológica de que no hay que tomar, como es usual en la filosofía de la ciencia, los enunciados o proposiciones como las unidades básicas del conocimiento científico, sino más bien diversos tipos de estructuras, en cuanto entidades no-proposicionales, que son inherentes al conocimiento científico. El término 'estructura' se entiende aquí como término técnico de la teoría de conjuntos, y más concretamente dicho, en el sentido de Bourbaki. De acuerdo a este enfoque, las teorías científicas se conciben como determinados complejos consistentes en diversos tipos de estructuras". La idea principal que defiende el *enfoque semántico* es que las teorías científicas quedan mejor comprendidas como *conjuntos de modelos*, en el sentido matemático abstracto, que como *conjunto de enunciados*. En estos términos se subraya, por un lado, la dependencia lingüística del enfoque sintáctico y, por el otro, el modo como se supera esta dificultad al asimilar una teoría con una entidad no estrictamente sintáctica, con un conjunto de modelos. Guerrero (2007, 23) propone llamar a esta caracterización general de las teorías "concepción semántica standard", que englobaría tanto la interpretación de Van Fraassen como la de Stegmüller-Moulines, y en su tesis (Guerrero, 2003) plantea un estudio comparativo entre ambas basándose en "los elementos de identidad de una teoría, la caracterización de los modelos teóricos y los modelos de datos, la forma de la aserción empírica y la neutralidad epistémica" (Guerrero, 2007, 21). Un marco *conjuntista* predomina en el desarrollo de la teoría, que se describiría por las interrelaciones de tres distintos "sistemas lingüísticos" que fuerzan a una *interpretación semántica* del modelo teórico: *la clase de modelos teóricos, los modelos de datos y las aserciones empíricas*. Siguiendo a Guerrero (2007, 24), "aunque hay diferencias en la forma como estas dos concepciones caracterizan las teorías empíricas (van Fraassen lo hace mediante modelos teóricos e hipótesis teóricas, y el estructuralismo mediante un núcleo teórico y un dominio de aplicaciones intencionales), considero que esta diferencia es sólo de forma puesto que, como intentaré mostrar en lo que sigue, en el fondo estas dos concepciones estarían de acuerdo en que los elementos

Kant y Hilbert en relación con la Física y sus teorías; en lo que respecta a Hilbert, este estudio ha sido recientemente iniciado por Leo Corry (1997 y 2006) y en lo que respecta a Kant debe resaltarse el carácter pionero del estudio realizado por Michael Friedman (1992). Y en tercer y último lugar, destacamos la perspectiva que se sugiere en múltiples puntos de esta investigación en la dirección del desarrollo de una fundamentación *naturalista* de las Matemáticas a partir de nuestras conclusiones y análisis; esto implicaría un análisis previo del significado de una tal fundamentación. Estos tres temas describen un amplio marco de investigación que debería completar la aquí realizada.

9.2.- La construcción de conceptos matemáticos en la intuición, la síntesis de la imaginación y el esquematismo.

Tanto las conclusiones de la obra de Giaquinto como las de Shabel en relación con Kant son muy próximas a algunas fundamentales de las nuestras. Centradas, como la nuestra, básicamente en la Estética Transcendental, no investigan como nosotros el tópico de la

---

determinantes". Pero en ambas concepciones existen varios elementos problemáticos. En primer lugar, la indefinición del *dominio de interpretación* que, por un lado caracteriza a ambas teorías como neutras en el debate realismo-antirealismo. En realidad ambas teorías estaban ya latentes como *una parte* de la concepción epistemológica de Kurt Gödel, como evidencia la siguiente lúcida cita, que Moulines (1973b, 97) también reproduce: "si se admite que los significados de los términos primitivos de la teoría de conjuntos (…) son firmes, se sigue que los conceptos y teoremas conjuntistas describen cierta realidad bien determinada, en la que la conjetura de Cantor debe ser o verdadera o falsa. Por tanto, su indecibilidad a partir de los axiomas admitidos hoy día sólo puede significar que estos axiomas no contienen una descripción completa de esa realidad" (Gödel, 1964) "What is Cantor's Continuum Problem?", reproducido en (Benacerraf & Putnam, 1983, 263-264). El problema es cómo debe interpretarse esa "realidad" a la que se refiere Gödel. Conociendo el manifiesto platonismo de Gödel, para él sólo podría significar un *mundo* de objetos con una realidad ideal platónica, o de sistemas lingüísticos tendentes a capturar esa "realidad ideal", lo que es difícil de justificar epistemológicamente. Pero también puede ser un *mundo* de relaciones objetivas entre objetos materiales, o bien una *estructura* de carácter lingüístico constituida en un dominio semántico en relación con una estructura teórica de enunciados de un *nivel superior* o más general. Y es cierto que las teorías aquí examinadas son neutras en ese debate pero, contradiciendo la opinión de Guerrero, existen importantes diferencias de perspectiva (y posibilidades de desarrollo) entre el enfoque de Van Fraassen y el enfoque estructural de Stegmüller-Moulines. En efecto, la deriva anti-realista que hemos criticado anteriormente al comentar *The Scientific Image* de Van Fraassen está perfectamente justificada desde sus presupuestos epistémicos; le basta considerar el dominio interpretativo como *los datos* y considerar una interpretación semántica como científica si cumple el requisito (débil) de *adecuación empírica*, revitalizando así el viejo esquema cartesiano de *lo dado*. Sin embargo ya Patrick Suppes (1974) dudaba de la objetividad de *los datos*, resaltando que en ellos el sujeto ya impone una estructura y sugiriendo que representarían una *estructura* de alguna forma lingüística, a lo que Suppes llama "un modelo de datos". La *teoría estructural* de Moulines (1996c) abre perspectivas distintas a las de Van Fraassen al plantear como fundamental que las interpretaciones semánticas (en su terminología, los modelos *intencionales*) tienen un carácter *esencialmente aproximado*, y profundiza en esa noción de *aproximación*. Pero ambos modelos adolecen de tres defectos esenciales, además del ya mencionado: primero, parecen diseñados para *capturar* las características de las teorías de la Física moderna (casi exclusivamente), segundo, si lo consiguen, carecen de un criterio epistemológico que permita *explicar* la evolución y sustitución de teorías -fallan en la interpretación diacrónica, pese a la opinión en contra de Moulines (1996b, 104)-, y tercero y más fundamentalmente, carecen de una teoría cognitiva que pretenda explicar *cómo y con qué limitaciones* los seres humanos son capaces de construir sus *representaciones y teorías*. Y ese aspecto sí era esencial en la epistemología kantiana, o incluso en sistemas en ella inspirados como la *teoría de las formas* de Cassirer, que permitirían una explicación más profunda y general de los *los sistemas representacionales y de las teorías científicas*, sin desdeñar el avance (parcial) que representa la *epistemología estructural*. Cfr. Evert Beth (1935, 1951, 1959, 1963, 1964 y 1965), Sneed (1971), Sneed & Balzer & Moulines (1987), Moulines (1973 y 1996), Van Fraassen (1970, 1980, 1989, 1998, 2001, 2002 y 2007), Stegmüller (1952, 1957, 1965, 1976 y 1979), Suppes (1972, 1974 y 1988), Suppe (1974, 1989 y 2000), Giere (1988), Rosenberg (2005), Echeverría Ezponda (1987, 1988 y 1997b) y Guerrero (2003, 2007 y 2012). Véase también la Nota-505.

intuición pero concluyen de acuerdo con nosotros resaltando la importancia que la *construcción de conceptos* tiene para la teoría del conocimiento de Kant y, en particular, para su epistemología matemática. Shabel introduce en su análisis un matiz de esa *construcción de conceptos matemáticos* que indicaría el significado que Kant le adjudicaría, poniéndolo en relación con la *práctica* matemática de su época, y que es sin duda la forma más segura de entender lo que Kant quería indicar al respecto.

Existen pocos lugares de la *KrV* en los que Kant se refiere explícitamente a la Matemática, a pesar de la importancia que estos han llegado a tener para su interpretación global. El más relevante es el capítulo del *Transzendentale Methodenlehre* titulado *die Disziplin der reinen Vernunft im dogmatischen Gebrauche* (A713/B741-A714/B742), detenidamente comentado en el Capítulo-3, y en el que Kant intenta sentar las bases de la diferencia de método entre la Filosofía y la Matemática, y que es donde los estudiosos han focalizado habitualmente su análisis de la Matemática en Kant. En una primera lectura, parece que se sugiere que el concepto matemático construido aparece *a priori* como una *pura intuición*, pero se mostraría a través de una "figura dibujada o imaginada", lo que sugiere que ese objeto concreto y singular nunca serviría para construir su correspondiente concepto universalmente y, además, sugiere también un tipo de conocimiento *empírico* o *a posteriori*. Y aquí Shabel encuentra una doble tensión que intenta resolver. Su solución se basa en la distinción que hace Wolff, y que Kant debía conocer perfectamente, entre las "demostraciones matemáticas" y las "demostraciones mecánicas" (Shabel, 2003, 92) y que parece muy verosímil de cara a interpretar el pensamiento de Kant. Wolff presenta varias "demostraciones mecánicas" que define como "demonstratio mechanica, ein mechanischer Beweis, heiβet bei mir ein solcher Beweis, da man vermittelst nöthiger Instrumente die Sache, so erwiesen werden soll, untersuchet und sie richtig befindet" (Wolff, 1965, 506). Es decir, demostraciones que necesitan de instrumentos, como la regla o el compás, para llegar al resultado postulado. No da una definición de "demostración matemática", pero se refiere reiteradamente a ella cuando presenta demostraciones que no necesitan de artificios para llegar a la tesis; la tesis se deduce por razonamientos *contenidos* en el propio *concepto* del objeto. Un ejemplo arquetípico sería la demostración del teorema I.32 de Euclides, en el que demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre de dos ángulos rectos. Es un ejemplo arquetípico en muchos aspectos porque, siempre que Kant se refiere a un objeto concreto se refiere al triángulo: Bxii; A24; A48/B65; A164-5/B205-6; A220/B268; A223/B271; A240/B299; A713-4/B741-2; A716/B744; A718/B746; A722/B750; A730-3/B758-61. Wolff da dos demostraciones: una "demostración mecánica" en su *Mathematisches Lexikon* (Wolff, 1965, 506-7) y una "demostración matemática" en su *Elementa Geometriae* (Wolff, 1968, Theorema 40, 156), que es la misma que presenta Euclides en su demostración de la proposición I.32 y que es la que reproduce Kant en A716/B744. Otro ejemplo sería la demostración de la proposición I.22 de Euclides en la que resuelve el problema de cómo construir un triángulo a partir de tres segmentos rectos dados[508]. Lo relevante consistiría en que en ese tipo de demostraciones la tesis se sigue de una *argumentación racional* a partir *del propio concepto* del objeto construido, *relacionándolo* con otros conceptos, y sin recurrir a artificios mecánicos. Por cierto que, como señala Heath (Euclides, 1956, 320), la proposición I.32 era también el ejemplo favorito de Aristóteles cuando deseaba referirse a alguna "verdad" generalmente reconocida como evidente.

A partir de aquí Shabel (2003, 94) sostiene que sería esa "conjunción" del conocimiento *a priori* de un objeto matemático con la "regla" que indica su construcción lo que permitiría caracterizar las *intuiciones puras* a través de la *construcción concreta de conceptos*

---

[508] Las demostraciones detalladas, en (Shabel, 2003, 93-101).

matemáticos. Se observa aquí un paralelismo total con la tesis de Giaquinto (2009) discutida más arriba, de que la *posesión a priori* de un concepto matemático (siguiendo su ejemplo, un cuadrado perfecto) –y que él demuestra que es posible- fundamentaría la tesis kantiana de que los enunciados matemáticos (para él, por lo menos en la geometría euclídea) serían sintéticos y *a priori*. Y para Shabel esto sería también una consecuencia directa de la *práctica* matemática de su época: "I want to emphasize my view that for Kant the synthetic *a priori* of mathematical cognition follows *from* the view that mathematical concepts are constructed in pure intuition, and not viceversa …on the basis of his engagement with actual mathematical practice, Kant observed that mathematical concepts are constructible in pure intuition and, thus, that mathematical cognition is synthetic *a priori*. His theory of contructibility of mathematical concepts is not an *ad hoc* attempt to validate the status and role of mathematical knowledge in his arguments for transcendental idealism, but rather is a sophisticated explanation for eighteenth century methods of mathematical demonstration" (Shabel, 2003, 157)[509].

Shabel cree que esa "conjunción" se realiza a través de la *facultad transcendental de la imaginación*[510], en cuanto que en la medida de que debemos dibujar un diagrama euclídeo para reconocer los elementos de una estructura geométrica, debería existir también en nosotros una *consciencia* de los procedimientos que deberíamos seguir para efectuar tal construcción, como aclararía el siguiente texto de Kant al hablar de la *unidad sintética en la multiplicidad de la intuición*:

> "Diese [Einheit] ist aber unmöglich, wenn die Anschauung nicht durch eine solche Funktion der Synthesis nach einer Regel hat hervorgebracht werden können, welche die Reproduktion des Mannigfaltigen a priori notwendig und einen Begriff, in welchem dieses sich vereinigt, möglich macht. So denken wir uns einen Triangel als Gegenstand, indem wir uns der Zusammensetzung von drei geraden Linien nach einer Regel bewusst sind, nach welcher eine solche Anschauung jeder Zeit dargestellt werden kann. Diese Einheit der Regel bestimmt nun alles Mannigfaltige, und schränkt es auf Bedingungen ein, welche die Einheit de Apperzeption möglich machen, un der Begriff dieser Einheit ist die Vorstellung vom Gegenstande = X, denn ich durch die gedachte Prädikate eines Triangels denke" (A105)[511].

Para Kant, además, ese conocimiento sería sintético porque, entre otras cosas, el concepto original del ángulo suma de un triángulo no contiene en sí el concepto de dos ángulos rectos, por lo que un filósofo no podría demostrarlo analíticamente:

> "Weil er weiβ [der Geometer], dass zwei rechte Winkel zusammen gerade so viel austragen, als alle berührende Winkel, die aus einem Punkte auf einer geraden Linie gezogen werden können, zusammen, so verlängert er eine Seite seines Triangels, und bekommt zwei berührende Winkel, die zweie rechten zusammen gleich sind. Nun teilet er den äuβeren von diesen

[509] Una investigación sobre los distintos tipos de objeciones a la filosofía de la Matemática de Kant así como un argumento de defensa puede leerse en (Risjord, 1990).

[510] "I suspect also that my notion of 'conjunction' is possible via the transcendental faculty of imagination, and would thus be illuminated by further reading in the 'Deduction'. Unfortunately, this is not a task I can complete here" (Shabel, 2003, 158).

[511] "Decimos, pues, que conocemos el objeto cuando hemos producido la unidad sintética en lo diverso de la intuición. Ahora bien, no es posible tal unidad si la intuición no ha podido ser originada, según una regla, por una función tal de síntesis, que, por una parte, haga posible un concepto en el que la diversidad se unifique y, por otra, haga necesaria *a priori* la reproducción de esa misma diversidad. Por ejemplo, pensamos un triángulo como objeto, en la medida en que somos conscientes de la unión de tres líneas rectas conforme a una regla según la cual siempre puede representarse tal intuición. Esa *unidad de la regla* es la que determina toda la diversidad y la somete a unas condiciones que hacen posible la unidad de la apercepción. El concepto de esa unidad es la representación del objeto = X que pienso a través de los mencionados predicados de un triángulo" (A105). (PR)

> Winkeln, indem er eine Linie mit der gegenüberstehenden Seite des Triangels parallel zieht, und sieht, dass hier ein äuβerer berührender Winkel entspringe, der einem inneren gleich ist, usw." (A716/B744)[512].

Y en los siguientes textos, Kant se refiere explícitamente a los dos métodos de demostración de Wolff, recalcando que los juicios matemáticos *a priori* requieren que los conceptos matemáticos sean construidos en la *intuición pura*, como efectivamente hacía la "demostración matemática", mientras que la "demostración mecánica" construía los objetos en la *intuición empírica* y, por tanto, *a posteriori*. Aunque eso no condicionaba el carácter sintético de ambos juicios:

> "Nun ist dieses nicht anders möglich, als dass ich meinen Gegenstand nach den Bedingungen, entweder der empirischen Anschauung, oder der reinen Anschauung bestimme. Das erstere würde nur einen empirischen Satz (durch messen seiner Winkel), der keine Allgemeinheit, noch weniger Notwendigkeit, enthielte, abgeben, und von dergleichen ist gar nicht die Rede. Das zweite Verfahren aber ist die mathematische und zwar hier die geometrische Konstruktion, vermittelst deren ich in einer reinen Anschauung, eben so wie in der empirischen, das Mannigfaltige, was zu dem Schema eines Triangels überhaupt, mithin zu seinem Begriffe gehöret, hinzusetze, wodurch allerdings allgemeine synthetische Sätze konstruiert werden müssen" (A718/B746)[513].

> "Wenn man von einem Begriffe synthetisch urteilen soll, so muss man aus diesem Begriffe hinausgegen, und zwar zur Anschauung, in welcher er gegeben ist. Denn, bliebe man bei dem stehen, was im Begriffe enthalten ist, so wäre das Urteil bloβ analytisch, und eine Erklärung des Gedanken, nach demjenigen, was wirklich in ihm enthalten ist. Ich kann aber von dem Begriffe zu der ihm korrespondierende reine oder empirische Anschauung gehen, um ihn in derselben in concreto zu erwägen, und, was dem Gegenstande desselben zukommt, a priori oder a posteriori zu erkennen. Das erstere ist die rationale un mathematische Erkenntnis durch die Konstruktion des Begriffs, das zweite die bloβe empirische (mechanische) Erkenntnis, die niemals notwendige und apodiktische Sätze geben kann" (A721/B749)[514].

Y quedaría el último aspecto clave por dilucidar. ¿Cómo es posible explicar que el concepto matemático, en cuanto construido en la intuición pura y, por tanto, en cuanto objeto individual, pueda implicar que es *representativo* de todas las posibles intuiciones que caen

---

512 "Como sabe [el geómetra] que la suma de dos ángulos rectos equivale a la de todos los ángulos adyacentes que pueden trazarse desde un punto sobre una línea recta, prolonga un lado del triángulo y obtiene dos ángulos adyacentes que, sumados, valen dos rectos. De estos dos ángulos divide el externo trazando una paralela al lado opuesto del triángulo y ve que surge de este modo un ángulo adyacente externo igual a uno interno; y así sucesivamente" (A716/B744), (PR).

513 "Ahora bien, esto sólo es posible determinando mi objeto de acuerdo con las condiciones de la intuición empírica, o bien de acuerdo con las de la intuición pura. Lo primero nos daría sólo una proposición empírica (por medio de la medición de los ángulos del triángulo) sin universalidad ni, menos todavía, necesidad. Este tipo de proposiciones no constituyen nuestro objeto. El segundo procedimiento es el matemático y, en este caso, la construcción geométrica, mediante la cual añado en una intuición pura, igual que hago en la empírica, la diversidad perteneciente al esquema de un triángulo en general y, consiguientemente, a su concepto; de esta forma tienen que construirse, claro está, proposiciones sintéticas universales" (A718/B746), (PR).

514 "Para juzgar sintéticamente de un concepto hay que ir más allá de él y acudir a la intuición en la que se ha dado, ya que si nos quedáramos en lo que se halla contenido en el concepto, el juicio sería simplemente analítico y no constituiría más que una explicación del pensamiento atendiendo a lo realmente contenido en él. Pero puedo ir desde el concepto a la intuición, pura o empírica, correspondiente a él para examinarlo en concreto desde ella y para conocer *a priori* o *a posteriori* lo que conviene al objeto mismo. Lo primero es el conocimiento racional y matemático mediante la construcción del concepto; lo segundo es el conocimiento meramente empírico (mecánico), que es incapaz de suministrar proposiciones necesarias y apodícticas" (A721/B749), (PR).

bajo ese mismo concepto y, por tanto, adquirir una *universalidad* en los juicios matemáticos? Para ello Shabel ofrece una lectura del "Esquematismo" y muestra cómo el rol esquemático de los conceptos construidos matemáticamente es crucial para resolver este punto. Examinando el "Esquematismo", identifica la relación entre las intuiciones puras y el *esquema* de los conceptos matemáticos, y ahí localiza la fuente de la universalidad de los juicios matemáticos: "the way in which a pure intuition (as I have interpreted it) constructs a pure sensible (i.e., mathematical) concept is analogous to the way in which the transcendental schema connects or mediates between a pure concept and an empirical intuition that instantiates it. Indeed, the mathematical diagram's ability to function purely in the sense described above provides an interpretive model for the function of a transcendental schema" (Shabel, 2003, 109-114), (A138/B177), (A141/B181), (A140, B179), (A142/B181), (A140/B180-A142/B181), (A714/B742) y (Allison, 1973). Estos últimos temas, que Shabel enuncia de forma muy sintética, han sido ampliamente estudiados por Bèatrice Longuenesse (1998) en "Kant and the Capacity to Judge. Sensibility and Discursivity in the Transcendental Analytic of the *Critique of Pure Reason*", y aunque su relevancia para una comprensión a fondo de la epistemología kantiana es fundamental al abordar la *Analítica Transcendental*, escapan totalmente a los límites de nuestra investigación, que están centrados en la *Estética Transcendental*.

Y de esta forma queda perfectamente aclarado cada uno de los significados, y ligados a la práctica matemática de la época, del siguiente importante pasaje-resumen de Kant (A713/B741-A714/B742):

> "Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe. Einen Begriff aber konstruieren, heiβt: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darzustellen. Zur Konstruktion eines Begriffs wird also eine nicht empirische Anschauung erfordert, die folglich, als Anschauung, ein einzelnes Objekt ist, aber nichts destoweniger, als die Konstruktion eines Begriffs (einer allgemeinen Vorstellung), Allgemeingültigkeit für alle mögliche Anschauungen, die unter denselben Begriff gehören, in der Vorstellung ausdrücken muss. So konstruiere ich einen Triangel, indem ich den diesem Begriffe entsprechenden Gegenstand, entweder durch bloβe Einbildung, in der reinen, oder nach derselben auch auf dem Papier, in der empirischen Anschauung, beide mal aber völlig a priori, ohne das Muster dazu aus irgendeiner Erfahrung geborgt zu haben, darstelle. Die einzelne hingezeichnete Figur ist empirisch, und dient gleichwohl den Begriff, unbeschadet seiner Allgemeinheit, auszudrücken, weil bei dieser empirischen Anschauung immer nur auf die Handlung der Konstruktion des Begriffs, welchem viele Bestimmungen, z. E. der Gröβe, der Seiten und der Winkel, ganz gleichgültig sind, gesehen, und also von diesen Verschiedenheiten, die den Begriff des Triangels nicht verändern, abstrahiert wird"[515].

[515] "El conocimiento *filosófico* es un *conocimiento racional derivado de conceptos*; el conocimiento *matemático* es un *conocimiento obtenido por construcción* de los conceptos. *Construir* un concepto significa presentar la intuición *a priori* que le corresponde. Para construir un concepto hace falta, pues, una intuición *no empírica* que, consiguientemente, es, en cuanto intuición, un objeto *singular*, a pesar de lo cual, en cuanto construcción de un concepto (representación universal), tiene que expresar en su representación una validez universal en relación con todas las posibles intuiciones pertenecientes al mismo concepto. Construyo, por ejemplo, un triángulo representando, sea el objeto correspondiente a este concepto por medio de la simple imaginación, en la intuición pura, sea, de acuerdo con ésta, sobre el papel, en la intuición empírica, pero en ambos casos completamente *a priori*, sin tomar el modelo de una experiencia. A pesar de que la figura singular trazada es empírica, sirve para expresar el concepto, no obstante la universalidad de éste. La razón está en que esa intuición apunta siempre al simple acto de construir el concepto, en el cual hay muchas determinaciones (por ejemplo, la magnitud de los lados y de los ángulos) que son completamente indiferentes; se prescinde, por tanto, de esas diferencias que no modifican el concepto de triángulo" (A713/B741-A714/B742), (PR).

9.3.- La concepción del Algebra en Kant y Hilbert, y el Algebra moderna.

Sólo existen dos lugares en la *KrV* en los que Kant se refiera explícitamente al Algebra y, según todos los comentaristas, son un ejemplo de confusión y ambigüedad. Se trata de A717/B745 y de A734/B762.

En su primera cita Kant, después de una larga digresión sobre las *magnitudes*, y sobre *quanta* y *quantita*, y en general, pareciendo referirse a la Aritmética, expone que: "und, nachdem sie den allgemeinen Begriff der Grössen nach den verschiedenen Verhältnissen derselben auch bezeichnet hat, so stellet sie alle Behandlung, die durch die Grösse erzeugt und verändert wird, nach gewissen allgemeinen Regeln in der Anschauung dar; wo eine Grösse durch die andere dividiert werden soll, setzt sie beide ihre Charaktere nach den bezeichnenden Form der Division zusammen, usw, und gelang also vemittelts einer symbolischen Konstruktion eben so gut, wie die Geometrie nach einer ostensiven oder geometrischen (der Gegenstände selbst) dahin, wohin die diskursive Erkenntnis vermittelst blosser Begriffe niemals gelangen könnte" (A717/B745)[516]. Y un poco más adelante se refiere explícitamente al Algebra, y en cuyo sentido se han solido centrar la mayoría de las discusiones:

> "Selbst das Verfahren der Algebra mit ihrer Gleichungen, aus denen sie durch Reduktion die Wahrheit zusamt, dem Beweise hervorbringt, ist zwar keine geometrische, aber doch charakteristische Konstruktion, in welcher man an den Zeichen die Begriffe, vornehmlich vor dem Verhältnisse der Gröβen, in der Anschauung darlegt, und, ohne einmal auf das Heuristische zu sehen, alle Schlüsse vor Fehlern dadurch sichert, dass jeder derselben vor Augen gestellt wird" (A734/B762)[517].

A partir de estas escasas referencia, un grupo de destacados científicos se ha embarcado en los últimos años en su interpretación, incluyendo los que pretendían ofrecer una interpretación kantiana de "construcción simbólica": C. D. Broad, Gordon Brittan, Jaakko Hintikka, Charles Parsons, Michael Friedman, Philiph Kitcher, Gottfried Martin, Manley Thomson y J. Michael Young. Un resumen de sus posiciones en (Shabel, 115-131), (Broad, 1941), (Friedman, 1992), (Martin, 1985) y especialmente en la antología de artículos (Posy, 1992). Para Shabel (2003, 117), "many contemporary Kant scholars, both critical and sympathetic, have used the passages cited to develop readings of what Kant's philosophy of algebra might have been". Y la conclusión más concluyentemente negativa es la de Broad (1941, 23): "it seems to me, then, that Kant has provided no theory whatever of algebraical reasoning". La postura de Shabel, sin ser tan tajante, se basa en sus amplios conocimientos de la Matemática del siglo XVIII y concluye que Kant no podía desarrollar una filosofía del Algebra en el sentido moderno, esto es, ligando partes del Algebra a los desarrollos de la Aritmética y desarrollando un Algebra abstracta de relaciones basada en una "teoría de construcciones simbólicas", por la sencilla razón de que esas perspectivas no existía en el

[516] "y, una vez ha designado también el concepto universal de las magnitudes según las diversas relaciones de las mismas, representa en la intuición, de acuerdo con ciertas reglas universales, todas las operaciones producidas y modificadas mediante la magnitud. Cuando una magnitud tiene que ser dividida por otra, la ciencia matemática combina los símbolos de ambas según el signo indicador de la división, etc. Así, pues, por medio de una construcción simbólica, exactamente igual que lo hace la geometría, por medio de una construcción ostensiva o geométrica (de los objetos mismos), lo que jamás podría conseguir el conocimiento discursivo por medio de simples conceptos" (A717/B745), (PR).

[517] "El mismo procedimiento del álgebra, con sus ecuaciones, a partir de las cuales, por reducción, produce la verdad juntamente con su prueba, aunque no es una construcción geométrica, es una construcción característica por la cual se presentan en la intuición los conceptos a través de signos, especialmente los que se refieren a relaciones de magnitud. Aun sin atender a su elemento heurístico, este método garantiza la ausencia de errores en todas las inferencias por el hecho de poner a la vista cada una de ellas" (A734/B762), (PR).

siglo XVIII, siglo en el que el Algebra era una mera técnica auxiliar para ciertos cálculos aritméticos y geométricos, pero en el que la Geometría seguía teniendo un papel preponderante. E intenta una interpretación acorde con los conocimientos matemáticos que, se supone, tenía Kant.

Pero aún así las conclusiones de Shabel son excesivas. Admitamos por un momento sus argumentos: admitamos que sus pasajes sólo se pueden referir a la Matemática usual en el siglo XVIII, entre la que no estaba el Algebra en el sentido moderno; admitamos que sus "demostraciones características" o "demostraciones ostensivas", según Kant propias del Algebra se remiten a "demostraciones matemáticas" de la Geometría euclídea; admitamos que todos los ejemplos que aporta Kant en la *KrV* eran ejemplos y demostraciones de la Geometría euclídea; admitamos que Kant en estos textos no aporta ningún ejemplo ni referencia en relación con el Algebra, y menos una demostración, por lo que difícilmente sabemos a ciencia cierta a qué se estaba refiriendo.

Pero queda el hecho también cierto de que Kant en esos pasajes aporta la terminología (no muy usual en su época) que, entendida en un sentido moderno, podría dar un contenido concreto a sus tesis: *forma, símbolo, demostración característica, intuición, "Gleichungen, aus denen sie durch Reduktion die Wahrheit zusamt",* y una conexión con la teoría de magnitudes y, además, ninguna conexión explícita con la Geometría. Es decir, aún suponiendo que sus supuestos fueran los correctos, que muy posiblemente lo sean, cabe preguntarse:

¿Se podría plantear el desarrollo del Algebra moderna y sus sistemas representacionales a partir de las nociones básicas de Kant (esto es, la *formación de conceptos* y la *intuición*) y que sea compatible con los textos reseñados y el conjunto de la epistemología matemática kantiana? Durante la Parte-II de este trabajo hemos demostrado que eso fue precisamente lo que hizo David Hilbert, imprimiendo un carácter de filosofía de la Matemática global a la epistemología kantiana. Porque los trabajos actuales de Shabel (2003), Giaquinto (2007), Mumma (2006 y 2008), Miller (2001, 2006 y 2012) y otros más arriba reseñados tienen un aspecto común: refuerzan muy sensiblemente la perspectiva kantiana pero bajo la perspectiva de que la filosofía de la Matemática de Kant se centraba exclusivamente en la Geometría euclídea. Sin embargo, la investigación de Giaquinto (2007), aunque no está realizada desde una perspectiva kantiana, consolida también la tesis de Kant pero, además, explora las posibilidades y alcance de la *cognición visual* en amplios espectros de la Matemática moderna con resultados todavía no siempre definitivos. Es también, aunque su origen e inspiración, como ya explicamos, no tiene en principio nada que ver con las posiciones con origen en Kant, una confirmación del *valor cognitivo y epistemológico* de las tesis desarrolladas por Hilbert y que, a su vez, estaban inspiradas por Kant.

9.4.- El punto de vista transcendental.

9.4.1.- Las dificultades que plantean la Analítica y la Dialéctica Transcendental para una concepción realista de la Matemática y del mundo.

Hasta aquí ha quedado perfectamente delimitada la teoría del conocimiento de Kant, así como su epistemología de la Matemática y el rol de la intuición. En nuestro estudio de la Estética Transcendental de la Parte-I la caracterizábamos inequívocamente como basada en un realismo sólido, y no sólo por su estructura teórica, sino también por las más que claras manifestaciones de Kant en ese sentido, sobre todo en la edición B que surgió en parte como reacción a la acogida que tuvo la A, la cual fue interpretada por muchos como una epistemología subjetivista y psicologista. La reacción de Kant frente al "escándalo de la filosofía" fue inequívoca, así como frente a estas lecturas psicologistas y subjetivistas, como vimos.

Pero el problema que surge es doble. Por un lado, la marcada tendencia de Kant a priorizar los componentes subjetivos y las determinaciones (y limitaciones) cognitivas y de todo tipo del sujeto, aspecto que se refuerza –como vimos en nuestro estudio precedente- con las tendencias de los sistemas representacionales modernos de las ciencias en esa misma dirección, sugieren una limitación a su supuesto realismo. Pero además, las propias manifestaciones de Kant en su Analítica y Dialéctica Transcendental parecen incluso que contradicen lo afirmado por él mismo en la Estética transcendental, suponiendo una dificultad interpretativa casi insuperable para los propios defensores de su realismo. Así que la tesis de un realismo kantiano queda bien fundamentada en varios puntos clave, pero a un nivel más general presenta muchas dificultades. En la *Dialéctica Transcendental* Kant pretende principalmente establecer las condiciones frontera del conocimiento humano, y esta parte de la *Crítica* plantea serias dificultades a la interpretación hasta aquí desarrollada. Como el mismo Abela (2002, 215) reconoce, "the Transcendental Dialectic portion of the *Critique* poses a potential obstacle to the realist interpretation. The elementary worry is that empirical realism as described up to this point may be vulnerable to Kant's own attacks on *transcendental* realism expressed most clearly in the Dialectic portion of the *Critique*".

Abela (2002, 214-293) intenta desarrollar una lectura de esta parte de la *Crítica* compatible con su interpretación de conjunto, pero que es la parte más discutible de su obra. Expone en primer lugar una argumentación que trata de demostrar que los ataques de Kant al realismo transcendental no afectan a las posiciones de un realismo al nivel empírico: "I claim that the all-too-common move to affirm an anti-realist analysis of Kant's notion of *possible experience* involves conflating the negative lesson of transcendental limits with a (false) empirical claim about the constrains that operate within the legitimate field of possible experience" (Abela, 2002, 215). En segundo lugar, desarrolla una interpretación de la prioridad que Kant asigna a la aplicación empírica de la idea transcendental de la sistematicidad de la naturaleza, contradiciendo los análisis de varios autores a los que Abela engloba bajo la denominación de *pragmatist and methodological interpretations*, como por ejemplo (Vaihinger, 1881-92), (Philip Kitcher, 1994). "Liberating empirical realism from the grip of these interpretations is required if the realist interpretation is to be sustained" (Abela, 2002, 216), pero no parece alcanzar esas perspectivas.

Las razones y motivos que le impulsaron a Kant a plantearse esa revisión crítica *de su propia teoría*, así como el conjunto de constructos mentales de la *Lógica Transcendental* y de la *Dialéctica Transcendental* (y de la *Crítica del Juicio*) no están explicitadas en ninguna parte y una investigación sobre conjeturas al respecto supera ampliamente las perspectivas de nuestro estudio. Sin embargo, no podemos de dejar de plantearnos una investigación de su *significado* y algunas hipótesis sobre sus consecuencias, sobre todo a la luz de los sistemas representacionales (especialmente matemáticos) de las ciencias modernas. La problemática fue ya puesta de manifiesto por Vaihinger (1884). Mejor dicho, Vaihinger en ese artículo presentó la controversia al respecto del siglo previo, que parte ya de la edición B de Kant y en la que la posición más negativa a la edición B, especialmente a los pasajes de la *Refutación del Idealismo*, fue la de Schopenhauer y Fisher; Vaihinger la resumió e intentó una interpretación[518]:

---

[518] Vaihinger señala varios autores claves en esta trayectoria y en ese replanteamiento del problema en torno a 1880: J. Whitte (1881), E. Arnoldt (1882), A. Calssen (1882 y 1883), H. Keferstein (1883), K. Fischer (1883), Fr. Staudinger (1884), Balfour (1878), Adamson & Watson (1880), Stirling (1860) y Caird & Green (1878), entre otros. Las referencias bibliográficas exactas en (Vaihinger, 1884, 87-88).

"Der Abschnitt der zweiten Auflage der *Kritik der reinen Vernunft*, welcher *Widerlegung des Idealismus* überschrieben ist, ist, wie bekannt, einer der umstrittensten Theile dieses merkwürdigen Buches,. Wie er schon im vorigen Jahrhundert viel besprochen war, so ward dies noch mehr der Fall, seitdem Schopenhauer mit Energie behauptet hatte, die Stelle enthalte eine prinzipielle Abweichung von dem Text der ersten Auflage und von dem Geiste des echten Kantischen Idealismus. Die Diskussion darüber, welche schon bisher eine groβe Literatur aufzuweisen hatte, ist nun neuerdings wieder in Gang gekommen durch die dritte Auflage des Fischer'schen Werkes *Imm. Kant und seine Lehre*. Fischer stellt sich im Wesentlichen auf Schopenhauers Seite" (Vaihinger, 1884, 87).

De modo que la situación era hasta, y en 1884, exactamente inversa a la nuestra. Simplemente se sostenía que la edición B contradecía la interpretación del Idealismo alemán de la edición A, inclusive en la *Estética Transcendental*; interpretaciones que hemos comentado en la Parte-I en relación con la escuela de Jena. Pero la intención de Kant era precisamente ésa, puesto que la edición B surgió precisamente como reacción a esas interpretaciones. Luego es una demostración explícita de que la postura esencial de Kant debe interpretarse como un *realismo robusto*, que es nuestra interpretación en la línea de Abela y de Hanna. Aunque el problema ahora sería el inverso al planteado por Vaihinger: cómo hacer compatible esa interpretación con los argumentos críticos de Kant en la *Analítica transcendental*. Vaihinger no pretende en principio solucionar el dilema, sino tan sólo hacer algunas observaciones que puedan sugerir una solución: "es ist nicht meine Absicht, an diesem Orte die Discussion in's Einzelne zu verfolgen, um das Für und Wieder erschöpfend darzustellen. Ich möchte bloss einige, theilweise nur aphoristische, Bemerkungen zu diesem Gegenstande machen und habe es für zweckdientlich gehalten, denselben ein paar historischen Notizen voranzuschicken" (Vaihinger, 1884, 88)[519].

En ese mismo trabajo, Vaihinger realiza una breve pero clara exposición del origen, significado y evolución del "idealismo alemán" en los siglos XVIII y XIX[520]. Y también de la

[519] Vaihinger divide su trabajo en dos partes: la primera (páginas 88-111) titulada *Zur Geschichte des Idealismus vor Kant*, y la segunda (páginas 112-164) titulada *Zur Wiederlegung des Idealismus durch Kant*. En la primera, realiza un breve pero brillante recorrido y descripción de las tesis principales del *idealismo* comenzando por Descartes y siguiendo con las diversas respuestas al *esquema cartesiano*, fundamentado en la duda sobre *la realidad* del mundo externo, de Malebranche, Locke, Hume, Collier y Berkeley; y terminando en lo que Vaihinger denomina "la tercera forma del idealismo": *dritte Form: Leibniz-Wolff'sche Philosophie* (Vaihinger, 1884, 104), que no sería una tercera fase del idealismo sino una tercera forma que surgiría totalmente independiente del esquema cartesiano, "durch die Einführung eines ganz neues Gedankens auf das Problem der Realität der Auβenwelt eine neue, dritte Antwort gab". Con él se planteaba aparentemente una línea de refutación del idealismo dogmático, pero sólo aparentemente, porque compartía con él muchas de sus consecuencias claves: "Leibniz gab mit seiner Monadenlehre seinen Anhängers, an deren Spitze Christian Wolff stand, eine Waffe in die Hand, mit der sie der dogmatischen Idealismus scharf gegenüber treten konnten" (Vaihinger, 1884, 106). La monadología de Leibniz reconocía sólo como verdaderamente existentes a las mónadas, esto es, sustancias inmateriales de las que únicamente nuestras propias almas se reconocerían próximas, puesto que el alma sería una tal mónada; estas sustancias inmateriales desarrollarían una fuerza propia interna y desarrollarían *la materia*, que se nos aparecería como *apariencia*; "dem, was wir Materie heiβen, liegt eine Unzahl solche Monaden letztlich zu Grunde. Es gibt objektiv im eigentlichen Sinne keine Materie, sondern wahrhaft wirklich sind nur jene immateriellen Substanzen" (Vaihinger, 1884, 106). Y esta teoría tendría un doble efecto sobre el idealismo tradicional.

[520] Para Vaihinger (1884, 94-95), "Über die Entstehung des Terminus 'Idealismus' vgl. Eucken, *Geschichte der philosophische Terminologie*, 132, 199-201; desselben *Geschichte und Kritik der Grundbegriffe der Gegenwart*, 224-227; derselbe in der *Philosophische Monatsschrift*, 1884, XX, 27 f. Eucken hat ganz richtig festgestellt, dass mit 'Idealismus' ursprünglich die Lehre von der Ideenwelt im platonische Sinne bezeichnet worden ist. Er führt dafür die Leibniz'sche Stelle, Opp. 186ª an, wo Platon und Epicur als Häupter der 'Idealisten' und 'Materialisten' bezeichnet werden. Diese Äuβerung stammt aus dem Jahre 1702. Dass der Ausdruck in diesem Sinne aber schon früher gäng und gäbe war, beweist die Schrift von Sergeant. Solid Philosophy asserted against the fancies of the Idealists. 1697 (Auszüge daraus bey Blakey, *History of the Philosophy of Mind* II, 300 f. Lewes, *Gesch. d. Philos.*II, 322 citirt 'Ideists'). Norris, dessen Werk im Jahre

aceptación y evolución que la interpretación de la monadología tuvo entre los discípulos de Wolff: Reusch, Baumeister, Baumgarten, Meier, Mendelssohn, Eberhard, Platner, Lambert, Tetens, Feder, y entre los que incluye al propio Kant en sus orígenes[521]. E incluso entre algunos opositores a la filosofía wolffiana como Crusius. El resultado de esta evolución de la relación en Alemania entre el Idealismo y el llamado Racionalismo, en palabras de Vaihingen, fue que "wer nun den strengen Monadenbegriff festhielt, stellte sich zum Idealismus nicht gerade unfreundlich: leugnete doch auch dieser die Realität der ausgedehnten Körperwelt; und die Wiederlegung desselben bestand nur im Nachweis , dass doch noch metaphysische, immaterielle Substanzen existieren –die Monaden (…) Je mehr aber den strengen Monadenbegriff fallen lieβ und sich dem Atombegriff näherte, desto unfreundlicher wurde die Stellung zum Idealismus (…) Eine solche unklare Mittelstellung nimmt z. B. Bilfinger ein (…) er erkennt jedoch richtig , dass der strenge Leibnizianismus sich dem Idealismus nähert (…) aber er verwechselt doch beständig die corporum realis et externa existentia mit der Existenz der Monaden (simplicia), die jene zu Grunde liegen. Derselben Unklarheit begegnen wir auch bei der übrigen Wolffianern" (Vaihinger, 1884, 110-111).

El panorama que Vaihinger dibuja de la filosofía alemana de finales del XVIII y del siglo XIX se podría, pues, caracterizar en todas sus vertientes por un profundo espiritualismo. El sujeto, a través de su espíritu, determina las apariencias y representaciones y conecta con el mundo objetivo, que se basaría también en otro espiritualismo inmaterial, a través de una "intuición" que tiene mucho en común con la que llamábamos "intuición intelectual" que Kant mencionaba –que denominábamos el 5º sentido de sus significados- y que caracterizábamos como discutido y discutible. Vaihinger no menciona este elemento intuitivo, pero es explícito en la mayoría de los autores. En realidad tiene mucho que ver o, para ser más exactos, es una versión secularizada y racional del tradicional misticismo medieval alemán[522].

1701 erschien, nennt den Arnauld einen 'Anti-Idealist' bei Blakey II, 305. 'Idealismus' ist also ursprünglich = Platonismus, und als 'Idealist' in diesem Sinne galt insbesondere Malebranche, der ja einen Ideenwelt in Gott statuierte. Zu gleicher Zeit etwa wurde der Ausdruck 'Idee' aber auch für Vorstellung im menschlichen Geiste angewendet, besonders von Locke; und so erhielt der Ausdruck 'Idealismus' bald die Bedeutung der Lehre, nach der das Äuβere nur unsere Vorstellung ist. In diesem Sinne findet sich der Ausdruck deutlich ausgeprägt nach Eucken (vgl. dagegen Erdmann, *Grundriss der Gesc. der Philos.*, 2. Aufl., II, 216, 224, 227) zuerst bei Wolff, der den Platon daher von den 'Idealisten' ansschlieβt, als deren Haupt er bei Leibniz angeführt war. Der Ausdruck scheint aber nichtsdestoweniger hin und wieder schwankend gebraucht worden zu sein; dadurch erklärt sich jene Stelle in der Prolegomena von Kant (im Anhang) und in den Vorlesungen über Metaphysik (vgl. weiter unten) über die 'ächten Idealisten von der eleatischen Schule an bis zum Bischof Berkeley', zu denen Kant dann auch den Platon rechnet. Hier sind offenbar jene beiden Bedeutungen vermischt; (an die Stelle der Ideenwelt auβer dem Geiste ist aber in der Kantischen Stelle die entsprechende aprioristische Ideenwelt im Geiste, im Gegensatz zu der sinnlichen Erfahrung, getreten). Von Hegel an gewann bekanntlich der Terminus 'Idealismus' wieder seine platonische metaphysische Bedeutung. Wir gebrauchen ihn hier natürlich nur in seinem erkenntnistheoretischen Sinne. Über diesen selbst und seine verschiedene Nuancen s. weiter unten".

[521] "Diese wechselnde Stellung zum Idealismus nun in der deutschen Literatur des XVIII. Jahrhunderts hängt funktionell zusammen mit der verschiedenen Auffassung der Leibniz'schen Monadenlehre. Es lässt sich in der Entwickelung der Wolffischen Schule eine zunehmende Depravation des Monadenbegriffes verfolgen. Anfänglich hielt man an die strengere metaphysische Auffassung derselben, bis mit der steigenden Popularität der Wolffischen Schule die Auffassung der Monaden immer mehr zu dem laxeren naturalistischen Begriffe derselben herabsank" (Vaihingen, 1884, 110).

[522] El misticismo alemán fue un movimiento con mucho auge en la Alemania de los siglos XIII, XIV, XV y XVI, aunque presenta episodios notables incluso en el siglo XIX. Por ejemplo, el libro más vendido en la primera mitad del siglo XIX en Alemania fue la obra del escritor Clemens Brentano "La dolorosa Pasión de Nuestro Señor Jesucristo", basado en las visiones y revelaciones que la monja mística Anne Catherine Emmerick (beatificada por Juan Pablo II el 3 de Octubre de 2004) le transmitió en las visitas diarias a su cama enferma entre 1818 y 1824; dos veces al día el escritor acudía a visitar a Ana Catalina para copiar en sus diarios los apuntes, y regresaba otra vez más para leérselos a la monja inválida y comprobar así la fidelidad de lo

En la segunda parte de su trabajo, titulado *Zur Wiederlegung des Idealismus durch Kant* (pp.112-164), aborda la reacción a la publicación de la edición B por Kant. Aunque este trabajo de Vaihinger se suele considerar como una exposición de las dificultades que la *Dialéctica Transcendental* plantea a la interpretación realista de Kant en la edición B, lo cierto es que sólo trata de la reacción en Alemania a esa edición y a la comparación entre distintas afirmaciones de Kant en la propia edición A ya que, según Vaihinger, la contradicción que para algunos surgió con la edición B estaba ya, aunque no tan explícita, en la A, y siempre circunscrito a la *Estética Transcendental*. Vaihinger comienza por resaltar la tendencia de Kant hacia posicionamientos realistas, incluso en la época en la que compartía los planteamientos de la monadología: "in denselben hat sich Kant mehrfacht , abgesehen von indirekten Stellen, direkt gegen den Idealismus erklärt, ganz wie alle Zeitgenossen, von denen Kant nicht isoliert werden darf" (Vaihingen, 1884, 112). Así en la *Dilucidatio nova* (1755) escribe: "realem corpus existetiam , cuam contra idealistas non alia nisi probabilitatis via tueri hucusque sanior philosophia potuit, ex assertis nostri principii primo liquidissime consequi reperio". Y en *Träumen einer Geistersehers* (1766) escribe sobre la "fantasía" de Swedenborg: "alle Geister stellen sich einander jederzeit unten ausgedehnten Gestalten vor, und die Einflüsse aller dieser geistiger Wesen unter einander erregen ihnen zugleich die Apparenz von noch anderen ausgedehnten Wesen, und gleichsam von einer materiellen Welt, deren Bilder doch nur Symbole ihres inneren Zustandes sind, aber gleichwohl eine so klare un dauerhafte Täuschung des Sinnes verursachen, dass solche der wirklichen Empfindung solcher Gegenstände gleich ist (ein künftiger Ausleger wird daraus schlieβen, dass Swedenborg ein Idealist sei, weil er die Materie dieser Welt die eigene Substanz abspricht und

---

trascrito. A diferencia de otros movimientos místicos, como por ejemplo el español, aúna las típicas concepciones de una unión mística con Dios asociadas a la piedad con una incardinación en su *corpus* de la filosofía escolástica, dándole un profundo componente filosófico. Estuvo muy ligada a la orden dominicana y tuvieron un especial protagonismo las monjas; entre sus representantes más destacados han quedado autores como Hildegars de Bingen, Meister Eckhart, Jacob Böhme, Johann Scheffler, Angelus Silesius, Heinrich Suso y Johann Taulero. Dichos autores eran habituales entre las lecturas de los filósofos del siglo XIX y muchas de sus tesis se pueden rastrear directamente en los filósofos alemanes; por ejemplo, las doctrinas de Angelus Silesius están claramente recogidas en muchos escritos de Arthur Schopenhauer. Los místicos alemanes cultivaron además un activo intercambio entre sí como "amigos de Dios", y esto dio una gran extensión al movimiento. Las grandes líneas del movimiento estaban muy arraigadas en la especulación de la Escolástica universal latina, aunque el cuadro del proceso espiritual estaba en extremo cambiado: como el movimiento en Occidente se limitó a la propia nación alemana, que aportó una gran naturalidad y profundidad de sentimientos, y además utilizó fundamentalmente el idioma alemán (enriquecido por esa misma creatividad), tanto los escritos como la predicación adquirieron una intimidad única, plena de sentimiento, que debía influir, muy en especial, en el modo de ser alemán. La forma no escolástica de una obra mística del siglo XV, el *Frankforter* (una teología alemana), fue también lo que sedujo tan poderosamente a Lutero, que creyó hallar en ella una oposición a la Escolástica (él fue también quien la publicó por vez primera en 1516 y 1518). Y gran parte del impulso renovador de Lutero se puede atribuir directamente al influjo de la mística alemana. En muchos aspectos el luteranismo tiene un importante parecido dentro de la Cristiandad, por sus orígenes, planteamientos y consecuencias sociales con los cátaros del siglo XII. También el escándalo que suponía para los fieles comunes el comportamientos de los dignatarios, abadías, órdenes religiosas e incluso parte del clero común estaba en el origen de ambos movimientos. En ambos casos se trataba de una "vuelta a la pureza", que en el siglo XII fracasó pero en el XVI triunfó, aún a costa de unas terribles guerras de religión que dejaron sus costes en ambos lados, y con sus propias contradicciones; se puede señalar, por ejemplo, que los ajusticiados en los países protestantes fueron varias veces superiores a los ejecutados por la Inquisición. El libro por antonomasia de la mística, y el más importante por su influjo, fue escrito en latín, en un convento de los Países Bajos: *la Imitación de Cristo* de Tomás Hemerken de Kempis (aprox. 1370-1471). Tomás procedía del *círculo de Hermanos de la vida común*, o sea, de los Canónigos reformados de san Agustín. Algunos atribuyen el libro a Geert Groot. Reviste importancia especial el hecho de que el autor recomiende con tanta insistencia la frecuente y sencilla lectura del evangelio; ésta sería una de las señas de identidad de los distintos movimientos protestantes.

sie daher vielleicht nur für eine zusammenhängende Erscheinung halten mag, welche aus der Verknüpfung der Geisterwelt entspringt)”. También en su *Inauguralschrift* (1770) mantiene posiciones parecidas (Vaihinger, 1884, 114). Vaihinger sostiene que en el tránsito Kant va abandonando progresivamente la monadología y que “das Körperliche wird ganz aus dem Spiel gelassen, es bleibt nur die Existenz intelligibler substanzen in Frage, un diese Frage entscheidet Kant mit dem Hinweis auf die Affektion, welche einer auβer der vorgestellenden Geiste liegenden Ursache bedarf” (Vaihingen, 1884, 115).

Pero en 1781 Kant defiende la posición de un llamado *“tranzendentaler Idealismus”*, en donde fija su posición definitiva. Y con ello creó una nueva acepción del término *Idealismus*[523] distinta de los significados tradicionales. Su nueva teoría, como cabía esperar en un ámbito predominantemente subjetivista, fue interpretado en términos totalmente antirealistas, subjetivista e incluso psicologistas. Esto le forzó a una edición B, en donde puntualizaba algunos aspectos a su juicio esenciales e introducía su famosa *Wiederlegung des Idealismus*, que causó una gran conmoción. Para Vaihinger, la reacción de Schopenhauer, Fischer y otros era injustificada[524]; en su opinión la contradicción estaba ya en la edición A, y en la misma *Estética Transcendental*, aunque no tan explícita. Vaihinger contrapone dos citas de la *KrV* en sus ediciones A y B:

[1] Erste Auflage (S. 370). “Nun sind alle äuβeren Gegenstände (die Körper) bloβ Erscheinungen, mithin auch nichts Anders, als eine Art meiner Vorstellungen, deren Gegenstände nur durch diese Vorstellung etwas sind, von ihnen abgesondert aber nichts sind”.

[2] Zweite Auflage (S. 275). “Also ist die Wahrnehmung dieses Beharrlichen nur durch ein Ding (d. h. einen ‘Gegenstand auβer uns im Raume’) auβer mir und nicht durch die bloβe Vorstellung eines Dinges auβer mir möglich”.

Y concluye: “diese beiden Stellen verhalten sich wie Ja und Nein, wie Position und Negation, wie A und Non-A. Sie waren, sind und bleiben unvereinbar” . Y en relación con el prefacio añadido a la edición B sostiene que “auf die bekannte Nachträgliche Anmerkung in der Vorrede zur zweiten Auflage gehe ich nicht näher ein, aus dem einfachen Grunde, weil ich in ihr eine groβe Konfusion herrscht. In dieser Anmerkung nämlich erreicht die eigene Verwirrung Kants ihren Gipfel; er selbst vermischt nämlich mit seiner *Wiederlegung des Idealismus*, der sich auf *die Gegenstände im Raume auβer uns* bezieht, die Frage nach der Existenz der Dinge an sich! (…) Von den Dingen an sich ist aber in dem Texte der zweiten Auflage gar nicht die Rede, sondern von *den Gegenständen im Raume auβer uns*” (Vaihinger, 1884, 132). Además sostiene que esa contradicción estaba ya continuamente presente en la edición A, aportando numerosas comparaciones en esta línea, y concluye: “im philosophischen Denken ist die Gleichung 2 = 1 nicht erlaubt. Entweder also wollen wir annehmen: Vorstellung und Ding im Raume, oder: bloβe Vorstellung; (entweder: die Auβenwelt noch auβer der Wahrnehmung, oder: die Auβenwelt nur als Wahrnehmung) – aber beides zugleich geht nicht an. Diese beiden diametral entgegengesetzten Darstellungen finden sich, was man bis jetzt seltsamer Weise nicht bemerkt hat, in dem Text der ersten Auflage unmittelbar in demselben Abschnitte nebeneinander” (Vaihinger, 1884, 135).

Apunta además una observación estructural sobre la *KrV* y una conclusión muy importante: “dieses Resultat kann diejenigen nicht überraschen, welche durch genaues und unbefangenes Eindringen in die Kantischen Schriften die Überzeugung gewonnen haben, dass

[523] “Ulrich, *Institutionen* (1785) wunderte sich vom Standpunkt des bis dahin üblichen Sprachgebrauches über diese Namengebung Kants mit Recht, da diese Benennung zu Missverständnissen führen musste. Kants Idealismus unterschied sich ja vom traditionellen ‘Idealismus’ wesentlich (Vaihinger, 1884, 115).

[524] “Schopenhauer hat einen ganz ungerechtfertigten Nimbus über die erste Auflage verbreitet” (Vaihinger, 1884, 136).

die *Kritik der reinen Vernunft* zugleich das genialste und das widerspruchsvollste Werk der gesamten philosophischen Literatur ist" (Vaihinger, 1884, 136). Y la conclusión: la contradicción es inevitable y está en el núcleo de la *KrV*: "dieser Wiederspruch geht durch das ganze Werk" (Vaihinger, 1884, 137) y "der Wiederspruch ist da, aber er ist nicht äuβerlich an das System herangebracht, sondern er ist ein innerer Widerspruch des Systems" (Vaihinger, 1884, 159). Sin embargo Vaihinger podría haber pensado que una contradicción tan flagrante y en un tema central no podría ser concebible en un pensador de la talla de Kant. Además era consciente del problema, puesto que la edición B y sus puntualizaciones que explicitó a la luz las supuestas contradicciones de la edición A fueron realizadas por él *ex profeso* para desmentir las interpretaciones subjetivistas y psicologicistas de su obra; podría pensarse que las interpretaciones de los pasajes de A en la *Estética* que parecían contradecir su declarado realismo deberían ser modificadas.

Por ejemplo, la interpretación de Vaihinger (como la de la mayoría de autores de su época y de un siglo antes) del pasaje [1] se fundamenta en una caracterización de *Erscheinungen* y *Vorstellungen* como esencialmente determinadas por el sujeto. Pero Kant, como vimos en la Parte-I, no sólo desarrolla una simple terminología filosófica sino que, además, desarrolla toda una teoría cognitiva en la que cada concepto tiene una *función*; era, como vimos, un *análisis funcional de la mente humana*. Y en su noción de *Erscheinung* es tan determinante *die Gegenstände im Raum ausser uns* como las determinaciones subjetivas del sujeto a través de la *percepción*, la *intuición*, la *formación de conceptos* y la *representación*, por centrarnos sólo en la *Estética Transcendental*; y el resultado es la *apariencia*, que es el objeto pero como lo percibimos. Y eso es todo. Como dice Robert Hanna, el realismo kantiano es el más sólido posible: las cosas son exactamente *como se nos aparecen*. Y punto. Y si hubiera algo más detrás, el hombre, con su constitución cognitiva y sus limitaciones, nunca podría conocerlo. Pero Kant en el *Idealismo Transcendental* parece que somete también a examen los límites y posibilidades de su propia teoría cognitiva, para restringirla a los límites de la razón humana, hasta el punto de que su propio realismo empírico parece ser cuestionado. Aunque esta es una perspectiva muy distinta a la de Vaihinger y sus coetáneos.

La contradicción para Vaihinger consiste en realidad en una contradicción entre el realismo empírico de Kant y los presupuestos idealistas y subjetivista que llevan a una interpretación de su teoría cognitiva errónea[525], y que eran predominantes en su época; interpretación contra la que explícitamente quiso reaccionar Kant. Este enfoque continuó en la misma línea hasta muy entrado el siglo XX, y centrándose cada vez más en un enfoque subjetivista de su teoría cognitiva y en una investigación sobre la naturaleza de *das Ding an Sich* y en el problema de la *afección*, planteando una ecuación irresoluble (Adickes, 1889, 1924, 1927 y 1929). Y haciendo excepción de los intentos interpretativos alternativos de los *neokantianos*[526], siguió así hasta que las investigaciones de Gerold Prauss (1971 y 1974) hicieron saltar todo el esquema interpretativo por los aires al demostrar que el problema de *das Ding an Sich* había sido el mayor fraude intelectual de la historia de la Filosofía, y reorientó la investigación.

9.4.2.- La Filosofía Transcendental como un metalenguaje.

La introducción del punto de vista transcendental por Kant ha sido interpretado recientemente por algunos autores como un cambio sustancial desde el punto de vista lógico. Este punto es resaltado por Thomson arguyendo que Kant hizo de hecho un avance sustancial

[525] En la interpretación de la *KrV* que Vaihinger consideraba, las tesis de Berkeley estarían *contenidas* como posibles (Vaihinger, 1884, 123).

[526] En este trabajo no se investigan las aportaciones de los *neokantianos*, con la excepción de Ernst Cassirer al que se le dedica una amplia nota explicativa.

en lógica sustituyendo la lógica tradicional de *términos* por una “lógica transcendental” de *objetos* y *conceptos*. Concluye que “la lógica general requerida por la lógica transcendental de Kant es así por lo menos una lógica cuantificacional de primer orden más identidad” (Thomson, 1972, 334). Friedman, naturalmente, no está de acuerdo (Friedman, 1992, 63n), sin embargo reconoce que es posible, pero improbable, que Kant fuera siquiera consciente de las limitaciones de la lógica de su tiempo al desarrollo de sus pensamientos: “así, mientras que en todos estos pasajes (A25, B40, *Prolegómena* 12) Kant establece claramente que los conceptos generales son inadecuados para la representación de la infinidad y contrasta las representaciones puramente conceptuales con la ilimitada o indefinida iterabilidad de la intuición pura, no está en absoluto claro que esta inadecuación, para Kant, radicara en las limitaciones de la lógica monádica o silogística” (Friedman, 1992, 66).

Sin embargo, D.L.C. Maclachlan (1995), (“The Things in Itself Apears in a Meta-Language”, *Proceedings of the Eighth International Kant Congress,* vol-2, pp.155-161) ya sugirió que algunas nociones kantianas deberían ser entendidas como un metalenguaje construido para superar las limitaciones de los esquemas conceptuales de la época, idea que recoge y desarrolla Allison (2004, 461). Aunque realmente este enfoque ya estaba planteado en el trabajo de Prauss, como el mismo MacLachlan reconoce. El origen de este planteamiento tiene mucho que ver con la noción de *cosa en sí* que ya hemos discutido en la Parte-I. Como Maclachlan subraya, Kant utiliza la referencia a *las cosas en sí mismas* en dos sentidos. El primer sentido que introduce “el *noumeno* en sentido positivo” (B307)[527] y que a Maclachlan le parece suficientemente claro y no problemático en cuanto que simplemente afirma que podemos formar conceptos del *noumeno* en un sentido positivo pero que no podemos adquirir ningún conocimiento de tales cosas porque no poseemos el requisito de una facultad de intuición no sensible. Lo problemático sería la referencia al “*noumeno* en un sentido negativo”, cuando Kant afirma que “wenn wir unter Noumenon ein Ding verstehen, so fern es nicht Objekt unserer sinnlichen Anschauug ist, indem wir von unserer Anschauungsart desselben abstrahieren” (B307)[528]. Pero al confrontar *cosas* que conocemos con *cosas* que no podemos conocer, ni siquiera podemos afirmar la mera existencia de esas cosas. Maclachlan se inclina, como Allison y Prauss, por otorgarle una mera *función lógica* a tal *referencia,* apoyándose en la misma justificación que Kant (Bxxvi-xxvii) que ya hemos discutido más

[527] “But if we understand by it an object of a non-sensible intuition, we thereby presuppose a special mode of intuition, namely, the intellectual, which is not that which we possess, and of which we cannot comprehend even the possibility. This would be 'noumenon' in the *positive* sense of the term” (A250/B307), (NKS). “Verstehen wir aber darunter ein Objekt einer nichtsinnlichen Anschauung, so nehmen wir eine besondere Anschauungsart an, die aber nicht die unsrige ist, von welcher wir auch die Möglichkeit nicht einsehen können, und das wäre das Noumenon in positiver Bedeutung” (A250/B307). “Si, por el contrario, entendemos por númeno el *objeto de una intuición no sensible*, entonces suponemos una clase especial de intuición, a saber, la intelectual. Pero esta clase no es la nuestra, ni podemos siquiera entender su posibilidad. Éste sería el númeno en sentido *positivo*” (A250/B307), (PR). “Pero si entendemos por ello [noumeno] un objeto de una intuición no sensible, entonces estamos suponiendo un modo especial de intuición que no es el nuestro, y del cual ni siquiera su posibilidad podemos comprender; y éste sería el noumeno con un significado positivo” (A250/B307).

[528] “If by 'noumenon' we mean a thing so far as it is not an object of our sensible intuition, and so abstract from our mode of intuiting it, this is a noumenon in the *negative* sense of the term” (A250/B307), (NKS).
“Wenn wir unter Noumenon ein Ding verstehen, so fern es nicht Objekt unserer sinnlichen Anschauung ist, indem wir von unserer Anschauungsart desselben abstrahieren; so ist dieses ein Noumenon im negativen Verstande” (A250/B307). “Si entendemos por númeno una cosa *que no sea objeto de la intuición sensible*, este númeno está tomado en sentido *negativo*, ya que hace abstracción de nuestro modo de intuir la cosa” (A250/B307), (PR). “Si entendemos por *noumeno* una cosa en cuanto que no sea objeto de nuestra intuición sensible y, por tanto, haciendo abstracción de nuestro modo de intuir, entonces éste es un *noumeno* en sentido negativo” (A250/B307).

arriba. Y esa referencia no aparecería a un nivel empírico, sino en un segundo nivel de discurso que sería el *transcendental*, coincidiendo con el análisis de Prauss (1977, 131).

Maclachlan indaga el carácter de ese discurso dando un paso más allá de los análisis de Prauss y Allison: "it is, indeed, widely recognised that there is a special discourse, involving terms like 'forms of sensibility' and 'the transcendental unity of apperception', in which Kant expresses the transcendental idealism which emerges from his reflection on the nature of knowledge. What is not so clear, however, is the nature of this special discourse and its relation to ordinary empirical discourse …I wish to explore the parallels between the two levels of discourse employed by Kant and the two levels of language distinguished by Alfred Tarski" (Maclachlan, 1995, 156). Para Maclachlan, el lenguaje –objeto del nivel básico de Tarski, usado para describir los objetos del mundo físico, sería virtualmente idéntico al discurso empírico del esquema kantiano.

Pero habría una significativa diferencia entre el meta-lenguaje de Tarski y su contrapartida kantiana. Mientras que el primero describe otro lenguaje, el lenguaje-objeto, el discurso epistemológico de la Filosofía Crítica discute el conocimiento y las representaciones cognitivas. Para Maclachlan habría, a pesar de ello, una profunda afinidad subyacente: primero, en ambos casos se describen estructuras (en el primer caso, las propiedades estructurales del lenguaje-objeto, tales como la sintaxis, y en el segundo las propiedades estructurales o formales de las facultades cognitivas empleadas en el conocimiento empírico). Además ambos sistemas serían sistemas representacionales referidos a un mundo de objetos subyacentes a ellos mismos. Y en tercer lugar, en ambos casos el nivel superior del discurso discute *formas de representación*.

9.4.3.- La noción de *verdad* en Kant.

Una adecuada comprensión de las relaciones expuestas en el apartado anterior exige un análisis de la noción de *verdad* subyacente en ambos sistemas. La de Tarski se expresa muy bien en el siguiente paradigmático ejemplo: el enunciado "la nieve es blanca" es verdadero si y sólo sí la nieve es blanca, donde la parte izquierda de la equivalencia se expresa en el metalenguaje y está conectada con la parte derecha que se expresa en el lenguaje-objeto. Para Maclachlan, la concepción de la *verdad* de Tarski adolece de una grave indeterminación, crítica que en realidad expresa un punto vista realista. Se trataría de que no especifica la clase de propiedad que asigna a los enunciados cuando dice que son verdad: "is truth a simple property of a sentence, or it is a property which involves a relation to something beyond the sentence?" (Maclachlan, 1995, 157). Asumiendo un punto de vista claramente realista se inclina por la última opción y propone una extensión de la noción de verdad de Tarski que rompa la indeterminación, introduciendo una referencia a la realidad en la componente metalingüística de la equivalencia del ejemplo anterior. Así, el enunciado debería reformularse: "the sentence 'Snow is white' is true of reality, if and only if snow is white".

El concepto de *realidad* que surge en el metalenguaje es distinto del de el discurso empírico ordinario; sería un concepto de *realidad* indeterminado, que cumpliría una *función lógica* de referirse a un concepto que está completamente determinado en el lenguaje objeto, determinando así la noción de *verdad* en un sentido realista: "this indeterminate concept of reality is virtually identical with the Kantian concept of the transcendental object=x, which is traditionally associated with the thing in itself in the negative sense" (Maclachlan, 1995, 157).

Y ahora, de la misma forma que podemos distinguir el concepto de realidad en el metalenguaje del concepto de realidad en el lenguaje-objeto, podemos distinguir en el esquema kantiano el concepto de *realidad al nivel transcendental* (la cosa en sí misma) del concepto de *realidad al nivel empírico*. Aunque el concepto de realidad al nivel transcendental, la *cosa en sí misma*, es "the true correlate of sensibility", no puede ser introducida al nivel del discurso empírico: "das Ding an sich selbst, dadurch gar nicht erkannt wird, noch erkannt werden kann, nach welchem aber auch in der Erfahrung niemals gefragt wird" (A30, B45)[529]. Así, dentro del discurso empírico, que se desarrolla en el lenguaje-objeto, no podemos decir de las cosas en sí mismas ni siquiera si existen o no existen. Para la Filosofía Crítica, las cosas de las que podemos decir si existen o no existen al nivel del lenguaje-objeto son *fenómenos*, determinadas de acuerdo con nuestra capacidad de conocimiento. Pero cuando ascendemos al nivel de la reflexión transcendental, introducimos un nuevo concepto de realidad, el concepto de la *cosa en sí misma*, relativamente al cual los objetos de la experiencia pueden ser considerados *apariencias*. "The theory which I am proposing, then, is that the concept of the thing in itself, which has an absolutely natural function in the meta-language, becomes problematic, only if one makes the incoherent attempt to treat it as somehow referring within the object-language" (Maclachlan, 1995, 158). Esta noción de una realidad indeterminada al nivel transcendental, tal como se presenta en un metalenguaje, "is a mass expression" (como "agua" o "materia")[530] a través de la que nos representamos la materia del universo, y que se refiere a las *apariencias* del lenguaje-objeto en el que el concepto de *realidad* consiste en la *pluralidad* de las cosas que realmente existen: "tables, slugs, people, rocks, planets" y los impuestos. Maclachlan subraya que los modernos antirealistas encaran la misma dificultad básica que los kantianos ortodoxos.

No serían accidentales las coincidencias entre la teoría de la *verdad* de Tarski, las lecturas tradicionales de la epistemología de Kant y el moderno antirealismo. Todas esas teorías comparten el mismo problema, el cual radicaría en la naturaleza misma de una representación cognitiva. La función de nuestras facultades cognitivas es obtener conocimiento de una realidad subyacente y el éxito en esa tarea involucra la construcción de una *representación* adecuada de esa realidad, se realice ésta en un sistema de enunciados (Tarski) o en un sistema de conceptos e intuiciones (Kant). Pero en todo caso esas representaciones están condicionadas por el particular sistema de representación empleado y por lo tanto no pueden abarcar la totalidad de los objetos representados como son en sí mismos, y éstos son conocidos sólo a través del vehículo del sistema representacional empleado y el mismo criterio de *verdad* es siempre relativo a ese sistema representacional. Pero podemos postular *a priori* la noción de una realidad incondicionada, subyacente a nuestros sistemas representacionales, "which is the ultimate arbiter, deciding which representations within the system are true and which are not. The problem is legitimate the reference in thought and language to this unconditioned reality … this is the problem which I tried to solve, in the Kantian case, through the ascent to the meta-language, the language of transcendental reflection" (Maclachlan, 1995, 160). Si describimos la cognición como la función de un sujeto que tiene el propósito de representar la realidad con la que se enfrenta, la idea de esa realidad representada debe estar contenida *a priori* en el sistema representacional como una condición que gobierna el desarrollo de tal propósito y "this original but undeterminate representation of reality becomes determined through the adoption by the subject of systems of representation. This account allows for the possibility of alternative determinations of reality through alternative conceptual schemes, as many modern thinkers have suggested, while not excluding the Kantian thesis that there are formal constrains which all possible schemes of representation must satisfy" (Maclachlan, 1995, 161).

Andrew Brook (1995, 318) en su análisis de *La Refutación del Idealismo* subraya que para Kant la conciencia del mí mismo y la conciencia de las cosas existentes fuera del mí mismo son simétricas, y esa singular forma de *referencia* al mí mismo, que excluye toda

---

[529] "in experience no question is ever asked to it" (A30, B45).

[530] Véase W.V.Quine, "Word and Object", Cambridge, MA, 1960, p.98 y para una discusión general: "Mass terms: Some Philosophical Problems", ed. Francis J. Pelletier, Dordrecht, 1979.

forma de conocimiento del objeto referido, la aplicaría Kant también al mundo externo a través de la noción de cosa en sí misma. Así, respecto del mí mismo se trataría de un *acto de referencia* que radicaría en "la mera consciencia" (A346/B404) del mí mismo y que "ist also noch lange nicht ein Erkenntnis seiner selbst" (B158); y respecto de las cosas fuera del mí mismo se trataría de "ein unmittelbares Bewusstsein des Daseins andere Dinge auβer mir" (B276) que estaría igualmente muy lejos de constituir un conocimiento de ellas. Esto implicaría en ambos casos el uso de una noción de *referencia* que sería la que Kant tenía en mente cuando hablaba de llamar a una cierta clase de referencia *designación transcendental* (A355) y que no observaría cualidades, sería no-adscriptiva y *transcendería* a la actividad sintetizadora y aperceptiva de la mente. Esta teoría de la *referencia* sería totalmente diferente de las nociones generalmente aceptadas en la filosofía anglo-americana y en las que la *referencia* está siempre bajo una descripción. "However, it or a view like it does have contemporary proponents, including Putnam, Kripke, and the later Wittgenstein. It is at the heart of the most paradigm-based semantics theories. If I am right, once again Kant proves to be more than a cultural artefact, a mere earlier stage in our intellectual history" (Brook, 1995, 319).

Pero nuevamente se pone aquí en primer plano el problema de cuál era la teoría de *verdad* en la que Kant se apoyaba. Kant dice muy poco acerca de su concepción al respecto más allá de de su definición nominal de verdad como "die Übereinstimmung der Erkenntniss mit ihrem Gegenstande" (A58 / B82)[531] y los requerimientos para un criterio empírico de verdad (B191, B279). Luego, en la *Dialéctica* se ocupa detalladamente de la ilusión transcendental –el dominio en la trastienda de el "territorio de la verdad" (B295) pero realmente no dice nada sobre la concepción positiva de verdad que defiende. Abela (2002, 66-80) analiza este problema con detalle y en el contexto de la respuesta de Kant al problema del error (Abela, 2002, 193-213). Este es un tema controvertido en la filosofía moderna.

En epistemología, las consideraciones de *verdad* suelen tomar la forma de interpretaciones de *correspondencia* o bien de *coherencia*; las consideraciones de *referencia* tienden a seguir la estela de la teoría de verdad adoptada: los que se apoyan en una teoría de correspondencia tienden a explicaciones externalistas de referencia, mientras que los que sostienen una teoría de coherencia tienden a alguna forma de internalismo.

En filosofía del lenguaje, la situación es más compleja entre los distintos grados de realismo y las posiciones anti-realistas. Una forma moderna de interpretar el silencio de Kant sería atribuirle que sostiene las explicaciones deflacionistas de verdad que son habituales en la moderna filosofía del lenguaje como, por ejemplo, la de Paul Horwich (Horwich, 1990, 111), basada en un esquema de equivalencia que asocia la verdad contenida en un enunciado con un hecho del mundo y que parece, en efecto, capturar la esencia de la definición nominal de verdad de Kant expresada como vimos anteriormente en términos de *Übereinsitmmung*. En opinión de Abela, Kant está ciertamente comprometido, como los modernos minimalistas, con el pensamiento de una relación entre mente y naturaleza en términos de una correspondencia entre las creencias y sus objetos. La *referencia* sería una relación epistemológica directa que expresa una relación de verdad entre un juicio y su objeto. "But, as I have suggested above, truth-conditions are built into Kant's account of the possibility of determinate representation. The reference relation is secured only in so far as we can represent the connection between objects in nature, and between nature and ourselves, as exhibiting properties and powers that we judge *correct* for the perceptual context" (Abela, 2002, 69). Si las relaciones de referencia son establecidas dentro de un contexto holístico de verdad que condiciona los juicios empíricos, parece difícil sostener que sólo un esquema minimalista pueda prefigurar las

[531] "the agreement of knowledge with his object" (A58 / B82).

consideraciones de verdad. Y esto aparece también claramente en varios pasajes de Kant, por ejemplo:

> "Dasjenige aber, worin das Reale aller Erscheinungen gegeben ist, die einige allbefassende Erfahrung ist: so muss die Materie zur Möglichkeit aller Gegenstände der Sinne, al in eine Inbegriffe gegeben, vorausgesetzt werden, auf dessen Einschränkung allein alle Möglichkeit empirischer Gegenstände, ihr Unterschied von einander und ihre durchgängige Bestimmung beruhen kann. … folglich ist nichts für uns ein Gegenstand, wenn es nicht den Inbegriff aller empirischen Realität als Bedingung seiner Möglichkeit vorausgesetzt" (B610)[532].

Así, sería la suma total de *relaciones interpretadas* dentro del dominio de los objetos empíricos la que crearía el marco en el que emergen las creencias, y de esa forma el carácter holístico de la estructura de verdad haría posible las relaciones de referencia individuales. Kant apelaría tanto a un concepto de correspondencia como a un concepto de coherencia en su concepción de la verdad (y este último enfoque aparece más claro en su tratamiento del error). En resumen: "empirical truth, therefore, far from being constructed as the product of the coherence of our beliefs –the final chapter in the epistemic history- in fact enters in *the preface* as a condition of the individuation necessary for belief. Truth –the relation between thought and its object- is in this way a primitive, and not derivative, feature of the Copernican experiment. By taking seriously the demand that reference-to-an-object requires the deployment of a truth-structure, we begin to see how Kant´s account of representation anticipates what has recently been labelled a *realist* truth-condition account of empirical content" (Abela, 2002, 72). O sea: i) sin una correspondencia directa entre el pensamiento y su objeto, ningún contenido interno es posible, y ii) sin la presencia de una estructura de verdad holística las asignaciones particulares de correspondencia no son seguras.

Walker (1989 y 1997) también sostiene que Kant está comprometido con aspectos tanto de la teoría de la correspondencia como de las teorías de coherencia de la verdad, posición que califica como una "teoría de coherencia impura". Como hemos señalado, Kant sorprendentemente apenas se refiere al tema, pero además los análisis en la literatura secundaria son también muy escasos, como subraya Predag Cicovacki (1995, 199)[533], quien sostiene que Kant defiende principalmente una versión de la teoría de correspondencia de la verdad pero que realiza una profunda modificación de esa teoría de modo que "a naive pre-theoretical correspondence theory of truth is not possible after Kant" (Cicovacki, 1995, 201). El problema con la teoría de la correspondencia lo resume muy bien la cita de John Dewey que encabeza el trabajo de Cicovacki: "Truth means, as a matter of course, agreement, correspondence, of idea and fact; but what do agreement, correspondence, mean?". Cicovaki llega a una conclusión análoga a la de Abela, aunque matizada y con distintos razonamientos. En primer lugar considera la definición de *verdad* de Kant antes mencionada (A58 / B82) y critica los intentos de tomarla como base para una adscripción de Kant a la teoría de correspondencia. Observa acertadamente que se trata sólo de una definición nominal y que

---

[532] "The possibility of all objects of sense has to be presupposed as given in one sum total; and all possibility of empirical objects, their difference from one another and their thoroughgoing determination, can rest only on the limitations of this sum total … consequently, nothing is an object *for us* unless it presupposes the sum total of all empirical reality as the condition of its possibility" (B610), (GW). "…Y que aquéllo en lo que se da lo real de todos los fenómenos es una experiencia única y omnicomprensiva, entonces hay que presuponer como dada en un todo la materia de la posibilidad de todos los objetos sensibles; toda posibilidad de los objetos empíricos, así como su diferencia mutua y su completa determinación sólo pueden basarse en la limitación de ese todo … Consiguientemente, nada es *para nosotros* un objeto si no presupone como condición de su posibilidad el conjunto de toda la realidad empírica" (B610), (PR).

[533] Una notable excepción, con un tratamiento sistemático del tema, en Thomas Nenon, "Objektivität und endliche Erkenntnis: Kants transzendentalphilosophische Korrespondenztheorie der Wahrheit", Freiburg/München, Verlag Karl Alber, 1986.

Kant distingue tajantemente las *definiciones nominales* de las *reales*, las cuales proveen una explicación de cómo algo es posible. Una definición nominal es sólo la explicación de un nombre y, de acuerdo con Kant, consiste en “el significado arbitrariamente asignado a un cierto nombre” (*Logik,* Ak. IX, pp.49-50), donde “arbitrariamente” no significa “sin fundamento” sino por convención o basado en un uso general (independientemente de su naturaleza real), y que expresaría una comprensión pre-teórica de una noción. Para Kant, la Filosofía, a diferencia de la Matemática, no puede comenzar con definiciones reales, sino que comienza con definiciones nominales que inician el camino para la comprensión, tal vez nunca completo, del carácter real de tales nociones (A731 / B759).

Según Cicovaki (195, 200), podría ser que para Kant la noción de *verdad* sea en sí misma primitiva o básica y, a partir de una definición nominal, emprende la tarea de comprender y explicar *cómo* una concordancia de nuestras cogniciones y la realidad es posible[534]. Y sería en ese *camino crítico* en donde se perfilaría el carácter de la noción de *verdad*.

Existen pocos lugares en la *KrV* en donde Kant se refiere explícitamente a la *verdad.* Uno de esos es (A62 /B87), en donde Kant dice que la *Analítica Transcendental* es “una lógica de la verdad”, añadiendo a continuación que “no puede contradecir ninguna cognición sin perder al mismo tiempo todo contenido, es decir, toda relación con cualquier objeto, y con ello, toda verdad”[535]. Por un lado se adscribe a la teoría de la correspondencia pero por otro, y este es un punto clave, sostiene que la *Analítica Transcendental* es una “lógica de la verdad” en tanto que una explicación de cómo una experiencia cognitiva es posible es al mismo tiempo una explicación de cómo una verdadera (o falsa) cognición es posible, y esto viene mediado por la estructura cognitiva del sujeto, con lo cual toda interpretación ingenua de la teoría de la correspondencia queda excluida: “our judgments do not copy anything and cannot simply reflect or mirror anything in the world” (Cicovacki, 1995, 201). Podría sostenerse que esta posición de Kant es más bien una crítica a la teoría de la correspondencia y que Kant sostiene más bien una teoría de la coherencia y/o un relativismo. Pero esta opción es razonadamente desmontada por Cicovacki y, más bien, parece que Kant defiende una teoría de la coherencia modificada [536]. La *coherencia interna* sería condición necesaria de todo pensamiento con significado y, en general, de toda cognición, y permitiría caracterizar una validez objetiva. Pero “validez objetiva” ni implica ni significa “verdad”. Kant dice que “die Kategorien … zur Wahrheit, d. i. der Übereinstimmung unserer Begriffe mit dem Objekte führen” (A642 / B670), pero eso no significa de ninguna manera que puedan garantizar la verdad. “What is needed for truth besides the coherent combination of our representations into thoughts and judgements is an actual or possible sensation” (Cicovacki, 1995, 202). En palabras de Kant: “mögliche Erfahrung ist das, was unseren Begriffen allein Realität geben kann; ohne das ist aller Begriff nur Idee, ohne Wahrheit und Beziehung auf einen Gegenstand” (A489 / B517). Para Cicovacki, esta singular posición de Kant puede describirse perfectamente en términos de una *ill-defined token-token identity* [537] y su punto de vista

[534] Cicovaki (1995, 204) ve una coincidencia con la posición de Davidson en su crítica a Tarski.

[535] “Der Teil der transzendentalen Logik also, der die Elemente der reinen Verstandeserkenntnis vorträgt, und die Prinzipien, ohne welche überall kein Gegenstand gedacht werden kann, ist die transzendentale Analytik, und zugleich eine Logik der Wahrheit. Denn ihr kann keine Erkenntnis widersprechen, ohne dass sie zugleich allen Inhalt verlöre, d. i. alle Beziehung auf irgendein Objekt, mithin alle Wahrheit” (A62 / B87).

[536] “Such a classification must always be made with a conscious reservation since Kant’s view does not really square with any of the traditionally defended conceptions of truth” (Cicovacki, 1995, 204).

[537] La tesis de una tal teoría en la interpretación de la epistemología kantiana fue defendida inicialmente por Ralf Meerbote (1989, 181-182).

quedaría perfectamente reflejada en la cita de Niels Bohr que cierra su trabajo: “the opposite of a correct statement is a false statement. But the opposite of a profound truth may well be another profound truth”.

9.4.4.- Algunas otras interpretaciones y conclusiones.

El tema ha ocupado a muchos filósofos y científicos en los últimos 50 años, pero no ha encontrado una solución definitiva. Se puede encontrar un resumen detallado del estado de la cuestión en (Lehmann, 1969, 71-87). Pero nos permitiremos algunos comentarios sobre aspectos relevantes planteados posteriormente. Para Wolfgang Röd (1996, Bd.IX, 1: *Die Philosophie der Neuzeit 3*, 57), el postulado del realismo empírico no debe interpretarse en el sentido de que sólo podamos considerar real lo que podamos observar; la noción de realidad (Wirklichkeit) es más amplia, pues también es real lo que cumple esta condición más general: “etwas gilt as wirklich, wenn es sich im Rahmen einer empirischen Theorie erschlissen lässt (*KrV*, B521)”. Además Röd sostiene (*ibid.* 57-58) que Kant va más allá: “im Anhang zur transzendentaler Dialektik erklärte er, dass als wirklich auch gelte, was zum Zweck der systematischen Verbindung verschiedener Erkenntnisse gedacht werde” (*ibid.* 57). Es decir, Röd sugiere que algo es también para Kant real si es necesario dentro de una construcción teórica, de suerte que conceptos *construidos* como “yo” (unidad de conciencia), “cosa en sí” o “Dios” tendrían también una referencia real, es decir, designarían objetos reales dentro de una teoría. Y esto valdría también para nociones como “electrón” dentro de los modernos sistemas representacionales de las ciencias físicas. Röd concluye que Kant opera en realidad con distintas nociones de *realidad*, lo que recuerda mucho las tesis más arriba expuestas de que opera con distintas nociones de *verdad*, tema que desarrolla en (Röd, 1974), y, por ello, según Röd, casi cualquier interpretación de sus tesis fundamentales sería posible. Y para Julián Pacho (1993, 560):

> “Die Konnivenz zwischen Negation einer bestimmten Ontologie und dem angeblichen Anti-Realismus ihrer Träger lässt sich historisch leicht belegen. Der Idealismus wird spontan als nicht-realistisch empfunden, obwohl er bloß eine andere Ontologie vertritt, und zwar oft eine hyperrealistische, wie etwa die Platonische. Kants "idealistische" These der Unerkennbarkeit des Ding-an-sich wird als eine antirealistische empfunden, obwohl diese These lediglich die Unerkennbarkeit einer essentialistisch aufgefassten Realität behauptet und Kant selbst hat seine Position als "empirischen Realismus" ausdrücklich bezeichnet. Die angeblich antirealistischen Skrupel Kants gelten also bloß hinsichtlich einer bestimmten Ontologie; diese einmal abgelehnt und ein neues, "empirisches" Realitätskriterium aufgestellt, kann seine Position wieder als eine durchaus realistische erscheinen. Die Bewertung des kantischen Idealismus als antirealistisch ist also bloß im Fortleben der vorkantischen Ontologie in den Köpfen seiner Bewerter begründet. Ebenso müßte Putnams "interner" Realismus aus der Sicht der vorkantischen Ontologie als antirealistisch erscheinen. Wenn die Begriffsverbindung "Intern" und "Realismus" ohne Skrupel akzeptiert wird, so ist das nur dank einer tiefgreifenden Veränderung im ontologischen Umfeld möglich”.

El texto pone de manifiesto que la oposición realista- antirealista depende en gran medida de la ontología subyacente en la teoría. Y esa ontología puede ser metafísica o no. La pregunta sería ¿era Kant *esencialista*? Todo parece indicar que no. Si nos atenemos al estudio de sus apuntes para las clases de Metafísica que impartía en la Universidad, basados punto por punto en los textos de Wolff, observamos (Pacho, 1977) que sistemáticamente eliminaba todas las interpretaciones metafísicas y esencialistas incluidas por Wolff, como se observa en los *lose Blätter* (Kant-Adickes, 1920). Esto especifica, claro está, una ontología, y es a esa ontología a la que tenemos que remitirnos también para interpretar las contradicciones introducidas por la Dialéctica Transcendental a nuestra interpretación.

Por otro lado, Barry Stroud (1984)[538] desarrolla una de las interpretaciones del problema en su artículo "Die Transzendentalphilosophie und das Problem der Außenwelt", que ha tenido amplias repercusiones. Stroud comienza indicando que "es scheint mir, dass wir das Wesen der Transzendentalphilosophie nicht wirklich verstehen" y recalca que "ich sage das im volle Bewusstsein meiner Ausgangthese: dass wir das Wesen der Transzendentalphilosophie nicht wirklich verstehen" (Stroud, 1984, 204-205). Y para intentar aclarar las tesis fundamentales de Kant parte de la problematicidad presentada por Descartes del *mundo exterior* que, también según nuestro trabajo, era el punto nuclear del desarrollo de Kant junto con las respuestas que dieron a ese problema diversos filósofos. Para Stroud, la comprensión de la solución de Kant "wenn es etwas einbringt, dann, so glaube ich, nicht durch die formale Speziefizierung eines Strukturmerkmals Kantischer Argumente, sondern durch das Verstehen der Eigenart ihrer Konklusionen –und damit auch ihrer Prämissen" (p. 204).

Para Stroud, el término *Transzendentalphilosophie* sería un pleonasmo porque para él significaría simplemente "filosofía"; es decir, el enfoque del problema desde un punto puramente filosófico: "das Wesen des Transzendentalen zu verstehen heisst für Kant das wesen der Philosophie zu verstehen" (p.205). Para Stroud existe un punto común entre los planteamientos de Descartes y de algunos de sus más acérrimos detractores, como G. E. Moore (1899), y es que para ellos existiría una relación directa y no problemática entre las manifestaciones particulares sobre el conocimiento y la certeza de la vida cotidiana y las conclusiones de la filosofía teórica del conocimiento que deberían llevar a aceptarlas. Pero "Kant weist diese Annahme zurück, und ihre Zurückweisung ist der Schlüssel zu seinem Verständnis vom Wesen der Philosophie", pues considera que existe una relación compleja y altamente problemática entre la investigación filosófica de conocimiento y las experiencias de la vida cotidiana, y esto intenta expresarlo en las diferencias entre la filosofía transcendental y empírica; pero el comprender esta distinción, "das ist nicht einfach" (p.207).

Para Stroud no existe ninguna duda de que la postura epistemológica de Kant era claramente realista y se fundamentaba en la prioridad epistémica de las percepciones, sensaciones y experiencias: "Kants Realismus würde demnach die epistemische Priorität von Wahrnehmungen, Empfindungen oder andere Erfahrungen und ebenso die wahrnehmenden Wesen selbst gegenüber den Gegenständen, die im Raum existieren, bestreiten" (p.208). Es decir, coincidiendo con Prauss, no *tiene ningún sentido preguntarse* por *das Ding an sich*. Según Stroud, "Kants Realismus verlangt nicht, dass wir gesondert –darüber entscheiden müssen, ob der Wahrnehmungen, von denen wir wissen, dass wir sie haben, eine äuβere Realität entspricht" (p.210)[539]. Aunque el criterio de Kant de "realidad" está también guiado por un criterio de coherencia:

> "Was mit einer Wahrnehmung nach empirischen Gesetzen zusammenhängt, ist wirklich" (A376).

Con esa clara oposición por Kant a los distintos planteamientos idealistas, desde sus mismos fundamentos, Stroud concluye que "er ist die einzige mit dem skeptischen Idealismus unvereinbare Auffassung und somit die einzige, die erklären kann, wie unsere Welterkenntnis möglich ist" (p.210). Pero este *realismo empírico* tiene constantemente su contrapunto en el

---

538 El artículo fue publicado en 1983 con título "Kant and Scepticism" en *The Sceptical Tradition*, Myles Burnyeat (editor), Berkeley: University of California Press, 1983. En el texto arriba comentado apareció con el título "Die Transzendentalphilosophie und das Problem der Außenwelt", en E. Schaper & W. Vossenkuhl (Eds.): Bedingungen der Möglichkeit. 'Transcendental Arguments' und transzendentales Denken, 1984, 204-233, Traductor Gottfried Seebass, Stuttgart: Klett-Cotta; aparecen también tres respuestas: Graham Bird (p. 230), Paul Guyer (p.236) y Gottfried Sebass (p. 243).

539 (A368f), (A371), (A375), (A376), (A377-B274), (B275), (B278-279), (BXL y BXLI) y (BXVI y BXVII).

idealismo transcendental. ¿Cómo lo interpreta Stroud? Para él, según Kant, no podemos dudar de nuestras experiencias, de las *Erscheinungen*, porque se ajustan a nuestra capacidad cognitiva y a los mecanismos que posibilitan nuestro conocimiento: de alguna forma, *dependen* de nosotros. Y, en todo caso, es *lo único* que podemos conocer. El estudio de esa dependencia y de sus consecuencias constituiría para Kant el *idealismo transcendental*. De modo que, para Kant, el realismo más sólido en que se resume su filosofía sólo se podría *demostrar* a partir del *idealismo transcendental*.

Stroud sostiene que el dilema se sostiene en dos *formas de hablar*, "die Unterscheidung wird wohl am besten als Unterscheidung zweier verschiedener Redeweisen verstanden, oder zweier verschiedener Redestandpunkte" (p.212). Aunque tal vez se trataría no sólo de dos *formas de hablar*, sino, como hemos visto, de una modificación de la Lógica para abordar las conclusiones que, desde la compleja estructura con la que Kant describe el *juicio* humano (Dialéctica Transcendental, *Crítica del Juicio*), podrían seguirse de las afirmaciones que se obtienen en la Estética Transcendental sobre la realidad. Y este aspecto está estudiado más a fondo y con un calado mayor en los autores más arriba estudiados (Thomson, 1972), (MacLachlan, 1995), (Cicovacki, 1995), (Abela, 2002) y (Allison, 2004). Así para Stroud la *refutación del idealismo* sólo podría tener éxito si el Idealismo fuera verdad. Los objetos, que percibimos directamente, podrían ser demostrados que existen como objetos espaciales independientemente de nosotros, si pudiéramos demostrar que las *apariencias y nuestras representaciones* dependen de nosotros o, mejor dicho, de nuestra forma de conocer y además, al contrario que para Vaihinger, "doch für Kant besteht hier kein Widerspruch oder Paradox" (p.212). En esta interpretación, se observa que Kant priorizaría las condiciones epistémicas de nuestro conocimiento, y el análisis de éstas ocupa de hecho la mayor parte de la *KrV*. Stroud subraya otro hecho, pero no suficientemente: en estas condiciones el carácter *apriorístico* de nuestra percepción del espacio y el tiempo como formas puras de la intuición tiene un papel fundamental. Y de hecho ese *apriorismo* tiene un carácter axiomático en el sistema kantiano: es lo que asegura la objetividad e intersubjetividad de nuestras *apariencias*. De alguna forma aparece en la interpretación de Stroud la concepción que él exponía al principio de su trabajo; para Kant el Idealismo transcendental se identifica con la tarea propia de la Filosofía: analizar críticamente nuestras convicciones, es decir, evidenciar la incertidumbre de nuestras certezas. Pero eso no cuestiona la objetividad, para nosotros, de nuestras experiencias.

Stroud destaca, aunque no saca de ello todo el partido posible, la posibilidad de que Kant esté considerando dos tipos de *objetos* en nuestras *apariencias* y *representaciones*, y además subraya la importancia de nuestros mecanismos representacionales (p.217 y ss.). Parece evidente que los procedimientos representacionales para afirmar la verdad, y permitir su manipulación objetiva, de enunciados del tipo "este lápiz está en mi mano" es muy distinta de los correspondientes a enunciados del tipo "esto es un electrón". Un estudio lingüístico y comparativo del omnipresente término *Vorstellung* en Kant, al estilo del realizado por Prauss con *Ding an sich*, está aún por realizar; y sería también necesario un estudio de sus concepciones de la Física para sacar conclusiones definitivas, como hemos mencionado más arriba. En esa distinción, la *realidad* en el sentido usual de los objetos postulados en una teoría física, por ejemplo, tendría un carácter distinto de los de la experiencia usual, en una distinción que recuerda mucho a la de Husserl y Hilbert: "was nach Kant zu beweisen ist, ist die blosse *Möglichkeit*, die Dinge zu erkennen, die der normale Mann zu erkennen behauptet (…) und wenn jemand realiter erkennt, dass da einige Stiften sind, und deshalb erkennt, dass äuβere Gegenstände gibt , dann zeigt er damit, dass es *möglich* ist, solche Gegenstände zu kennen (…) was fraglich bleibe, sei eben gerade die blosse Möglichkeit, die Existenz äuβerer Gegenstände auf allgemeiner Ebene überhaupt zu erkennen" (p.226).

Para Graham Bird, la estrategia planteada por Stroud sería "ziemlich verwirrend" (Bird, 1984, 230). Aunque señala que coincide con Stroud en algunos de sus planteamientos, su mayor deficiencia consistiría en que plantea la *Wiederlegung des Idealismus* como una estrategia diseñada desde los planteamientos del *idealismo transcendental*. Y lo peor según Bird, aunque Stroud plantea líneas interpretativas, ninguna está suficientemente justificada en los planteamientos de Kant. Esto último es cierto, como hemos indicado anteriormente, pero parece injusta su primera crítica. Para Stroud, *la refutación del idealismo* no responde a una estrategia diseñada desde otro nivel sino que, según señala, sería una estrategia propia a partir de un planteamiento con dos "Redenweise" o "Redenstandpunkte". Igualmente Paul Guyer sostiene que "wenn nun aber die *Wiederlegung des Idealismus* ein genuines Beispiel für Kants transzendentale Methode ist, so bedeutet das zwangsläufig, dass der transzendentale Idealismus, im Gegensatz zu Strouds Annahme, kein wesentlicher Bestandteil oder unausweichliches Problem der transzendentalen Strategie Kants ist" (Guyer, 1984, 240). También piensa que el problema fundamental de Stroud consiste en que no responde en absoluto a la pregunta que él mismo se formula: ¿qué entiende Kant por *idealismo transcendental?*[540]. Además ambos autores le reprochan a Stroud el haber olvidado en su análisis un aspecto fundamental: la prioridad epistémica que Kant concedía a la experiencia interna para justificar la existencia del mundo externo. Así, "das Argument weist den äusseren Gegebenheiten eine erkenntnistheoretische oder ontologische Priorität von den inneren zu und beginnt auf diese Weise, das systematische Inventarium innerhalb des allgemeineren Rahmens der Unterscheidung empirisch-transzendental zu entwickeln" (Bird, 1984, 235) y "nun leistet dies Kant durch den Nachweis, dass die Erkenntnis unserer eigene Zustände ein Wissen von der Existenz äusserer Gegenstände voraussetzt" (Guyer, 1984, 237). Cierto que en su artículo Stroud no pretende dar una visión omnicomprensiva de la problemática, sino que se limita a sugerir ciertas líneas interpretativas sugerentes, con frecuencia no muy bien justificadas; entre ellas, dos de las más interesantes arriba mencionadas han sido dejadas de lado por sus críticos: la sugerencia de distinción en Kant de dos tipos de *objeto* y la sugerencia de considerar el realismo empírico y el idealismo transcendental como dos distintos "Redenweise" o "Redenstandpunkte".

Y en estos dos aspectos podría estar la clave para entender la problemática. Ya vimos que el *idealismo transcendental* no sólo podría interpretarse como una *Redenweise,* expresión que Stroud tampoco especifica en demasía, sino incluso como un tipo de Lógica (Thomson, 1972) o incluso como un metalenguaje (MacLachlan, 1995). Y, en todo caso, como señalaba Abela (2002) la solución se encontraría en la interpretación del *juicio*. De modo que todo sugiere una investigación de la *Lógica Transcendental* y de la *teoría del Juicio* en Kant. Pero la teoría del juicio en Kant presenta una enorme complejidad, que excede aquí nuestras perspectivas. Además está íntimamente relacionado con su concepción de la Lógica. Para Kant, todo acto cognitivo está dirigido a través del *juicio* y, él mismo, sería el primero y más importante de los actos cognitivos en el cual se asociarían distintas representaciones mentales:

> "Ein Urteil ist die Vorstellung der Einheit des Bewusstseins verschiedener Vorstellungen, oder die Vorstellung des Verhältnisses derselben, sofern sie einen Begriff ausmachen" (Kant, Jäsche Logik, § 17)[541].

---

[540] "Ich nenne alle Erkenntnis transzendental, die sich nicht sowohl mit Gegenständen, sondern mit unserer Erkenntnisart von Gegenständen insofern diese a priori möglich sein soll, überhaupt beschäftigt" (B25). "Llamo transcendental todo conocimiento que se ocupa, no tanto de los objetos, cuanto de nuestro modo de conocerlos, en cuanto que tal modo ha de ser posible *a priori*" (B25), (PR).

[541] Un juicio es una representación de la unidad en la consciencia de varias representaciones, o la representación de las relaciones entre ellas, en tanto que éstas se desarrollan en un concepto (Kant, *Jäsche Logik*, § 17).

> "So finde ich, dass ein Urteil nichts anders sei, als die Art, gegebene Erkenntnisse zur objektive Einheit der Apperzeption zu bringen" (B141)[542].

Pero las nociones a través de las cuales se desarrolla su descripción, las convierten en un tema con entidad propia: las *categorías, unidad transcendental de la apercepción, objeto transcendental, síntesis* y *esquema*. Como indican Achourioti & Van Lambalgen (2011, 4), "thus a Kantian judgement is very much unlike a proposition in the modern sense". Béatrice Longenesse (1997, 5) en su obra *Kant and the Capacity to Judge* focaliza precisamente su estudio en la conexión entre las formas lógicas del juicio y los actos del entendimiento, y hace exactamente el mismo comentario en relación con la Lógica subyacente: "Kant's notion of logical form is not that of modern logic".

Y a pesar de la relevancia que Kant da a su Lógica en la *KrV*, y a pesar de que, como vimos, sus expresiones y valoraciones sobre la concepción de la Lógica coincide prácticamente con las de los logicistas más estrictos, la realidad es que entre los filósofos y Lógicos sus desarrollos de Lógica han sido despreciados: aparentemente no existía sintaxis, no existía semántica, no existía inferencia. Así aparece tratado en los *Begriffsschrifft* de Frege y en The *Bounds of Sense* de Strawson, por no hablar de otros autores como Hazen (1999,79) para quien la Lógica formal de Kant sería "terrifyingly narrow-minded and mathematically trivial". La investigación de esa Lógica y su conexión con su Teoría del Juicio se ha revitalizado; además de las obras de Longuenesse podemos mencionar en esa misma dirección a Reich (1932 y 1992) y a Wolff (1995), para quienes el asunto no es tan evidente. Recientemente Achourioti & Van Lambalgen (2011) han realizado un trabajo donde arguyen que "Kant's 'transzendental logic' is a logic in the strict formal sense, albeit with a semantics and a definition of validity that are vastly more complex than that of first order logic". Y desarrollan un formalismo, formalizando algunas nociones de la *lógica trancendental*, que le permite desarrollar una demostración formal de la Tabla de Juicios de Kant del parágrafo 9 de la *KrV* y, consiguientemente, como Kant sostenía, completarlo para el tipo de semántica que él tenía en mente. Desde su punto de vista, el trabajo lleva a tres conclusiones:

(i) La lógica formal de Kant puede considerarse restrictiva solamente si asumimos que la semántica subyacente sería la de la lógica clásica de primer orden,

(ii) pero la lógica implicada en sus argumentos, centrada en torno a tres diferentes nociones de *objeto*, puede dar lugar a una expresión matemática precisa, conduciendo a una lógica transcendental formalizada,

(iii) con la semántica que proponen los autores, un sistema muy análogo a la lógica formal de Kant, se puede considerar como un fragmento específico de la lógica de primer orden, precisamente la denominada *lógica geométrica*, y, por tanto "transcendental logic can be conceived as a formal logic in its own right. This is precisely what we shall attempt" (Achourioti & Van Lambalgen, 2011, 1).

Es decir, el que Kant no construyera un *sistema formal*, cuando no existían, no querría decir que no sea posible construirlo, al menos sobre aspectos parciales de su lógica, a partir de su sistema[543]. Aunque probablemente *el conjunto* de su sistema teórico supere ampliamente

---

542 "Entonces observo que un juicio no es más que la manera de reducir conocimientos dados a la unidad *objetiva* de apercepción" (B141), (PR). "A judgement is nothing but the manner in which given cognitions are brought to the objective unity of apperception" (B141).

543 Existen pocos trabajos en esta dirección. Hay una amplia exposición que revisa el tema en (Stuhlmann-Laeisz, 1976) pero, según Achourioti & Van Lambalgen (2011, 3) "these are set firmly in the context of traditional logic". Existen también estudios sobre aspectos filosóficos específicos en esta dirección como la tesis doctoral de MacFarlane (2000) en relación con el uso por Kant del término "formal" y en (Posy, 2003) acerca de si Kant en su lógica estaba guiado por el psicologismo. En su reciente artículo "Truth criteria and

las posibilidades expresivas de cualquier sistema formal. Pero esta investigaciones, al igual que los estudios antes comentados de (Thomson, 1972), (MacLachlan, 1995), (Cicovacki, 1995), (Abela, 2002) (Röd, 1996) y (Allison, 2004) avalan el supuesto de que, efectivamente, Kant distinguía entre dos tipos de *objetos*, o dos tipos de *realidades*, o dos tipos de sentidos de *verdad*. Y de que, además, su Analítica y Dialéctica transcendental suponía una *modificación lógica*, o incluso pretendía un *metalenguaje* para abordar su teoría cognitiva y, de alguna forma, completarla. Sea porque Kant era consciente de la dificultad de tratar como un *objeto de la experiencia cotidiana* a ciertos objetos representacionales de la ciencia moderna, porque el problema como vimos ya estaba en la Mecánica newtoniana, o sea porque como sostiene Stroud para él el enfoque filosófico era sinónimo de su idealismo transcendental, o sea porque ponía en duda *los límites de nuestra capacidad de conocimiento* que, en principio, él consideraba limitados por la misma razón y nuestra constitución cognitiva, lo cierto es que emprendió una investigación que, en muchos aspectos, parece cuestionar sus propias conclusiones.

En resumen, podemos caracterizar la posición de Kant básicamente por un realismo robusto, pues su defensa del *realismo empírico* y de la realidad del *mundo externo* es clara y contundente y debemos partir de ella como un hecho probado. Las críticas desde el *enfoque trascendental* (Dialéctica Transcendental) debería por tanto ser interpretadas clarificando el sentido de dicha perspectiva transcendental en su Filosofía, y eso de una forma compatible con la rotundidad de su posición realista (y los análisis anteriores dan interpretaciones muy verosímiles), si descartamos la posibilidad de que Kant se contradiga a sí mismo, que es lo que sostiene Vaihinger (1884).

Como indica Robert Hanna, para Kant *las cosas* son exactamente como se nos *aparecen*, y nuestro conocimiento queda limitado por nuestras capacidades cognitivas a través de mecanismos que él mismo describe, en un desarrollo conceptual sin parangón con cualquier otro filósofo. Pero tal vez su pregunta fue, ¿y donde acaban mis *posibilidades* cognitivas? En la vida cotidiana parece claro, pero cuando hablamos de nuestras representaciones científicas la *experiencia*, la *apariencia de los objetos postulados* parece más problemática y, además, variable con el tiempo. Por ejemplo, en la época de Kant la experiencia del microcosmos, y su apariencia, era esencialmente visual y hasta un grado de resolución próximo a la experiencia visual del mundo cotidiano; hoy, la *apariencia* y *experiencia* del microcosmos es de varias potencias negativas de 10 metros, y donde no hay una experiencia visual, ni sensitiva en el sentido cotidiano, y en donde la relaciones de los objetos se miden por modelos matemáticos que, precisamente, postulan la existencia de esos mismos objetos. Las distinciones de los investigadores anteriores permitirían asegurar que Kant comprendía la distinción. Pero, como dijimos, falta una investigación a fondo en el sentido de la obra de Prauss sobre los diversos usos, y distintas determinaciones, de la noción de *representación (Vorstellung)* en la obra de Kant para llegar a conclusiones más definitivas.

Y con ello terminamos en el punto de partida de nuestro trabajo (Capítulo-3), pero con una nueva perspectiva. Una característica fundamental de los sistemas representacionales de las ciencias modernas es, como hemos visto en nuestro análisis, la postulación de objetos que hemos caracterizado como objetos *que tienen una forma de existencia distinta* de los objetos del mundo cotidiano de los humanos. Y esto en el sentido de que no se pueden percibir, si es

---

the very project of transcendental logic", Rosenkoetter (2009) sugiere que la lógica transcendental sería fronteriza con la búsqueda de un criterio de verdad que la lógica tradicional no podría conseguir (A57-9 / B82-4), pero no existe ninguna indicación en el artículo de que la lógica transcendental pudiera ser considerada como una lógica formal por derecho propio, al menos en algunas de sus partes. Para Achourioti & Van Lambalgen (2011, 2), "to our knowledge, ours is the first attempt to shed light on Kant's logic using the tools of modern mathematical logic".

que existen, por medio de los *sentidos* humanos directamente; se pueden *percibir* midiendo sus *efectos e interacciones* con aparatos construidos ex profeso lo cual, si bien por un lado se puede considerar como una extensión de la *sensibilidad* humana, por otro implica que esa *percepción* está en gran parte determinada por esos aparatos y por las unidades de medida y criterios de medida adoptados (y eso en gran medida *convencionalmente*, aspecto que destacó Poincaré). Y por ello el *realismo* adquiere distintos matices según el enfoque *ontológico* que se considere. Puesto que esta problemática estaba ya en el seno del modelo de la Mecánica de Newton –si bien no tan claramente como en las modernas teorías físicas-, cabe conjeturar que Kant era consciente de la problemática, lo que explicaría la permanente tensión entre su *realismo empírico* y las críticas planteadas por él mismo desde el punto de vista *transcendental*; el clarificar esta conjetura exigiría también un análisis a fondo de sus escritos sobre la Física, lo cual se plantea como la continuación natural de esta investigación. Los trabajos de (Vaihinger, 1884), (Lehmann, 1969), (Stroud, 1984), (Röd,1996), (Pacho, 1977 y 1993), (Thomson, 1972), (MacLachlan, 1995), (Cicovacki, 1995), (Abela, 2002), (Allison, 2004), (Achourioti & Van Lambalgen, 2011), (Longuenesse, 1997), (Bird, 1984), (Guyer, 1984) y (Walker, 1989 y 1997) que hemos analizado nos permiten concluir, con un cierto grado de certeza, la vigencia del sistema kantiano para sustentar una epistemología de los sistemas representacionales de las ciencias modernas y, más aún, en el caso de la interpretación kantiana de Hilbert.

En el estudio que hemos realizado también hemos encontrado lo que sería la esencia de la Matemática: una *actividad* orientada a la resolución de problemas de un determinado campo de las ciencias empíricas que opera en una primera fase a través de la *matematización* del problema, determinando variable medibles relevantes, construyendo conceptos adecuados para la comprensión de esas variables y determinando sus interrelaciones y leyes a través de un método mixto entre la inferencia inductiva, propio de las ciencias experimentales, y la pura deducción lógica. En una segunda fase, el análisis lógico de la teoría construida lleva a una *axiomatización* de la teoría y a la demostración de sus resultados por métodos formales; análisis en el que la conexión de la teoría con sus objetos iniciales se desdibuja y en donde la relación con el lenguaje en el que se expresa la teoría pasa a un primer plano. En una tercera fase la teoría misma así formalizada pasa a ser objeto de estudio, estableciendo sus conexiones con otras teorías matemáticas y permitiendo, eventualmente, una teoría más general de acuerdo con la *tensión unificadora* que caracteriza a la ciencia moderna.

Además, en la fase de exposición formal y demostración formal, ese formalismo no es estricto, en el sentido en que lo consideraría un lógico: se combinan deducciones formales con demostraciones informales, y el lenguaje utilizado es el lenguaje natural *enriquecido* con un simbolismo formal que, en realidad, encubre una definición conceptual –nada que ver con lo que un lógico entiende por *lenguaje formal* y *demostración.* Todo este proceso se puede ver con todo detalle en la creación, evolución y aplicación de la Teoría de la Probabilidad, y que analizamos con detenimiento por ser la primera teoría matemática importante en la que podemos acceder casi en tiempo real a todos los detalles de su evolución y a las discusiones asociadas.

La *justificación* de una teoría matemática desde el punto de vista de una *explicación científica* del mundo aparece aquí nuevamente ligada a su *aplicabilidad*. Sería esa *aplicabilidad* (la aportación de un modelo, en términos de Frege) a determinados (e incluso con frecuencia muy distintos) campos de la realidad medible la que garantizaría la existencia de los objetos matemáticos, ya sea como contenidos semánticos o como objetos ideales, y la que justificaría una teoría matemática.

CONCLUSIONES

1.- El esquema cognitivo kantiano, su filosofía de la Matemática y la intuición.

1.1.- El proyecto kantiano. Un proyecto del siglo XX. Nuestra investigación sobre la teoría cognitiva de Kant y sobre su filosofía de la Matemática se ha centrado fundamentalmente en las obras que surgen a partir de la publicación de los trabajos de Prauss (1974) y de Strawson (1966). El objetivo es encontrar una interpretación moderna y coherente de esos tópicos aunque se han comparado y discutido interpretaciones anteriores. En el análisis que hemos realizado, la filosofía de Kant aparece como un intento de superar los planteamientos filosóficos y las limitaciones de la lógica de su época. Para ello, crea un *metalenguaje* (Maclachlan, 1995) específico con el que intenta abordar un análisis *funcional* de los mecanismos cognitivos humanos, y plantea como problema clave la elucidación de las *condiciones de la posibilidad* del conocimiento humano. Para entender el edificio diseñado por Kant para desarrollar su proyecto, debería vérsele más bien como un filósofo del siglo XX que crea un esquema conceptual diseñado para romper viejas falsas dicotomías y problemas mal planteados, y sería un error interpretarlo dentro de los debates de la época. Hay para Kant otro objetivo explícito en relación con el método para abordar el problema. En el planteamiento de ese método, que según él debería ser una “terapia” filosófica, Kant es un filósofo del siglo XX más que un metafísico tradicional de su época, y su objetivo es desarrollar un sistema de conceptos que deshaga muchos dilemas filosóficos de la época en cuanto problemas falsos o mal planteados. Pero su arquitectura conceptual es absolutamente original y propia, sin correlato con ningún otro filósofo de la época o moderno, aunque hemos encontrado coincidencias en aspectos importantes con distintos filósofos modernos (Wittgenstein, Frege, McDowell, Davidson y Quine). Hay también notables coincidencia, al menos terminológicas, con Aristoteles.

Varios de los temas de debate en la literatura interpretativa de Kant, se esfuman por irrelevantes si adoptamos el enfoque de que el proyecto de Kant supone una auténtica ruptura con la tradición filosófica anterior, y en particular con los enfoques ontológicos. Muchas de las oposiciones de la terminología de Kant consisten en *perspectivas epistemológicas funcionalmente contrapuestas* de la consideración del objeto y sin contenido *ontológico* alguno. Además, los argumentos de Kant son en gran parte de una muy específica y compleja arquitectura con la pretensión de demostrar la limitación de nuestro conocimiento. El *idealismo transcendental* debe ser interpretado en sí mismo como una metodología o punto de partida, más que como una doctrina metafísica sustantiva, y que pretendería un cambio del enfoque de la cognición “desde un modelo teocéntrico a uno antropocéntrico” y, consecuentemente, desde una concepción intuitiva a una discursiva de la cognición (entendiendo por “teocéntricos” todos los enfoques metafísicos de su época, los cuales suponían una realidad superior a la que de alguna forma podríamos acceder “intuitivamente”). El *idealismo transcendental* sería fundamentalmente una doctrina de *modestia epistemológica* (Allison, 2004, xv- xvi), (Bird, 2006), (Abela, 2002), (Falkenstein, 1995), (Langton, 1998). Kant no trataba de decir lo que es indecible, sino simplemente de definir las fronteras de lo que *puede* ser dicho o preguntado. Para ello introduce el “metalenguaje” de la filosofía transcendental. Expresiones tales como “cosas como son en sí mismas”, “noumeno”, “objeto transcendental” y sus correlatos deben ser entendidos como términos técnicos dentro de este metalenguaje más que como términos en referencia a entidades reales. Y eso aún y cuando muchos de esos términos proceden de la tradición filosófica anterior, en la que tenían una referencia ontológica, y por tanto un significado distinto que en la filosofía transcendental. Así, la expresión *las cosas en sí mismas* debe considerarse una expresión adverbial en el sentido de *las cosas en sí mismas consideradas*, y la expresión *las cosas 'en sí mismas' consideradas* no significa otra cosas que *las cosas no consideradas como apariencia*. Se puede desarrollar el sentido de tales términos en dos niveles de reflexión. Esta reflexión dual de hecho no consiste simplemente en dos reflexiones independientes entre sí, sino en el sentido más complicado de que las cosas sólo pueden ser consideradas en sí mismas, en tanto y cuanto la reflexión las ha considerado inicialmente como apariencias (A248n), (Prauss, 1977, 38-39, 50 y 131), (Allison, 2004, 73). A partir de aquí, vemos que diversos autores han intentado profundizar en el significado del *idealismo transcendental* en su segundo nivel de reflexión planteándolo como un *metalenguaje* o como una *lógica* discursiva relacionada con su teoría del Juicio (Thomson, 1972), (MacLachlan, 1995), (Cicovacki, 1995), (Abela, 2002), (Allison, 2004), (Achourioti & Van Lambalgen, 2011) y (Brooks, 1995).

1.2.- Los cinco sentidos de la *intuición* en la *Estética*. Con este enfoque del idealismo transcendental, debe considerarse el rol de la intuición en su sistema. En (B33-36) Kant diseña un vocabulario en relación con la percepción (tomados mayormente de la tradición medieval y aristotélica que habían abandonado sus contemporáneos) y que adquieren en sus sistema significados inéditos y novedosos, que deberían formar los elementos de una ciencia de todos los principios de la sensibilidad [*Sinnlichkeit*] *a priori* y que Kant denomina *Estética Transcendental* (B36). Con este proyecto y esta terminología técnica, y que es ampliada considerablemente a otro nivel de reflexión en la *Dialéctica Transcendental* (B376-377/ A320), se esbozan inicialmente varios usos del término "intuición". Kant sugiere en la *Estética Transcendental* (A22) que las intuiciones [*Anschauungen*] se remiten directamente a los objetos, a diferencia de las sensaciones. Tal distinción podría considerarse como un contraste entre estados mentales "representativos" y "no representativos" (Falkenstein, 1995, 123), (Bird, 2006, 122). En relación con este primer uso básico del término intuición en Kant nos podemos preguntar por su valor cognitivo y el carácter de esa cognición. El mismo Kant parece concebir que el conocimiento no surge sino al final del proceso, tras la conjunción de esos momentos artificialmente aislados para el análisis (A22), (A51/ B75). Kant cree que ambas instancias están, si no literalmente, conceptualmente separadas por su procedimiento de abstracción, y que indican *funciones distintas* en el proceso cognitivo. Así pues en el primer uso del término intuición debemos distinguir dos significados iniciales (B75): La Intuición como potencia o capacidad psicológica, en la que considerada dentro del esquema cognitivo lo relevante es su carácter de *función*. Y por otro lado, la intuición o las intuiciones como resultado de la actividad cognitiva de esa función. Analizando los usos que hace Kant de algunos términos, se observa que Kant distingue cuidadosamente entre *Erkenntnis*, una *representación mental consciente* de los objetos (A320/B376), que no implicaría estrictamente creencia, verdad o justificación, y *Wissen* (A58–9/B83), que implica estrictamente creencia, verdad y justificación (A820–31/B848–59). Robert Hanna (2001) los traduce respectivamente por "cognition" y "scientific knowing". Parece que Kant utiliza normalmente *Erkenntnis* como un término técnico con significado preciso, que expresa las limitaciones del conocimiento humano. En la *Deducción* establece que la cognición (*Erkenntnis*) consiste en la relación determinada de una representación dada con un objeto (B137 y B146–74) y en la Introducción a la edición B describe la generación de una cognición en tanto que involucrando la comparación de diferentes representaciones sensoriales. Análogamente sucede en la *Jäsche Logic* (Ak 9:65). En otros lugares, sin embargo, Kant usa el término *Erkenntnis* más ampliamente (A320/B376–77), donde simplemente una intuición o un concepto se considera como una cognición, y hay lugares en sus Lecciones de Lógica donde *toda* representación se considera una cognición (*Logic Lectures Ak.*24:132, 24:845 y *Jäsche Logic Ak.*9:64). Todo esto confirma nuestra tesis de que Kant tiene una concepción gradualista del conocimiento, asignando un valor cognitivo a una simple intuición. La posición de Kant no es en modo alguno la de una demarcación tradicional, rígida y estricta entre lo que es conocido y lo que no, o entre lo que es inteligible o no (Bird, 2006, 128) (Abela, 2002).

Kant utiliza también el término en un tercer significado, al referirse al objeto resultante del acto de intuir, cuando usa el término para referirse también al *objeto representado en ese estado mental*. Y aún hay un cuarto significado: la intuición como el acto mismo de intuir. Mucha de la terminología básica de Kant está ya en los tratados medievales y en Aristóteles y, en particular, la distinción entre sensibilidad e intelecto se remonta a la distinción de Aristóteles entre *aesthesis* y *nous* (*De Anima*, 427b7-15) como el propio Kant hace notar (A21n/ B25n), y era una distinción básica en la teoría cognitiva medieval; y la teoría de unas cogniciones discursiva e intuitiva fue también elaborada por muchos autores medievales. Como base de su filosofía teórica que explicaría la cognición como el resultado de dos facultades, se deshace de toda relación con las teorías cognitivas de sus días y resucita una aproximación al conocimiento humano que sus contemporáneos e inmediatos predecesores habían rechazado (Falkenstein, 1995, 21 y 30), (A312/ B368-9) (A230/ B283). Podemos resumir diciendo que Kant, siguiendo a Aristóteles, postula la existencia de dos potencias o facultades cognitivas distintas: sensibilidad e intelecto (A50/ B74). Pero *Sensibilidad* y *Entendimiento*, al revés que en Aristóteles, no serían tanto potencias cognitivas con un componente ontológico cuanto un primer y segundo momento (o *función*) de una única actividad cognitiva. La intuición de las *formas*, más que de los *objetos* propiamente dichos, de carácter no discursivo y directamente representacional del objeto entendido como forma percibida, es lo que permite calificar al esquema cognitivo Kantiano de "intuicionismo formal" (Falkenstein, 1995, 138).

Hay, sin embargo, numerosos lugares en la *KrV* en los que Kant parece dejar sitio para juicios analíticos involucrando el concepto de una entidad puramente inteligible o el mundo inteligible (B149), (A276/ B332) (A286/ B343-43) (A433/ B461) (A609/ B637) (A635/ B663). Y esto plantea la posibilidad de un 5º sentido de la intuición en Kant, la "intuición intelectual" (*Intuitio*) que, ciertamente, sería incompatible con la lectura de Kant que aquí hemos desarrollado pero que es objeto de polémica entre los comentaristas. El mismo Kant indica que hay solamente dos tipos concebibles de intuición: la sensible y la no sensible o intelectual, pero esta última, en cuanto que requiere la generación actual del objeto a través del mismo acto de intuir, esto es, que sería una intuición creativa, quedaría excluida para los seres humanos como incompatible con nuestra finitud. Para Kant, el concepto de un intelecto intuitivo tendería a ser una modelización de una mente divina y sería para él un concepto problemático puesto que los seres finitos no tendríamos forma de entender su posibilidad, pero tendría una importante función regulativa indicando los límites de nuestra cognición discursiva (Allison, 2004, 28 y ss). La discusión canónica entre estas dos formas de intelecto la desarrolla Kant en los parágrafos 76 y 77 de la *Crítica del Juicio*. Sin embargo el tema está interrelacionado con el problema del *objeto trascendental*, el de *la afección por las cosas en sí mismas* y por la distinción *fenómeno-noumeno*, y hay ríos de tinta escritos al respecto. Por ejemplo según Adickes (1924, 4), con quien no coincide el análisis anterior, existen muchos pasajes en donde Kant afirmaría sin ambigüedad la afección de la mente por las cosas en sí mismas: (A44/ B61), (A358), (A380), (A393) y (A494/ B522), a los que se podrían añadir otros pasajes problemáticos como (A288/ B244), (A613-14/ B641-42). Y el problema, junto con la multiplicidad de interpretaciones, se complica con el análisis de la *Deducción Transcendental* (Allison, 2004, 159 y ss). Un análisis ulterior más profundo de la intuición en

Kant exigiría también el análisis de la *Lógica Transcendental*, lo que nos remitiría a la consideración del rol de *la imaginación* y de *la síntesis* nociones que según muchos comentaristas serían determinantes en la concepción cognitiva de Kant (Lenhard, 2006, 312), (Kim, 2006, 150), (Sutherland, 2005), (Longuenesse, 1997). Además cabe preguntarse si la noción de intuición de Kant, en los distintos sentidos que hemos descrito, no incluiría también, además de ese 5º significado dudoso, una 6ª noción de la intuición de carácter semántico, intuición del objeto (o de una representación del objeto) al que se referiría *el signo*.

1.3.- Formalismo intuicionista y formalismo en Matemáticas. El hecho de que hayamos reconocido en Kant el carácter esencialmente representacional (en relación al objeto) de las intuiciones implica ya un valor cognitivo. Hilbert entendió la intuición kantiana precisamente como lo estamos describiendo aquí; entendió por ejemplo que, sea lo que sea el número cuatro y sin entrar en discusiones ontológicas al respecto, la *percepción* del siguiente grafo de palitroques l l l l nos da una intuición directa del número cuatro, que en nuestro lenguaje lo podemos nombrar con el símbolo 4. Charles Parsons (2008, 160 y ss), analizando este ejemplo, lo denomina "intuición de tipos", en la cuál lo distintivo es que la *percepción e imaginación* que los encuentra juega un rol paradigmático. Se observa que tales tipos se caracterizan por la "vaguedad", y parece que existe una característica específicamente humana que permite, sin mediación de conceptos, identificar un "tipo", por usar la terminología de Parsons, aún en, o precisamente en, una percepción vaga. Y se puede decir específicamente humana porque hasta la fecha ninguna máquina ha podido emular esta característica con éxito. Es un elemento básico de la cognición humana, y que proporciona un grado de cognición del objeto. Esta conclusión sería clave, por ejemplo, en la didáctica de las Matemáticas. Los grafos, diagramas y representaciones espacio-temporales son con frecuencia la mejor forma de explicar el núcleo de una teoría matemática. Sea cual sea su origen, innato o adquirido por la experiencia con el entorno cotidiano, la estructura del espacio euclídeo y las estructuras de sucesión son las formas en las que el sujeto humano estructura todas sus sensaciones y percepciones de forma intuitiva y parcialmente conceptual, en un momento previo a una conceptualización estricta. Y éste es el enfoque fundamental del tema en el esquema cognitivo kantiano: su fundamento en esa intuición del espacio y el tiempo. Esta conexión entre Kant y Hilbert la han percibido otros autores e interpretado de distinta manera. Se puede considerar también como una intuición de formas de los signos o, como dice Resnik (2000, 217), una intuición de patrones de formas.

1.4.- Intuicionismo formal y antiesencialismo. Es simplemente imposible negar que las características formales dominan la respuesta de Kant al marco epistémico realismo transcendental / idealismo empírico, y el rol que sus estructuras formales desempeñan. Se puede considerar representativo de las modernas interpretaciones del tema el análisis de Allison (2004). En el corazón de la lectura de Allison está la correcta observación de que la explicación de Kant de la *síntesis* introduce unas características formales *a priori* que no se pueden derivar de la experiencia (Abella, 2002, 33). Es destacable también la *conexión interna* que Kant establece entre las estructuras formales de la cognición humana y la naturaleza de los objetos empíricos, que es crucial en la explicación de Kant sobre la posibilidad del conocimiento empírico; las formas de la intuición y el rol del juicio serían características constitutivas de la representación *objetiva*.

El principio central que está detrás del *experimento Copernicano* es una identificación de la objetividad con las condiciones de la cognición humana, y el punto central sobre el que pende la *revolución Copernicana* es que esto requiere la necesidad de la representación a través de la experiencia de un objeto (Abela, 2002, 38-40), (Allison, 2004, 27-30). Esencialmente el enfoque de Kant privilegia las condiciones epistémicas, y en particular, las estructuras del juicio sobre los requerimientos ontológicos (Guyer, 1987), (Abela, 2002), (Allison, 2004). Una adecuada comprensión de la aproximación de Kant a las condiciones necesarias para la representación requiere dejar abierto un rol para el objeto empírico (B235-236). En las *Analogías* Kant desarrolla su respuesta y, particularmente de la *primera Analogía de la experiencia* (Analogía de la substancia), con una fuerte componente antiesencialista. Este componente antiesencialista sería una de las características más destacadas del conjunto de la obra de Kant. Para Kant, los juicios definitorios o apodícticos quedan desprovistos de contenido meta-físico y, por tanto, la noción de sustancia, sin dejar de ser realista, pierde toda carga esencialista (Pacho, 1977).

1.5.- Una teoría del conocimiento actual. Hay muchas conexiones entre las posiciones epistemológicas de Kant y los planteamientos de autores contemporáneos, y también con los planteamientos de las modernas ciencias cognitivas. Podemos apreciar una estrecha conexión entre Kant y Donald Davison, John McDowell y Quine, en base precisamente a la prioridad que Kant asignaría a las condiciones epistémicas del Juicio y la superación de "lo dado" (Abela, 2002, 9, 45 y 54). Otros autores también encuentran algunas conexiones con Wittgenstein, especialmente en el proyecto de "terapia filosófica" (Bird, 2006). Se han señalado en varios puntos de este trabajo algunas conexiones que existen también entre los planteamientos de Kant y los de Quine. Philip Kitcher (1982) defendió en su trabajo *How Kant almost wrote the 'Two Dogmas of Empiricism'* una conexión muy general. Lejos de ver a Kant como opuesto al tipo de holismo contemporáneo ofrecido por Quine, la teoría de la representación de Kant debería verse como una total anticipación de los enfoques contemporáneos, solamente que llevando las consecuencias un punto más allá de lo que lo hace Quine (Abela, 2002, 65). El análisis de Kant debería entenderse en el sentido de que la adquisición de conocimientos es un proceso abierto en el que nos movemos desde un punto inicial de *determinación* mal definida hacia mayores niveles de representación *determinada*, sustituyendo así la interpretación en base a la oposición subjetivo / objetivo por la de indeterminado /determinado (Abela, 2002, 9 y 60-66), (Bird, 1962, 57), (Nagel, 1983, 28) lo cual se sostiene en importantes pasajes de Kant (B157-158, B168-169). Nuestras creencias acerca del mundo procederían a partir de una base inicialmente pobremente definida (A9/ B12) en el *contexto de verdad* de un juicio (B34), (B142). Así, Kant pone las bases de una teoría del conocimiento esencialmente gradualista que se desarrollaría en una ampliación del sistema de creencias, de forma que converge gradualmente sobre un dominio de objetos causalmente determinados. Si se acepta esta estrategia interpretativa, llega a ser básico postular un rol para el conjunto de las creencias que sería fundamental en el sistema de modificación de esas creencias, y deviene también fundamental el problema de las condiciones de verdad (y de la concepción de la verdad) en las que el sistema se sustenta. Así, el carácter holístico de la representación sería, coincidiendo plenamente con Quine, una característica esencial del marco cognitivo kantiano y las condiciones de verdad serían de hecho condiciones instrumentales esenciales que restringirían el marco representacional de forma que una única representación, a través de las intuiciones, llegue a ser posible. Las relaciones de referencia operan dentro de un contexto condicionado por consideraciones de *verdad* y los juicios presuponen un amplio marco de creencias. Y la representación particular de un objeto comienza con consideraciones de unidad: lo que Kant llama "la afinidad en la síntesis de la multiplicidad de las apariencias" (A113, A122/ B600, B795), (A108-109), (B33-34) y (B75), pues como Kant repetidamente dice, "da nun Empfindung an sich gar keine objektive Vorstellung ist …" (B208).

1.6.- Realismo empírico e Idealismo transcendental. Las *Analogías* constituyen el corazón de la teoría de la *representación* de Kant pero han tenido muy distintas interpretaciones en la literatura (Abela, 2002, 145-213) (Wilkerson, 1976, 77), (Strawson, 1966, 84-90), (Longuenesse, 1997, ch.11), (Guyer, 1987, 254), (Allison, 1983, 218) y la *Refutación del*

Idealismo es un poderoso punto de apoyo a una lectura realista de Kant. Introducida por Kant en la segunda edición de la *Crítica de la Razón Pura* no ofrece argumentos que no estuvieran ya explícita o implícitamente contenidos en las *Analogías,* pero evidencia cómo el propio Kant reenfocaba la fuerza realista de los argumentos allí expuestos. El argumento postula la existencia independiente de los objetos empíricos: que los objetos *existen en el espacio y en el tiempo* independientemente de nuestros pensamientos acerca de ellos, y el objetivo de su argumento (B276) es explícitamente el enfrentar "el escándalo de la filosofía" que constituiría el escepticismo radical (Bxxxix) y las lecturas idealistas y psicologicistas que se habían hecho a su primera edición, dejando bien establecido el carácter esencialmente realista de la teoría kantiana del conocimiento, por ejemplo en (Bxl-xli) y (B242). Esta lectura está sólidamente argumentada y justificada, y caracteriza la epistemología de Kant con un marcado realismo al nivel empírico (Hanna, 2012a, 154), (Abela, 2002). Pero en la *Dialéctica Transcendental* Kant pretende principalmente establecer las condiciones frontera del conocimiento humano, y esta parte de la *Crítica* plantea serias dificultades a la interpretación aquí desarrollada (Abela, 2002, 215). La problemática en general fue ya puesta de manifiesto por Vaihinger (1884) para quien la contradicción es inevitable y está en el núcleo de la *KrV*: "dieser Wiederspruch geht durch das ganze Werk" (Vaihinger, 1884, 137) y "der Wiederspruch ist da, aber er ist nicht äuβerlich an das System herangebracht, sondern er ist ein innerer Widerspruch des Systems" (Vaihinger, 1884, 159). Sin embargo, podría sostenerse que el postulado del realismo empírico no debe interpretarse en el sentido de que sólo podamos considerar real lo que podamos observar; la noción de realidad (Wirklichkeit) es más amplia, pues también sería real lo que cumple unas condiciones más generales (B521). Kant va más incluso allá y sugiere que algo es también real si es necesario dentro de una construcción teórica, de suerte que conceptos *construidos* como "yo" (unidad de conciencia), "cosa en sí" o "Dios" tendrían también una referencia real, es decir, designarían objetos reales *dentro de una teoría* (Röd, 1996). Y esto valdría también para nociones como "electrón" dentro de los modernos sistemas representacionales de las ciencias físicas. Así, Kant operaría con distintas nociones de *realidad* (Röd, 1974). La oposición realista-antirealista depende en gran medida de la concepción ontológica subyacente en la teoría. Y esa concepción ontológica puede ser metafísica o no (Pacho, 1993, 560). La pregunta sería ¿era Kant *esencialista*? Todo parece indicar que no (Pacho, 1977).

Kant considera que existe una relación compleja y altamente problemática entre la investigación filosófica del conocimiento y las experiencias de la vida cotidiana, y esto intenta expresarlo en las diferencias entre los puntos de vista transcendental y empírico. Aunque la postura epistemológica de fondo de Kant era claramente realista y se fundamentaba en la prioridad epistémica de las percepciones, sensaciones y experiencias (Stroud, 1984, 208). Es decir, coincidiendo con Prauss, no *tiene ningún sentido preguntarse* por *das Ding an sich* (Stroud, 1984, 210). Cfr. (A368f), (A371), (A375), (A376), (A377/ B274), (B275), (B278-279), (BXL y BXLI) y (BXVI y BXVII). El criterio de Kant de "realidad" está también guiado por un criterio de coherencia: "Was mit einer Wahrnehmung nach empirischen Gesetzen zusammenhängt, ist wirklich" (A376). Pero este *realismo empírico* tiene constantemente su contrapunto en el *idealismo transcendental*. Para Kant, el realismo más sólido en que se resume su filosofía sólo se podría *demostrar* a partir del *idealismo transcendental*. Se puede mantener que el dilema se sostiene en dos *formas de hablar* (*Redeweisen oder Redestandpunkte*) (Stroud, 1984, 212). Aunque en realidad tal vez se trataría no sólo de dos *formas de hablar,* sino más bien de una modificación de la Lógica para abordar las conclusiones que, desde la compleja estructura con la que Kant describe el *juicio* humano, podrían seguirse de las afirmaciones que se obtienen en la *Estética Transcendental* sobre la realidad. Y este aspecto está estudiado más a fondo y con un calado mayor en (Thomson, 1972), (MacLachlan, 1995), (Cicovacki, 1995), (Abela, 2002) y (Allison, 2004).

Algunos de estos planteamientos se realizan desde una perspectiva original, ligada a los planteamientos modernos del lenguaje y de las ciencias de la mente, que permiten profundizar en esos distintos niveles de *Redeweisen* a los que se refería Stroud (Maclachlan, 1995, 156-157), (Brook, 1995, 318-319), (A346 / B404), (B158), (B276), (A355), (Thomson, 1972, 334). Para Kant el Idealismo Transcendental se identifica con la tarea propia de la Filosofía (Stroud, 1984): analizar críticamente nuestras convicciones, es decir, evidenciar la incertidumbre de nuestras certezas. Pero eso no cuestionaría la objetividad, para nosotros, de nuestras experiencias.

En su análisis, parece que Kant esté considerando dos tipos de *objetos* en nuestras *apariencias* y *representaciones*, y además subraya la importancia de nuestros mecanismos representacionales (Stroud, 1984, 217 y ss.). Un estudio lingüístico y comparativo del omnipresente término *Vorstellung* en Kant, al estilo del realizado por Prauss con *Ding an sich*, está aún por realizar; y sería también necesario un estudio de sus concepciones de la Física para sacar conclusiones definitivas. En esa distinción, la *realidad* en el sentido usual de los objetos postulados en una teoría física, por ejemplo, tendría un carácter distinto de los de la experiencia usual (Stroud, 1984, 226), en una distinción que recuerda mucho a la de Husserl y Hilbert. Y, en todo caso, como señalaba Abela (2002) la solución se encontraría en la interpretación del *juicio*. Esta teoría está en Kant íntimamente relacionada con su concepción de la Lógica. Para Kant, todo acto cognitivo está dirigido a través del *juicio* y, él mismo sería el primero y más importante de los actos cognitivos en el cual se asociarían distintas representaciones mentales (Kant, *Jäsche Logik*, parag.17), (B141). Béatrice Longuenesse (1997, 5) en su obra *Kant and the Capacity to Judge* focaliza precisamente su estudio en la conexión entre las formas lógicas del juicio y los actos del entendimiento. La Lógica de Kant ha sido hasta hoy mayoritariamente despreciada. Así aparece tratado en los *Begriffsschrift* de Frege y en The *Bounds of Sense* de Strawson, pues aparentemente no existía sintaxis, no existía semántica, no existía inferencia. Pero la investigación de esa Lógica y su conexión con su Teoría del Juicio se ha revitalizado; además de las obras de Longuenesse podemos mencionar en esa misma dirección a Reich (1932 y 1992) y a Wolff (1995). Recientemente Achourioti & Van Lambalgen (2011) han realizado un trabajo donde arguyen que “Kant’s ‘transzendental logic’ is a logic in the strict formal sense, albeit with a semantics and a definition of validity that are vastly more complex than that of first order logic”, y logran formalizar algunas nociones de la *lógica trancendental*.

1.7.- Los *sistemas representacionales* de las ciencias modernas. Nuestras investigaciones avalan el supuesto de que Kant distinguía (al menos) entre dos tipos de *objetos*, o dos tipos de *realidades*, o dos tipos de sentidos de *verdad*. Y de que, además, su Analítica y Dialéctica transcendental suponía una *modificación lógica*, o incluso pretendía un *metalenguaje* para abordar su teoría cognitiva y, de alguna forma, completarla. Sea porque Kant era consciente de la dificultad de tratar como un *objeto de la experiencia cotidiana* a ciertos *objetos representacionales* de la ciencia moderna -porque el problema como vimos ya estaba en la Mecánica newtoniana- o sea porque como sostiene Stroud para él el enfoque filosófico era sinónimo de su *idealismo transcendental*, o sea porque ponía en duda *los límites de nuestra capacidad de conocimiento* que, en principio, él consideraba limitados por la misma razón y por nuestra constitución cognitiva, lo cierto es que emprendió una investigación que, en muchos aspectos, parece cuestionar sus propias conclusiones. El clarificar estas conjeturas exigiría un análisis a fondo de sus escritos sobre la Física, y también falta una investigación a fondo en el sentido de la obra de Prauss sobre los diversos usos, y distintas determinaciones en su teoría, de la noción de *representación (Vorstellung)*. Una característica fundamental de los sistemas representacionales de las ciencias modernas es la postulación de objetos que hemos caracterizado como objetos *que tienen una forma de existencia distinta* de los objetos del mundo cotidiano de los humanos. Y esto en el sentido de que no se pueden percibir, si es que existen, por medio de los *sentidos* humanos directamente. Y por ello el *realismo* adquiere distintos matices según el enfoque *ontológico* que se considere. A pesar de ello podemos caracterizar la posición de Kant fundamentalmente por un realismo robusto, pues su defensa del *realismo empírico* y de la realidad del *mundo externo* es clara y contundente y debemos partir de ella como un hecho probado y tratar de reinterpretar lo demás. Los trabajos de (Lehmann, 1969), (Stroud, 1984), (Röd,1996), (Pacho, 1977 y 1993), (Thomson, 1972), (MacLachlan, 1995), (Cicovacki, 1995), (Abela, 2002), (Allison, 2004), (Achourioti & Van Lambalgen, 2011), (Longuenesse, 1997), (Bird, 1984), (Guyer, 1984) y (Walker, 1989 y 1997) nos permiten concluir la vigencia del sistema kantiano para sustentar una epistemología con un fundamento realista de los sistemas representacionales de las ciencias modernas y, más aún, en el caso de la interpretación kantiana de Hilbert.

1.8.- La filosofía de la Matemática de Kant. La filosofía de la Matemática de Kant debe entenderse dentro del marco más general de su teoría cognitiva, y dentro de su propósito de situar a la Matemática en el lugar adecuado en su proyecto de *Arquitectura de las Ciencias* donde ocuparía un lugar privilegiado por su rol en el conocimiento. También debe inscribirse en el contexto de las discusiones de esa época y considerarse fruto de sus reflexiones sobre la *práctica* matemática en tal contexto histórico (Shabel, 2003,2004, 2006 y 2014), (Sutherland, 2004b). En lo que se refiere al carácter de los enunciados matemáticos, debe partirse del hecho de que el sistema filosófico de Kant se desarrolló bajo la influencia de la filosofía racionalista, representada principalmente por Leibniz y Wolff, y de la filosofía empirista representada principalmente por Hume, y en oposición consciente a una y otra. Kant intenta superar las limitaciones de la lógica de su época teniendo en cuenta en el análisis la forma de conocer, así como las posibilidades y los límites del sujeto cognoscente (Thomson, 1972, 334). Kant considera una clasificación triple de las proposiciones con la que reemplaza la dicotomía de Leibniz y Hume, pero para justificarlo las oposiciones *a priori-a posteriori*, *analítico-sintético* y *empírico-transcendental* adquieren otro significado en su sistema con una dinámica sutil que intenta captar lo esencial de la forma específica de conocer del sujeto humano. Para Kant, todas las proposiciones de la Matemática pura pertenecen a la clase intuitiva de las proposiciones sintéticas a priori. Un punto clave es justificar cómo son posibles los *juicios sintéticos a priori de la clase intuitiva*. De nuevo se observa la íntima relación que establece Kant entre la Lógica de predicados y su teoría cognitiva del Juicio. Si consideramos cualquier juicio perceptivo sobre el mundo físico, parece plausible decir que su verdad o falsedad dependen no sólo de las definiciones y reglas de la lógica, sino también de su correspondencia o falta de correspondencia con la situación perceptiva que describen, aspecto desechado por la Lógica moderna. En el desarrollo ulterior de esta idea, sostiene que la Matemática pura no puede ser analítica porque para la descripción de un objeto (concepto) en el espacio y el tiempo no basta su postulación (o, podríamos decir hoy, su definición), sino que es necesaria su *construcción*. Construir un concepto sería algo más que postularlo o consignar su definición: consiste en proveerlo de un objeto *a priori* (BIX-BXII). La caracterización por Kant de los enunciados matemáticos como *sintéticos a priori* y el mecanismo de la *intuición* asociado a la necesidad de *percibir* el concepto definido están íntimamente ligados a la concepción de Kant de un *espacio visual o fenomenológico* cuya estructura sería de forma natural, por la determinación de las características cognitivas humanas, euclídea (Strawson, 1966, 277-292), (Kim, 2006, 139), (Körner, 1960, 26-34).

La distinción *analítico-sintético* es lógica mientras que la de *a priori-a posteriori* es epistemológica (Pacho, 1989, 475 y 478). La posición de Friedman (como la de Russell) descansa en última instancia en la aceptación incondicional de la contraposición clásica analítico-sintético. Tal análisis es demasiado problemático como para ser acríticamente aceptado, como demostró Quine (1951), quien concluye que únicamente podría mantenerse como una dicotomía absoluta en tanto que justificada en un prejuicio metafísico. En la base del error logicista en la interpretación de Kant subyace una inadecuada comprensión del sentido real de la noción de analiticidad (Lenhard, 2006, 304). La diferencia de fondo radicaría en la *justificación* de la verdad de los enunciados –que es un asunto epistemológico- y en el carácter de los enunciados matemáticos que para los logicistas y positivistas lógicos serían analíticos y por lo tanto a priori, mientras que para Kant serían a priori pero sintéticos. La sistematización de Kant es mucho más sutil y afinada que la de los logicistas y los positivistas lógicos, permitiendo plantear un enfoque epistemológico sorprendentemente moderno. Su distinción entre *juicio* y *proposición* le sitúa cercano a las posiciones de Quine, en el sentido de tener en cuenta un sustrato cognitivo en la Lógica, y por lo tanto la noción de *verdad*. Por otra parte, en su consideración de la Lógica proposicional Kant parece ser un formalista estricto (A54/ B78), (AXVII) coincidiendo en esto con los positivistas lógicos, los logicistas y los formalistas del siglo XX. Podría sostenerse que Kant considera que los enunciados matemáticos y sus demostraciones estarían fundamentados ante todo en la *práctica* matemática, que él analizó en detalle, y en la *construcción de conceptos* en la *intuición pura*. Como Friedman (1992, 80) acertadamente pone de relieve, aunque errando en su valoración, esto supone una *restricción* que separa la Matemática de la Lógica. Para Kant *la Matemática es algo más restringido* (Sutherland, 2005, 145) que requiere una *experiencia* que él describe con el mecanismo de la intuición, y que es lo que hace que los enunciados matemáticos sean *sintéticos a priori* y no *analíticos*, como serían para Kant si éste considerara la Matemática como una ciencia de conceptos *posibles*. Kant distingue claramente, en relación con la posibilidad de un concepto, entre dos nociones: su concebilidad (que el concepto sea concebible, pensable; hoy podríamos decir consistente) y su posibilidad real (BXXVI n). Y lo que se requiere para su posibilidad real es que pueda ser dado en la experiencia (A220/ B268), (A223/ B271), (A240/ B299), (A157/ B196), (A84/ B116), (A221/ B268), (A731/ B759), (A729, B757). Su construcción esta dominada por las limitaciones de la *aplicabilidad* de una teoría matemática, y *la experiencia de un objeto sensible* (en este caso, la construcción de un concepto en la intuición) es sustantiva para que se pueda hablar de *conocimiento matemático* y, por tanto, de manipulación consciente y dirigida de la realidad, es decir, de *aplicabilidad* (Lenhard, 2006, 301), (Sutherland, 2005, 145). Otte (2003, 183 y 203-207) y Lenhard (2006, 302-305) enfatizan este aspecto de la importancia de la aplicabilidad en la concepción de la Matemática en Kant y en el rol que en él juega la intuición, considerando la Matemática como una *práctica* orientada a la resolución de problemas (Polya, 1945 y 1956), (De Guzmán, 1977).

Otro aspecto en relación con la filosofía de la Matemática de Kant tiene que ver con su concepción de la *demostración matemática*. Gran parte de las lecturas interpretativas contemporáneas de la filosofía de la Matemática de Kant están fuertemente influenciadas por la lectura logicista del tópico desarrollada por Bertrand Russell a comienzos del siglo XX. Pero la falacia en el argumento de Russell (1903, 3, 458, 432-461) y de Friedman (1992, 55 y 80) radica en que la negación de “el *razonamiento* matemático es diferente del de la lógica” no es “el razonamiento matemático no requiere ningún elemento extra-lógico”. El razonamiento matemático es un razonamiento lógico, pero requiere de elementos extralógicos. El punto de vista de Russell y Friedman y, específicamente, en relación con la noción de demostración en la Matemática moderna, es actualmente cuestionable desde muy diversas perspectivas, lo que nos lleva a considerar ese punto de vista como obsoleto (Avigad, 2005), (Leitgeb, 2009, 268), (Feferman, 1988a, 1993a, 2000, 2012a). Se puede establecer de hecho una conexión entre estas reflexiones modernas sobre la naturaleza de la matemática y sus razonamientos (que, en el fondo, están ligadas a consideraciones *semánticas* e *intuitivas* relacionadas con un *objeto* y con la *práctica* matemática) y la filosofía de la Matemática de

Kant, dándole una nueva perspectiva. El papel que Kant asigna a la intuición en la Matemática, por oposición a la Filosofía, queda claro en (A716-717/ B744-745), (A716/ B744) y en (A714-715/ B742-743). Además, parece también claro que Kant no se refiere tanto al mecanismo de prueba sino a la *consideración del concepto* y, en ese aspecto, la consideración que sería propia de la matemática, la construcción de una representación de la intuición *a priori* de ese concepto, parece muy ligada en muchos pasajes de Kant a su concepción de la "definición" (Kim, 2006, 156-162). La concepción de Kant de *definición matemática* difiere radicalmente de la concepción de la Matemática moderna después de la revolución del siglo XX (Alexandrov, 1970, tomo I, 89). La Matemática moderna evita sistemáticamente las definiciones directas, y en ella las definiciones de los objetos son indirectas, relacionales. Estas características definitorias de la Matemática moderna no eran claramente percibidas a principios del siglo XX, cuando se imponía la visión de Russell (1903, 3) de que "pure mathematics is the class of all propositions of the form '*p* implies *q*', where *p* and *q* are propositions containing one or more variables, the same in the two propositions, and neither *p* nor *q* contains any constans except logical constants". Opinión que confundió a muchos autores sobre la naturaleza del cambio experimentado.

2.- La filosofía de la Matemática de Hilbert, su noción de intuición y su relación con Kant.

2.1.- La reivindicación por Hilbert de la epistemología kantiana. La consideración general sobre Hilbert en el siglo XX era profundamente errónea y el supuesto formalismo atribuido a Hilbert es un inmenso error interpretativo del siglo XX. Varios autores han llamado recientemente la atención sobre el hecho incontestable de las numerosas referencias directas de Hilbert a Kant, que han sido sistemáticamente ignoradas durante años por filósofos y matemáticos (Majer, 1995, 271), (Brading & Ryckman, 2008, 7), (Corry, 2002, 38), (Peckhaus, 1990). Las referencias a la epistemología kantiana y en particular a la intuición se reiteran en prácticamente todos los trabajos de Hilbert que hemos considerado. Se detecta un cambio radical en su actitud filosófica a raíz de sus discusiones epistolares con Frege (1905-1906); a partir de aquí su *programa* se plantea como una fundamentación conjunta de la Matemática, la Aritmética y la Lógica, y promociona activamente el desarrollo en Göttingen, no sólo de su escuela matemática, sino de una escuela filosófica neokantiana (Peckhaus, 1990).

2.2.- ¿Kantiano o neokantiano? Hilbert no sólo reivindica expresamente la epistemología kantiana, sino que coincide con Kant en muchos aspectos. Además, en otro sentido era también un neokantiano *sui generis* que aborda las nuevas perspectivas de la Matemática desde una base que él consideraba kantiana. Aunque sus trabajos los desarrolló bajo la perspectiva de la *autonomía de la Matemática*, fue consciente de la necesidad de encontrar un *fundamento filosófico* a esa actividad. Y, además, lejos de ser el paladín del *formalismo*, en sus trabajos la *intuición* tenía un rol fundamental. Si tenemos en cuenta que se suelen denominar *neokantianos* a los movimientos que reivindicaron a partir de 1900 "un regreso a Kant" desde premisas filosóficas bien definidas, como es el caso de la Escuela de Göttingen que promocionó el mismo Hilbert, nuestra conclusión coincide con la que Peckhaus (2014) aplica a Frege respecto al mismo problema. Hilbert no fue en realidad un *neokantiano*, ni se sometió a condicionamientos filosóficos de escuela alguna. Fue un *kantiano ecléctico*, que interpretó desde su propia perspectiva la teoría cognitiva de Kant y la asumió en parte y la desarrolló *dentro* de las exigencias que planteaba su propio *programa matemático*. Nuestro estudio de David Hilbert parte de su concepción diferenciada entre Geometría, Aritmética y Lógica, a las que caracteriza inicialmente, en sus objetos y métodos, de forma muy análoga a la de Kant. Pero su desarrollo supera ampliamente, aunque casi nunca de forma contradictoria, los planteamientos de Kant. Su distinción entre *inhaltliche Mathematik* y *formale Mathematik* nos permite plantear que Hilbert una concepción compleja de esta disciplina y que en algunos aspectos no estaba de acuerdo con Kant, e incluso desbordaba el análisis kantiano.

2.3.- La noción de intuición en Hilbert. Hemos podido distinguir en Hilbert dos usos bien diferenciados de la noción de *intuición*. Hay un primer uso que aparece esencialmente en su fundamentación de la Aritmética. Parte de unas formas, dispuestas en el espacio, sin significado (esto es, sin que opere el entendimiento), que conoceríamos intuitivamente, y que nos darían la intuición de sucesión (o tal vez la intuición de número entero). Se trataría de la intuición de "lo discreto" y coincidiría plenamente con la intuición en la que basa Kant la Aritmética, y el acuerdo entre ambos pensadores en ese campo sería máximo. Contra lo que generalmente se afirma y, en particular, contra la interpretación de Brouwer, se puede afirmar que para Kant el tiempo no es *la* forma característica de intuición en la Aritmética. El tiempo sería para Kant típico de todos los fenómenos de movimiento o de cambio en general, y Kant lo asociaría específicamente a la Mecánica pero no a la Aritmética (Friedman, 1992, 72-80 y 84-89), aunque, como toda otra actividad humana, ésta se desarrollaría *en* el tiempo (Majer, 1995, 266-268). Hilbert y Kant concuerdan en que la Aritmética comienza con, o tiene su origen en, la intuición en base a objetos absolutamente concretos que permiten proposiciones singulares como "2+3=5" y no tiene su base en proposiciones generales o leyes. Según Hilbert, estas proposiciones expresarían "cuestiones de hecho" y no verdades lógicas o relaciones conceptuales. Hay una concordancia total entre los dos autores en el carácter no axiomático de los enunciados de la Aritmética elemental, y en que se remiten a una noción de intuición tal y como la hemos descrito en los usos 1, 2, 3 y 4 de Kant en la *Estética Transcendental* (Hilbert, 1922, 164), (A164, B204), (Majer 1995, 268). Pero Hilbert da un paso más y crea un segundo tipo de proposiciones, dentro de un sistema axiomático y mediante la introducción de *elementos ideales*, y convierte la Lógica y toda la Teoría de Números (incluyendo los transfinitos) en una colección de fórmulas ininterpretadas donde la *verdad* de una fórmula (enunciado) se identifica con la *derivabilidad* a partir de los axiomas, y las propias demostraciones serían estructuras de signos dispuestos en el espacio, figuras [Figur], que se reconocerían intuitivamente, entendiendo por intuición ese reconocimiento no discursivo de formas que ya presentaban los signos numéricos originales, asumiendo así también en esta *extensión* de la teoría la noción de intuición kantiana. Para Hilbert la verdad no se identifica totalmente con la derivabilidad, puesto que si elimináramos los elementos ideales, no debería introducirse ninguna contradicción en el dominio original. Por tanto, la noción de *consistencia* es para él esencial. Con este mismo enfoque fundamenta la Lógica Matemática. Esta sería también la noción de *intuición* de su *programa finitista* para la Metamatemática entendida como una teoría matemática; se podría hablar pues en relación con la noción de intuición asumida por Hilbert tanto en su Aritmética transfinita, como en la Lógica y como en su *programa finitista*, siguiendo a Falkenstein en su interpretación de Kant, de *intuicionismo formal*, aunque en estas concepciones de Hilbert sería más correcto introducir un matiz y denominarlo *formalismo intuicionista*. Pero Hilbert tiene también otro sentido más profundo de la intuición. Para él la razón última de los sistemas formales es salvar, preservar y justificar las teorías clásicas preexistentes, si bien algo modificadas, y en particular la teoría de Cantor.

2.4.- La intuición en la Matemática de Hilbert y sus diferencias con Kant. Otros usos de la intuición en Hilbert se refieren a la Geometría y a la Matemática en general. Su visión general de las Matemáticas le lleva a sostener una visión de la intuición más general incluso (o distinta) de la que la que aparecía en el discutible sentido 5 de la intuición kantiana y probablemente relacionada con su lectura del *a priori* kantiano que consideraba sobredimensionado por Kant, visión que en mi opinión desbordaría el enfoque epistemológico de Kant para concordar más bien con un cierto platonismo o tal vez, como sostiene Corry (2002, 2004 y 2006), con un empirismo o, como sostiene Majer (1995), relacionada con una interpretación fenomenológica conexa con la de Husserl.

Hay una diferencia sustancial entre las nociones de *intuición* de Hilbert en la Aritmética y en la Geometría, que Hilbert mismo no plantea explícitamente, y cuya causa quizás haya que buscarla en el diferente status que Hilbert asigna a sus respectivos objetos. La Geometría sería una ciencia esencialmente *axiomática* para Hilbert, en primer lugar por la razón de que "está suficientemente desarrollada" y es posible realizar un "análisis lógico" de su estructura teórica, como en "cualquier ciencia suficientemente desarrollada". Pero además, por oposición a la Aritmética en la que "los objetos extralógicos" están dados por la intuición sensible de las *formas*, los "objetos extralógicos" de la Geometría se "construyen" en la intuición pura y son definidos por los "grupos de axiomas". Este método de elegir "grupos de axiomas" que de hecho no lleva al sistema axiomático lógicamente más económico, sólo se puede explicar por la atención que Hilbert presta a las características intuitivas del "objeto". Hay pues, en mi opinión y contradiciendo el análisis de Majer (1995), una abierta ruptura entre la concepción de Hilbert de la Aritmética (también en su expresión axiomatizada referente a la Aritmética no elemental) y la de la Geometría.

Existen muchos pasajes en los que aboga por una tercera visión de la intuición en la Matemática en general en la que parece rebasar el marco kantiano, y más aún su noción de *intuición de formas* (Hilbert, 1926, 171). ¿Qué es exactamente para Hilbert ese "objeto dado en la intuición"? Parece que esos *objetos extralógicos* "dados previamente a todo entendimiento en la representación" deben entenderse desde una lectura fenomenológica, a menos que consideremos que son objetos puestos por el pensamiento, dando así legitimidad a lo que llamábamos el 5º sentido de la intuición en Kant que, como vimos, era harto discutible y conflictivo en el mismo Kant. Aunque también podría sostenerse como muy verosímil que Hilbert hace la lectura hegemónica de la tradición del idealismo alemán e interpreta la intuición kantiana como una especie de facultad psicológica extralógica que permitiría "ver inmediatamente" el objeto en que consistiría "la cosa en sí". Hay muchos pasajes que avalarían esta interpretación y, en particular, su lectura del "a priori" kantiano que él mismo considera (bajo esa interpretación) sobredimensionado por Kant y que justificaría su reivindicación empiricista y experimental, al rechazar tal uso del apriori en muchos temas, aspecto que destaca Corry (2002 y 2006) como fundamental en el enfoque cognitivo de Hilbert.

2.5.- La concepción de Hilbert de la Geometría. Hilbert incorpora la noción de Geometría de Kant y su concepción de la intuición, pero las amplía considerablemente. En la Geometría hay una concordancia inicial entre Kant y Hilbert, y en eso concuerdan tanto Corry como Majer, así como nuestro análisis. Aunque luego Hilbert distingue entre dos nociones de Geometría, planteando una discrepancia con Kant. En primer lugar, para ambos la Geometría se fundamenta en "nuestra intuición espacial" y, en segundo lugar, para ambos la Geometría Euclídea tiene un rol especial ligado a nuestra forma de percibir (o de intuir). Así, en la misma Introducción de los *Grundlagen* afirma que "die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus" (Hilbert, 1899, 1). En Kant la posición, como vimos, era análoga (B40-B41). Esto significa que, de acuerdo con Kant, la Geometría Euclídea es una ciencia sintética a priori del espacio precisamente porque es la teoría de nuestra intuición externa referida a los objetos. Y por tanto en ese sentido la relación epistemológica entre geometría, intuición y espacio es exactamente la misma para Kant y Hilbert a este nivel (Mayer, 1995, 272). Pero a continuación Hilbert distingue dos clases de Geometría – y aquí se separa de Kant-, y a ambas las considera como estructuras matemáticas *interpretadas*, pero en un diferente sentido: la primera la considera interpretada mediante el recurso a la intuición anclada en la *Lebenswelt*; la segunda llega a ser interpretada a través de experimentos controlados y mediciones precisas resultantes en cierta forma de un refinamiento y una *objetivación de la intuición* enraizada en la *Lebenswelt*. Se elige el término *Lebenswelt* porque Hilbert quiere significar algo totalmente similar a lo que Husserl describe con esa expresión en su obra *Die Krisis der Europäischen Wissenschaften und die Transzendentale Phänomenologie* al distinguir entre la concepción común del espacio y el tiempo en la *vida cotidiana* y la concepción *científica* del espacio y el tiempo (Majer, 1995, 280). Hilbert ya en 1891, en su época de *Privatdozent* en Königsberg, sostenía una concepción análoga en su conferencia *Projektive Geometrie*. Y análogamente en su conferencia de 1898 *Elemente der Euklidische Geometrie*. Hilbert va más allá y, por una parte, sostiene que esta Geometría de la *Lebenswelt* sería la base de todas nuestras acciones prácticas y, de alguna forma, sería también el *presupuesto epistémico* del mismo desarrollo de la teoría de la relatividad (Hilbert, 1921, 20 y 30-31), (Majer, 1995, 274-275). Así, coincide con Kant cuando supone que la concepción del espacio-tiempo en la que radica el *Lebenswelt* radica en un tipo de *constante antropológica* que es, en su mayor parte, independiente de los desarrollos de la ciencia (Majer, 1995, 278). Sin embargo, mientras que para Kant las *formas subjetivas* de la sensibilidad eran simultáneamente las *condiciones objetivas* de la percepción de objetos y la condición central para la posibilidad de conocimiento, Hilbert se separa de Kant y sostiene que el objetivo de la ciencia es liberar nuestra cognición de las meras condiciones subjetivas de la sensibilidad y tratar de lograr una *cognición objetiva* independiente de las *condiciones subjetivas* del observador (Hilbert, 1921, 13). Y aquí estaría la causa de la distinción de los dos tipos de geometría y el origen del desarrollo de un posible enfoque fenomenológico por Hilbert (Majer, 1995, 275-280). Por otra parte, existe una cierta compatibilidad entre la interpretación fenomenológica de Husserl y una interpretación empirista de una teoría científica, como se ve al analizar las diferencias y similitudes entre la aproximación de Husserl y la concepción semántica de cuño empirista de Sneed & Balzer & Moulines y van Fraassen (Mormann, 1991, 73 y ss). De forma que esto podría explicar que un enfoque no empirista como el de Hilbert pueda ser interpretado como empirista, como hace Corry. Y también podría explicar que pueda haber una coincidencia parcial entre un análisis fenomenológico (supuesto) como el que Majer atribuye a Hilbert y un enfoque desde el empirismo lógico como el de Einstein, coincidencia que resalta el mismo Majer. Porque Einstein también distingue entre dos clases de Geometría, aunque desde un punto de partida epistemológico muy distinto. Sugiere dividir la Geometría en una "Geometría puramente axiomática" que sería una ciencia *lógico-formal*, esto es, no interpretada en absoluto y, en particular, no intuitiva, y una "Geometría *práctica"*, interpretada por coordinación de los objetos reales con los términos geométricos. La primera pertenecería exclusivamente a la lógica formal mientras que la segunda sería una ciencia natural de la que opina que podemos considerarla como una de las más viejas ramas de la Física (Einstein, 1921, 6). El enfoque epistemológico de Einstein radica en su adscripción al empirismo lógico (Majer, 1995, 261). Así, cuando Einstein analiza la axiomatización realizada por Hilbert de la Geometría (Einstein, 1921, 4), podemos observar el carácter que le asigna, tan distinto del de el propio Hilbert que hemos expuesto. Sin embargo, a pesar de la diferencia de enfoques, ambos coinciden en distinguir dos clases de Geometría y en otorgar a una de ellas el carácter de *ciencia natural*. Si ignoramos los diferentes puntos de partida epistemológicos, Hilbert y Einstein concuerdan de nuevo en que la Geometría es en parte una ciencia *natural* basada en experimentos y medidas reales. En efecto, también Hilbert manifiesta en *Naturerkennen und Logik* exactamente lo mismo que Einstein: la Geometría no es nada más que una rama de la Física; una verdad geométrica cualesquiera en nada difiere de las verdades físicas, ni son de una naturaleza diferente (Hilbert, GA tomo III, 962).

2.6.- Aritmética y Lógica en Kant y Hilbert. El *programa finitista*, sus objetivos y su vigencia actual. Existen aspectos en los que Hilbert está muy próximo a Kant. Como vimos, sus concepciones de la Aritmética elemental son idénticas, así como sus consideraciones de la noción de intuición en este campo, y también sus concepciones del infinito. Aunque en Hilbert el desplazamiento en estos campos, y especialmente en la Lógica Matemática, del foco principal al *lenguaje* es evidente, y en este enfoque la *intuición de formas* prioriza el aspecto sintáctico del lenguaje, intentando así esquivar los aspectos semánticos que resultan problemáticos cuando hablamos de *conjuntos infinitos* como los números reales o la teoría de números transfinitos de Cantor. En base a esto, y a su fe ciega en la solidez de la Lógica Matemática construida entre 1850 y 1910, planteó el *programa finitista* (*Beweisstheorie*) como una respuesta que él creía válida a la *crisis fundacional* de los años 20. Era una propuesta de *justificación* lógica de las teorías matemáticas, y por tanto con implicaciones claras filosóficas, que pretendía justificar el *corpus* básico de la Matemática clásica y moderna, cuya validez estaba sin embargo para él fuera de toda duda independientemente de esa justificación. Partía de aceptar como válida la lógica con operaciones *finitas* y pretendía construir progresivamente dominios de *elementos ideales* que conservaran esas propiedades lógicas y demostrar *progresivamente* la *consistencia* de las teorías así construidas hasta dominios transfinitos.

2.6.1.- Fracaso en sus términos originales. Nuestro estudio demuestra que con sus planteamientos iniciales puede considerarse fracasado puesto que, de un lado, y tal y como sostienen consecuentemente los finitistas radicales, reduce la Lógica Formal al cálculo de conectivas y la noción de *demostración formal* a su equivalente de *computabilidad*; y de otro, permite demostrar las limitaciones de cualquier sistema formal para *expresar* una teoría matemática (Gödel). Con lo cual el *gap* entre la *inhaltliche Mathematik* y la *formal Mathematik* que él pretendía salvar con su programa no sólo se mantiene, sino que se agranda. Las investigaciones posteriores en la dirección del *programa finitista*, aunque con éxitos parciales, no han conseguido un avance sustantivo en 80 años.

2.6.2.- Éxito de sus planteamientos metodológicos. El *programa finitista* y, más en general, el conjunto de las aportaciones de Hilbert y de su escuela, pueden considerarse sin embargo un éxito rotundo en otros aspectos colaterales nada desdeñables y, tal vez, más fundamentales que el *programa finitista* en sí, que en el fondo no era más que *una* propuesta a partir de una *metodología* y de una *epistemología* de la Matemática. Primero, las distinciones que Hilbert estableció (por ejemplo, entre Matemática y Metamatemática, o entre FOL y SOL) han sido asumidas como una acotación del campo de juego común en todos los enfoques de la disciplina. Segundo, la exigencia de rigor lógico, unido a una formalización más o menos profunda es ya una exigencia compartida en todas las disciplinas matemáticas, con independencia de las limitaciones, que se sabe que existen, de los métodos formales. Tercero, sus métodos establecen en primer lugar la *autonomía* de la Matemática respecto a toda prescripción filosófica o epistemológica. Todo ello, por una parte invalida desarrollos como los de Brower o Russell que se fundaban en una exigencia filosófica ajena a la *práctica* científica de los matemáticos y, por otra parte, su inspiración clara en la epistemología de Kant deja abierta la puerta a un nuevo enfoque de la fundamentación de la Matemática desde un punto de vista *naturalista* (Franks, 2009): una fundamentación, por así decirlo, *a posteriori*, que describa la *práctica* matemática y sus procesos cognitivos, pero apoyada en la teoría cognitiva de Kant.

2.6.3.- Un programa basado en el infinito potencial. Las investigaciones de Gentzen y Gödel abren las puertas a una generalización del *programa finitista* basado, en lugar de la aceptación exclusiva de la lógica y los métodos finitos, en la aceptación del *infinito potencial*. Estas investigaciones iniciales demostraron su éxito, pero no ha habido grandes desarrollos posteriores desde 1950 (Hilbert & Bernays, 1934, v), (Gentzen, 1936 y 1938), (Gödel, 1940 y 1958), (Ladrière, 1969, p.194, p.200 y 405-407), (Suppes, 1972, 195), (Bourbaki, 1972,70), (Zach, 2003), (Niebergall & Schirn, 2001) (Franzén, 2005), (Kaye, 2007) y (Smith, 2007).

2.6.4.- Limitaciones de los sistemas formales y los dominios *extensionales* e *intensionales*. La distinción planteada por Solomon Feferman (1960) entre los dominios *extensionales* e *intensionales* destaca la dificultad que plantea una "aritmetización" que capture las propiedades *intensionales*. Es, en realidad, una problemática paralela a la contradicción latente en Hilbert entre su *inhaltliche Mathematik* y su *formal Mathematik* y que Hilbert no logró superar, y también relacionada con las objeciones que puso Frege en su debate epistolar con Hilbert a la demostración *formal* de existencia y en donde resaltaba la importancia de las "reflexiones o conceptos de segundo orden" en los razonamientos matemáticos. Las investigaciones posteriores han clarificado la temática, pero no han hallado una solución efectiva (Franks, 2009, 118), (Feferman, 2011 y 2012b), (Detlefsen, 1986), Kreisel (1958) y (Pudlák, 1985 y 1996), por lo que las dificultades intrínsecas de cualquier sistema formal para capturar propiedades esenciales de ciertos sistemas matemáticos con propiedades *intensionales* parecen ser un hecho probado (Ladrière, 1969).

2.7.- La Lógica y sus relación con la Matemática. Logicismo y Formalismo. Una conclusión fundamental, que se reitera en distintas partes de este trabajo, es que existe una diferencia fundamental entre Lógica y Matemáticas, tanto en sus *objetos* como en sus *métodos*, por lo que sería imposible la pretensión de *fundamentar* la Matemática en la Lógica. Por un lado, la aportación de Hilbert es fundamental para el desarrollo de la Lógica Matemática moderna, siendo su obra conjunta con Ackermann *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928) el primer libro moderno de Lógica y el primero que establece la distinción entre FOL y SOL. Además, el desarrollo de su *programa finitista*, independientemente del éxito de sus objetivos, sentó las bases y el marco de los desarrollos de Gödel, Genzen, Löwenheim, Skolem y otros. El formalismo de Hilbert en sus desarrollos de Lógica coincide con la concepción de Kant en esta materia, que Kant consideraba también cerrada en su tiempo, aunque limitada a la silogística aristotélica. En nuestro estudio se establecen también claramente las diferencias entre la filosofía de la Matemática de David Hilbert y la de las distintas versiones del formalismo en Matemática (Felix Hausdorff 1903 y 1904, Nicholas Bourbaki 1958 y 1972, Hashkel Brooks Curry 1951). Se detecta una fuerte tendencia en la escuela de Hilbert a considerar la Lógica de conectivas como la única parte que en propiedad pertenece a la Lógica. Hermann Weyl parece haber sido el primero que en su trabajo *Das Kontinuum* (Weyl, 1918) etiquetó las deducciones cuantificacionales como "inferencias transfinitas" (transfinite Schlussweisen). El propio Hilbert prestó atención a los procedimientos del pensamiento que llevan de una "lógica finita" a los enunciados de "nuestra matemática usual", concluyendo que "Obviously already with the use of the concepts 'all' and 'there is'." (Hilbert, 1923, 181). Intentó evitar esta problemática con la introducción del símbolo τ, posteriormente sustituido por ε, y con el desarrollo del ε-cálculo como una alternativa al uso de cuantificadores. La selección de las partículas del lenguaje que determinan la Lógica, su interpretación y la determinación de los objetos a los que se aplican no son temas técnicos automáticamente evidentes; están íntimamente ligados al lenguaje en el que se expresan y a la misma noción de lo que se entiende por Lógica. Además de con la progresiva distinción entre conectivas y cuantificadores, esto es particularmente ilustrativo con la cópula "es" (Quine, 1940), (De Morgan, 1858), (Tarski, 1936 (1956), 418-419).

2.8.- El *constructivismo* en la filosofía de Kant y Hilbert. El *constructivismo* en Matemáticas. El tema está relacionado con el posible *constructivismo* de la filosofía de la Matemática de Kant que mantienen algunos autores, en particular Brouwer, quien reivindicaba la inspiración de sus tesis en Kant. Vemos que esta concepción es totalmente incompatible con nuestro análisis. Brouwer rechaza cualquier rol para la intuición del espacio (que para Kant y Hilbert era fundamental) e interpreta la intuición del tiempo como una intuición del movimiento, mientras que para Kant y Hilbert sería una intuición de lo discreto. Queda claro en nuestro trabajo que Hilbert no era en modo alguno un constructivista (en el sentido de Brouwer) y Kant tampoco. Ello nos lleva a una discusión sobre los distintos significados de la noción de *constructivismo* en la Matemática y a la conclusión de que la *construcción en la intuición* que Kant exige como determinante para una teoría Matemática tiene un significado totalmente distinto al de Brouwer y relacionado con la *construcción de conceptos* (Cassirer, 1907 y 1910), (Ferreirós, 2007) y (Heis, 2008 y 2011).

3.- Valoración de la vigencia actual de las filosofías de la Matemática de Kant y Hilbert y de sus nociones de la intuición.

3.1.- Las fronteras de la Lógica. Los sistemas lingüísticos formales construidos por la Lógica Simbólica parten de una selección de partículas del lenguaje natural, una reflexión sobre sus usos y una segunda selección de esos usos. Observando el amplio recorrido histórico y crítico que hemos realizado por los desarrollos realizados en los últimos 150 años en la Lógica standard y de las no-standard, podemos destacar unos pocos casos singulares que poseen unas características distintas de las de la mayoría. Se trata de la lógica difusa, las lógicas no monotónicas y las redes neuronales, así como teorías conexas como los sistemas expertos, la teoría de la probabilidad y la estadística, la inteligencia artificial y la teoría de la información. Todos estos campos presentan varias características comunes: han sido desarrollados fundamentalmente en los últimos 60 años; no surgen del universo standard de discusión en el que se movía la Lógica hasta ahora; todos ellos, aunque no existe una teoría unificada que los englobe, apuntan en una misma dirección: a sistemas (o máquinas) que son capaces de aprender, es decir, que son capaces de modificar sus propias reglas de funcionamiento y decisión según la respuesta del entorno (y/o según sus propias conclusiones lógicas) incluyendo en el concepto “entorno” a sus propios mecanismos de funcionamiento, que pueden por tanto ser analizados por ellos mismos; y además han conseguido rápidamente aplicaciones prácticas. Estas últimas líneas de investigación representan lo que podríamos denominar *la frontera de la Lógica*. Todas estas lógicas no-standard han logrado rápidamente un amplio espectro de aplicaciones incluso en campos específicos de carácter teórico de la Matemática, la Aritmética y la Metamatemática (Mortensen, 2013), (Brady, 2005), (Restall, 2007), (Meyer, 1976), (Meyer & Mortensen, 1984), (Priest, 1997 y 2000), (Hatcher, 1982). En lo que se refiere a las perspectivas, el escenario más probable en base a la información que hemos descrito en el trabajo es que dentro de aproximadamente 15 años estemos hablando de este tema desde un plano totalmente distinto. El programa HBP (*Human Brain Project*), el programa BI (*Brain Initiative*), además de otros programas de consorcios privados, como los programas que está desarrollando IBM, junto con la probable convergencia y estrategia cooperativa de todos estos programas, va a cambiar previsiblemente muy radicalmente todos los estudios en las ciencias cognitivas, en la neurología, en la computación y en la Lógica.

3.2.- los desarrollos matemáticos y científicos de los últimos 60 años ¿Qué es una *teoría científica* desde un punto de vista kantiano? En nuestra investigación abordamos algunas importantes teorías científicas que se han desarrollado y/o consolidado en los últimos 60 años, muchas en íntima conexión con las lógicas aquí analizadas: la Termodinámica, la Teoría de la Información, la Teoría de Supercuerdas, la Mecánica Cuántica, la Estadística Bayesiana, la Teoría de la Probabilidad y la Teoría de la Posibilidad. El debate en torno a estas teorías sólo refleja la complejidad intrínseca que han alcanzado las representaciones mentales que ha desarrollado el ser humano para *comprender* y *manipular* la realidad, de forma que una actividad humana primitiva determinada en primera instancia por una capacidad cognitiva innata, cual es la *actividad matemática* que se expresa desde tiempos inmemoriales por medio de la *medición*, ha alcanzado el grado de complejidad que corresponde a la medición de los efectos de los objetos que postulan esas representaciones, objetos que tienen una *forma de existencia* muy distinta a la de los objetos de nuestro entorno cotidiano. Desde un punto de vista kantiano, la *medición* de los *objetos* o de las *interacciones* entre los objetos postulados por una teoría científica es esencial para asegurar su carácter científico. Medición que está ligada a la capacidad *predictiva* del modelo teórico y, por tanto, a su *aplicabilidad*; superando así el mero carácter de *adecuación empírica* que los modernos antirealistas le asignan (Van Fraassen, 1980). Y lo que es más importante: el esquema operativo de la Matemática es *invariante* en la Matemática moderna y en la Matemática de Euclides, pues se basa en el desarrollo de las mismas facultades cognitivas, de los mismos supuestos epistémicos y de la misma lógica; es lo que hemos denominado la *identidad de la práctica matemática*. Esto nos lleva a preguntarnos por la naturaleza de la *explicación científica del mundo*. La teoría llamada *unificacionismo* (Michael Friedman, 1974 y Philip Kitcher, 1981 y 1989) y su interpretación posterior desde un enfoque *naturalista* (Kitcher, 1984, 1988 y 2005) se ajusta bien a las conclusiones de nuestro estudio. Finalmente, hemos sacado una conclusión relevante para nuestro trabajo: muy probablemente Hilbert tenía una concepción de la ciencia muy cercana o coincidente con la llamada *unificacionista* y, además, de un marcado carácter *naturalista* (Franks, 2009). Y ese es el marco en el que debe entenderse su producción científica. Esto explicaría muy bien algunas de sus manifestaciones sobre las teorías científicas y su noción de la “armonía preestablecida”.

3.3.- Aplicabilidad y fundamentación naturalista. La noción de *aplicabilidad* está muy ligada a la observación de la *práctica* de la comunidad matemática, que desempeña un papel clave en las recientes aproximaciones *naturalistas* a la fundamentación de la Matemática. La noción de *epistemología naturalizada* fue acuñada por Quine (1969, 69) y llevada a la Filosofía de la Matemática con distintas perspectivas por (Otte, 1998), (Kitcher, 1984 y 1988) y (Maddy, 1998) entre otros. Se pueden buscar otros antecedentes. Hilary Putnam (1964, 295) argumentaba a favor de un punto de vista pragmático en las reflexiones sobre los fundamentos de las Matemáticas. En sus argumentaciones se desliza varias veces la comparación con la ciencias empíricas (Putnam, 1964, 297), (Kitcher, 1988, 288), (Kitcher, 1984, 96) y (Kitcher, 1984, 271). Puede verse también en Kitcher una fuerte conexión con el tradicional empirismo anglosajón. Muchos de sus argumentos recuerdan las argumentaciones de John Stuart Mill en su obra *A System of Logic* (Mill, J.S., 1843), donde intentaba argumentar que la Matemática sería, esencialmente, una ciencia empírica. Lenhard no parece querer ir tan allá en esa dirección. Se limita a sugerir que el punto de partida de Kant de un concepto de intuición fijado *a priori* debería ser sustituido por un concepto de intuición “naturalizado” (Lenhard, 2006, 301). Aunque no aporta ninguna indicación de qué exactamente querría decir eso y menos aún desarrolla tal concepto, es el primero que sugiere que existiría alguna forma de conexión entre la filosofía de la Matemática de Kant y los modernos intentos de desarrollar una epistemología *naturalista* de la Matemática. Nuestro trabajo apunta reiteradamente a la posibilidad de desarrollar una epistemología *naturalista* de la Matemática, basándose en parte en la teoría cognitiva kantiana, en la noción que aquí hemos justificado de *identidad de la práctica matemática* y, por otro lado, en algunos análisis recientes en esa dirección (Pacho, 1993, 1995 y 2009), (Maddy, 1990, 1997, 2007), (Kitcher, 1984, 1988, 1994).

3.4.- Lógica, Matemática, Pensamiento Visual y Lenguaje. Nuestro estudio demuestra la tesis de que no existe de hecho una ruptura entre la *práctica* matemática de Euclides y su *lógica*, en la que se basó la filosofía matemática de Kant, y la moderna. Los actuales análisis presentan una tendencia que representa el regreso a lo visual, y que podemos considerar como un *cambio en el estilo matemático* (Mancosu, 2005). Además, en su conjunto suponen un reforzamiento considerable de nuestras conclusiones sobre Kant y Hilbert y acerca de la validez de la teoría cognitiva kantiana para explicar la ciencia actual. Los estudios realizados en los años 90 por diversos neurólogos (Kosslyn 1975, 1980 y 2005, Kosslyn & Koenig, 1995 y Kosslyn & Ganis & Thomson, 2001, 2006a y 2006b) pretendían dar una base científica –más allá de un enfoque psicológico- al debate abierto en los años 70 por Pylyshyn (1973, 1981, 2002 y 2003), y que dieron lugar a una controversia centrada en la naturaleza de las representaciones internas que subyacen a la experiencia de visualización (Tye, 1991), conocido como *the imagery debate*. Es este un campo en el que se entrecruzan investigaciones de psicología, AI, simulaciones por computador, neurología, lógica y lingüística. Parece que todos los estudios empíricos avalan la tesis de Kosslyn (Reed, 2010), (Brant, 2013). Todo ello ha incrementado el rol que se asigna a estas actividades mentales en los procesos cognitivos (Kosslyn, 1994, 1). El trabajo empírico que permite ya la descripción exacta de cómo operan las transformaciones admisibles en ese lenguaje y su asociación con la actividad de regiones cerebrales concretas, así como su traducción a un lenguaje computacional y las consiguientes simulaciones por ordenador ha sido gigantesco en estos últimos 15 años y, en gran parte, determinan ya la evolución de la discusión (Brant, 2013), (Eysenck & Keane, 2005), (Gazzaniga & Ivry & Mangun, 1998) y (Kosslyn, 1994 y 2005), y desde un punto de vista esencialmente epistemológico en (Giaquinto, 2007 y 2008), (Mancosu 2005 y 2008), (Manders, 2008) y (Thomas, 2010). Para algunos autores se trataría sólo de los primeros pasos para el desarrollo de una teoría de la *imaginación humana* (Thomas, 1999 y 2010), (White, 1990; Brann, 1991; Finke et al., 1992; Thomas, 1997a,b, 1999a,b, 2006; Kind, 2001; McGinn, 2004; Blain, 2006), (Arp, 2005 y 2008). En definitiva, podemos resumir diciendo que todas estas perspectivas consisten en un intento de profundizar en la noción de *representación* (el omnipresente y multisemántico término kantiano de *Vorstellung*), asumiendo que el pensamiento humano opera con *representaciones* de objetos y conceptos pero que esas *representaciones* deben considerar no sólo las clásicas que se corresponden en un discurso verbal (o en los lenguajes escritos o formales de origen verbal) con *proposiciones* sino también, y muy fundamentalmente, con *representaciones* basadas en *imágenes mentales* y procesos visuales. Apoyándose explícitamente en estos desarrollos de las ciencias cognitivas, se han desarrollado muy recientemente varios estudios específicamente epistemológicos centrados en el rol de las imágenes mentales y visuales en la Matemática (Mancosu 2005 y 2008, Giaquinto 2007 y 2008, Miller, 2001 y Manders 2008), y basándose en éstos un grupo de investigadores de la *Carnegie Mellon University* han logrado codificar la sintaxis y semántica visual de los *Elementa* de Euclides y traducir sus razonamientos a un lenguaje formal de primer orden y, finalmente, se ha desarrollado un programa de ordenador que realiza en un lenguaje formal los razonamientos diagramáticos y visuales de los *Elementa* reproduciendo así por computación las demostraciones de Euclides, pero ahora traducidas a un lenguaje formal simbólico según la concepción moderna (Mumma, 2006, 2010, 2011 y 2012), (Avigad & Dean & Mumma, 2009), (Dean, 2008), (Northrop, 2011). El trabajo de Giaquinto (2007 y 2008) es especialmente relevante desde el punto de vista de la Matemática. Giaquinto resalta con ejemplos concretos la importancia de esta noción *visual* de la *intuición geométrica* en los desarrollos de la Matemática moderna que pretenden una cognición de *estructuras abstractas* (tanto finitas como infinitas) (Giaquinto, 2007, 241). Los mecanismos neurocerebrales son aún poco conocidos, pero el avance en este campo no se ha detenido (Jack Gallant, 2014), (Cowen & Chun & Kuhl, 2014). En la obra de Giaquinto aparecen también reiteradas referencias a la importancia que su interpretación tendría para una correcta Didáctica de la Matemática. Eso también se sostiene reiteradamente en Kosslyn. Y está en plena concordancia con lo expuesto en este trabajo, en la línea defendida por René Thom, entre otros.

3.5.- El enfoque ontológico en la Matemática. Nos acercamos a la esencia del problema señalando una importante característica de la Matemática moderna, según se comienza a entender en los últimos 10 años: no se trataría tan sólo de demostrar la verdad de un teorema, sino de demostrar además el *porqué* y generar un *entendimiento* de ese proceso (Mumma, 2010). Y en esto la referencia esencial es el *objeto*. Y esto implica un compromiso ontológico, más allá, o por debajo de la relación de consecuencia lógica. Este es uno de los más recientes giros de la filosofía de la Matemática, y que permite también entender a autores anteriores al siglo XX de otra manera. Pero, sobre todo, se trata de una propuesta de investigación; y el estudio de las consecuencias de la visualización en la Matemática, o la revisión de Euclides, serían sólo una parte de esa perspectiva (Mancosu, 2008b, 2). Pero su mayor beneficio sería la ampliación del rango de la epistemología de la Matemática al considerar las “different epistemic virtues” (Mancosu, 2008b, 15) que el análisis de la práctica matemática puede arrojar de las distintas interpretaciones (y demostraciones) de una teoría o de un teorema, aunque la investigación de estas *virtudes* no ha sido hasta la fecha bien estudiada. Las cuestiones ontológicas de la Matemática fueron desechadas en el siglo XX en beneficio o bien de la búsqueda de una fundamentación puramente lógica de la Matemática, o bien de la priorización de la inferencia lógica en su análisis, si exceptuamos los casos de Hilbert -que como hemos visto fue en general muy mal comprendido en el siglo XX- y Gödel.

3.6.- La valoración actual de la filosofía de la Matemática de Kant y Hilbert. La filosofía de la Matemática de Kant y su extensión, y en parte restricción, a través de la interpretación de Hilbert ofrecen una interpretación consistente para la Matemática clásica y la mayor parte de la Matemática moderna. Las conclusiones de Mumma (2006 y 2009) y Giaquinto (2007) así como todos los análisis anteriores confirman y refuerzan algunas conclusiones esenciales de nuestra investigación sobre Kant y Hilbert, rompiendo con gran parte de los lugares comunes en los estudios del siglo XX. Y es claro también que la situación en la epistemología de la Matemática es hoy muy distante de la hegemónica hace ahora 100 años a raíz de la publicación de los *Principia* de Russell (Corfield, 2003). En los últimos 100 años los lógicos y los matemáticos se han afanado, y sus resultados han sido espectaculares, en afinar unos desarrollos que generen una *demostración formal*, es decir, la demostración de la verdad de un enunciado, pero con independencia de la *comprensión* del objeto y del *porqué* de esa verdad. El análisis de los procedimientos mentales y de los conceptos epistemológicos (y de sus condicionamientos neurológicos y cognitivos) que producen el conocimiento de los objetos matemáticos ha sido dejado de lado. La distinción entre los tipos de demostración, que los matemáticos realizan habitualmente, se fundamenta en gran parte en una distinción que se remonta a Aristóteles con su distinción entre *to oti* y *to dioti* (Aristóteles, *Analytica posteriora*, A13, 22 a 78 y B3, 90b 9-10 y A2, 71) y que fue ampliada por Descartes (Cellucci, 2011a, 5-8) con un carácter dinámico que se traduciría en ¿cómo puedo *llegar* al enunciado P? Por ejemplo, las representaciones diagramáticas introducen un elemento nuevo en la relación entre los conceptos y las estructuras lógicas que los relacionan. Aunque cada especialista crea los gráficos y los aplica a su manera, se han desarrollado recientemente estudios modernos para dar una taxonomía y una explicación a sus relaciones lógicas (Allwein & Barwise, 1996), (Shin, 1994) y (Mumma, 2008, 2010, 2011 y 2012). Se observan también las diferencias sustanciales que plantean las distintas demostraciones desde el punto de vista de una Didáctica de la Matemática. Gran parte de las publicaciones científicas de Matemáticas se presentan hoy bajo las premisas de una demostración axiomática (Cellucci, 2011a, 8-13), (Davis & Hersch, 1986, 66). La razón última es el convencimiento generado en el siglo XX de el carácter prioritario del método axiomático *en la Matemática*, y no tan sólo en su exposición o análisis lógico (Gowers, 2002, 36-40), (Bass, 2003, 769). Como vimos, es una distorsión total de los planteamientos de Hilbert, para quien el método axiomático era fundamentalmente un método de *investigación de la estructura lógica* de una teoría, más aún que de su exposición, y requería el estar en posesión de un desarrollo completo de esa misma teoría. Pero sus consecuencias deductivas dependen totalmente de la elección de los axiomas, y eso sólo puede hacerse *desde fuera* de la teoría. Sería una ilusión pensar que una demostración axiomática puede establecer la *certeza* de un enunciado y que las Matemáticas serían una ciencia que puede pretender alcanzar una presunción de certeza absoluta; una demostración axiomática sólo evidencia la verdad de la consecuencia desde los supuestos dados. Pero en la elección de esos supuestos estaría la clave del problema, y también su dificultad, puesto que exigiría una *intuición del objeto*, y también con frecuencia explicitar conexiones con diversas teorías que se condicionan (Van Benthem, 2008, 38). Cf. (Batterman, 2001), (Colyvan, 2001 y 2002), (Melia, 2000 y 2002), (Shapiro, 2000), (Leng, 2005), (Baker, 2005), (Hafner & Mancosu, 2005), (Cellucci, 2008a, 2008b y 2011a) y (Mancosu, 1999b, 2000, 2001, 2008c).

3.7.- El cambio de enfoque epistémico en la Matemática. Queda claro que se ha producido un cambio de punto de vista sustancial en la epistemología de la Matemática. El punto original de inflexión estuvo en la disolución de la oposición analítico- sintético por Quine (1951), tal y como se entendía en el siglo XX (y que era distinta de la mantenida por Kant). Y su continuación estaría en varias observaciones del influyente trabajo de Lakatos (1976) *Proofs and Refutations*. A partir de aquí se desarrollaron distintas concepciones epistemológicas de la Matemática que desde hace aproximadamente 20 años tienen un papel protagonista (Mancosu, 2008b, 1-19). No puede ser tampoco ninguna casualidad el incremento exponencial de los estudios sobre Kant y la filosofía crítica que se produjo en el mundo anglosajón a partir de los años 70, ni el reciente revival de los estudios sobre Frege, o de autores neokantianos como Cassirer. Lo cierto es que la realidad de la epistemología de la Matemática no tiene ahora nada que ver con la que se vivió a comienzos del siglo XX a raíz de la publicación de los *Principia* y la mayoría de científicos enfocan la situación como una ampliación notable de las perspectivas de la disciplina. Desde nuestro punto de vista, los estudios anteriores plantean una vuelta a la consideración del *objeto*, y tratándose de objetos abstractos y desde un punto de vista realista, a la consideración de las relaciones estructurales entre los *conceptos* que los definen y que se deben priorizar sobre las relaciones lógicas. Y en este contexto, la filosofía de la Matemática de Kant no sólo ha dejado de ser anatema, sino que muchos de sus planteamientos son confirmados por los estudios y teorías más arriba descritos.

3.8.- El espíritu matemático de la época de Kant. Su génesis y la *identidad de la práctica* Matemática. La filosofía de la Matemática de Kant surge de una reflexión sobre la Matemática de su tiempo, que era fundamentalmente la de Euclides. Kant está embebido de lo que Daniel Sutherland (2004b) denomina *the Greek Mathematical Tradition*, que priorizaba las interpretaciones geométricas a las aritméticas. Se demuestra que, además de los razonamientos puramente matemáticos, estaba en el origen de la epistemología kantiana de la Matemática una interpretación filosófica de aspectos conceptuales de ésta de origen específicamente griego (Sutherland, 2004b, 1-2), y el punto clave sería la concepción kantiana de la *magnitud*, y esas *magnitudes* constituirían el corazón de la teoría kantiana de la cognición matemática (Sutherland, 2004a, 2004b, 2005b, 2006, 2008 y 2010), (Friedman, 1992 y 2000), (Parsons, 1984) y (Longuenesse, 1998). Este tipo de enfoque es aplicado también por Lisa Shabel (2003) en su estudio de los *Elementa* y en la búsqueda de una génesis de la epistemología kantiana de la Matemática (Shabel, 2003, 2004 y 2006). La conclusión de estos estudios es que no existe una diferencia significativa entre la *práctica* de la Matemática del siglo XVIII y la *práctica* de la Matemática actual. Cierto que en esa época era un lugar común el considerar que las definiciones matemáticas se caracterizaban por determinar conceptos “claros y distintos”, mientras que muchos matemáticos actuales se decantan por definiciones relacionales indirectas, pero eso es más bien una técnica expositiva alternativa, que no excluye las definiciones directas de conceptos. La técnica de la época se fundamentaba también en la *construcción geométrica* o en su posibilidad (Shabel, 2003, 87). Pero ya hemos visto que la *construcción conceptual* puede visualizarse por construcciones geométricas, incluso en el Algebra (Hilbert), dado el rango privilegiado que la geometría euclídea tiene en el sistema perceptivo humano. Shabel subraya que esa distinción "clara y distinta" no es la de las expresiones simbólicas que representarían a los objetos matemáticos, sino de los mismos objetos así construidos, por lo cual "the early moderns cannot be understood as investigating patterns or abstract mathematical structures". Y este sería el cambio más significativo en la evolución de la Matemática del siglo XX: la capacidad de abordar estructuras en los sistemas simbólicos representacionales, aunque *a ese estudio se aplicarían las mismas reglas epistemológicas y cognitivas que en la Matemática usual de la época de Kant* (Hilbert). Se ha producido también un cambio en la valoración de la importancia de las distintas ramas y una aritmetización de gran parte de la Matemática y un cambio en la concepción del Algebra. Pero nada de eso cambia los *procesos cognitivos* ni *las técnicas intelectuales* con los que se abordan los distintos problemas que, como estos autores y los anteriores demuestran, son básicamente los mismos: *la manipulación simbólica, los procedimientos visuales de conceptualización, la medida de magnitudes*. Y en esto reside nuestra noción de *identidad de la práctica Matemática*. La identidad de esa *práctica matemática* es una de las razones que confirman la vigencia de la epistemología de la Matemática de Kant y de su teoría del conocimiento. Pero también de una concepción *naturalista* de la Matemática que, como vimos, era uno de los elementos distintivos de la interpretación de Hilbert. Y si nos atenemos a la cita que incluye Shabel al comienzo de su obra, también de Kant:

> "Claims to philosophical cognition generally enjoy the fate of opinions and are like the meteors, the brilliance of which is no guarantee of their endurance. Claims to philosophical cognition vanish, but mathematics endures" –Immanuel Kant, Inquiry concerning the distinctness of the principles of natural theology and morality, 2:283.

BIBLIOGRAFÍA.

1.- Acrónimos y formas de citar.

AI…………………………………………………………………………….…….*Artificial Intelligence*
Ak (Akk)………………………………...……………Obras Completas de Kant, *Akademie Auflage*
BB……………………………………………………………………….…….….….….*Big Brain Project*
BBP……………………….……………………………………….….….….….*Blue Brain Project*
BCM…………………………………………………………..…...*Bishop Constructive Mathematics*
BI…………………………………………………………………….…….….…………*Brain Initiative*
BISH…………………………………………………………………….……………..….*.Bishop Analysis*
CM-model………………………………………………………….…..…*Causal Mechanical Model*
CRM…………………………………………………………..…...*Constructive Reverse Mathematics*
CTP………………………………………………………..…...*Computational theory of perceptions*
CW………………………………………………………..………………...*Computing with words*
DN-model……………………………………………………….….…. modelo deductivo-nomológico
fbc……………………………………………………………...………..fórmula bien construída
FOL (LPO)……………………………………..……*First Order Logic* (Lógica de primer orden)
GA………………………………………………………….……Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*
GCL…………………………………….……..………..………...*Generalized constraint language*
GW…………………………..…. *Kritik der reinen Vernunft*, traducción inglesa de Guyer & Woods
HBP……………………………..……….……………………..…………*Human Brain Project*
IA (AI)…………………………………….…….….……..Inteligencia Artificial (*Artificial Intelligence*)
IP theory…………………………………..…..………………………*information processing theory*
KrV………………………………………………………………….………... *Kritik der reinen Vernunft*
LEM (PEM) (TND)……*Law of Excluded Middle* (*Principle of Excluded Middle*) (*Tertium Non Datur*)
MGM……........................*Kritik der reinen Vernunft*, traducción española de Manuel García Morente
MIT…………………………….……………………….………*.Massachusetts Technological Institute*
ML………………………………………….…………………..Teoría Constructiva de Tipos de Martin Löf
NKS………………………..… *Kritik der reinen Vernunft*, traducción inglesa de Norman Kemp Smith
PEM……………………….…….……………………….…………………..*Principle of Excluded Middle*
PM…………………………………………….……………………..……..*Principia Mathematica*
PNL………………………………………………………….…………………*Precisiated natural language*
PR………………………………..…*Kritik der reinen Vernunft*, traducción española de Pedro Rubio
Qbism……………………………………………………………………...…..bayesianismo cuántico
RNA (ANN, KNN)……...……Redes Neuronales Artificiales (*Artificial Neural Networks, Künstliches Neuronales Netz*)
RUSS…………………………………………………………….……..Matemática constructiva recursiva
SNNS……………………………………………………..…..…*Stuttgart Neural Network Simulator*
SOL (LSO)………………………………………………Second Order Logic (Lógica de segundo orden)
SR-model………………………………………………..…….….……*Statistical Relevance Model*
ZF……………………………………………………………Sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel
ZFC…………...Sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección (*Choice Axiom*)

En las citas se utiliza como regla general el *sistema Harvard* (*autor, año, página*) o bien (*autor, año*) o bien, cuando la cita se realiza en un discurso que requiere al autor, *autor* (*año*), estando en todo caso la obra listada en la bibliografía general. Excepcionalmente se realizan algunas citas, casi siempre en ciertas notas a pie de página, citando el autor, título de la obra, página, editorial y año. Eso se hace por tres razones: primero, se trata de citas sobre temas marginales a la temática principal pero que tienen entidad propia; segundo, se pretende no recargar en exceso la bibliografía, ya suficientemente amplia; tercero, se suele tratar de bibliografía amplia sobre un tema relativamente marginal pero concreto, y que por lo general sugiere una propuesta de investigación futura, y los propios títulos de las obras citadas ayudan a entender mejor el sentido de la nota y las propuestas de investigación. Las menciones a varios autores dentro del texto principal, siguiendo el formato (autor, fecha), no se ordenan alfabéticamente ni cronológicamente; el criterio ha sido ordenarlos de mayor a menor importancia por su aportación al tópico.

En cuanto a la ortografía española, se ha seguido el criterio de escribir con mayúscula el nombre de las disciplinas teóricas (Lógica, Matemática, Filosofía, etc), pero en minúscula cuando el término se refiere al pensamiento de un autor (la filosofía de la Matemática de Kant). Cuando estos términos aparecen en una cita o en el título de una obra se usa literalmente la ortografía original del autor en el idioma correspondiente, salvo que se trate de una traducción mía.

En relación con las traducciones, véase la “Nota sobre las traducciones” en la página 31 de este trabajo.

2.- Bibliografía principal. Fuentes.

HILBERT, DAVID

No existe una traducción al español de las obras de Hilbert. Existen traducciones de algunos artículos relevantes realizadas por la UNAM y de difícil acceso, y también traducciones diversas de algunas de sus obras, que están referenciadas en la Bibliografía. Las citas de Hilbert en este trabajo, cuando no se hacen directamente en el original alemán, se remiten a esas traducciones y, cuando no hay traducción española, son traducciones directas de (Gesammelte Abhandlungen, 1932 y 1935) y de otras ediciones originales, las cuales pueden obtenerse online en **www.sub.uni.goettingen.de**. Se añade al final de la Bibliografía reseñada de Hilbert una lista que incluye las traducciones recientes al inglés de algunos de sus artículos, conferencias fundamentales y cursos, y algunas citas se realizan utilizando esas traducciones inglesas.

______1926, “Über das Unendliche”, *Mathematische Annalen 95 (1926)*, pp.161-190. Fue reeditado al año siguiente en el *Jahresberricht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 36, pág.201-215. Una versión abreviada se editó como apéndice a la 7ª edición de “Grundlage der Geometrie” y aparece traducida al español en la edición de dicha obra del CSIC referida en la Bibliografía. Hay una traducción completa del artículo al español, junto con otros relevantes, en “Fundamentos de las Matemáticas”, (edición limitada, 1000 ejemplares), 1993. Servicios Editoriales de la UNAM, Mexico D.F., 1993.

______1932, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 Bände. Band I und II, Berlin: Verlag von Julius Springer.

______1935, *Gesammelte Abhandlungen*, Band 3. Berlin: Springer, 1935.

______1899, *Grundlagen der Geometrie*, B.G.Teubner Verlag, Berlin- Leipzig. Traducciones españolas: 1) *Fundamentos de Geometría*, Madrid: Publicaciones del Instituto “Jorge Juan” de Matemáticas, 1953. 2) *Fundamentos de Geometría*, traducción española de la 7ª edición, B.G.Teubner Verlag, Leipzig-Berlin, 1930, Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1996. Accesible online la 3ª edición de B.G.Teubner Verlag, Leipzig-Berlin:
https://archive.org/details/grunddergeovon00hilbrich

______1996, *Fundamentos de la Geometría*, traducción de la obra “Grundlagen der Geometrie”, CSIC, Madrid.

______1993, *Fundamentos de las Matemáticas*, colección de artículos y conferencias de David Hilbert traducidas al español por Carlos Alvarez y Luis Felipe Segura. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM, edición limitada (1000 ejemplares), Mexico D.F.

Existen traducciones inglesas de algunos artículos y obras:

______1899, *Grundlagen der Geometrie*, translated as *On the foundations of Geometry*, La Salle: Open Court 1938.

______1900, “Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900”, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse.* Heft 3, 1900, S.253–297. Accesible online en:
http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN002498863
Archiv der Mathematik und Physik (3), 1: 44–63,213–237 (1901).
English translation in *The Bulletin of the American Mathematical Society* 8:437 – 479, (1902).
http://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/bull

______1904, “Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik”, *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses”*, translated in (Heijenoort 1967, pp. 130-138).

______1922, “Neue Begründung der Mathematik. Erste Mitteilung”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 1: 157-177, translated as “the new grounding of mathematics: first report” in (Mancosu 1998b, pp. 198-214).

______1923, “Die logischen Grundlagen der Mathematik”, *Mathematische Annalen* 88: 151-165, translated as “The logical foundations of mathematics” in (Ewald 1996c, pp.1134-1148). Reeditado en GA, Band III, 178- 191.

______1926, “Über das Unendliche”, *Mathematische Annalen 95:* 161-190, translated in (Benacerraf & Putnam 1983, pp. 183-201).

______1928, “Die Grundlagen der Mathematik”, translated as “The foundations of mathematics” in (van Heijenoort 1967, pp. 464-479).

1931, “Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie”, *Mathematische Annalen* 104: 485- 494, translated as “The grounding of elementary number theory” in (Mancosu 1998b, pp. 266-273). Accesible online: **http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01457953#page-1**

Y además gratuito en:

http://www.digizeitschriften.de/fileadmin/scripts/pdf.php?UklQPTg3LjIyMi44MS4yMCZQUE49UFBOMjM1MTgxNjg0XzAxMDQmbG9nSUQ9bG9nMzcmZmVzPSZBQ0w9WVRveU9udHBPakE3Y3pveE1Ub2lUV0YwYUdWdFlYUnBZM01pTzJrNk1UdHpPalE2SW1aeVpXVWlPMzA9JnRhcmdldEZpbGVOYW1lPVBQTjIzNTE4MTY4NF8wMTA0X2xvZzM3LnBkZg==

Basado en la conferencia de Diciembre de 1930 en la *Philosophische Gesellschaft* de Hamburgo.

Algunas reediciones y traducciones recientes al inglés:

______1900a, “Mathematische Probleme”, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Math.-Phys. Klasse, pages 253–297, 1900. Lecture given at the International Congress of Mathematicians, Paris, 1900. Partial English translation in (Ewald, 1996, 1096–1105). Edición digital en: *Bulletin* (New Series) *of the American Mathematical Society*,Volume 37, Number 4, Pages 407-436, S 0273-0979(00)00881-8, Article electronically published on June 26, 2000

______1900b, “Uber den Zahlbegriff”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8:180–84, 1900. English translation in (Ewald, 1996, 1089–1096).

______1905, “Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik”, in A. Krazer, editor, *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, pages 174–85, Leipzig, 1905. Teubner. English translation in (van Heijenoort, 1967, 129–38).

______1918a, “Axiomatisches Denken”, *Mathematische Annalen*, 78:405–15, 1918. Lecture given at the Swiss Society of Mathematicians, 11 September 1917. Reprinted in (Hilbert, 1935, 146–56). English translation in (Ewald, 1996, 1105–1115).

______1918b, “Prinzipien der Mathematik”. Lecture notes by Paul Bernays.Winter-Semester 1917–18. Unpublished typescript. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen. Published in (Hilbert, 2006).

______1920, “Probleme der mathematischen Logik”. Vorlesung, Sommer-Semester 1920. Lecture notes by Paul Bernays and Moses Schönfinkel. Unpublished typescript. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen. Published in (Hilbert, 2006).

______1922a, “Grundlagen der Mathematik”. Vorlesung, Winter-Semester 1921–22. Lecture notes by Paul Bernays. Unpublished typescript. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen. Published in (Hilbert, 2006).

______1922b, “Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung”. Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität, 1:157–77, 1922. Series of talks given at the University of Hamburg, July 25–27, 1921. Reprinted with notes by Bernays in (Hilbert, 1935, 157–177). English translation in (Mancosu, 1998a, 198–214) and (Ewald, 1996, 1115–1134).

______1923, “Die logischen Grundlagen der Mathematik”. *Mathematische Annalen*, 88:151–165, 1923. Lecture given at the Deutsche Naturforscher-Gesellschaft, September 1922. Reprinted in (Hilbert, 1935, 178–191). English translation in (Ewald, 1996, 1134–1148).

______1926, “Über das Unendliche”. *Mathematische Annalen*, 95:161–90, 1926. Lecture given Münster, 4 June 1925. English translation in (van Heijenoort, 1967, 367–392).

______1928, “Die Grundlagen der Mathematik”. *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, 6:65–85, 1928. English translation in (van Heijenoort, 1967, 464-479).

______1929, “Probleme der Grundlegung der Mathematik”. *Mathematische Annalen*, 102:1–9, 1929.

Lecture given at the International Congress of Mathematicians, 3 September 1928. English translation in (Mancosu, 1998b, 227–233).

______1931a, "Beweis des Tertium non datur". *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Math.-phys. Klasse, pages 120–25.

______1931b, "Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre". *Mathematische Annalen*, 104:485–94. Reprinted in (Hilbert, 1935, vol-III, 192–195). English translation in (Ewald, 1996, 1148–1157).

______1971, *Hilbert. Gedenkenband*, Kurt Reidemeister (editor), Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 2ª edición, 2012.

______1992, "Natur und mathematisches Erkennen". Birkhäuser, Basel, 1992.Vorlesungen, 1919–20.

______2004, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*, 1891–1902, Ulrich Majer and Michael Hallett, editors. New York: Springer, 2004.

______2006, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic*, 1917–1933, William Ewald and Wilfried Sieg, editors. New York: Springer, 2006.

Algunos cursos importantes impartidos por Hilbert y de los que se conservan apuntes son:

"Logische Prinzipien des mathematischen Denkens" (semestre de verano, 1905)

"Prinzipien der Mathematik" (semestre de verano, 1908)

"Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik" (semestre de verano, 1910)

"Einige Abschnitte aus der Vorlesung über die Grundlagen der Mathematik und Physik" (semestre de verano, 1913)

"Prinzipien der Mathematik und Logik" (semestre de invierno, 1917)

"Logische Grundlagen der Mathematik" (semestre de invierno, 1922). Una copia parcial se guarda en los archivos de la Universidad de Göttingen. Un artículo con parecido nombre y citado más arriba se publicó en 1923: "Die logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen* 88: 151-65, y reeditado en (Hilbert GA, tomo I, 1935, pp. 178-91).

Algunas copias de estos y otros cursos se pueden encontrar en el *Hilbert's Nachlass en el Handschriftenabteilung of the Niedersachsische Staats- und Universitatsbibliotek in Göttingen* y otras se guardan en el "Giftschrank" en el *Mathematische Institut* de Göttingen. Algunas están accesibles en el link de la Universidad de Göttingen aportado más arriba en esta Bibliografía. Algunos de estos cursos han sido estudiados y publicados recientemente (Hilbert, 2006).

HILBERT, D. & ACKERMANN, W.: 1928 (1958) *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin: Springer. 4º Edición, Berlin: Springer Verlag, 1958. Traducción española: *Elementos de Lógica Teórica*, Madrid: Edit.Tecnos,1962.

HILBERT, D. & COHN-VOSSEN, S.: 1932, *Anschauliche Geometrie*, Berlin: Springer Verlag.Traducción inglesa: *Geometry and the Imagination*, traductor P. Nemenyi, New York: Chelsea Publishing Company 1952, 2ª edición 1990. Basado en los cursos de Geometría que impartió Hilbert en 1921 en Göttingen. Accesible online en su versión inglesa: **http://bookalist.net/?p=874046**

HILBERT, D. & COURANT, R.: 1953, *Methods of Mathematical Physics*, New York: Interscience Publishers.

HILBERT, D. & BERNAYS, P.: 1934, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin: Julius Springer Verlag,. Vol I (1934) , Vol II (1939). Revised edition 1970.

KANT, IMMANUEL: 1998, *Kritik der reinen Vernunft*, edición en alemán moderno, nach der 1. und 2. Orig.-Ausg.hrg von Jens Timmermann. Mit einer Bibliogr. von Heiner Klemme. Hamburg: Meiner Verlag.

______ *Kants gesammelte Schriften* (AK), herausgegeben von der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften, 29 vols., Berlin: 1902-1997, publicados inicialmente por Georg Reimer y posteriormente por Walter de Gruyter, bajo la supervisión de la Academia. Consulta online de los 26 primeros volúmenes:
http://korpora.zim.uni-duisburg-essen.de/kant/
http://korpora.zim.uni-duisburg-essen.de/kant/verzeichnisse-gesamt.html
Información detallada sobre esta edición (Akademie Edition) en la siguiente página de la Universidad de Manchester:
http://www.manchester.edu/kant/Helps/AcadEd.htm
http://kantpapers.org/articles.php

_____1764, *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*, 1764; Ak.2:275-301 (AA II : Vorkritische Schriften II, 1757-1777). "Inquiry concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality", translated by David Walford and Ralf Meerbote in *Immanuel Kant:Theoretical Philosophy, 1755-1770,* 243-286, Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 2ª edición (Paul Guyer & Allen W. Woods), 2003.

_____1800 (1919) *Logik. Ein Handbuch zur Vorlesungen*, herausgegeben von Gottlob Benjamin Jäsche, 1800 edición autorizada por Kant). 3ª edición Felix Meiner Verlag, Berlin 1919. Traducción inglesa: *Lectures on Logik*, translated and edited by J.Michael Young, Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

_____1920, *Kants Opus postumum*, dargestellt und beurteilt von Erich Adickes, *Kant Studien Ergänungshefte im Auftrag der Kant Gesellschaft*, Nr.50, herausg. von H. Vaihinger,M. Frischeisen-Köhler und A. Liebert, Berlin: Verlag von Reuther & Reichard, 1920.

En relación con las traducciones utilizadas, hacemos notar (véase también la "nota sobre las traducciones de la página 31 de este trabajo) que:

1) Para las traducciones al español de la *KrV* se han considerado las siguientes:

- La traducción de García Morente (1928): *Crítica de la Razón Pura*, Juan José García Norro y Rogelio Rovira (edit.), traducción de Manuel García Morente, Madrid: Tecnos, 2002 (2ª edic. 2006). La dificultad con esta edición es que no sigue la tradicional ordenación de la *KrV* según las ediciones A y B y los parágrafos numerados, por lo que es trabajoso buscar el párrafo en cuestión. Además, aunque los editores no aportan ninguna indicación, la traducción es en realidad incompleta faltando numerosos pasajes, aunque más amplia que la de 1928, debido probablemente a los manuscritos recientemente encontrados a los que se refieren los editores. Cuando se usa, se indica después de la cita traducida por (MGM, página), especificando así la página de la traducción donde está el párrafo citado.

- También se ha utilizado la traducción de Pedro Ribas: *Crítica de la Razón Pura*, traductor Pedro Ribas, Madrid: Taurus, 2005 (2ª edic. 2007), que cuando se ofrece se indica siempre la referencia añadiendo al final el indicativo (PR). Esta traducción sigue la clasificación usual según las ediciones A y B, por lo que no se indica la página. El criterio general ha sido citar la versión original alemana de la edición referida en la Bibliografía (1998) y poner la traducción en nota a pie de página indicando la referencia de la traducción. A veces se incluyen varias traducciones y en algún caso también una traducción directa propia que considero más adecuada, y en este caso aparece ésta sin referencia a la traducción, discutiéndose en algunas ocasiones los criterios de traducción. En alguna ocasión se presenta en cambio la traducción en el texto principal, y el texto original y traducciones alternativas en nota.

- Ocasionalmente se ha preferido aportar también la traducción inglesa. Cuando se ofrecen traducciones inglesas, se indica siempre la referencia al traductor. Se ha manejado la de Norman Kemp Smith (1929): *Critique of Pure Reason*, London: Palgrave MacMillan, 1929. Se ha utilizado la reedición en esa editorial de 2007. Otra reedición de la traducción de Kemp Smith, utilizada por varios autores: New York: St. Martin's Press, 1965. También se ha consultado la traducción de Werner S. Pluhar, que contiene muchas consideraciones críticas de Patricia Kitcher y James W. Ellington a la traducción de Kemp Smith (la más usual): *Critique of Pure Reason,* Indianapolis & Cambridge: Hackett Publishing Company, 1996, en pasajes conflictivos, así como referencias detalladas de otras traducciones inglesas. Así, se ha tenido también en cuenta la traducción de Max Müller (MacMillans, 1881), reeditada en 2007 con comentarios críticos de Marcus Weigelt a otras traducciones (London, Penguin Books), y que es la traducción que Kemp Smith tomó como referencia en su traducción de 1929, y sobre todo la más reciente de Guyer y Woods (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998) y la de J.M.D. Meiklejohn (Seattle, Washington: Pacific Publishing Studio, 2011). La de N. Kemp Smith y la de Guyer & Woods son las dos que se han utilizado en la mayoría de las citas. En estos casos, habitualmente se aporta también el original alemán y, a veces, la traducción española.

2) Las citas ocasionales de otras obras de Kant se refieren a la edición de la Academia accesible online y referenciada en la Bibliografía, salvo las citas de la *Jäsche Logik*, que se refieren a la edición de 1919 referenciada también en la Bibliografía, al igual que las citas de la *Opus postumum* (1920). Por regla general en las citas de obras de Kant distintas de la *KrV* se aporta el texto original alemán y las eventuales traducciones, cuando se aportan, son directas.

3) En algunas ocasiones se aporta el original alemán en el texto principal y varias traducciones españolas y/o inglesas en nota a pie de página. La razón es la siguiente. Por una parte, se ha realizado un amplio trabajo comparativo de las distintas traducciones españolas e inglesas que, aunque obviamente no se discute en el trabajo por exceder al tema, dan una base para futuras investigaciones y, al tiempo, evidencian el origen de interpretaciones erróneas de Kant basadas en traducciones sesgadas. En algunos casos se discuten explícitamente aspectos de esas traducciones, pero en otros se incluyen varias traducciones para que el lector juzgue por sí mismo los matices y diferencias, pudiendo obtener así una mejor comprensión del pensamiento expresado por Kant y valorar nuestra interpretación.

La Universidad de Manchester ofrece una información exhaustiva sobre la bibliografía de Kant y sobre Kant: **http://www.manchester.edu/kant/Home/indexRelated.htm**
y también links a las principales revistas especializadas y a las distintas Sociedades Kantianas, así como a páginas de varias universidades: **www.manchester.edu/kant/Helps/Bibliography.htm**
Y distintas lecturas sugeridas a partir de la edición de la Academia:
http://www.manchester.edu/kant/helps/AcadEd.htm
La página de la Academia: **http://korpora.zim.uni-duisburg-essen.de/kant/verzeichnisse-gesamt.html**
Una explicación sobre la historia y los criterios de edición de la Academia: **http://kant.bbaw.de/die-akademie-ausgabe/ubersicht**
Un resumen de todas las opciones de Kant en la web, reunidas por Steve Palmquist:
http://staffweb.hkbu.edu.hk/ppp/K1texts.html

3.- Bibliografía secundaria.

ABELA, PAUL: 2002, *Kant´s Empirical Realism*, Oxford: Clarendon Press.

ACHOURIOTI, T. & VAN LAMBALGEN, M.: 2011, “A formalization of Kant’s transcendental logic”, *Review of Symbolic Logic*, 4: 254-289, 2011. **http://philpapers.org/rec/ACHAFO**

ACKERMANN, WILHELM: 1924a, “Die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms”, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 24: 246-250

______1924b, “Begründung des ’tertium non datur’ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit’, *Mathematische Annalen*, 93: 1-36.

______1928a, “Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen”, *Mathematische Annalen*, 99: 118-133

______1928b, “Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke”, *Mathematische Annalen*,100: 638-649

______1935a, “Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik”, *Mathematische Annalen*, 110: 390-413

______1935b, “Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik”, *Mathematische Annalen*, 111: 61-63

______1936, “Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik”, *Mathematische Annalen*, 112: 419-432

______1937, “Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre”, *Mathematische Annalen*, 114: 305-315

______1938, “Mengentheoretische Begründung der Logik”, *Mathematische Annalen*, 115: 1-22

______1940, “Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, 1940/1941, *Mathematische Annalen*, 117: 162-194

______1951, “Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse”, *Mathematische Zeitschrift*, Band 53, Heft 5: 403-413

______1952, “Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik”,1951/52, *Mathematische Zeitschrift*, Band 55: 364-384

______1953, “Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II”,1953, *Mathematische Zeitschrift*, Band 57: 155-166

______1955, “Zur Axiomatik der Mengenlehre”, *Mathematische Annalen*, 131: 336-345

______1956, “Begründung Einer Strengen Implikation,” *Journal of Symbolic Logic*, 21: 113–128.

______1957, “Philosophische Bemerkungen zur mathematischen Logik und zur mathematischen Grundlagenforschung”, *Ratio*, Band 1, 1957.

______1958, “Ein typenfreies System der Logik mit ausreichender mathematischer Anwendungsfähigkeit I”, *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, Band 4: 3-26.

______1961, “Ein typenfreies System der Logik mit ausreichender mathematischer Anwendungsfähigkeit

II", 1960/61, *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, Band 5: 96-111.

ACKERMANN, W & HILBERT, D.: 1928 *Grundzüge der Theoretischen Logik*. 2ª edición 1932. 4º Edición 1958. Berlin: Springer Verlag.
Traducción española de la 4ª edición: *Elementos de Lógica Teórica*, Edit.Tecnos, Madrid 1962.
Traducción inglesa de la 2ª edición alemana de 1932: 1950 (1928), *Principles of Mathematical Logic*. New York: Chelsea Publishing Company. Reimpreso por la *American Mathematical Society* (1998 y 2008), Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing.

ACKERMANN, R.: 1967, *Introduction to Many-Valued Logics*, London: Menthuen 1967.

ADAMS, ROBERT MERRIHEW: 1997, "Things in Themselves", *Philosophy and Phenomenological Research* 57.

ADAMS, ROD: 2011, *An Early History of Recursive Functions and Computability from Gödel to Turing*, Boston: Docent Pres.

ADICKES, ERICH: *1889, Immanuel Kants Kritik der reinen Vernunft. Mit einer Einleitung und Anmerkungen,*Berlin: Mayer & Müller.

_____1920, *Kants Opus postumum*, dargestellt und beurteilt von Erich Adickes, *Kant Studien Ergänungshefte im Auftrag der Kant Gesellschaft*, Nr.50, herausg. von H. Vaihinger, M. Frischeisen-Köhler und A. Liebert, Berlin: Verlag von Reuther & Reichard, 1920.

_____ 1924, *Kant und das Ding an sich*, Berlin: Pan Verlag Rolf Heise.

_____ 1927, *Kant und die Als-Ob-Philosophie*, Stuttgart: Fr. Frommanns Verlag (H. Kurtz).

_____ 1929, *Kants Lehre von der doppelten Affektion unseres Ich als Schlüssel zu seiner Erkenntnistheorie*, Tübingen: Verlag von J.C.Mohr (Paul Siebeck).

ALAMA, JESSE: 2013, "The Lambda Calculus", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/lambda- calculus/**

ALEKSANDROV, A.D. & GELFAND, I.M. & KOLMOGOROV, A.S. & altere: 1970, *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (3 vol), Boston: The MIT Press. Traducción española, Madrid: Alianza Editorial, 1973.

ALLISON, HENRY E.: 1973, *The Kant-Eberhard Controversy*, Baltimore: Johns Hopkins University Press.

_____2004, *Kant`s transcendental Idealism. An Interpretation and Defense*, New Haven and London:Yale University Press.

ALLWEIN G. & BARWISE, J. (editors): 1996, *Logical Reasoning with Diagram*, Oxford: Oxford University Press.

AMERIKS, KARL: 2006, *Kant and the historical turn. Philosophy as critical interpretation*, Oxford: Clarendon Press.

ANDERSON, D.: 1993, "What is the Model-Theoretic Argument", *The Journal of Philosophy*, 93: 311–22.

ANDERSON, R. L.: 2004, "It Adds Up After All: Kant's Philosophy of Arithmetic in Light of the Traditional Logic", *Philosophy and Phenomenological Research*, 69 (3): 501–540.

ANDERSON, A. & BELNAP, N. & DUNN, J. M.: 1975, 1992, *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 1 (1975), vol. 2 (1992), Princeton: Princeton University Press.

ANDREWS, PETER B.: 1986, *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth through Proof*, London: Academic Press.

ANTONELLI, G. ALDO: 2012, "Non-monotonic Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/logic-nonmonotonic/**

_____2005, *Grounded Consequence for Defeasible Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

ANTONIETTI, A. & ANGELINI, C. & CERANA, P.: 1995, *L'Intuizione Visiva*, Milano: Franco Angeli.

APEL, KARL OTTO: 1972, "From Kant to Peirce: The Semiotical Transformations of Transcendental Logik", *Proceedings of the Third International Kant Congress*, L. W. Beck (editor), Dordrecht: Reidel.

_____ 1973, *Transformation der Philosophie*, Frankfurt: Suhrkamp. Traducción española: *La transformación de la filosofía*, Madrid: Taurus, 1985.

AQUILA, RICHARD: 1983, *Representational Mind, a Study of Kant's Theory of Knowledge*,

Bloomington: Indiana University Press.
______1989, *Matter in Mind, a Study of Kant's Transcendental Deduction*, Bloomington: Indiana University Press.

ARCHIBALD, TOM: 2008, "The Development of Rigor in Mathematical Analysis", en *The Princeton Companion to Mathematics*, p.117, Princeton: Princeton University Press.

ARNAULD, ANTOINE & NICOLE, PIERRE: 1662 (1970), *La logique ou Vart de penser*, Paris: Flammarion, 1970 (original edition 1662).

ARTEMOV, S.: 2001, "Explicit provability and constructive semantics", *Bulletin of Symbolic Logic*, 7(1):1–36.

ASHCRAFT, M. H.: 1994, *Human memory and cognition* (2nd Ed.), New York: Harper Collins.

ASPRAY, W. & KITCHER P. (edit.): 1988, "History and Philosophy of Modern Mathematics", *Minnesota Studies in the Philosophy of Science XI*, Minneapolis: The University of Minnesota Press.

AUSLANDER, J.: 2008, "On the Rolles of Proofs in Mathematics", B.Gold & R.A.Simon (editors), *Proof and other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, 62-77, Washington: The Mathematical Association of America.

AVENARIUS, RICHARD: 1868, *Ueber die beiden ersten Phasen des Spinozischen Pantheismus und das Verhältnis der zweiten zur dritten Phase*, Leipzig: Eduard Avenarius 1868. Accesible online: **http://ia600304.us.archive.org/2/items/ueberdiebeidene02avengoog/ueberdiebeidene02avengoog.pdf**
______1876, *Philosophie als Denken der Welt gemäß dem Prinzip des kleinsten Kraftmaßes. Prolegomena zu einer Kritik der reinen Erfahrung*, Leipzig: Fues's Verlag (R. Reisland) 1876. 2. Auflage 1903. Accesible online: **http://ia600306.us.archive.org/11/items/philosophiealsd02avengoog/philosophiealsd02avengoog.pdf**
______1888, *Kritik der reinen Erfahrung*, Bd. 1. Leipzig: Fues's Verlag (R. Reisland) 1888. 2. Band 1890. 2. Auflage 1907-1908. Accesible online: **http://ia600305.us.archive.org/28/items/kritikderreinen00avengoog/kritikderreinen00avengoog.pdf**
______1891 (1905), *Der menschliche Weltbegriff* , Leipzig: O. R. Reisland 1891, 2. Aufl. 1905, 3.Aufl., 1912. Accesible online: **http://ia600300.us.archive.org/11/items/dermenschlichew00avengoog/dermenschlichew00avengoog.pdf**

AVERY, JOHN: 2003, *Information Theory and Evolution*, River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., 2nd edition, 2012.

AVIGAD, JEREMY: 2001, "Clarifying the nature of the infinite: the development of metamathematics and proof theory", with Erich H. Reck, Carnegie Mellon Technical Report CMU-PHIL-120. **http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/**
______2006, "Mathematical Method and Proof", *Synthese* 153: 105-159.
______2006, "Methodology and Metaphysics in the development of Dedekind's theory of ideals",J. Ferreiros & J.J. Gray editors, *The Architecture of Modern Mathematics*, New York: Oxford University Press.
______2007, "Computability and Incompleteness. Lecture notes", **http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/**
______2008a, "Understanding proofs" in Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice, Oxford University Press*, 317-353, 2008.
______2008b, "Computers in Mathematical Inquiry", en Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice*, 302-316, Oxford & New York: Oxford University Press.
______2009, "Review of Marcus Giaquinto, *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study*", *Philosophia Mathematica*, 17:95-108, 2009. Accesible on line: **http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/**
______2010a, "Understanding, formal verification, and the philosopy of mathematics", charla en la Universidad de Paris, Enero de 2010 y en la Universidad de Pittsburg, Febrero de 2010. Accesible on line: **http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/**
______2010b, "Review of Jeremy Gray, *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*", *The Mathematical Intelligencer*, 32:79-81, 2010. **http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/**
______2012, "Type inference in mathematics", *Bulletin of the European Association for*

Theoretical Computer Science, 106:78-98, 2012

AVIGAD, JEREMY & DEAN, EDWARD & MUMMA, JOHN: 2009, “A formal system for Euclid´s *Elements*”, *Math.LO*, 4 May 2009. Unpublished draft. Se puede bajar de la página web de Mumma: **http://www.johnmumma.org/Writings.html**
Publicado con algunas variaciones en *Review of Symbolic Logic*, 2:700-768, 2009.

AVIGAD, JEREMY & ZACH, RICHARD: 2013, “The Epsilon Calculus”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/epsilon-calculus/**

AZZOUNI, J.: 1994, *Metaphysical myths, mathematical practice: the logic and epistemology of the exact sciences*, Cambridge: Cambridge University Press.

______2004a, *Deflating existential consequence: a case for nominalism*, New York: Oxford University Press.

______2004b, *Proof and ontology in euclidean mathematics*, Odense: University Press of Southern Denmark.

BADESA, CALIXTO: 2004, *The Birth of Model Theory: Löwenheim's Theorem in the Frame of the Theory of Relatives*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

BAKER, ALAN: 2005, “Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?”, *Mind* 114, 223-238.

BALESCU, RADU: 1975, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. New York: John Wiley & Sons.

BALZER,W. & MOULINES, C. U. & SNEED, J. D.: 1987, *The Structuralist Program. An Architectonic for Science*, Dordrecht: Reidel.

BARENDREGT, HENK: 1997, “The Impact of the Lambda Calculus in Logic and Computer Science”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 3, Number 2, June 1997.

BARKER, S.: 1992, “Kant's View of Geometry: A Partial Defense”, in C. Posy (ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*, 221–244, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BARWISE, J.: 1977a, *Handbook of mathematical logic*, Barwise J (ed), Amsterdam: North-Holland.

______1977b, “An introduction to first-order logic”, en (Barwise (ed) ,1977a, pp 5–46).

BARWISE, J. & FEFERMAN, S.: 1985, *Model-Theoretic Logics*, Barwise, J., and Feferman, S. eds., New York: Springer.

BARWISE, J. & HAMMER, E.: 1996, *Diagrams and the Concept of a Logical System*, Allwen & Barwise (editors) *Logical Reasoning with Diagrams*, New York: Oxford University Press.

BARWISE, J. & ETCHEMENDY, J.: 1996, “Visual information and valid reasoning”, Allwen & Barwise (editors) *Logical Reasoning with Diagrams*, 3-25, New York: Oxford University Press.

BARZIN, M. & ERRERA, A.: 1927, “Sur la logique de M. Brouwer”, *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, 13: 56–71.

BATTERMAN, ROBERT: 2001, *The Devil in the Details*, Oxford: Oxford University Press.

______2012, “Intertheory Relations in Physics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/physics-interrelate/**

BAUMGARTNER, JORG & KOTZIN, RHODA & LANSING, EAST: 1990, “Sensations and Judgements of Perception”, *Kant-Studien*, 81(1990).

BASS, H.: 2003, “The Carnegie Initiative on the Doctorate: The Case of Mathematics”, *Notices of the American Mathematical Society* 50, 767-776.

BAYES, THOMAS: 1763, “An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **53**: pp. 370–418. Reprinted in E.S. Pearson and M.G. Kendall, eds., *Studies in the History of Statistics and Probability*, London: Charles Griffin, 1970. Accesible online:**http://www.stat.ucla.edu/history/essay.pdf**

BAYS, TIMOTHY: 2001, “On Putnam and his Models”, *The Journal of Philosophy*, 98: 331–50.

______2007a, “The Mathematics of Skolem’s Paradox”, in Dale Jacquette (edit.) *Philosophy of Logic*, 485-518.

_____2007b, "More on Putnam's Models: A Response to Bellotti", *Erkenntnis*, 67: 119–135.
_____2008, "Two Arguments against Realism", *The Philosophical Quarterly*, 58: 193–213.
_____2012, "Skolem's Paradox", The Stanford Encyclopedia of Philosophy,Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/paradox-skolem/**

BAZHANOV, V. A.: 2003, "The scholar and the 'Wolfhound Era': The fate of Ivan E. Orlov's ideas in logic, philosophy, and science", *Science in context*, 16(4): 535–550.

BEALL, JC & GLANZBERG, M.: 2013, "Liar Paradox", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.),
http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/liar-paradox/

BEANEY, MICHAEL: 2006, "Frege and the Rolle of Historical Elucidation: Methodology and the Foundations of Mathematic", J. Ferreiros & J.J. Gray editors, *The Architecture of Modern Mathematic*, New York: Oxford University Press.

BECK, L. W.: 1967, "Neo-Kantianism." in P. Edwards (ed.) *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. 5, New York: Macmillan.

BECKER, OSKAR: 1927, "Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene", *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, VIII: 439–809.
_____1930, "Zur Logik der Modalitäten", *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* 11 (1930), S.497-548.
_____1964, *Die Grundlagen der Mathematik*, Freiburg/München: Verlag Karl Albert.
_____1975, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag.

BEESON, M.: 1985, *Foundations of Constructive Mathematics*, Heidelberg: Springer-Verlag.

BEISER, FREDERIK C.: 1987, *The Fate of Reason: German Philosophy from Kant to Fichte*, Cambridge, MA: Cambridge University Press.
_____2002, *German Idealism: The Struggle against Subjectivism, 1781-1801*, Cambridge MA: Cambridge University Press.
_____2014, *The Genesis of Neo-Kantianism, 1796-1880*, Oxford: Oxford University Press.

BELL, JOHN. L.: 2001, *The Art of the Intelligible. An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development*, The Western Ontario Series in Philosophy of Science, vol. 63, New York: Kluwer Academic Publishers.

BELLOTI, L.: 2005, "Putnam and Constructibility", *Erkentnnis*, 62: 395–409.
_____2006, "Skolem, the Skolem 'Paradox' and Informal Mathematics", *Theoria*, 72: 177–220.

BELNAP, NUEL D.: 2009, "Truth values, neither-true-nor-false, and kupervaluations", *Studia Logica*, 91: 305–334.
_____1977a, "How a computer should think", in G. Ryle (ed.), *Contemporary Aspects of Philosophy*, Stocksfield: Oriel Press Ltd., 30–55.
_____1977b, "A useful four-valued logic", in: J.M. Dunn and G. Epstein (eds.), *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 8–37.

BENACERRAF, P.: 1965, "What the Numbers Could Not Be", in *Philosophy of Mathematics*, Benacerraf & Putnam edit., Cambridge: Cambridge University Press, 1983, pp. 272-294.
_____1985, "Skolem and the Skeptic", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 59: 85–115.

BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. (edit.): 1983, *Philosophy of Mathematics: selected readings*, New York: Cambridge University Press.

BENNETT, M. K. & BIRKHOFF, GARRET: 1988, "Felix Klein and his 'Erlangen Program'", *History and Philosophy of Modern Mathematics, pp.145-176,* Minneapolis: University of Minnesota Press.

BERGER, MARCEL: 2002, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, New York: Springer.

BERGMANN, MERRIE: 2008, *An introduction to many-valued and fuzzy logic: semantics, algebras, and derivation systems*, Cambridge: Cambridge University Press.

BERKELEY, GEORGE: 1710, *The Principles of Human Knowledge*, London: William Collins Sonsand Co., Ltd.,1972.

BERNAYS, P.: 1918, “Beitrage zur axiomatischen Behandlung des Logik-Kalkuls”. Habilitationsschrift, Göttingen.

_____1922a ,”Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik”, *Die Naturwissenschaften 10: 93-99*; translated in Mancosu (1998b) pp.189-197.

_____1922b , “Über Hilberts Gedanken zur Grundlagen der Arithmetik” *Jahresberricht der Deutsche Mathematische Vereinigung* 31: 10-19; lectur delivered at the Mathematiktagung in Jena, September 1921; translated in Mancosu 1998b, pp.215-222.

_____1923, “Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen und Zeichen”, *Mathematische Annalen* 90: 159-163, translated in Mancosu 1998b, pp. 223-226.

_____1928a, “Die Philosophie der Mathematik und die Hiltbersche Beweistheorie”, *Blätter für deutsche Philosophie* 4: 326-367, translated in Mancosu 1998b, pp. 234-265. Reprinted in (Bernays 1976), pp. 17-61

_____1928b, “Zusatz zu Hilberts Vortrag ¨uber “Die Grundlagen der Mathematik”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 6:88–92, 1928. English translation in: (van Heijenoort, 1967, 485–489).

_____1930, “Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie”, *Blätter für deutsche Philosophie*, 4:326–67, 1930. Reprinted in (Bernays, 1976, 17–61). English translation in (Mancosu, 1998b, 234–265).

_____1935, “On platonism in Mathematics”, *Sur le platonisme dans les mathématiques*. Lecture delivered June 18, 1934, in the cycle of Conférences internationales des Sciences mathématiques organized by the University of Geneva, in the series on Mathematical Logic. translated from the French by C.D. Parsons from *L'Enseignement mathématique*, 1st ser., vol 34, 1935, pp. 52-69. Accesible online: **http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdf**

_____1937, “A system of axiomatic set theory”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 2 (1937), pp. 65-77.

_____1954, “Über den Zusammenhang des Herbrand'schen Satzes mit den Neueren Ergebnissen von Schütte und Stenius”, *Proceedings of the Internation Congress of Mathematicians*, Amsterdam, 2: 397.

_____1959, “Comments on Ludwig Wittgenstein's Remarks on the foundations of mathematics”, *Ratio* 2.1 (1959): 1-22. Accesible online: **http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/wittgenstein.pdf**

_____1970, “On the original Gentzen consistency proof”, in A. Kino, J. Myhill, and R. E. Veseley, editors, *Intuitionism and Proof Theory*, pages 409–417, Amsterdam: North-Holland, 1970.

_____1976, *Abhandlungen zur Philosophic der Mathematik*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

BERNAYS, P. & SCHÖNFINKEL, M.: 1928, “Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik”, *Mathematische Annalen* 99: 342-72.

BETH, EVERT WILLEM: 1935, *Rede en aanschouwing in de wiskunde (Reason and intuition in mathematics)*, Dissertation, November 5 1935, Noordhoff, Groningen, Rijks Universiteit van Utrecht

_____1956, “l'Existence en mathématiques”, number 10 in `Collection de logique mathématiques, série A', Gauthier-Villars/Nauwelaerts, Paris/Louvain. Beth's lectures at Sorbonne University (Paris), March 29 - April 2, 1954.

_____1951, “Fundamental Features of Contemporary Theory of Science”, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 1, 4, 291-302

_____1959, *The foundations of mathematics. A study in the philosophy of sciences*, Studies in Logic, Amsterdam: North Holland.

_____1963, *The relationship between formalised languages and natural language*, Synthese, 15, 1, 1-16.

_____1964, *E.W. Beth Memorial Colloquium: Logic and Foundations of Science*, J. L. Destouches (edit.) Paris, Institut Henri Poincaré, May 19-21, Dordrecht: Reidel

_____1965, *Mathematical thought: an introduction to the philosophy of mathematics*, Dordrecht: Reidel.

BEYER, CHRISTIAN: 2013, “Edmund Husserl”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/husserl/**

BEZBORUAH, A. & SHEPHERSON, C.: 1976, “Godel's Second Incompleteness Theorem for Q”, *Journal of Symbolic Logic* v. 41 n. 2, pp. 503–512.

BÉZIAU, JEAN-IVES: 2000, "What is Paraconsistent Logic?", in In D. Batens et al. (eds.), *Frontiers of*

Paraconsistent Logic. Baldock: Research Studies Press.

BILLINGSLEY, PATRICK: 1995, *Probability and Measure*, New York: John Wiley and Sons.

BIRD, GRAHAM: 1959, "The Necessity of Kant", *Mind*, 68, pp. 389-392

_____1962, *Kant's Theory of Knowledge*, London: Routledge & Kegan Paul.

_____1984, "Bemerkungen zu Barry Strouds Beitrag", en "Die Transzendentalphilosophie und das Problem der Außenwelt", en E. Schaper & W. Vossenkuhl (Eds.): Bedingungen der Möglichkeit. 'Transcendental Arguments' und transzendentales Denken, 230-235, Stuttgart: Klett-Cotta.

_____2006, *The Revolutionary Kant*, Chicago: Open Court.

BIRKHOFF, GARRETT: 1973, *A source book in classical analysis*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

BIRKHOFF, G. & BENNETT, M.K.: 1987, "Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*" en *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 36, pp.343-389.

BISHOP, ERRETT: 1967, *Foundations of Constructive Analysis*, New York: McGraw-Hill.

_____1973, "Schizophrenia in Contemporary Mathematics", *Amer. Math. Soc. Colloquium Lectures*, Missoula: University of Montana; reprinted in Errett Bishop: "Reflections on Him and His Research", *Amer. Math. Soc. Memoirs* 39.

BISHOP, ERRETT & BRIDGES, DOUGLAS: 1985, *Constructive Analysis*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Series 279*, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio: Springer-Verlag.

BLACK, SUSAN: 1974, *Deviant Logic*, Cambridge: Cambridge Univesity Press. 2ª edit. 1977. Traducción española, edit. Paraninfo, Madrid 1980.

BLANCHETTE, PATRICIA: 2012, "The Frege-Hilbert Controversy", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/frege-hilbert/**

BLUMENTHAL, OTTO: 1935, "Lebensgeschichte", en D. Hilbert, GA, tomo III, pp.389-429.

BOBZIEN, SUSANNE: 2008, "Ancient Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.),**http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/logic-ancient/**

BOCHENSKI, IOSEPH M.: 1956, *Formale Logik*, Freiburg: Verlag Karl Albert.Traducción española: "Historia de la Lógica Formal", Madrid: Ed.Gredos, 1966.

BOCVAR, D. A.: 1938, "On a Three-Valued Logical Calculus and its Application to the Analysis of Contradictions", *Mat. Sb. (N.S.)*, 4 (46), 1938, 287-308. Review by Alonzo Church: *Journal of Symbolic Logic* 4 (1939), no. 2, 98--99.

_____1943, "On the consistency of a tree-valued logical calculus", *Mat. Sb.* 12 (54), 1943, 353-369.

BOLZANO, BERNARD: 1837, *Wissenschaftslehre*, Seidel: Sulzbach. Reedición: Jan Berg: Bernard Bolzano-Gesamtausgabe, I. Schriften: vols. 11/1 (§§ 1–45) (1985), 11/2 (§§ 46–90) (1987), 11/3 (§§ 91–120) (1987), 12/1 (§§ 121–163) (1988), 12/2 (§§ 164–222) (1988), 12/3 (§§ 223–268) (1988), Stuttgart/Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog.

BOOLE, GEORGE: 1847 (1951), *The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay toward a Calculus of Deductive Reasoning*. London & Cambridge: Macmillan,1847. Reprint Oxford: Basil Blackwell, 1951. (1979) Traducción española: "El análisis matemático de la lógica". Traducción e introducción (pp.10-38) de Esteban Requena Manzano. Madrid: ediciones Cátedra.

_____1854, *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, London: Macmillan.

BOOLOS, GEORGE S.: 1975, "On Second-Order Logic", *Journal of Philosophy* 72: 509-27. Reprinted in (Boolos, 1998, pp. 37–53).

_____1984, "To Be Is To Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables)". *Journal of Philosophy* 81 (8): 430–450. Reprinted in (Boolos, 1998, pp 54–72).

_____1985, "Nominalist platonism", *Phil Rev* 94:327–344. Reprinted in (Boolos,1998, pp 73–87).

_____1993, *The Logic of Provability*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1998, *Logic, logic, and logic*, Cambridge, Mass: Harvard University Press.

BOOLOS, GEORGE S. & JEFFREY, RICHARD C.: 1985, *Computability and Logic*, London: Cambridge University Press.

BOOLOS, GEORGE & BURGESS, JOHN & JEFFREY, RICHARD: 2002, *Computability and Logic*, 4th ed., London: Cambridge University Press.

BOREL, ÉMILE.: 1914, “Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques”, reprinted as Note V in: E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris: Gauthiers-Villars, 182-216.

BOURBAKI, NICHOLAS: 1958, *Theorie des ensembles*, Paris: Hermann

_____1972, *Elément d'historie des mathématiques*, Paris: Hermann, 1969. Traducción de Jesús Hernández del original francés: “Elementos de Historia de las Matemáticas”, Madrid: Alianza Editorial. Traducción inglesa: “Elements of the History of Mathematics”, New York & Berlin: Springer 1994.

BOYER, C.: 1956, *History of Analytic Geometry*, New York: Scripta Mathematica.

BRADING, K.A. & RYCKMAN, T.A.: 2008, “Hilbert´s ‘Foundations of Physics’: Gravitation and electromagnetism Within the Axiomatic Method” , *Studies in History nd Philosophy od Modern Physics* 39, 2008, pag. 102-153

BRADY, GERALDINE: 2000, *From Peirce to Skolem: A Neglected Chapter in the History of Logic*, Amsterdam: Elsevier.

BRADY, R. T.: 2005, *Universal Logic*, Stanford: CSLI Publications, 2005.

BRAITHWAITE, R.: 1953, *Scientific Explanation*, Cambridge: Cambridge University Press.

BRANT, W.: 2013, *Mental Imagery and Creativity: Cognition, Observation and Realization*, Saarbrücken: Akademikerverlag.

BREITENBACH, A.: 2013, “Beauty in Proofs: Kant on Aesthetics in Mathematics”, *European Journal of Philosophy*, 2013.

BREMER, MANUEL : 2005, *An Introduction to Paraconsistent Logics*, Frankfurt: Peter Lang.

BRESSAN, ALDO: 1972, *A General Interpreted Modal Calculus*, New Haven: Yale University Press.

BRIDGES, DOUGLAS: 1998, “Constructive Truth in Practice”, in *Truth in Mathematics*, H. Dales and G. Oliveri (eds.), Oxford: Clarendon Press.

_____2013, "Constructive Mathematics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.) **http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/mathematics-constructive/**

BRIDGES, D. & REEVES, S.: 1999, “Constructive mathematics, in theory and programming practice”, *Philosophia Mathematica*, 7 (1): 65—104.

BRIDGES, D. & RICHMAN, F.: 1987, “Varieties of Constructive Mathematics”, *London Math. Soc. Lecture Notes* 97, Cambridge: Cambridge University Press.

BRITTAN, GORDON: 1992, “Algebra and Intuition”, en C. Posy (editor), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,

_____2006, “Kant's Philosophy of Mathematics” en G. Bird (ed.), 222-235, *A Companion to Kant*, Malden, MA: Blackwell.

BROAD, C.D.: 1941, “Kant's Theory of Mathematical and Philosophical Reasoning”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, n.s. 42, 1-24.

BROUWER, LUITZEN EGBERTUS JAN: 1905, *Leven, Kunst en Mystik*, Waltman, Delft, 1905. Traducción completa al inglés: “Life, Art and Mysticism”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(3):389-429, (1996).

_____1907, *Over de Grondslagen der Wiskunde*, Ph.D. thesis, Universiteit van Amsterdam, Maas en van Suchtelen, Amsterdam, 1907. “On the Foundations of Mathematics,” Thesis, Amsterdam; English translation in (Brouwer, 1975, 11–101).

_____1908, “Over de onbetrouwbaarheid der logische principes”, *Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2*, 1908, pp.152–158. English translation: “The Unreliability of the Logical Principles,” In Heyting (ed.) 1975: 107–111.

_____1912, “Intuitionism and Formalism,” English translation by A. Dresden, Bull. Amer. Math. Soc. 20 (1913): 81–96, reprinted in Benacerraf and Putnam (eds.) 1983: 77–89; also reprinted in Heyting (ed.) 1975: 123–138.

_____1923 (1954), “On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory,” “Addenda and corrigenda,” and “Further addenda and

corrigenda”. English translation in van Heijenoort (ed.) 1967: 334–345.
_____1927, “Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus”, KNAW Proceedings, 31: 374–379. “Intuitionistic reflections on formalism,” originally published in 1927. English translation in van Heijenoort (ed.) 1967: 490–492. Reedited in Mancosu 1998, pp. 40–44.
_____1948a, “Consciousness, philosophy and mathematics,” originally published (1948): *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy*, Amsterdam 1948, 3: 1235–1249, reprinted in Benacerraf and Putnam (eds.) 1983: 90–96.
_____1948b, “Essentieel negatieve eigenschappen”, *Indagationes Mathematicae*, 10: 322–323. English translation in Brouwer 1975, pp. 478–479.
_____1949a, “De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderelatie in het continuum”, *Indagationes Mathematicae*, 11: 37–39. English translation in Brouwer 1975, pp. 495–496.
_____1949b, “Contradictoriteit der elementaire meetkunde”, KNAW Proc., 52: 315–316. English translation in Brouwer 1975, pp. 497–498.
_____1949c, “Consciousness, philosophy and mathematics”, *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy*, Amsterdam 1948, 3: 1235–1249.
_____1952, “Historical background, principles and methods of intuitionism”, *South African Journal of Science*, 49: 139–146.
_____1954, “Points and spaces”, *Canadian Journal of Mathematics*, 6: 1–17.
_____1955, “The effect of intuitionism on classical algebra of logic”, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 57: 113–116.
_____1975, *Collected Works 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting (ed.), Amsterdam: North-Holland.
_____1976, *Collected Works 2. Geometry, Analysis, Topology and Mechanics*, H. Freudenthal (ed.), Amsterdam: North-Holland. In the Collected Works, papers in Dutch have been translated into English, but papers in French or German have not. English translations of several of them can be found in:
-van Heijenoort, J., ed., 1967, “From Frege to Gödel. A Sourcebook in Mathematical Logic”, 1879-1931, Cambridge (MA): Harvard University Press.
-Mancosu, P., ed., 1998, “From Hilbert to Brouwer. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s”, Oxford: Oxford University Press. An English translation of Brouwer's little book “Leven, Kunst en Mystik” of 1905, of which the Collected Works contain only excerpts, is: Brouwer, L.E.J., 1996, “Life, Art and Mysticism”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(3):389-429. Translated by Walter van Stigt, who provides an introduction on pp.381-387.
The Berlin lectures of 1927 have been published in:
-Brouwer, L.E.J., 1992, “Intuitionismus”, D. van Dalen (ed.), Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
The Cambridge lectures of 1946-1951, which are recommended as Brouwer's own introduction to intuitionism, have been published in:
-Brouwer, L.E.J., 1981, Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism, D. van Dalen (ed.), Cambridge: Cambridge University Press.
Información extraída de: (van Atten, 2005).
_____1997, Una bibliografía completa de Brouwer es accesible online: van Dalen, D., 1997, “A bibliography of L.E.J. Brouwer”, Utrecht Logic Group Preprint Series, no.176
http://www.phil.uu.nl/preprints/preprints/PREPRINTS/preprint175.pdf
Updated version in van Atten, M., Boldini, P., Bourdeau, M., and Heinzmann, G. (eds.), 2008, One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007). The Cerisy Conference, Basel: Birkhäuser, pp. 343–390.
Una biliografía bastante completa y que incluye bibliografía secundaria y que es accesible online en (Van Atten, 2011).

BROWN, JAMES ROBERT: 2008, *Philosophy of Mathematics. A Contemporary introduction to the Word of Proofs and Pictures*, London: Routledge.
_____1997, “Proofs and Pictures”, *British Journal of Philosophy of Science*, 48(2): 161-180.

BROOK, ANDREW: 1995, “Realism in the *Refutation of Idealism*”, *Proceedings of the Eighth International Kant Congress*, vol-2, pp.313-320, Milwaukee: Marquette University Press.

BUCK, R. C.: 1963 “Mathematical Induction and Recursive Definitions”, *Amer. Math. Monthly* 70, 128-135.

BÜCHEL, GREGOR: 1987, *Geometrie und Philosophie*, Berlin: De Gruyter.

BUDDENSIEK, FRIEDEMANN: 1994, *Die Modallogik des Aristoteles in den Analytica priora A, (Zur modernen Deutung der Aristotelischen Logik)*, Hildesheim: Olms.

BUENO, OTÁVIO: 1999, “Empiricism, Conservativeness, and Quasi-Truth”, *Philosophy of Science*, 66: 474–485.

_____2008, “Nominalism and Mathematical Intuition”, *ProtoSociology. An International Journal of Interdisciplinary Research*, 25: 89-107.

_____2010, “A Defense of Second-Order Logic”, *Axiomathes* 20:365-383. **http://www.as.miami.edu/personal/obueno/Site/Online_Papers_files/SecnOrd_FINAL.pdf**

BUNGE, MARIO: 1983, *Epistemology and Methodology- I: Exploring the World*, Vol. 5 of Treatise on Basic Philosophy, Dordrecht & Boston: Reidel.

_____2006, “The philosophy behind pseudoscience”, *Skeptical Inquirer*, vol-30.4, July/August-2006.

BURGESS, JOHN P.: 1981, “The Completeness of Intuitionistic Propositional Calculus for Its Intended Interpretation”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 22: 17-28.

_____2005, *Fixing Frege*, Princeton: Princeton University Press.

BUROKER, J. V.:1981, *Space and Incongruence: The Origin of Kant's Idealism*, Dordrecht: Reidel.

BUSS, SAMUEL R.: 1995a, “Relating the bounded arithmetic and polynomial-time hierarchies”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 75 (1995), pp. 67-77.

_____1995b, “On Herbrand's Theorem”, *Logic and Computational Complexity: Lecture Notes in Computer Science* 960: 195-209, New York: Springer Verlag.

_____1998a , *Handbook of Proof Theory*, (editor), New York: North-Holland.

_____1998b, “Introduction to Proof Theory”, in Buss 1998a, pp. 1-78.

_____1998c , “Proof Theory of Arithmetic”, in Buss 1998a, pp. 79-147.

BUTTERWORTH, B.: 1999, *What Counts*, New York: The Free Press.

BUTTS, R.: 1981, “Rules, Examples and Constructions Kant's Theory of Mathematics”, *Synthese* 47 (2): 257-288.

BYNUM, T. W.: 1972, *Conceptual Notation and Related Articles*, Oxford: Clarendon Press.

CANDLISH, STEWART & DAMNJANOVIC, NIC: 2011, "The Identity Theory of Truth", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/truth-identity/**

CANTINI, ANDREA: 2012, “Paradoxes and Contemporary Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/paradoxes-contemporary-logic/**

CANTOR, GEORG: 1962, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Ernst Zermelo (editor), Nachdr. der Ausgabe Berlin 1932, Hildesheim: G. Olms 1962.

CARATHÉODORY, CONSTANTIN: 1909, “Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik”, *Mathematische Annalen*, 67, 355–386.

CARNAP, RUDOLF: 1929, *Abriss der Logistik, mit besonderer Berucksichtigung der Relations- theorie und ihrer Anwendungen*, Wien: Springer.

_____1931, “Die logizistische Grundlegung der Mathematik”, *Erkenntnis* vol. 2 (1931), pp. 91-105. English translation in P. Benacerraf and H. Putnam, *Philosophy of Mathematics: selected readings*, Cambridge University Press, 1983, 41-52.

_____1935, “Ein Gültigkeitskriterium fur die Satze der klassischen Mathematik”, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 41: 263-84.

_____1942, *Introduction to Semantics*, Cambridge, MA: Harvard, 1942

_____1946, “Modalities and Quantification”, *Journal of Symbolic Logic* 11: 33-64.

_____1947, *Meaning and Necessity*, Chicago: University of Chicago Press. Enlarged edition1956.

_____1950, *Logical Foundations of Probability*, Chicago: University of Chicago Press.

_____1958, “The Methodological Status of Theoretical Concepts”, en *Minnesota Studies in the Philosophy* *of Science*, vol. I, 38-75, ed. by H. Feigl and M. Scriven, Minneapolis: University of Minnesota Press.Accesible online: **http://www.mcps.umn.edu/assets/pdf/1_2_carnap.pdf**

______1966, *Philosophical Foundations of Physics*, Martin Gardner (editor), New York:Basic Books Inc.

______1967, *The Logical Structure of the World and Pseudoproblems in Philosophy*, Berkeley: California UP.

______1977, *Two Essays on Entropy*, ed. by Abner Shimony, Berkeley : University of California Press Completa información online:

http://www.iep.utm.edu/carnap/
http://www.carnap.org/
http://plato.stanford.edu/entries/logical-empiricism/
http://plato.stanford.edu/entries/vienna-circle/

CARNIELLI W. & CONIGLIO m. & MARCOS, J.: 2007, "Logics of Formal Inconsistency", in In D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic, Volume 14* (2nd ed.). Amsterdam, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

CARSON, EMILY: 1997, "Kant on Intuition in Geometry", *Canadian Journal of Philosophy*, 27 (4): 489–512.

______1999, "Kant on the Method of Mathematics", *Journal of the History of Philosophy*, 37 (4): 629–652.

______2002, "Locke's Account of Certain and Instructive Knowledge", *British Journal for the History of Philosophy*, 10 (3): 359–378.

______2004, "Metaphysics, Mathematics and the Distinction Between the Sensible and the Intelligible in Kant's Inaugural Dissertation", *Journal of the History of Philosophy*, 42 (2): 165–194.

CARSON, E. & HUBER, E. (editors): 2006, *Intuition and the Axiomatic Method*, Dordrecht: Springer.

CARUS, A. W.: 2007, *Carnap and Twentieth-Century Thought*, Cambridge: Cambridge University Press.

CASSIRER, ERNST: 1907, "Kant und die moderne Mathematik. Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik", *Kant Studien*, 12 (1907).
http://scans.library.utoronto.ca/pdf/1/28/kantstudienphilo12kantuoft/kantstudienphilo12kantuoft.pdf

______1910, "Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik", Berlin. Reedición: Felix Meiner Verlag, "Gesammelte Werke-Hamburger Ausgabe, Band 6", Hamburg, 2000.

CAVES, CARLTON M., & FUCHS, CHRISTOPHER A., & SCHACK, RUEDINGER : 2002, "Quantum Probabilities as Bayesian Probabilities", *Phys. Rev.* A 65, 022305 (2002).

CELLUCCI, CARLO: 2005, *Mathematical Reasoning and Heuristics*, editors: C. Cellucci & D. Gillies, London: King's College Publications.

______2008a, "The Nature of Mathematical Explanation", *Studies in History and Philosophy of Science*, Part A, 39: 202-210.

______2008b, "Why Proof? What is a Proof?", *Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof*, R.Lupacchini & G.Corsi (editors), 1-27, Berlin: Springer.

______2011a, "Explanatory and Non-Explanatory Demonstrations", en *Proceedings of the 14th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science* Nancy, July 19-26, 2011, editors: P.E. Bour, G. Heinzmann, W. Hodges & P. Schroeder-Heister.London: College Publications. Accesible online en: **http://w3.uniroma1.it/cellucci/forthcoming.htm**

______2011b, *Logic and Knowledge*, editors: Carlo Cellucci, Emily Grosholz & Emiliano Ippoliti, Newcastle upon Tyne, Cambridge Scholars Publishing.

______2014, *From a Heuristic Point of View: Essays in Honour of Carlo Cellucci*, editors: Emiliano Ippoliti & Cesare Cozzo, Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing.
Trabajos accesibles oline en: **http://w3.uniroma1.it/cellucci/papers.htm**

CHAMBERS, T.: 2000, "A Quick Reply to Putnam's Paradox," *Mind*, 109: 195–197.

CHANDRA, PRAVIN & WEISSTEIN, ERIC: 2013, "Fibonacci Number", From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. **http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html**

CHEVALLEY, C. & LAUTMAN, A.: 1931, "Notice Biographique sur Jaques Herbrand", *Annuaire de l'Association amicale de secours des anciens élèves de l'Ecole normale supérieure*: 66-68, translated in Goldfarb 1971, pp. 21-23.

CHEVALLEY, C.: 1934, “Sur la pensée de J. Herbrand”, *L’enseignement mathématique* 34: 97-102, translated in Goldfarb 1971, pp. 25-28.

CHIRARA, C.: 2004, *A Structural Account of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

CHURCH, ALONZO: 1932, “A set of postulates for the foundation of logic”, *Annals of Mathematics* (2nd Series), 33(2): 346–366.

_____1936a, “An unsolvable problem of elementary number theory”, *American Journal of Mathematics*, 58 pp. 345–363. This paper contains the proof that the equivalence of lambda expressions is in general not decidable.

_____1936b, “A Note on the Entscheidungsproblem”, *Journal of Symbolic Logic*, 1, 40-41.

_____1937a, “Review of Turing 1936”, *Journal of Symbolic Logic*, 2, 42-43.

_____1937b, “Review of Post 1936”, *Journal of Symbolic Logic*, 2, 43.

_____1937c, “Review of L. Chwistek, Uberwindung des Begriffsrelativismus”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 2 (1937), pp. 169-170.

1939, “The present situation in the foundations of mathematics, *Philosophie mathematique* (F. Gonseth, editor), Hermann, Paris, 1939.

_____1940a, “A formulation ofthe simple theory of types”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 5 (1940), pp. 56-68.

_____1940b, “On the concept of a random sequence”, *Bull. AMS* 46 (1940), 130-135.

_____1941, *The Calculi of Lambda-Conversion*, Princeton: Princeton University Press.

_____1943, “Review of Rudolf Carnap, *Introduction to Semantics*”, *The Philosophical Review*, 52: 298–304.

_____1946, “A formulation of the logic of sense and denotation (abstract),” *The Journal of Symbolic Logic*, XI: 31.

_____1951, “A formulation of the logic of sense and denotation,” in P. Henle (Ed.), *Structure, Method and Meaning*, New York: The Liberal Arts Press. pp 3–24.

_____1951b, “The Weak Theory of Implication” , *Kontroliertes Denken: Untersuchungen zum Logikkalkül und zur Logik der Einzelwissenschaften*, Kommissions-Verlag Karl Alber, edited by A. Menne, A. Wilhelmy and H. Angsil, pp. 22-37.

_____1956, *Introduction to Mathematical Logic*, Vol. I, Princeton: Princeton University Press.

_____1973, “Outline of a revised formulation of the logic of sense and denotation (part I),” *Noûs*, 7: 24–33.

_____1974, “Outline of a revised formulation of the logic of sense and denotation (part II),” *Noûs*, 8: 135–156.

_____1976, “Schröder's Anticipation of the Simple Theory of Types”, *Erkenntnis* 10: 407-11.

CHURCHLAND, P.: 1985, “The Ontological Status of Observables: In Praise of the Superempirical Virtues”, in Churchland and Hooker 1985, pp. 35–47.

CHURCHLAND, P. & HOOKER, C. (editors): 1985, *Images of Science: Essays on Realism and Empiricism* (with a reply from Bas C. van Fraassen), Chicago: University of Chicago Press.

CICOVACKI, PREDAG: 1995, “Kant on the Nature of Truth”, *Proceedings of the Eighth International Kant Congress*, vol-2, pp.199-206, Milwaukee: Marquette University Press.

CODY Jr., W. J. & WAITE, W.: 1980, “Software Manual for the Elementary Functions”, New York: Prentice-Hall, 1980.

COFFA, J. ALBERTO: 1982, “Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism”, *Journal of Philosophy* 79: 679-689.

_____1991, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*, Cambridge: Cambridge University Press.

COHEN, PAUL: 1966, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, London: Dover Publications, 2008.

COLYVAN, MARK: 2001, *The Indispensability of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

COOPER, S. B.: 2003, *Computability Theory*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

COPERLAND, B. JACK: “The Church-Turing Thesis”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/church-turing/**

COQUAND, THIERRY: 2010, “Type Theory”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2010/entries/type-theory/**

CORCORAN, JOHN.: 1980, “Categoricity”, *History and Philosophy of Logic* 1: 187-207.

_____1981, “From Categoricity to Completeness”, *History and Philosophy of Logic* 2: 113-19.

CORFIELD, DAVID: 2003, *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press.

CORRY, LEO: 1992, “Nicolas Boubaki and the concept of mathematical structure”, *Synthese* 92: 304-318.

_____1996, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Boston and Bassel: Birkhauser.

_____1997, “David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905)”, *Archive for History of Exact Sciences 51* , pp. 83-198.

_____1998, “Los 23 problemas de Hilbert y su transfondo histórico”, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 5 , p.2*

_____2002 “David Hilbert y su Filosofía Empiricista de la Geometría”, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,Vol. IX, Nº 1.*

_____2004, *David Hilbert and the Axiomatization of Physics* (1898-1918), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

_____2006, “Axiomatics, Empiricism and *Anschauung* in Hilbert’s Conception of Geometry: Between Arithmetic and General Relativity”, en *The Arquitecture of Modern Mathematics*, José Ferreirós & Jeremy J. Gray edit., New York: Oxford University Press.

_____2008 “The Development of the Idea of Proof”, *The Princeton Companion to Mathematics*, p.129, Edit. Timothy Gowers, Princeton: Princeton University Press.

COURANT, RICHARD & ROBBINS, HERBERT.: 1941, *What is Mathematics*?, Edición revisada por Ian Stewart.Oxford: Oxford University Press, 1996 (reedit.).

COURANT, RICHARD.: 1981, “Reminiscences from Hilberts Göttingen”, *The Mathematical Intelligencer* 3, 154-164

COUTURAT, LOUIS: 1901, *La Logique de Leibniz d’après des documents inédits*, Paris: Alcan.

_____1904, “La Philosophie de mathématiques de Kant”, *Revue de méthaphysique et de morale*, 12: 321-383, Paris.

COWEN, ALAN S. & CHUNCH, MARVIN M. & KUHL, BRICE A.: 2014, “Neural portraits of perception: Reconstructing face images from evoked brain activity”, *Neurolmage*, vol.94, 2014, 12-22. Accesible online (previo pago): **http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053811914001633**

COWLES, K. & KASS, R. & O’HAGAN, T. : 2014, “What is Bayesian Analysis” **http://bayesian.org/Bayes-Explained**

CROSILLA, LAURA: 2009, “Set Theory: Constructive and Intuitionistic ZF”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/set-theory-constructive/**

CURRY, HASKELL BROOKS: 1951, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland Publishing.

CUTLAND, N. J.: 1980, *Computability: An introduction to recursive function theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

DANNEBERG, LUTZ et al. (eds.): 1994, *Hans Reichenbach und die Berliner Gruppe*, Braunschweig: Vieweg.

DANZIG, DAVID VAN: 1957, “Gerrit Mannoury's significance for mathematics and its foundation*”*, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1957, pp. 1-18.

DAUBEN, J.: 1971, “The trigonometric background to Cantor’s theory of sets”, *Archive for the History of Exact Ideas, 7*: 181-216.

_____1979, *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*, Boston: Harvard Univ. Press.

DAVID, MARIAN: 2009, "The Correspondence Theory of Truth", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/truth-correspondence/**

DAVIDSON, DONALD: 1984, *Inquiries into Truth and Interpretation*, Oxford: Oxford University Press.

_____ 1986, "A Coherence Theory of Truth and Knowledge", in E. LePore (ed.), *The Philosophy of Donald Davidson*, Oxford: Basil Blackwell.

_____ 1989, "The Mith of the Subjective", in M. Krausz (ed.), *Relativism: Interpretation and Confrontation*, Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame.

_____ 1990, "Afterthoughts", appended to "A Coherence Theory of Truth and Knowledge", in *Reading Rorty*, ed. Allen Malachowski, Oxford: Basil Blackwell.

DAVIS P. & HERSH, R.: 1981, *The Mathematical Experience*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1986, *Descartes' Dream. The World According to Mathematics*, Philadelphia: American Philosophical Society.

DAVIS, MARTIN: 1965, *The Undecidable, Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems And Computable Functions*, New York: Raven Press. Includes original papers by Gödel, Church, Turing, Rosser, Kleene, and Post.

_____1973, "Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable", *American Mathematical Monthly*, Vol. 80, No. 3, Mar. 1973, pp. 233-269. Reprinted as an appendix in Martin Davis,*Computability and Unsolvability*, Dover reprint 1982 (London).

DAVIS, MARTIN & MATIYASEVICH, YURI & ROBINSON, JULIA: 1976, "Hilbert's Tenth Problem: Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution", Felix E. Browder (edit.): *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. XXVIII.2. American Mathematical Society. pp. 323–378. Reprinted in *The Collected Works of Julia Robinson*, Solomon Feferman, editor, pp.269–378, American Mathematical Society 1996.

DAWSON, JOHN W.:1985, "Completing the Gödel-Zermelo correspondence", *Historia Mathematica*, 12, pp. 66-70.

_____1991, "The reception of Gödel's incompleteness theorem", in Thomas Drucker (ed.), *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, pp. 84-100. Boston: Birkhäuser.

_____1993, "The compactness of First-Order Logic: From Gödel to Lindström", *History and Philosophy of Logic* 14: 15–37.

DEAN, EDWARD: 2008, *In defense of Euclidean Proof*, Master´s thesis, Carnegie Mellon University.

DE FINETTI, BRUNO: 1930, "A proposito dell'estensione del teorema delle probabilità totali alle classi numerabili", *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 63:901-905, 1063-1069.

_____1937, "La Prévision: Ses Lois Logiques, Ses Sources Subjectives", *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7: 1–68; translated as "Foresight. its logical laws, its subjective sources", Kyburg, H. E. and Smokler, H. E. (edits), *Studies in subjective probability*, 53–118. Hutington, New York: Robert E. Krieger Publishing Company, second (1980) edition.

_____1939, "Compte rendu critique du colloque de Genéve sur la théorie des probabilités", Number 766 in *Actualités Scientifiques et Industrielles*, Paris: Hermann.

_____1951, "Recent suggestions for the reconciliation of theories of probability". In Jerzy Neyman, editor, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 217-225, Berkeley & Los Angeles: University of California Press.

_____1955, "Notes de M. B. de Finetti sur le 'Rapport général'. In *Les mathématiques et le concret* (Fréchet, 1955), 232-241.

_____1970, *Teoria Delle Probabilità*, Turin: Einaudi, 1970. An English translation, by Antonio Machi and Adrian Smith, was published as *Theory of Probability* by Wiley (London) in two volumes in 1974 and 1975. Reprint: 1990, *Theory of Probability.Vols. 1 & 2*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd. A critical introductory treatment, translated from the Italian and with a preface by Antonio Machi and Adrian Smith, with a foreword by D. V. Lindley, Reprint of the 1975 translation.

_____1972, *Probability, Induction and Statistics*, New York: Wiley.

DE GUZMÁN, MIGUEL: 1977, *Mirar y Ver. Nueve ensayos de Geometría intuitiva*, Madrid: Editorial Alhambra.

DEHEANE, S.: 1997, *The Number Sense*, New York: Oxford University Press.

DE JONG, WILLEM R.: 1997, "Kant's Theory of Geometrical Reasoning and the Analytic-Syntetic Distinction. On Hintikka's Interpretation of Kant's Philosophy of Mathematics", *Studies in*

History and Philosophy of Science vol. 28, 1, 141-166.

DEJNOZKA, JAN: 1990, “The ontological foundation of Russell’s Theory of Modallity”, *Erkenntnis* 32: 383-418.

_____1999, *Bertrand Russell on modality and logical relevance*, Aldershot (Hampshire): Ashgate.

DE MORA CHARLES, MARISOL:

_____1981, “La teoría de la probabilidad: los primeros cálculos: Una propuesta de traducción y comentario a Cardano”, *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, Vol. 4, Nº 6-7, págs. 123-141.

_____1989, *Los Inicios de la Teoria de la Probabilidad : Siglos XVI y XVII*, Edicion presentada por Marisol De Mora Charles, Bilbao: Servicio de Publicaciones Universidad del Pais Vasco.

_____1993, “Leibniz y los dos problemas de De Méré”, *Llul*, vol. 16, 241-264.

_____1994, “De Leibniz a Carnap: probabilidad e inducción”, en *Perspectivas actuales de lógica y filosofía de la ciencia*, Juan Carlos García-Bermejo Ochoa (ed. lit.), A.Rivadulla (ed.lit.), J. Urrutia (ed. lit.), José Luis Zofío Prieto (ed. lit.), Eduardo Bustos (ed. lit.), Eulalia Pérez Sedeño (ed. lit.), 397-416.

_____2009a, “El modelo del dado y su influencia sobre el desarrollo de la teoría de la probabilidad. Aciertos y fracasos”, *Historia de la probabilidad y la estadística* (IV), 175-184, Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

_____2009b,” Lo contingente y lo necesario en Leibniz”, en *Aproximaciones a la contingencia: historia y actualidad de una idea*, coord. por Concha Roldán Panadero, Oscar Moro Abadía, 2009, 151-164.

DE MORGAN, AUGUSTUS: 1858,” On the syllogism: III and on logic in general”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1858. References to (P. Heart, editor), *On the Syllogism and other logical writings*, pp. 74-146, Routledge & Kegan Paul, London, 1966.

_____1859, “On the Syllogism No. IV, and on the Logic of Relations”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 10: 331-358. References to (P. Heart, editor) *On the Syllogism and other logical writings*, pp. 208-246, Routledge & Kegan Paul, London, 1966.

DENIS, M.: 1989, *Image et Cognition*, Paris: Presses Universitaires de France.

DESCARTES, RENÉ: 1996, *Oeuvres*, Paris: Vrin.

DETLEFSEN, MICHAEL: 1979, “On interpreting Gödel's second theorem”, *Journal of Philosophica Logic*, 8: 297-313. Reprinted with a postscript in (Shanker, 1988, 131-154).

_____1986, *Hilbert’s Program: an essay on mathematical instrumentalism*, Dordrecht: Reidel.

_____1990, “On an alleged refutation of Hilbert's program using Gödel's first incompleteness theorem”, *Journal of Philosophial Logic*, 19: 343-377.

_____1993, “Hilbert’s Formalism”, *Hilbert, Revue Internationale de Philosophie* 47:285-304.

_____2001, “What does Gödel's second theorem say?”, *Philosophia Mathematica*, 9: 37-71.

_____2005, “Formalism”, in Stewart Shapiro, editor, *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, pp. 236–317. New York and Oxford: Oxford University Press.

_____2008, “Purity as an Ideal of Proof”, en Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice*, 179-197, Oxford & New York: Oxford University Press.

DEVITT, M.: 1984, *Realism & Truth*, Princeton: Princeton University Press.

DIACONESCU, RADU: 1975, “Axiom of Choice and Complementation”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 51, Number 1: 176-178, August 1975.

DICKEN, P.: 2007, “Constructive Empiricism and the Metaphysics of Modality”, *British Journal for the Philosophy of Science*, 58: 605–612.

DIEUDONNÉ, JEAN : 1962, “Les methodes axiomatiques et les fondements des mathématiques” en F.Le Lionnais (edit.) “Les grands Courants de Pensèe Mathematique”, Paris: Blanchard.

_____1970 “The Work of Nicolas Bourbaki”, *Am.Math.Monthly* 77.

DOMSKI, M.: 2010, “Kant on the Imagination and Geometrical Certainty”, *Perspectives on Science*, 18 (4): 409–431.

_____2012, “Kant and Newton on the A Priori Necessity of Geometry”, *Studies in History and Philosophy of Science* (Part A), 44 (3): 438–447.

DOMSKI, M & DICKSON, M (editors): 2010, *Discourse on a New Method: Reinvigorating the Marriage* *of History and Philosophy of Science*, Chicago: Open Court Publishing.

DOOB JOSEPH L. :1941, "Probability as measure", *Annals of Mathematical Statistics*, 12: 206-214. This article originated as a paper for a meeting of the Institute of Mathematical Statistics in Hanover, New Hampshire, in September 1940. It was published together with an article by von Mises and comments by Doob and von Mises on each other's articles.

_____1947, "Probability in function space", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53:15-30.

_____1953, *Stochastic Processes*, New York: Wiley.

DOSEN, K.: 1990, "The first axiomatization of a relevant logic", *Konstanzer Berichte Logik & Wissenschaftstheorie* 9–90. 17 S. Traducción inglesa: Došen, K., 1992, "The first axiomatization of relevant logic", *Journal of Philosophical Logic*, 21: 339–356.

DOU, ALBERTO: 1967, "Los Paralogismos de Euclides y Saccheri en la Teoría de Paralelas", *Revista de la Real Academia de Ciencias*, Madrid, 61 (1967), 155-174.

_____1970, "Logical and Historical Remarks on Saccheri's Geometry", *Notre Dame Journal of Formal Logic", 11 (1970), 385-415.*

_____1974, *Fundamentos de la Matemática*, Barcelona: Editorial Labor.

DOUVEN, I.: 1999, "Putnam's Model-Theoretic Argument Reconstructed", *The Journal of Philosophy*, 96: 479–90.

DREBEN, B. & AANDERAA, S.: 1964, "Herbrand analyzing functions", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70 (1964), pp. 697-698.

DREBEN, B. & ANDREWS, P. & AANDERAA, S.: 1963, "False lemmas in Herbrand", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 69 (1963), pp. 699-706.

DREBEN, B. & DENTON, J.: 1966, "A supplement to Herbrand", *Journal of Symbolic Logic*, 31 (1966), pp. 393-398.

DREBEN, BURTON & VAN HEIJENOORT, JAN: 1986, "Introductory note", *Collected works of K. Godel*, vol. 1, Oxford University Press, 1986, pp. 44-59.

DROBISCH, MORITZ W.: 1836, *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachen Verhaltnissen*, Leipzig: Voss (four editions up to 1875).

DUBOIS, DIDIER: 2008, "On ignorance and contradiction considered as truthvalues", *Logic Journal of the IGPL*, 16: 195–216.

DUBOIS, DIDIER & NGUYEN, HUNG T. & PRADE, HENRI: 2000, "Possibility Theory, Probability and Fuzzy Sets", en *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Didier & Prade (edits.), pp. 343- 438, Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

DUBOIS, DIDIER & PRADE, HENRI: 2000, *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Didier & Prade (edits.), Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

_____2001, "Possibility Theory, Probability Theory and Multiple-valued Logics: A Clarification", *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 32:35–66, 2001.

DUMMETT, MICHAEL: 1959, "Truth", in: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 59: 141–162 (Reprinted in: "Truth and Other Enigmas", Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978, 1–24).

_____1973, *Frege: Philosophy of Language*, Harper & Row, New York. 2nd ed.(1981), London: Duckworth Publishers.

_____1977 (2000), *Elements of Intuitionism, Oxford Logic Guides* 39, Oxford: Clarendon Press, 1977; 2nd edition, 2000.

_____1978a, *Truth and Other Enigmas*, Michael Dummett (editor), Cambridge MA: Harvard University Press.

_____1978b, "Platonism", en Michael Dummett (editor) *Truth and Other Enigmas*, Cambridge MA: Harvard University Press.

_____1991, *Frege and Other Philosophers*, Oxford: Oxford University Press.

DUNLOP, K.: 2012, "Kant and Strawson on the Content of Geometrical Concepts", *Noûs*, 46 (1): 86–126.

DUNN, J. M. : 1973, (Abstract) "A 'Gentzen System' for Positive Relevant Implication," *The Journal of Symbolic Logic*, 38: 356–357.

_____1986, "Relevance Logic and Entailment" in F. Guenthner and D. Gabbay (eds.), *Handbook*

of Philosophical Logic, Volume 3, Dordrecht: Reidel, pp. 117–24. [Dunn has rewritten this piece together with Greg Restall and the new version has appeared in volume 6 of the new edition of the *Handbook of Philosophical Logic*, Dordrecht: Kluwer, 2002, pp. 1–128.]
_____1993, “Star and Perp,” *Philosophical Perspectives*, 7: 331–357.

DUNN, J. MICHAEL & EPSTEIN, GEORGE: 1977, *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, Boston: Reidel 1977.

EAGLE, A.: 2010, *Philosophy of Probability: Contemporary Readings*, London: Routledge.

EBBINGHAUS, HANS-DIETER & FLUM, JÖRG & THOMAS, WOLFGANG: 1996, *Einführung in die mathematische Logik*, 4. Auflage, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

EBBINGHAUS, HANS-DIETER :2003, “Zermelo: Definiteness and the Universe of Definable Sets,” *History and Philosophy of Logic*, 24: 197–219.
_____2007, “Löwenheim-Skolem Theorems,” in *Jacquette*: 587–614.

ECHEVERRÍA EZPONDA, JAVIER: 2012, “Technomathematical models in Social Sciences”, in Weber, M., Diesks, D., Gonzalez, W. J., Hartman, S., Stadler, F., and Stälzner, M. (eds), *Probabilities, Laws, and Structures*, Dordrecht: Springer, 347-360.
_____2011, *Leibniz*, Madrid: Gredos.
_____2005, “Función heurística de la filosofía para la historia de la ciencia: los Elementos de Euclides y las tablas de logaritmos de Neper, in Sergio F. Martínez and Godfrey Guillaumin (eds.), *Historia, Filosofía y Enseñanza de la Ciencia*, México: UNAM, 347-378.
_____2003, “Valores contrapuestos en la controversia Newton-Leibniz”, in J. Ferreirós and A. Durán (eds.), *Matemáticas y matemáticos*, Universidad de Sevilla y Real Sociedad Matemática Española, Sevilla: 85-103.
_____2000, “Expresión y representación en Leibniz”, in A. Ibarra and T. Mormann (eds.), *Variedades de la representación en la ciencia y la filosofía*, Barcelona: Ariel, 41-54.
_____1999a, *Introducción a la Metodología de la Ciencia. Filosofía de la Ciencia en el Siglo XX*, Madrid: Cátedra, 2ª edición (1ª edición, 1989).
_____1999b, "L'harmonie postétablie", in *Studia Leibnitiana Supplementa*, 34: 427-436.
_____1999c, “La Mathesis Universalis y el método griego de análisis y síntesis”, in V. Gómez Pin (ed.), *Descartes, lo racional y lo real*, Segundo Congreso Internacional de Ontología, Enrahonar, Universitat Autònoma de Barcelona, 1999, pp. 115-124.
_____1997a, “Leibniz, critique d'Euclide. La démonstration des axiomes d'Euclide, chez Leibniz”, *Synthesis Philosophica*, 17:4, 363-369.
_____1997b, “La filosofía de la ciencia en el siglo XX: principales tendencias”, *Agora*, 16/1: 5-39.
_____1996, “Empirical methods in mathematics. A case-study: the Conjecture of Goldbach”, in G. Munévar (ed.), *Spanish Studies on Philosophy of Science*, Dordrecht: Kluwer, 19-56.
_____1995, “Métodos empíricos en Matemáticas. La conjetura de Riemann como ejemplo”, *Arbor*, 600: 77-100.
_____1992, “Observations, Problems and Conjectures in Number Theory: the History of the Prime Number Theorem”, in J. Echeverría, A. Ibarra and T. Mormann (eds.), *The Space of Mathematics*, Berlin: De Gruyter, 230-250.
_____1991, “Cálculos Geométricos en Leibniz”, *Theoria*, II, VI, Nr. 14-15: 29-54.
_____1988, “Unidad de la Ciencia y concepción estructural”, in W. González (ed.), *Aspectos metodológicos de la investigación científica*, Publicaciones de la Universidad de Murcia, Murcia 1988, 287-302.
_____1987, “Las revoluciones científicas en Matemáticas: la teoría de conjuntos”, *Elementos*, año 2, nº7, vol.1: 13-20. Basado en la comunicación presentada en el 1º Congreso Latinoamericano de Historia de la Ciencia, La Habana (Cuba), 21 a 25 de Julio de 1985.
_____1985, “La identidad de las figuras geométricas”, *Theoria* II:1: 213-230.
_____1981, *Leibniz: el autor y su obra*, Barcelona: Barcanova.
_____1979, “L'Analyse Géométrique de Grassmann et ses rapports avec la Caractéristique Géométrique de Leibniz”, *Studia Leibnitiana* XI/2: 223-273.

EINSTEIN, ALBERT: 1905, “Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”, *Annalen der Physik*, 17:549-560, 1905. English translation in Einstein (1956).

_____1906, “Zur Theorie der Brownschen Bewegung”, *Annalen der Physik*, 19:371-381, 1906. English translation in Einstein (1956).

_____1921, *Geometrie und Erfahrung*, erweitete Fassung des Festvortrages gehalten an der Preussischen Akademie zu Berlin am 27. Januar 1921”, Verlag Julius Springer, Berlin 1921. Accesible online en *The Proyect Gutenberg eBooks:* **http://www.gutenberg.org/**
Traducción inglesa: *Geometry and experience.* En H. Feigl & M. Brodbeck (editors), *Readings in the Philosophy of Science*, New York: Appleton-Century-Crofts 1953.

_____1956, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, New York: Dover. First published by Dutton, New York, in 1926.

EKLUND, MATTI: 1996, “On how Logic became First-Order”, *Nordic Journal of Philosophical Logic*, Vol. 1, No. 2, pp. 147-167, 1996 Scandinavian University Press.

ENDERTON, HERBERT B.: 2012, "Second-order and Higher-order Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/logic-higher-order/**

ENGEL, S. MORRIS: 1963, “Kant’s Copernican Analogy: A Reexamination”, *Kant Studien 59,* pp.243-251.

_____1970, “Wittgenstein and Kant” , *Philosophy and Phenomenological Research* 20, pp. 483–513.

_____1971, *Wittgenstein’s Doctrine of the Tyranny of Language. An Historical and Critical Examination of his Blue Book*, The Hage: Martinus Nijhoff.

EPSTEIN, G.: 1960, “The lattice theory of Post Algebras”, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 95 (1960), 300-317.

EPSTEIN, R. L. & CARNIELLI, W. A.: 1999, *Computability: Computable Functions, Logic, and the Foundations of Mathematics,* Belmont, CA: Wadsworth Publishing.

ESENIN VOLPIN, ALEXANDER: 1961, “Le programme ultra intuitioniste des fondements des mathemathiques”, in A. Mostowski (edit.), *Infinitistic Methods*, pp. 201-233, Oxford: Pergamon Press.

_____1970, “The ultra-intuitionistic criticism and the antitraditional program for foundations of mathematics”, in *Intuitionism and proof theory (Proc. Conf., Buffalo, N.Y., 1968),*A. Kino & J. Myhill &R. Vesley (edits.), pp. 3–45, Amsterdam: North-Holland.

ETCHEMENDY, JOHN: 1990, *The Concept of Logical Consequence*, Cambridge, MA & London: Harvard University Press.

EUCLIDES: *Elementos*, Libros I a XIII, Traducción al español en Biblioteca Clásica Gredos en tres tomos, Madrid, 1991-1994, por María Luisa Puertas, Introducción y estudio Luis Vega, revisión de la traducción por Paloma Ortiz y Carlos García Gual.

_____Se puede consultar esta traducción junto con otras versiones en inglés, alemán y otros idiomas online en **http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm**. Incluye la posibilidad del uso del applet de Java de Geometría, con lo que se pueden modificar las figuras originales y simular movimiento.Traducciones inglesas: *The Thirteen Books of Elements, volumes I-III*, New York: Dover Publications 1956. translated with introduction and commentary by Sir Thomas Heath, from the text of Heiberg. The Head translation has also been issued as Euclid’s Elements: All Thirteen Books Complete in One Volume, Santa Fe: Geen Lion Press 2002.

EVANS, GARETH: 1982, *The Varieties of Reference*, ed. J. McDowell, Oxford: Clarendon Press.

EWALD, WILLIAM BRAGG.: 1996a, “Introductory note to Peirce”, in Ewald 1996b, pp. 596-598.

_____1996b, (edit) *From Kant to Hilbert: A sourcebook in the foundations of mathematics*, vol.1, Oxford: Oxford University Press.

_____1996c, (edit) *From Kant to Hilbert: A sourcebook in the foundations of mathematics*, vol. 2, Oxford: Oxford University Press.

EYSENCK, W. MICHAEL & KEANE, T. MARK: 2005, *Cognitive Psychology*, Hove & New York: Psychology Press. Accesible online:
http://es.scribd.com/doc/67901312/Eysenck-W-Michael-Keane-T-Mark-Cognitivepsychology

FALKENSTEIN, LORNE: 1995 (2004), *Kant`s Intuitionism. A Commentary on the Transcendental*

Aesthetic, Toronto: Toronto University Press.

FALLIS, D.: 1997, “The epistemological status of probabilistic proofs”, *Journal of Philosophy* 94(4): 165-186.

FANG, J.: 1969, “Hilbert’s Problems”, *Philosophia Mathematica* 6, 38-53.

_____1970, *Hilbert. Towards a Philosophy of Modern Mathematics II*, London: Paideia Press.

FEFERMAN, SOLOMON: 1960, “Arithmetization of metamathematics in a general setting”, *Fundamenta Mathematica* 49: 37-92.

_____1964, “Systems of predicative analysis", *Journal of Symbolic Logic*, 29, 1964.

_____1977, “Categorical foundations and foundations of category theory”, in (R.E. Butts and J. Hintikka, eds.) *Logic, Foundations of Matematics and Computability Theory,* Vol. I, Dordrecht: Reidel, 149-165.

_____1984a, “Toward Useful Type-Free Theories, I”, *The Journal of Symbolic Logic* 49 (1): 75-111.

_____1984b, “Kurt Goedel: Conviction and Caution”, in P. Weingartner and C. Pühringer (eds.), *Philosophy of Science, History of Science: A Selection of Contributed Papers of the 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Salzburg: A. Hain.

_____1988a, “Hilbert's Program relativized: Proof-theoretial and foundational reductions”, *Journal of Symbolic Logic*, 53(2): 364-284.

_____1988b, “Weyl Vindicated: Das Kontinuum seventy years later”, reprinted in S. Feferman, *In the Light of Logic*, New York: Oxford University Press, 1998, 249–283.

_____1993a, “What rests on what? The proof-theoretic analysis of mathematics”, *Philosophy of Mathematics. Proceedings of the Fifteenth International Wittgenstein-Symposium*, Part 1, Johannes Czermak, ed., Vienna: Hölder-Pichler-Tempsky, 147-171.

_____1993b, “Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics”, PSA 1992, 2: 442-455. Reprinted in Feferman (1998 Ch. 14, 284-298).

_____1995, “Penrose's Gödelian argument”, *Psyche* 2, 21-32; also at **http://psyche.cs.monash.edu.au/v2/psyche-2-07-feferman.html**

_____1996, “Gödel’s program for new axioms: why, where, how and what?”, in *Gödel '96* (P. Hájek, ed.). *Lecture Notes in Logic* 6, 3-22.

_____1997, “Relationships between Constructive, Predicative and Classical Systems of Analysis”, conferencia pronuciada en la University de Roskilde, Denmark, Nov.1, 1997.

_____1998, *In the Light of Logic*, Oxford: Oxford University Press.

_____2000, “Does reductive proof theory have a viable rationale?”, Erkenntnis, 53: 63-96.

_____2005, “Predicativity’, in S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, pp. 590–624.

_____2006a, “Are there absolutely unsolvable problems? Gödel's dichotomy”, *Philosophia Mathematica,* Series III vol. 14, 134-152.

_____2006b, “Open-ended schematic axiom systems (abstract)”, *Bull. Symbolic Logic* 12, 145.

_____2006c, “Enriched stratified systems for the foundations of category theory”, in (G. Sica, ed.), *What is Category Theory?*, Polimetrica, Monza, 185-203.

_____2008a, “Lieber Herr Bernays! Lieber Herr Gödel! Gödel on finitism, constructivity and Hilbert's program”, *Horizons of Truth* (Gödel centenary conference, Vienna, 27-29 April 2006). Reedited in (M. Baaz, et al., eds.) *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. Horizons of Truth.* New York: Cambridge University(2011), pp. 111-133.

_____2008b, “Philosophy of Mathematics: 5 Questions”, in *Philosophy of Mathematics*: 5 Questions (V. F. Hendricks and H. Leitgeb, eds.), Automatic Press/VIP 2008, 115-135.

_____2009, “Gödel, Nagel, Minds and Machines”, Lecture given at Columbia University on September 27, 2007. In *J. Philosophy* CVI, nr. 4, April 2009, 201-219.

_____2011, “Gödel’s incompleteness theorems, free will and mathematical thought. In memory of Torkel Franzén”, in *Free Will and Modern Science* (R. Swinburne, ed.), OUP for the British Academ (2011), 102-122.

_____2012a, “What's special about mathematical proofs?”, *Remarks for the Williams Symposium on Proof*, University of Pennsylvania, Nov. 9, 2012.

_____2012b, “Review of Curtis Franks *The Autonomy of Mathematical Knowledge: Hilbert’s program revisited*”, *Philosophia Mathematica*. Series III, 20 no.3 (2012), 387-400.

Los artículos son accesibles en la página **http://math.stanford.edu/~feferman/papers.html**

FEFERMAN, SOLOMON & STRAHM, THOMAS: 2000, "The unfolding of non-finitist arithmetic", *Annals of Pure and Applied Logic* 104, 75-96.

_____2010, "The unfolding of finitistic arithmetic", *The Review of Symbolic Logic* 3 (2010), 665-689.

FEFERMAN, S. & HELLMAN, G.: 1995, "Predicative Foundations of Arithmetic", *Journal of Philosophical Logic* 24, 1-17.

FELLER, W.: 1934, "Review of Kolmogorov (1933)", *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzegebiete*, 7:216, 1934.

_____1937, "Sur les axiomatiques du calcul des probabilités et leurs rélations avec les expériences", en (Fréchet, 1937), 7-21 y (Wavre, 1938-1939).

_____1939, "Über die Existenz sogenannter Kollektive", *Fund. Math.* 32 (1939), 87-96.

_____1968, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* , vols. I & II, New York: John Wiley & Sons.

FERMÜLLER, C. G.: 2003, "Theories of vagueness versus fuzzy logic: can logicians learn from philosophers?", *Neural Network World*, 13: 455–465.

FERREIRÓS, JOSÉ: 2012, "The Early Development of Set Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/settheory-early/**

_____2008, "The Crisis in the Foundations of Mathematics", *The Princeton Companion to Mathematics*, p.142, Edit.Timothy Gowers, Princeton: Princeton University Press.

_____2007, *Labyrinth of Tought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Bassel: Birkhäuser, 2ª edn. 1ª edn. 1999.

_____2001, "The Road to Modern Logic: An Interpretation", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol.7, 4: 441-484.

_____2000, "Riemanniana Selecta", Escritos de Riemann y estudio introductorio, editor J.Ferreirós, CSIC, Madrid.

_____1997, "Notes on types, sets and logicism", 1930-1950, *Theoria*, vol. 12 (1997), pp. 91- 124.

_____1996, "Traditional logic and the early history of sets, 1854-1908", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 50 (1996), pp. 5-71.

FERREIRÓS J. & GRAY, J. (editors): 2006, *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

FIELD, HARTRY: 2008, *Saving Truth from Paradox*, Oxford: Oxford University Press.

_____2007, "Solving the Paradoxes, Escaping Revenge", J.C. Beall (edit), *Revenge of the Liar*, Oxford: Oxford University Press 2007.

_____1989, *Realism, mathematics and modality*, Oxford: Basil Blackwell.

_____1980, *Science without numbers: a defense of nominalism*, Princeton:Princeton University Press.

FINE, K.. 1974, "Models for Entailment," *Journal of Philosophical Logic*, 3: 347–372.

FITELSON, BRANDEN: 1999, "The plurality of Bayesian measures of confirmation and the problem of measure sensitivity", *Philosophy of Science 66*, 362–378.

_____2001, *Studies in Bayesian Confirmation Theory*, Ph.D. Dissertation, University of Wisconsin. **http://fitelson.org/thesis.pdf**

FITTING, MELVIN: 2012, Fitting, Melvin, "Intensional Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/logic-intensional/edition:Winter2012**

FODOR, J.A.: 1975, *The Language of Thought*, Cambridge, Mass.: Bradford Books.

_____1983, *The Modularity of Mind*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

_____2008, *The Language of Thought Revisited*, Oxford: Oxford University Press.

FOMENKO, A.: 1994, *Visual Geometry and Topology*, Berlin: Springer Verlag.

FRAENKEL, a. & BAR-HILLEL, Y. & LEVY, A.: "Foundations of Set Theory", Amsterdam: North-Holland.

FRANCHELLA, MIRIAN: 2007, "Arend Heyting and Phenomenology: Is the Meeting Feasible?", *Bulletin d'analyse phénoménologique* III 2 (2007).

FRANKS, CURTIS: 2009, *The Autonomy of Mathematical Knowledge. Hilbert´s Program Revisited,* Cambridge: Cambridge University Press.

FRANZÉN, TORKEL: 2004, "Inexhaustibility. A Non-Exhaustive Treatment", *Lecture Notes in Logic, vol-16,* The Association for Symbolic Logic (edit), New York: CRC Press.

_____2005, *Gödel´s Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Boston, Mass.: A K Peters Ltd.

FRÉCHET, M.: 1937, "Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondéments du calcul des probabilités" , in *Colloque consacré au calcul des probabilités*, 22-55: Proceedings of a conference held at the Université de Genève in 1937. The papers concerning the foundations of probability were published in the series *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 735, Hermann (1938).

_____1938, "The diverse definitions of probability, lecture at the fourth International Congress for the Unity of Science", *Erkenntnis* (1938).

FREGE, GOTTLOB: 2007, *Begriffschrifft und andere Aufsätze,* herausgegeben von Ignacio Angelelli, mit Husserls und Scholz' Anmerkungen, Hildesheim: Georg Olms.

_____1990a, "Einleitung in die Logik", in: Frege, G., Schriften zur Logik und Sprachphilosophie, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 74–91.

_____1990b, *Kleine Schriften*, Hildesheim: Georg Olms AG.

_____1988, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Hamburg: Felix Meiner Verlag.

_____1987, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Stuttgart: Reclam. Traducción al español: *Fundamentos de la Aritmética*, Barcelona: Ed.Laia, 1972.

_____1986 (2008), *Funktion. Begriff, Bedeutung*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

_____1984, *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Ed. B. McGuinness, and trans. M. Black et al. Oxford: Blackwell.

_____1980a, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Ed. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, and A. Veraart. Abr. B. McGuinness and trans. H. Kaal Chicago:University of Chicago Press.

_____1980b, *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, so wie ausgewählte Einzelbriefe Freges*, Hamburg: Felix Meiner Verlag.

_____1980c, *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, 3d ed. Ed. and trans. P. Geach and M. Black. Oxford: Blackwell.

_____1976, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, and A. Veraart (eds.), Hamburg: Felix Meiner Verlag.

_____1967, *Kleine Schriften*, Ignacio Angelli (ed.), Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

_____1964a, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen. Herausgegeben von Ignacio Angelelli. Hildesheim: Olms.

_____1964b "On the Scientific Justification of a Concept-Script". Translated by J.M. Bartlett. *Mind*, 73:155–160.

_____1962, *Grundgesetze der Arithmetik, Bde. I und II,* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

_____1918, "Der Gedanke", Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus 1: 58–77. (Reprinted in (Frege 1967) and (Frege 1990)).

_____ 1903, "Über die Grundlagen der Geometrie", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 12: 319-24, 368-375.

_____ 1896, "Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene", *Verhandlungen der Koniglich Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematischphysicalische Klasse* 48: 362-68. Translation in (Frege 1984, pp. 234-248).

_____ 1895, "Review of (Schroder 1890)", *Archiv fur systematische Philosophie* 1: 433-56. Translation in (Frege 1980b, pp. 86-106).

_____ 1893, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlichabgeleitet*, Vol. 1. Jena: Pohle. Vol. 2 (1903). Reedición 1962.

_____1892, "Über Sinn und Bedeutung*"*, in: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* NF 100 (1892), 25-50, etliche Wiederabdrucke, z. B. in: Berka, K. / Kreiser, L. (Hrsg.):*Logik-Texte*. Berlin: Akademie-Verlag, 1983, 423–442, online auf **www.gavagai.de** (Reprinted in: Frege 1986 (2008)).

_____1891, "Function und Begriff. Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen

Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft", Jena: H. Pohle. Translation in (Frege 1980b), pp. 21-41. (Reprinted in (Frege 1986 (2008))).

_____1884, *Grundlagen der Arithmetik: Ein logisch-mathematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl*, Breslau: Koebner. Reedición:1987.

_____1883, "Über den Zweck der Begriffsschrift", *Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft* 16: 1-10. Translation in (Bynum 1972), pp. 90-100.

_____1882, "Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift", *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 81:48–56. Reprinted in (Frege, 1964a, pp. 106–114). English translation: (Frege, 1964b).

_____1879a, "Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens". Halle/Saale: Louis Nebert. Reprinted in (Frege, 1964a).Translation in (Bynum 1972) and in (van Heijenoort, 1967, pp. 1-82).

_____1879b, "Anwendungen der Begriffsschrift", *Jenaischer Zeitschrift fur Naturwiss*, 1879. Reprint in *Begriffsschrift und andere Aufsatze* (I. Angelelli, editor), Olms, Hildesheim, 1964.

FRIEDMAN, HARVEY: 1985, "Harvey Friedman's research in the foundations of mathematics", L. A. Harrington et al. (eds.), *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 117, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

FRIEDMAN, MICHAEL: 1974, "Explanation and Scientific Understanding", *Journal of Philosophy*, 71: 5–19.

_____ 1985, "Kant`s Theory on Geometry", *Philosophical Review*, 94: 455-506.

_____ 1992, *Kant and the exact Sciences*, Cambridge: Harvard University Press.

_____ 1994, "Geometry, Convention, and the Relativized A Priori: Reichenbach, Schlick, and Carnap", in: Wesley Salmon and Gereon Wolters (eds.), *Logic, Language, and the Structure of Scientific Theories*, Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, pp. 21-34.

_____ 1999, *Reconsidering Logical Positivism* New York: Cambridge University Press.

_____ 2000, "Geometry, Construction and Intuition in Kant and His Successors", *Between Logic and Intuition. Essays in Honor of Charles Parsons*. Gila Sher, Richard Tieszen edit., Cambridge: Cambridge University Press, pág.186-218.

_____2005, "Ernst Cassirer and the Philosophy of Science", Gutting editor, *Continental Philosophy of Science*, pp. 71-83, Oxford: Blackwell.

_____2010, "Synthetic History Reconsidered", in Domski and Dickson (eds.), *Discourse on a New Method: Reinvigorating the Marriage of History and Philosophy of Science*, 573–813, Chicago: Open Court Publishing.

_____2011, "Ernst Cassirer", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/cassirer/**

_____2012, "Kant on Geometry and Spatial Intuition", *Synthese*, 186: 231–255.

FRIES, JAKOB FRIEDRICH: 1967, *Sämtlichen Schriften*, Aalen: Scientia Verlag.
En 2004 se publicó el Vol. 28. En preparación Vols. 29 a 33. Información detallada en la página del Prof. Helmut Pulte de la Universidad de Bochum:
http://www.ruhr-uni-bochum.de/wtundwg/Forschung/Fries/Fries.html

GABBAY, D.: 1994, *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, New York: Oxford University Press.

_____1985, "Theoretical foundations for nonmonotonic reasoning in expert systems", in K. Apt (ed.), *Logics and Models of Concurrent Systems*, Berlin and New York: Springer Verlag, pp. 439–459.

_____1976, *Investigations in Modal and Tense Logics*, Dordrecht: D. Reidel.

GABBAY, D. & HOGGER, C. & ROBINSON, J. (eds.),: 1994, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, Oxford - New York: Oxford University Press.

GAIFMAN, H.: 2004a, "Reasoning with bounded resources and assigning probabiliy to arithmetical statements", *Synthese* 140: 97-119.

_____2004b, "Non-Standard Models in a Broader Perspective", in *Non-Standard Models on Arithmetic and Set Theory*, A. Enayat and R. Kossak, (eds.), New York: *American Mathematical Society*, pp. 1–22.

GALLANT, JACK & alt.: 2013, "Natural Scene Statistics Account for the Representation of Scene Categories in Human Visual Cortex", *Neuron*, Cell Press 2013.

_____2013, “Functional Subdomains within Human FFA”, *The Journal of Neuroscience*, October 16, 2013, 33(42):16748 –16766.
_____2013, “Attention During Natural Vision Warps Semantic Representation Across the Human Brain”, *Nature Neuroscience*, 2013.
_____2012, “A Continuous Semantic Space Describes the Representation of Thousands of Object and Action Categories across the Human Brain”, *Neuron*, Cell Press 2013.
_____2011, “Reconstructing Visual Experiences from Brain Activity Evoked by Natural Movies”, *Current Biology*, 21: 1641-1646.
_____2008, “Identifying natural images from human brain activity”, *Nature*, 452, 352-355. Las páginas del Prof. Gallant y de su equipo en la Universidad de Berkeley:
http://neuroscience.berkeley.edu/users/users_profile.php?id=12
http://gallantlab.org/

GARDINER, P.: 1959, *The Nature of Historical Explanation*, Oxford: Oxford University Press.

GARSON, JAMES: 2006, “Modal Logic for Philosophers”, Cambridge: Cambridge University Press.
_____2012, “Modal Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* , Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/logic-modal/**

GAZZANIGA, M.S. & IVRY, R.B. & MANGUN, G.R.: 1998, *Cognitive neuroscience: The biology of the mind*, New York:W.W.Norton.

GENTZEN, G.: 1933, “Über das Verhältnis zwischen intuitionistischer und klassischer Logik”. First published in *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung* 16 (1974), 119–132. English translation in [Gentzen, 1969, 53–67], 1933.
_____1934, “Untersuchungen über las logische Schliessen”, *Mathematische Zeitschrift 39*, reimpresión en Karel Berka & Lothar Kreise (edit.), *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschiechte der modernen Logik*, Berlin:Akademie 4. Aufl., 1986, pp. 206-261. English translation in Gentzen 1969, pp. 68–131.
_____1936, ”Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie”, *Mathematische Annalen*, vol. 112, pp. 493-565. Published as “Der erste Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Zahlentheorie” in *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung* 16 (1974), 97–118. English translation in (Gentzen, 1969,132–213).
_____1938, “Die gegenwartige lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Neue Fassung Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie”, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, neue Folge, 4, Leipzig: Hirzel, 1938, pp.1-18.
_____1943, “Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, 119:140–161. English translation in (Gentzen, 1969, 287–308).
_____1969, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, trl. M. Szabo, editor, Amsterdam: North-Holland.

GERLA, G.: 2001, *Fuzzy logic: Mathematical Tools for Approximate Reasoning*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

GIAQUINTO, MARCUS: 1983, “Hilbert's philosophy of mathematics”, *British Journal for Philosophy of Science*, 34: 119-132.
_____1992, “Visualizing as a means of geometrical discovery”, *Mind and Language*, 7: 382-401.
_____1994, “Epistemology of Visual Thinking in Elementary Real Analysis”, *British Journal for the Philosophy of Science*, 45 (3): 789-813.
_____2002, *The Search for Certainty. A Philosophical Account of Foundations of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.
_____2005a, “From Symmetry Perception to Basic Geometry”, en Mancosu, Jorgensen and Pedersen (editors), *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics*, 13-30, Dordrecht: Springer.
_____2005b, “Mathematical Activity”, en Mancosu, Jorgensen and Pedersen (editors), *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics*, 75-90, Dordrecht: Springer.
_____2007, *Visual Thinking in Mathematics: an Epistemological Study*, Oxford: Oxford University Press.
_____2008a, “Visualizing in Mathematics”, en *The Philosophy of Mathematical Practice*, 22-42, Paolo Mancosu (editor), New York: Oxford University Press.

_____2008b, “Cognition of Structure”, en *The Philosophy of Mathematical Practice*, 43-64, Paolo Mancosu (editor), New York: Oxford University Press.

GIBSON, J.J.: 1979, *The Ecological Approach to Visual Perception*, Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

GIERE, RONALD.: 1988, *Explaining Science. A Cognitive Approach*, Chicago: University of Chicago Press.

GILLIES, D. (editor): 1992, *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

GINGSBERG, MATTHEW., (ed.), 1987, Ginsberg (edit.), *Readings in Nonmonotonic Reasoning*, Los Altos, CA: Morgan Kauffman.

_____1988, “Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in AI”, *Computer Intelligence*, 4: 256–316.

GLANZBERG, MICHAEL: 2013, "Truth", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/truth/**

GLASGOW, J. & NARAYANAN, N. H. & CHANDRASEKARAN, B.: 1995, *Diagrammatic Reasoning. Cognitive and Computational Perspectives*, AAAI Press / The MIT Press.

GLIVENKO, V.**:** 1928, “Sur la logique de M. Brouwer”, *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, 14: 225–228.

_____1929, “Sur qulques points de la logique de M. Brouwer,” *Academie Royale de Belgique*, *Bulletins de la classe des sciences*, 5 (15): 183–188.

GLOCK, H.J.: 2003, “Strawson and Analytic Kantianism” in H.-J. Glock (ed.) *Strawson and Kant*, Oxford: Clarendon/Oxford University Press, pp. 15–42.

GÖDEL, KURT: 1929, *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*, Doctoral dissertation, University of Vienna- The first proof of the completeness theorem.

_____1930, “Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls”, *Monatshefte für Mathematik* 37 (1): 349–360

_____1931, “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Matemathica* und verwandter Systeme”, *Monatshefte für Mathematik* 38 (1931), 173-198. Traducción española en *Cuadernos Teorema*, Departamento de Lógica de la Universidad de Valencia, Valencia, 1981. Esa traducción incluye el ensayo de R.B. Braithwaite incluído en la traducción inglesa, Oliver & Boyd, Edimburgo-Londres, 1962. Traducción inglesa en: van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel: A sourcebook in mathematical logic 1879-1931*, Cambridge: Harvard University Press, 1967 (pp. 596-616).

_____1932a, “Zum intuitionistischen Aussagenkalkül”, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaftischen in Wien* 69: 65–66.

_____1932b, “Eine intuitionistische Interpretation des Aussagenkalküls”, *Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloquiums* (1932), S. 39-40.

_____1933, “Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie,” *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4: 34–38.

_____1940

(a)”The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis”, *Poceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, vol. 24 (1938), pp. 556-557

(b)“Consistency-proof for the generalized continuum hypothesis”, *Poceedings of the National Academy of Sciences of the USA*,vol. 25 (1939), pp.220-224.

(c)“The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory”, (Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, 1938-1939), *Annals of Mathematical Studies*, n. 3, Princeton: Princeton University Press, 1940.

_____1940d (1990), “The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory”, in S. Feferman, et al. (eds.), *Collected Works of Kurt Gödel*, vol. 2. Oxford: Oxford University Press, pp. 33- 101.

_____1940e (1990), “The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory”, in S. Feferman, et al. (eds.), *Collected Works of Kurt Gödel*, vol. 2. Oxford: Oxford University Press, pp. 33- 101.

_____1944 (1990), “Russell's Mathematical Logic”, in S. Feferman, et al. (eds.), *Collected Works of Kurt*

Gödel, vol. 2. Oxford: Oxford University Press, pp. 119- 141.También en Benacerraf & Putnam 1983, 447–469.

_____1949a (1990), "An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation", in S. Feferman, et al. (eds.), *Collected Works of Kurt Gödel*, vol. 2. Oxford: Oxford University Press, pp. 190-198.

_____1949b (1990), "A Remark about the Relationship between Relativity Theory and Idealistic Philosophy", in S. Feferman, et al. (eds.), *Collected Works of Kurt Gödel*, vol. 2. Oxford: Oxford University Press, pp. 202-207.

_____1958, "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", *Dialectica*, 12: 280–287. Reproduced with an English translation in Gödel 1990: 241–251.

_____1961, "The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy", revision by J. Dawson of an unpublished transcription by H. Wang and E. Kohler. Firestone Library, Princeton University. Tambien en S. Feferman, et al. (eds.), *Collected Works of Kurt Gödel*, vol. 3, Oxford: Oxford University Press

_____1964 (1990), "What is Cantor's Continuum Problem?", in S. Feferman, et al. (eds.), *Collected Works of Kurt Godel*, vol. 2. Oxford: Oxford University Press, pp. 254-270.

_____1972 (1990), "On an Extension of Finitary Mathematics Which Has Not Yet Been Used", in S. Feferman, et al. (eds.), *Collected Works of Kurt Gödel*, vol. 2. Oxford: Oxford University Press, pp. 271-280.

_____1986, 1990, 1995, 2003 y 2003 , *Collected Works of Kurt Gödel,*
Vol. I: *Collected works I: Publications 1929-1936*, (1986)
Vol. II: *Collected works II: Publications 1938-1974*, (1990)
Vol. III: *Collected works III: Unpublished essays and lectures,* (1995)
Vol. IV: *Collected works IV: Correspondence A -G*, (2003)
Vol. V: *Collected works V: Correspondence H –Z,* (2003)
Feferman, S., et al. (eds.), Oxford: Oxford University Press.

_____1989, "Obras Completas", Alianza Editorial, Madrid,2ª edición. Traducción de Jesús Mosterín del original "Collected Works: Vol. I" , Princeton 1986, editor Solomon Feferman.

_____(n.d.), "Is Mathematics Syntax of Language?", in *K. Gödel Nachlass*. Firestone Library of Princeton University, Princeton.

Literatura secundaria sobre Gödel manejada en este trabajo:
(Goldstein, 2005), (Pla, 2012), (Nagel & Newman, 1956 y 1958(2001)), (Franzén, 2005), (Hintikka, 2000), (Wang, 1974, 1987 y 1996), (Hahn, 1994), (Dawson, 1997), (Kreisl, 1980), (Tausski-Todd, 1987), (Hofstadter, 1974), (Penrose, 1989 y 1994), (Smullyan, 1995), (Feferman, 1984b, 1995, 2006a, 2008a, 2009, 2011), (Kadvany, 1989), (Kennedy, 2003 y 2012), (Kennedy & Van Atten, 2003).

GOLDBLATT, ROBERT: 1992, *Logics of Time and Computation*, 2nd ed., CSLI Lecture Notes No. 7. University of Chicago Press.

_____1993, *Mathematics of Modality*, CSLI Lecture Notes No. 43. Chicago: University of Chicago Press.

_____2006a, "Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution", in Gabbay, D., and Woods, J. (eds.), *Handbook of the History of Logic*, vol. 6, Amsterdam: Elsevier. Primera publicación en: *Journal of Applied Logic*, 1(5–6):309–392, (2003).

_____2006b, *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, Mineola, NY: Dover Publications.

_____2011, *Quantifiers, Propositions and Identity: Admissible Semantics for Quantified Modal and Substructural Logics*, Cambridge: Cambridge University Press.

GOLDFARB, WARREN.: 1979, "Logic in the twenties: The nature of the quantifier", *Journal of Symbolic Logic*, 44, 351-368.

_____1990, "Herbrand's theorem and the incompleteness of arithmetic", Iyyun, *A Jerusalem Philosophical Quarterly*, 39 (1990), pp. 45-64.

_____1993, "Herbrand's error and Gödel's correction", *Modern Logic*, 3, pp.103-118.

GOLDFARB, W. (edit.): 1971, *Jaques Herbrand: Logical Writings*, Cambridge: Harvard University Press.

GOLDSTEIN, REBECCA: 2005, *Incompleteness: the proof and paradox of Kurt Gödel*, New York & London: W.W. Norton & Company. Traducción española por Víctor Ubeda (2005), *Gödel. Paradoja y Vida*, Barcelona: Antoni Bosch Editor.

GONSETH, F.: 1941, *Les entretiens de Zurich, 6-9 décembre 1938*, Zurich: Leeman.

GOODMAN, N.D. & MYHILL, J.: 1978, "Choice Implies Excluded Middle", *Zeitschrift für Logik und Grundlagen der Mathematik*, 24: 461.

GOTTFRIED, GABRIEL: 1984, "Fregean connection: Bedeutung, value and truthvalue", *The Philosophical Quarterly*, 34: 372–376.

GOTTWALD, SIEGFRIED: 1989, *Mehrwertige Logik. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen*, Berlin: Akademie-Verlag.

_____2001, *A Treatise on Many-valued Logic*, serie *Studies in Logic and Computation*, vol. 9, Baldock, Hertfordshire: Research Studies Press.

_____2005, "Many-Valued Logics", accesible online: **http://www.uni-leipzig.de/~logik/gottwald/SGforDJ.pdf**

GOWERS, T.: 2002, *Mathematics. A Very Short Introduction*, Oxford: Oxford University Press.

GRAM, MOLTKE S.: 1976, "How to Dispense with Things in Themselves", *Ratio* 18.

GRANSTRÖM, JOHAN: 2011, *Treatise on Intuitionistic Type Theory*, New York: Springer.

GRATTAN-GUINESS, IVOR: 1979, "In memoriam Kurt Gödel: His 1931 correspondence with Zermelo on his Incompletability Theorem", *Historia Mathematica*, 6, pp. 294-304.

_____1980, *From the Calculus to Set Theory*, London: Duckworth.

GRAY, JEREMY J.: 2000, *The Hilbert challenge*, New York: Oxford University Press.

_____2008, *Plato´s Ghost. The modernist transformation of Mathematics*, Princeton: Princeton University Press.

_____2013, *Henri Poincaré. A Scientific Biography*, Princeton- Oxford: Princeton University Press.

GRAY, ROBERT M.: 1990 (2013), *Entropy and Information Theory*, New York: Springer Verlag. 6ª edic.2013.

GREENBERG, M.J.: 1972, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, San Francisco: W.H. Freeman.

GRZEGORCYK, A.: 2005, "Undecidability without arithmetization", *Studia Logica*, *79* (2), 163-230.

GROSHOLZ, E. & BREGER, H. (editors): 2000, *The Growth of Mathematical Knowledge*, Dordrecht: Kluwer.

GRZEGORCYK, A. & ZDANOWSKI, K.: 2008, "Undecidability and concatenation". In A. Ehrenfeucht, V. W. Marek, & M. Srebrny (Eds.), *Andrzej Mostowski and foundational studies*, pp. 72-91. Amsterdam: IOS Press.

GUERRERO PINO, GERMAN.: 2003, *Enfoque semántico de las teorías. Estructuralismo y espacio de estados:coincidencias y divergencias*, Tesis doctoral, dirigida por Javier Echeverría Ezponda, Universidad Complutense de Madrid. **http://biblioteca.ucm.es/tesis/fsl/ucm-t26661.pdf**

_____2007, "Van Fraassen y la concepción estructuralista de las teorías", *Praxis Filosófica*, 25: 21-38.

_____2008, "Individuación de las teorías en el enfoque semántico", *Principia* 12/1: 97-119.

_____2012, "Compromisos epistémicos en el enfoque estructuralista de las teorías", *Revista de Filosofía*, Vol. 37 Núm. 1 (2012): 7-26.

GUPTA, ANIL: 2012, "Definitions", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/definitions/**

GUTTING, G.: 1985, "Scientific Realism versus Constructive Empiricism: A Dialogue", in Churchland and Hooker 1985, pp. 118–131.

GUYER, PAUL: 1984, "Direktes Wissen und die 'Wiederlegung des Idealismus'", en "Die Transzendentalphilosophie und das Problem der Außenwelt", en E. Schaper & W. Vossenkuhl (Eds.): Bedingungen der Möglichkeit. 'Transcendental Arguments' und transzendentales Denken, 236-242, Stuttgart: Klett-Cotta.

_____1987, *Kant and the Claims of Knowledge*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1992, Guyer, P. (ed.), *The Cambridge Companion to Kant*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____2006a, Guyer, P. (ed.), *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____2006b, *Kant*, New York: Routledge.

GUYER, PAUL & WOODS, ALLEN W. (editors): 1962 (2003), *Immanuel Kant: Theoretical Philosophy, 1755-1770*, Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 2ª edición , 2003.

HAACK, SUSAN: 1979, "Do we need 'Fuzzy Logic'", *Int. J. of Man-Machine Studies*, 11, 437-445.

_____1996, *Deviant Logic, Fuzzy Logic. Beyond the Formalism*, Chicago: University of Chicago Press.

HAAPARANTA, LEILA (edit.): 2009, *The Development of Modern Logic*, New York: Oxford University Press.

HACHER, W. S.: 1982, *The Logical Foundations of Mathematics*, Oxford: Pergamon.

HACKER, P. M. S. : 1986, *Insight and Illusion* (revised ed.), New York: Oxford University Press.

HACKING, I.: 1985, "Do We See Through a Microscope?", in Churchland and Hooker 1985, pp. 132–152.

HADAMARD, JAQUES: 1945 (1996), *The Mathematician's Mind. The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton: Princeton University Press. Reedition with a new preface by P.N. Johnson-Laird, Princeton: Princeton University Press, Princeton Science Library, 1996.

HAFEMANN, BURKHARD: 1998, *Aristóteles' transzendentaler Realismus: Inhalt und Umfang erster Prinzipien in der Metaphysik*, Berlin, New York: Walter de Gruyter Verlag.

HAFNER, JOHANNES: 2005, *From Metamathematics to Philosophy: A Critical Assessment of Putnam's Model-Theoretic Argument*, Ph.D. Thesis, UC Berkeley.

HAFNER, JOHANNES & MANCOSU, PAOLO: 2005, "The Varieties of Mathematical Explanation", en Mancosu, Jorgensen, Pedersen (editors) *Visualization, Explanation and Resoning Styles in Mathematics*, 215-250, New York: Springer.

_____2008, "Beyond Unification", en Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice*, 151-178, Oxford & New York: Oxford University Press.

HAGAR, A.: 2008, "Kant and Non-Euclidean Geometry", *Kant-Studien*, 99 (1): 80–98.

HÁJEK, PETR & PUDLÁK, PAVEL: 1998, [1993] *Metamathematics of first-order arithmetic*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag.

HÁJEK, PETR

_____2010, "Fuzzy Logic", The *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2010/entries/logic-fuzzy/**

_____1998, *Metamathematics of fuzzy logic*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

HÁJEK, ALAN: 2012, *Interpretations of Probability*, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/probability-interpret/**

HALBACH, VOLKER: 2009, "Axiomatic Theories of Truth", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2009/entries/truth-axiomatic/**

HALE, B. & WRIGHT, C.: 1997, "Putnam's Model Theoretic Argument against Metaphysical Realism", in *A Companion to the Philosophy of Language*, B. Hale and C. Wright, (eds.), Oxford: Blackwell, 427–457.

HALLETT, MICHAEL: 2008, "Reflections on the Purity of Method in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*", en Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice*, 198-255, Oxford & New York: Oxford University Press.

_____1984, *Cantorian set theory and the limitation of size*, Oxford: Clarendon Press.

HALMOS, PAUL R.: 1950, *Measure Theory*, New York: Van Nostrand. Reedición, New York: Springer Verlag, 1974.

_____1960 (1974), *Naïve Set Theory*, New York: Springer-Verlag.

HAMMER, E. M.: 1995, *Logic and Visual Information*, Stanford: CSLI Publications.

HANNA, ROBERT: 1998a, "A Kantian critique of scientific essentialism." *Philosophy and Phenomenological Research* 58: 497–528.

_____1998b, "How do we know necessary truths? Kant's answer." *European Journal of Philosophy* 6: 115–45.

_____2000, "The inner and the outer: Kant's 'Refutation' reconstructed." *Ratio* 13: 146–74.

_____2001, *Kant and the Foundations of Analytic Philosophy*. Oxford: Clarendon Press.
_____2002, "Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of Arithmetic Revisited", *European Journal of Philosophy*, 10 (3): 328–352.
_____2004, "Kant's theory of judgment", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2004 Edition)*,ed.E.Zalta. **http://plato.stanford.edu/archivesfall2004/entries/kant-judgment/**
_____2005, "Kant and nonconceptual content." *European Journal of Philosophy* 13: 247–90.
_____2012a, *Kant, Science, and Human Nature*. Oxford: Oxford University Press.
_____2012b,"Kant, Wittgenstein, and the fate of analysis". In M. Beaney (ed.) *The Analytic Turn*, London: Routledge.
_____2012c, *Rationality and Logic*, Cambridge, MA: MIT Press.

HANSON, N. R.: 1959, "Copernicus' Role in Kantian's Revolution", *Journal of History of Ideas 20*, (1959), 274- 281.

HARARI, ORNA: 2008, "Proclus' Account of Explanatory Demonstrations in Mathematics and its Context", *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 90 (2):137-164.

HARDY, G. H.: 1929, "Mathematical Proof", *Mind 38*, 1-25.

HARPER, W.: 1984, "Kant on Space, Empirical Realism and the Foundations of Geometry", *Topoi*, 3 (2): 143–161. [Reprinted in C. Posy (editor), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,1992.]

HARRISON, JOHN: 2009, *Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning*, Cambridge: Cambridge University Press.

HART, W.: 1970, "Skolem's Promises and Paradoxes", *The Journal of Philosophy*, 67: 98–109.

HARTSHORNE, ROBIN: 2005, *Geometry: Euclid and beyond*, New York: Springer.

HASENJAEGER, GISBERT: 1953, "Eine bemerkung zu Henkin's beweis für die vollständigkeit des prädikatenkalküls der ersten stufe", *Journal of Symbolic Logic* 18 (1):42-48 (1953).

HAUKIOJA, J.: 2001, "Not So Quick: A Reply to Chambers", *Mind*, 110: 699–702.

HATFIELD, G.: 1990, *The Natural and the Normative: Theories of Spatial Perception from Kant to Helmholtz*, Cambridge: MIT Press.
_____1996, "Rewiew Essay: The Importance of the History of Science for Philosophy in General", *Synthese* 106, 113-138.
_____2006, "Kant on the Perception of Space (and Time)", en Guyer, P. (ed.), 2006, *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*, 61–93, Cambridge: Cambridge University Press., pp. 61–93.

HAWKINS, THOMAS: 1984, "The *Erlanger Programm* of Felix Klein: Reflections of its place in the History of Mathematics", *Historia Mathematica, 11*, 442-470.
_____1989, "Line geometry, differential equations and the birth of Lie's theory of groups", en *History of Modern Mathematics*, vol. I, pp.275-327, San Diego:Academic Press.

HAZEN, ALAN: 1999, "Logic and Analyticity", en A.C.Varzi (editor), *The Nature of Logic*, Stanford, CA: CSLI.

HEBBELER, JAMES: 2003, *Interpreting Kant´s Critiques*, Oxford: Clarendon Press.
_____2005, "Letters on the kantian Philosophy" de Reinhold (2005), Estudio introductorio. Cambridge: Cambridge University Press.

HECHT, HARTMUT: 1994, "Hans Reichenbach zwischen transzendentaler und wissenschaftsanalytischer Methode", in: Danneberg et al. (eds.), pp. 219-227.

HEIS, JEREMY: 2007, *The Fact of Modern Mathematics: Geometry, Logic, and Concept Formation in Kant and Cassirer*, a dissertation defended in Sept 2007, University of Pittsburgh. **http://d-scholarship.pitt.edu/9248/**
http://d-scholarship.pitt.edu/9248/1/JHeisDiss_KantCassirer.pdf
_____2008, *Ernst Cassirer's Neo-Kantian Philosophy of Mathematics*, PhD thesis, University of California, Irvine. Accesible online:
_____2011, "Ernst Cassirer's Neo-Kantian Philosophy of Mathematics", *British Journal for the History of Philosophy* 2011, vol 19, no 4, pp.759-94. (This paper was awarded the 2011 Rogers Prize by the

British Society for the History of Philosophy).
https://webfiles.uci.edu/jheis/www/Heis,%20Cassirer%20PhilGeom%20BJHP.pdf

_____2013, "Frege, Lotze, and Boole" to appear in The Historical Turn in Analytic Philosophy, edited by Erich Reck, 2013

HELMHOLTZ, HERMANN VON: 1887, "Zahlen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet", en *H. von Helmholtz Schriften zur Erkenntnistheorie*, 70-108, Berlin: Julius Springer 1887 [1921]. Traducción inglesa: "Numbering and Measuring from an epistemological viewpoint", en *H.von Helmholtz Epistemological Writtings*, 70-114, Dordrecht: Reidel 1977. Una traducción anterior: *Counting and Measuring*, Princeton: Van Nostrand, 1930.

HELLMAN, GEOFFREY: 2004, "Predicativism as a Philosophical Position", *Revue Internationale de Philosophie* (special issue ed. by P. Rouilhan) 58, 3 (2004): 295-312

_____1994, "Real Analysis without Classes", *Philosophia Mathematica (3)* 2 (1994), 228-250.

_____1989, *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford: Oxford University Press.Home page: **http://www.tc.umn.edu/~hellm001/**
Publicaciones accesibles online: **http://www.tc.umn.edu/~hellm001/SelectedPublications.html**

HEMPEL, CARL G.: 1965a, *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science*, New York: Free Press.

_____1965b, "Aspects of Scientific Explanation", en (Hempel 1965a, 331–496).

_____1942, "The Function of General Laws in History", *Journal of Philosophy*, 39: 35–48; reeditado en (Hempel 1965b, pp. 231–244).

HEMPEL, C. & OPPENHEIM, P.: 1948, "Studies in the Logic of Explanation", *Philosophy of Science*, 15: 135–175. Reimpreso en (Hempel, 245–290, 1965a).

HENKIN, LEON: 1949. "The Completeness of the First-Order Functional Calculus", *Journal of Symbolic Logic*, 14: 159–166.

HERBRAND, JAQUES: 1930a, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, tesis doctoral de Herbrand en la Universidad de Paris, translated in Goldfarb 1971, pp. 44-202.

_____1930b, "Les bases de la logique hilbertienne", *Revue de métaphysique et de morale* 37: 243-255, translated in Goldfarb 1971, pp.203-214.

_____1931a, "Sur le pròbleme fondamental de la logique mathématique", *Sprawozdania z posiezden Towarzystwa Naukowego Warzawskiego, Wydzial* III 24: 12-56, translated in Goldfarb 1971, pp. 215- 271.

_____1931b, "Sur la non-contradiction de l'arithmetique", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 166: 1-8, translated in Goldfarb 1971, pp.282-298.

Una relación completa de sus obras, incluyendo las publicaciones póstumas, las traducciones y los accesos online:

1) *Sur la theorie de la demonstration, Comptes rendus Acad. Sci., Paris, Band 186, 1928, S. 1274–1276*
2) *Non-contradiction des axiomes arithméthiques, Comptes rendus Acad. Sci.,Paris, Band 188, 1929, S. 303–304*
3) *Sur quelques propriétés des propositions vraies et leurs applications, Comptes rendus Acad. Sci., Band 188, 1929, S. 1076–1078*
4) *Sur le problème fondamentale des mathématiques, Comptes rendus Acad. Sci., Band 189, 1929, S. 554–556, 720*
5) *Sur le problème fondamentale de la logique mathématique, Comptes Rendus Soc. Sci. et L. de Varsovie, 1931*
6) *Les bases de la logique hilbertienne, Revue de metaphysique et de morale, Band 37, 1930, S. 243–255*
7) *Recherches sur la theorie de la demonstration, Thesis Universität Paris 1930 (und in Travaux Soc. des Sci. et L. de Varsovie), Online, englische Übersetzung: Investigations in proof theory: the properties of true dispositions, 1930, in Jean Van Heijenoort (Herausgeber) From Frege to Gödel, Harvard University Press 1967, S. 525, Acceso on line:*
http://www.numdam.org/numdam-bin/fitem?id=THESE_1930__110__1_0
8) *Zur Theorie der algebraischen Funktionen (aus Briefen an Emmy Noether), Mathematische Annalen, Band 106, 1932, S. 52 (postume Mitteilungen von Resultaten von Herbrand durch Emmy Noether)*

9) *Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini, Teil I: Extensions algébriques finies de corps infinie, Mathematische Annalen, Band 106, 1932, S. 473 (mit Nachruf von Emmy Noether), Teil II: Extensions algébriques de degré infini, Mathematische Annalen, Band 109, 1933, S. 699 (aus dem Nachlass von Claude Chevalley)*
10) *Sur la non-contradiction de l´arithmétique, Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 166, 1931, S.1–8 (mit Vorwort von Helmut Hasse), englische Übersetzung in Heijenoort From Frege to Gödel, Harvard UP, 1967, The consistency of arithmetic, S. 618–628.*

Sus obras completas traducidas al inglés:
_____1971, *Collected Works*, W. Goldfarb (ed.), Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

HERMITE C. & STIELTJES T., : 1905, *Correspondance*, tomo II, Paris: Gauthier-Villars.

HERSH, R.: 1997, *What is Matematics, Really?*, New York: Oxford University Press.
_____2006, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, R. Hersh (editor), New York: Springer.

HERTZ, HEINRICH RUDOLPH: 1894, *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt*, Leipzig: I. A. Barth. Reedición: Verlag: Europa-Lehrmittel; Auflage: 2. A. (1996). Edición facsímil: Kessinger Pub Co (2009). Traducción inglesa: New York, Dover Publ., 1956 (2ª edición 2003).

HEYTING, AREND: 1930a, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik," in three parts, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.: 42–71, 158–169. English translation of Part I in Mancosu 1998b: 311–327.
_____1930b, "Sur la logique intuitionniste", *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences*, 16: 957–963. English translation in Mancosu 1998, pp. 306–310.
_____1931, "Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis,* 2: 106–115. English translation in Benacerraf and Putnam 1983, pp. 52–61.
_____1934, *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, Berlin: Springer.
_____1950, *Les Fondements des Mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la Démonstration*, Paris & Louvain: Gauthier Villars & Nauwelaerts.
_____1956, *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam: North-Holland Publishing, 3rd revised edition, 1971.
_____1974, "Intuitionistic views on the nature of mathematics", *Synthese,* 27: 79–91.
_____1975, *L. E. J. Brouwer: Collected Works 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Heyting, A. (ed.), Amsterdam and New York: Elsevier.

HINTIKKA, JAAKKO: 1957, "Quantifiers in Deontic Logic", *Societas Scientiarum Fennica, Commentationes humanarum litterarum*, 23 (1957):4, Helsingfors
_____1961, "Modality and Quantifcation", *Theoria* 27 (1961): 119-128.
_____1962, *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Ithaca, N. Y.: Cornell University Press.
_____1963, "The Modes of Modality", *Acta Philosophica Fennica* 16: 65-82.
_____1965, "*Kant's 'New Method of Thought*' and his Theories of Mathematics", *Ajatus*, 27: 37–47.
_____1967, "Kant on the Mathematical Method",*Monist*, 51: 125-148. Reprinted in C. Posy, (ed.),1992, *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
_____1969a, *Models for Modalities*, Dordrecht: D. Reidel Publ. Co.
_____1969b, "*On Kant's Notion of Intuition* (Anschauung)", in T. Penelhum and J. J. MacIntosh (eds.), *The First Critique,* 38-53, Belmont, CA: Wadsworth Publishing.
_____1973, *Logic, Language Games and Information*, Oxford: Clarendon Press.
_____1975, *The Intentions of Intentionality and Other New Models for Modalities*, Dordrecht: D. Reidel Publ. Co.
_____1980, "Standard vs. Nonstandard Logic: Higher-Order, Modal, and First-Order Logics," in E. Agazzi (ed.), *Modern Logic — A Survey*, Dordrecht: Reidel, 183-196.
_____1982, "Is Alethic Modal Logic Possible?", *Acta Philosophica Fennica* 35: 89-105.
_____1984a, "Das Paradox transzendentaler Erkenntnis", en: E. Shaper u. W. Vossenkuhl (eds.):*Bedingungen der Möglichkeit, 'Transzendental Arguments' u. transzendentales Denken*, Stuttgart 1984, 123-149.
_____1984b, "Kant's Transcendental Method and His Theory of Mathematics", *Topoi,* 3 (2): 99–108.

[Reprinted in C. Posy, (ed.), 1992, *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.]

_____1992, "Kant on the Mathematical Method", en C. Posy (editor) *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

_____1997, *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator*, Dordrecht: Kluwer, 1997.

_____2009, "Logicism," in Irvine, A.D. (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: Elsevier/North Holland, 271–290.

HINTIKKA, J. & SANDU, G.: 1995, "The Fallacies of the New Theory of Reference," *Synthese* , vol.104, 245-83.

HINTIKKA, JAAKKO & SYMONS, JOHN: 2003,"Systems of Visual Identification in Neuroscience: Lesons from Epistemic Logic", *Philosophy of Science* 70, 89-104.

HODGES, WILFRID

_____1993, *Model theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____2013, "Tarski's Truth Definitions", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/tarski-truth/**

HODGES, WILFRID & SCANLON, THOMAS: 2013, "First-order Model Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2013/entries/modeltheory-fo/**

HOFSTADLER, D.: 1979, *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, New York: Basic Books.

HORSTEN, LEON: 2012, "Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/philosophy-mathematics/**

HORSTMANN, R. P.: 1976, "Space as Intuition and Geometry", *Ratio*, 18: 17–30.

HORTY, J. F.: 2002, "Skepticism and floating conclusions", *Artificial Intelligence Journal*, 135: 55–72.

_____2001, "Nonmonotonic Logic," in Goble, Lou, ed., *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, London: Blackwell.

_____1994, "Some direct theories of nonmonotonic inheritance", in Gabbay et al.(1994), pp. 111–187

HORWICH, PAUL: 1982, *Probability and Evidence*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1990, *Truth*, Oxford: Basil Blackwell.

_____1993, *Wittgensteinian bayesianism*, serie *Midwest Studies in Philosophy Volume XVIII: Philosophy of Science*, University of Notre Dame Press.

HUGHES, G. & CRESSWELL, M.: 1968, *An Introduction to Modal Logic*, London: Methuen.

_____1996, *A New Introduction to Modal Logic*, London: Routledge.

HUME, DAVID: 1739, *A Treatise of Human Nature*, London: Lewis Amherst. On 2nd edn., ed. P.H.Niddtich, Oxford: Clarendon Press, 1989. Accesible online: **http://www.gutenberg.org/files/4705/4705-h/4705-h.htm**

HUNTER, GEOFFREY: 1971, *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order Logic*, Berkeley, Los Angeles: University of California Press.

HUNTINGTON, E.V.: 1902, "A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude", *Transactions of the American Mathematical Society* 3: 264-79.

_____1905, "A Set of Postulates for Ordinary Complex Algebra", *Transactions of the American Mathematical Society* 6: 209-29.

HUSSERL, EDMUND: [1911] 1965, "Philosophy as Rigorous Science", *Logos* 1: 289-341. English translation by Quentin Lauer published in 1965.

_____[1954] 1970, *The Crisis of the European Sciences and Transcendental Phenomenology: An Introduction to Phenomenological Philosophy*, Translated by D. Carr, Evanston: Northwestern University Press. Originally published as *Die Krisis der europaischen Wissenschaften und die transzendentale Phenomenologie; eine Einleitung in die phenomenologische Philosophie*, The Hague: Martinus Nijhoff.

_____[1939] 1973, "Experience and Judgment: Investigations in a Genealogy of Logic", translated by J. S. Churchill and K. Ameriks. (Originally published as *Erfahrung und Urteil*), Hamburg: Claassen.

_____[1962] 1977, *Phenomenological Psychology: Lectures, Summer Semester*, 1925, translated by J.

Scanlon. Originally published as *Phenomenologische Psychologie*. The Hague: Martinus Nijhoff.
_____[1913] 1983, *Ideas: General Introduction to Pure Phenomenology*, The Hague: Martinus Nijhoff. English translation by W. R. Boyce-Gibson published in 1931, and by F. Kersten published in 1983.

HYLTON, P.: 1990, *Russell, Idealism, and the Emergence of Analytic Philosophy*, Oxford: Oxford University Press.

IEMHOFF, ROSALIE: 2001, "On the admissible rules of intuitionistic propositional logic," *Journal of Symbolic Logic*, 66: 281–294.
_____2005, "Intermediate logics and Visser's rules," *Notre Dame Jour. Form. Logic*, 46: 65–81.
_____2012, "Intuitionism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/intuitionism/**

IRELAND, K & ROSEN, M.: 1990 *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag.

IRVINE, ANDREW DAVID: 2010, "Principia Mathematica", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2010/entries/principia-mathematica/**

ISAACSON, D.: 1987, "Arithmetical Truth and Hidden Higher-Order Concepts",in The Paris Logic Group (eds.), *Logic Colloquium '85*, Amsterdam: North-Holland, 147–169.

JACQUETTE, D. (edit.): 2007, *Philosophy of logic*, Amsterdam: North-Holland.

JANÉ, IGNACIO: 1993, "A critical appraisal of second-order logic", *History and Philosophy of Logic*, 14, 67- 86.

JAPARIDZE, GIORGIE: 1994, "The logic of arithmetical hierarchy", *Annals of Pure and Applied Logic* 66 (2): 89–112.

JAUERNING, A.: 2013, "The synthetic nature of geometry, and the role of construction in intuition", in S. Bacin, A. Ferrarin, C. La Rocca, and M. Ruffing (eds.), *Akten des XI. Internationalen Kant Kongresses 2010*, Berlin/New York: Walter de Gruyter.

JAYNES, EDWIN THOMPSON: 1956, "Information Theory and Statistical Mechanics", *The Physical Review, Vol. 106*, nº 4, 620-630.
_____1957, "Information Theory and Statistical Mechanics, II", *The Physical Review*, Vol.108, nº 2, 171-190.
_____1965, "Gibbs vs. Boltzmann entropies", *American Journal of Physics*, 33, 391–398. Also in (Jaynes 1983, pp. 77–86).
_____1967, "Foundations of probability theory and statistical mechanics". In: M. Bunge (Ed.) *Delaware seminar in the foundations of physics*. Berlin: Springer-Verlag, pp. 77–101. Also in (Jaynes 1983, pp. 89–113).
_____1968, "Prior Probabilities", *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*,vol.sec. 4, nº 3, 227-241.
_____1973, "The well-posed problem", Foundations of Physics, 3:477–492.
_____1979, "Where do we stand on maximum entropy?", Levine,R. and Tribus, M. (edits), *The maximum entropy formalism*, 15, Cambridge MA: MIT Press.
_____1983, "Probability, statistics and statistical physics". R. Rosenkrantz (Ed.) Dordrecht: Reidel.
_____1988, "The relation of Bayesian and maximum entropy methods", Erickson, G. J. & Smith, C. R. (edits), *Maximum-entropy and Bayesian methods in science and engineering*, volume 1, 25–29. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
_____1992, *The Gibbs paradox*. C.R. Smith, G.J. Erickson, & P.O. Neudorfer, (Eds.) *Maximum entropy and Bayesian methods*. Dordrecht: Kluwer, pp. 1–22.
_____2003, *Probability Theory: The Logic of Science*, Cambridge & New York, Cambridge University Press. 8ª edición: 2011.

JECH, THOMAS: 2006, *Set Theory. The third Millenium Edition, Revised and Expanded*, London: Springer-Verlag.
_____2008, *The Axiom of Choice*, London: Dover Publications.
_____2011, "Set Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2011 Edition), Edward N.

Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2011/entries/set-theory/**

JEFFREY, RICHARD: 1983, *The Logic of Decision, 2nd ed.*, Chicago: University of Chicago Press.

_____1992, *Probability and the Art of Judgment*, Cambridge: Cambridge University Press.

JENSEN, ANTHONY K.: 2014, "Neo-Kantianism", en *Internet Encyclopedia of Philosophy*, **http://www.iep.utm.edu/neo-kant/**

JOERGENSEN, JOERGEN: 1951, *The Development of Logical Empiricism*, Chicago: University of Chicago Press.

JOHNSON-LAIRD, PHILIP N.: 1988, *The Computer and the Mind: An Introduction to Cognitive Science*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

JOYCE, JAMES: 2008, "Bayes' Theorem", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.) **http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/bayes-theorem/**

KADVANY, JOHN: 1989, "Reflections on the Legacy on Kurt Gödel: Mathematics, Skepticism, Postmodernism", *The Philosophical Forum* 20 (1989),161-181.

KAMLAH, ANDREAS: 1985, "The Neo-Kantian Origin of Hans Reichenbach's Principle of Induction", in: N. Rescher (ed.), *The Heritage of Logical Positivism*, Lahnam (MD): University Press of America,157-169.

KANDEL, A. & LANGHOLZ, G. (edits.): 1997, *Fuzzy Hardware. Architectures and Applications*, Crane & Russak, New York and Edward Arnold, London.

KANGER, STIG: 1957, "Provability in Logic", (Dissertation, University of Stockholm, 1957), *Acta Universitatis Stockholmensis*, Almqvist and Wiksell, Stockholm; also in Ghita Holmström-Hintikka, Sten Lindström, and Rysiek Sliwinski (eds.), *Collected Papers of Stig Kanger with Essays on his Life and Work*, volume 1, Synthese Library volume 303, Dordrecht: Kluwer, 2001.

_____1957b, "A Note on Quantifcation and Modalities", *Theoria* 23 (1957): 131-4.

KAUFMANN, G.: 1979, *Visual Imagery and its Relation to Problem Solving*, Bergen: Universitetsforlaget.

KAYE, RICHARDS: 2007, *The Mathematics of Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

KEEFE, ROSANNA: 2000, *Theories of Vagueness*, Cambridge: Cambridge University Press.

KEMP SMITH, NORMAN: 1962, *A Comentary to Kant's 'Critique of Pure Reason'*. New York: Humanities Press.

KENNEDY, H.: 1980, *Peano-Life and Work of Giuseppe Peano*, Dordrecht: Reidel.

KENNEDY, JULIETTE: 2011, "Review: 'The autonomy of mathematical knowledge: Hilbert's program revisited' by Curtis Franks", *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 17, No. 1 (MARCH 2011), 119-122.

_____2012, "Kurt Gödel", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/goedel/**

KENNEDY, JULIETTE & VAN ATTEN, MARK : 2003, "On the Philosophical development of Kurt Gödel", *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 9, nº 4, Dec. 2003, 425-476. Reprinted in Kurt Gödel: Essays for his Centennial, Solomon Feferman, Charles Parsons and Stephen G. Simpson (eds.), Cambridge: Cambridge University Press.

KERZBERG, PIERRE: 1989, "Two Senses of Kant's Copernican Revolution", *Kant Studien 80,* (1989), 63-80.

KEYNES, JOHN M.: 1921, *A Treatise on Probability*, London: Macmillan and Co.

KIM, JOONGOL: 2006, "Concepts and Intuitions in Kant`s Philosophy of Geometry", *Kant Studien* 97 (2): 138-162.

KITCHER, PATRICIA: 1990, *Kant`s transcendental psychology*, New York: Oxford University Press.

_____2000, "On interpreting Kant's thinker as Wittgenstein's 'I'", *Philosophy and Phenomenological Research*, 61 (1):33-63.

_____2006, "Kant´s philosophy of the cognitive mind", en *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*, edit. Paul Guyer, Cambridge: Cambridge University Press.

KITCHER, PHILIP: 1975a, "Bolzano's Ideal of Algebraic Analysis", *Studies in History and Philosophy of Science*, 6: 229-269.

_____1975b, “Kant and the Foundations of Mathematics”, *Philosophical Review*, LXXIV, 1975, 23-50. Reprinted in Carl Posy (ed) *Kant's Philosophy of Mathematics*, Dordrecht: Reidel, 1992.
_____1976, “Hilbert's Epistemology”, *Philosophy of Science*, 43, 1976, 99-115.
_____1981, “Explanatory Unification”, *Philosophy of Science* 48:507-531.
_____1982, “How Kant Almost Wrote the ‘Two Dogmas of Empiricism’, in J. Mohanty and R. Shahan (eds.), *Essays on Kant’s Critique of Pure Reason*, Norman, Okla.: University of Oklahoma Press.
_____1984, *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York: Oxford University Press.
_____1988, “Mathematical Naturalism”, en *History and Philosophy of Modern Mathematics*, P. Kitcher & W. Aspray edit., Minneapolis: University of Minnesota Press.
_____1989, “Explanatory Unification and the Causal Structure of the World”, *Scientific Explanation*, P. Kitcher and W. Salmon (edits.), 410–505. Minneapolis: University of Minnesota Press.
_____1991, “Persuasion”, *Persuading Science. The Art of Scientific Rhetoric*, M.Pera & W.R.Shea (editors), 3-27, Sagamore Beach: Science History Publications.
_____1994a, “Projecting the Order of Nature” in *Kant and the Contemporary Epistemology*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
_____1994b, *The Unity of Science and the Unity of Nature*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
_____2000, “A Priori Knowledge Revisited”, in P. Boghossian and C. Peacocke (eds) *New Essays on the A Priori*, Oxford University Press, 2000, 65-91.
_____2006, “A Priori”, en *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*, edit. Paul Guyer, New York: Cambridge University Press.

KITCHER, PHILIP & SALMON, W. (edits.): 1989, *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Vol 13: *Scientific Explanation*, Minneapolis: University of Minnesota Press. Accesible online:
http://mcps.umn.edu/assets/pdf/13_SciExplan.pdf
http://en.bookfi.org/book/1065377

KITCHER, PHILIP & SALMON, W.: 1987, “Van Fraassen on Explanation”, *Journal of Philosophy*, 84(6): 315–330.

KLEENE, STEPHEN COLE: 1935, “A theory of positive integers in formal logic”, *American Journal of Mathematics*, 57, pp. 153–173 and 219–244. Contains the lambda calculus definitions of several familiar functions.
_____1936, “Lambda-Definability and Recursiveness”, *Duke Mathematical Journal*, 2, 340-353.
_____1938, “On notations for ordinal numbers”, *Journal Symbolic Logic*, 3: 150–155.
_____1943 “Recursive Predicates and Quantifiers”, *American Mathematical Society Transactions* (Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 53, No. 1) 54 (1): 41–73.
_____1952, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam: North-Holland.
_____1967, *Mathematical Logic*, New York: Wiley.
_____1981, “Origins of recursive function theory”, *Annals of the History of Computing*, 3(1): 52–67.

KLEIN, FELIX: 1921, *Gesammelte Abhandlungen* (3 tomos), Berlin: Julius Springer Verlag.
_____1926 (1979), *Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik*, Berlin: Springer, 1926, 2 vols. (reprinted in 1979).
_____1908, *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt aus: Geometrie*, translated as *Elementary Mathematics from a Higher Viewpoint: Geometry*, New York: Dover 1939.

KLEIN, J.: 1992, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, (Eva Brann, trans.), New York: Dover.

KLINE, M.: 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press.

KLIR, G. J. & YUAN, B.: 1995, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*, Upper Sadler River, NJ: Prentice Hall PTR.
_____1996, *Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy system: Selected papers by Lotfi A. Zadeh*, G.J. Klir & B. Yuan (edit.), Singapore: World Scientific.

KNEALE, WILLIAM & KNEALE MARTHA: 1962, *The development of logic*, Oxford: Clarendon.

KNORR, W.: 2000, “Constructions and existence in ancient geometry”, *Ancient Philosophy*, 3: 125-148.

KOETSIER, TEUN: 1991, *Lakatos’ Philosophy of Mathematics: A Historical Aproach*, Amsterdam: North

Holland.

KOLMOGOROV, ANDREI N.: 1925, "O principe *tertium non datur*", *Matematiceskij Sbornik*, 32: 646–667. English translation in van Heijenoort 1967, pp. 416–437.

_____1932, "Zur Deutung der intuitionistischen Logik", *Mathematische Zeitschrift*, 35: 58–65. English translation in Mancosu 1998, pp. 328–334.

_____1933, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlín: Julius Springer. Traducción inglesa: *Foundations of the Theory of Probability*, New York: Chelsea Publishing Company, 1956.

_____1937, "Freudenthal, Hans: Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln. Heyting, A.: Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal 'Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln'", *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, 0015.24201. **http://www.zentralblatt-math.org/zmath/scans.html?volume_=015&count_=242**

_____1965, "Three Approaches to the Quantitative Definition of Information", *Problemy Perdaci Informacii*, 1: 4–7.

KÖHNKE, K.: 1991, *The Rise of Neo-Kantianism*, trans. R. Hollingdale. Cambridge: Cambridge University Press.

KÖRNER, STEPHAN: 1955, *Kant*, Bristol: Penguin Books. Hay traducción española, Madrid, Alianza Editorial, 1977.

_____1960, *The Philosophy of Mathematics*, London: Hutchinson &Co. Traducción española SigloXXI Editores, Mexico 1968.

KOSKO, BART: 1990, "Fuzzinees vs. Probability", *Int. J. General Systems*, vol. 17, 211-240.

_____1994, "The Probability Monopoly", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol 2, nº 1.

KOSKO, B. & OSOBA, O. & MITAIM, S.: 2011, "Bayesian Inference With Adaptative Fuzzy Priors and Likelihood", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 41, nº 5.

KOSSLYN, STEPHEN M.: 1975, "Information representation in visual images", *Cognitive Psychology*, 7, 341–370.

_____1980, *Image and mind*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

_____1994, *Image and Brain. The Resolution of the Imagery Debate*, Cambridge, Mass. & London: A Bradford Book, The MIT Press.

_____2005, "Mental Images and the Brain", *Cognitive Neuropsychology*, 2005, 22 (3/4), 333–347

KOSSLYN, S.M. & KOENIG, O.: 1995, *Wet mind: The new cognitive neuroscience*, New York: Free Press.

KOSSLYN, S.M. & GANIS, G. & THOMSON, W.L.: 2001, "Neural foundations of imagery", *Nature Reviews Neuroscience*, 2, 635–642.

_____2006a, *The Case for Mental Imagery*, Oxford: Oxford University Press.

_____2006b, "Mental imagery and the human brain", en Q. Jing et alt. (editors) *Progress in psychological science around the world: vol 1. Neuronal, cognitive and developmental issues*, New York: Psychology Press, 195- 209.

KREISEL, GEORG: 1951, "On the interpretation of non-finitist proofs I", *Journal of Symbolic Logic* 16: 241-267.

_____1952, "On the interpretation of non-finitist proofs, part II. interpretation of number theory, applications", *Journal of Symbolic Logic*, 17 (1952), pp. 43-58.

_____1958, "Mathematical significance of consistency proofs", *Journal of Symbolic Logic* 23: 159-182.

_____1960, "Ordinal logics and the characterization of informal notions of proof", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* Edinburgh, 14-21 August 1958, J. A. Todd, ed., Cambridge: Cambridge University Press, 289- 299.

_____1962, "Foundations of intuitionistic logic", in *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proc. 1960 Int. Congr.*, E. Nagel, P. Suppes, and A. Tarski, eds., Stanford: Stanford University Press, 198–210.

_____1964, "Hilbert's Programme", en *Philosophy of Mathematics*, Paul Benacerraf & Hilary Putnam (edts.),reeditado en 1984, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1968, "A survey of proof theory", *Journal of Symbolic Logic*, 33: 321-388.

_____1969, "Mathematical Logic: What has it done for the Philosophy of Mathematics? ", *The Philosophy of Mathematics*, editor: Jaakko Hintikka. New York: Oxford University Press.

_____1970, "Principles of proof and ordinals implicit in given concepts", in *Intuitionism and Proof Theory*, A. Kino, J. Myhill, and R. E. Veseley, eds., Amsterdam: North-Holland.
_____1983, "Hilbert's programme", in *Philosophy of Mathematics*, Paul Benacerraf and Hilary Putnam, eds., Cambridge: Cambridge University Press, 207-238, 2nd ed.
_____1985, "Mathematical logic: tool and object lesson for science", *Synthese* 62 (2): 139-151.
_____1987, "Gödel's excursions into intuitionistic logic", in *Gödel remembered*, P. Weingartner and L. Schmetterer, eds., Napoli: Bibliopolis, 67–179.

KREMER, PHILIP: 2009, "The Revision Theory of Truth", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/truth-revision/**

KRIEGER, MARTIN: 2003, *Doing Mathematics: Convention, Subject, Calculation, Analogy*, Singapore: World Scientific Publishing.

KRIPKE, SAUL: 1959, "A Completeness Theorem in Modal Logic", *Journal of Symbolic Logic* 24:1-14.
_____1962, "The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 8:113-116.
_____1963a, "Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica*, 16: 83-94.
_____1963b, "Semantical Analysis of Modal Logic I. Normal Propositional Calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9: 67-96.
_____1963c, "Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I" in J. N. Crossley and M. A. E. Dummett, eds., *Formal Systems and Recursive Functions* (Proceedings of the Eighth Logic Colloquium at Oxford, July, 1963), Amsterdam: North Holland, 92-129.
_____1965a, "Semantical Analysis of Modal Logic II. Non-Normal Modal Propositional Calculi", in J. W. Addison, L. Henkin, and A. Tarski, eds., *The Theory of Models* (Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley), Amsterdam: North Holland, 206-220.
_____1965b, "Semantical analysis of intuitionistic logic," in *Formal Systems and Recursive Functions*, J. Crossley and M. A. E. Dummett (eds.) 1965: 92–130.
_____1971, "Identity and Necessity", in M. K. Munitz, ed. *Identity and Individuation*, New York: New York University Press.
_____1972, "Naming and Necessity", in D. Davidson and G. Harman, eds. *Semantics of Natural Language*, Dordrecht: Reidel, 253-355, 763-769.
_____1975, "Outline of a theory of truth", *The Journal of Philosophy*, 72: 690–716.

KRIPS, HENRY: 2013, "Measurement in Quantum Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2013/entries/qt-measurement/**

KRÖMER, RALF: 2007, *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory*, Basel: Birkhäuser Verlag.

KROON, F.: 2001, "Chambers on Putnam's Paradox", *Mind*, 110: 703–708.

KUSHNER, B.: 1985, "Lectures on Constructive Mathematical Analysis", Providence, RI: *Amer. Math. Soc.*

LACHTERMAN, D. R.: 1989, *The Ethics of Geometry: A Genealogy of Modernity*. New York: Routledge.

LADRIRE, JEAN: 1957, *Les limitations internes des formalismes*, Louvain: Ed. Publicatios Universitaires de Louvain.Traducción española de José Blasco: *Limitaciones internas de los formalismos*, Ed.Tecnos, Madrid, 1969.

LADYMAN, J.: 2000, "What's Really Wrong With Constructive Empiricism? Van Fraassen and the Metaphysics of Modality", *British Journal for the Philosophy of Science*, 51: 837–856.
_____2004, "Constructive Empiricism and Modal Metaphysics: A Reply to Monton and van Fraassen", *British Journal for the Philosophy of Science*, 55: 755–765.

LAKATOS, IMRE: 1976, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge: Cambridge University Press.
_____1978a, "What does a mathematical proof prove?", en *Mathematics, science and Epistemology*, Cambridge: Cambridge University Press.
_____1978b, *Mathematics, Science, and Epistemology*, Cambridge: Cambridge University Press.

LAMBEK, J. & SCOTT, P.J.: 1986, *Introduction To Higher Order Categorical Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

LANGTON, RAE: 1998, *Kantian Humility: Our Ignorance of Things in Themselves*, Oxford: Clarendon Press.

LAPLACE, P. S.: 1814, English edition 1951, *A Philosophical Essay on Probabilities*, New York: Dover Publications Inc.

LARKIN, J. & SIMON, H.: 1987, "Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words", *Cognitive Science*, 11: 65-99.

LARVOR, BRENDAN: 1998, *Lakatos: An Introduction*, London: Routledge.

LAUGWITZ, DETLEF: 2008, *Bernhard Riemann 1826-1866. Turning Points in the Conception of Mathematics,* Boston: Birkhäuser.

LAVINE, SHAUGHAN: 1994, *Understanding the Infinite*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

LAVIOLETTE M. & SEAMAN J. W.: 1994, "The efficacy of fuzzy representations of uncertainty (with discussions)", *IEEE trans. of Fuzzy Systems*, 2, 4-42.

LAYWINE, A.: 1993, *Kant's Early Metaphysics and the Origins of the Critical Philosophy*, Atascadero CA: Ridgeview.

_____2010, "Kant and Lambert on Geometrical Postulates in the Reform of Metaphysics", Domski & Dickson (editors), 113-133.

LEAR, JONATHAN: 1982, "Leaving the World Alone", *The Journal of Philosophy* 79 (1982), 382–392.

LEHMANN, GERHARD: 1969, *Beiträge zur Geschichte und Interpretation der Philosophie Kants*, Berlin: Walter de Gruyter.

LEITGEB, HANNES: 2013, "Scientific Philosophy, Mathematical Philosophy, and All That", *Metaphilosophy* 44 (3):267-275.

_____2011, "Logic in general philosophy of science: old things and new things", *Synthese* (2011) 179:339–350.

_____2010, "Reducing Belief Simpliciter to Degrees of Belief", unpublished draft, March 2010,

_____2009, "On Formal and Informal Provability", Otávio Bueno & ϕ ystein Linnebo editors, *New waves in philosophy of mathematics*, pp. 263-299, London:Palgrave Macmillan.

_____2008, "Towards a logic of type-free modality and truth", Dimitracopoulos et alt. editors, *Logic Colloquium 05: Lecture Notes in Logic,* Cambridge: Cambridge University Press, pp. 68-84.

_____2007, "What Theories of Truth Should be Like (but Cannot be)", *Philosophy Compass* 2/2: 276–290.

_____2005, "What truth depends on?", *Journal of Philosophical Logic,* 34: 155-192.

_____2004, *Inference on the Low Level. An Investigation into Deduction, Nonmonotonic Reasoning, and the Philosophy of Cognition*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

_____2001, "Truth as Translation – Part A", *Journal of Philosophical Logic* 30 (4):281-307.

LE LIONNAIS, FRANÇOISE.: 1971, *Great Currents of Mathematical Thought*. Traducción inglesa de *Les Grands Courants de la Penseé Mathématique,* 2 vols, 1947, 2nd edi. 1962.

LENHARD, JOHANNES: 2006, "Kants Philosophie der Mathematik und die umstrittene Rolle der Anschauung", *Kant-Studien* 97 (3) : 301-317.

LENG, MARY: 2005, "mathematical Explanation", en Cellucci, C & Gillies, D. (editors), *Mathematical Reasoning and Heuristics*, London: King's College Publications.

LEWIS, C. I.: 1912, "Implication and the Algebra of Logic", *Mind* 12: 522-31.

_____1918, *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley: University of California Press.

_____1946, *An Analysis of Knowledge and Valuation*, La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company.

_____1970, *Collected Papers*, Goheen, J. D. y J. L. Mothershead, Jr.(eds.), Stanford University Press.

LEWIS, C. I. & LANGFORD, C.H.: 1932, *Symbolic Logic*, New York: Century Company. Dover reprint, London 1959.

LEWIS, DAVID KELLOG: 1970, "General semantics", Synthese, 22(1) (1970): 18–67.

_____1973, *Counterfactuals*, Harvard University Press 1973; revised printing Blackwell 1986.

_____1974, *Semantic Analysis: Essays Dedicated to Stig Kanger on His Fiftieth Birthday,* Dordrecht: Reidel.

_____1978, “Truth in Fiction”, *American Philosophical Quarterly* 15 (1978): 37–46.
_____1984, “Putnam's Paradox”, *Australasian Journal of Philosophy*, 62: 221–236.
_____1986, *On the Plurality of Worlds*, London: Blackwell.
_____1996, “Elusive Knowledge”, *Australasian Journal of Philosophy*, 74/4 (1996): 549–567.
_____1998, “Logic for Equivocators”, *Papers in Philosophical Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

LI, M. & VITANYI, P.B.M.: 1993, *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*, New York: Springer.

LIND, DOUGLAS A. & MARCHAL, WILLIAM G. & WATHEN, SAMUEL A.: 1967 (2012), *Statistical Techniques in Business and Economics*, New York: McGraw-Hill Companies. 15ª edición en 2012. Traducción española, “Estadística Aplicada a los Negocios y la Economía”, traducción de la 15ª edición inglesa, Mexico: McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A de CV, 2013.

LINDSTRÖM, PER (PELLE): 1966, “First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers”, *Theoria* 32, 186–195.
_____1969, “On Extensions of Elementary Logic”, *Theoria*, 35:1–11.

LINDSTRÖM, STEN: 1998, “Kanger’s Early Semantics for Modal Logic,” in P. W. Humphreys and J. H. Fetzer (eds.), *The New Theory of Reference: Marcus, Kripke, and Its Origins*, Dordrecht: Kluwer, 203-33.

LINNEBO, ØYSTEIN: 2009, “Frege’s Context Principle and Reference to Natural Numbers”, Lindstrom editor, *Logicism, Intuitionism and Formalism: What Has Become of Them?*, volume 341 of *Synthese Library*, 47-68, Springer.
_____2009, “The individuation of the Natural Numbers”, Otávio Bueno & ϕ ystein Linnebo editors, *New Waves in Philosophy of Mathematics*, London: Palgrave Macmillan.
_____2013, “Platonism in the Philosophy of Mathematics”, *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/**

LINSKY, BERNARD: 2011, “The Notation in Principia Mathematica", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.) **http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/pm-notation/**

LONGUENESSE, BEATRICE: 1993 (1997), *Kant et le pouvoir de juger: Sensibilité et discursivité dans l’Analytique transcendentale de la ‘Critique de la raison pure’*, Paris: Presses Universitaires de France, 1993. Traducción inglesa: *Kant and the Capacity of Judge: Sensibility and Discursivity in the Transcendental Analytic of the ‘Critique of Pure Reason’*, Princeton and Oxford: Princeton University Press, 1997. Las referencias se remiten a esta edición inglesa.
_____2005, “Synthesis, Logical Forms, and the Objects of Our Ordinary Experience”, *Kant on the Human Standpoint*, 39-63, Cambridge: Cambridge University Press.

LORENZ, K.: 1941, "Kants Lehre vom Apriorischen im Lichte gegenwärtiger Biologie", in *Bl. f. Deutsche Philos.* 15 (1941), 104-125

LOTZE, HERMANN: 1843, *Logik*. Weibmannsche Buchhandlung, Leipzig. 1888, S.Hirzel, Leipzig.
_____1874, *Logik. Drei Bücher vom Denken, vom Untersuchen und vom Erkennen*, Leipzig: S. Hirzel.

LÖWENHEIM, LEOPOLD: 1915, “Über Möglichkeiten im Relativkalkül”, *Mathematische Annalen* 76:4, 447–470.
_____1977, “On possibilities in the calculus of relatives”, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931 (3rd ed.), Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 228-251.

LUCAS, J. R.: 1999, *Conceptual Roots of Mathematics*, London: Routledge.

LUENGO, I.: 1995, *Diagrams In Geometry*, PhD thesis, Indiana University, 1995.
_____1996, “A diagrammatic subsystem of Hilbert's geometry”, 149-176 in Logical reasoning with diagrams, edited by G. Allwein and J. Barwise, volume 6 of Stud. *Logic Comput.*, New York: Oxford Univ. Press, 1996.

LUKÁCS, GEORG: 1954, *Die Zerstörung der Vernunft*, Aufbau-Verlag, Berlin (Ost). Reproducido en

Gesammelte Werke, Band-III, Darmstadt & Neuwield: Hermann Luchterhand Verlag, 1973. Traducción española: *El asalto a la razón,* Barcelona: Editorial Grijalbo, 1974, vol.15. Traducción y notas de Manuel Sacristán y Jacobo Muñoz.

LUKASIEVICZ, JAN: 1918, "Farewell lecture by professor Jan Łukasiewicz," delivered in the Warsaw University Lecture Hall in March, 1918, in: (Łukasiewicz 1970), 87–88.

_____1920, "O logice trójwartościowej", *Ruch Filozoficny*, 5: 170–171. (English translation as "On three-valued logic" in: (Łukasiewicz 1970), 87–88). Traducción española en: Jan Lukasievicz, "Estudios de Lógica y Filosofía", *Revista de Occidente*, Madrid 1975.

_____1921, "Logika dwuwartościowa", *Przegl ad Filosoficzny*, 13: 189–205. (English translation as "Two-valued logic" in: (Łukasiewicz 1970), 89–109.)

_____1970, *Selected Works*, L. Borkowski (ed.), Amsterdam: North-Holland, and Warsaw: PWN.

MACCOLL, HUGH: 1908, " 'If' and 'imply' ", *Mind*, 17: 151–152, 453–455.

MACDOWELL, JOHN: 1984, 'Wittgenstein on Following a Rule', in McDowell 1998, 221-262.

_____1991a, "Intentionality and Interiority in Wittgenstein", in McDowell 1998, 297-321.

_____1991b, "Peacocke and Evans on Demonstrative Content", *Mind*, 100.

_____1993, "Meaning and Intentionality in Wittgenstein's Later Philosophy", in McDowell 1998, 263- 278.

_____1994, *Mind and World*, 2nd. edn. Cambridge MA: Harvard University Press

_____1998a, *Mind, Value, and Reality,* Cambridge: Harvard University Press.

_____1998b, *Meaning, Knowledge, and Reality,* Harvard U.P.

_____1998c (june), "Reply to Comentators", *Philosophy and Phenomenological Research*, 58/2.

_____1998d (sept.), "The Woodbridge Lectures 1997", *Journal of Philosophy* 95/9.

_____2008, "The Disjunctive Conception of Experience as Material for a Transcendental Argument". In Haddock and Macpherson (eds) , 376-389.

MACFARLANE, JOHN: 2000, *What does it mean to say that logic is formal?*, PhD thesis, University of Pittsburgh.

_____2008, "Truth in the garden of forking paths", in: *Relative Truth*, Max Kölbel & Manuel García-Carpintero (eds.), Oxford: Oxford University Press, 81–102.

MACHOVER, MOSHE: 1996, *Set Theory, Logic, and Their Limitation*, Cambridge: Cambridge University Press.

MACLACHLAN, D.L.C.: 1995, "The Things in Itself Apears in a Meta-Language", *Proceedings of the Eighth International Kant Congress*, vol-2,155-161,Milwaukee: Marquette University Press.

MADDY, PENELOPE: 1980, "Perception and Mathematical Intuition", *Philosophical Review* 89: 163-196.

_____1990, *Realism in mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

_____1997, *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

_____2007, *Second philosophy: a naturalistic method,* Oxford: Oxford University Press.

_____2008, "How applied mathematics became pure", *Review of Symbolic Logic* 1 (1): 16-41.

MAJER, ULRICH: 1993, "Hilberts Methode der idealen Elemente und Kants regulativer Gebrauch der Ideen", *Kant Studien 84,* pp. 51-77.

_____1994, "Hilbert, Reichenbach und der Neu-Kantianismus", in: Danneberg et al. (eds.), pp. 253-273.

_____1995, "Geometry, Intuition and Experience: from Kant to Husserl", *Erkenntnis* 42:2, 261-285.

MAKINSON, D.: 2005 *Bridges from Classical to Nonmonotonic Logic*, Oxford: College Publications.

_____1994, "General patterns in nonmonotonic reasoning", in Gabbay et al. (1994), 35–110.

MAKKREEL, RUDOLF & LUFT, SEBASTIAN (editors): 2010, *Neo-Kantianism in Contemporary Philosophy*, Bloomington: Indiana University Press.

MALTSEV, ANATOLY IVANOVICH: 1936, "Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik", *Matematicheskii Sbornik*, n.s. 1: 323–336.

MANCOSU, PAOLO:1992, "Descartes's *Geometrie* and Revolutions in Mathematics", en D. Gillies (editor) *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

_____1996, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century,* Oxford: Oxford University Press.

_____1998a , “Hilbert and Bernays on metamathematics”, in Mancosu [1998b], 149-188.
_____1998b, (edit.) *From Brower to Hilbert.: The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*, New York: Oxford University Press.
_____1999a, “Between Russell and Hilbert: Behmann on the foundations of mathematics”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 5(3):303–330.
_____1999b, “Bolzano and Cournot on Mathematical Explanation”, *Revue d'Histoire des Sciences*, 52: 429-455.
_____2000, “On Mathematical Explanation”, en Grosholz, E. & Breger, H. (editors), *The Growth of Mathematical Knowledge*, 103-119, Dordrecht: Kluwer.
_____2001, “Mathematical Explanation: Problems and Prospects”, *Topoi*, 20: 97-117.
_____2003, “The Russellian influence on Hilbert and his school”, *Synthese*, 137(1–2):59–101.
_____2004, “Review of Kurt Gödel, Collected Works, vols. IV and V, Solomon Feferman, et al.eds. Oxford: Oxford University Press, 2003”. *Notre Dame Journal of Formal Logic*,45:109–125, 2004.
_____2005, “Visualization in Logic and Mathematics”, Mancosu, Jorgensen, Pedersen (editors) *Visualization, Explanation and Resoning Styles in Mathematics*, 13-30, New York: Springer.
_____2008a, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Paolo Mancosu (editor), Oxford & New York: Oxford University Press.
_____2008b, “Introduction”, en Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice*, 1-21, Oxford & New York: Oxford University Press.
_____2008c, “Mathemtical Explanation: Why it Matters” en Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice*, 134-150, Oxford & New York: Oxford University Press.

MANCOSU, P. & RYCKMAN, T.: 2002, “Mathematics and phenomenology: The correspondence between O. Becker and H. Weyl”, *Philosophia Mathematica*, 10:130–202.

MANCOSU, P. & ZACH, R. & BADESA, C.: 2007, *The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1900-1935*, New York: Oxford University Press.

MANDERS, KENNETH: 2008a, “Diagram-based geometric practice”, in *The philosophy of mathematical practice*, Paolo Mancosu editor, 65-79. New York: Oxford University Press.
_____2008b, “The euclidean diagram”, in *The philosophy of mathematical practice*, Paolo Mancosu editor, 80-133. New York: Oxford University Press.

MARCUS, RUTH BARCAN (BARCAN): 1946, “A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication”, *The Journal of Symbolic Logic*, 11: 1–16.
_____1947a, “The Identity of Individuals in a Strict Functional Calculus of Second Order”, *The Journal of Symbolic Logic*, 3-23.
_____1947b, “Identity and Individuals in a Strict Functional Calculus of First Order”, *Journal of Symbolic Logic* 12: 3-23.
_____1960, “Extensionality”, *Mind* 69: 55-62.
_____1953, “Strict Implication, Deducibility and the Deduction Theorem”, *The Journal of Symbolic Logic*, 18: 234–236.
_____1961, “Modalities and intensional Languages”, *Synthese*, XIII: 303–322. Reeditado en *Modalities, Philosophical Essays*, Ruth Barcan Marcus, New York: Oxford University Press, 1993.
_____1963a, “Modalities and Intensional Languages”, in M. Wartofsky ed., (ed.) *Proceedings of the Boston Colloquium for the Philosophy of Science 1961/1962*, Dordrecht: Reidel, 77-96.
_____1963b, “Classes and Attributes in Extended Modal Systems”, *Acta Philosophica Fennica*16:123-136.
_____1967, “Essentialism in Modal Logic”, *Nous*, 1: 91-96.
_____1990, “A Backwards Look at Quine's Animadversions on Modalities”, in R. Bartrett and R. Gibson (eds.), *Perspectives on Quine*, Cambridge: Blackwell.

MARES, EDWIN D.: 1992, “Andersonian Deontic Logic”, *Theoria*, 58: 3–20.
_____1997, “Relevant Logic and the Theory of Information”, *Synthese*, 109: 345–360.
_____2004, *Relevant Logic: A Philosophical Interpretation*, Cambridge: Cambridge University Press.
_____2012, “Relevance Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/logic-relevance/**.

MARES, E. D. & FUHRMANN, A.: 1995, “A Relevant Theory of Conditionals”, *Journal of Philosophical Logic*, 24: 645–665.

MARES, EDWIN & MEYER, R. K. : 2001, “Relevant Logics”, en Lou Goble (ed.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, London: Blackwell.

MARKER, DAVID: 2002, *Model theory: An introduction*, Serie *Graduate Texts in Mathematics* 217, New York: Springer-Verlag.

MARKOV, ANDREI ANDREYEVICH: 1954, “Theory of Algorithms”, *Trudy Mat. Istituta imeni V.A. Steklova*, 42, Moskva: Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR.

MARQUIS, JEAN-PIERRE: 2009, From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory, Serie *Logic, Epistemology and the Unity of the Science, vol-14*, New York: Springer Verlag.

_____2011, “Category Theory2, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/category-theory/**

MARONEY, OWEN: 2009, “Information Processing and Thermodynamic Entropy”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/information-entropy**

MARSHALL, COLLIN: 2010, “Kant’s Metaphysics of the Self*”,* in *Philosophers Imprint,* vol.10, nº 8.

MARTIN, GOTTFRIED: 1972, *Arithmetik und Kombinatorik bei Kant*, Berlin: De Gruyter.

_____1985, *Arithmetic and Combinatorics: Kant and his Contemporaries*, (Judy Wubnig, Trans.), Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press.

_____1969, *Immanuel Kant, Ontologie und Wissenschaftstheorie*, 4th. edition, P. Lucas (trans.) *Kant’s Metaphysics and Theory of Science*, Manchester: Manchester University Press 1955.

MARTIN, R. M.: 1965, “On Peirce's Icons of Second Intention”, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 1: 71-76.

MARTIN-LÖF, PER: 1970, *Notes on constructive mathematics*, Stockholm: Almqvist & Wiskell.

_____1975, “An intuitionistic theory of types: predicative part”, in *Logic Colloquium* 1973, H.E. Rose and J.C. Shepherdson (eds.), Amsterdam: North-Holland, 73-118.

_____1979, “Constructive mathematics and computer programming”, in *Logic, Methodology and Philosophy of Science* VI, 1979. Reprinted in Eds. Cohen, et al. North-Holland, Amsterdam, 153–175, 1982.

_____1980, “Constructive mathematics and computer programming”, in *Proc. 6th. Int. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science*, L. Jonathan Cohen (ed.), Amsterdam: North-Holland.

_____1982, “Constructive Mathematics and Computer Programming”, *Proceedings of the Sixth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, edit. L.J. Cohen et alt, 153-175, Amsterdam: North-Holland Publishing Company. **http://intuitionistic.files.wordpress.com/2010/07/martin-lof-computer.pdf**

_____1984, *Intuitionistic type theory*, (Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980), Napoli: Bibliopolis.

_____1990, *Programming in Martin-Löf's Type Theory*. Authors: Bengt Nordström, Kent Petersson, and Jan M. Smith (véase NORDSTÖM et alt.). Oxford University Press,1990. The book is out of print, but a free version has been made available from **www.cs.chalmers.se/Cs/Research/Logic**

_____1996, “On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws”, *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1(1): 11–60, 1996.

_____1998, “An intuitionistic theory of types”, in G. Sambin and J. Smith, editors, *Twenty-Five Years of Constructive Type Theory*, Oxford University Press, 1998. Reprinted version of an unpublished report from 1972.

_____2006, “100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it?”, *The Computer Journal* (2006) 49(3): 345-350.

MARTÍNEZ, ISIDORO: 1992, *Termodinámica básica y aplicada*, Madrid: Editorial Dossat.

MASLOW, A.: 1961, *A Study of Wittgenstein Tratactus*, Berkeley, Los Angeles: University of California Press.

MATES, BENSON: 1965, *Elementary Logic*, Oxford: Oxford University Press. Traducción española de Carmen García Trevijano: “Lógica Matemática Elemental”. Edit. Tecnos, Madrid 1970.

MATIYASEVICH YURI V. & JONES, JAMES. P.: 1984, "Register Machine Proof of the Theorem on Exponential Diophantine Representation of Enumerable Sets", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 49, No. 3, Sep. 1984, 818-829.

_____1991, "Proof of recursive unsolvability of Hilbert's tenth problem", *Amer.Math. Monthly* 98:689-709.

MAXWELL, GROVER: 1962, "The Ontological Status of Theoretical Entities", en In Herbert Feigl & Grover Maxwell (eds.), *Scientific Explanation, Space, and Time: Minnesota Studies in the Philosophy of Science*. University of Minnesota Press. 181-192 (1962). Accesible online: **http://www.mcps.umn.edu/assets/pdf/3.1_maxwell.pdf**

McCARTHY, J.: : 1980, "Circumscription -A Form of Non-Monotonic Reasoning", *Artificial Inteligence*, 13: 27–39.

_____1986, "Applications of Circumscription to Formalizing Common Sense Knowledge", *Artificial Inteligence*, 28: 89–116.

_____1990, *Formalization of common sense. Papers by John McCarthy*, edited by V. Lifschitz, Ablex.

McINTOSH, C.: 1979, "Skolem's Criticisms of Set Theory", *Nous*, 13: 313–334.

MEERBOTE, RALF: 1972, "Kant´s use of the notions ´Objective Reality´ and ´Objective Validity´ , *Kant Studien* 63, 51-58

_____1989 "Kant´s Functionalism", en *Historical Foundations of Cognitive Sciences* , J.C.Smith (edit), Dordrecht, Holand: Reidel.

MELIA, J.: 1995, "The significance of non-standard models", *Analysis* 55:127–134.

MELNIK, A.: 1984, "The Geometry of a Form of Intuition", *Topoi* 3 (2): 163-168. Reimpreso en Posy 1992.

MENDELSON, ELLIOTT: 1964, *Introduction to Mathematical Logic*, New York: D. van Nostrand; 4th ed. (1997), London: Chapman & Hall.

MESCHKOWSKI, HERBERT: 1966, *Einführung in die moderne Mathematik*, Mannheim: Bibliographisches Institut.

_____1967, *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig: Vieweg.

_____1969, *Wandlung des mathematischen Denkens – Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik*, Braunschweig: Bibliographisches Institut 1969, Piper1985.

METCALFE, GEORGE & OLIVETTI, NICOLA & GABBAY, DOV M.: 2008, *Proof Theory for Fuzzy Logics*, New York: Springer.

MEYER, R. K.: 1976, "Relevant Arithmetic", *Bulletin of the Section of Logic of the Polish Academy of Sciences*, 5: 133–137.

MEYER, R. K. & MORTENSEN, C.: 1984, "Inconsistent Models for Relevant Arithmetics", *The Journal of Symbolic Logic*, 49: 917–929.

MILL, JOHN STUART: 1843, *A System of Logic*, reed. London, Longmans 1970.

MILLER, P. H.: 2011, *Theories of developmental psychology*, New York: Worth.

MILLER, NATHANIEL: 2012, "On the Inconsistency of Mumma's Eu", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, (2012) 53: 27-52, University of Notre Dame. Accesible online: **http://mathsci.unco.edu/facstaff/miller/personal/diagrams/onmummaseundjfl.pdf**

_____2006, "Computational complexity of diagram satisfaction in Euclidean geometry", *J. Complexity*, vol. 22 (2006), 250-274.

_____2007, "Euclid and His Twentieth Century Rivals: Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry", Studies in the Theory and Applications of Diagrams. CSLI Publications, Stanford, CA, 2007.

_____2001, *Euclid and his twentieth century rivals: diagrams in the logic of Euclidean geometry*, CSLI, Stanford, 2007. Based on Miller's 2001 PhD thesis, "A diagrammatic formal system for Euclidean geometry", Cornell University. Más información en su página web: **http://mathsci.unco.edu/facstaff/Miller/personal/diagrams/**

MILKOV, NIKOLAY: 2008, "Reichenbach's Concept of Logical Analysis of Science and his Lost Battle against Kant", from the ALWS archives: A selection of papers from the International Wittgenstein Symposia in Kirchberg am Wechsel, (2008) Papers of the 31st IWS (eds. A. Hieke, H. Leitgeb), **http://wittgensteinrepository.org/agora-alws/rt/printerFriendly/2727/3178**

MINTS, GRIGORI: 1994, “Gentzen-type systems and Hilbert's epsilon substitution method. I”, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, IX (Uppsala, 1991), Amsterdam: North-Holland, 91-122.

_____1996, “Strong termination for the epsilon substitution method”, *Journal of Symbolic Logic*, 61:1193-1205.

_____2001, “The epsilon substitution method and continuity”, in W. Sieg et al. (eds.), *Reflections on the Foundations of Mathematics: Essays in Honor of Solomon Feferman*, Lecture Notes in Logic 15, Association for Symbolic Logic.

MINTS , G. & TUPAILO, S.: 1999, “Epsilon-substitution method for the ramified language and Δ^1_1-comprehension rule”, in A. Cantini et al. (eds.), *Logic and Foundations of Mathematics* (Florence, 1995), Dordrecht: Kluwer, 107-130

MINTS, GRIGORI, & TUPAILO, SERGEI & BUCHHOLZ, WILFRIED: 1996, “Epsilon substitution method for elementary analysis”, *Archive for Mathematical Logic*, 35: 103-130.

MONK, R.: 1996, *Bertrand Russell*, London: Jonathan Cape, 1996.

MONTAGUE, RICHARD: 1960, “On the nature of certain philosophical entities”, *The Monist*, 53: 159–194. Reeditado en (Thomason 1974), 148–187.

_____1970, “Pragmatics and intensional logic,” *Synthese*, 22: 68–94. Reeditado en (Thomason 1974), 119–147.

MONTON, BRADLEY & MOHLER, CHAD: 2014, “Constructive Empiricism”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/constructive-empiricism/**

MONTON, BRADLEY (editor): 2007, *Images of Empiricism: Essays on Science and Stances, with a Reply from Bas C. van Fraassen*, Oxford: Oxford University Press.

MONTON, BRADLEY & VAN FRAASSEN, BAS: 2003, “Constructive Empiricism and Modal Nominalism”, *British Journal for the Philosophy of Science*, 54: 405–422.

MOORE, G.E.: 1899, “Review of Russell’s *Essay on of the Foundations Geometry*”, *Mind* 8 (1899): 397–405.

MOORE, GREGORY H.: 1980, “Beyond first-order logic. The historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory”, *History and Philosophy of Logic*, vol. 1 (1980), 95-137.

_____1982, *Zermelo's axiom of choice: its origin, development and influence*, Berlin: Springer, 1982.

_____1988, “The emergence of first-order logic”, *History and philosophy of modern mathematics*, W.Aspray and P. Kitcher (editors), University of Minnesota Press, 1988, 95-135.

_____1989, “Towards a history of Cantor’s continuum problem”, *The history of modern mathematics, vol. I: Ideas and their reception***,** David E. Rowe and John McCleary (editors), Boston: Academic Press, 78–121.

_____1997, “Hilbert and the emergence of modern mathematical logic”, *Theoria*, vol. 12 (1997), 65-90.

_____1998, “Logic, early twentieth century”, *Routledge encyclopedia of philosophy* (E. Craig, editor), London: Routledge, 1998.

_____2011, “Early History of Generalized Continuum Hypotesis: 1878-1938”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 17:4 , Dec. 2011.

MORAN M. & SHAPIRO, H. N.: 1988, *Thermodynamics*, London: John Wiley & Son.

MORLEY, MICHAEL: 1965, “Categoricity in Power”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 114 (2): 514–538.

MORMANN, THOMAS

_____2014, “On the Vicissitudes of Idealism in 20th Century Philosophy of Science: The Case of Cassirer’s Critical Idealism”, *Lectiones Et Acroases Philosophicae* (1) (2014).

_____2012a, “The Vissicitudes of Mathematical Reason in the 20th Century”, *Metascience* 21 (2):295-300 (2012)

_____2012b, “La idealización en la Matemática”, *Discusiones Filosóficas* 13 (20):147-167.

_____2009, “Completions, Constructions and Corollaries”, en H. Pulte, G. Hanna & H.-J. Jahnke (eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Springer

_____2008, “Idealization in Cassirer’s Philosophy of Mathematics”, *Philosophia Mathematica*, (III) 16, 151-181.

______2007, "The Structure of Scientific Theories in Logical Empiricism", *The Cambridge Companion to Logical Empiricism*, *Cambridge Collections Online*, Cambridge University Press, 2008. Accesible online: **http://www.princeton.edu/~hhalvors/teaching/phi520_f2012/mormann-theories.pdf**
______1991, "Husserl's Philosophy of Science and the Semantic Aproach", *Philosophy of Science,* vol. 58, n. 1, 61-83.

MORMANN, THOMAS & KATZ, MIKHAIL G.: 2013, "Infinitesimals as an Issue of Neo-Kantian Philosophy of Science", *HOPOS 3(2), The Journal of the International Society for the History of Phiilosophy of Science*, 236 –280 (2):236-280.

MORTENSEN, CHRIS: 2013, "Inconsistent Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/mathematics-inconsistent/**

MOSCHOVAKIS, YIANNIS (JOAN): 1980, *Descriptive Set Theory*, Amsterdam: North Holland.
______1986, "Relative lawlessness in intuitionistic analysis", *Journal of Symbolic Logic*, 52(1): 68-87.
______2010, "Intuitionistic Logic", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/logic-intuitionistic/**

MOSER, G.: 2000, *The Epsilon Substitution Method*, Master's Thesis, University of Leeds.

MOSER G. & ZACH, R.: 2006, "The epsilon calculus and Herbrand complexity", *Studia Logica*, 82(1): 133-155.

MOSSER, KURT: 1993, "Was Wittgenstein a neo-Kantian? A Response to Professor Haller", *Grazer Philosophische Studien* vol. 45 (1993),187–202.
______2009, "Kant and Wittgenstein: Common Sense, Therapy and Critical Philosophy", *Philosophia* 37:1-20.

MOSTOWSKI, A.: 1957, "On a Generalization of Quantifiers", *Fundamenta Mathematicae* 44: 12-36.

MOULINES, CARLOS ULISES: 1973a, *La estructura del mundo sensible. Sistemas fenomenalistas*, Barcelona: Ariel.
______1973b, "Lo analítico y lo sintético: dualismo admisible", Teorema, vol.III, 1 (1973): 89-97.
______1975, *Zur logischen Rekonstruktion der Thermodynamik*, Munich: Universitat München.
______1987, *The Structuralist Program. An Architectonic for Science*,(with W. Balzer and J.D. Sneed), Dordrecht: Reidel.
______1991, "Pragmatics in the Structuralist View of Science", en G. Schurz y G. J.W. Dorn, *Advances in Scientific Philosophy*, Poznan Studies, vol. 24, Amsterdam: Editions Rodopi.
______1996a, "Structuralism: The Basic Ideas", enW. Balzer y C. U. Moulines, *Structuralist Theory of Science. Focal Issues, New Results*, Berlin: Walter de Gruyter.
______1996b, "Las ideas básicas del estructuralismo metacientífico", *Revista de filosofia*, IX(1996),núm. 16: 93-104.
______1996c, "Aproximación estructural en la Física", *Agora-Papeles de Filosofía*, (1996) 15/2: 97-102.
______2002a, "La ubicación metodológica del estructuralismo metacientífico", *Diálogos*, Vol. 37,79: 237-252.
______2002b, "Introduction: Structuralism as a Program for Modelling Theoretical Science", *Synthese*,Volume 130, 1: 1-11.
______2006a, *La philosophie des sciences. L´invention d´une discipline (fin XIXe-debut XXIe siécle)*, París: Éditions Rue d´Ulm/Press de l´École normale supérieur.
______2006b, "El estructuralismo metateórico", *Universitas Philosophica*, 46: 13-26.
______2007, "Explicación teórica y compromisos ontológicos: un modelo estructuralista", *Quaderns de Filosofia i Ciència*, 37: 7-14.
______2008a, *Fundamentos de filosofía de la ciencia*, Barcelona: Ariel, (2008, 3ª ed).
______2008b, *Die Entwicklung der modernen Wissenschaftstheorie (1890-2000). Eine historische Einführung*, Hamburg: LIT-Verlag.
Relación de artículos en español en: **http://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=40537**

MOYA CANTERO, EUGENIO: 2000, "Alan D. Sokal, Thomas S. Kuhn y la epistemología postmoderna", *Revista de Filosofía*, 23:169-194.
______2003a, "¿Naturalizar a Kant? Una relectura del criticismo kantiano a la luz de la hipótesis modularista de la mente", *Agora: papeles de filosofía*, vol.22, 1: 31-58.

______2003b, *¿Naturalizar a Kant? criticismo y modularidad de la mente*, Madrid: Biblioteca Nueva.
______2004a, “Apriorismo y evolución: el naturalismo emergentista de Kant y Popper”, *Daimón: Revista de Filosofía*, 33: 25-48.
______2004b, “Epigénesis y razón: embriología y conocimiento en Kant”, *Teorema: revista internacional de filosofía*, vol. 23, 1-3: 117-140.
______2005a, “Epigénesis y validez: el papel de la embriología en el programa transcendental de Kant”, *Theoría: revista de teoría, historia y fundamentos de la ciencia*, vol.20, 52: 143-166.
______2005b, “Apriorismo, epigénesis y evolución en el transcendentalismo kantiano”, *Revista de Filosofía* 30, 2: 61-88.
______2008, *Kant y las ciencias de la vida”*, Madrid: Biblioteca Nueva.
______2011, “Kant y la embriología”, en *Kant y las Ciencias*, edit. Pedro Jesús Teruel, 185-224.
Gran parte de las obras son accesibles online en:
http://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=144081
http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo;jsessionid=412374D0224E31BBE8841107034F2F0D.dialnet02?codigo=1087950

MUELLER, I.: 1981, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid’s Elements*, Cambridge Mass.: MIT Press.

MUMMA, JOHN: 2006, *Intuition formalized: Ancient and Modern Methods of Proof in Elementary Geometry*, PhD. thesis, Carnegie Mellon University. Retrieved May 20, 2010 from **http://www.contrib.andrew.cmu.edu/ jmumma/list.html.**
______2008a, “Review of Euclid and his twentieth century rivals: diagrams in the logic of Euclidean geometry by Nathaniel Miller”, *Philosophia Mathematica*, 16:256-264.
______2008b, “Ensuring Generality in Euclid’s Diagrammatic Arguments”, in G. Stapelton, John Howse, and John Lee (Eds.), *Diagrammatic Representation and Inference*, Springer, 2008.
______2009, “A Formal System for Euclid’s *Elements*” *Review of Symbolic Logic*, v. 2, no. 4.
______2010, “Proofs, pictures and Euclid”, *Sinthese*, v. 175, nº 2.
______2011, “The role of geometric content in Euclid’s diagrammatic reasoning”, *Les Etudes Philosophiques*, abril 2011.
______2012, “Constructive Geometric Reasoning and Diagrams”, Final version in *Synthese*, v. 186, no. 1,
______2014, *Research Statement*, accesible online en: **http://www.johnmumma.org/**
Obras de Mumma accesibles online: **http://www.johnmumma.org/Writings.html**

MURAWSKI, R: 1998, “Undefinability of Truth. The Problem of Priority: Tarski vs. Gödel”, *History and Philosophy of Logic*, 19: 153–160.

MYERS, DAVID G.: 2011 (2014), *Psychology Worthpublishers*, 7th. edition, New York: Worth.
http://bcs.worthpublishers.com/myers7e/default.asp?s=&n=&i=&v=&o=&ns=0&t=&uid=0&rau=0
9th. edition (2014) **http://worthpublishers.com/Catalog/static/worth/myersbridge/**

MYHILL, J.: 1967, “On the Ontological Significance of the Löwenheim-Skolem Theorem”, *Contemporary Readings in Logical Theory*, I. Copi and J. Gould, (eds.), New York:Macmillan, pp. 40–51.
______1968, “Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis”, *Logique et Analyse*, 35: 280–297.
______1975, “Constructive set theory”, *Journal of Symbolic Logic*, 40: 347-382.

NAGEL, ERNEST: 1939, *Principles of the Theory of Probability*, Chicago: University of Chicago Press. Volume I, Number 6 of the *International Encyclopedia of Unified Science*, edited by Otto Neurath.
______1961, *The Structure of Science: Problems in the Logic of Scientific Explanation*, New York: Harcourt, Brace and World.

NAGEL, ERNEST & NEWMAN, JAMES R.: 1956, “Goedel’s proof”, *Scientific American*; reprinted in James R. Newman (ed.) (1956), *TheWorld of Mathematics: A small library of the literature of mathematics from A'h-mosé the Scribe to Albert Einstein, presented with commentaries and notes*, vol. 3, 1668-1695, Simon and Schuster, New York,1956.
______1958, *Gödel’s Proof*, New York University Press, New York; revised edition, 2001, edited with a new foreword by Douglas R. Hofstadler, New York: New York University Press.

NAGEL, E. & SUPPES, P. & TARSKI, A. (Eds.): 1962, *Logic, Methodology, and Philosophy of science: Proceedings of 1960 International Congress*, Stanford: Stanford University Press.

NAGEL, GORDON: 1983, *The Structure of Experience*, Chicago, Chicago University Press.

NATANSON, ISIDOR PAVLOVICH: 1955, *Theory of functions of a real variable*, translated from the Russian by Leo F. Boron with the collaboration of Edwin Hewitt. New York: Frederick Ungar Publishing Co.

_____1964 (y 1965), *Constructive Function Theory. Volume I: Uniform Approximation. Volume II (1965): Approximation in Mean. Volume III (1965): Interpolation and approximation quadratures*, translated from the Russian by Alexis S. Obolensky(I), John R. Schulenberger(II y III), New York: Frederick Ungar Publishing Co.

NEEDHAM, T.: 1997, *Visual Complex Analysis*, Oxford: Clarendon Press.

NELSON, EDWARD: 1986, *Predicative Arithmetic*, Mathematical Notes 32. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

NELSON, LEONARD: 1970-74, *Gesammelte Schriften in neun Banden*. Cuidan de la edición: Paul Bernays, Willi Eichler, Arnold Gysin, Gustav Heckmann, Grete Hen~-Hemann, Zritz von Hippel, Stephan Korner, Werner Kroebel, Gerhard Weisser. Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1970-1974. Los títulos de estos volúmenes son: vol. 1: *Die Schule der kritisclien Philosophie und ihre Methode;* vol. 11: *Geschichte und Kritik der Erkenntnistheorie*; vol. 111: *Die kritische Methode in ihrer Bedeutung fur die Wissenschaften*; vol. IV: *Kritik der praktischen Vernunft*; vol. V: *System der philosophischen Ethik und Pädagogik*; vol. VI: *System der philosophischen Rechtslehre und Politik*; vol. VII: *Fortschritte und Rückschritte der Philosophie. Von Hume und Kant bis Hegel und Fries*; vol. VIII: *Sittlichkeit und Bildung*; vol. IX: *Recht und Staat.*

_____1905, "Rezension von Cohen Logik der reinen Erkenntnis", *Göttingische Gelehrte Anzeigen* 167, 610-630; wieder in ders., *Gesammelte Schriften in neun Bänden*, Bd. 2: *Geschichte und Kritik der Erkenntnistheorie,* Felix Meiner: Hamburg 1973, 1-27.

_____1905/06, "Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit", *Abhandlungen der Fries'schen Schule* N.F. 1, 2. und 3. H., 373-430; wieder in ders., *Gesammelte Schriften in neun Bänden*, Bd. 3: *Die kritische Methode in ihrer Bedeutung für die Wissenschaft,* Felix Meiner: Hamburg 1974, 3-52.

_____1908, "Über das sogenannte Erkenntnisproblem", *Abhandlungen der Fries'schen Schule* N.F. 2, 4. Heft, 413-818; wieder in ders., *Gesammelte Schriften in neun Bänden*, Bd. 2: Geschichte und Kritik der Erkenntnistheorie, Felix Meiner: Hamburg 1973, 60-391.

_____1916, "Mein Glaubensbekenntnis", Brief an David Hilbert, dat. Westend-Berlin, 29.12.1916, SUB Göttingen, cod.Ms.D.Hilbert 482, 20a.

_____1928, Nelson, "Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik", *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften* 34, 108-115, 136-142.

NENON, THOMAS: 1986, *Objektivität und endliche Erkenntnis: Kants transzendentalphilosophische Korrespondenztheorie der Wahrheit*, Freiburg/München: Verlag Karl Alber.

NETZ, R.: 1999, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study of Cognitive History*, Cambridge: Cambridge University Press.

NEWBOLD, PAUL & CARLSON, WILLIAM & THORNE, BETTY: 2007 (2014), *Statistics for Business and Economics*, New Jersey: Prentice Hall. Traducción española (9ª edición), *Estadística para Administración y Economía*, Madrid: Pearson Prentice Hall 2014.

NIEBERGALL, KARL GEORGE: 2009, "On 2nd Order Calculi of Individuals", *Theoria* 24 (2):169-202.

_____2002, "Structuralism, Model Theory and Reduction", *Synthese* 130 (1):135 - 162.

_____2000, "On the Logic of Reducibility: Axioms and Examples", *Erkenntnis* 53 (1-2):27-61.

_____1999, "Nonmonotonicity in (the Metamathematics of) Arithmetic", *Erkenntnis* 50 (2-3):309-332.

NIEBERGALL, KARL-GEORG & SCHIRN, MATTHIAS: 2003, "What Finitism Could Not Be", *Crítica* 35 (103):43 - 68.

_____2002, "Hilbert's Programme and Gödel's Theorems", *Dialectica* 56 (4):347–370.

_____2001, "Extensions of the Finitist Point of View", *History and Philosophy of Logic* 22 (3):135-161.

NIKODYM, OTTON: 1930, "Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon", *Fundamenta Mathematicae*, 15:131-179.

NORDSTÖM, BENGT & PETERSSON, KENT & SMITH, JAN: 1990, *Programming in Martin-Löf's Type Theory*, Oxford: Oxford University Press. The book is out of print, but a free version has been made available from **www.cs.chalmers.se/Cs/Research/Logic**

NORRIS, CHRISTOPHER, 1997, *Against Relativism: philosophy of science, deconstruction and critical theory*, Blackwell,Oxford.

_____2000, "McDowell on Kant: redrawing the bounds of sense", *Metaphilosophy* vol. 31, no. 4, 382-411.

_____2011, *"'*Second Nature', Knowledge and Normativity: Revisiting MacDowell's Kant*", Diametros* 27, 64- 107.

NORTHROP, BENJAMIN J.: 2011, *Automated Diagrammatic Reasoning. A proof checker for the language of E.* Masters Thesis, Department of Philosophy, Carnegie Mellon University. **http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Students/northrop_051911.pdf**
El programa y sus instrucciones: **http://www.bennorthrop.com/e/e-proof-checker.php**

NOZICK, R.: 2001, *Invariances: the structures of objective world*, Cambridge MA: Harvard University Press.

NUBIOLA, J.: 1984, *El compromiso esencialista de la lógica modal. Estudio de Quine y Kripke*, Pamplona: Eunsa.

ODIFREDDI, PIERGIORGIO: 1989, *Classical Recursion Theory*, Amsterdam: North Holland; second edition, 1999.

_____1999, *Classical Recursion Theory (Volume II)*, Amsterdam: North Holland.

_____2001, *Combinatorics, Computability and Logic*, C. S. Calude, M. J. Dinneen, and S. Sburlan (edits.), London: Springer-Verlag.

ODIFREDDI, PIERGIORGIO & COOPER, S. BARRY: 2012, "Recursive Functions", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/recursive-functions/**

O'NEIL, ONORA: 1984, "Transcendental Synthesis and Developmental Psychology", Kant Studien 75. 149-167.

OREY, MICHAEL

_____2001, "Information Processing". In M. Orey (Ed.), *Emerging perspectives on learning, teaching, and technology*. **http://projects.coe.uga.edu/epltt/**

_____2014, *Information Processing*, Department of Educational Psychology and Instructional Technology, University of Georgia. **http://epltt.coe.uga.edu/index.php?title=Information_processing**

ORLOV, IVAN E.: 1928,"Calculus of the compatibility of sentences", *Matematicheskij sbornik*, M. 35, 263–286. Original en ruso. El primer análisis de ese artículo y su traducción al ingles, en (Došen,1990). Un análisis comparativo en (Stelzner, 2002).

ORTIZ DE LANDAZURI, CARLOS: 1985, "Recensión de *El compromiso esencialista de la lógica modal. Estudios sobre Quine y Kripke (de J. Nubiola)", Anuario Filosófico*, XVIII/2 (1985)), 234-238.

OTTE, MICHAEL: 1998, *Mathematik in der Philosophie I. Naturalisierte Erkenntnisstheorie*. Occasional Paper 170, Arbeiten aus dem Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

_____2003, "Does Mathematics have objects? In what sense?", *Synthese* 134, 181-216.

PACHO, JULIAN: 1977, "El concepto kantiano de sustancia en la Primera Analogía de la Experiencia. Hacia una crítica del esencialismo", *Pensamiento, Revista de Filosofía*, 33 (1977), 177-204.

_____1981, "Begründung der Wissenschaft und Metaphysik", in: Frey/Zegler (Hersgs.), *Der Mensch und die Wissenschaft vom Menschen, XII Dt. Kongreß für Philosophie 1981*, 955-963.

_____1984, "Protofísica y fundamentación en la astronomía de J. Kepler", in: *Actas del III Congreso de la S.E.H.C.*, San Sebastián 1986, 313-327.

_____1989, "La 'parte pura' de las ciencias de la naturaleza. Observaciones sobre el fundamentalismo kantiano", *Theoria*, IV(1989), 471-490.

_____1993, "Realismus-Krise, Naturalismus und Der 'Skandal der Philosophie'", en AAVV: *Neue Realitäten, Herausforderung der Philosophie*, Ed. Allgemeine Gesellschaft für Philosophie in Deutschland, Akademie Verlag, Berlin, 1993, vol. II, pp. 560-578.

_____1995, "El *a priori* biológico y el *a priori* transcendental. Contraposición", en *¿Naturalizar la razón?Alcance y límites del naturalismo evolucionista*, editorial Siglo XXI, Madrid 1995, 112-121.

_____1997, *Los nombres de la razón*, Bilbao: Editorial UPV.

_____1999, "El a priori del saber y el saber del a priori", en E. García y J. Muñoz (Eds.): *La teoría*

evolucionista del conocimiento, Ed. Complutense, Madrid 1999, 93-111.
_____2000, “Naturaleza y artificio Trascendental. Observaciones críticas a la teoría kantiana del conocimiento”, en: M. Torrevejano y J. L.Blasco (Eds.): *Trascendentalidad y Racionalidad*, Publicaciones Univ. Valencia 2000, 171-196
_____2009, “Epistemología evolucionista. Una epistemología naturalizada”, en: Q. Quesada (ed.): *Cuestiones de Teoría del Conocimiento*, ed.Tecnos, Madrid 2009, 314-349.

PAGELS, H.: 1988, *The Dreams of Reason: The Computer and the Rise of the Sciences of Complexity*, New York: Simon & Schuster.

PAIVIO, ALLAN: 1971, *Imagery and verbal processes*, New York: Holt, Rinehart & Winston.
_____1986, *Mental representations: A dual coding approach*, New York: Oxford Press.
_____2006a, *Mind and its evolution; A dual coding theoretical interpretation*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
_____2006b, “Dual Coding Theory and Education”, conferencia pronunciada por Allan Paivio en *The University of Michigan School of Education*: **http://www.umich.edu/~rdytolrn/pathwaysconference/presentations/paivio.pdf**

PARSONS, CHARLES: 1964, “Infinity and Kant's Conception of the ‘Possibility of Experience’”, *The Philosophical Review*, 73 (2): 182–197. [Reprinted in Parsons 1983]
_____1969, “Kant's Philosophy of Arithmetic”, in S. Morgenbesser, P. Suppes, and M. White (eds.), *Philosophy, Science and Method: Essays in Honor of Ernest Nagel*, New York: St. Martin's Press. [Reprinted in Parsons 1983 and in Posy 1992]
_____1983, *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*, Ithaca: Cornell University Press.
_____1984, “Arithmetic and the Categories”, *Topoi*, 3 (2): 109–121. [Reprinted in Posy 1992]
_____1992, “The Transcendental Aesthetic”, en The Cambridge Companion to Kant, editor: Paul Guyer. Cambridge University Press.
_____1994, “Intuition and Number” en *Mathematics and Mind*, p.143; Oxford, Oxford University Press.
_____1998, “Finitism and intuitive knowledge”, in *The Philosophy of Mathematics Today*, Matthias Schirn, ed., Oxford: Oxford University Press, 249-270.
_____2008, *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge: Cambridge University Press.
_____2010, “Two Studies in the Reception of Kant's Philosophy of Arithmetic”, in Domski, M. and Dickson, M. (eds.), 135–153, *Discourse on a New Method: Reinvigorating the Marriage of History and Philosophy of Science*, Chicago: Open Court Publishing.Domski and Dickson 2010.
_____2012, *From Kant to Husserl: Selected Essays*, Cambridge: Harvard University Press.

PARZEN, EMANUEL: 1960 (1992), *Modern Probability Theory and its Applications*, New York: John Wiley & Sons.
_____1962 (1999), *Stochastic Processes*, Oakland, CA: Holden-Day. Republished in 1999 by The Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

PASCH, MORITZ: 1882, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig: Teubner Verlag, 1882. 2.en Aufgabe, Berlin: Springen Verlag, 1926. 3.en Aufgabe, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1976. Traducción española: *Lecciones de Geometría moderna*, traducción de Julio Rey Pastor y José Alvarez Ude, Junta de Ampliación de Estudios, Madrid, 1912.

PATON, HERBERT JAMES: 1936, *Kant’s Metaphysic of Experience: A Commentary on the First Half of the ‘Kritik der reinen Vernunft’*, London: Macmillan, 2nd. edition 1951.

PATTON, LYDIA: 2012, “Hermann von Helmholtz”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2012 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/hermann-helmholtz/**

PATYRA, M. J. (edit.): 1996, “Fuzzy Logic Hardware implementations”, *IEEE Trans. of Fuzzy Systems*, 4(4), 401-405.

PATYRA, M. J. & MLYNEK D. M. (edits.): 1996, *Fuzzy Logic- Implementation and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester and B.G. Teubner, Stuttgart.

PEACOCKE, CHRISTOPHER: 1983, *Sense and Content*, Oxford: Oxford University Press.
_____1992, *A Study of Concepts*, Cambridge, Mass.: MIT Press.
_____2004, *The Realm of Reason*, Oxford: Oxford University Press.

_____2005a, “The A Priori”, *The Oxford Handbook of Contemporary Philosophy*, ed. F. Jackson and M. Smith, Oxford: Oxford University Press, 2005.
_____2005b, “Justification, Realism and the Past”, *Mind* 114 (2005), 639-70.
_____2009, “Objectivity”, *Mind* 118 (2009), 739-769.

PECKHAUS, VOLKER: 2014, “Kantianer oder Neukantianer? Über die Schwierigkeiten, Frege der Philosophie seiner Zeit zuzuordnen”, Universität Paderborn: **http://kw.uni-paderborn.de/institute-einrichtungen/institut-fuer-humanwissenschaften/philosophie/personal/peckhaus/texte-zum-download/kantianer-oder-neukantianer/**
_____1999a, “Fries in ‚Hilberts Göttingen`: Die neue Fries'sche Schule”, in: *Jakob Friedrich Fries.Philosoph, Naturwissenschaftler und Mathematiker*, hg. v. Wolfram Hogrebe/Kay Herrmann,Peter Lang: Frankfurt a.M. u.a. (= Studia Philosophica et Historica; 25), 353-368.
_____1999b, “19th century logic between philosophy and mathematics”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 5 (1999), 433-450.
_____1998, *Mathesis universalis. Leibniz und die Entdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert*, Berlin: Akademie-Verlag.
_____1997, “The way of logic into mathematics”, *Theoria*, vol. 12(1997), 39- 64.
_____1990, *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
_____1982, *Kant's Theory of Form*, New Haven: Yale University Press.

PEDEFERRI, ANDREA: 2009, “Why Do We Call Second Order Logic `Logic' ?”, Talk in George Washington University, 2009, unpublished draft: **http://andreapedeferri.weebly.com/uploads/1/9/1/2/19123287/cv_pedeferri.pdf**

PEDERSEN, NIKOLAJ J. L. & WRIGHT, CORY: 2013, “Pluralist Theories of Truth”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/truth-pluralist/**

PEIRCE, C. S.: 1865, “On an Improvement in Boole's Calculus of Logic”, *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* 7: 250-61.
_____1870, “Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic”, *Memoirs of the American Academy* 9: 317-78.
_____1883, “The Logic of Relatives”, in *Studies in Logic*, ed. C. S. Peirce. Boston: Little-Brown, 187-203.
_____1885, “On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation”, *American Journal of Mathematics* 7: 180-202.
_____1933, *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Charles Hartshorne y Paul Weiss (eds.), Cambridge: Harvard University Press.
_____1984, *Writings of Charles S. Peirce. A Chronological Edition*. (Ed.) E. C. Moore. Vol. 2: 1867-71. Bloomington: Indiana University Press.
_____1998, *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings*, Bloomington: Indiana University Press.

PÉTER, RÓZSA: 1951, *Rekursive Funktionen in der Komputer-Theorie*, Budapest: Akademiai Kiado; traducción inglesa: *Recursive Functions*, translated by István Földes, New York: Academic Press (1967).

PIERCE, JOHN R.: 1961, *Symbols, Signals and Noise: The Nature and Process of Communication*, New York: Harper & Brothers (1961): **https://archive.org/details/symbolssignalsan002575mbp**
_____1980, *An Introduction to Information Theory. Symbols, Signals and Noise*, New York: Dover Publications Inc. Es una edición corregida y aumentada de: *Symbols, Signals and Noise: The Nature and Process of Communication*, New York: Harper & Brothers (1961).

PLOFKER, KIM: 1930 (1963), (2007), (2009)“Mathematics in India”. In *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia,China, India, and Islam: A Sourcebook*, Asia Publishing House. Reed. New York: Princeton University Press, 2007. Reed. *Mathematics in India*, Princeton, NJ & Oxford: Princeton University Press, 2009.

PIPPIN, ROBERT: 1982, *Kant's Theory of Form*, New Haven, Conn.:Yale University Press.

PLA I CARRERA, JOSEP: 2012, *El Teorema de Gödel. Un análisis de la verdad matemática*, Madrid: Real Sociedad Matemática Española.

PLATON: 1985, *La República*, versión española de Patricio Azcárate, Madrid: EDAF.

_____2003, *Diálogos, volumen-II*. Traducción de C. García Gual y E. LLedó, Madrid: editorial Gredos.

POINCARÉ, HENRI: 1896, *Calcul des probabilités. Leçons professées pendant le deuxiéme semestre 1893-1894*, Paris: Gauthier-Villars 1896. Free on-line at **http://historical.library.cornell.edu**.

_____1902, "Les fondements de la géometrie" *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 26:249-272.

_____1906, "Les mathématiques et la logique", *Revue de métaphysique et de morale*, 14: 294-317. English translation in Ewald (1996c, 1038-1052).

_____1908, *Science et Méthode*, Paris: Flamarion. Translated by Francis Maitland as *Science and Method*, New York: Dover Publications, 1914 y 1952.

_____1912, *Calcul des probabilités*, Paris: Gauthier-Villars 1912. Second edition of (Poincaré,1896).

_____1958, *The Value of Science*, Mineola: Dover.

POIZAT, BRUNO: 2000, *A Course in Model Theory: An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*, Berlin, New York: Springer.

POLYA, GEORGE: 1945, (2004), *How to solve it*, Princeton & Oxford: Princeton University Press. Traducción española: *Cómo plantear y resolver problemas*, Editorial Trillas, Mexico 1965. Reedición inglesa con introducción de John H. Conway: *How to solve it. A new aspect of mathematical method*, Princeton-Oxford: Princeton University Press (2004).

_____1956, *Mathematics and plausible reasonning*, Princeton: Princeton University Press. Traducción española: "Matemáticas y razonamiento plausible", Madrid: Editorial Tecnos, 1966.

POPPER, KARL R.: 1935, *Logik der Forschung: Zur Erkenntnistheorie der modernen Naturwissenschaft*, Vienna: Springer, 1935. An English translation, *The Logic of Scientific Discovery*, with extensive new appendices, was published by Hutchinson, London, in 1959, reedited in London: Hutchinson & Co. (1975). Reprinted, London: Routledge, 1992.

_____1938, "A set of independent axioms for probability", *Mind*, 47:275-277.

_____1957, "The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability and the Quantum Theory", in S. Körner (ed.), *The Colston Papers*, 9: 65–70.

_____1959, "The Propensity Interpretation of Probability", *British Journal of the Philosophy of Science*, 10: 25–42.

_____1972, *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*, Oxford: Oxford University Press.

_____1983, *Realism and the aim of science*, London: Rowman and Littlefield.

_____1996, *In Search of a Better World*, London: Routledge.

PORTORARO, FREDERIK: 2011, "Automated Reasoning", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/reasoning-automated/**

POST, EMIL: 1921, "Introduction to a general theory of elementary propositions", *American Journal of Mathematics*, 43: 163–185.

POSY, C.: 1984, "Kant's Mathematical Realism", *The Monist*, 67: 115–134. [Reprinted in Posy 1992.]

_____1992, (editor), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

_____2003, "Between Leibniz and Mill: Kant's logic and the rhetoric of psichologicism", en D. Jaquette (editor), *Philosophy, Psychology and Psychologicism*, 51-79, Amsterdam: Kluwer.

_____2008, "Intuition and Infinity: A Kantian Theme with Echoes in the Foundations of Mathematics", *Royal Institute of Philosophy Supplement*, 63: 165–193.

POSY, C. & RECHTER, O. (editors): 2015 (forthcoming), *Kant's Philosophy of Mathematics*, 2 volumes, Cambridge: Cambridge University Press.

PRAUSS, GEROLD: 1974a, *Kant und das Problem der Dinge an sich*, Bonn: Bouvier Verlag.

_____1974b, "Zur Problematik der Dinge an sich", *Akten des 4.Internationalen Kant-Kongresses, Mainz 6.-10, April 1974, Teil II.1*, pp. 222- 239, Berlin & New York: Walter de Gruyter, 1974.

_____1971, *Erscheinung bei Kant: Ein Problem der Kritik der reinen Vernunft*, Berlin: de Gruyter.

PRICHARD, H. A.: 1909, *Kant's Theory of Knowledge*, London: Clarendon Press.

PRIEST, GRAHAM: 2002, "Paraconsistent Logic", D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of*

Philosophical Logic, Volume 6 (2nd ed.), The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

_____2008, *An Introduction to Non-Classical Logic*: From If to Is, Cambridge: Univ. of Cambridge Press.

PRIEST, GRAHAM. & TANAKA, KOJI : 2013, "Paraconsistent Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/logic-paraconsistent/**

PRIGOGINE, I.: 1987, *Introduction to Thermodynamics of irreversible processes*, London: Interscience.

PRINZ, J. J.: 2002, *Furnishing the Mind: Concepts and their Perceptual Basis*, Boston, MA: MIT Press.

PROCLUS: 1970, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, (Glenn R. Morrow, trans.), Princeton: Princeton University Press.

PUDLÁK, PAVEL

_____1985. "Cuts, consistency statements and interpretations", *Journal of Symbolic Logic* v. 50 n.2, pp. 423–441.

_____1996, "On the length of proofs of consistency", *Collegium Logicum, Annals of the Kurt Gödel Society* 2: 65-86.

PURKERT, W.: 2002, "Grundzüge der Mengenlehre. Historische Einführung", en W.Purkert et alt. (eds) *Felix Hausdorff, Gesammelte Werke, vol. 2,* Berlin, Springer, 1-89.

PUTNAM, HILARY: 1964, "Mathematics without foundations", en *Philosophy of Mathematics. Selected readings*, P. Benacerraf & H. Putnam edit., Prentice-Hall 1964. Reeditado, Cambridge Univ. Press, 1983.

_____1976, "Realism and reason", en (Putnam,1978,123–140).

_____1978, *Meaning and the moral sciences*, London: Routledge and Kegan Paul.

_____1980, "Models and Reality", *J. Symbol Logic* 45:464–482, rep. in (Putnam, 1983,1–25).

_____1981, *Truth and History*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1983, *Realism and Reason*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1989, "Model Theory and the 'factuality' of Semantics", in *Reflections on Chomsky*, A. George (ed.), Cambridge: Blackwell, 213–231.

PYLYSHYN, Z. W.: 1973, "What the mind's eye tells the mind's brain: A critique of mental imagery", *Psychological Bulletin*, 80, 1–24.

_____1981, "The imagery debate: Analogue media versus tacit knowledge", *Psychological Review*, 87, 16–45.

_____2002, "Mental imagery: In search of a theory", *Behavioral and Brain Sciences*, 25, 157–238.

_____2003, "Return of the mental image: Are there pictures in the brain?", *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 113–118.

QUINE, WILLIARD VAN ORMAN: 1936, "Set-theoretic foundations for logic", *The Journal of Symbolic Logic*, vol.1, 45-57.

_____1940, *Mathematical Logic*, Harvard University Press. Traducción española de José Hierro: *Lógica Matemática*, Revista de Occidente, Madrid 1972.

_____1941, "Whitehead and the Rise of Modern Logic", in *The Philosophy of Alfred North Whitehead*, ed. P. A. Schilpp. Evanston, 111.: Northwestern University,125-63.

_____1946, "Concatenation as a basis for arithmetic", *J. Symb. Logic*, *11* (4), 105-114.

_____1951, "Two Dogmas of Empiricism", *The Philosophical Review* 60: 20–43. Reprinted in his 1953 *From a Logical Point of View*, Cambridge Mass.: Harvard University Press.

_____1953a, "Reference and Modality", in *From a Logical Point of View*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 139-159.

_____1953b, *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass: Harvard University Press. 2ª edición, 1980. Traducción española*: Desde un punto de vista lógico*, Ariel, Barcelona,1962.

_____1954, "Reference and modality", *Journal Symbolic Logic*, 19: 137–138.

_____1960, *Word and Object*, Cambridge, Mass: MIT Press. Traducción española: *Palabra y Objeto*, Labor, Barcelona 1968.

_____1969a, "Epistemology Naturalized", *Ontological relativity and other essays*, New York, Columbia Univ. Press, 69-90.

_____1969b, *Ontological Relativity and Other Essays*, New York: Columbia University Press.

_____1970, *Philosophy of Logic*, Englewoods-Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc.Traducción española:

Filosofía de la lógica, Alianza editorial, Madrid 1981.

______1980, *Word and Object*, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1980.

______1981, *Theories and Things*, Cambridge, Mass. and London: The Belknap Press of Harvard University Press.

______1993a, "In Praise of Observation Sentences", *Journal of Philosophy*, 90.

______1993b, "Progress on Two Fronts", *Journal of Philosophy*, 93.

RAATIKAINEN, P.: 2003, "Hilbert's Program Revisited", *Synthese* 137: 157-177.

RABIN, M.O.: 1976, "Probabilistic algorithms", in J.B. Traub (edit) *Algorithms and Complexity: New directions and recent results*, New York: Academic Press.

RAMSEY, FRANK PLUMPTON: 1925, "The Foundations of Mathematics", *Proceedings of the London Mathematica Society* (2) 25: 338-84. reprinted in *Foundations*, London, Routledge & Kegan Paul, 1978.

______1926, "Truth and Probability", in *Foundations of Mathematics and other Essays*, R. B. Braithwaite (ed.), London: Kegan, Paul, Trench, Trubner, & Co., 1931, 156–198; reprinted in *Studies in Subjective Probability*, H. E. Kyburg, Jr. and H. E. Smokler (eds.), 2nd edition, New York: R. E. Krieger Publishing Company, 1980, 23–52; reprinted in *Philosophical Papers*, D. H. Mellor (ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

______1928, "General Propositions and Causality", in *Philosophical Papers*, edited by D. H. Mellor, Cambridge: Cambridge University Press.

RADON, JOHANN: 1913, "Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen", *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse*, 122IIa:1295-1438, 1913. Reprinted in his *Collected Works*, 1:45-188. Basel: Birkhäuser, 1987.

RAUTENBERG, WOLFGANG: 2008, *Einführung in die Mathematische Logik*, 3. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner. **http://www.springerlink.com/content/978-3-8348-0578-2/**

RAV, Y.: 2007, "Critique of a formal-mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices", *Philosophia Mathematica* 7: 5-41.

RECHTER, O.: 2006, "The View from 1763: Kant on the Arithmetical Method Before Intuition", in E. Carson and R. Huber (eds.), *Intuition and the Axiomatic Method*, Dordrecht: Springer.

RECK, ERICH: 2007, "Frege on truth, judgment, and objectivity", *Grazer Philosophische Studien*, 75: 149–173.

REED, D.: 1995, *Figures of Thought: Mathematics and Mathematical Texts*, New York: Routledge.

REED, S. K.: 2010, *Cognition: Theories and application* (8th ed.). Belmont, CA: Wadsworth Cengage Learning.

REICH, K.: 1932 (1992), *Die vollständigkeit der kantischen Urteilstafel*, Berlin: Schoetz, 1932. Translated as *The Completeness of Kant's Table of Judgements*, Stanford: Stanford University Press, 1992.

REICHENBACH, HANS: 1916, *Der Begriff der Wahrscheinlichkeit für die mathematische Darstellung der Wirklichkeit*, Leipzig: Barth.

______1920, *Relativitätstheorie und Erkenntnis apriori*, Berlin: Springer Verlag. Traducción inglesa por Maria Reichenbach, *The Theory of Relativity and A Priori Knowledge*, University of California Press, Berkeley 1965.

______1932, "Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung", *Mathematische Zeitschrift*, 34:568-619.

______1944, "Philosophic Foundations of Quantum Mechanics", Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles; paper edition, 1965; German transl. Basel, 1949 and Reichenbach (1977a), vol. 5; Sections 29–37 reprinted as "Three-valued Logic and the Interpretation of Quantum Mechanics" in C. A. Hooker (ed.) *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics, vol. I: Historical Evolution*, Reidel, Dordrecht and Boston, 1975, 53–97.

______1949a, *The Theory of Probability. An Inquiry into the Logical and Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*, Berkeley: University of California Press. Second ed.: Berkeley: University of California Press, 1971. Translated from the German by Ernest H. Hutten and Maria Reichenbach.

______1949b, "The Philosophical Significance of the Theory of Relativity", in: P. A. Schilpp (ed.), *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, La Salle (Ill.): Open Court, 289-311.

_____1951, *The Rise of Scientific Philosophy*, Berkeley (CA): University of California Press.
_____1958, *The Philosophy of Space and Time*, New York: Dover Publications.
_____1977, *Gesammelte Werke in 9 Bänden*, A. Kamlah and Maria Reichenbach (eds.), Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.
_____1978, *Selected Writings: 1909–1953*, 2 volumes, M. Reichenbach and R.S. Cohen, (eds.), Dordrecht-Boston: Reidel. Principal translations by E. Hughes, Schneewind, further translations by L. Beauregard, S. Gilman, M. Reichenbach, and G. Lincoln.
_____2008, *The Concept of Probability in the Mathematical Representation of Reality*, transl. of Reichenbach (1915) with introduction by F. Eberhardt and C. Glymour (eds.). Chicago, La Salle, IL: Open Court.

REID, CONSTANCE: 1970, *Hilbert*, New York: Springer-Verlag. Reedición de Copernicus-Springer-Verlag, New York, 1996.

REINHOLD, KARL LEONARD: 1789, *Versuch einer neuen Theorie des menschlichen Vorstellungsvermögens*, Prague und Jena: C.Widtmann und I.M.Marke.
_____ 1790, "Briefe über die kantische Philosophie", revista *Merkur*, 1790. Reeditado e introducido por Raymund Schmidt, Leipzig: Reclam 1923.
_____ 2005, *Letters on the kantian Philosophy*. Editado por Karl Ameriks. Traducción, estudio y amplia bibliografía de James Hebbeler. New York: Cambridge University Press.

REITER, R.: 1980, "A Logic for Default Reasoning", *Artificial Intelligence* 13 (1980), 81-132.
_____1978,"On reasoning by default", *Prec. Second Syrup. on Theoretical Issues in Natural Language Processing*, Urbana, Illinois, July 25-27, 1978.

RENYI, A.: 1955, "On a New Axiomatic Theory of Probability", *Acta Mathematica Academiae Scientiarium Hungaricae* 6, 285-335.
_____1970, *Foundations of Probability*, San Francisco: Holden-Day, Inc.

RESCHER, NICHOLAS: 1969, *Many-Valued Logic*, New York: McGraw-Hill.
_____ 1974, "Noumenal Causality", en *Kant's Theory of Knowledge*, L.W. Beck editor, Dordrecht: Reidel.
_____1979, "Russell and Modal Logic", in George W. Roberts (edit.) *Bertrand Russell Memorial Volume*, London: George Allen and Unwin, p. 146.

RESNIK, MICHAEL D.: 1966, "On Skolem's Paradox," *The Journal of Philosophy*, 63: 425–438.
_____1974a, "On the philosophical significance of consistency proofs", *Journal of Philosophical Logic*, 3: 133-47.
_____1974b, "The Frege-Hilbert Controversy", *Philosophy and Phenomenological Research, Vol.34, Nº3.*
_____1980, *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ithaca, New York: Cornell University Press.
_____1988, "Second-order logic still wild", *J. Phil* 85:75–87.
_____1992, "Proofs and the Source of Truth", *Proofs and Knowledge in Mathematics*, M.Detlefsen (editor), 6-32, London: Routledge.
_____1997, *Mathematics as a science of patterns*, Oxford: Oxford University Press.
_____2000, "Parsons on Mathematical Intuition and Obviouness", *Between Logic and Intuition. Essays in Honor of Charles Parsons*, Gila Sher, Richard Tieszen edit., Cambridge: Cambridge University Press, 219-231.

RESNIK, MICHAEL & KUSHNER, DAVID: 1987, "Explanation, Independence, and Realism in Mathematics", *British Journal for the Philosophy of Science*, 38: 141-158.

RESTALL, G.: 1996, "Information Flow and Relevant Logics," in J. Seligman and D. Westerstahl (eds.), *Logic, Language and Computation* (Volume 1), Stanford: CSLI Publications, 463–478.
_____2007, "Review of Brady *Universal Logic*", *Bulletin of Symbolic Logic*, 13/4: 544–547.

REVESZ, G.E.: 1988, *Lambda-Calculus, Combinators, and Functional Programming*, Cambridge: Cambridge University Press; reprinted 2008.

REY, GEORGES: 2012, "The Analytic/Synthetic Distinction", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/analytic-synthetic/**

RICHARDSON, ALAN: 1998, *Carnap's Construction of the World: The Aufbau and Emergence of Logical Empiricism*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____2003, “The Scientific World Conception: Logical Positivism, 1914-1945". *The Cambridge History of Philosophy*, 1870-1945. Ed. Thomas Baldwin. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 391–400.

_____2010, *Philosophy of Science*, December 2010. Topic: Symposium Papers at PSA 2008. **http://blogs.ubc.ca/arichardson/publications-2/**

RICHMAN, FRED: 1983, “Church's Thesis Without Tears”, *Journal of Symbolic Logic*, 48: 797–803.

_____2000, “The Fundamental Theorem of Algebra: A Constructive Treatment Without Choice”, *Pacific J. Math.*, 196: 213–230.

RICHTER, HANS: 1954, “Zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Dialectica*, 8:48-77.

_____1956, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Berlin: Springer.

RIEMANN, BERNHARD: 1854, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, disertación de habilitación, Univ de Göttingen, *Abhandlungen der Königlichen Gessellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, pp. 133-162, Berlin 1892. Traducción por J. Ferreirós: *Sobre las hipótesis que sirven de base a la Geometría*, en Riemanniana Selecta, Madrid: CSIC, 2000. Publicado por Richard Dedekind después de la muerte de Riemann en *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 13, 1892. Accesible online: **http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/** y en **http://www.emis.de/classics/Riemann/Geom.pdf**
William Kingdon Clifford tradujo la disertación al inglés: *On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry*, in *Nature*, vol 8, pp, 14-17, 36, 37. Otra traducción al inglés en: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* , Volume II, by Michael Spivak (2nd Edition, Publish or Perish Inc, Berkeley, 1979, vol. II, pp. 135-153). Esta traducción está complementada con una discusión de sus contenidos realizada por un matemático de la talla de Spivak. La traducción inglesa de Clifford está accesible online en: **http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/**

RINE, DAVID C.: 1977, *Computer Science and Multiple-Valued Logic*, David C. Rine (edit.), Amsterdam: North-Holland.

RISJORD, M.: 1990, “The Sensible Foundation of Mathematics: A Defense of Kant’s View”, *Studies in the History and Philosophy of Science*, 21(1): 123-143.

ROBINSON, ABRAHAM: 1969, “The Metaphysics of the Calculus” , en *The Philosophy of Mathematics*, editor: Jaakko Hintikka. New York: Oxford University Press.

ROBINSON, JULIA & DAVIS, MARTIN & PUTNAM, HILARY: 1961, “The Decision Problem for Exponential Diophantine Equations”, *The Annals of Mathematics* Vol. 74, No. 3, Nov., 1961, 425-436).

ROBINSON, RAPHAEL MITCHEL: 1950, “An Essentially Undecidable Axiom System" in *Proceedings of the International Congress of Mathematics* 1950,729–730.

ROBINSON, JOHN ALA & VORONKOV, ANDREI (editors): 2001, *Handbook of Automated Reasoning*, Elsevier and MIT Press.

ROBSON, KENT E.: 1974, “Kant’s Concept of Intuition”, *Akten des 4.Internationalen Kant-Kongresses, Mainz 6.-10, April 1974, Teil II.1*, 240-246, Berlin & New York: Walter de Gruyter, 1974.

RODYCH, VICTOR: 2011, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/wittgenstein-mathematics/**

RÖD, WOLFGANG: 1974, “Die Bedeutung von ‘Wirkichkeit’ in Kants Theorie der Erfahrung”, *Akten des 4.Internationalen Kant-Kongresses, Mainz 6.-10, April 1974, Teil II.1*, 247- 254, Berlin & New York: Walter de Gruyter, 1974.

_____1988, “Zur psychologischen Deutung der Kantischen Erfahrungstheorie”, in: Kant. *Analysen-Probleme-Kritik*, ed. de H. Oberer & G. Seel, Königshausen 1988, 9-26.

_____1991, “Kants Reine Naturwissenschaft als kritische Metaphysik”, *Dialectica*, Volume 45, 117–131.

_____1995, “Kant und Hume: Die Transzendentalphilosophie als Alternative zum Naturalismus”, *Dialectica*, Volume 49, 317–334, June 1995.

_____1996, *Der Weg der Philosophie. Von den Anfängen bis ins 20. Jahrhundert*, 2. Band: 17 bis

20. Jahrhundert, München: Beck.

ROGERS, H.: 1987, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, Cambridge, MA: MIT Press.

RORTY, RICHARD: 1979, *Philosophy and The Mirror of Nature*, Princeton: Princeton University Press.

ROSEN, G.: 1994, "What is Constructive Empiricism?", *Philosophical Studies*, 74(2): 143–178.

ROSENBERG, A. (2005): *Philosophy of Science*, New York: Routledge.

ROSENBLOOM, C.: 1942, "Post algebras I. Postulates and General Theory", *Amer. J. of Maths*., 64 (1942), 167-188.

ROSENKOETTER, T.: 2009, "Truth criteria and the very project of a transcendental logic", *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 61 (2): 193-236.

ROSSBERG, MARCUS: 2004, "First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness", Hendricks et al. (eds.): *First-Order Logic Revisited*, (2004), 303–321, Berlin: Logos Verlag.

ROSSER, J. BARKLEY.: 1936, "Extensions of some theorems of Gödel and Church", *Journal of Symbolic Logic*, v. 1, pp. 87–91.

_____1984, "Highlights of the History of the Lambda-Calculus", *Annals of the History of Computing*, 6(4): 337–349.

ROSSER, J. B. & TURQUETT, A. R.: 1952, *Many-valued Logics*, Amsterdam: North-Holland 1952.

ROWE, DAVID E.: 1983, "A forgotten chapter in the History of Felix Klein's *Erlanger Programm*", *Historia Mathematica, 10*, 448-457.

RUFFINO, MARCO: 2003, "Wahrheit als Wert und als Gegenstand in der Logik Freges", in: D. Greimann (ed.), *Das Wahre und das Falsche. Studien zu Freges Auffassung von Wahrheit*, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 203–221.

RUSNOCK, P.: 2004, "Was Kant's Philosophy of Mathematics Right for His Time?", *Kant-Studien*, 95 (4): 426–442.

RUSSELL, BERTRAND: 1897, *An Essay on the foundatiosns of Geometry*, Cambridge, England: Cambridge University Press. Reedición 2011. Accesible online: **www.forgottenbooks.org**

_____1903, *Principles of Mathematics*, Cambridge University Press. 2ª edición: London: Georg Allen & Unwin Ltd., 1907. (Las citas a esta obra son de esta última edición). Reprint London, Allen & Unwin, 1948.También hay una edición online:
http://fair-use.org/bertrand-russell/the-principles-of-mathematics/
Reedición: New York: W.W. Norton & Company, 1996

_____1905, "On denoting", *Mind*, 14:479-493, 1905. Reprinted in Robert C. Marsh, (ed)., *Logic and Knowledge: Essays 1901-1950, by Bertrand Russell*, London: Allen & Unwin, 1956.

_____1906, "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", *Proceedings of the London Mathematical Society* (2) 4: 29-53.

_____1908, "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", *American Journal of Mathematics* 30: 222-62.

_____1919, *Introduction to Mathematical Philosophy*, London: Allen & Unwin.

_____1946, *History of Western Philosophy*. Reeditado por Simon & Schuster, New York (1967)
https://ia802308.us.archive.org/7/items/westernphilosoph035502mbp/westernphilosoph035502mbp.pdf
Traducción española *Historia de la Filosofía Occidental*, Espasa Calpe, Madrid 1994.

_____1948, "Whitehead and *Principia Mathematica*," *Mind*, 57: 137–138.

_____1973, "On the Substitutional Theory of Classes and Relations", in *Essays in Analysis*, ed. D. Lackey. New York: Braziller,165-89.

_____1975, *Autobiography*, London: Unwin.

_____1956, "The philosophy of logical atomism". In *Logic and Knowledge*, London: Unwin Hyman,19, 177–281.

_____1959, *My Philosophical Development*, London: George Allen & Unwin, and New York: Simon & Schuster

_____1963, "The Study of Mathematics", in *Mysticism and Logic*, London: Unwin Books, 1963, 48-58.

_____1993, *Introduction to Mathematical Philosophy*. New York, Dover Publications.

_____1994, “Necessity and Possibility”, in Alasdair Urquhart, (ed.), *The Collected Papers of Bertrand Russell*. Volume 4: Foundations of Logic. London, Routledge, 1994, 507-520.

_____1997, *The Problems of Philosophy*, New York, Oxford University Press.

RUSSELL, BERTRAND & WHITEHEAD,ALFRED N.: 1910 (1912 y 1913), *Principia Mathematica*, Cambridge University Press. Edición online:
http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupid?key=olbp32608
Una información detallada sobre su sistema de notaciones en:
Linsky, Bernard, “The Notation in Principia Mathematica”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.):
http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/pm-notation
El primer volumen se publicó en 1910, el segundo y tercero en 1912 y 1913 respectivamente; el cuarto que estaba anunciado sobre geometría nunca se publicó. En 2009 se ha realizado una reedición de los 3 volúmenes por Merchant Books London. Hay otra edición de bolsillo editada por Rough Draft Printing en 2011 que se puede adquirir en Amazon.

RUSSELL, BRUCE: 2012, “A Priori Justification and Knowledge”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/apriori/**

RUSSO, FRANÇOIS: 1968, “Groupes et Géométrie. La genèse du programme d’Erlangen de Felix Klein”, Paris: Palais de la Dècouverte.

SACK, MARCK: 2000, *Objektivity and Insight*, Oxford: Oxford University Press.

SAKHAROV, ALEX & WEISSTEIN, ERIC: 2012,"Herbrand'sTheorem". From *MathWorld—A-Wolfram-Web-Resource*: **http://mathworld.wolfram.com/HerbrandsTheorem.html**).

SALMON, WESLEY: 1971a, “Statistical Explanation”, *Statistical Explanation and Statistical Relevance*, W. Salmon, (ed.), 29–87, Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.

_____ 1971b, Statistical Explanation and Satistical Relevance, Salmon, W., (ed.),Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.

_____ 1984, *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*, Princeton: Princeton University Press.

_____ 1989a, *Four Decades of Scientific Explanation*, Minneapolis:University of Minnesota Press.

_____ 1989b, *Scientific Explanation*, Salmon, W. and Kitcher, P., (eds.), Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol 13:, Minneapolis: University of Minnesota Press.

_____ 1994, “Causality Without Counterfactuals”, *Philosophy of Science*, 61: 297–312.

_____ 1997, “Causality and Explanation: A Reply to Two Critiques”, *Philosophy of Science*, 64: 461–477.

SÁNCHEZ RON, JOSÉ MANUEL: 1996, “Los *Grundlagen* de Hilbert”. Estudio introductorio en *Fundamentos de Geometría* de D.Hilbert, 23-51. Edit.CSIC, Madrid.

SANDBORG, DAVID: 1997, *Explanation and Mathematical Practice*, Ph.D. thesis, Univ. of Pittsburg.

_____1998, “Mathematical Explanation and the Theory of Why-Questions”, *British Journal por the Philosophy of Science*, 49: 603-624.

SAVAGE, L. J.: 1954, *The Foundations of Statistics*, New York: John Wiley. Second revised ed.: New York: Dover Publications, 1972.

SCANLON, M.: 1991, “Who were the American postulate theorists?”, *The Journal of Symbolic Logic* 56: 981-1002.

SCHAPER, EVA: 1966, “The Kantian Thing-in-Itself as a Philosophical Fiction”, *Philosophical Quarterly* 16.

SCHAPER, EVA & VOSSENKUHL, WILHELM (edits.): 1984, *Bedingungen der Möglichkeit. ‘Transcendental Arguments’ und transzendentales Denken*, Stuttgart: Klett-Cotta.

_____1989, *Reading Kant : new perspectives on transcendental arguments and critical philosophy*, Oxford & New York: Basil Blackwell Ltd.

SCHÖNFELD, M.: 2000, *The Philosophy of the Young Kant: The Precritical Project*, New York: Oxford University Press.

SCHÖNFINKEL, M.: 1924, “Über die Bausteine der mathematischen Logik”, *Mathematische Annalen* 92: 305-16. Translation in (van Heijenoort 1967), 355-66.

SCHRÖDER, E.: 1877, *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, Leipzig: Teubner.

_____1880, “Review of (Frege 1879)”, *Zeitschrift fur Mathematik und Physik* 25, *Historischliterarische Abteilung*, pp. 81-94. Translation in (Bynum 1972), 218-32.

_____1890, *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik), Vol. 1*. Leipzig: B. G.Teubner. Reprinted in (Schroder 1966).

_____1891. Vol. 2, part 1, of (Schroder 1890). Reprinted in (Schroder 1966).

_____1895. Vol. 3 of (Schroder 1890). Reprinted in (Schroder 1966).

_____1966, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Reprint in 3 volumes of (Schroder 1890, 1891, and 1895). New York: Chelsea. Accesible online: **https://archive.org/details/vorlesungenberd03mlgoog** y en: **http://www.deutschestextarchiv.de/book/show/schroeder_logik03_1895**

SCHNEIDER, IVO (edit.): 1988, *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933: Einführungen und Texte*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

SCHÜTTE, KURT: 1960, “Beweistheorie”, Springer, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 1960. Edición revisada en inglés *Proof Theory*, Berlin & New York: Springer 1977.

_____1968, *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*, Berlin: Springer 1968.

SCHULTHESS, PETER: 1981, *Relation und Funktion. Eine Systematische und entwicklungsgeschichtliche Untersuchung zur theoretischen Philosophie Kants*, Berlin: De Gruyter. Reedición en 2010.

SEEBASS, GOTTFRIED: 1981, *Das Problem von Sprache und Denken*, Frankfurt: Suhrkamp.

_____1983, “Sprache, Denken, Erfahrung. Prinzipielle Erwägungen zur Klärung des Problems und seiner lerntheoretischen Implikationen” , in: Josef Gerighausen / Peter C. Seel (edd.): Interkulturelle Kommunikation und Fremdverstehen, München 1983 (Goethe-Institut), 46−99.

_____1984, “Ist das ‘Problem del Aussenwelt’ transzendental?”, en “Die Transzendentalphilosophie und das Problem der Außenwelt”, en E. Schaper & W. Vossenkuhl (Eds.): Bedingungen der Möglichkeit. ‘Transcendental Arguments’ und transzendentales Denken, 243- 250, Stuttgart: Klett-Cotta.

_____1989, “Transzendentale Apperzeption”, in: Gerhard Funke & Thomas M. Seebohm (edd.): *Proceedings of the Sixth International Kant Congress*, Vol. II/1: Group Sessions A and B, Washington / D.C. 1989 (University Press of America), 323−339.

SEIDEL, ARTHUR: 1932, *Tetens Einfluß auf die kritische Philosophie*, Leipzig: Buchdruckerei Triltsch.

SEIDL, HORST: 1972, “Bemerkungen zu Ding an sich und Transzendentalen Gegenstand in Kant’s Kritik der reinen Vernunft”, *Kant Studien* 73 (1972): 305-314.

SHABEL, LISA: 2014, “Kant's Philosophy of Mathematics” in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/kant-mathematics/**

_____2012, “Zu Kants Frage ‘Wie ist reine Mathematik möglich?’”, en *Kant's Prolegomena: Ein kooperativer Kommentar*, Holger Lyre and Oliver Schliemann, eds., New York: Klosterman Press.

_____2010, “The Transcendental Aesthetic”, en *The Cambridge Companion to Kant's Critique of Pure Reason*, Paul Guyer, ed., Cambridge: Cambridge University Press.

_____2006, “Kant´s philosophy of mathematics”, *The Cambridge Companion to Kant*, Paul Guyer (edit.), 2nd edition, Cambridge: Cambridge University Press.

_____2004, “Kant´s argument ‘from geometry’”, *Journal of th History of Philosophy, 42:195-215.*

_____2003, *Mathematics in Kant´s Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice*, New York: Routledge.

_____1998, “Kant on the ‘symbolic construction’ of mathematical concepts” *Studies in History and Philosophy of Science* 29:4; reprinted in *The Philosopher's Annual 1998*, a volume containing the ten best articles published in philosophy in 1998.

SHAFER, GLENN & VOVK, VLADIMIR: 2013, “The Origens and Legacy of Kolmogorov’s *Grundbegriffe*”, Rutgers School of Business and University of London, Working Paper nº 4, **http://www.probabilityandfinance.com**

SHANKER, STUART : 1988, *Gödel's Theorem in Focus*, London: Routledge.

SHANNON, CLAUDE E.: 1948, “A mathematical theory of communication”, *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423 & 623–656, July, October 1948.

SHANNON, CLAUDE E. & WEAVER, WARREN: 1949 (1998), *The Mathematical Theory of*

Communication, Chicago: University of Illinois Press.

SHAPIRO, STEWART: 1985, “Second-order languages and mathematical practice”, *J. Symbol Logic* 50:714–742.

_____1990, “Second-order Logic, foundations, and rules”, *J. Phil* 87:234–261.

_____1991, *Foundations without Foundationalism. A case for second-order Logic.* 2nd edition 2002, Oxford: Oxford University Press.

_____1997, *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford & New York: Oxford University Press.

_____2000, *Thinking about Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

_____2006, *Vagueness in Context*, Oxford: Oxford University Press.

_____2009, “Classical Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2009/entries/logic-classical/**

SHAW, GISELA: 1969, “Das Problem des Dinges an sich in der englischen Kantinterpretation” , *Kant-Studien Ergänzungshefte* 97.

SHELAH, SAHARON: 1974, “Categoricity of uncountable theories”, *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc.Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. of California, Berkeley, Calif., 1971*), Providence, R.I.: American Mathematical Society,187–203, MR 0373874.

_____1990 [1978], “Classification theory and the number of nonisomorphic models*”, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* (2nd ed.), Amsterdam: Elsevier.

SHEPARD R. & COOPER, L. (editors): 1982, *Mental Images and their Transformations*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

SHIN, S.J.: 1994, *The Logical Status of Diagrams*, New York: Cambridge University Press.

SHRAMKO, YAROSLAV & WANSING, HEINRICH

_____2012, “Truth Values”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/truth-values/**

_____2005, “Some useful 16-valued logics: how a computer network should think”, *Journal of Philosophical Logic*, 34: 121–153.

SIEG, WILFRIED: 1988, “Hilbert's program sixty years later”, *Journal of Symbolic Logic*, 53: 338-348

_____1990, “Reflections on Hilbert's program”, W. Sieg (ed.), *Acting and Reflecting*, Dordrecht: Kluwer.

_____1991, “Herbrand analyses”, *Archive for Mathematical Logic*, 30: 409-441.

_____1994, “Eine neue Perspektive fur das Hilbertsche Program”, *Dialektik*, 163-80.

_____1999, “Hilbert's Programs: 1917-1922”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 5: 1-44. **http://repository.cmu.edu/philosophy**

SIERPINSKA, A.: 1994, *Understanding in Mathematics*, London: The Falmer Press.

SIMONS, PETER: 1982, “Plural reference and set theory”, en Barry Smith (ed) Parts and Moments: Studies in Logic and Formal Ontology. München: Philosophia Verlag, 1982, 199–256.

_____1997, “Higher-order quantification and ontological commitment”, *Dialectica* 51:255–271.

SIMPSON, STEPHEN G.: 2009, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, New York: Cambridge University Press.

SINACEUR, HOURYA BENIS: 2006, “From Kant to Hilbert: French philosophy of concepts in thebeginning of the twentieth century”, en J. Ferreiros & J.J. Gray editors, *The Architecture of Modern Mathematics*, New York: Oxford University Press.

SKLAR, LAWRENCE: 2009, “Philosophy of Statistical Mechanics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/statphys-statmech/**

SKLAR, L.: 1993, *Physics and chance*, Oxford: Cambridge University Press.

SKOLEM, THORALF: 1920, “Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen”, *Videnskapsselskapet Skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse* 6: 1–36. Traducción inglesa: “Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem”, en (van Heijenoort, 1967, 252-263).

______1923, “Einige Bemerkungen zu axiomatischen Begründung der Mengenlehre”, *Mathematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen*, Redogörelse: 217–232. Traducción inglesa: “Some remarks on axiomatized set theory”, en (van Heijenoort, 1967, 290-301).
______1928, “Über die mathematische Logik”, Norsk matematisk tidskrift, 10, 125-142. Traducción inglesa “On mathematical logic”, en (van Heijenoort 1967, 508-524).
______1929, “Über einige Grundlagenfragen der Mathematik”, *Skrifter utgitt av det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse* 7: 1–49
______1955, “Mathematical interpretation of formal systems”, *Studies in Logic*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

SLATER, BARRY HARTLEY: 1988, “Hilbertian reference”, *Noûs*, 22: 283-97.
______1994, “The epsilon calculus’problematic”, *Philosophical Papers*, 23: 217-42.
______1995, "Paraconsistent Logics?", *Journal of Philosophical Logic* 24 (4): 451–454.
______2013, “Epsilon Calculi”, *Internet Encyclopedia of Philosophy*, **http://www.iep.utm.edu/ep-calc/**

SLUGA, HANS: 2002, “Frege on the indefinability of truth2, in: E. Reck (ed.), *From Frege to Wittgenstein: Perspectives on Early Analytic Philosophy*, Oxford: Oxford University Press, 75–95.
______1980, *Gottlob Frege*, Boston: Routledge.

SMART, J. J. C.: 1963, *Philosophy of Scientific Realism*, London: Routledge & Kegan Paul.

SMIRNOV, V.: 1925 [published 1932], “Kolmogorov, A.N.: Über das Prinzip *tertium non datur*”, *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 51.0048.01 [Listing in ERAM database]: **http://www.emis.de/cgi-bin/JFM-item?51.0048.01**

SMITH, PETER: 2007, *An Introduction to Gödel´s Theorems*, Cambridge: Cambridge University Press.

SMITH, DAVID WOODRUFF: 2011, “Phenomenology”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/phenomenology/**

SMITH, B. (edit.): 1982, “Parts and moments”, Munich: Philosophia Verlag.

SMULLYAN, RAYMOND: 1991, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford: Oxford University Press.

SNEED, JOSEPH: 1971, *Logical Structure of Mathematical Physics*, Dordrecht: Reidel (revised edition, 1979).

SOAMES, S.: 2003, *Philosophical Analysis in the Twentieth Century*, 2 vols. Princeton,NJ: Princeton University Press.

SOBER, ELLIOTT: 1993, “Mathematics and Indispensability”, *The Philosophical Review*, 102: 35-57.

SOMMER, J.: 1900, “Hilbert's Foundations of Geometry”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 6: 287-99.

STEFFENS, K. G.: 2006, *The History of Approximation Theory: From Euler to Bernstein*, Boston: Birkhauser.

STEINER, MARK: 1978a, “Mathematical Explanation”, *Philosophical Studies*, 34: 135-151.
______1978b, “Mathematics, Explanation and Scientific Knowledge”, *Nous*, 12: 17-28.

STEGMÜLLER, WOLFGANG: 1952, *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie*. 1. Auflage Humboldt-Verlag, Wien, Stuttgart. Zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage 1960 bei Kröner, Stuttgart mit weiteren, teilw. wesentlich erweiterten Auflagen bis zur vierbändigen Ausgabe 1989.
______1957, *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik*. Springer, Wien 1957.
______1959, *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit. Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung*. - 1. Auflage 1959. 3. Auflage. – Springer-Verlag, Wien, New York, 1973.
______1965, *Glauben, Wissen und Erkennen*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
______1969, *Metaphysik, Skepsis, Wissenschaft*, 2ª edición corregida, Berlin: Springer Verlag.1ª edición: Humboldt Verlag, Frankfurt/Main, 1954.
______1970, *Aufsätze zu Kant und Wittgenstein*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
______1976, *The Structure and Dynamics of Theories*, New York: Springer-Verlag.
______1979, *The Structuralists View of Theories*, Berlin: Springer.

STEINHAUS, H.: 1922, "Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure", *Fund. Math.* 4 (1922), 286-310.

STELZNER, WERNER: 2002, "Compatibility and Relevance: Bolzano and Orlov", *Logic and Logical Philosophy*, Volume 10 (2002), 137–171.

STENIUS, ERIK.: 1960, *Wittgenstein's Tractatus. A Critical Exposition of Its Main Lines of Thought*, Oxford: Basil Blackwell.

STEVENSON, LESLIE: 1982, *The Metaphysics of Experience*, Oxford: Clarendon Press.

STOLJAR, DANIEL & DAMNJANOVICH, NIC: 2012, "The Deflationary Theory of Truth", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/truth-deflationary/**

STÖRRING, GUSTAV WILHELM: 1901, *Die Erkenntnistheorie von Tetens, Eine historisch-kritische Studie*, Leipzig: W. Engelmann.

STRAWSON, PETER F.: 1952, *Introduction to Logical Theory*, London: Methuen.

_____1957, "Propositions, concepts, and logical truths", *Philosophical Quarterly* 7 (1957): 15–25.

_____1959, *Individuals: An Essay in Descriptive Metaphysics*, London: Methuen.

_____1966, "The Bounds of Sense. An essay on Kant's *Critique of Pure Reason*", London: Methuen & Co.,12th Reedition 2007 London: Routledge.

_____1971, *Logico-Linguistic Papers*, London: Methuen.

_____1974, *Subject and Predicate in Logic and Grammar*, London: Methuen.

_____1982, *Wittgenstein on Rules and Private Language*, London: Blackwell.

_____1988, "Perception ands its Objects", in E. Dancy (ed.), *Perceptual Knowledge*, Oxford: Oxford University Press.

_____1992, *Analysis and Metaphysics*, New York: Oxford University Press.

STRØMNES, F. J. : 2006, *The fall of the word and the rise of the mental model: A reinterpretation of the recent research on the use of language and spatial cognition*, Frankfurt-am Main: Peter Lang Publishing.

STROUD, BARRY.: 1977, *Hume*, London: Routledge & Kegan Paul Ltb.

_____1984a, "Die Transzendentalphilosophie und das Problem der Außenwelt", en E. Schaper & W. Vossenkuhl (Eds.): *Bedingungen der Möglichkeit. 'Transcendental Arguments' und transzendentales Denken*, 1984, 204-233, Stuttgart: Klett-Cotta.Traductor Gottfried Seebass; fue publicado originalmente bajo el título "Kant and Scepticism" en *The Sceptical Tradition*, Myles Burnyeat (editor), Berkeley: University of California Press, 1983.

_____1984b, "The problem of the external word", en *The significance of Philosophical Scepticism*, pp. 1-38, New York: Oxford University Press.

_____2002, "Sense-Experience and the Grounding of Thought", in N. Smith (ed.), *Reading McDowell: on "Mind and World"*, London 2002,79-91. Reprinted in: *B. Stroud, Philosophers Past and Present: Selected Essays*, Oxford 2011.

STUHLMANN – LAEISZ, R.: 1976, *Kants Logik*, Berlin: De Gruyter.

SUPPE, FREDERICK: 1974, "The Structure of Scientific Theories, Chicago, University of Illinois Press; traducción española: *La estructura de las teorías científicas*, Madrid: Ed. Nacional, 1979.

_____1989, *The Semantic Conception of Theories and Scientific Realism*, Urbana: University of Illinois Press.

_____2000, "Understanding scientific theories:An assessment of developments, 1969-1998", *Philosophy of Science, 67 (Proceedings)*, 102-115.

SUPPES, PATRICK: 1972, *Axiomatic Set Theory*, New York: Dover Publications.

_____1974, "La estructura de las teorías y el análisis de datos", en Suppes [1988].

_____1988, *Estudios de Filosofía y Metodología de la Ciencia*, Madrid: Alianza Editorial

SUTHERLAND, DANIEL: 2004a, "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, 34: 411-442.

_____2004b, "Kant's Philosophy of Mathematics and the Greek Mathematical Tradition", *The Philosophical Review*, vol. 113, No. 2, 157- 201.

_____2005a, "The point of Kant's Axioms of Intuition", *Pacific Philosophical Quarterly* 86, 135-159.

_____2005b, “Kant on Fundamental Geometrical Relations”, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 87: 117-158.

_____2006, “Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions”, *Journal of the History of Philosophy*, 44 (4) : 533-558.

_____2008, “Arithmetic from Kant to Frege: Numbers, Pure Units, and the Limits of Conceptual Representation”, *Royal Institute of Philosophy Supplement*, 83 (63):135-164.

_____2010, “Philosophy, geometry, and logic in Leibniz, Wolff, and the early Kant”, en Michael Friedman, Mary Domski & Michael Dickson (eds.), *Discourse on a New Method: Reinvigorating the Marriage of History and Philosophy of Science*, Chicago: Open Court.

SVEJDAR, VÍTEZSLAV: 2007, “An Interpretation of Robinson Arithmetic in its Grzegorczyk's Weaker Variant”, *Fundamenta Informaticae*, *81* (1-3), 347-354.

_____2009, “On interpretability in the theory of concatenation”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *50* (1), 87-95.

SZUDZIK, MATTEW: 2013, “Recursive Function.”, From *MathWorld--A Wolfram Web Resource*, created by Eric W. Weisstein. **http://mathworld.wolfram.com/RecursiveFunction.html**

TAIT, WILLIAM W.: 1960, “The substitution method”, *Journal of Symbolic Logic* , 30: 175-192.

_____1965, “Functionals defined by transfinite recursion”, *Journal of Symbolic Logic* 30: 155-174.

_____1981, “Finitism”, *The Journal of Philosophy* 78: 524-546. Reprinted in (Tait, 2005b,21–42).

_____1986, “Truth and proof: The platonism of mathematics”, *Synthese*, vol. 69 (1986), 341-370.

_____1992, “Reflections on the concept of *a priori* truth and its corruption in Kant, en M. Detlefsen (editor), *Proof and Knowledge in Mathematics*, New York: Routledge.

_____1996, “Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number”, *Frege, Russell,Wittgenstein: Essays in Early Analytic Philosophy (in honor of Leonard Linsky* (ed. W.W. Tait). Lasalle: Open Court Press (1996): 213-248. Reprinted in *Frege:Importance and Legacy* (ed. M. Schirn). Berlin: Walter de Gruyter (1996): 70-113.

_____2000, “Cantor’s *Grundlagen* and the Paradoxes of Set Theory”, *Between Logic and Intuition:Essays in Honor of Charles Parsons* (ed. G. Sher and R. Tieszen). Cambridge: CUP (2000): 269-290.

_____2001, “Gödel unpublished papers on foundations of mathematics”, *Philosophia Mathematica* 9: 87-126.

_____2001b, “Beyond the axioms: The question of objectivity in mathematic”, *Philosophia Mathematica* 9: 21-36.

_____2002a, “The myth of the mind”, *Topoi* 21, Nos. 1-2 (2002):65-74.

_____2002b, “Remarks on finitism”, in *Reflections on the Foundations of Mathematics. Essays in Honor of Solomon Feferman*, Wilfried Sieg, Richard Sommer, and Carolyn Talcott, eds., Lecture Notes in Logic 15, Association for Symbolic Logic & A. K. Peters. Reprinted in (Tait, 2005b, 43–53).

_____2002c, “Noeesis: Plato on Exact Science”, *Reading Natural Philosophy: Essays in the History and Philosophy of Science and Mathematics to Honor Howard Stein on His 70th Birthday* (ed. David Malament). Chicago and La Salle: Open Court (2002).

_____2005a, “Gödel’s reformulation of Gentzen’s first consistency proof for arithmetic: the no-counterexample interpretation”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 11:225–238.

_____2005b, *The Provenance of Pure Reason. Essays in the Philosophy of Mathematics and Its History*, New York: Oxford University Press.

_____2006, “Gödel’s interpretation of intuitionism”, *Philosophia Mathematica* 14, No. 2: 208-228.

_____2008, “The Five Questions”, *Philosophy of Mathematics: Five Questions* (ed. V.F. Hendricks and H. Leitgeb). Automatic Press/VIP (2008): 249-263.

_____2010, “Gödel on Intuition and on Hilbert's finitism”, en Solomon Feferman, Charles Parsons & Stephen G. Simpson (eds.), *Kurt Gödel: Essays for His Centennial*. Association for Symbolic Logic.

TALBOTT, WILLIAM.: 2008, “Bayesian Epistemology”, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2001/entries/epistemologybayesian/**

TANAKA, K. & BERTO, F. & MARES, E. & PAOLI, F. (edits.): 2013, “Paraconsistency: Logic and Applications”, New York: Springer.

TAPPENDEN, JAMIE: 2008a, *Philosophy and the Origins of Contemporary Mathematics: Frege in his*

Mathematical Context, Oxford: Oxford University Press.

_____2008b, “Mathematical Concepts and Definitions”, en Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice*, 256-275, Oxford & New York: Oxford University Press.

_____2008c, “Mathematical Concepts: Fruitfulness and Naturalness”, en Paolo Mancosu (editor), *The Philosophy of Mathematical Practice*, 276-301, Oxford & New York: Oxford University Press.

_____2006, “The Riemannian Background to Frege’s Philosophy”, J. Ferreiros & J.J. Gray, *The Architecture of Modern Mathematics*, 97-132, Oxford: Oxford University Press.

_____2005, “Proof style and understanding in mathematics: visualization, unification and axiom choice”, Mancosu, Jorgensen & Pedersen editors, *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, 147-214, Berlin: Springer Verlag.

_____1995, “Extending knowledge and ‘fruitful concepts’: Fregean themes in the philosophy of mathematics”, *Nous* 29: 427-467.

TARSKI, ALFRED: 1935, ”Der Wahrheitsbegriff in der formalisierten Sprachen”, *Studia Philosophica 1, 1935, 261-405.* Reimpresión en K. Berkal & R. Kreisel (edit.), *Logik-Texte.Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*, 3ª edición ampliada (443-456), Akademie, Verlag (Berlin 1983). Reedición en A. Tarski, *Collected Papers*, Basel: Birkhäuser 1986 (54-198). Originalmente publicado en polaco en 1933.

_____1936, “Uber den Begriff der logischen Folgerung”, *Actes du congrès international de philosophie scientifique*, (1936), references to the English translation in *Logic, Semantics, Metamathematics*, London: Clarendon Press, 1956.

_____1938, “Der Aussagenkalkül und die Topologie”, *Fundamentae Mathematicae*, 31: 103–134. English translation in Tarski 1956, 421–454.

_____1941, *Introduction to logic and the methodology of deductive sciences*, Harvard University Press.

_____1944, “The semantic conception of truth and the foundations of semantics”, *Philosophy and Phenomenological Research*, 4, 341-376. Traducción española en J.A. Nicolás & M.J. Frápoli (edit): *Teorías de la verdad en el siglo XX*, 65-108, Madrid, Tecnos, 1997.

_____1953, “A general method in proofs of undecidability”, in *Undecidable Theories*, A. Tarski, A. Mostowski, and R. Robinson, eds., Amsterdam: North- Holland, 3–35.

_____1956, *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, trl. J. Woodger, London: Clarendon Press.

_____1969, “What is Elementary Geometry?”, en *The Philosophy of Mathematics*, editor: Jaakko Hintikka. Oxford: Oxford University Press.

_____1986, “What are logical notions?”, *History and Philosophy of Logic* 7: 143-154.

TARSKI, ALFRED & JÓNSSON, BJARNI: 1951, “Boolean Algebra with Operators I and II”, *American Journal of Mathematics 73*: 891-939 and *74*: 129–62.

TARSKI, ALFRED & McKINSEY, J.C.C.: 1948, “Some Theorems About the Sentential Calculi of Lewis and Heyting”, *Journal of Symbolic Logic* 13: 1-15.

TARSKI, A. & MOSTOWSKI, A. & ROBINSON, R.M.: 1953, *Undecidable Theories*, Amsterdam: North-Holland.

TAYLOR, B.: 1991, “ ‘Just More Theory’: A Manoeuvre in Putnam's Model-Theoretic Argument for Antirealism”, *Australasian Journal of Philosophy*, 69: 152–166.

TELLER, P.: 2001, “Whither Constructive Empiricism?” *Philosophical Studies* 106: 123–150.

TETENS, JOHANN NIKOLAUS: 1777 (1979), *Philosophische Versuche über die menschliche Natur und ihre Entwicklung*, Leipzig 1777. Reeditado, Hildesheim: G. Olms 1979.

THOM, RENÉ: 1971, “ ‘Modern Mathematics: An Educational and Philosophic Error?”, *American Scientist vol. 59, nº 6, 695-699.* Reproducido en *New Directions in the Philosophy of Mathematics. An Anthology*, Thomas Tymoczko edit., Boston: Birkhäuser 1985, 67-78.

THOMAS, NIGEL J. T.: 1999, “Are Theories of Imagery Theories of Imagination? An Active Perception Approach to Conscious Mental Content”, *Cognitive Science*, 23, (1999), 207-245.

_____2010, “Mental Imagery”, E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford encyclopedia of philosophy*, **http://plato.stanford.edu/entries/mental-imagery/**

THOMASON, RICHMOND H.: 2012, “Logic and Artificial Intelligence”, *The Stanford Encyclopedia of*

Philosophy (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/logic-ai/**
_____1974, *Formal Philosophy, Selected Papers of Richard Montague*, Thomason, R. H. (Ed.), New Haven and London: Yale University Press.

THOMSON, MANLEY.: 1972, "Singular Terms and Intuitions in Kant's Epistemology", *Review of Metaphysics 26,314-343*. Reprinted in Posy 1992.
_____1981, "On A Priori Truth", *Journal of Philosophy* 78 (8) (1981): 458-482.
_____1992, "Singular Terms and Intuitions in Kant's Epistemology", en C. Possy (editor) *Kant's Philosopy of Mathematics: Modern Essays*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

TICHÝ, PAVEL: 1971, "An Approach to Intensional Analysis", *Noûs*, 5: 273–297.
_____1988, *The foundations of Frege's logic*, Berlin and New York: De Gruyter.

TIESZEN, RICHARD L.: 1984, "Mathematical Intuition and Husserl's Phenomenology," *Noûs* 18, 3 (1984), 395-421.
_____1989, *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*, Boston: Kluwer.
_____1992, "Kurt Gödel and Phenomenology", *Philosophy of Science*, Vol. 59, No. 2, 176-194.
_____1997, "Mathematics, The Phenomenological Philosophy of," in *The Encyclopedia of Phenomenology*, L. Embree *et al* (eds.), Dordrecht: Kluwer, 1997, 439-443.
_____1998, "Kurt Gödel's path from the incompleteness theorems (1931) to phenomenology (1961)", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 4 (1998), no. 2, 181-203.
_____2002, "Gödel and the intuition of concepts", *Synthese*, vol. 133 (2002), no. 3, 363- 391.
_____2005, *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge Mass.: Cambridge University Press.

TOEPELL, M.: 1986, *Über die Entstehung von David Hilberts 'Grundlagen der Geometrie'*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

TORRETTI, ROBERTO: 1978, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht: Reidel.
_____1980, *Kant*, Editorial Charcas, Buenos Aires 1980.
_____2010, "Nineteenth Century Geometry", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/geometry-19th/**

TRAKZYC, T.: 1963, "Axioms and some properties of Post Algebras", *Coll. Math.*, 10 (1963), 193-209.

TRIBUS, M.: 1961, *Thermostatics and Thermodynamics*, Amsterdam: Van Nostrand.

TRIBUS, M. & McIRVINE, E.C.: 1971, "Energy and information", *Scientific American*, 224.

TRILLAS, ENRIQUE: 1980, *Conjuntos borrosos*, Barcelona: editorial Vincens-Vives.

TROELSTRA, ANNE SJERP: 1977, "Aspects of Constructive Mathematics", in *Handbook of Mathematical Logic*, J. Barwise (ed.), Amsterdam: North-Holland.
_____1983, "Logic in the writings of Brouwer and Heyting", *Atti del Convegne Internazionale di Storia della Logica*, San Gimignano, 4–8 dicembre 1982, V. Abrusci, E. Casari, and M. Mugnai, eds., Bologna: Clueb, 193–210.
_____1990, "On the early history of intuitionistic logic", *Mathematical Logic*, P. Petkov, ed., New York: Plenum Press, 3–17.
_____2011, "History of constructivism in th 20th century", en *Set Theory, Arthmetic and Foundations of Mathematics: Theorems, Philosophies*, (Juliette Kennedy & Roman Kosak edit.), 150-180. Cambridge: Cambridge University Press: **http://staff.science.uva.nl/~anne/**

TROELSTRA A. S. & VAN DALEN, D.: 1988, *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, (two volumes), Amsterdam: North Holland.

TROELSTRA, A. S. & SCHWICHTENBERG, H.: 2000, *Basic Proof Theory*, second edition, Cambridge: Cambridge University Press.

TURING, ALAN MATHISON: 1937a, "On Computable Numbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*",[Delivered to the Society November 1936] *Proceedings of the London Mathematical Society*, 242: 230–65.
_____1937b, "Computability and λ-definability", *Journal of Symbolic Logic*, 2(4): 153–163.
_____1938, "On ComputableNumbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*: A correction",

Proceedings of the London Mathematical Society 43: 544–546.
_____1992, 2001, *Collected Works of A.M. Turing*, en cuatro volúmenes: *Pure Mathematics*, *Mathematical Logic*, *Mechanical intelligence*, *Morphogenesis*. Arjen Sevenster y R.O. Gandy (edits.), Amsterdam: Elsevier, 1992, 2001.
_____2004, *The Essential Turing*, Jack Copeland (edit.), Oxford University Press, New York.

TYE, M.: 1991, *The imagery debate*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

TYMOCZKO, THOMAS: 1985, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Basel: Birkhäuser.

ÜBELE, W.: 1911, *Johann Nicolaus Tetens nach seiner Gesamtentwicklung betrachtet, mit besonderer Berücksichtigung des Verhältnisses zu Kant*, Berlin: Reuther & Reichard.

UEBERWEG, FRIEDRICH: 1882, *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren*, 5th ed., A. Marcus, Bonn. English translation ofthe 3rd edition, London: Longmans, Green &Ca, 1871. Versión original en alemán:**https://archive.org/details/systemderlogiku03uebegoog**. Traducción inglesa:
http://books.google.es/books?id=VlMYAAAAIAAJ&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Friedrich+Ueberweg%22&hl=es&sa=X&ei=QLI2U7-lM8Wd0QWrqIC4Bw&ved=0CDsQ6AEwAQ#v=onepage&q&f=false

UFFINK, JOS: 2006, *Compendium of the foundations of classical statistical physics*, Utrecht: Institute for History and Foundations of Science, Universiteit Utrecht.
http://philsci-archive.pitt.edu/2691/1/UffinkFinal.pdf

URQUHART, ALASDAIR: 1972, “Semantics for Relevant Logics”, *The Journal of Symbolic Logic*, 37: 159–169.

VÄÄNÄNEN, JOUKO.: 2001, “Second-order logic and foundation of mathematics”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7: 504-520.

VAIHINGER, HANS: 1881-92, *Commentar zu Kants Kritik der Reinen Vernunft*, 2 vols., Stuttgart, Berlin, Leipzig: Union Deutsche Verlagsgesellschaft 1881, 1892. 2. Auflage, Stuttgart, 1922. Herausgegeben von Raymund Schmidt. Neudruck der 2. Auflage Stuttgart 1922, Scientia Verlag Aalen 1970. **https://archive.org/details/kommentarzukants12vaihuoft**
Edición inglesa, New York: Garland 1976.
_____1884, “Zu Kants Widerlegung des Idealismus”, *Straßburger Abhandlungen zur Philosophie. Eduard Zeller zu seinem 70. Geburtstag*, Freiburg I.B. & Tübingen: Akademische Verlagsbuchhandlung von J. C. B. Mohr, 1884, 85-164. Accesible online: **http://www.philosophiebuch.de/faksimiles/index.html?d_BestNr_00589_Vaihinger___Zu_Kants_Widerlegung_des_Idealismus_18841938.htm**
_____1911, *Die Philosophie des Als Ob. System der theoretischen, praktischen und religiösen Fiktionen der Menschheit auf Grund eines idealistischen Positivismus. Mit einem Anhang über Kant und Nietzsche*, Berlin: Verlag von Reuther & Reichard, 1911. Accesible online:
https://archive.org/details/DiePhilosophieDesAlsOb
Traducción inglesa: *The Philosophy of “As If”. A System of the Theoretical, Practical and Religious Fictions of Mankind*. Übersetzung der sechsten deutschen Auflage von C. K. Ogden, New York: Barnes & Noble, 1968.Primera traducción inglesa, London: Routledge & Kegan Paul, 1928, 4ª edición 1949.
Un estudio detallado de su obra y bibliografía exhaustiva en:
http://homepages.uni-tuebingen.de/gerd.simon/chrvai.pdf

VAN ATTEN, MARK: 2002, “Why Husserl should have been a strong revisionist in mathematics”, *Husserl Studies* 18 (1), 1-18.
_____2004, *On Brouwer*, (Wadsworth Philosophers Series), Belmont: Wadsworth/Thomson Learning.
_____2005, “The correspondence between Oskar Becker and Arend Heyting,” in V. Peckhaus (ed) *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, München: Fink Verlag, 25-48.
_____2007, *Brouwer meets Husserl (On the phenomenology of choice sequences)*, Dordrecht: Springer.
_____2008, *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007). The Cerisy Conference*, van Atten, M., Boldini, P., Bourdeau, M., and Heinzmann, G. (eds.), 2008, , Basel: Birkhäuser.
_____2011a, “Luitzen Edgebertus Jan Brouwer”,
http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/brouwer/

_____2011b, “Supplement to Luitzen Egbertus Jan Brouwer: *Weak Counterexamples*”, **http://plato.stanford.edu/entries/brouwer/weakcounterex.html**

_____2011c, “Supplement to Luitzen Egbertus Jan Brouwer: *Strong Counterexamples*” **http://plato.stanford.edu/entries/brouwer/strongcounterex.html**

_____2012, “The Development of Intuitionistic Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/intuitionistic-logic-development/**

VAN ATTEN, MARK & KENNEDY, JULIETTE: 2003, “On the Philosophical development of Kurt Gödel”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 9, nº 4, Dec. 2003, 425-476. Reprinted in *Kurt Gödel: Essays for his Centennial*, Solomon Feferman, Charles Parsons and Stephen G. Simpson (eds.), Cambridge: Cambridge University Press.

_____2009a, “Gödel's Modernism: On Set-theoretic Incompleteness, Revisited”, in *Logicism, Intuitionism and Formalism: What has become of them?*, S. Linström, E. Palmgren, K. Segerberg, and V. Stoltenberg-Hansen (eds.), Berlin: Springer: 303–356.

_____2009b, “Gödel's Logic”, in D. Gabbay and J. Woods (eds.), *The Handbook of the History of Logic: Logic from Russell to Gödel*, Volume 5, Amsterdam: Elsevier: 449–509.

VAN BENTHEM, JOHAN: 2008, “Interview”, *Philosophy of Mathematics: 5 Questions*, V.F.Hendricks & H.Leitgeb, 29-43, New York: Automatic Press/VIP.

_____2010, *Modal Logic for Open Minds*, Center for the Study of Language and Information, Stanford University.

VAN CLEVE, J.:1992, “Semantic Supervenience and Referential Indeterminacy”, *The Journal of Philosophy*, 89: 344–361.

_____1999, *Problems From Kant*, Oxford: Oxford University Press.

VAN CLEVE, J. & FREDERICK, R. (editors): 1991, *The Philosophy of Right and Left: Incongruent Counterparts and the Nature of Space*, Dordrecht & Boston: Kluwer Academic Publishers.

VAN DALEN, D.: 1981, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1997, *Logic and Structure*, Amsterdam: Springer.

_____1999, *Mystic, Geometer and Intuitionist: The Life of L.E.J. Brouwer*, vol. I, Oxford:Clarendon Press.

_____2005, *Mystic,Geometer,and Intuitionist:The Life of L.E.J. Brouwer*,vol. II, Oxford:Clarendon Press.

VAN FRAASSEN, BAS: 1966, “Singular terms, truth-value gaps, and free logic”, *Journal of Philosophy*, 63: 481–495.

_____1970, “On the extension of Beth’s semantics of physical theories”, *Philosophy of Science*,1970: 325-339.

_____1980, *The Scientific Image*, New York: Oxford University Press.

_____1989, *Laws and Symmetry*, New York: Oxford University Press.

_____1994, “Gideon Rosen on Constructive Empiricism”, *Philosophical Studies, 74(2): 179–192.*

_____1995, “Fine-grained Opinion, Conditional Probability, and the Logic of Belief”, *Journal of Philosophical Logic*, 24: 349–377.

_____1998, “The Agnostic Subtly Probabilified”, *Analysis*, 58(3): 212–220.

_____2001, “Constructive Empiricism Now” *Philosophical Studies*, 106: 151–170.

_____2002, *The Empirical Stance*, New Haven: Yale University Press.

_____2007, “From a View of Science to a New Empiricism”, in Monton 2007, 337–383.

VAN HEIJENOORT, J.: 1967, *From Frege to Gödel: A sourcebook in mathematical logic 1879-1931*, Cambridge: Harvard University Press. 3ª edición 1977.

VAN KERKHOVE, B. & VAN BENGEDEM, J. P. (editors): 2007, *Perspectives on Mathematical Practices*, Dordrecht: Springer-Verlag.

VAN LAMBALGEN, MICHIEL: 1987, “Von Mises’ defnition of random sequences reconsidered”, *J. Symb. Logic* 52 (1987), 725 - 755.

_____1990, “The axiomatisation of randomness”, *J. Symb. Logic* 55 (1990), 1143 - 1167.

_____1992, “Independence, randomness and the axiom of choice”, *J. Symb. Logic* 57 (1992), 1274-1304.

_____1996, “Randomness and Foundations of Probability: Von Mises’ Axiomatisation of Random Sequences”, T. Ferguson et al (eds.): *Probability, statistics and game theory, papers in honor of*

David Blackwell, Institute for Mathematical Statistics.

VAN OOSTEN, J.: 2008, "Realizability: An introduction to its categorical side", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*: Volume 152, Amsterdam: Elsevier.

VAN STIGT, W. P.: 1990, *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam: North-Holland.

VEBLEN, OSWALD: 1904, "A System of Axioms for Geometry", *Transactions of the American Mathematical Society* 5 (3): 343–384.

_____1914, "The foundations of geometry", en J. Young (editor), *Monographs on Topics of Modern Mathematics, relevant to the elementary field*, Longsmand: Green and Company.

VELDMAN, W.: 1976, "An intuitionistic completeness theorem for intuitionistic predicate logic", *Journal of Symbolic Logic*, 41(1): 159-166.

_____2000, "The Borel hierarchy and the projective hierarchy in intuitionistic mathematics", Report Number 0103, Deptartment of Mathematics, University of Nijmegen; forthcoming in the Journal of Symbolic Logic.

_____2004, "An intuitionistic proof of Kruskal's theorem", *Archive for Mathematical Logic*, 43(2): 215-264.

VELLEMAN, D.: 1998, "Review of Levin 1997", *Mathematical Reviews*, 98c: 1364.

VENN, J.: 1876, *The Logic of Chance: an essay on the foundations and province of the theory of probability*, Macmillan, London 1876, 2nd edition, London: Macmillan; reprinted, New York: Chelsea Publishing Co., 1962.

VERBRUGGE, RINEKE: 2010, "Provability Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2010/entries/logic-provability/**

VILLE, J.: 1939, "Étude critique de la notion de collectif", Paris: Gauthiers-Villars.

VISSER, A.: 2009, "Growing commas: a study of sequentiality and concatenation", *Notre Dame J. Formal Logic*, *50* (1), 61-85.

VOLLMER, GERHARD: 1974 (1981), *Evolutionäre Erkenntnistheorie: Angeborene Erkenntnisstrukturen im Kontext von Biologie, Pschologie, Linguistik, Philosophie und Wissenschaftstheorie*, 3. verbesserte Auflage, Stuttgart: S. Hirzel Verlag (1981).

_____1985, *Was können wir wissen?. Band 1: Die Natur der Erkenntnis*, Stuttgart: S. Hirzel Verlag.

_____1992, *Gelöste, ungelöste und unlösbare Probleme. Zu den Bedingungen wissenschaftlichen Fortschritts*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

_____2003, *Wieso können wir die Welt erkennen?* , Stuttgart: S. Hirzel Verlag.

VON HEUSINGER, K. & EGLI, K.: 2000, *Reference and Anaphoric Relations*, Dordrecht: Kluwer.

VON MISES, RICHARD:1919, "Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", *Math. Z.* 5 (1919), 52-99.

_____1931, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen in der Statistik und theoretische Physik*, Leipzig und Viena: Deuticke.

_____1933, "Über Zahlenfolgen die ein Kollektiv-Ähnliches Verhalten zeigen, *Math. Ann.* 108, 757-772.

_____1936, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, 2nd ed., Berlin: J. Springer. Traducción inglesa: *Probability, Statistics and Truth*, revised English edition, New York: Macmillan, 1956. *Probability, Statistics and Truth* (English translation of 3rd ed. of Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit; London: Dover (1981).

_____1941, "On the foundations of probability and statistics, *Ann. Math. Stat.*12, 191-205; 215-216.

VON MISES, R. & GEIRINGER, H.: 1964, *Mathematical theory of probability and statistics*. Edited and complemented by Hilda Geiringer. New York: Academic Press.

VON NEUMANN, JOHANN (JOHN): 1925, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 154 (1925), 219-240, reprint in *Collected Works*, vol. 1, Oxford: Pergamon, 1961. English trans. in (Van Heijenoort, 1967, 394-413).

_____1927, "Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift*, 26: 1-46. *Collected Works*, vol. 1, Oxford: Pergamon, 1961, 256-300.

_____1931, "Die formalistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis*, 2:116–34. English translation in: (Benacerraf & Putnam, 1983, 61–65).

_____1932, "Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik", *Annals of Mathematics*,33(2):587-642.

_____1961, *Collected Works*, Oxford: Pergamon.

VON PLATO, JAN: 1994, *Creating Modern Probability: Its Mathematics, Physics, and Philosophy in Historical Perspective*, Cambridge: Cambridge University Press.

_____1995, “The axioms of constructive geometry”, *Annals Pure and Applied Logic*, 76:169-200.

_____1998, “A constructive theory of ordered affine geometry”, *Indagation Mathematicae,* 9:549-562.

WAJSBERG, M.: 1935, “Beiträge zum Metaaussagenkalkül”, *Monatshefte für Math. und Physik*, 42 (1935), 221-242.

WALD, ABRAHAM: 1936, “Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Ergebnisse eines math. Koll.* 8 (1936), 38-72.

_____1937, “Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes, en (Fréchet, 1937, 79-99).

WALLGREN, THOMAS: 2006, *Transformative Philosophy*, Lanham MD: Lexington Books.

WALKER, RALPH.: 1989, *The Coherence Theory of Truth: Realism, Anti-Realism, Idealism*, London: Routledge.

_____1997, “Theories of Truth”, in Bob Hale and Crispin Wright (eds.), *A Companion to Philosophy of Language*, Oxford: Basil Blackwell.

WALSH, W. H.: 1960, “Philosophy and Psychology in Kant’s Critique”, *Kant Studien* 57, pp. 189–195.

_____1975, *Kant’s Criticism of Metaphysics*, Edimburgh: Edimburgh University Press.

_____1976, *Kant*, London: Routledge.

WANG, HAO: 1957, “The Axiomatization of Arithmetic”, *Journal of Symbolic Logic*, 22: 145–158.

_____1963, *A Survey of Mathematical Logic*, Peking: Science Press.

_____1973, *From Mathematics to Philosophy*, London: Routledge & Kegan Paul.

_____1978, “Kurt Gidel's Intellectual Development”, *The Mathematical Int*elligencer 1: 182-184.

_____1981, “Some Facts about Kurt Godel”, *The Journal of Symbolic Logic* 46: 653- 659.

_____1987, *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, MA: MIT Press.

_____1993, *Popular Lectures on Mathematical Logic*, New York: Dover Publications Inc., 2nd edition.

_____1996, *A Logical Lourney: From Gödel to Philosophy (Representation and Mind)*, Cambridge, MA: MIT Press.

WANSIG, H.: 2001, “Negation,” en L. Goble (ed.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Oxford: Blackwell, 415–436.

WALLGREN, THOMAS: 2006, *Transformative Philosophy*, Lanham MD: Lexington Books.

WARD, JAMES: 1911, “Psychology”, *Encyclopedia Britannica*, 11th edn., 29 vols. New York: Encyclopedia Britannica Co., 1911, vol. XXII, 547–604.

WAXMAN, WAYNE: 1991, *Kant’s Model of the Mind*, New York: Oxford University Press.

WEBER, ERIK & VERHOEVEN, LIZA: 2002, “Explanatory Proofs in Mathematics”, *Logique et Analyse*, 179: 299-307.

WEIL, ANDRÉ: 1940, “Calcul de probabilités, méthode axiomatique, intégration”, *Revue scientifique*, 78:201-208.

WEIR, ALAN: 2011, “Formalism in the Philosophy of Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/formalism-mathematics/**

WEISSTEIN, ERIC W.: 2013, “Recursion”, *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. **http://mathworld.wolfram.com/Recursion.html**

WESTPAL, KENNETH R.: 2004, *Kant´s Transcendental Proof of Realism*, Cambridge: Cambridge University Press.

WEYL, HERMANN: 1918, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig: Veit, 1918.

_____1919, “Der *circulus vitiosus* in der heutigen Begründung der Analysis”, *Jahresberricht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Band 28, 85-92. Traducción inglesa: *The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis*, Dover Publications, New York, 1994.

_____1921, “Über die neue Grunlagenkrise der Mathematik”, *Mathematische Zeitschrift* 10: 37-79, translated as “On the new foundational crisis of mathematics” in (Mancosu1998b, 86-118).

______1925, “Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik”, *Symposion*, 1: 1-23. Reprinted in: Weyl (1968, 511-542). English translation in (Mancosu, 1998b, 123-142).

______1928, “Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg,* 6: 86-88. English translation in (van Heijenoort, 1967, 480-484).

______1944 (a), “David Hilbert: 1862-1943”, *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society* 4(13): 547-553.

______1944 (b), “David Hilbert and his mathematical work” en *Bulletin of the American Mathematical Society* 50, 612-654.

______1949, “The structure of mathematics”, Appendix A of H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton: Princeton University Press.

______1968, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 1, K. Chandrasekharan, editor. Berlin: Springer Verlag

______2008, *Einführung in die Funktionentheorie*, Basel: Birkhäuser. Primera publicacion de los cursos impartidos por Weyl en 1910-1911 en la Universidad de Göttingen.

______2009, *Mind and Nature. Selected Writings on Philosophy, Mathematics and Physics,* Princeton NJ: Princeton University Press.

______2012, *Levels of Infinity. Selected Writings on Mathematics and Philosophy*, Peter Pesic (edit.), New York: Dover Publications.

WHATELY, RICHARD: 1827, *Elements of logic*, London: J. Mawman. Reedición: Central European Univ Pr; Edición: Revised (1 de septiembre de 2008). **https://archive.org/details/elementslogicco12whatgoog**

WIENER, NORBERT: 1976, *Collected Works*, Cambridge, MA: MIT Press, , 1976-1985. 4 volúmenes. Editado por Pesi Masani. Volume 1 incluye los trabajos tempranos de Wiener sobre el movimiento Browniano (Wiener 1920, 1921, 1923, 1924), con comentarios de Kiyosi Ito.

WILDER, R. L.: 1944, “The Nature of Mathematical Proof”, *The American Mathematical Monthly* 51, 309-323.

WILF, HERBERT S.: 2008, “Mathematics: An Experimental Science”, *The Princeton Companion to Mathematics,* p.991, Edit. Timothy Gowers, Princeton: Princeton University Press.

WILKERSON, T.: 1976, *Kant’s Critique of Pure Reason,* Oxford: Clarendon Press.

WILLIAMS, MEREDITH: 1990, “Wittgenstein, Kant, and the ‘Metaphysics of Experience’”, *Kant Studien* 81: 69–88.

WILLIAMSON, JOHN: 1999, “Countable additivity and subjective probability”, *British Journal for the Philosophy of Science*, 50(3):401–416.

______2002, “Probability logic”, Gabbay, D., Johnson, R., Ohlbach, H. J., andWoods, J.(edits), *Handbook of the logic of argument and inference: the turn toward the practical*, 397–424, Amsterdam: Elsevier.

______2005a, *Bayesian nets and causality: philosophical and computational foundations,* Oxford: Oxford University Press.

______2005b, “Motivating objective Bayesianism: from empirical constraints to objective probabilities”, Harper, W. L. and Wheeler, G. R. (edits), *Probability and Inference: Essays in Honour of Henry E. Kyburg Jr.*, Amsterdam: Elsevier.

______2005c, *Philosophies of Probability: Objective Bayesianism and its Challenges*, A. Irvine (ed.): Serie *Handbook of the Philosophy of Mathematics,* Volume 9 of the *Handbook of the Philosophy of Science,* Amsterdam: Elsevier.

WILSON, MARK: 2006, *Wandering Significance: An Essay on Conceptual Bahavior,* Oxford: Oxford University Press.

WITTGENSTEIN, LUDWIG: 1922, *Tractatus Logico-Philosophicus,* Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., London.

______1939, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

______1953, *Philosophical Investigations*, The German Text with a revised English Translation, translated by G.E.H. Anscombe, Malden, Massachusetts: Blackwell Publishing, 2004.

______1956, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, translated by G.H. von Wright, Oxford: Blackwell 3rd edition, 1978.

_____1969, *On Certainty*, trans. by G.E.M. Anscombe and G.H. von Wright, New York: Harper & Row.
_____1974, *Philosophical Grammar*, translated by A. Kenny, Berkeley: University of California Press.

WOLFF, CHRISTIAN: 1679-1754, *Gesammelte Werke*, Jean École et al. (eds.), 3 series (German, Latin, and Materials), Hildesheim-Zürich-New York: Olms, 1962–.
_____1965, *Mathematishes Lexikon*, (Abt. 1. Bd. 11), Hildesheim: Georg Olms Verlag.
_____1968, *Elementa Matheseos Universae*, (Abt. 2. Bd. 29), Hildesheim: Georg Olms Verlag.
_____1973a, *Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wissenschaften*, (Abt. 1. Bd.12 y Bd.15. T.1) Hildesheim: Georg Olms Verlag.
_____1973b, *Kurtzer Unterricht von den Vornehmsten Mathematischen Schriften*, (Abt. 1. Bd. 15. T.2.), Hildesheim, Georg Olms Verlag.

WOLFF, ROBERT PAUL: 1963, *Kant' Theory of Mental Activity: A Commentary on the Transcendental Analytic of the Critique of Pure Reason*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

WOLFF, M: 1995, *Die Vollständigkeit der kantischen Urteilstafel*, Frankfurt a.M.: Vittorio Klostermann.

WOODIN, W.H.: 2001, "The continuum hypothesis I, II", *Notices of the American Mathematical Society* 48, 567-576, 681-690.
_____2011, "The Realm of the Infinite", in H. Woodin & M. Heller (eds.), *Infinity: New Research Frontiers*, New York: Cambridge University Press, 89–118.

WOODWARD, JAMES: 2011, "Scientific Explanation", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/win2011/entries/scientific-explanation/**

WRESCHNER, ARTHUR.: 1891, *Ernst Platner und Kants Erkenntnistheorie mit besonderer Berücksichtigung von Tetens und Aenesidemus: Nach einer von der philos. Facultät der Friedrich. Wilhelms. Univ. zu Berlin preisgekrönten Schrift*, Leipzig: E.E.W. Pfeffer. Disertación doctoral, Halle: F. Meyer, 1891. 2. Aufgabe, Leipzig: E.E.W. Pfeffer, 1893.
Accesible online: **https://archive.org/details/ernstplatnersund00wres**

WUSSING, HANS.: 1962, *Mathematik in der Antike. Mathematik in der Periode der Sklavenhaltergesellschaft*, Leipzig: B.G. Teubner 1962, und Aachen: Majer 1962.

YABLO, STEPHEN: 1985, "Truth and reflection", *Journal of Philosophical Logic*, 14: 297–349.
_____1993, "Paradox without self-reference", *Analysis*, 53: 251-252.

YAGLOM, I.M.: 1988, *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*, Boston: Birkhäuser.

YATES, FRANCES A.: 1966, *The art of memory*, London: Routledge & Kegan Paul.
Reediciónes: Chicago: University of Chicago Press, 2001. London: Pimplico, 2007.

YOUNG, J. M.: 1982, "Kant on the Construction of Arithmetical Concepts", *Kant Studien* 73: 17-46.
_____1984, "Construction, Schematism, and Imagination", *Topoi*, 3 (2): 123–131.[Reprinted in Posy 1992]
_____1988, "Kant's View of Imagination", *Kant Studien* 79 (1988): 140-164.

YOUNG, JAMES O.: 2013, "The Coherence Theory of Truth", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/sum2013/entries/truth-coherence/**

ZACH, RICHARD: 1998, "Numbers and functios in Hilbert's finitism", *Taiwanese Journal for Philosophy and History of Science* 10: 3-60.
_____1999, "Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic", *Bulletin of Symbolic Logic*, 5(3): 331-366.
_____2001, *Hilbert´s Finitism: Historical, Philosophical and Metamathematical Perspectives*, University of Berkeley (Dissertation). Accesible online en: **www.Ucalgary.ca/rzach/papers**
_____2003, "The practice of finitism. Epsilon calculus and consistency proofs in Hilbert's Program", *Synthese* 137: 211-259.
_____2004, "Hilbert's *Verunglückter Beweis*, the first epsilon theorem and consistency proofs". *History and Philosophy of Logic*, 25:79–94, 2004.
_____2006, "Hilbert's program then and now", en Dale Jacquette, ed., *Handbook of the Philosophy of Logic* (North-Holland, Amsterdam), 43 pp. **http://www.ucalgary.ca/~rzach/papers/**
_____2009, "Hilbert's Program", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2009 Edition),

Edward N. Zalta (ed.), **http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/hilbert program/**

ZADEH, LOFTI A.: 1962a, "From circuit theory to system theory", *Proc. of Institution of Radio Engineers*, 50, 856-865.

_____1962b, "A critical view of our research in automatic control", *IRE trans. on Automatic Control*, AC-7, 74.

_____1963, "Optimality and non-scalar-valued perfomance criteria", *IEEE trans. on Automatic Control*, 8 (1), 59-60.

_____1964, "Fuzzy sets", *Memo. ERL*, nº 64-44, University of California, Berkeley.

_____1965, "Fuzzy sets", *Information and Control*, 8: 338–53.

_____1968, "Fuzzy Algorithms", *Information and Control*, 12, 94-102.

_____1969, "Biological application of the theory of fuzzy sets and systems", *Proc. of the Symp. on the Biocybernetics of the Higher Nervous System"*, (Proctor L.D., ed.), Little, Brown and Co., Boston, 199-206.

_____1972, "A rationale for fuzzy control", *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 34, 3-4.

_____1973, "Outline of a new approach to the analysis of complex system and decision processes", *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 3, 28-44.

_____1975, "Fuzzy logic and approximate reasoning", *Synthese*, 30: 407–425.

_____1977, "Linguistic characterization of preference relations as a basis for choice in social systems", *Erkenntnis*, 11 (3), 383-401.

_____1978, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 3-28. Reprinted in *Fuzzy Sets and Systems* 100 (Supplement): 9–34, 1999.

_____1981, "Possibility theory and soft data analysis", *Mathematical Frontiers of Social and Policy Sciences*, (Cobb L. & Thrall R. M., eds.), Westview Pres, Boulder, Colo. 69-129).

_____1984, "Making computers think like people", *IEEE Spectrum*, 21, 26-32.

_____1990, "The birth and evolution of fuzzy logic", *Int. J. of General Systems*, 17, 95-105.

_____1994, "Soft computing and fuzzy logic", *IEEE Software*, 11 (6), 48-56.

_____1996a, "Foreword", in Klir, G. J. & Yuan, B. (edit.), *Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy system: Selected papers by Lotfi A. Zadeh*, Singapore: World Scientific.

_____1996b, "Fuzzy logic = Computing with words", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 4, 103-111.

_____1997, "Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic", *Fuzzy Sets and Systems*, 90, 111-127.

_____1999, "From computing with numbers to computing with words- From manipulation of measurements to manipulation of perceptions", *IEEE Trans. on Circuits and Systems –I: Fundamental Theory and Applications"*, 45, 105-119.

_____2000, "Foreword", en *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Dubois, Didier &Prade, Henri (edits.), Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ZADEH, L. A. & KALMAN, R. E.: 1974, "Discussion", *Man and Computer*, M. Marois (edit.), 93-94, Amsterdam: North-Holland.

ZALTA, EDWARD N.: 1995, *Basic Concepts in Modal Logic*, Stanford: Center for the Study of Language and Information, Stanford University.

_____1983, *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*, Dordrecht: Reidel Publishing Co.

ZERMELO, ERNST: 1908, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", *Mathematische Annalen* vol. 65 (1908), 261-281, English translation in (Van Heijenoort, 1967), 199-215.

_____1929, "Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik", *Fundamenta Mathematicae* 14: 339-44.

_____1930, "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", *Fundamenta Mathematicae* 16: 29-47.

_____1931, "Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 41, 85-88.

_____1935, "Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme", *Fundamenta Mathematicae* 25: 136-46.

ZIEGLER, OTTO.: 1888, *Tetens Erkenntnistheorie in Beziehung auf Kant*, Leipzig: Hesse & Becker.

ZIMMERMANN, Hans Jürgen (Edit.): 1999, "Practical Applications of Fuzzy Technologies", *The Handbooks of Fuzzy Sets Series*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ZINOVIEV, ALEXANDRE: 1963, *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*, Dordrecht: Reidel Publishing Company.

ZWEIG, A. (editor): 1967, *Kant. Philosophical Correspondence 1759-99* Chicago: Univ. of Chicago Press.