



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

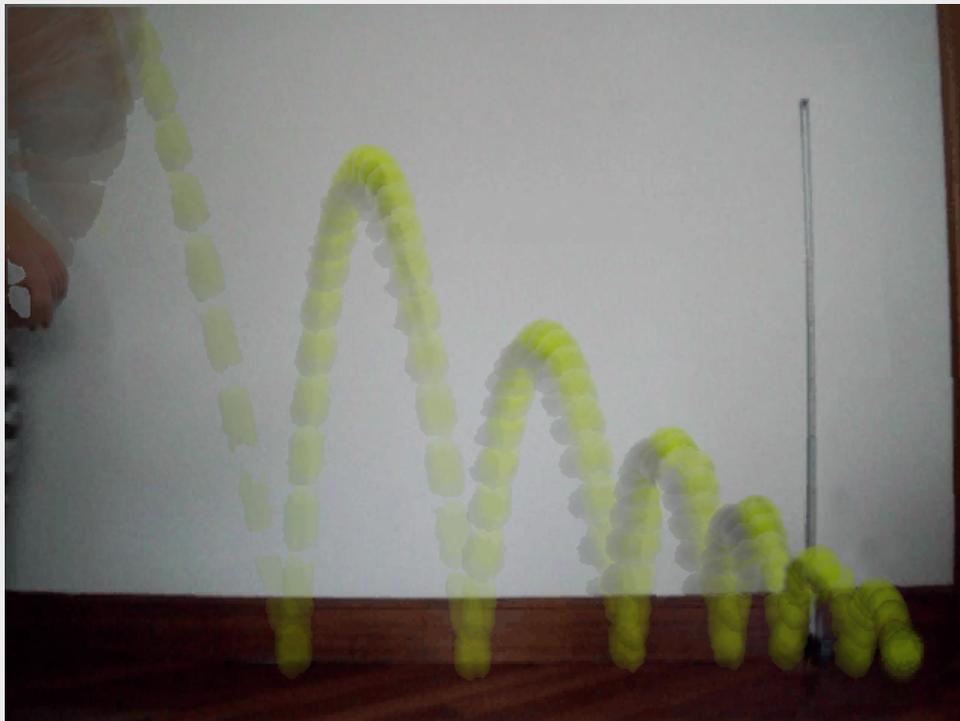


ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultateak
Facultad de Ciencia y Tecnología



Trabajo Fin de Grado
Grado en Física

Análisis de tiro parabólico mediante el programa "measure Dynamics"



Autor: Joseba Lasa Jauregi
Directora: Isabel Ruiz Larrea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco, UPV/EHU

Leioa, Junio de 2015



Índice

0. Presentación.....	4
1. Introducción al programa de medida “measure Dynamics”.....	5
1.1. Grabación de vídeo.....	5
1.2. Preparación del vídeo.....	5
1.2.1 Cortar.....	5
1.2.2 Escalar.....	7
1.3 Análisis de vídeo.....	10
1.3.1 Análisis automático.....	10
1.3.2 Análisis manual.....	11
1.3.3 Obtención de la información.....	11
1.4 Gráficas.....	12
1.5 Medir longitud y ángulo.....	13
2. Tiro parabólico desde el origen: definición y ecuaciones.....	15
2.1. Introducción.....	15
2.2. Elección de ejes.....	16
3. Grabación del experimento.....	17
3.1 Elección de la cámara adecuada.....	17
3.1.1. La cámara “traga-fotogramas”.....	17
3.1.2. La cámara panorámica. Test de homogeneidad.....	18
3.2. Variables sin control.....	18
4. Validez de una cámara panorámica. Resultados.....	20
4.1 Lanzamiento desde el origen con velocidad inicial nula.....	20
5. Experimento de tiro parabólico. Cálculo de errores.....	23
5.1 Medida de ángulo de tiro mediante la herramienta del programa.....	24
5.2 Medidas de la velocidad inicial mediante las ecuaciones de posición.....	24
5.2.1. Obtención de v_0 a partir de la ecuación (4): $x(t)$	24
5.2.2. Obtención de v_0 a partir de la ecuación (5): $y(t)$	25
5.2.3. Obtención de v_0 a partir de la ecuación (6): $y(x)$	26
5.3 Medida de ángulo y velocidad inicial desde las ecuaciones de velocidad.....	26
5.3.1 Obtención de la función de ajuste de la ecuación (9): $v_x(t)$	26
5.3.2 Obtención de la función de ajuste de la ecuación (10): $v_y(t)$	27
5.3.3 Cálculo del ángulo de tiro y velocidad inicial.....	27
5.4 Medida de ángulo de tiro y velocidad mediante KaleidaGraph.....	28
5.5 Análisis de la aceleración.....	29
5.6 Resumen de medidas, alcance y altura máxima.....	30

6. Estudio del choque cuasielástico de una pelota de tenis sobre suelo horizontal liso.....	32
6.1. Introducción teórica: caída libre y sucesivos rebotes en plano horizontal.....	32
6.1.1 Medida del coeficiente de restitución e y del alcance de cada bote.....	32
6.1.2 Medida de altura y pérdida de energía en los sucesivos botes.....	33
6.2. Lanzamiento 1: la pelota da 4 botes.....	34
6.3. Lanzamiento 2: la pelota da 6 botes.....	36
6.4. Medida del ángulo subtendido por la velocidad en todo momento	40
7. Conclusiones:	42
8. Referencias.....	43

0. Presentación.

Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo consiste en la utilización de nuevas tecnologías para realizar experimentos en física. Para ello utilizaremos un software preparado para prácticas de laboratorio de Física llamado “measure Dynamics”. Este programa permite analizar numéricamente los experimentos grabados con una cámara, como por ejemplo la que se encuentra en la mayoría de los teléfonos móviles, y está especialmente indicado para medidas de cinemática. Para realizar el trabajo es necesario un ordenador en el que instalar el programa y un teléfono móvil o una cámara digital para grabar el experimento.

Esta memoria está subdividida en capítulos cuyo contenido resumiremos a continuación:

En el capítulo 1 haremos un breve resumen descriptivo de las posibilidades del programa “measure Dynamics” y sus limitaciones.

En el capítulo 2 describiremos el fundamento teórico que describe un lanzamiento de un objeto desde el origen de coordenadas (tiro parabólico) y la notación que seguiremos a lo largo del trabajo.

En el capítulo 3 se describen algunos problemas surgidos con la grabación del video.

En el capítulo 4 se analiza la validez de una cámara panorámica. Para ello se plantean dos tipos de experimentos simples. En ambos la velocidad inicial es cero pero se graban con la cámara en vertical y en horizontal respectivamente. Analizando los resultados se concluye que la cámara es adecuada para este estudio.

En el capítulo 5 se estudia con la cámara panorámica un tiro parabólico y se determinan la velocidad inicial y el ángulo de tiro haciendo una estimación de los errores de la medida.

En el capítulo 6 se estudia el choque cuasielástico de una pelota de tenis. El análisis de los sucesivos botes permite calcular el coeficiente de restitución, el comportamiento del ángulo y los distintos parámetros de altura y alcance de los sucesivos botes.

Por último se incluye el capítulo 7 de conclusiones y el 8 las referencias bibliográficas.

1. Introducción al programa de medida “measure Dynamics”.

A lo largo de este proyecto hemos utilizado el software *measure Dynamics* de PHYWE. Este programa sirve para el análisis de movimiento de objetos que hayan sido previamente grabados en video y en consecuencia se puede extraer información sobre la cinemática y dinámica del objeto en cuestión. En particular se ha utilizado este curso 2014-15 como práctica de laboratorio de Física para alumnos de 1^{er} curso de los grados de Química y de Ingeniería Química en el departamento de Física Aplicada II de la Facultad de Ciencia y Tecnología. La información de los programas de instalación, el manual y los tutoriales se encuentran en la dirección de Dropbox [1].

A continuación resumiremos brevemente los aspectos más interesantes del programa.

1.1. Grabación de vídeo.

El experimento a analizar puede ser un video ya grabado (el programa proporciona varios ejemplos) o una grabación hecha por nosotros mismos. A la hora de crear videos, hay que tener en cuenta una serie de consideraciones importantes:

- Contraste lo más alto posible entre el objeto en movimiento y el fondo.
- Fondo estático, sin movimientos.
- Los planos que definen el fondo, la trayectoria del objeto y el dispositivo de grabación paralelos.
- Grabación con trípode.
- Grabación de al menos 30 imágenes por segundo de velocidad de captura.
- La presencia de una referencia de longitud conocida en el video.
- Recomendable una referencia vertical/horizontal en el video para garantizar que el encuadre es correcto.

1.2. Preparación del vídeo.

Una vez hecha la grabación, hay que prepararla antes de proceder con el análisis.

1.2.1 Cortar.

Reducir la longitud del video al intervalo de interés es esencial para poder trabajar con comodidad y eficiencia. Para ello el primer paso es abrir el video: Archivo<Abrir video, (ver figura 1).

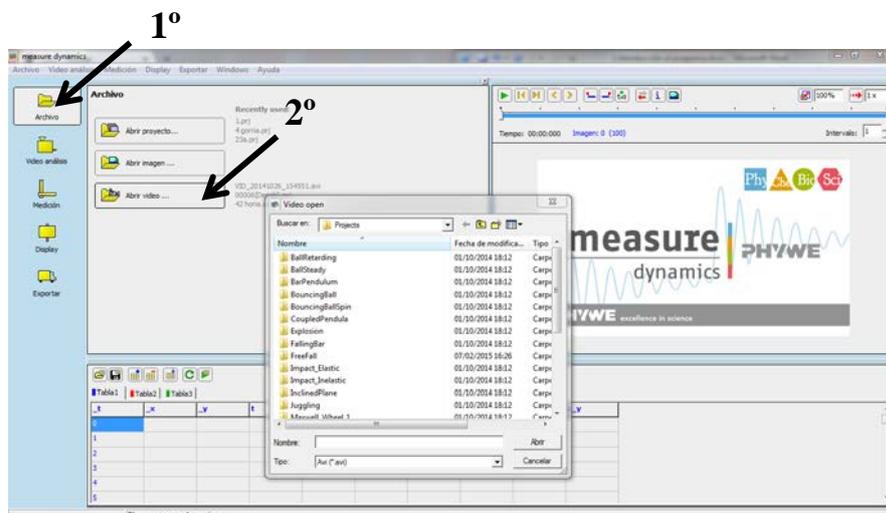


Figura 1: Instrucciones para editar el video.

Después se procede a elegir el fragmento del video en el que se da el movimiento. En la barra superior existen iconos destinados a la edición del video: avance, pausa, retroceso, etc. En la figura 2 se indican los botones de inicio y fin del video.

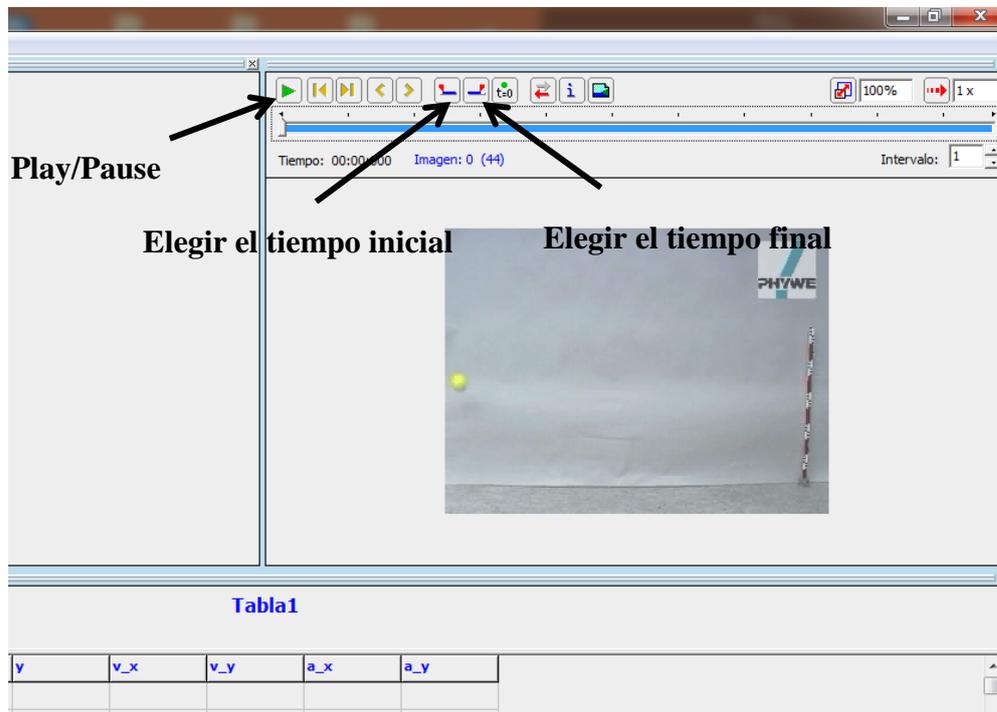


Figura 2: Instrucciones para seleccionar el fragmento de interés del video.

Una vez finalizado el proceso de selección del video, se procede a comprimir el video “Exportar<Compresión...” y guardarlo “Salvar video...”. Haciendo esto se consigue que el archivo ocupe menos memoria.

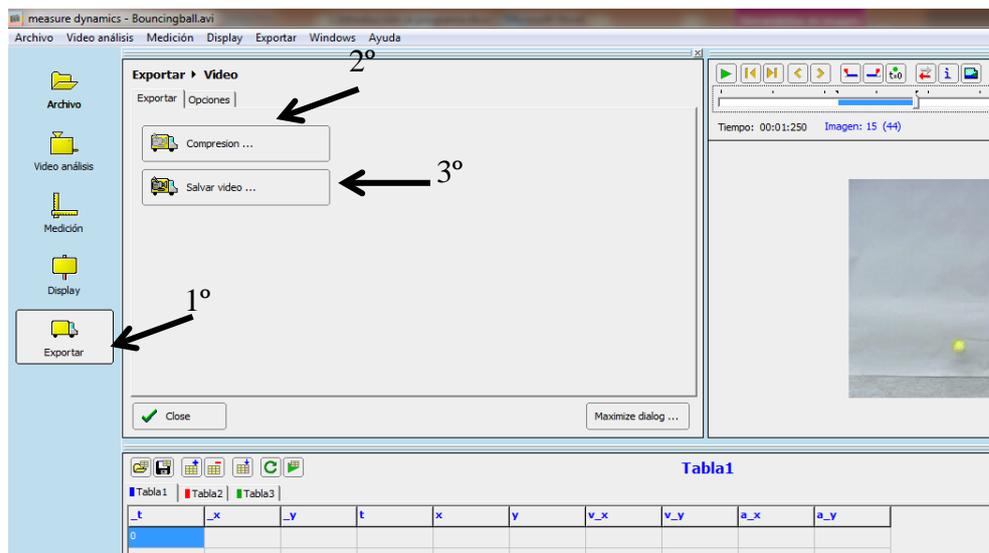


Figura 3: Instrucciones para comprimir y guardar el video.

1.2.2 Escalar.

Es de vital importancia establecer el origen de coordenadas y el sistema de referencia para que las ecuaciones que se utilicen tengan la forma más simple posible. En cualquier momento del análisis el programa permite cambiar dicho sistema de referencia y aplicarlo con la función “rescale now”, con el que se modifica al instante la tabla de datos.

El primer paso es elegir el origen de tiempos y se va a hacer con el botón indicado en la barra por el texto “t=0” seguido de un punto verde encima (ver figura 4).



Figura 4: Botón para escoger origen de tiempos y modificación de datos al dar “Rescale now” en la Tabla 1 de la imagen.

El siguiente paso es escalar el video eligiendo el origen de coordenadas espaciales e indicando al programa la verdadera longitud de la referencia que aparece en el video. Para ello: Medición>Scaling.

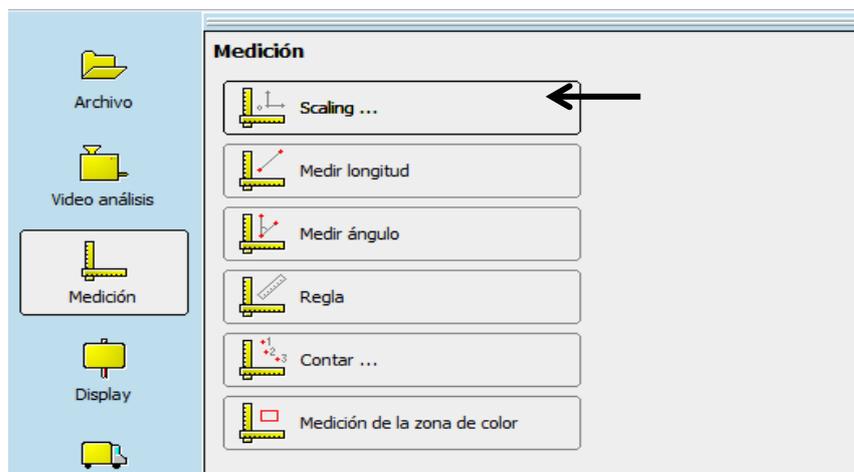


Figura 5: Instrucciones para acceder a escalar

Dentro de ese menú se encuentra "Origin and direction" con el que se elige el origen de coordenadas. Utilizaremos como origen de coordenadas la posición de la pelota en un determinado fotograma mediante un clic. Para que sea efectiva esta acción es necesario pulsar el botón "rescale now", con ello se re-escalará toda la información a ese punto (figura 6). También es importante comparar nuestro sistema de coordenadas con la referencia vertical que aparece en el video para así asegurarnos de que el eje vertical está en paralelo con la fuerza gravitatoria y en consecuencia que el encuadre es correcto.

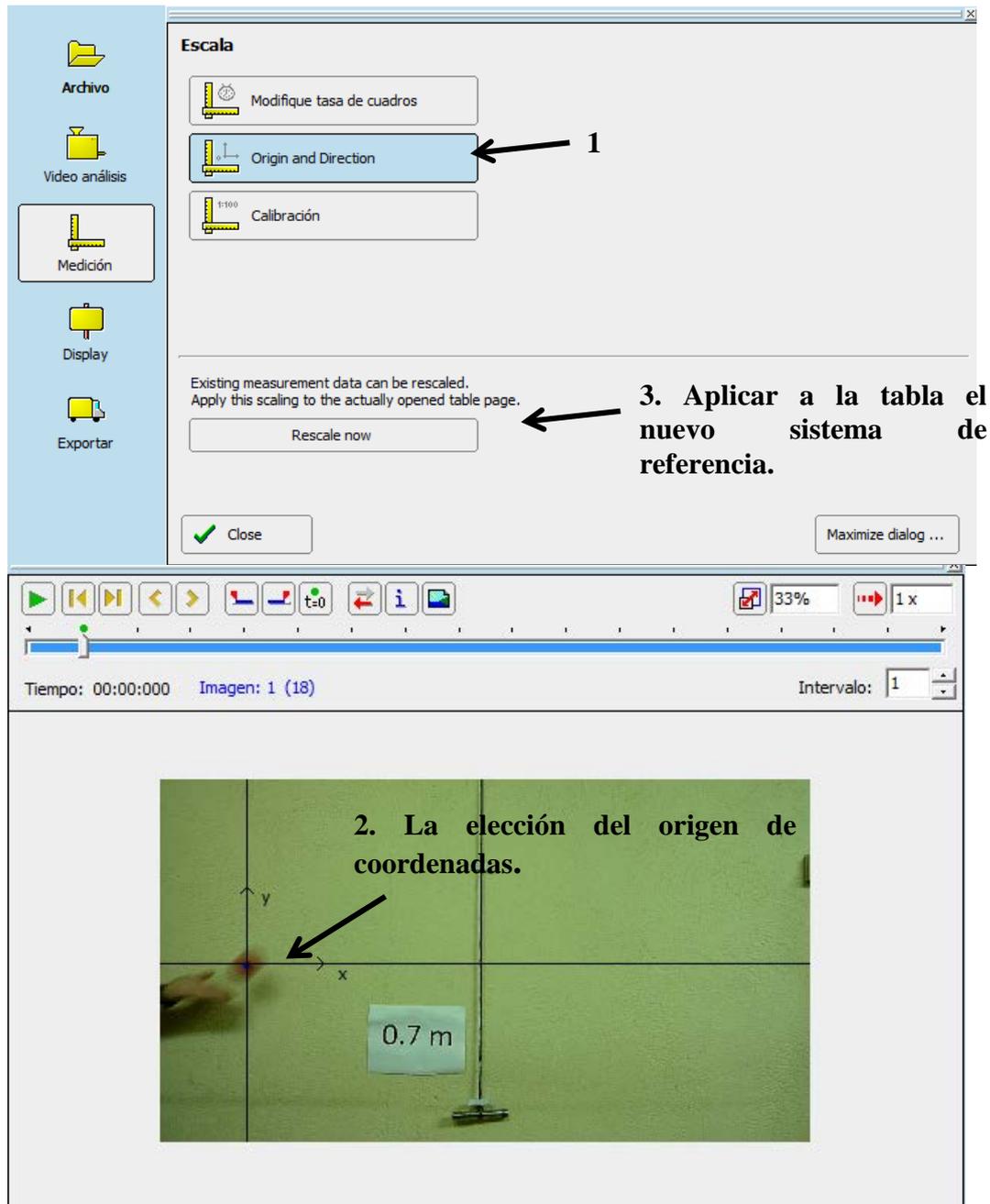


Figura 6: Instrucciones para la elección del origen de coordenadas.

Una vez elegido el origen de coordenadas, es necesario que las medidas de la tabla se encuentren en la escala real. Como en el video se ha recogido un objeto de longitud conocida, basta con ajustar el segmento al objeto de referencia y colocar los rombos al inicio al a l final del objeto. En la figura 7 se indican las instrucciones necesarias para la calibración.

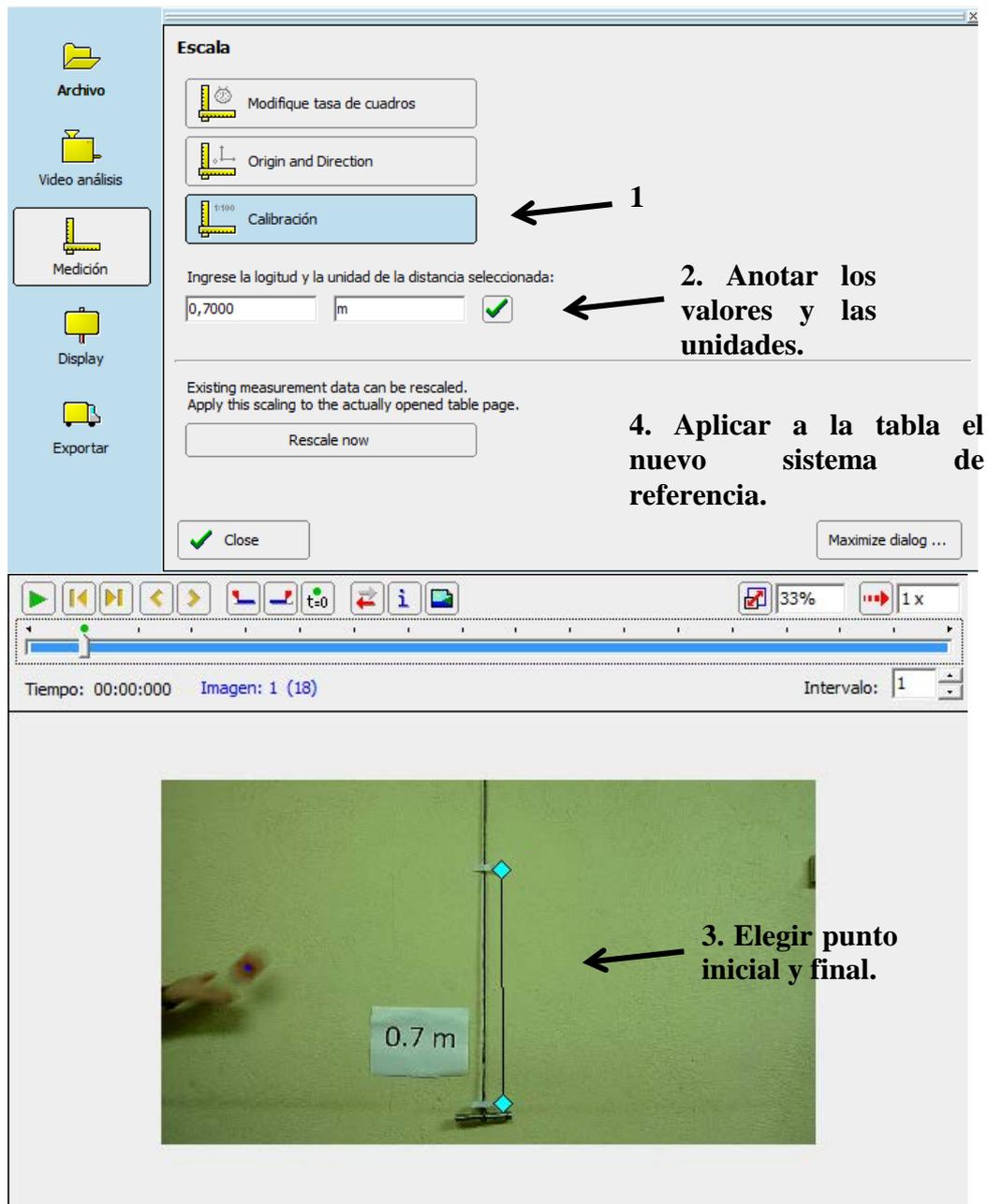


Figura 7: Instrucciones para la calibración a partir del objeto de longitud conocida.

Una vez hecha la calibración habremos obtenido la información a escala real.

Por último, se guarda todo el trabajo que se hecho desde Archivo>Guardar proyecto. El programa genera automáticamente 8 archivos en los que se encuentra toda la información que iremos incluyendo en el mismo.

1.3 Análisis de vídeo

Una vez elegido el origen de coordenadas y tiempo, y escalado a las dimensiones reales, el programa permite detectar las coordenadas x e y del objeto mediante dos tipos de análisis: automático y manual.

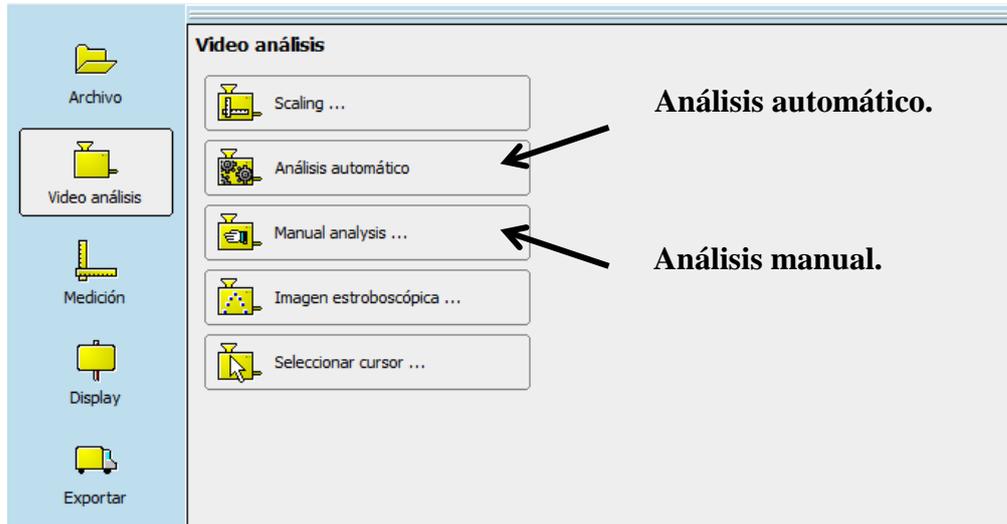


Figura 8: Instrucciones para la detección de las coordenadas x e y mediante dos tipos de análisis: automático y manual.

1.3.1 Análisis automático

Para proceder al análisis automático es conveniente indicar al programa la posición del objeto en un fotograma (por ejemplo en el punto más alto del tiro). El programa se encarga de hacer el análisis mediante la detección sólo por movimiento, sólo por color o detección por color y movimiento. Es recomendable que haya una buena diferenciación de colores entre el objeto y el fondo. Una vez hecho este análisis, el programa rellena automáticamente la tabla de datos con los valores: t para el tiempo, $\{x, y\}$ para la posición; $\{v_x, v_y\}$ para la velocidad; y $\{a_x, a_y\}$ para la aceleración.

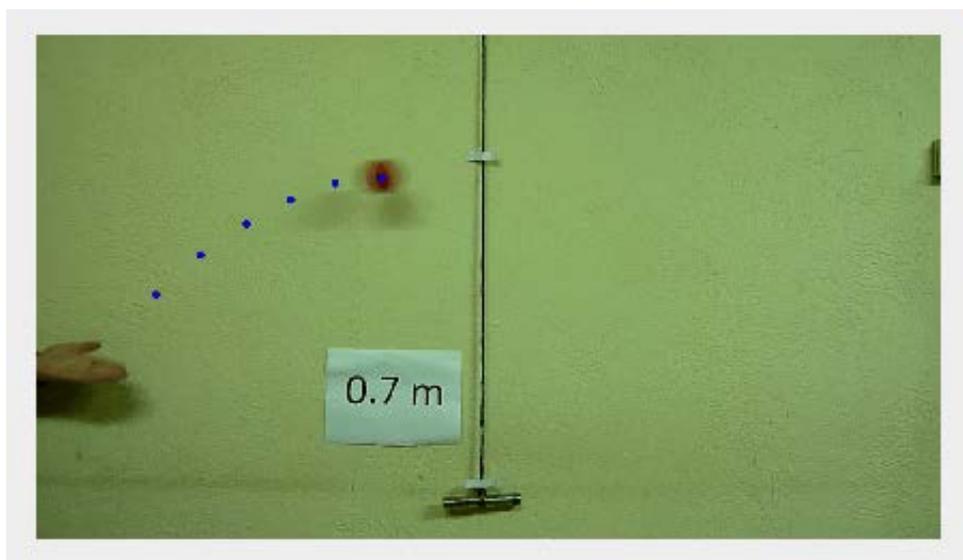


Figura 9: Ejemplo de análisis automático. Los puntos representan los datos (x,y) de la posición de la pelota.

1.3.2 Análisis manual

A veces, cuando el programa no detecta bien la posición del objeto al equivocarse con su sombra o algún objeto del fondo o por cualquier otra razón, el programa permite elegir la posición de forma manual. En este caso, como el mismo nombre indica, se debe indicar al programa la posición del objeto fotograma a fotograma con un clic. Este procedimiento es más laborioso y requiere de la especificación de la posición del objeto en cada fotograma. Si el video está bien grabado no es necesario recurrir al análisis manual.

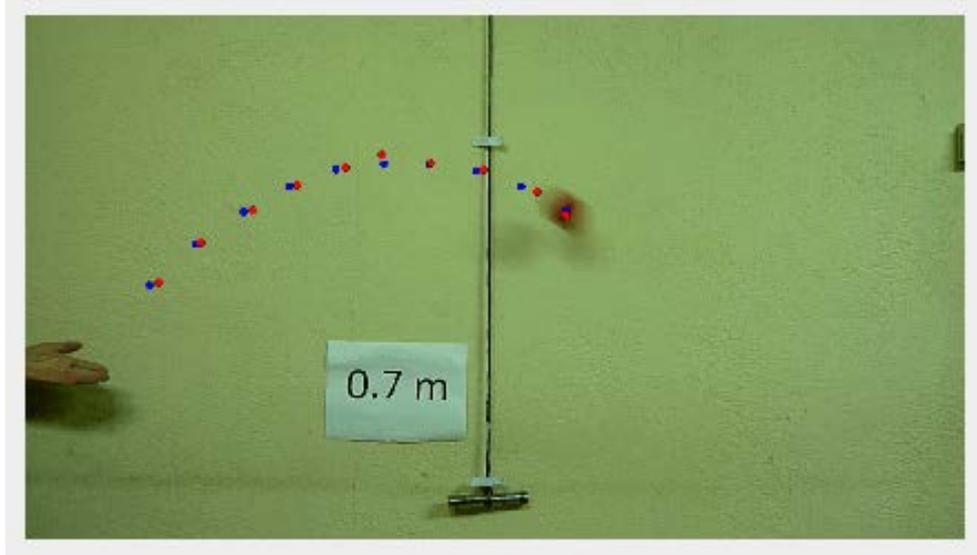


Figura 10: Ejemplo de análisis de movimiento. En azul el análisis automático y en rojo el manual.

1.3.3 Obtención de la información

Una vez hecho el análisis, al guardar el proyecto, uno de los 8 archivos tiene formato Excel y en ese archivo se recogen los datos en forma de tabla que pueden analizarse posteriormente con otros programas de tratamiento de datos como *Mathematica* o representación gráfica como *KaleidaGraph*.

En este ejemplo se indican los datos Excel para un lanzamiento. Como puede observarse las columnas de la velocidad y de la aceleración tienen espacios vacíos y esto se debe a que su cálculo se realiza por derivación numérica y posterior suavizado. Como dato tenemos que aproximadamente $a_x = 0$ y $a_y = -9.81 \frac{m}{s^2}$.

t	x	y	v_x	v_y	a_x	a_y
s	m	m	m/s	m/s	m/s ²	m/s ²
0,0000	-0,0166	0,1043				
0,0333	0,0000	0,0047	0,4273	-0,9595		
0,0667	0,0119	0,0403	0,3553	2,0615	-1,0789	58,6214
0,1000	0,0237	0,1422	0,3559	2,9550	0,5411	8,5671
0,1333	0,0356	0,2371	0,3913	2,6312	1,0564	-10,6768
0,1667	0,0498	0,3177	0,4258	2,2384	0,0000	-11,7557
0,2000	0,0640	0,3864	0,3919	1,8498	-0,5185	-11,2049
0,2333	0,0759	0,4409	0,3913	1,4933	-0,0225	-10,6319
0,2667	0,0901	0,4860	0,3898	1,1379	0,0000	-11,7333

0,3000	0,1019	0,5168	0,3919	0,7117	0,0225	-11,2274
0,3333	0,1162	0,5334	0,3913	0,3913	0,5170	-9,0584
0,3667	0,1280	0,5429	0,4258	0,1064	1,0564	-9,0584
0,4000	0,1446	0,5405	0,4625	-0,2132	0,0225	-9,6042
0,4333	0,1588	0,5287	0,4273	-0,5322	0,0225	-9,5979
0,4667	0,1731	0,5050	0,4633	-0,8531	1,0564	-9,0809
0,5000	0,1897	0,4718	0,4985	-1,1396	-0,0225	-9,0857
0,5333	0,2063	0,4291	0,4618	-1,4573	-1,0789	-8,5190
0,5667	0,2205	0,3746	0,4258	-1,7061	-1,0564	-6,9231
0,6000	0,2347	0,3153	0,3919	-1,9219	-1,0596	-8,0260
0,6333	0,2466	0,2466	0,3553	-2,2399	-0,5395	-5,8666
0,6667	0,2584	0,1659	0,3553	-2,3103	0,0000	-3,1693
0,7000	0,2703	0,0925	0,3559	-2,4550	0,0000	19,7720
0,7333	0,2821	0,0024	0,3553	-0,9955		
0,7667	0,2940	0,0261				

Tabla 1: Ejemplo de datos en el documento Excel para un lanzamiento.

1.4 Gráficas

Una vez se recogida toda la información sobre la posición del objeto, resulta muy interesante hacer representaciones gráficas de la posición, velocidad y aceleración para después poder compararlos con funciones. El programa permite realizar fácilmente estas gráficas sin necesidad de recurrir a programas específicos como KaleidaGraph u Origin. De esas funciones se puede obtener información realmente interesante.

Para acceder a dichas gráficas hay que ir a Display>Diagrama (figura 11)

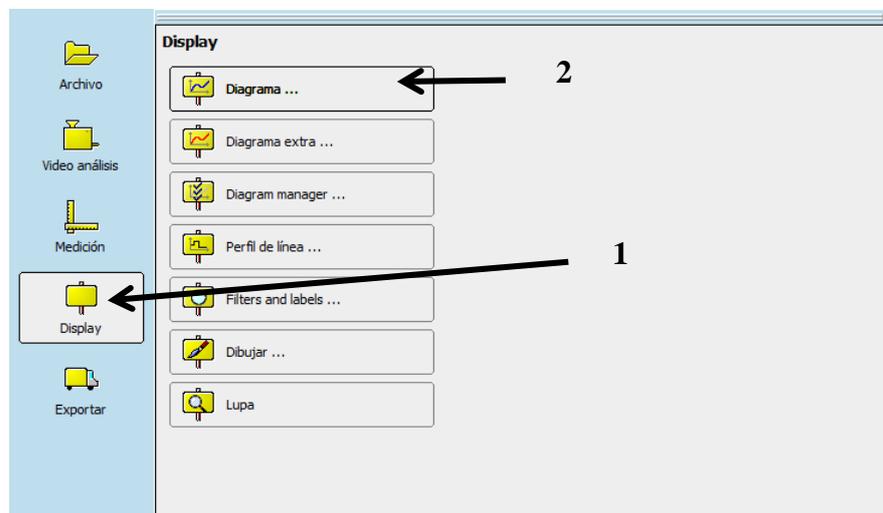


Figura 11: Acceso al menú de las gráficas.

En la barra de opciones se presentan automáticamente 3 gráficos: $x(t)$, $y(t)$ y la trayectoria $y(x)$, aunque el programa también permite seleccionar cualquiera combinación de variables para su representación. También permite representar las variables eligiendo símbolos y colores a demanda. Un ejemplo de esta representación aparece en la figura 12

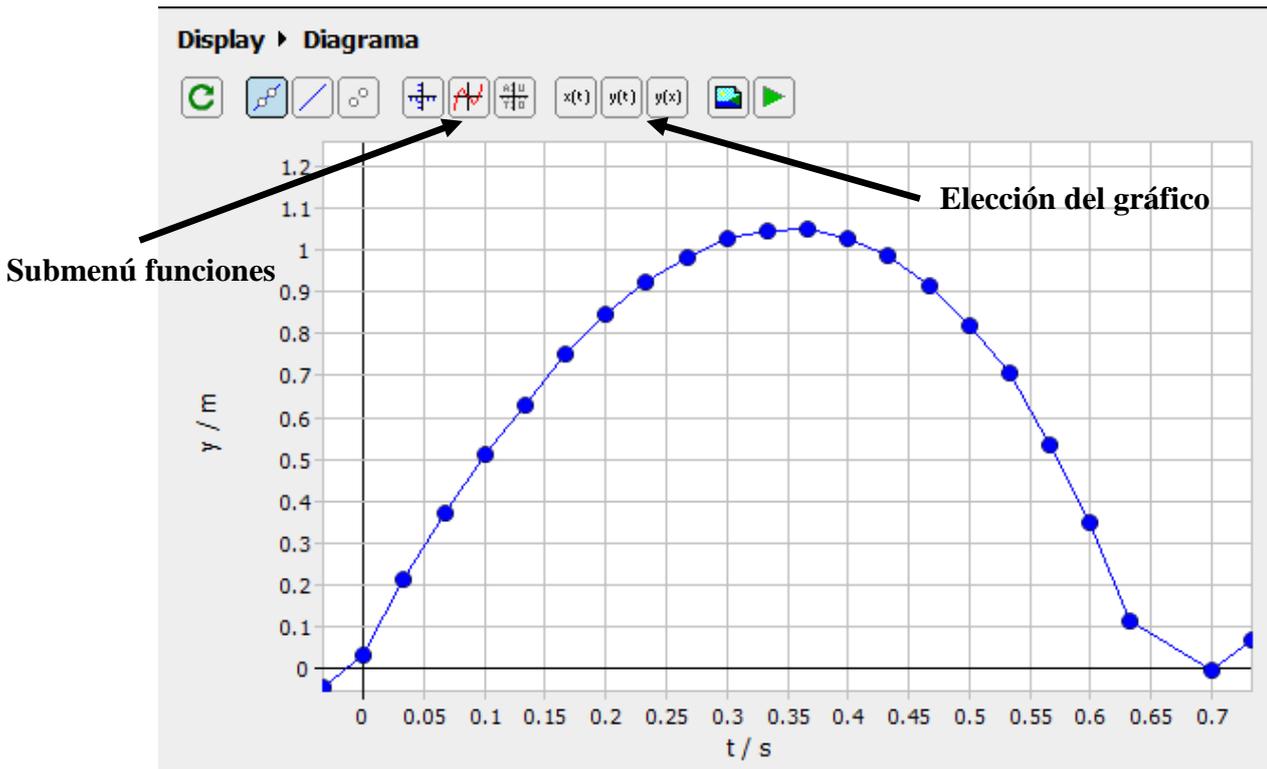
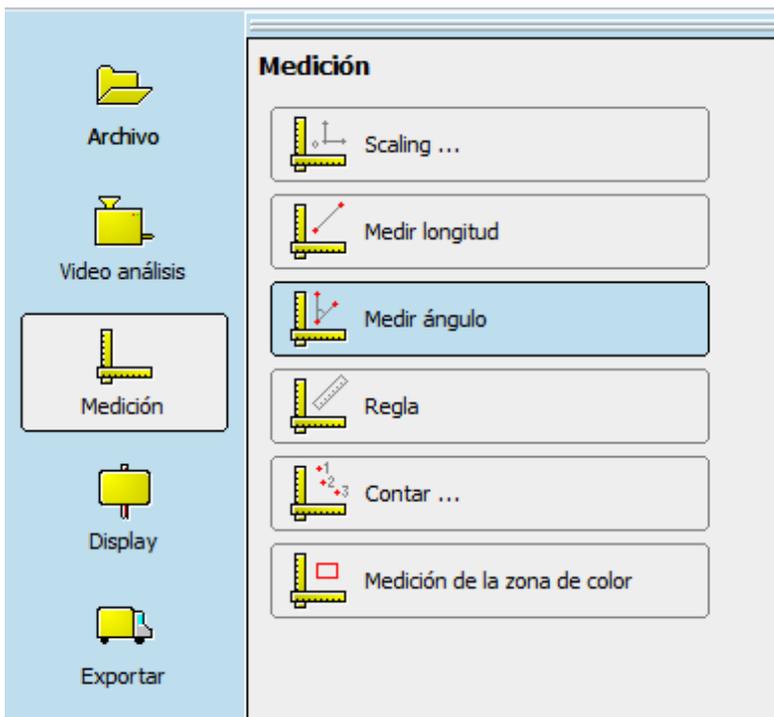


Figura 12: Ejemplo de gráfico $y(t)$ para un tiro parabólico y botón en el que se indica la función que se quiere representar

Tal y como se ha comentado es muy interesante comparar la representación gráfica de los datos experimentales con funciones que el usuario vea interesantes. Para ello existe un submenú llamado funciones donde es posible redactar la expresión matemática de una función $f(x)$ que se representará simultáneamente con los datos experimentales eligiendo.

1.5 Medir longitud y ángulo



El programa permite medir longitudes y ángulos (figura 13). Al hacer la selección aparece o bien una línea (para la longitud) o bien dos líneas unidas con un sector circular para medir ángulos (figura 14).

Figura 13: El programa permite medir longitudes y ángulos mediante su correspondiente botón.

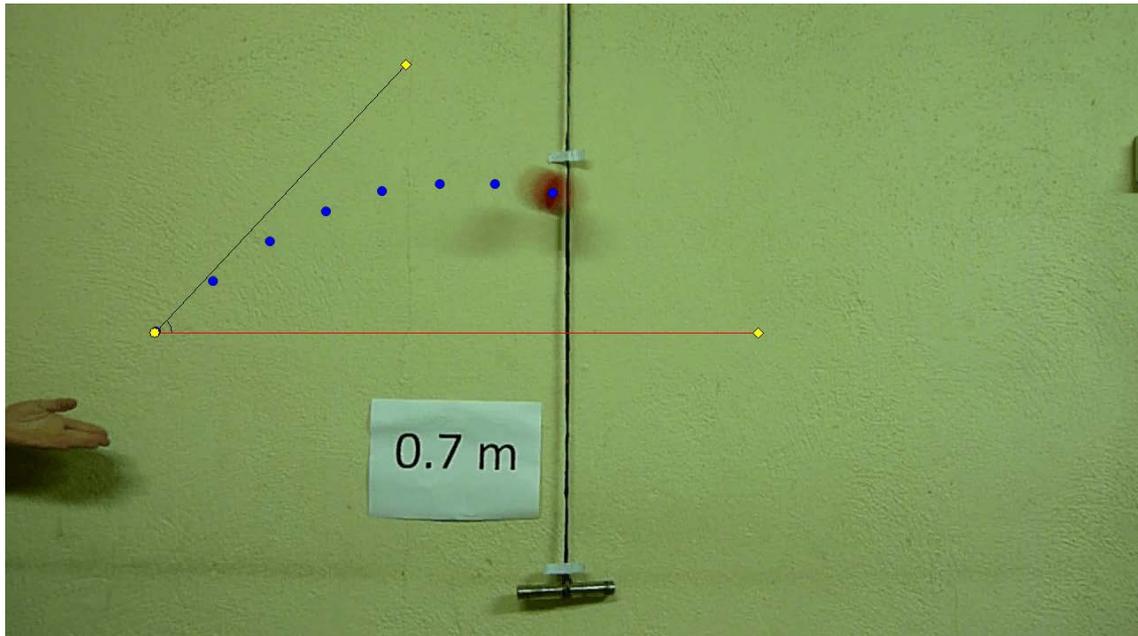


Figura 14: Ejemplo de medida de ángulo para un lanzamiento. La línea horizontal se tiene que ver de color rojo indicando que la línea no está quebrada.

Para acabar con el primer apartado, comentar que en algunas ocasiones la detección automática puede ser problemática si las condiciones de grabado y las características de la cámara no son óptimas, por lo que es muy importante preparar lo más cuidadosamente posible el escenario de grabado y conseguir una cámara adecuada.

2. Tiro parabólico desde el origen: definición y ecuaciones

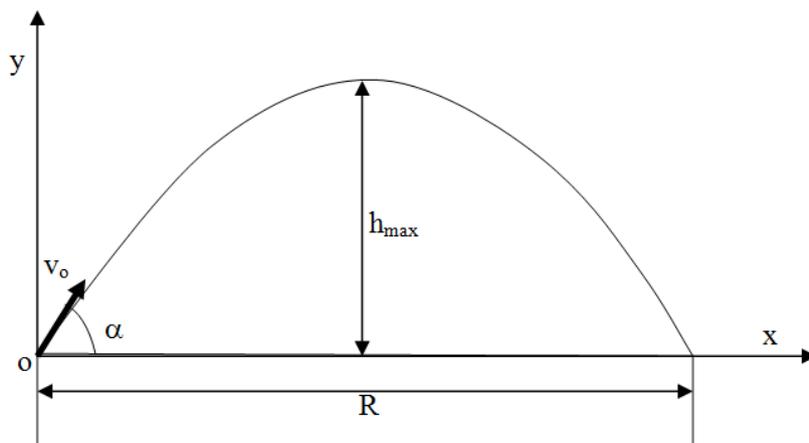
2.1. Introducción

El tiro parabólico se estudia desde los primeros cursos de física en el temario de cinemática, véase por ejemplo las referencias [2,3]. Cuando se lanza un objeto desde la posición (x_0, y_0) , con una velocidad inicial \vec{v}_0 y un ángulo de tiro α , la trayectoria del mismo viene descrita por:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) = x_0 + v_0 \cos \alpha (t - t_0) \quad (1)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 = y_0 + v_0 \sin \alpha (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (2)$$

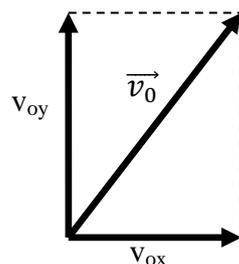
En donde se ha utilizado la notación indicada en la figura 15.



0 : origen de coordenadas.
 x : posición horizontal
 y : posición vertical
 t : tiempo
 \vec{v}_0 : velocidad inicial.
 v_0 : módulo de \vec{v}_0
 α : ángulo de \vec{v}_0
 h_{\max} : altura máxima
 R : alcance

Figura 15: Notación utilizada para estudiar el tiro parabólico de este trabajo.

En las ecuaciones (1) y (2) se ha utilizado también las expresiones para las componentes cartesianas del vector \vec{v}_0 :



Para obtener estas ecuaciones se ha considerado que no existe rozamiento y que la aceleración a la que está sometida la partícula es la intensidad de campo gravitatorio, dirigida verticalmente hacia abajo y cuyo valor es $g = 9.81 \text{m/s}^2$

$$a_x = 0 \quad (3)$$

$$a_y = -g$$

2.2. Elección de ejes

Ya que el programa permite elegir el sistema de coordenadas y el tiempo en el cual comienza el movimiento, haremos que el lanzamiento se efectúe desde el origen de coordenadas $(x_0, y_0) = (0,0)$ y en el instante inicial $t_0=0$.

De esta forma las ecuaciones de la posición (1) y (2) se simplifican según:

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t \quad (4)$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

Además, se puede obtener la ecuación de trayectoria independiente del tiempo despejando de (4) la variable t y sustituyendo en (5):

$$y(x) = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0 \cos^2 \alpha} \quad (6)$$

Esta ecuación (6) es una parábola, de ahí el nombre de tiro parabólico. Dicha parábola pasa por el origen y de ahí se pueden obtener las siguientes relaciones para la altura máxima h_{\max} y el alcance R :

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (7)$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (8)$$

Análogamente, derivando (4) y (5), se obtienen las ecuaciones cinemáticas de velocidad:

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha \quad (9)$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt \quad (10)$$

y aceleración:

$$a_x = 0 \quad (11)$$

$$a_y = -g \quad (12)$$

En estas ecuaciones los únicos parámetros desconocidos son la velocidad inicial v_0 y el ángulo de tiro α , ya que suponemos conocida $g=9.81\text{m/s}^2$.

3. Grabación del experimento

En este proyecto los videos se han grabado con distintas cámaras: un teléfono móvil tipo smartphone y una videocámara digital, entre otros. En el caso del teléfono móvil hemos encontrado un efecto de la cámara no deseado y por ello hemos descartado este dispositivo. Además se han percibido fenómenos ajenos a nuestro interés que explicaremos a continuación.

3.1 Elección de la cámara adecuada

Tal y como se ha comentado, la cámara del teléfono móvil ha tenido que ser descartada debido a los problemas detectados. A continuación se explican los más significativos.

3.1.1. La cámara “traga-fotogramas”

En el siguiente experimento de tiro parabólico desde el origen grabado con la cámara del teléfono móvil se observa que la cámara no recoge todas las posiciones de la pelota como se muestra en la figura 16.

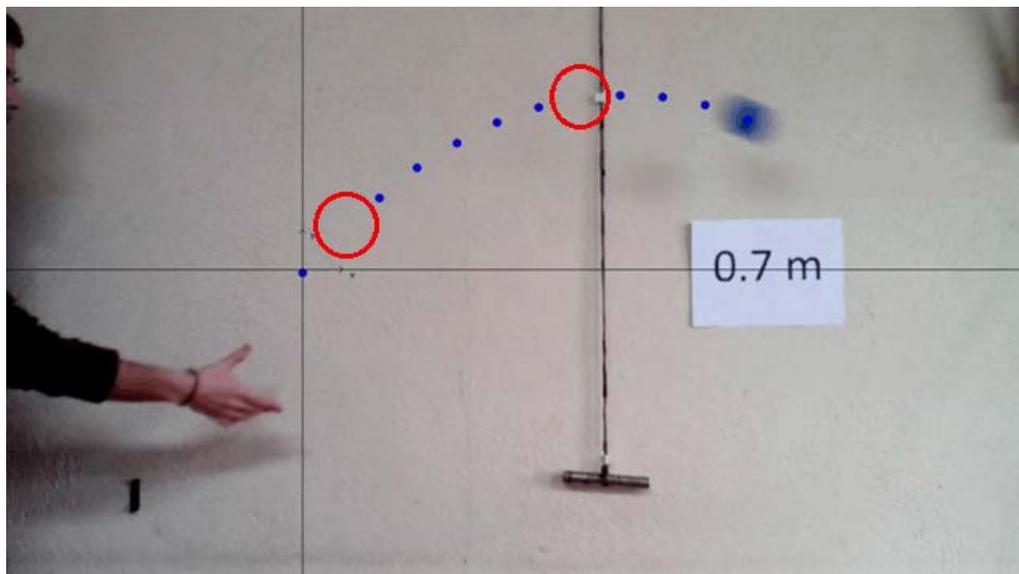


Figura 16: Lanzamiento de pelota azul en el que se observa la ausencia de fotogramas en los círculos rojos.

En un principio esto no es un problema mayor, pero si observamos las figuras (17) y (18) que corresponden al comportamiento de x e y con respecto al tiempo, se observa que aparecen discontinuidades sistemáticas en las funciones que se deben únicamente a este efecto.

En los gráficos no se observa ningún hueco entre fotogramas, pero sí se ven escalones que no deberían aparecer. Por lo tanto se concluye que cada vez que la cámara del smartphone omite un fotograma, al siguiente fotograma se le atribuye un valor del tiempo que no es el real. De ahí que ni la trayectoria horizontal es una recta perfecta ni la trayectoria vertical una parábola.

Puesto que el fallo que hace al grabar es conocido, puede ser arreglado mediante la manipulación las tablas, asignando valores de tiempo adecuados para cada fotograma. Este proceso resulta pesado y un tanto complicado, y como se van a hacer varias grabaciones en este trabajo, se decide descartar el teléfono y recurrir a otro dispositivo de grabación.

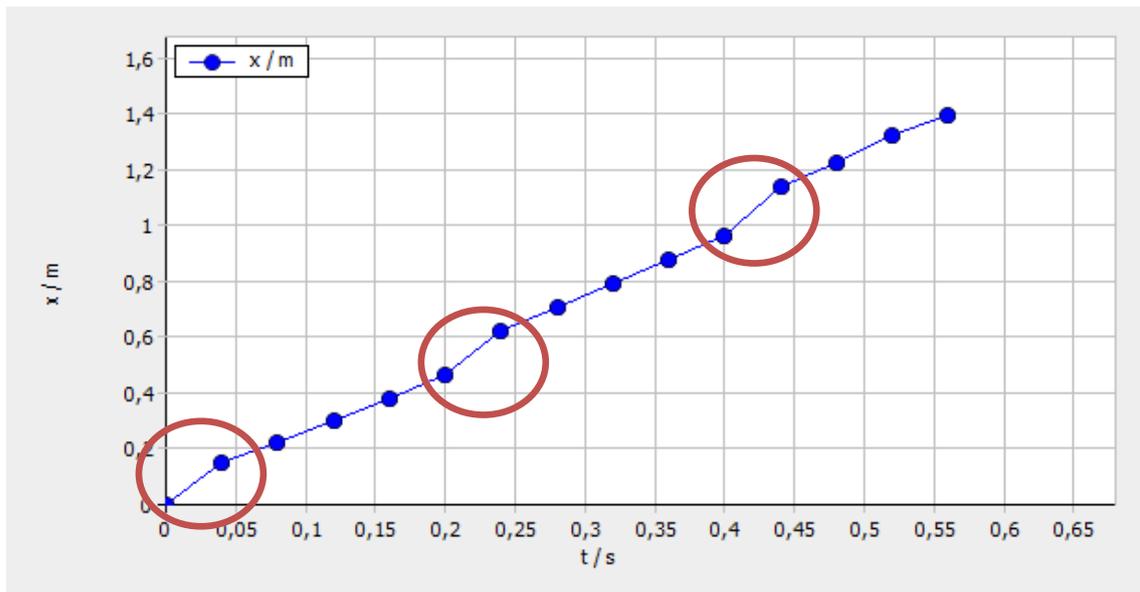


Figura 17: Gráfica $x(t)$ del lanzamiento de la pelota azul. En los círculos rojos se observan las discontinuidades de la función.

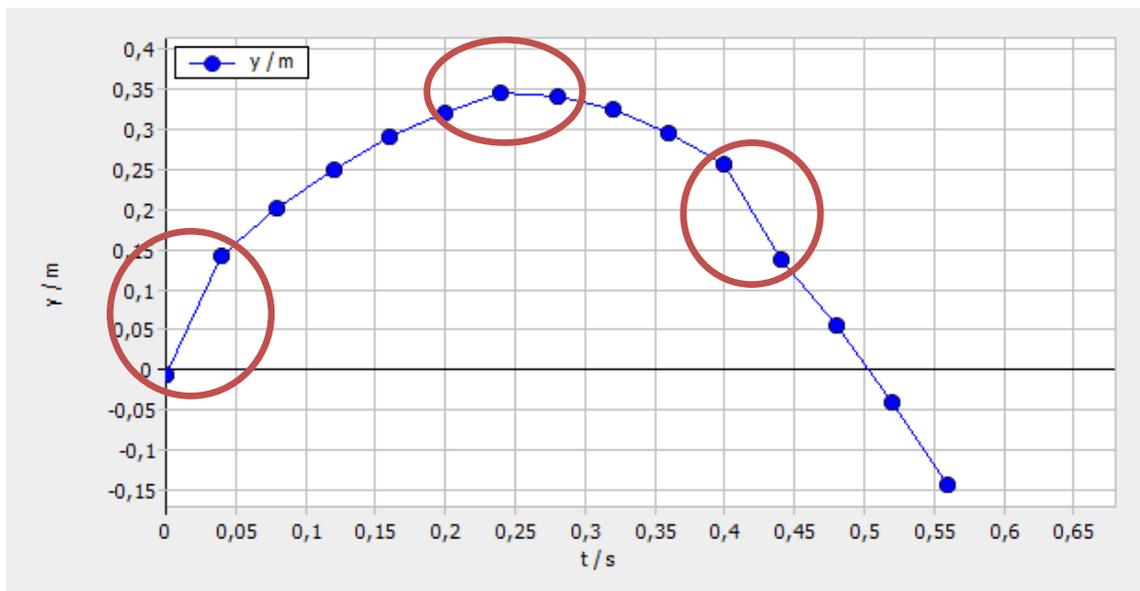


Figura 18: Gráfica $y(t)$ del lanzamiento de la pelota azul. En los círculos rojos se observan las discontinuidades de la función.

3.1.2. La cámara panorámica. Test de homogeneidad.

Es corriente que las cámaras de los móviles sean de tipo panorámico. Dicha característica podría originar problemas en la homogeneidad de los ejes vertical y horizontal. Para descartar este posible error, hemos utilizado un test de homogeneidad, que se puede utilizar siempre que se quiera probar la validez de cualquier dispositivo. Esta prueba se describirá en detalle en el apartado 4.

3.2. Variables sin control.

Una vez elegida la cámara adecuada, es importante controlar los efectos ajenos a nuestro estudio como pueden ser: efecto del giro de la pelota, rozamiento del aire etc. Como ejemplo, se hizo un experimento de tiro parabólico grabado al aire libre en el que los efectos son de gran importancia (figura 19).

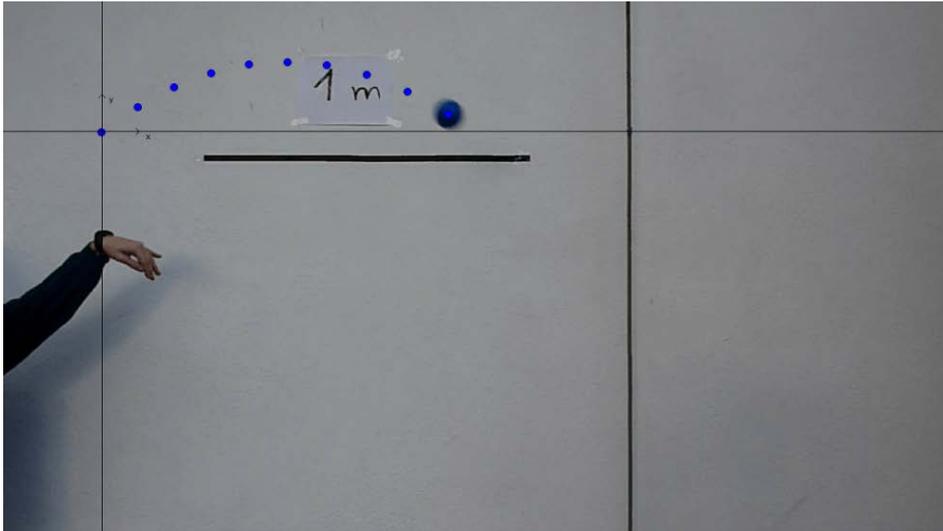


Figura 19 Lanzamiento de pelota azul al aire libre y con un cierto efecto de giro provocado por el movimiento de la mano hacia abajo.

En el análisis de este video se detectan varias anomalías en las gráficas de aceleración frente a tiempo:

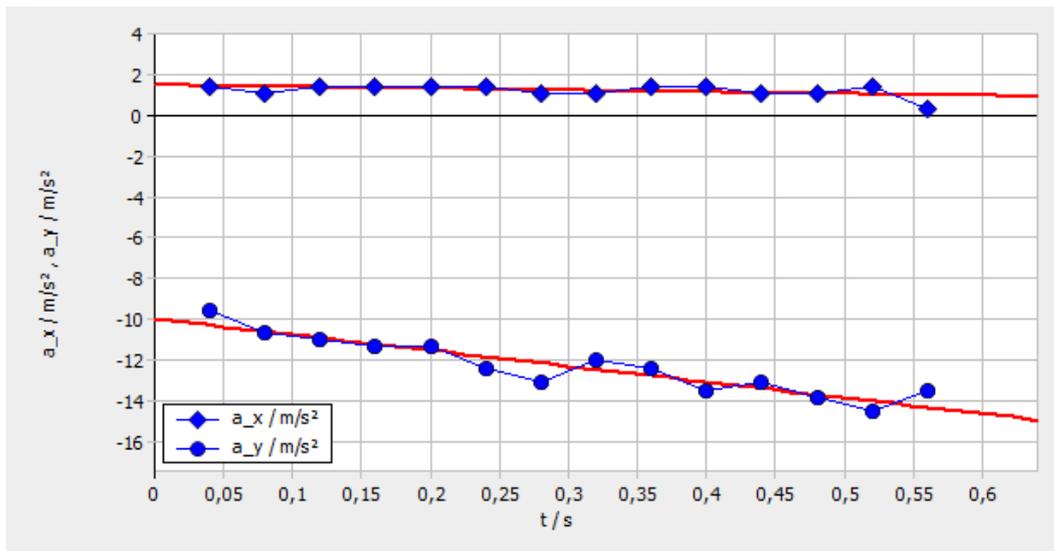


Figura 20: Gráfica $a_x(t)$ y $a_y(t)$ del lanzamiento de la figura 19. Las rectas representan los ajustes por regresión lineal

De los ajustes por regresión lineal de la figura 20 se obtiene que:

$$a_x \approx 1.47 \frac{m}{s^2}$$

$$a_y \approx -9.97 - 7.74t \approx -g + \Delta a_y t$$

Estas medidas no se pueden interpretar como una fuerza únicamente de rozamiento, ya que la aceleración horizontal es positiva y, aunque pequeña, no es cero. Además la aceleración vertical no es una constante (debería ser g) sino que depende del tiempo. Se intuye que posiblemente la rotación de la pelota junto con el viento pudieron haber generado dicho efecto. Por lo tanto, para evitar estos efectos que no se van a estudiar en este trabajo, los experimentos se hicieron en un espacio cerrado y sin imprimir rotación a la pelota.

4. Validez de una cámara panorámica. Resultados.

Con el siguiente procedimiento se averiguará la validez de cualquier dispositivo de grabación para las futuras mediciones, ya que se sospecha de la homogeneidad de los píxeles en los ejes de las cámaras panorámicas.

Para probar la homogeneidad de la cámara panorámica se realizaron 4 grabaciones de caída libre desde el origen de coordenadas con velocidad inicial cero, es decir, se deja caer la pelota y se hacen grabaciones. De esas 4, se harán 2 para cada sentido del dispositivo (vista normal y vista rotada 90° a la derecha).

La cámara se considerará válida si el efecto de la gravedad coincide en los 4 casos. Para ello se analizan las ecuaciones de posición y velocidad correspondientes al eje y .

4.1 Lanzamiento desde el origen con velocidad inicial nula.

Primero se efectúa el lanzamiento con la cámara en posición vertical (vista rotada), se hacen los lanzamientos 1 y 2 y se eligió para ello una pelota roja. La figura 21 muestra un momento del experimento con la elección de los ejes coordenados. Se puede apreciar que en estos lanzamientos la imagen presenta una rotación de 90° con respecto al experimento. Como se puede ver, el eje de coordenadas está corregido en la imagen desde el programa para que la descripción del movimiento sea la correcta.

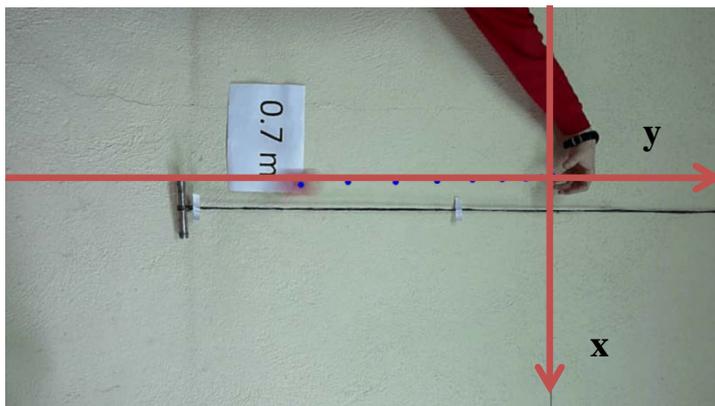


Figura 21: Lanzamiento de pelota roja grabado con la cámara en posición vertical. En rojo se indican los ejes coordenados.

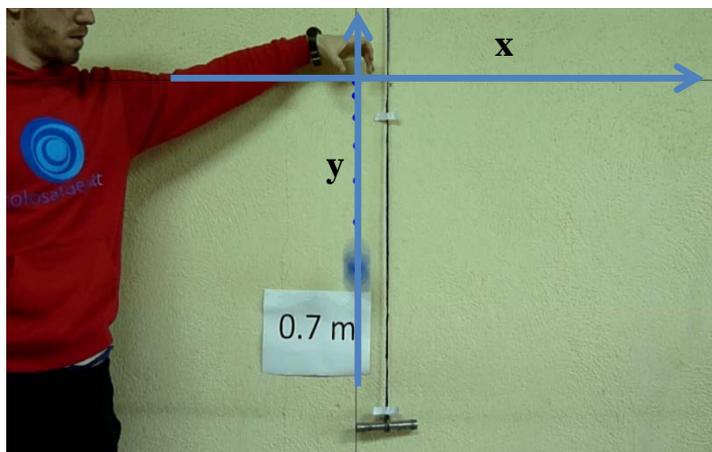


Figura 22: Lanzamiento de pelota azul grabado con la cámara en posición horizontal. En azul se indican los ejes coordenados.

4. Experimento para probar la homogeneidad de una cámara panorámica

Análogamente, se repite el experimento con la cámara en posición horizontal y para estos casos, con objeto de diferenciar los experimentos, se eligió una pelota de color azul. Se hicieron los lanzamientos 3 y 4 y en la figura 22 se indica la elección de los ejes de coordenados para este caso.

El software de análisis no ofrece la posibilidad de representar gráficamente más de un lanzamiento a la vez, y como lo que interesa es comparar los lanzamientos entre sí, se recurre al software Kaleidagraph para hacer el estudio. A continuación se presentan los resultados obtenidos en las mediciones para los cuatro lanzamientos, comenzando por la posición vertical del objeto frente al tiempo, seguido de la velocidad vertical y de la aceleración vertical (g).

En la figura 23 se representan simultáneamente los datos de $y(t)$ para los cuatro lanzamientos. En este caso la similitud de la curvatura de las cuatro parábolas nos lleva a concluir que efectivamente se cumplen las condiciones de homogeneidad.

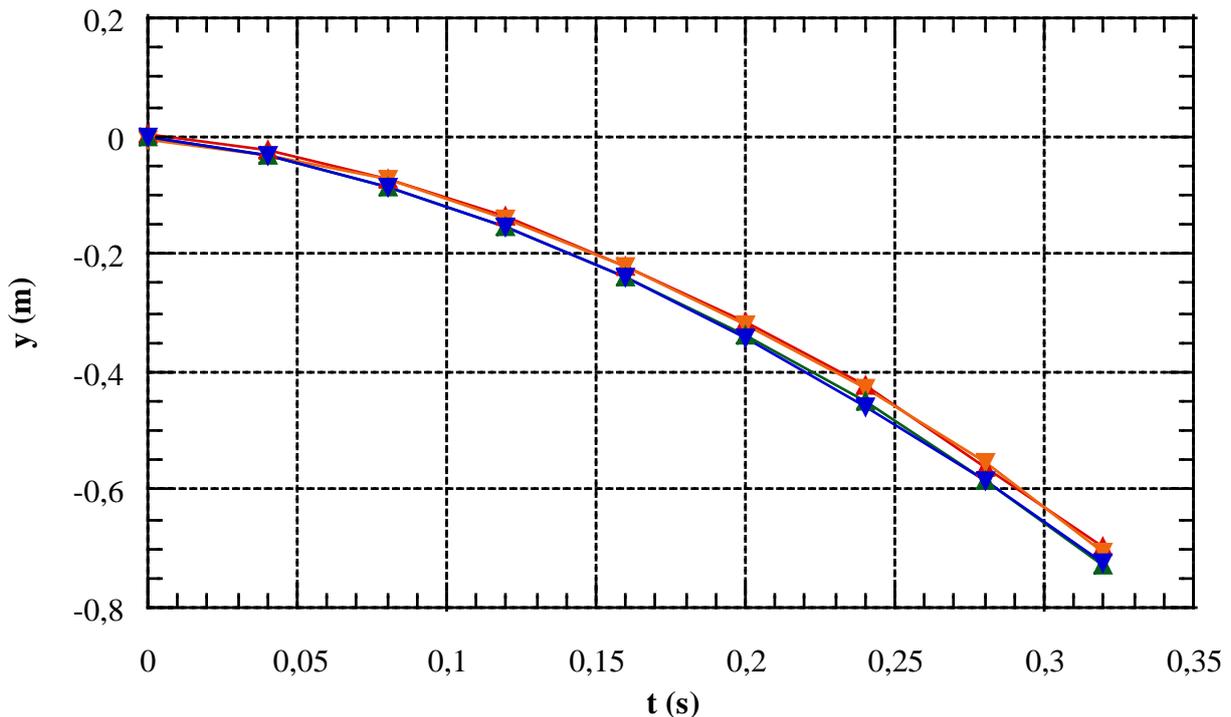


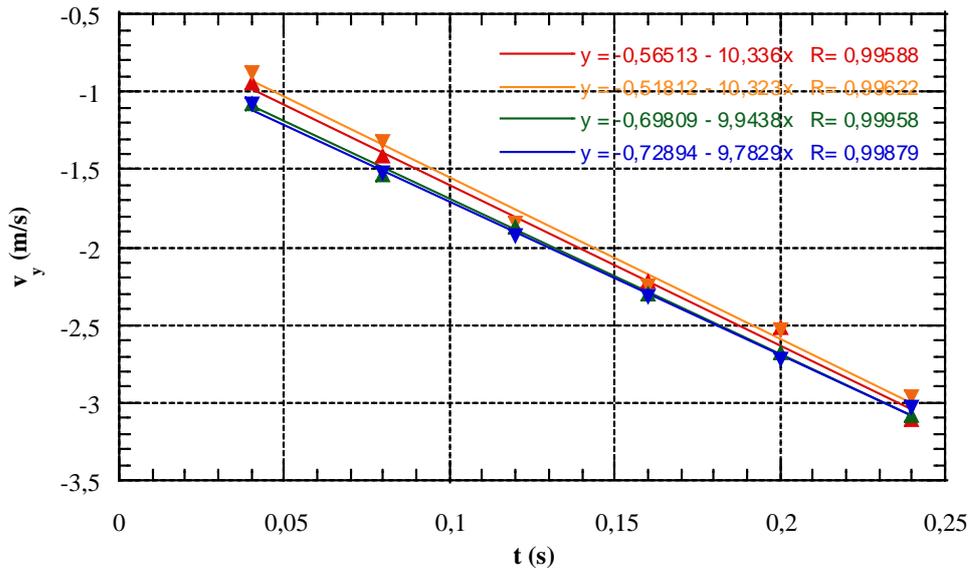
Figura 23: Representación simultánea de $y(t)$ de los dos lanzamientos con la cámara en vertical (rojo ▲/naranja ▼) y dos con cámara en horizontal (verde ▲/azul ▼).

Tal y como hemos comentado anteriormente, el software *measure Dynamics* calcula la velocidad y la aceleración por derivación numérica. Por lo que se espera que la representación de v_y y a_y también confirme la homogeneidad (figura 24).

En efecto, como se muestra en la figura 24a, los ajustes lineales de v_y dan como pendiente un valor comprendido entre -9.8 m/s^2 y -10.3 m/s^2 , valores compatibles con $g=-9.81\text{m/s}^2$. También representamos los datos de la aceleración en la figura 24b. En este caso, como puede observarse, hay una fuerte dispersión en los datos de a_y debido a que no hay suficientes fotogramas para hacer bien la doble derivación numérica. No se observan diferencias significativas entre los lanzamientos con la pelota roja y con la pelota azul y los resultados también son compatibles con $g=-9.81\text{m/s}^2$. Por lo tanto este dispositivo es considerado homogéneo y apto para experimentos ulteriores.

4. Experimento para probar la homogeneidad de una cámara panorámica

a)



b)

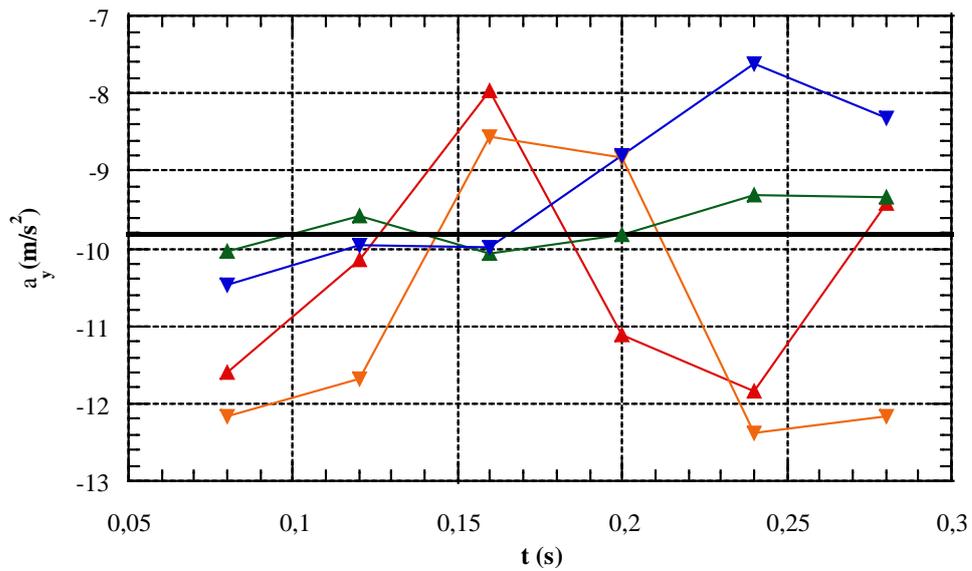


Figura 24: Representación simultánea de los dos lanzamientos con la cámara en vertical (rojo ▲/naranja ▼) y dos con cámara en horizontal (verde ▲/ azul ▼). En (a) se representa v_y con su ajuste lineal y en (b) a_y , la línea negra horizontal representa $g = -9.81$ m/s²

5. Experimento de tiro parabólico. Cálculo de errores.

Una vez confirmada la validez del dispositivo de grabación, se analiza un tiro parabólico con el objetivo de obtener información sobre la velocidad inicial y ángulo de tiro mediante “measure Dynamics” y Kaleidagraph. Una vez tengamos los valores de v_0 y α , definiremos altura máxima y alcance. Tal y como se ha comentado anteriormente, el tiro comienza en el origen de coordenadas en el instante $t = 0$.

La figura 25 presenta un instante del lanzamiento

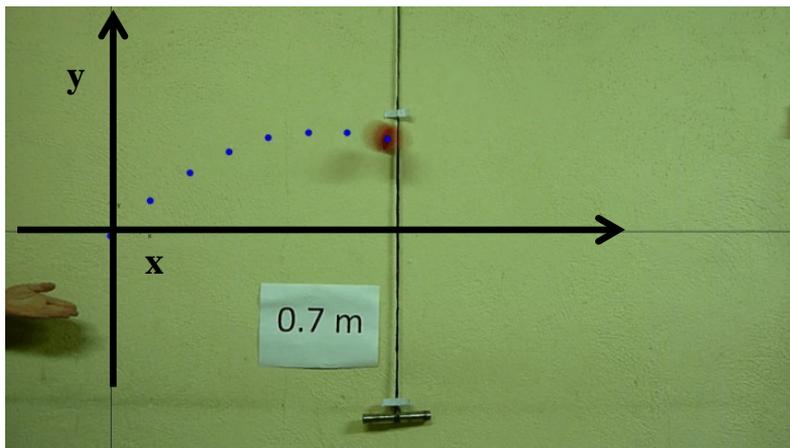
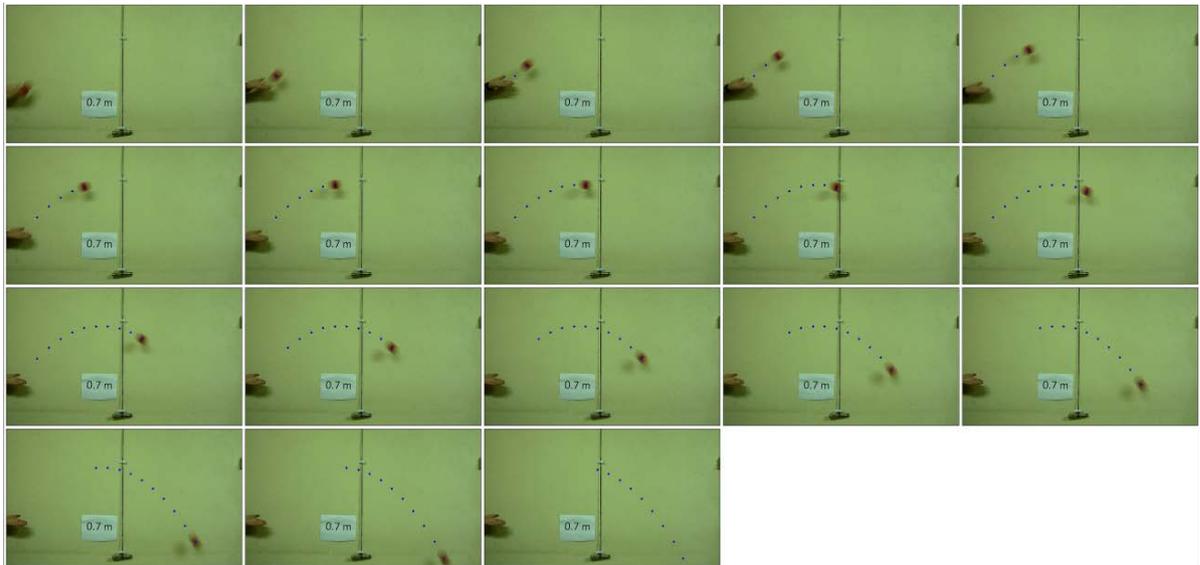


Figura 25: Ejemplo de lanzamiento de pelota en el que se indica la escala y el sistema de referencia

A continuación se ve la secuencia de fotogramas para este tiro.



En las siguientes subsecciones se miden 2 valores para el ángulo de tiro y 5 valores para la velocidad inicial mediante diferentes procedimientos.

5.1 Medida de ángulo de tiro mediante la herramienta del programa.

La primera medida del ángulo de tiro se obtiene mediante la funcionalidad de medir ángulo del programa que hemos explicado en la introducción.

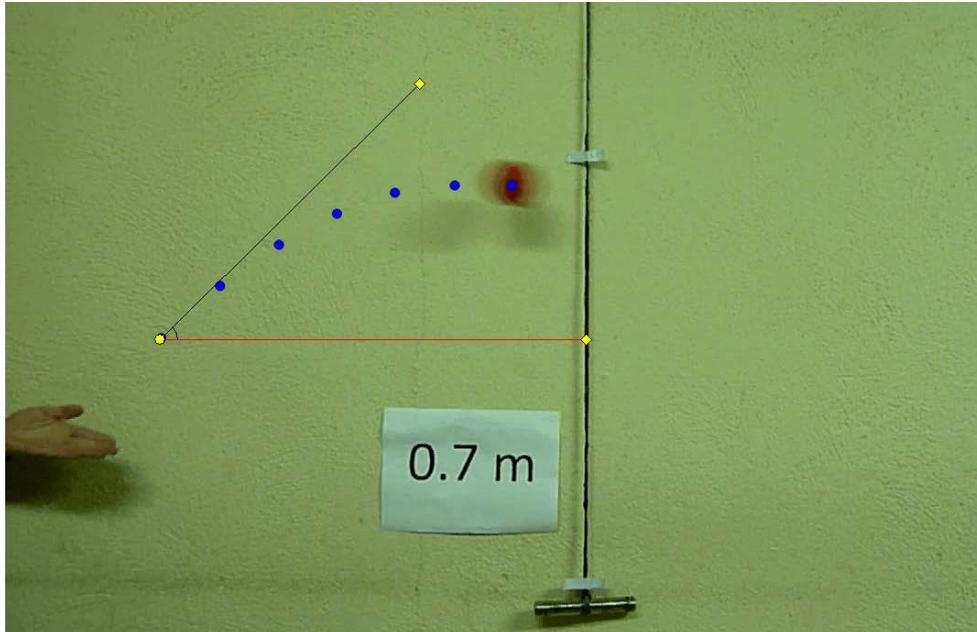


Figura 26: Medida del ángulo de tiro con la herramienta “medir ángulo”.

El programa permite la obtención de 4 decimales (44.7961) en el ángulo, pero debido a que no hay demasiados fotogramas en el experimento y a la ambigüedad al establecer correctamente la línea que define el ángulo, hemos considerado que existe un error dos décimas, es decir:

$$\alpha = 44.8^\circ \pm 0.2^\circ$$

Se hace hincapié en que el error proviene de la inexactitud a la hora de ajustar el ángulo con el programa, ya que el primer punto de referencia está relativamente lejos.

5.2 Medidas de la velocidad inicial mediante las ecuaciones de posición.

Una vez se tiene el valor del ángulo de la velocidad inicial, obtenemos varios valores para la velocidad inicial ajustando las ecuaciones de posición al gráfico que “measure Dynamics” presenta. Para ello iremos dando diferentes valores a v_0 hasta encontrar el mejor ajuste.

5.2.1. Obtención de v_0 a partir de la ecuación (4): $x(t)$.

La función de ajuste: $x(t) = 3.29 \cos(44.8) t$ está representado por la línea azul. En este caso, el error de dicho ajuste se ha estimado con otros dos ajustes a la baja con la línea roja y a la alza con la línea verde: $x(t) = (3.29 \pm 0.07) \cos(44.8) t$.

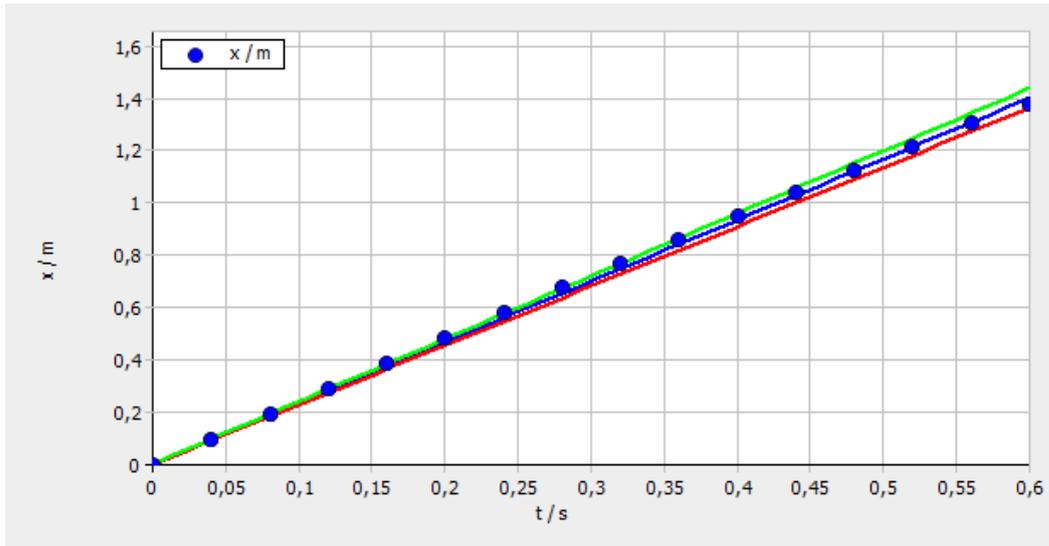


Figura 27: Gráfica $x(t)$ del lanzamiento de la figura 25. En azul el mejor ajuste por y las líneas roja y verde son las cotas de error por defecto y por exceso respectivamente.

Por lo tanto la primera estimación de velocidad queda en:

$$v_0 = (3.29 \pm 0.07) \frac{m}{s}$$

5.2.2. Obtención de v_0 a partir de la ecuación (5): $y(t)$

Utilizando el mismo procedimiento, considerando $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, la función de ajuste queda como:

$$y(t) = 3.08 \sin(44.8) t - \frac{1}{2} 9.81 t^2$$

Utilizando de nuevo el mismo procedimiento para estimar el error,

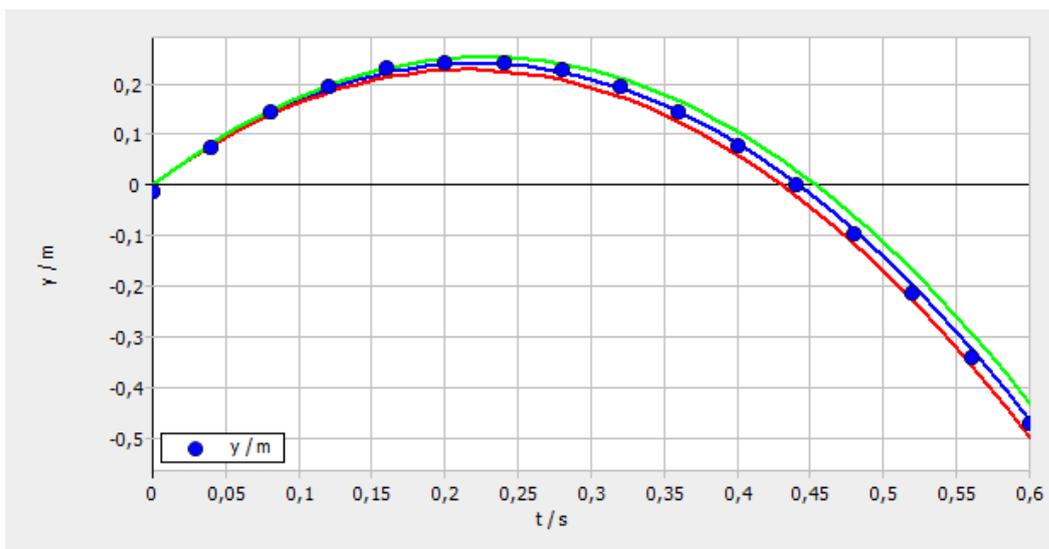


Figura 28: Gráfica $y(t)$ del lanzamiento de la figura 10. En azul el mejor ajuste y las líneas roja y verde son las cotas de error por defecto y por exceso respectivamente.

Se obtiene que el segundo valor de velocidad:

$$v_0 = (3.08 \pm 0.08) \frac{m}{s}$$

5.2.3. Obtención de v_0 a partir de la ecuación (6): $y(x)$

Siguiendo con el mismo procedimiento, la función de mejor ajuste:

$$y(x) = x \tan 44.8 - \frac{gx}{2(3.18 \cos 44.8)^2}$$

Utilizando el mismo procedimiento para calcular el error:

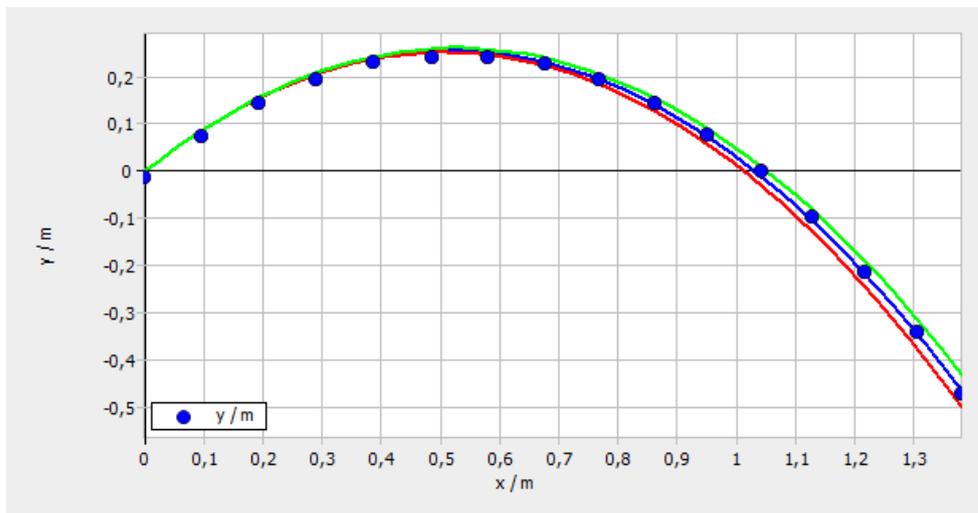


Figura 29: Gráfica $y(t)$ del lanzamiento de la figura 10. En azul el mejor ajuste y las líneas roja y verde son las cotas de error por defecto y por exceso respectivamente.

De este último ajuste obtenemos el tercer valor de la velocidad:

$$v_0 = (3.18 \pm 0.03) \frac{m}{s}$$

5.3 Medida de ángulo y velocidad inicial desde las ecuaciones de velocidad.

También es posible un análisis utilizando las ecuaciones de velocidad. La ventaja de este procedimiento es que las ecuaciones son aún más simples, pero hay que tener en cuenta que el programa, a la hora de calcular las velocidades mediante la derivación numérica, añade un error.

5.3.1 Obtención de la función de ajuste de la ecuación (9): $v_x(t)$

La función de ajuste:

$$v_x = (2.3 \pm 0.2) \frac{m}{s}$$

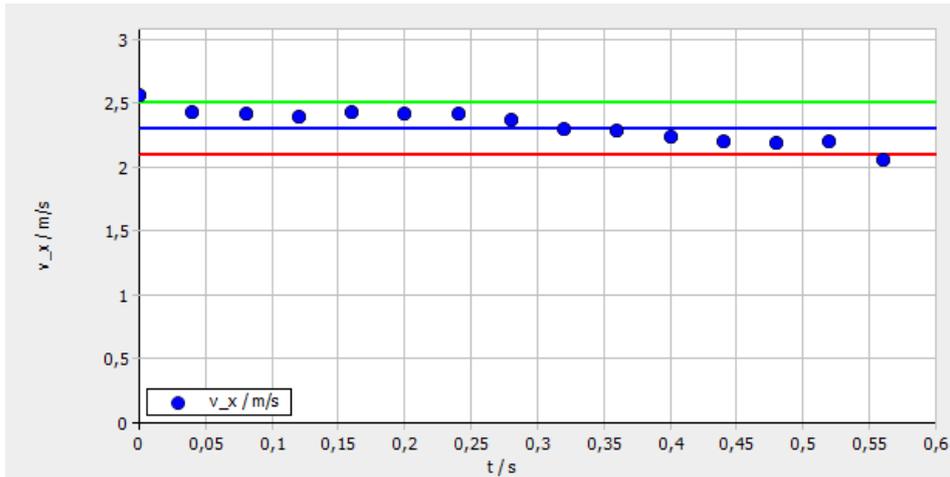


Figura 30: Gráfica $v_x(t)$ del lanzamiento de la figura 25. En azul el mejor ajuste y las líneas roja y verde son las cotas de error por defecto y por exceso respectivamente.

5.3.2 Obtención de la función de ajuste de la ecuación (10): $v_y(t)$.

La función de ajuste:

$$v_y(t) = (2.3 \pm 0.2) - 10.1t$$

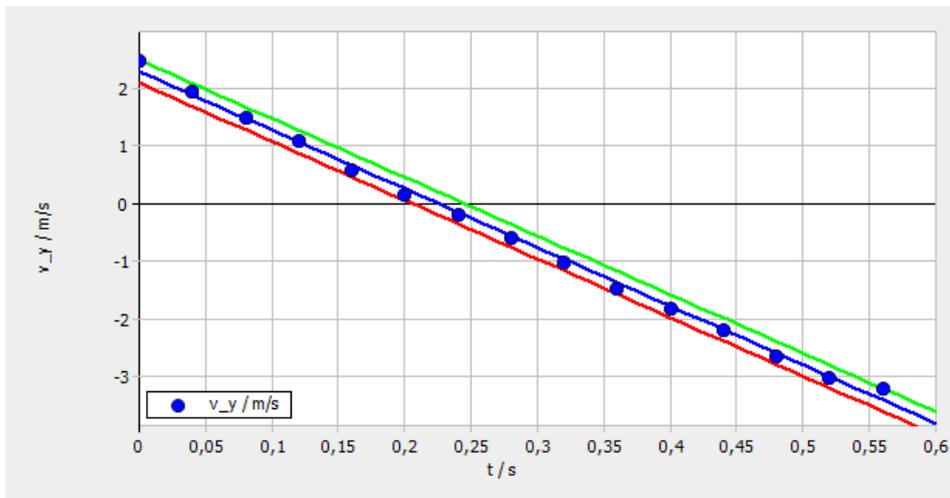


Figura 31: Gráfica $v_y(t)$ del lanzamiento de la figura 25. En azul el mejor ajuste y las líneas roja y verde son las cotas de error por defecto y por exceso respectivamente.

5.3.3 Cálculo del ángulo de tiro y velocidad inicial.

Partiendo de las ecuaciones 9 y 10, y utilizando los ajustes logrados, se puede lograr el ángulo de tiro:

$$\tan \alpha = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2.3}{2.3} = 1 \pm 0.1 \Rightarrow \alpha = (45^\circ \pm 3^\circ)$$

Una vez calculado la tercera estimación del ángulo, se procede a calcular las dos estimaciones de la velocidad inicial teniendo en cuenta las ecuaciones 9 y 10.

$$v_0 = \frac{2.3}{\sin 45} = (3.3 \pm 0.3) \frac{m}{s}$$

$$v_0 = \frac{2.3}{\cos 45} = (3.3 \pm 0.3) \frac{m}{s}$$

En este caso las dos estimaciones son idénticas.

5.4 Medida de ángulo de tiro y velocidad mediante KaleidaGraph.

Otro procedimiento para estimar el ángulo y la velocidad inicial es ajustar la ecuación (6) de la trayectoria mediante KaleidaGraph. Los parámetros a ajustar se encuentran tanto en el término lineal, como en el término cuadrático. Del término lineal obtendremos un valor para el ángulo y después utilizaremos este dato para extraer el valor de la velocidad inicial del término cuadrático. Para conseguir los datos para hacer el ajuste, hay que trasladar la información que contiene el archivo Excel que crea el programa a la tabla de datos del KaleidaGraph.

El ajuste se ve en la figura 32.

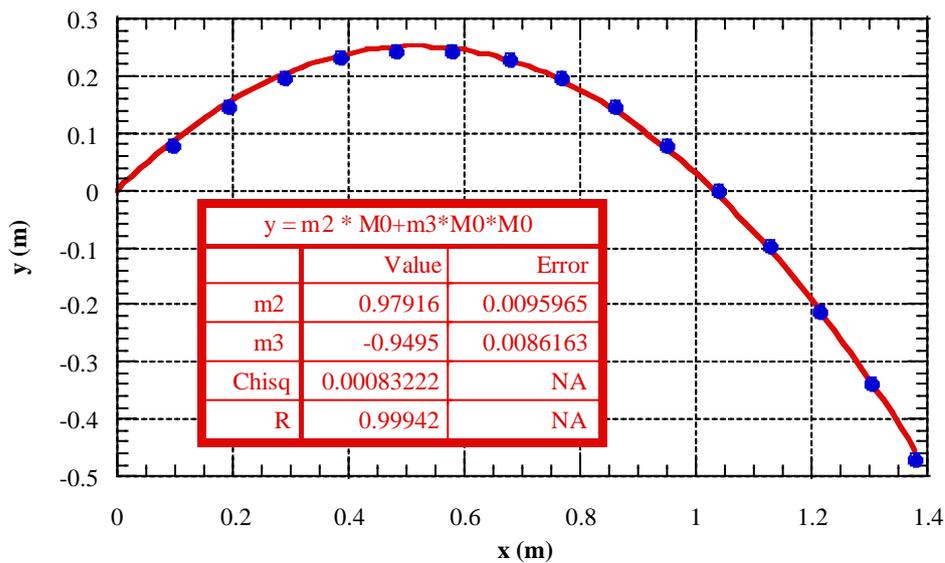


Figura 32: Gráfica $y(x)$ del lanzamiento de la figura 25 con el ajuste polinómico realizado con el programa de gráficos KaleidaGraph.

Del coeficiente lineal se obtiene:

$$\tan \alpha = 0.98 \pm 0.01 \Rightarrow \alpha = 44.4^\circ \pm 0.3^\circ$$

Del coeficiente cuadrático se obtiene:

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0.950 m^{-2}$$

Considerando $g=9.81$ y $\alpha=44.4$, el valor de la velocidad inicial:

$$v_0 = (3.18 \pm 0.02) \frac{m}{s}$$

5.5 Análisis de la aceleración

Por último si se considera la aceleración, de este apartado tampoco obtenemos nueva información, por lo tanto, debido a la calidad de los gráficos, simplemente se comprueba que los valores son los esperados.

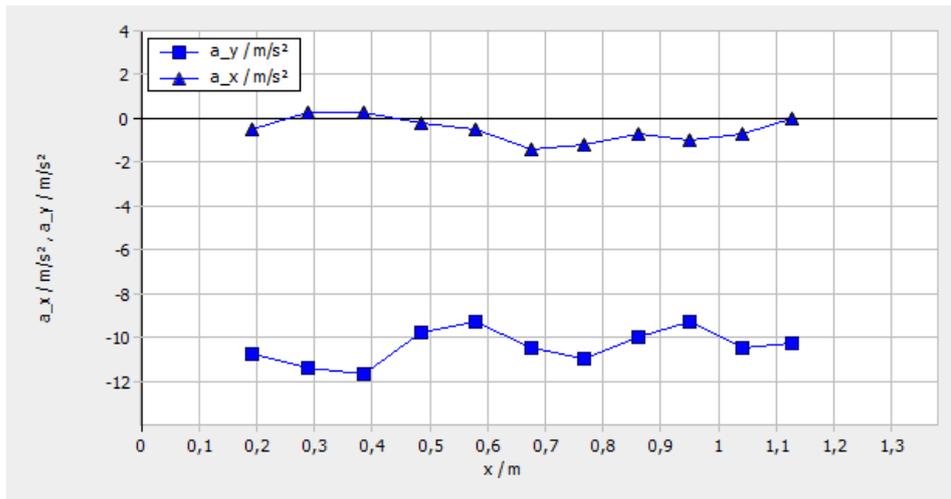


Figura 33: Gráfica $a_x(t)$ y $a_y(t)$ del lanzamiento de la figura 25.

En este caso se observa que el valor de aceleración horizontal fluctúa alrededor del cero y que la aceleración vertical alrededor de diez. Puesto que en este caso los errores en la derivación son aún mayores debido a la escasez de fotogramas, los siguientes valores representados son considerados válidos.

5.6 Resumen de medidas, alcance y altura máxima.

En resumen, estas son las medidas hechas:

Procedimiento	v_0 (m/s) experimental	Δv_0 (m/s)	v_0 (m/s) resultado final
A partir de $x(t)$	3.29	0.07	$v_0=3.2\pm 0.2\text{m/s}$
A partir de $y(t)$	3.08	0.08	
A partir de $y(x)$	3.18	0.03	
A partir de $v(x)$	3.3	0.3	
A partir de $v(y)$	3.3	0.3	
A partir de $y(x)$ en KaleidaGraph	3.21	0.02	

Tabla 2: Resultados de la medida experimental de v_0 por los procedimientos indicados en el texto y resultado final

Procedimiento	α (°) experimental	$\Delta\alpha$ (°)	α (°) resultado final
Medida directa	44.8	0.2	$\alpha=44.5^\circ\pm 0.4^\circ$
A partir de v_x y v_y	45	3	
A partir de $y(x)$ en KaleidaGraph	44.4	0.3	

Tabla 3: Resultados de la medida experimental de α por los procedimientos indicados en el texto y resultado final

El resultado final se ha deducido de manera que abarcara todo el rango de los datos experimentales. Como ya se ha previsto, los ajustes sobre las ecuaciones de velocidad presentan un error mucho mayor tanto en v_0 como en α . Por lo tanto, no se han tenido en cuenta a la hora de calcular el valor final. Comentar que las medidas hechas con Kaleidagraph confirman que la información obtenida mediante “measure Dynamics” es válida.

En este punto podemos asegurar que la velocidad inicial se encuentra entre 3.0-3.4 m/s. Para calcular el alcance y la altura máxima se escoge $v_0 = 3.2 \frac{m}{s}$ y $\alpha = 44.5^\circ$ y se utilizan las ecuaciones (7) y (8):

Si vamos a la tabla de datos que tiene creado el programa, y nos fijamos en el valor máximo de la columna de la y , como se observa en la tabla 4, la altura máxima que recoge es de:

$$h_{max} = 0.24m$$

t / s	x / m	y / m	v_x / m/s	v_y / m/s	a_x / m/s ²	a_y / m/s ²
0,08	0,19	0,14	2,42	1,50	-0,48	-10,72
0,12	0,29	0,20	2,40	1,08	0,25	-11,41
0,16	0,39	0,23	2,44	0,59	0,25	-11,64
0,20	0,48	0,24	2,42	0,15	-0,23	-9,75
0,24	0,58	0,24	2,42	-0,19	-0,48	-9,28
0,28	0,68	0,23	2,38	-0,59	-1,44	-10,47
0,32	0,77	0,20	2,30	-1,03	-1,19	-10,94
0,36	0,86	0,15	2,28	-1,47	-0,70	-9,98

Tabla 4: Fragmento de la tabla en el que vemos la altura máxima de la pelota.

Análogamente, si buscamos el dato de R nos fijaremos en el valor de la comuna x en la que y=0 (tabla 5).

t / s	x / m	y / m	v_x / m/s	v_y / m/s	a_x / m/s ²	a_y / m/s ²
0,36	0,86	0,15	2,28	-1,47	-0,70	-9,98
0,40	0,95	0,08	2,25	-1,83	-0,95	-9,27
0,44	1,04	0,00	2,21	-2,21	-0,72	-10,45
0,48	1,13	-0,10	2,19	-2,66	0,00	-10,22

Tabla 5: Fragmento de la tabla en el que vemos el alcance de la pelota.

En este caso obtenemos el dato exacto:

$$R = 1.04m$$

En el caso particular en el que no exista fotograma en y=0, tenderemos que recurrir a hacer una interpolación lineal.

Resumiremos los resultados en la tabla 6.

$h_{max}(m)$	$h_{max} = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \alpha}{2g} (m)$	R(m)	$R = \frac{v_0^2 \text{sen}(2\alpha)}{g}$
0.24	0.26	1.04	1.04

Tabla 6: Valores experimentales y teóricos de altura máxima y alcance respectivamente.

6. Estudio del choque cuasielástico de una pelota de tenis sobre suelo horizontal liso.

Cuando se deja caer una pelota sobre el suelo liso, se observa que la pelota efectúa varios botes de altura cada vez más baja hasta que se para. Si los botes fueran totalmente elásticos, la pelota seguiría botando a la misma altura indefinidamente. Por ello se dice que el choque es cuasielástico. Para describir esta pérdida de energía es necesario recurrir a la existencia de un coeficiente de restitución cuya definición viene explicada en la referencia [4] y resumiremos brevemente a continuación.

Los datos de la pelota utilizada que es una pelota de tenis estándar son:

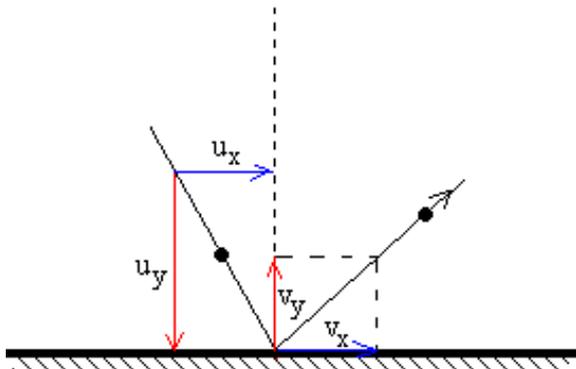
Diámetro: 64.21 mm

Masa: 51.29708g

Fueron medidos con un calibre y una balanza de precisión.

6.1. Introducción teórica: caída libre y sucesivos rebotes en plano horizontal.

En este modelo, se hace la hipótesis de que cuando una pelota rebota sobre una superficie rígida, la componente horizontal se mantiene constante.



$$\begin{aligned} v_x &= u_x \\ v_y &= -e u_y \end{aligned} \quad (13)$$

Figura 34: Esquema de la hipótesis del modelo.

Donde e es el coeficiente de restitución. Teniendo en cuenta la relación (13), el análisis de la cinemática comienza en la altura h_0 , es decir, en el instante en el que la pelota no lleva velocidad inicial con componente vertical.

6.1.1 Medida del coeficiente de restitución e y del alcance de cada bote.

El tiempo t_n que pasa la pelota en el aire entre hasta el choque número n viene dado por:

$$t_n = 2t_0 e^n \quad (14)$$

Donde $t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ y $n = (1, 2, 3, \dots)$ es el tiempo que tarda la pelota para caer desde la altura h_0 inicial hasta el suelo. En la figura 35 se puede identificar t_n con facilidad. Si se toman los logaritmos de la ecuación (14):

$$\ln(t_n) = n \ln e + \ln(2t_0) \quad (15)$$

Y si se representa gráficamente $\ln(t_n)$ en función de n , de la pendiente se obtiene el factor de restitución.

Si a la pelota se le proporciona una velocidad inicial horizontal v_x , el alcance de cada bote viene dado por:

$$R_i = v_x t_i \quad (16)$$

Donde $(i = 0, 1, 2, 3, \dots)$.

6.1.2 Medida de altura y pérdida de energía en los sucesivos botes.

Si se considera que la pelota no tiene velocidad inicial horizontal cuando se encuentra en la altura h_0 , aplicando el principio de conservación de la energía se obtienen fácilmente la altura de la pelota en los sucesivos rebotes (figura 35):

$$h_n = e^{2n} h_0 \quad (17)$$

Y la pérdida de energía mecánica (cinética + potencial) en los sucesivos rebotes es:

$$\Delta E_n = e^{2(n-1)}(e^2 - 1)mgh_0 \quad (18)$$

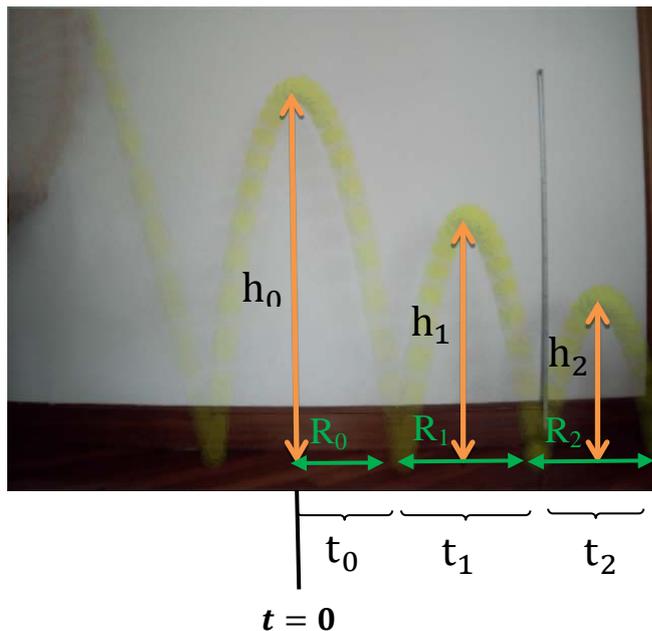


Figura 35: Imagen estroboscópica de un lanzamiento, indicando la notación utilizada.

Las ecuaciones (17) y (18) no deberían adecuarse a nuestras medidas, ya que nuestros lanzamientos tienen velocidad inicial horizontal. Pero cuando dicha velocidad es relativamente pequeña $v_x \approx 0$, el término de energía cinética $\frac{1}{2}mv_x^2$ y $\frac{1}{2}mv_x v_y$ son despreciables frente al término de energía potencial y las ecuaciones mencionadas son válidas.

Tal y como se ha visto, los únicos parámetros independientes que se han utilizado en este introducción teórica son la altura inicial h_0 , el factor de restitución e y la velocidad horizontal v_x .

6.2. Lanzamiento 1: la pelota da 4 botes

En este experimento se lanzó la pelota de tenis y ésta efectuó 4 botes. La imagen estroboscópica del lanzamiento se indica en la figura 36



Figura 36: Lanzamiento 1 de una pelota de tenis que efectúa 4 botes.

Para saber si la pelota se comporta como predice el modelo y cumple las ecuaciones (15) y (16), es necesario comprobar si la primera hipótesis de la teoría es válida, es decir, que la componente horizontal de la velocidad es constante.

La figura 37 permite asegurar que sí se cumple esta condición, además: $v_x \approx 0.6 \text{ m/s}$ por lo tanto la teoría planteada es válida para este caso.

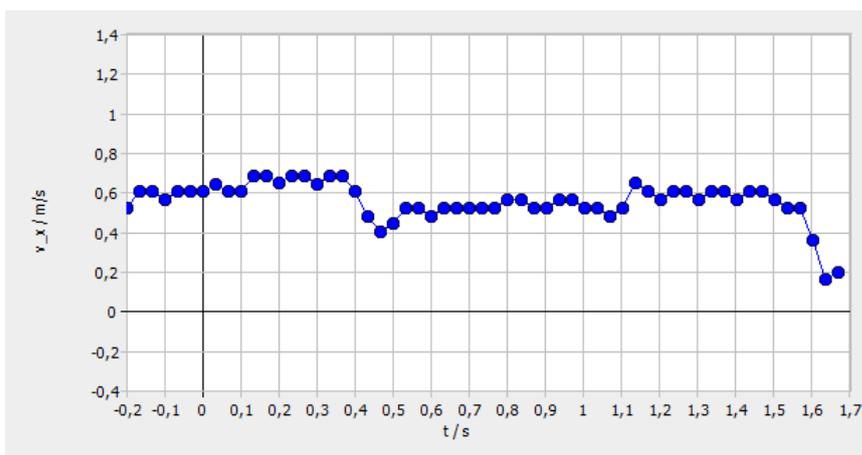


Figura 37: Comprobación de la conservación de la velocidad horizontal para el lanzamiento 1

Situamos el origen de coordenadas en el suelo y el origen de tiempos justo cuando la pelota alcanza su punto más alto después del bote inicial (ver figura 38). En estas condiciones, según lo indicado en el apartado anterior, representando y frente a t , se observan los datos de t_n .

6. Estudio del choque cuasielástico de una pelota de tenis sobre suelo liso

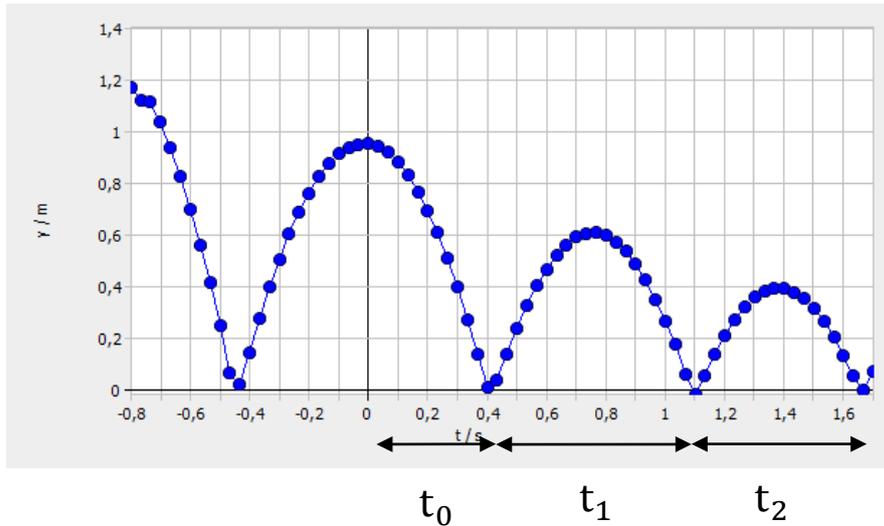


Figura 38: Posición y de la pelota en lanzamiento 1. En el gráfico se indica la definición de t_n .

Análogamente representando y frente a x se observan los datos de R_0 y R_i para $i=1, 2, 3$ el alcance de los sucesivos botes (figura 39).

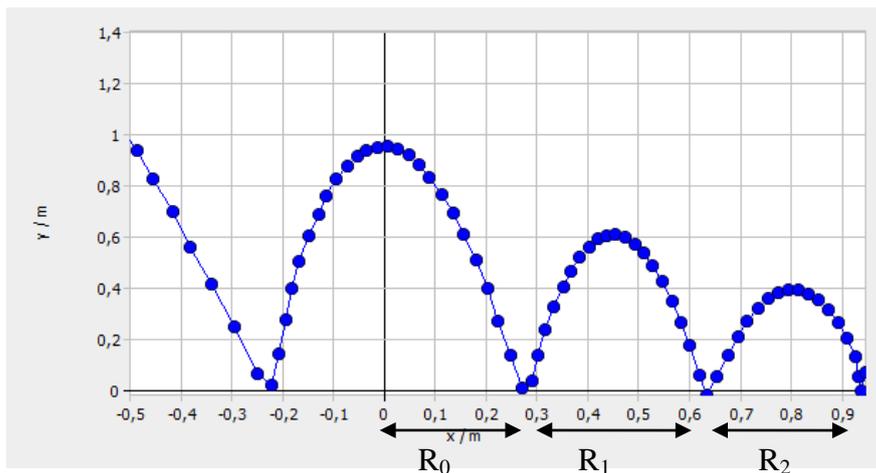


Figura 39: Trayectoria de la pelota en lanzamiento 1. En el gráfico se indica la definición de R_i .

Los datos sobre la altura inicial h_0 y los h_n se pueden observar mediante las dos figuras (38) y (39).

En la tabla 8 se recogen los datos experimentales del lanzamiento 1 en donde se ha añadido la columna $\ln t_n$ que permitirá calcular el coeficiente e.

n	$t_n(s)$	h_n	R_n	$\ln t_n$
0	0.4005	0.9568	0.2703	---
1	0.7009	0.6081	0.3621	-0.3554
2	0.5674	0.3946	0.3054	-0.5667

Tabla 7: Resultados experimentales del lanzamiento 1 para cada bote.

Calculando la pendiente de $\ln t_n$ frente a n y, a partir de la ecuación (17), se obtiene la primera estimación del coeficiente de restitución:

$$\ln e = \frac{\Delta \ln t_n}{\Delta n} = \frac{\ln t_2 - \ln t_1}{2 - 1} = -0.2113 \Rightarrow e = 0.8095$$

Como hemos utilizado únicamente dos puntos, no podemos estimar el error de la magnitud e . A continuación se hace un segundo experimento con más botes para así conseguir una mejor estimación de del factor de restitución.

6.3. Lanzamiento 2: la pelota da 6 botes

En este segundo experimento se lanzó la pelota de tenis y ésta efectuó 6 botes. La imagen estroboscópica del lanzamiento 2 se indica en la figura 40

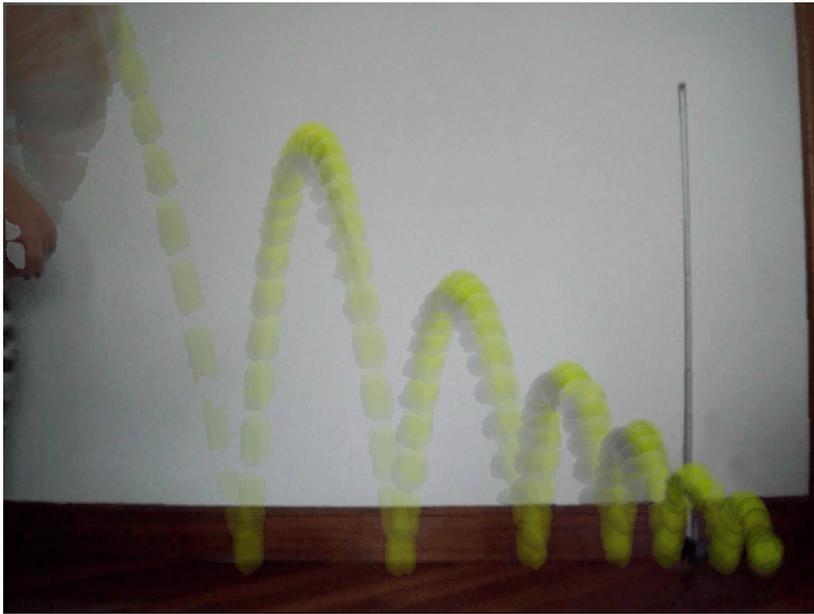


Figura 40: Lanzamiento 2 de una pelota de tenis que efectúa 6 botes antes de detenerse.

Tal y como hemos hecho con el primer lanzamiento se comienza de nuevo con la verificación de la hipótesis. Representaremos v_x en la figura 41:

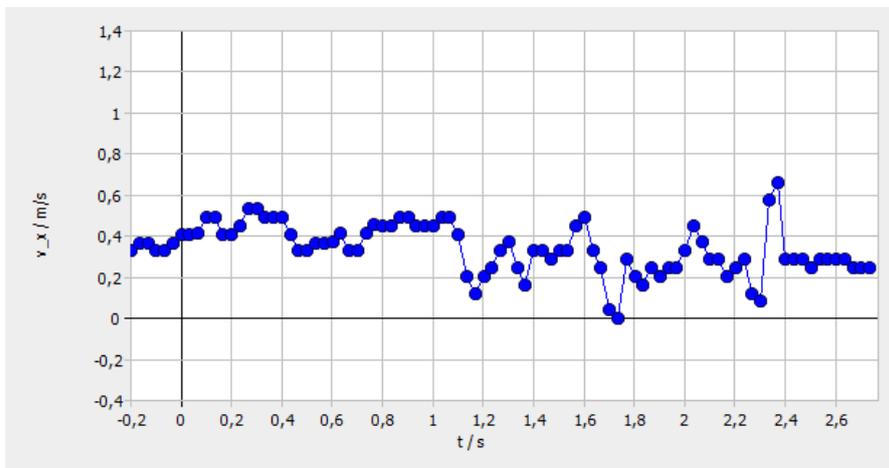


Figura 41: Comprobación de la conservación de la velocidad horizontal para el lanzamiento 2

En este caso, la distorsión es aparentemente debida a los problemas que tiene a la hora de la derivación numérica. Además, aunque se aprecie un ligero descenso, se considera que en esta ocasión también se cumple la hipótesis para que se cumpla la teoría con un valor medio de $v_x \approx 0.3 \text{ m/s}$ que se mantiene constante.

De la misma forma que en el caso anterior situamos el origen de coordenadas en el suelo y el origen de tiempos justo cuando la pelota alcanza su punto más alto después del bote inicial (ver figura 42).

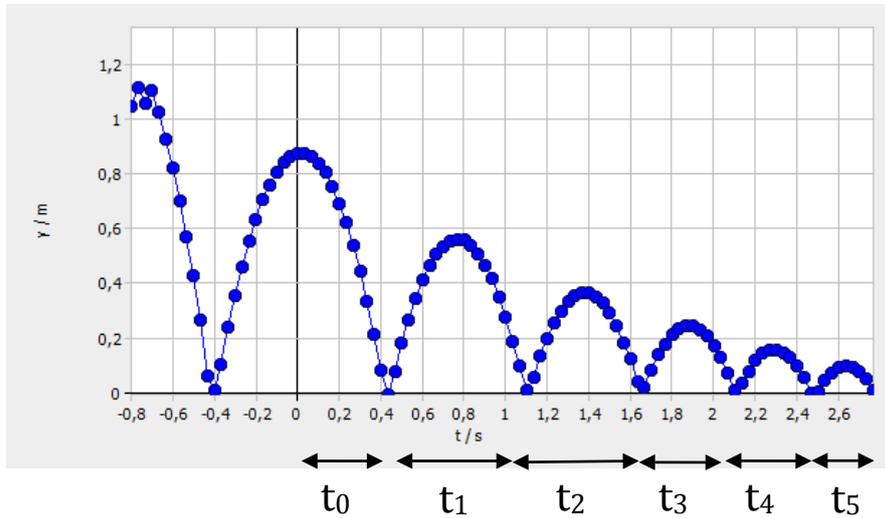


Figura 42: Altura y respecto al tiempo del lanzamiento 2. En el gráfico se indica la definición de t_n

Análogamente representando y frente a x se observan los datos de R_0 y R_i para $i=1, 2, 3$ el alcance de los sucesivos botes (figura 43).

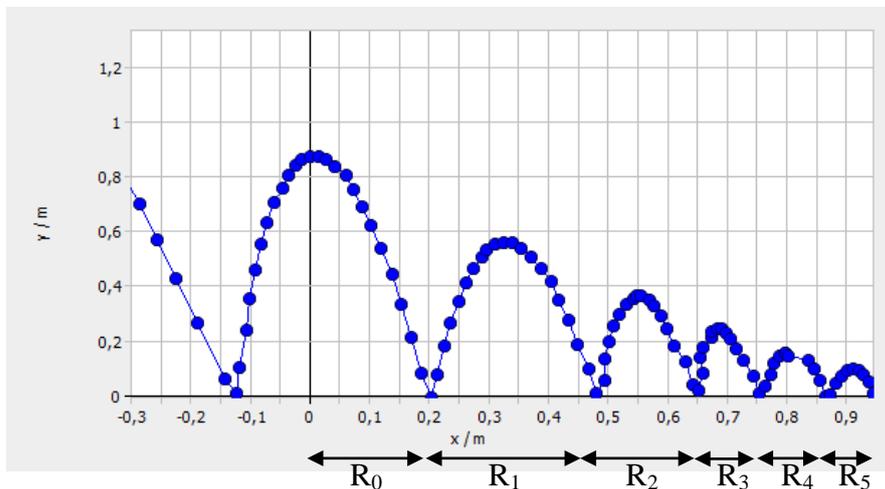


Figura 43: Trayectoria de la pelota en lanzamiento 2. En el gráfico se indica la definición de R_n

Los datos sobre la altura inicial h_0 y los h_n se pueden observar mediante las dos figuras (42) y (43).

En la tabla 8 se recogen los datos experimentales del lanzamiento 2 en donde se ha añadido la columna $\ln t_n$ que permitirá calcular el coeficiente e .

n	t_n (s)	h_n (m)	R_n	$\ln t_n$
0	0.4339	0.8764	0.2033	
1	0.6675	0.5604	0.2775	-0.4042
2	0.5674	0.3654	0.1703	-0.5667
3	0.4338	0.2445	0.1016	-0.8352
4	0.3672	0.1566	0.1127	-1.0018
5	0.3003	0.0989	0.0797	-1.2030

Tabla 8: Resultados experimentales del lanzamiento 2 para cada bote.

Representando $\ln t_n$ frente a n y, a partir de la ecuación (17), se obtiene la segunda estimación del coeficiente de restitución:

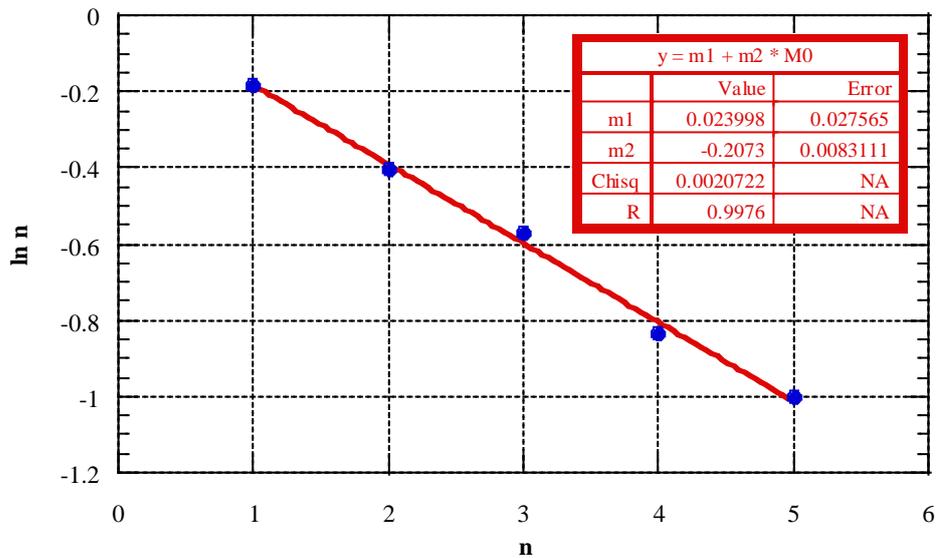


Figura 44: Ajuste por mínimos cuadrados para el cálculo de e .

De ahí se obtiene que:

$$\ln e = -0.207 \pm 0.008 \Rightarrow e = 0.81 \pm 0.04$$

Con el valor de e y $h_0=0.8764\text{m}$, podemos calcular los valores teóricos de h_n a partir de la ecuación (17). En la tabla 9 se representan los datos de h_n experimental y teóricos. Como se puede ver, las diferencias que existen son suficientemente pequeñas para concluir que $v_x \approx 0.3\text{m/s}$ es lo suficientemente pequeño para poder usar las ecuaciones (17) y (18) para describir correctamente el experimento no solo cualitativamente sino incluso cuantitativamente.

n	h_n (m)	$h_n = e^{2n}h_0$ (m)	$h_n-h_n(\text{te.})$ (m)
0	0.8764		
1	0.5604	0.5750	0.015
2	0.3654	0.3773	0.012
3	0.2445	0.2475	0.003
4	0.1566	0.1624	0.006
5	0.0989	0.1065	0.008

Tabla 9: Comparación de valores experimentales y teóricos de la altura máxima tomando $e=0.81$. Las diferencias son del orden de 0.5cm.

6. Estudio del choque cuasielástico de una pelota de tenis sobre suelo liso

La predicción de los tiempos de duración de cada bote es también razonablemente buena como se recoge en la tabla 10. En este caso también se ha tenido en cuenta que $h_0=0.8764$ y por lo tanto los valores teóricos se han conseguido desde la ecuación (14):

$$t_n = 2t_0e^n \text{ donde } t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

n	t_n (s)	t_n (teórico) (s)	t_n-t_n(te.)(s)
0	0.4339	0.4227	0.011
1	0.6675	0.6848	-0.017
2	0.5674	0.5547	0.013
3	0.4338	0.4493	-0.016
4	0.3672	0.3639	0.003
5	0.3003	0.2948	0.006

Tabla 10: Comparación de los valores experimentales y teóricos de t_n tomando $e=0.81$ (ver explicación en el texto).

Además, como $v_x \approx 0.3\text{m/s}$ con estos datos de t_n podemos obtener el alcance en cada bote R_n haciendo: $R_n \approx v_x t_n$. En la tabla 11 se representan estos cálculos comparados con los datos experimentales y sus diferencias.

n	R_n (m)	R_n (teórico) (m)	R_n-R_n(te.)(m)
0	0.2033	0.1268	0.076
1	0.2775	0.2054	0.072
2	0.1703	0.1664	0.039
3	0.1016	0.1348	-0.033
4	0.1127	0.1092	0.004
5	0.0797	0.0884	-0.009

Tabla 11: Comparación de los valores experimentales y teóricos de R_n tomando $e=0.81$ (ver explicación en el texto).

En este caso vemos que considerar la media de $v_x \approx 0.3 \frac{m}{s}$ para toda trayectoria y obviar el pequeño decrecimiento que tiene en cada intervalo t_n nos da diferencias notables en el alcance, especialmente cuando esta media no se ajusta a la realidad. Por lo tanto este modelo no es tan exacto para calcular el alcance de este lanzamiento.

6.4. Medida del ángulo subtendido por la velocidad en todo momento

En este apartado analizaremos el comportamiento del ángulo subtendido por la velocidad en los sucesivos botes, es decir α , y para ello elegiremos los datos del lanzamiento 2, ya que recoge más botes.

En el caso del lanzamiento 2, al analizar el ángulo correspondiente al módulo de la velocidad, se ha encontrado que la forma de cambiar su valor se mantiene en los distintos choques. Para observar esta evolución, se han utilizado los datos experimentales de la velocidad que nos proporciona “measure Dynamics” y teniendo en cuenta que

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} \quad (19)$$

hemos conseguido los valores experimentales. En un principio se piensa que lo conseguido no es un resultado intuitivo, ya que en cada choque la componente vertical de la velocidad disminuye mientras que la horizontal se conserva, y por ello se espera que los máximos y mínimos del ángulo se vayan acercando. Para aclarar dudas, se decide calcular el valor teórico del ángulo para poder compararlo con el experimental.

Poniendo el origen de tiempos cuando la pelota se encuentra en la altura $h_0 = 0.8764 \text{ m}$, y teniendo en cuenta la teoría sobre el factor de restitución, se hace el cálculo de los valores teóricos. Considerando la ecuación (14) para calcular los intervalos de tiempo, la ecuación (19) y que la velocidad horizontal es constante ($v_x = 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$), lo que hay que calcular es la evolución teórica de la velocidad vertical.

- v_y desde la altura inicial h_0 hasta el 1^{er} bote.

Como la velocidad inicial vertical es nula, $v_y = -gt$ y por lo tanto

$$\alpha = \arctan \frac{-gt}{v_x}$$

- v_y desde el 1^{er} bote hasta el 2^o

Después del primer bote la pelota tiene una velocidad inicial de $v_{y0} = gt_0e$. En consecuencia $v_y = gt_0e - g(t - t_0)$ y

$$\alpha = \arctan \frac{gt_0e - g(t - t_0)}{v_x}$$

- v_y desde el 2^o bote hasta el 3^o

Siguiendo el mismo procedimiento, después del tercer bote tiene una velocidad inicial de $v_{y0} = gt_0e^2$. En consecuencia $v_y = gt_0e^2 - g(t - t_0 - t_1)$ y

$$\alpha = \arctan \frac{gt_0e^2 - g(t - t_0 - t_1)}{v_x}$$

De esta forma podemos deducir la expresión general para α .

- Evolución de α desde el bote n hasta bote $n+1$.

$$\alpha = \arctan \frac{gt_0 e^n - g(t - \sum_0^{n-1} t_n)}{v_x}$$

El resultado de éste análisis teórico del comportamiento del ángulo α comparado con los datos experimentales se recogen en la figura 45.

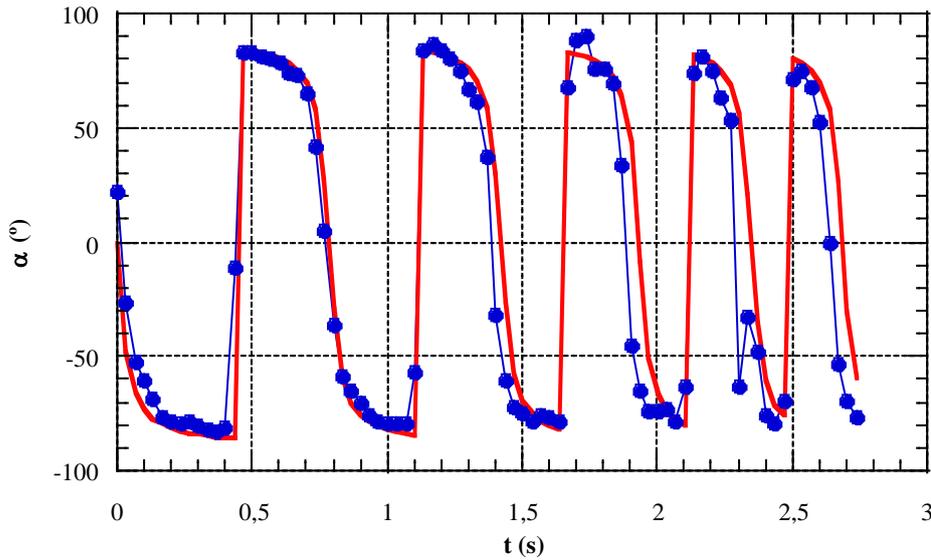


Figura 45: Comparación del comportamiento experimental (puntos azules●) con el teórico (línea roja—) en el que $e=0.81$ (ver explicación en el texto).

Como se ve en la figura 45 este modelo permite explicar correctamente la evolución del ángulo. Teniendo en cuenta el comportamiento teórico, se observa que después de cada bote el ángulo inicial α_0 se mantiene casi constante. Sus variaciones son muy pequeñas siendo de 84.4 en el primer bote y de 80.4 en el 5º y último. Esto indica que en un choque de esta naturaleza (cuasielástico) el ángulo en el choque es prácticamente el mismo.

7. Conclusiones:

- En este trabajo se ha utilizado el programa preparado para prácticas de laboratorio de Física llamado “measure Dynamics” que permite analizar numéricamente los experimentos grabados con una cámara.
- En particular se han diseñado y llevado a cabo dos experimentos para comprobar la homogeneidad de la cámara utilizada en las medidas del trabajo.
- En los resultados de tiro parabólico se ha estimado el error en la determinación tanto de la velocidad inicial como del ángulo de tiro.
- Se han estudiado los sucesivos botes de una pelota de tenis hasta que se para. El comportamiento de la pelota puede describirse como un choque cuasielástico en el que se ha determinado el coeficiente de restitución. Con dicho modelo se ha comprobado las medidas de los tiempos de duración y la altura máxima de cada bote y el comportamiento del ángulo.

8. Referencias

- [1] Programas de descargas y los tutoriales elaborados en la Facultad de Ciencia y Tecnología <https://www.dropbox.com/sh/86swyp7gvsh99zn/1mzoiabVsH>
- [2] Paul A. Tipler, Gene Mosca. *Física para la Ciencia y la Tecnología (tomo I, Quinta Edición)*. Editorial Reverté.
- [3] Franco García, Ángel. Física con ordenador. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/>
- [4] Franco García, Ángel. Caída libre y sucesivos rebotes. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/con_mlineal/restitucion/restitucion.htm#Descripci%C3%B3n
- [5] P. M. Fishbane, S. Gasiorowicz y S. T. Thornton. *Physics for scientists and engineers (Tercera Edición)* Editorial Pearson.