Gradu Amaierako Lana

Analisi dimentsionala. Zenbaki adimentsionalak eta aplikazioak

Julen Garro Beraza

2016ko otsailaren 22a

Gaien Aurkibidea

Taulen Zerrenda

Irudien Zerrenda

1 Sarrera eta helburuak

Analisi dimentsionalaren azterketaren lehen sustraiak XIX. mendean agertu ziren. Fourier-ek, 1822an idatzitako *Beroaren Teoria Analitikoa* [5] liburuan, *homogeneitate dimentsionala*ren ideia aurkeztu zuen. Haren arabera, edozein fenomeno natural guztiz deskriba zitekeen ekuazio dimentsionalki homogeneoak erabiliz soilik. Fourier izan zen dimentsio kontzeptua geometriatik fisikara hedatu zuen lehena.

Beranduago, Rayleigh-ek [10] ekarpen nabarmenak egin zituen analisi dimentsionala arlo desberdinetako problemetan aplikatuz. Hidrodinamikan egin zituen aurrerapenek eragin zuzena izan zuten XX. mendeko industria aeronautikoaren garapenean, esate baterako.

1883an Reynolds-ek [11] fluidoen jarioarekin lotutako modelaketa-esperimentuetan analisi dimentsionalaren printzipioak aplikatu zituen, eta Reynolds zenbakiaren erabilera ezagutarazi zuen. Zenbaki adimentsional horren balio numerikoaren arabera, aurresan daiteke sistema jakin batean jarioa laminarra ala zurrunbilotsua izango den.

XX. mendean, analisi dimentsionala modu zabalean aplikatu zen problema teoriko, teknologiko eta ingeniaritza-problemetan. 1914an, Buckingham-ek [3] edozein lege fisiko zenbaki adimentsionalak soilik erabiliz adieraz daitekeela frogatu zuen, zenbaki horiei π deituz. Formulazio horrek modelaketa-esperimentuak eta zenbakizko simulazioak egiteko oinarriak ezarri zituen. Vaschy [17], Riabouchinsky [12], Bridgman [1] eta beste hainbat zientzialari eta matematikarik ere ekarpen garrantzitsuak egin zituzten analisi dimentsionalaren alorrean.

Gaur egun, analisi dimentsionala nonahi erabiltzen da zientzian eta ingeniaritzan. Arlo desberdin askotan ditu aplikazioak: astrofisikan, elektromagnetismoan, aerodinamikan, itsasontzi eta espaziontzien diseinuan, bero- eta materia-transferentzian, eztandetan, erreakzio kimikoetan, datuen tratamenduan, erreaktore nuklearretako istripuen simulazioan, biologian, eta baita ekonomian ere.

Analisi dimentsionalak problema fisiko konplexuak beraien forma sinpleenera murrizteko metodo bat eskaintzen digu, analisi kuantitatiboak edo ikerketa esperimentalak burutu aurretik. Bridgman-ek (1969) honela azaldu zuen: “Analisi dimentsionalaren erabilera nagusia sistema fisiko baten aldagaien dimentsioen azterketatik, aldagai horien arteko erlazio posibleen itxurari buruzko zenbait muga ondorioztatzea da. Metodoa orokortasun handikoa eta matematikoki sinplea da.“

Tresna honi esker, aldagai dimentsionalen sorta bat erlazionatzen duen ekuazio bat beste ekuazio sinpleago baten bidez adieraz daiteke, azken honetako aldagaiak denak adimentsionalak izanik. Horrez gain, analisi dimentsionala aztergai dugun fenomenoari dagokion ekuazioa ezagutu gabe ere erabil daiteke. Horri esker, ikuspuntu esperimental batetik, fenomeno bat aztertzen bada aldagaiak elkarrekin nola erlazionatuta dauden jakiteko, lan gutxiago egin behar da analisi dimentsionala burutu ostean. Honen arrazoia hau da: ustez fenomenoan parte hartzen duten aldagaiak aldagai adimentsionalen kopuru txikiago batera murrizten dira, eta saiakuntza gutxiago egin behar dira emaitzak ondorioztatzeko.

Lan honen helburua analisi dimentsionala nola erabiltzen den modu sinplean azaltzea da. Lana hiru zatitan banatuta dago. Lehenengo atalean analisi dimentsionalaren oinarriak aurkezten dira, teorema garrantzitsuenak nola erabili eta problemak nola ebatzi deskribatuz. Bigarren zatian, jariakinen mekanika eta dinamikako problemetan askotan agertzen diren zenbaki adimentsional ezagunenak zerrendatzen dira, eta bakoitza zein kasutan den garrantzitsua azaltzen da. Bukatzeko, analisi dimentsionalaren aplikazio nagusia aztertzen da azken atalean: modelaketa.

2 Analisi dimentsionala

Lanaren lehen zati honetan analisi dimentsionalaren oinarriak aztertuko ditugu. Kontzeptu garrantzitsuak definitu ostean, analisi dimentsionalaren funtsezko teoremak aurkeztuko ditugu. Azkenik, problemak ebazteko teorema horiek nola erabili ikasiko dugu adibide argigarri batzuen laguntzaz.

2.1 Oinarrizko kontzeptuak

Analisi dimentsionalaren teorema nagusiak azaldu aurretik, oinarrizko kontzeptuak argi definituko ditugu, lan osoan zehar behin eta berriro erabiliko baititugu.

2.1.1 Dimentsioa, unitatea eta dimentsionalitatea

Dimentsio hitza magnitude fisiko baten funtsezko izaera adierazteko erabiltzen da, magnitudeak taldekatu ahal izateko. *Magnitude fisiko* bat, definizioz, neurketa bidez kuantifika daitekeen fenomeno, gorputz, edo substantzia baten propietate fisikoa da. Luzera, denbora eta masa magnitudeak, adibidez, izaeraz ezberdinak dira; ondorioz, dimentsio desberdina du bakoitzak.

Oinarrizko magnitude fisikoetako bat luzera da, gorputz materialen luzapena adierazten diguna. Luzerak, propietate fisiko gisa, unitate aukeraketarekiko independentea den berezko izaera du. Erabilitako unitateak aldatzen baditugu, luzeraren neurria aldatu egingo da, nahiz eta luzera propietatea bera aldaezin mantendu. Luzera bat izaten jarraitzen du metrotan zein beste edozein luzera-unitatetan neurtu.

Beraz, neurketarako erabilitako unitateen aldaketak propietate fisikoaren neurketari dagokion zenbakizko balioa aldatzen du, baina propietate fisikoa bera ez du aldatzen.

Arrazoi horregatik, garrantzitsua da *dimentsio* eta *unitate* kontzeptuak ondo bereiztea. Magnitude fisiko bakoitzak berezko *izaera* edo dimentsioa du, baina *unitatea* magnitude berdinak konparatzeko erabilitako neurria da. Bi magnitudek izaera desberdina badute (luzera eta masa, adibidez), magnitude hauen dimentsioak ez dira berdinak eta ezin dira konparatu. Baina biek dimentsio berdinak badituzte (bi luzera edo bi masa, esate baterako), magnitude hauen *kantitateak* konparagarriak dira.

Dimentsio bereko X_1 eta X_2 bi magnituderen kantitateak konparatzean, hiru aukera posible daude:

$$(a)\,\frac{X_1}{X_2} > 1, \qquad (b)\,\frac{X_1}{X_2} = 1, \qquad (c)\,\frac{X_1}{X_2} < 1 \tag{1}$$

Izendatzaileko X_2 magnitudea unitate egokia izan daiteke X_1 neurtzeko, eta U deitu dezakegu:

$$X_1 = \frac{X_1}{X_2} \cdot X_2 = \frac{X_1}{X_2} \cdot U, \tag{2}$$

non $\frac{X_1}{X_2}$ zenbaki *adimentsionala* X_1-en kantitate zehatza den X_2 unitatetan.

Argi dago unitatea bi magnitude berdin konparatzeko erabiltzen den neurri bat dela, eta ez dela magnitude baten berezko izaera edo dimentsioa.

Bereizketa hori argiago ikusteko, demagun l eta t luzera baten eta denbora baten neurketak direla, hurrenez hurren. Nahiz eta bien neurketak zenbakien bidez adierazi, ulertzen dugu luzerak eta denborak izaera desberdina dutela. Hori matematikoki adierazteko, Maxwell-ek proposatutako notazioa erabiliko dugu. Aldagai fisiko baten *dimentsionalitateak* neurtutako propietatearen izaerari buruzko informazioa ematen digu. Luzera dimentsioa L letraren bidez eta denbora dimentsioa T-ren bidez adieraziko ditugu, eta aldagai baten dimentsionalitatea kortxeteen bidez. Horrela, aipatutako l eta t aldagaien dimentsionalitateak hauek dira:

$$[l] = L \qquad ; \qquad [t] = T \tag{3}$$

Magnitude batzuk (abiadura, adibidez) beste magnitude oinarrizkoago batzuen konbinazioak dira. Hau ezaguna dugu, askotan ikusi baitugu v abiaduraren dimentsionalitatea ondoko eran idatzita:

$$[v] = \frac{[l]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1} \tag{4}$$

Gehienetan abiaduraren dimentsionalitatea LT^{-1} dela esan beharrean, abiaduraren *dimentsioak* LT^{-1} direla esaten dugu. Hemendik aurrera bata zein bestea erabiliko dugu.

2.1.2 Magnitudeak: dimentsionalak, adimentsionalak, oinarrizkoak eta eratorriak

Fenomeno edo problema batekin lotutako magnitude fisikoak *magnitude dimentsionalak* edo *magnitude adimentsionalak* izan daitezke. Magnitude dimentsionalen kasuan, *kantitatea* erabilitako *unitatearen* araberakoa da (luzera unitatea, masa unitatea, denbora unitatea edo indar unitatea, esate baterako). Magnitude adimentsionaletan, aldiz, *kantitatea* dimentsio bereko bi magnitudeen arteko zatiduraren menpekoa da normalean (luzera desberdinen arteko proportzioa, adibidez).

Adibide moduan, angeluak adimentsionalak dira, arku-luzera baten eta erradio baten arteko zatiketak baitira, bi horietako bakoitzaren dimentsionalitatea L izanik. Horrela, edozein θ angelurentzako, hau idatz dezakegu:

$$[\theta] = 1 \tag{5}$$

Zenbakizko konstanteak ere adimentsionalak dira. Horrela, π edo $\frac{1}{2}$ bezalako unitaterik gabeko zenbakizko konstanteen dimentsionalitatea 1 da:

$$[\pi] = 1 \qquad ; \qquad \left[\frac{1}{2}\right] = 1 \tag{6}$$

Bestalde, fenomeno edo problema batekin lotutako magnitude fisiko sorta batek multzo edo sistema bat osa dezake. Magnitude baten dimentsioak horrelako sistema bateko gainontzeko magnitude guztien dimentsioekiko independenteak badira, hau da, sistemako magnitudeak ezin badira elkarren artean konbinatu beste magnitudearen dimentsioak lortzeko, magnitude hori *oinarrizko magnitudea* dela esango dugu. Beste magnitude batzuen dimentsioak, berriz, bai lortu daitezke sistemako magnitudeak konbinatuz. *Magnitude eratorriak* edo *deribatuak* deritze azken hauei. Menpekotasun dimentsionalaren kontzeptu hau sakonago aztertuko dugu aurrerago, 2.3 atalean.

2.1.3 Sistema dimentsionalak

Nazioarteko Unitate Sistemako (SI) oinarrizko unitateen multzo osoa 1 taulan zerrendatuta dago, magnitude bakoitzari dagokion ikur dimentsionalarekin batera:

Magnitudea	Unitatea	Ikur dimentsionala
Luzera	metro (m)	L
Masa	kilogramo (kg)	M
Denbora	segundo (s)	T
Tenperatura	kelvin (K)	θ
Korronte elektrikoa	ampere (A)	I
Substantzia-kantitatea	mol (mol)	N
Argi-intentsitatea	kandela (cd)	J

Taula 1: Nazioarteko Unitate Sistemako oinarrizko unitateak eta dagozkien dimentsioak.

Gainerako magnitude fisiko guztien dimentsioak aurreko multzoko oinarrizko magnitudeetatik eratorri daitezke, hauek elkarrekin konbinatuz. Horrelako multzo bat *oinarrizko sistema dimentsional* bat dela esaten dugu, multzoko magnitudeen dimentsioak elkarrekiko independenteak dira eta. Sistema dimentsional hori erabilita, nola lortu indarra bezalako magnitude deribatuen dimentsioak? Newton-en bigarren legea erabiliz, $F = ma$, eta ondorioz, $[F] = [m][a] = M \cdot LT^{-2} = MLT^{-2}$. Horrela jokatuz, erraz lor ditzakegu edozein magnitude fisikoren dimentsioak. Askotan aurkituko ditugun magnitude deribatuetako batzuk 2 taulan bildu dira.

Magnitudea	Ikurra	Formula dimentsionala
Abiadura	$[v]$	LT^{-1}
Momentu lineala	$[p]$	MLT^{-1}
Azelerazioa	$[a]$	LT^{-2}
Indarra	$[F]$	MLT^{-2}
Masa dentsitatea	$[\rho]$	ML^{-3}
Presioa	$[P]$	$ML^{-1}T^{-2}$
Energia	$[E]$	ML^2T^{-2}
Entropia	$[S]$	$ML^2T^{-2}\theta^{-1}$
Karga elektrikoa	$[Q]$	TI
Eremu elektrikoa	$[E]$	$MLT^{-3}I^{-1}$
Eremu magnetikoa	$[B]$	$MT^{-2}I^{-1}$

Taula 2: Askotan aurkituko ditugun magnitude deribatu batzuen dimentsioak, $MLT\theta I$ sistema dimentsionala erabiliz.

2 taulako magnitudeak $MLT\theta I$ sisteman deribatuak direla ikusi dugu. Baina posiblea da beste sistema dimentsional mota bat eraikitzea, magnitude deribatu horietako bat oinarrizko magnitudeetako batengatik ordezkatuz, eta sistema berria ere oinarrizkoa izatea. Adibidez, pentsa dezakegu momentu lineala oinarrizko magnitudea dela eta masa kontzeptualki deribatutakoa, eta ez alderantziz. Orduan, MLT sistema erabili ordez, PLT sistema erabiliko dugu. Sistema berri horretan masaren formula dimentsionala $[m] = PL^{-1}T$ da, indarrarena $[F] = PT^{-1}$, energiarena $[E] = PLT^{-1}$, etab. Era berean, aurreko sistemako I korronte elektrikoa Q karga elektrikoagatik aldatuz, beste sistema dimentsional mota bat lor dezakegu baita ere.

Aurreko bi sistemetatik θ eta I kendu ditugu, masa, indarra eta energia magnitudeetan tenperaturaren eta karga elektrikoaren dimentsionalitaterik agertzen ez delako. Hau da, aztertzen ari garen probleman ez badago karga elektrikorik, esate baterako, I (edo Q) dimentsionalitatea bazter dezakegu. Sistema dimentsional baten *ordena* sistemaren oinarrizko dimentsionalitateen kopurua da. MLT eta PLT sistemen ordena 3 da, $MLT\theta$-rena 4, $MLT\theta I$-rena 5, etab.

2.2 Homogeneitate dimentsionala

Analisi dimentsionalaren teorema oinarrizkoena sinplea da, baina aldi berean oso erabilgarria:

Teorema 1. *Edozein magnitude fisikoren formula dimentsionala erabilitako oinarrizko sistema dimentsionaleko elementuen berreturen monomio bat da.*

Adibidez, MLTQ motako sistema dimentsionala erabiliz adieraz daitekeen edozein ϕ magnitudek, itxura sinple honetako formula dimentsionala du:

$$[\phi] = CM^aL^bT^cQ^d, \tag{7}$$

non C, a, b, c eta d konstanteak diren. C-ren balioa 1 izatea aukeratzen da gehienetan, adierazpena sinplifikatzeagatik, nahiz eta hautaketa hori derrigorrezkoa ez izan. Gainerako konstanteak desberdinak dira magnitude ezberdinetarako (eta 0 ere izan daitezke).

Frogapena. Demagun sistema dimentsional bateko oinarrizko magnitudeen neurketak, α, β, γ, etab., modu jakin batean konbinatzen direla magnitude eratorri baten neurria lortzeko. Konbinazio hori f ikur funtzionalaren bidez adieraziko dugu, *magnitude eratorriaren neurria* $= f(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ idatziz. Magnitude deribatuaren bi adibide konkretu baditugu, hauei dagozkien oinarrizko magnitudeen neurriek zenbakizko balio desberdinak dituzte. Lehenengo adibideari dagokion neurriari $f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, ...)$ deituko diogu, eta bigarrenari dagokionari $f(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, ...)$.

Orain, oinarrizko magnitudeen unitateen tamaina aldatuko dugu. α-ren neurketan erabilitako unitatea $\frac{1}{x}$ aldiz handiagoa egingo dugu. Orduan, α-ren neurria adierazten duen zenbakia x aldiz handiagoa izango da orain, $x\alpha$. Era berean, β-ren neurketan erabilitako unitatea $\frac{1}{y}$ aldiz handiagoa egingo dugu, eta honen neurria adierazten duen zenbakia $y\beta$ izango da. Horrela, bi adibideen magnitude eratorriaren neurriak, unitate berrietan, $f(x\alpha_1, y\beta_1, ...)$ eta $f(x\alpha_2, y\beta_2, ...)$ izango dira.

Bi neurrien arteko proportzioa edozein unitate-sistema erabiliz berdina izan behar denez, ondoko adierazpena egia da:

$$\frac{f(\alpha_1, \beta_1, ...)}{f(\alpha_2, \beta_2, ...)} = \frac{f(x\alpha_1, y\beta_1, ...)}{f(x\alpha_2, y\beta_2, ...)} \quad , \quad \forall \alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_2, \beta_2, ..., x, y, ... \tag{8}$$

Ekuazio horretako f funtzio ezezaguna lortu nahi dugu. Aurrekoa berridatziz:

$$f(x\alpha_1, y\beta_1, ...) = f(x\alpha_2, y\beta_2, ...) \cdot \frac{f(\alpha_1, \beta_1, ...)}{f(\alpha_2, \beta_2, ...)} \tag{9}$$

Azken ekuazio hori x-rekiko partzialki deribatuko dugu. Lehenengo argumentuarekiko deribatu partziala f_1 moduan adieraziz gero ($f_1 = \frac{\partial f}{\partial(x\alpha_1)}$):

$$\alpha_1 f_1(x\alpha_1, y\beta_1, ...) = \alpha_2 f_1(x\alpha_2, y\beta_2, ...) \cdot \frac{f(\alpha_1, \beta_1, ...)}{f(\alpha_2, \beta_2, ...)} \tag{10}$$

Orain, x, y, z, etab. guztien balioa 1 izatea aukeratuz (unitate-sistema aukeratzeko askatasuna dugu, eta hori da gehien komeni zaiguna), ondokoa dugu:

$$\alpha_1 \frac{f_1(\alpha_1, \beta_1, ...)}{f(\alpha_1, \beta_1, ...)} = \alpha_2 \frac{f_1(\alpha_2, \beta_2, ...)}{f(\alpha_2, \beta_2, ...)} \tag{11}$$

Azken ekuazioa $\alpha_1, \beta_1, ...$ eta $\alpha_2, \beta_2, ...$-ren balio guztietarako betetzen da. Ondorioz, $\alpha_2, \beta_2, ...$ guztiak finko mantenduz eta $\alpha_1, \beta_1, ...$ aldakorrak izatea baimenduz, hau lortzen dugu:

$$\frac{\alpha}{f}\frac{\partial f}{\partial \alpha} = kte. \tag{12}$$

edo

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{kte.}{\alpha}, \tag{13}$$

zeina, integratuz:

$$f = C_1 \alpha^{kte.} \tag{14}$$

C_1 faktorea gainontzeko $\beta, \gamma, ...$ aldagaien funtzioa da.

Aurreko prozedura errepika dezakegu, y, z, etab.-ekiko partzialki deribatuz eta ondoren integratuz, banan-banan. Azken emaitza ondokoa da:

$$f = C\alpha^a \beta^b \gamma^c \cdots \tag{15}$$

non $a, b, c, ...$ eta C konstanteak diren. □

Propietate honi *homogeneitate dimentsionala* deritzo. Oinarrizko teorema honetatik oso ezagunak eta garrantzitsuak diren bi korolario ondoriozta daitezke:

Korolarioa 1. *Fisikoki esanguratsua den ekuazio batean, bi aldeek dimentsio bera izan behar dute.*

Emaitza hau sarritan erabili dugu ekuazio fisikoen manipulazioan akatsik egin dugun konprobatzeko. Emaitza baten dimentsionalitatean akatsa badago, badakigu ziurtasun osoz adierazpen horren deribazioan akatsen bat egin dugula. Deribazioko pausu bakoitzean dimentsioen konprobaketa eginez, akatsa non egin dugun lor dezakegu modu sinple batean.

Korolarioa 2. *Fisikoki esanguratsua den ekuazio batean, batura bateko gai guztiek dimentsio bera izan behar dute.*

Adibide gisa, $a + b$ batura badugu, $[a] = [b]$ bete behar da derrigorrez baturak zentzu fisikoa izan dezan, noski.

2.2.1 Teorema hau nola eta zertarako erabili

Aurreko teoremaren erabilgarritasuna ikusteko, pendulu sinplearen maiztasun angeluarra lortuko dugu modu erraz batean. ω maiztasun angeluarra g, l eta m-ren (grabitatearen azelerazioaren, eta penduluaren luzera eta masaren) funtzioa baldin bada, bere formula dimentsionala gainontzeko parametroen dimentsioen berreturen monomio bezala idatz dezakegu. Parametroen dimentsioak MLT sisteman $[\omega] = T^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$, $[l] = L$ eta $[m] = M$ direnez, ondokoa idatz dezakegu:

$$\begin{aligned}[\omega] = T^{-1} &= [g]^a [l]^b [m]^c \\ &= (LT^{-2})^a L^b M^c \\ &= L^{a+b} T^{-2a} M^c\end{aligned} \tag{16}$$

Ekuazio hori betetzeko, teoremaren lehenengo korolarioa erabiliz, 1, ondoko baldintzak bete behar dira:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a = -1 \\ c = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Sistema horren soluzioa $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$ denez, $\omega = C_1\sqrt{\frac{g}{l}}$ idatz dezakegu. Analisi dimentsionalak ez digu C_1 konstantearen balioa ematen, balio hori problema analitikoki ebatziz edo esperimentalki lortu behar dugu. Adibide honetan, ezaguna da angelu txikiko hurbilketan $C_1 = 1$ dela Nazioarteko Unitate Sistemako unitateak erabiltzen baditugu.

2.2.2 Konstanteak: ez-funtsezkoak, partikularrak eta unibertsalak

Aurreko adibideko C_1 konstantea *ez-funtsezkoa* dela esaten da, unitate-sistema egokia erabiliz ezaba dezakegulako. Teoria fisiko baten ekuazio-multzotik konstante ez-funtsezkoak ezabatzen dituen unitate-sistemari *unitate-sistema koherentea* deritzo.

Baina badaude ezaba ezin ditzakegun konstanteak ere: funtsezko konstanteak. Hauen artean bi mota desberdin bereiz daitezke:

- *Konstante partikularrak*: Fenomenoan parte hartzen duten gurputzen izaeraren menpekoak dira hauek. Mota honetako konstantea da malguki baten konstante berreskuratzailea, esate baterako. Aukera daiteke unitate-sistema bat zeinean konstante horren zenbakizko balioa 1 den, baina malgukia aldatzean berriro agertuko zaigu malguki berriaren konstante berreskuratzailea; ondorioz, funtsezko konstantea da.
- *Konstante unibertsalak*: Ez dira fenomenoan parte hartzen duten gorputzen izaeraren menpekoak, horregatik deritze unibertsalak. Hauek dira Fisikan erabiltzen diren konstante unibertsalak: G grabitazio unibertsalaren konstantea, k Boltzmann-en konstantea, c argiaren abiadura, h Planck-en konstantea, N_A Avogadro-ren konstantea eta ϵ_0 hutsaren konstante dielektrikoa. Konstante unibertsalen arteko edozein konbinazio konstante unibertsala da baita ere.

2.3 Menpekotasun dimentsionala

Mota bereko (dimentsionalitate bereko) bi magnitude fisiko dimentsionalki menpekoak direla esaten da. Honen arrazoia ondokoa da: magnitude baten balioa aldatzen badugu unitateen sistema aldatuz, bestea ere faktore beraz eskalatzen da. Izan ere, bi magnitude horien arteko zatidura adimentsionala da eta, ondorioz, unitate-sistemarekiko independentea den konstantea. Bi magnitude dimentsionalitate desberdinekoak badira, aldiz, ezin dira elkarrekin konbinatu magnitude adimentsional bat lortzeko eta dimentsionalki independenteak direla esaten dugu. Baldintza matematikoa ondokoa da:

Definizioa 1. *p parametroa q parametroarekiko dimentsionalki menpekoa da, existitzen bada a non $[pq^a] = 1$ den. a hori ez bada existitzen, p parametroa q parametroarekiko dimentsionalki independentea da.*

Menpekotasun dimentsionalaren kontzeptu hau, eta dagokion baldintza matematikoa, parametro gehiagoko kasuetara modu errazean zabal daiteke:

Definizioa 2. *p parametroa $q_1, q_2, q_3, ...$ parametroekiko dimentsionalki menpekoa da, existitzen badira $a, b, c, ...$ non $[pq_1^a q_2^b q_3^c ...] = 1$ diren. $a, b, c, ...$ horiek ez badira existitzen, p parametroa $q_1, q_2, q_3, ...$ parametroekiko dimentsionalki independentea da.*

Adibide batzuk azter ditzagun. Demagun bi parametro ditugula, x eta l, eta biek luzerak adierazten dituztela. Argi dago $[\frac{x}{l}] = 1$ dela, beraz, dimentsionalki menpekoak dira. Baina kontsidera ditzagun aurreko x parametroa eta m, azken hau masa bat izanik. Ez dago a-ren baliorik xm^a magnitudea adimentsionala egiteko, eta ondorioz bi parametroak dimentsionalki independenteak dira. Azkenik, pendulu sinplearen adibidean erabili ditugun ω maiztasuna, g grabitatearen azelerazioa eta l luzera hartuko ditugu: $\omega\sqrt{\frac{l}{g}}$ konbinazioa adimentsionala denez, hiru parametro horiek dimentsionalki menpekoak dira.

2.3.1 Oinarria

Hainbat parametrodun multzo bat badugu, horietako batzuk dimentsionalki menpekoak izanik, elkarrekiko dimentsionalki independenteak diren parametroen azpimultzo bat eraikitzeko eta gainontzeko menpeko parametroak horien menpe idazteko gai izan gaitezke.

Esate baterako, x, t eta v-k (posizioak, denborak eta abiadurak) osatutako hirukotea kontsideratuko dugu, LT motako sistema dimentsionalean. Bi parametro independente daudenez soilik (sistema 2 ordenakoa delako), aurreko zerrenda bi azpimultzotan bana dezakegu. x eta t aukeratuko ditugu oinarri gisa. Badakigu falta den v parametroaren dimentsionalitatea bi horien dimentsionalitateen funtzioan idazten: $[v] = \frac{[x]}{[t]}$ edo $[\frac{vt}{x}] = 1$.

Zerk osatzen du oinarri bat? Parametroak elkarrekiko dimentsionalki independenteak izan behar dira; eta oinarria *osoa* izateko, multzoko parametro kopurua dimentsionalitate posible guztiak estaltzeko gai izan behar da. Beraz:

Definizioa 3. *Oinarri bat elkarrekiko dimentsionalki independenteak diren parametroen multzo bat da.*

Definizioa 4. *Oinarri osoa N parametrodun oinarria da, non N sistema dimentsionalaren ordena den.*

2.3.2 Nola jakin oinarri oso bat dugula?

Demagun $\{q_1, q_2, q_3\}$ multzoak 3 ordenako oinarri osoa osatzen duenentz jakin nahi dugula. Hasteko, berretzaileen matrizea eraikiko dugu. Hau da, MLT sisteman parametroen dimentsioak

$$\begin{aligned} [q_1] &= M^{a_1} L^{b_1} T^{c_1} \\ [q_2] &= M^{a_2} L^{b_2} T^{c_2} \\ [q_3] &= M^{a_3} L^{b_3} T^{c_3} \end{aligned} \tag{18}$$

direnez, berretzaileen matrizea ondokoa litzateke:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

- $\det A \neq 0$ betetzen bada, oinarria osoa da (hau da, parametro guztiak elkarrekiko dimentsionalki independienteak dira). Aldiz, $\det A = 0$ bada, orduan oinarriko bi parametro gutxienez elkarrekiko dimentsionalki menpekoak dira.

Pare bat adibide ikusiko ditugu jarraian. m masa, g grabitatearen azelerazioa eta l luzerak osatutako oinarria kontsideratuko dugu. MLT sisteman, berretzaileen matrizea hau da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad det\ A = 2 \neq 0 \tag{20}$$

Matrize horren determinantea ez-nulua da, ondorioz, multzoa dimentsionalki independentea da. Bestalde, ω maiztasunak, g-k eta l-k osatutako multzoa ez da independentea, ondoko matrizearen determinantea nulua baita:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad det\ A = 0 \tag{21}$$

2.3.3 Analogia bektore eta espazio bektorialekin

Menpekotasun dimentsionalari buruz orain arte azaldu duguna eta bektoreen eta espazio bektorialen ideia oso antzekoak dira. Oinarrizko dimentsionalitate bakoitza espazioko norabide baten modukoa da. Demagun MLT motako sistema dugula, esate baterako, non hiru dimentsionalitate independente ditugun. Hau espazio bektorial tridimentsional baten modukoa da. q magnitude baten dimentsionalitatea $[q] = M^a L^b T^c$ moduan idatz dezakegu, eta a, b, c berretzaileek osatutako multzoak bektore kartesiar bat deskribatzen duen triplete ordenatu baten antza du. Ondorioz, parametro bakoitza espazio abstraktu horretako bektore bat balitz bezala ikus dezakegu, dimentsionalitateei dagokienez behintzat.

Modu horretan, parametro bakar batek (adimentsionala ez bada) espazio horretako bektore bat definitzen du (parametro adimentsionalei luzera nuluko bektoreak legozkie). Bi parametro dimentsionalki menpekoak badira, dagozkien bektoreak paraleloak izango dira.

Bi parametro dimentsionalki independente ditugun kasuan, hauen bektoreek plano bat osatzen dute. Hirugarren parametro bat bi horiekiko menpekoa izango litzateke dagokion bektorea plano horren barnean egongo balitz, eta independentea bektorea planotik kanpo balego.

Bukatzeko, parametro independente kopuru maximoa espazio bektorialeko norabide desberdinen kopuruak ematen digu. Multzo zabalenaren parametro kopurua sistema dimentsionalaren ordenaren berdina da.

Aurreko ataleko independentziaren konprobaketa, bektoreen osagaien determinantearen kalkuluan oinarritua dagoena, bektoreek betetako bolumena kalkulatzearen berdina da. Bektoreak independenteak izateko, bolumena ez-nulua izan behar da, eta horregatik determinantea ere ezin da zero izan.

2.3.4 Egitura adimentsionalak

Oinarri oso bat badugu, beste edozein parametro oinarri horrekiko dimentsionalki menpekoa izan behar da derrigorrez (oinarriaren sistema dimentsional berean adierazi badaiteke). Honek esan nahi du existitzen dela parametro horrek eta oinarriko parametroen berredurek osatutako konbinazio adimentsional bat.

Adibide gisa, demagun $N = 2$ parametrodun oinarri oso bat dugula (beraz, sistema dimentsionala 2 ordenakoa da eta bi parametroek espazio osoa betetzen dute), $\{q_1, q_2\}$. p hirugarren parametro bat bi horiekiko menpekoa izan behar denez, $[pq_1^a q_2^b] = 1$ betetzen duten a eta b zenbakiak existitzen dira. Edo beste modu batera esanda, p-ren egitura edo forma adimentsional bat defini dezakegu, $\tilde{p}$:

$$\tilde{p} = pq_1^a q_2^b \tag{22}$$

Hau beti egin daiteke. Beti adieraz ditzakegu oinarri oso batetik kanpo dauden parametro guztiak egitura adimentsionalen bidez. Egitura adimentsionala zenbaki bat da soilik, eta unitate sistemarekiko independentea ondorioz.

Egitura adimentsionalen garrantzia argi ikusiko dugu 2.5 atalean, Buckingham-en Π Teorema aztertzean.

Adibide moduan, kontsideratu $\{m, g, v\}$ oinarri osoa eta t (denbora) parametroa. $\tilde{t} = tm^a g^b v^c$ parametroa adimentsionala egiten duten a, b eta c berretzaileak lortu nahi ditugu. MLT sistema erabiliz, ondokoa dugu:

$$[tm^a g^b v^c] = M^a L^{b+c} T^{1-2b-c} \tag{23}$$

Beraz, hiru ekuazio ditugu: $a = 0, b + c = 0$ eta $1 - 2b - c = 0$. Ekuazio sistema horren emaitza $a = 0, b = 1, c = -1$ denez, t-rekiko linealki proportzionala den parametro horien arteko konbinazio adimentsional bakarra $\tilde{t} = \frac{gt}{v}$ da.

2.4 Problemak ebazteko prozedura orokorra: Pausoz pausoko metodoa

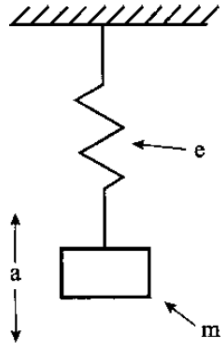
Pausoz pausoko metodoa problema bateko magnitude fisikoen arteko erlazioak lortzeko teknika antolatua da. Metodo hau nola erabili ikasiko dugu jarraian adibide pare bat aztertuz, teknika hau ulertzeko modurik errazena hori baita.

2.4.1 Zintzilikatutako solido oszilakorra

Izan bedi m masadun solido zurrun bat, euskarri bati lotuta dagoen malguki lineal elastiko batetik bertikalki zintzilik. Sistema guztia hutsean dagoela onartuko dugu. Sistema honen eskematxoa 1 irudian ikus dezakegu. Onar dezagun baita ere, solidoa bertikalki oszilatzen jarri dugula, nolabait, ω maiztasun angeluarrarekin.

Hasteko, gure probleman esanguratsuak diren parametroak zeintzuk diren jakiteko, ebazpena analitikoki egingo bagenu zein lege fisiko erabiliko genituen pentsatu behar dugu. Kasu honetan, bi hauek: malguki lineal elastikoetarako Hooke-ren legea eta Newton-en higiduraren legea.

Irudia 1: Zintzilikatutako solidoaren eskematxoa. ([6], Figure 1.6)



Hooke-ren legearen kasuan, malguki lineal batek egindako indarra e malgukiaren elastizitatearen bidez adieraz dezakegu, zeinak luzera unitateko indarraren neurria adierazten duen. Newton-en legeko azelerazioa, bestalde, ω maiztasun angeluarra eta a oszilazioen anplitudea erabiliz adieraz dezakegu. Gure sistemaren gainbegirada bat eginez, masaren gainean pisu-indar batek ere eragiten duela kontura gaitezke. Baina indar honek malgukiaren luzapen finko bat besterik ez du eragiten; indar oszilakorra malgukiak sortzen du, ez pisuak. Indar aerodinamikorik ez dago, sistema hutsean dago eta. Azkenik, malgukiaren masa arbuiagarritzat joko dugu zintzilikatutako solidoarenarekin alderatuz.

Jarraian, aldagai horien dimentsioak idatziko ditugu (MLT sisteman):

Aldagaiak	ω	m	a	e
Dimentsioak	$\frac{1}{T}$	M	L	$\frac{M}{T^2}$

MLT sisteman $\{m, a, e\}$ oinarria oinarri osoa denez (2.3.2 ataleko metodoa erabiliz konproba dezakegu), ω hiru parametro horien arteko konbinazio moduan idaztea posible da:

$$\omega = f_1(m, a, e) \tag{24}$$

Horren ondorioz, hau ere idatz dezakegu era berean:

$$\omega^2 = f_2(m, a, e) \tag{25}$$

f-ren azpiindizea aldatu dugu bi funtzioak desberdinak direla azpimarratzeko (biak azpiindize gabe idatz genitzakeen, eta adibide honetatik aurrera hala egingo dugu).

Orain, eraiki dugun taulatik oinarrizko dimentsionalitateak banan-banan ezabatzen saiatuko gara, aldagaiak elkarrekin konbinatuz. T dimentsionalitatea ezabatzen saiatuko gara lehenengo, adibidez (oinarrizko beste edozein dimentsionalitate ezabatzen hasiz, bukaerako emaitza berdina lortzen da). Aldagaien dimentsioak begiratuz, aurreko ekuazioa honela berridatz dezakegu:

$$\frac{\omega^2}{e} e = f_2(m, a, e) \tag{26}$$

Dimentsioen taula, orain, honela geratzen zaigu:

Aldagaiak	$\frac{\omega^2}{e}$	m	a	e
Dimentsioak	$\frac{1}{M}$	M	L	$\frac{M}{T^2}$

ω^2 e-rekin zatituz, T dimentsionalitaterik gabeko aldagai bat lortu dugu.

Homogeneotasun dimentsionalagatik, badakigu azken ekuazioko bi aldeen dimentsioak berdinak izan behar direla. Bete berri dugun taulan ikus dezakegu T dimentsionalitatea e aldagaiak bakarrik duela orain. Dimentsionalitate hori orekatzeko modu onargarri bakarra e aldagaia funtzio ezezagunetik ateratzea da:

$$\frac{\omega^2}{e}e = ef_3(m,a) \tag{27}$$

Sinplifikatuz:

$$\frac{\omega^2}{e} = f_3(m,a) \tag{28}$$

Hurrengo urratsa M dimentsionalitatea ezabatzea izango da. Horretarako, aurreko ekuazioa honela berridatziko dugu:

$$\frac{\omega^2 m}{e}\frac{1}{m} = f_3(m,a) \tag{29}$$

Dimentsioen taula berriz ere idatziz:

Aldagaiak	$\frac{\omega^2 m}{e}$	$\frac{1}{m}$	a
Dimentsioak	1	$\frac{1}{M}$	L

Lehen bezala, M dimentsionalitatea aldagai bakarrean dugu. Dimentsioak orekatzeko, m parametroa funtziotik kanpora atera behar dugu:

$$\frac{\omega^2 m}{e}\frac{1}{m} = \frac{1}{m}f_4(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2 m}{e} = f_4(a) \tag{30}$$

Bukatzeko, ikus dezakegu a aldagaian ageri den L dimentsionalitatea ezin dugula ezabatu gainontzeko aldagaien konbinazioak eginez. Hemendik ondorioztatzen dugu a aldagaia problema honetan ez dela esanguratsua (hasieratik ezaba genezakeen, konturatu izan bagina). Beraz, ekuazioa honela geratzen zaigu azkenean:

$$\frac{\omega^2 m}{e} = kte. \tag{31}$$

2.4.2 Fluido newtondarrak bultzatutako diskoa

Bigarren adibide gisa, demagun disko zirkular mehe bat jarri dugula fluido newtondar baten jario uniformearekiko perpendikular, 2 irudian ikus daitekeen moduan. Jarioaren ezaugarriak v abiadura, ρ dentsitatea eta μ likatasuna (biskositatea) dira. Diskoaren diametroa d da, eta fluidoaren jarioak D arrastatze-indarra eragiten dio diskoari.

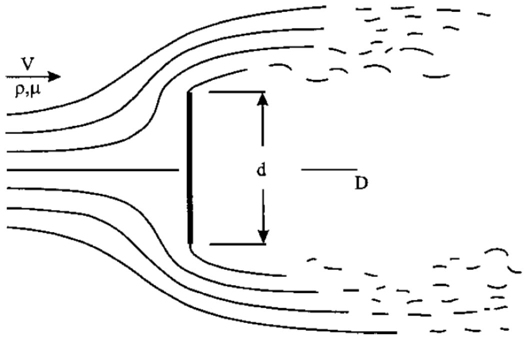
Hasteko, arrastatze-indarra gainontzeko aldagaien funtzio moduan idatz daitekeela suposatuko dugu:

$$D = f(\rho, v, d, \mu) \tag{32}$$

Lehen bezala, aldagaien dimentsioen taula ere beteko dugu:

Aldagaiak	D	ρ	v	d	μ
Dimentsioak	$\frac{ML}{T^2}$	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{L}{T}$	L	$\frac{M}{LT}$

Irudia 2: Fluidoaren jarioak bultzatutako diskoaren eskematxoa. ([6], Figure 1.1)



Oraingo honetan, aldagaietatik M dimentsionalitatea ezabatzen saiatuko gara hasteko. Horretarako, aurreko ekuazioa modu honetan berridatziko dugu:

$$\frac{D}{\rho}\rho = f(\rho, v, d, \frac{\mu}{\rho}) \tag{33}$$

Aldagai berriekin taula berriro osatuz:

Aldagaiak	$\frac{D}{\rho}$	ρ	v	d	$\frac{\mu}{\rho}$
Dimentsioak	$\frac{L^4}{T^2}$	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{L}{T}$	L	$\frac{L^2}{T}$

Ikusten dugu M dimentsionalitatea ρ aldagaian bakarrik ageri dela. Aurreko adibideko argudiaketa bera erabiliz, ekuazioa itxura honetakoa izan behar da:

$$\frac{D}{\rho}\rho = \rho f(v, d, \frac{\mu}{\rho}) \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{\rho} = f(v, d, \frac{\mu}{\rho}) \tag{34}$$

Hurrengo pausoa T ezabatzea izango da:

$$\frac{D}{\rho v^2}v^2 = f(V, d, \frac{\mu}{\rho V}) \tag{35}$$

Aldagaiak	$\frac{D}{\rho v^2}$	V	d	$\frac{\mu}{\rho v}$
Dimentsioak	L^2	$\frac{L}{T}$	L	L

Homogeneitate dimentsionalagatik, berriro ere:

$$\frac{D}{\rho v^2}v^2 = v^2 f(d, \frac{\mu}{\rho v}) \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{\rho v^2} = f(d, \frac{\mu}{\rho v}) \tag{36}$$

Bukatzeko, L ezabatzea falta zaigu soilik:

$$\frac{D}{\rho v^2 d^2}d^2 = f(d, \frac{\mu}{\rho v d}) \tag{37}$$

Aldagaiak	$\frac{D}{\rho v^2 d^2}$	d	$\frac{\mu}{\rho v d}$
Dimentsioak	1	L	1

Ondorioz, azken emaitza ondokoa da:

$$\frac{D}{\rho v^2 d^2}d^2 = d^2 f(\frac{\mu}{\rho v d}) \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{\rho v^2 d^2} = f(\frac{\mu}{\rho v d}) \tag{38}$$

2.5 Buckingham-en Π (Pi) Teorema

1914an Buckingham-ek [3] formulatu zuen Π teorema analisi dimentsionalaren muina da. Teorema honek analisi dimentsionala burutu ostean agertzen den egitura adimentsional bakoitza π izenarekin adierazten du, eta horregatik Bridgman-ek Buckingham-en teoremari *Pi teorema* izena jarri zion. Vaschy-Buckingham teorema izenaz ere aurki dezakegu batzuetan.

Teorema honen arabera, π gai horien kopurua aztergai dugun problemaren hasierako magnitude fisikoen kopuruaren eta horietatik dimentsionalki independenteak direnen kopuru maximoaren arteko kenduraren berdina da. Beste modu batera esanda, teoremak dio n aldagai fisiko dituen fisikoki esanguratsua den ekuazio bat badugu, eta aldagai guzti horiek k oinarrizko magnitude erabiliz adierazi badaitezke, hasierako adierazpena eta hasierako aldagaiak konbinatuz eraikitako $n-k$ parametro adimentsionalez osatutako ekuazio bat baliokideak direla.

Hona hemen teoremaren formulazioa eta frogapena:

Teorema 2. *Sistema fisiko batek oinarrizko k dimentsionalitateren menpeko n magnitude esanguratsu baditu, orduan $n-k$ biderkadura adimentsional existitzen dira, $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-k}$, eta sistemaren portaera ondoko ekuazio adimentsionalaren bidez deskriba daiteke:*

$$f(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-k}) = 0 \tag{39}$$

Frogapena. Izan bedi $a_1, a_2, ..., a_n$ magnitude dimentsionalen funtzioa den lege fisikoa. Ondoko funtzio inplizituak adieraz dezake lege hori:

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \tag{40}$$

Demagun magnitude horietako k dimentsionalki independenteak direla, eta oinarri oso bat osatzen dutela: $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Ondorioz, gainerako $n-k$ magnitudeak, $a_k, a_{k+1}, ..., a_n$, oinarrikoen konbinazio lineal bezala idatz daitezke.

Oinarriko magnitudeen dimentsioei $A_1, A_2, ..., A_k$ deituz, magnitude guztien formula dimentsionalak honela idatz ditzakegu:

$$\begin{aligned} [a_1] &= A_1^{m_1} \cdots A_k^{m_k} \\ &\vdots \\ [a_k] &= A_1^{n_1} \cdots A_k^{n_k} \\ [a_{k+1}] &= A_1^{p_1} \cdots A_k^{p_k} \\ &\vdots \\ [a_n] &= A_1^{q_1} \cdots A_k^{q_k} \end{aligned} \tag{41}$$

Jarraian, ondoko unitate-aldaketa aplikatu diegu oinarriko magnitudeei:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \alpha_1 a_1 \\ a'_2 &= \alpha_2 a_2 \\ &\vdots \\ a'_k &= \alpha_k a_k \end{aligned} \tag{42}$$

Modu horretan, gainontzeko magnitude fisikoak honela aldatzen dira:

$$\begin{aligned} a'_{k+1} &= \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\cdots\alpha_k^{p_k}a_{k+1} \\ &\vdots \\ a'_n &= \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\cdots\alpha_k^{q_k}a_n \end{aligned} \tag{43}$$

Orduan, unitate-sistema berrian hasierako erlazio funtzionala honela gelditzen zaigu:

$$f(\alpha_1 a_1, ..., \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1}\cdots\alpha_k^{p_k}a_{k+1}, ..., \alpha_1^{q_1}\cdots\alpha_k^{q_k}a_n) = 0 \tag{44}$$

Orain, azken ekuazio hau gehien sinplifikatzen duen unitate-aldaketa bilatu behar dugu. Zuzenean ikus daiteke aldaketa hori ondokoa dela:

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, ..., \alpha_k = \frac{1}{a_k}, \tag{45}$$

hau da, oinarriko magnitudeen kantitateak 1 eginez lortzen dugu adierazpenik sinpleena. Sistema horretan $a_{k+1}, ..., a_n$-ren balioak formula hauek zehazten dituzte:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_k^{p_k}} \\ &\vdots \\ \pi_{n-k} &= \frac{a_n}{a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_k^{q_k}} \end{aligned} \tag{46}$$

$\pi_1, ..., \pi_{n-k}$ balioak ez dira unitate-sistemaren menpekoak, adimentsionalak baitira. Unitate-sistema horretan ondokoa da hasierako erlazio funtzionala:

$$f(1, ..., 1, \pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-k}) = f(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-k}) = 0 \tag{47}$$

□

Korolarioa 3. *n aldagai dimentsional erabiliz deskriba daitekeen edozein fenomeno fisikoren portaera $n-k$ aldagai adimentsional independentek kontrolatzen dute.*

2.5.1 Teorema aplikatzeko gida

Teoremaren frogapena eredu moduan hartuz, problemak ebazteko gida bat eraiki dezakegu:

1. Problemarekin lotutako parametro esanguratsu independente guztiak zerrendatu: $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ (n=parametro kopuru totala). Kontu handiz egin behar da aukeraketa hau, oso erraza baita parametro garrantzitsuren bat ahaztea; eta aldagai okerrak erabiltzen baditugu, zenbaki adimentsional okerrak lortuko ditugu gehienetan.

   Horrez gain, ekidin behar dugun beste akats bat jada inplizituki beste magnitude batzuetan eragina duen parametro bat (menpeko magnitude bat) sartzea da. 2.4.2 adibidean eta edozein fluidoren dinamikaren azterketan, esate baterako, pentsa dezakegu tenperatura aldagai esanguratsua dela. Eta garrantzitsua da, bai, baina likatasuna bezalako beste propietate batzuen gainean duen eraginagatik bakarrik; horregatik ez dugu horiekin batera zerrendatu behar.

2. Oinarrizko dimentsionalitate kopurua kontuan hartuz, sistema dimentsional egokia aukeratu (k=sistemaren ordena).

3. Magnitude bakoitzaren formula dimentsionala idatzi sistema horretan.

   Batzuetan, dimentsioak aztertuz kontura gaitezke aukeratu dugun aldagaietako bat ez dela esanguratsua eta hasierako magnitudeen zerrendatik ezabatu behar dugula, gainontzeko aldagaiek ez duten oinarrizko dimentsionalitate bat duelako (2.4.1 osziladorearen adibidean a parametroa, adibidez).

4. Magnitudeen multzoa bi azpimultzotan banatu. Lehenengo azpimultzoa k magnitudez osatutako $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ oinarri osoa izango da, dimentsionalki independentea. Bigarren azpimultzoa, $\{c_1, c_2, ..., c_{n-k}\}$, gainerako $n-k$ magnitudeek osatuko dute, zeinei *hondarrak* deritze.

5. c_m hondar bakoitzerako, dagokion $\tilde{c}_m$ egitura adimentsionala eraiki oinarriko magnitudeak izendatzailean jarriz:

$$\tilde{c}_m = \frac{c_m}{b_1^\alpha b_2^\beta \cdots b_k^\mu}, \tag{48}$$

   non $\{\alpha, \beta, ..., \mu\}$ berretzaileak hondar bakoitzerako aukeratzen diren, ratioa adimentsionala egiteko.

6. Emaitza magnitude adimentsional horien arteko erlazio moduan idatzi:

$$f(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, ..., \tilde{c}_{n-k}) = 0 \tag{49}$$

7. Ekuazioa ezaguna bada, magnitude adimentsional berrien funtzioan idatz dezakegu. Horretarako, hondar magnitudeei izena aldatu bakoitzaren izen adimentsionala idatziz eta oinarriko magnitudeei bat balioa ezarri.

Urrats hauek jarraitu ostean, problemako aldagaien kopurua n-tik $n-k$-ra murriztu dugu.

Kasu desberdin hauek aurki ditzakegu π gaien determinazioan, n eta k kopuruen arabera:

- Ez da fenomeno fisikorik deskribatzen kasu hauetan:
  - $\boldsymbol{n < k}$, ez dagoelako soluziorik.
  - $\boldsymbol{n = k}$, soluzio bakarra dagoelako eta parametro guztiek balio finkoak dituztelako.
- Beraz, fenomeno posible guztiek $n > k$ betetzen dute:
  - $\boldsymbol{n = k + 1}$, π_1 gai bakarra dago.
  - $\boldsymbol{n > k + 1}$, π gaien kopurua bat baino handiagoa da eta horiek idazteko aukera bat baino gehiago dago.

Azpimarratu behar dugu Pi teoremak ez digula, funtsean, ezer berririk eskaintzen, eta ez digula aurretik 2.4 pausoz pausoko metodoa erabiliz ebatz ez genitzakeen problemak ebazteko aukera ematen. Teorema honen gakoa eta abantaila nagusia erosotasuna da. Aldagaien eta sistema dimentsionalaren aukeraketa egokia egin badugu, zenbat parametro adimentsional espero behar ditugun esaten digu; eta analisi dimentsionalaren emaitza era sinple eta malguan ematen digu, emaitza hori gehien interesatzen zaigun aldagaien menpe adierazteko aukera emanez batzuetan.

2.6 Π Teoremaren erabileraren adibide argigarriak

2.6.1 Magnitudeak fisikoak erlazionatuz

Demagun izar batek oszilazio bat jasaten duela: zabaldu eta uzkurtu egiten da simetria esferikoa mantenduz. Jakin nahi dugu zein den ω maiztasun angeluarraren menpekotasuna izarraren propietateekiko.

Fisikoki esanguratsuak diren aldagai independenteen identifikazioarekin hasi behar gara. ρ dentsitatea eta R erradioa garrantzitsuak izango dira seguraski, eta baita Newton-en grabitazio unibertsalaren legean agertzen den G grabitazio-konstantea ere. m masa ere batu genezake zerrendara, baina hurbilketa moduan suposatuko dugu dentsitatea konstantea dela. Horrela, $m = \rho\frac{4\pi R^3}{3}$, eta masa ez da aldagai independentea ondorioz.

MLT sistema dimentsionala aukeratuko dugu (k=3 ordenekoa). Hautatutako magnitudeen formula dimentsionalak sistema horretan hauek dira: $[\omega] = T^{-1}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[R] = L$ eta $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$ (grabitazio-konstantearen dimentsioak lortzeko, gogoratu behar dugu bi gorputzen arteko energia potentzial grabitatorioa $-G\frac{m_1m_2}{r}$ dela, eta ondorioz energiaren dimentsioak dituela gai horrek). Maiztasun angeluarra lortu nahi dugunez, oinarritik kanpo lagako dugu, $\{\rho, R, G\}$ oinarria aukeratuz. Dimentsioen berretzaileen matrizea eraikiko dugu oinarri osoa dugun ala ez jakiteko:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Determinantea ez-nulua denez, oinarri osoa da.

Beraz, a, b eta c konstanteen balioak lortu behar ditugu ondokoa betetzeko:

$$\begin{aligned}[\omega] &= [T]^{-1} \\ &= [\rho^a R^b G^c] \\ &= M^{a-c}L^{-3a+b+3c}T^{-2c},\end{aligned} \tag{51}$$

eta hortik ekuazio-sistema hau ondorioztatzen dugu:

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ -3a + b + 3c = 0 \\ -2c = -1 \end{cases} \tag{52}$$

Soluzioa $a = c = \frac{1}{2}, b = 0$ denez:

$$\omega = C\sqrt{G\rho} \tag{53}$$

Oszilazioen maiztasun angeluarra dentsitatearen erro karratuarekiko proportzionala eta erradioarekiko independentea dela ondorioztatu dugu, soilik analisi dimentsionala erabiliz eta parametro esanguratsu bakarrak ρ, R eta G direla suposatuz.

Bigarren adibide bat aztertuko dugu jarraian. Osziladore harmoniko indargetuaren ekuazioa kontsideratuko dugu:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \tag{54}$$

Osziladorea pausagunean dago hasieran, $x(0) = x_0$ posizioan. $x(t)$ higidura x_0 hasierako posizioak eta m masak, b indargetze koefizienteak eta k konstante elastikoak ezaugarrituko dute. Ondorioz, orokorrean:

$$x = f(t, x_0, m, b, k) \tag{55}$$

6 parametro independente ditugu, eta problema mekanikoa denez, 3 ordenako MLT sistema aukeratuko dugu. Pi teoremaren arabera, beraz, 6 - 3 = 3 biderkadura adimentsional independente existitzen dira. b eta k parametroen dimentsioak erraz lor ditzakegu homogeneitate dimentsionalari esker: hasierako ekuazioko baturako gai guztiek dimentsio bera izan behar dute ($[m\ddot{x}] = [b\dot{x}] = [kx]$).

Orain oinarria osatuko duten hiru parametroak hautatu behar ditugu. Hauek ondo aukeratzea izaten da analisi dimentsionala erabiltzerakoan aurkitzen dugun zailtasunik handiena. Kasu honetan, oinarrian zein parametro ez ditugun nahi pentsatzen hasiko gara. $x(t)$ lortu nahi dugunez, x eta t ez ditugu oinarrian sartuko. Bestalde, higidura nolakoa den pentsatuko dugu. Argi dago portaera oszilakorra izango dugula, horregatik m eta k oinarrian sar ditzakegu, eta eskala ezartzen duen hasierako desplazamentua ere badugu. Orduan $\{x_0, m, k\}$ oinarriarekin saiatuko gara (oinarri osoa da, berretzaile dimentsionalen matrizearen determinantea ez-nulua baita). x, t eta b hondar-parametroen forma adimentsionalak eraikiko ditugu:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{x_0} \\ \tilde{t} &= t\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \tilde{b} &= \frac{b}{\sqrt{km}} \end{aligned} \tag{56}$$

Buckingham-en teoremaren arabera, hau idatz dezakegu:

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{b}) = 0 \tag{57}$$

Ekuazio horretatik $\tilde{x}$ askatuz eta jatorrizko parametroak ordezkatuz:

$$x = x_0\Phi(t\sqrt{\frac{k}{m}}, \frac{b}{\sqrt{km}}), \tag{58}$$

non Φ funtzioa ezezaguna den. $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ sistemaren maiztasun angeluar propioa da eta $\frac{b}{\sqrt{km}} = Q^{-1}$, Q *kalitate faktorea*-ren alderantzizkoa. Φ funtzia ez dugu ezagutzen, horretarako hasierako ekuazio diferentziala ebatzi behar baitugu, baina analisi dimentsionalaren laguntzaz lortu dugun informazioa erabilgarria da:

$$x = x_0\Phi(\omega_0 t, \frac{1}{Q}) \tag{59}$$

2.6.2 Ekuazioak sinplifikatuz

Pi teorema ekuazioak sinplifikatzeko ere erabili dezakegu. Kontsidera dezagun b marruskaduradun fluido likatsu batean higitzen den m masako partikula baten v abiadura ematen digun ekuazio diferentziala:

$$m\dot{v} + bv = 0 \tag{60}$$

Partikularen hasierako abiadura $v(0) = v_0$ da.

Kasu honetan 5 parametro ditugu: m, v, t, b eta v_0. MLT sistema erabiliko dugu oraingoan ere. Beraz, 5 - 3 = 2 parametro adimentsional independente egongo dira. v abiadura t-ren funtzioan lortu nahi dugunez, bi aldagai hauek ez ditugu oinarrian sartuko. m, b eta v_0 gelditzen zaizkigu orduan, eta erraz frogatzen da oinarri egokia osatzen dutela. Hondar-parametroen forma adimentsionalak hauek dira:

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \frac{v}{v_0} \\ \tilde{t} &= \frac{bt}{m} \end{aligned} \tag{61}$$

Pi teorema aplikatuz ondokoa dugu:

$$\Psi(\tilde{v}, \tilde{t}) = 0 \tag{62}$$

Azken erlazio hau berridatzi dezakegu $\tilde{v}$ askatuz eta jatorrizko aldagaiak ordezkatuz:

$$v = v_0 \Phi(\frac{bt}{m}) \tag{63}$$

Lehen bezala, Φ funtzioa ez da ezaguna soilik analisi dimentsionala erabiliz.

Baina oraindik aurrerago joan gaitezke. Oinarriko parametroak independenteak dira. Aukera dezakegu unitate-sistema bat, zeinean parametro horiek guk nahi dugun edozein balio hartzen duten. Denei 1 balioa ezartzea da errazena.

Ikus dezagun zer gertatzen zaion gure hasierako ekuazioari. Oinarriko parametro guztiak 1 balioagatik ordezkatuko ditugu, eta hondar-parametroak beraien forma adimentsionalagatik:

$$\tilde{v}'(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t}) = 0, \tag{64}$$

eta hasierako baldintza $\tilde{v}(0) = 1$. Forma adimentsional honetan, ekuazioa pixka bat sinpleagoa da orain 3 parametro gutxiago ditugu eta. Ekuazio berri honen soluzioa ondokoa da:

$$\tilde{v}(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}} \tag{65}$$

Hortik ondorioztatzen dugu aurreko Φ funtzio ezezaguna $\Phi(z) = e^{-z}$ dela.

Beraz, oinarriko parametroei 1 balioa ezarri diezaiekegu ekuazioak era sinpleagoan berridazteko. Hala ere, garrantzitsua da konturatzea hori egin ostean jada ezin dugula gure soluzioa dimentsioen azterketa eginez konprobatu.

3 Zenbaki adimentsionalak

Atal honetan, analisi dimentsionala erabiltzean askotan aurkituko ditugun hainbat zenbaki adimentsional zerrendatuko ditugu, bereziki jariakinen mekanika edo dinamikako problemak ebaztean.

3.1 Sarrera

Fenomeno fisiko bati lotutako ekuazioak edo aldagaiak aztertuz, fenomenoaren deskribapenerako dimentsiorik gabeko zein zenbaki ditugun eskuragarri erabaki dezakegu normalean, denbora nahikoa emanda. Baina gehienetan, denbora aurrezteaz gain, analisia zuzenagoa izaten da espero dezakegunari buruzko aurretiazko ideiaren bat baldin badugu. Oso baliotsua da, adibidez, jariakinen problemetan Reynolds zenbakia noiz agertuko zaigun eta noiz ez jakitea. Askotan, zenbaki adimentsional batzuen esangura fisikoa ulertuz, berehala erabaki dezakegu erlazio adimentsional batek hartuko duen itxura. Horrez gain, gure analisiaren emaitzek zentzurik dutenentz konprobatzeko gai izan gaitezke baita ere.

3 taulan jarraian aztertuko ditugun zenbaki adimentsionalak zerrendatu dira. Aldagaien konbinazio horiek hain sarri agertzen dira, bakoitzak izan berezi propioa duela (askotan pertsonen izenak). Dimentsiorik gabeko egiturei pertsonen omenezko izenak jartzeko ohitura aspaldi irten zen kontrolpetik, eta hauen kopurua zenbaezina da gaur egun. Horren ondorio zuzenak errepikapena eta nahasmena dira. Jarraian gutxi batzuk aipatuko ditugu soilik, ezagunenetako batzuk.

Izena	Egitura adimentsionala	Esangura fisikoa	Garrantzia zein kasutan?
Reynolds zenbakia (Re)	$\frac{\rho v l}{\mu}$	$\frac{Inertzia-indarra}{Biskositate-indarra}$	Fluidoen dinamikako mota guztietako problemetan
Froude zenbakia (Fr)	$\frac{v}{\sqrt{lg}}$	$\frac{Inertzia-indarra}{Grabitate-indarra}$	Gainazal askedun jarioa dugunean
Euler zenbakia (Eu)	$\frac{p}{\rho v^2}$	$\frac{Presio-indarra}{Inertzia-indarra}$	Presio-diferentziek garrantzia dutenean
Kabitazio zenbakia (Ca^*)	$\frac{p-p_v}{\frac{1}{2}\rho v^2}$	$\frac{Presio-indarra}{Inertzia-indarra}$	Kabitazio-fenomenoak gerta daitezkeenean
Cauchy zenbakia (Ca)	$\frac{\rho v^2}{B}$	$\frac{Inertzia-indarra}{Konpresio-indarra}$	Konprimagarritasuna garrantzitsua denean
Mach zenbakia (Ma)	$\frac{v}{c}$	$\frac{Objektuaren\ abiadura}{Soinuaren\ abiadura}$	Aerodinamikako problemetan
Strouhal zenbakia (St)	$\frac{fl}{v}$	$\frac{Inertzia-indarra\ (lokala)}{Inertzia-indarra\ (konbekziozkoa)}$	Jario oszilakorra dugunean
Weber zenbakia (We)	$\frac{\rho v^2 l}{\sigma}$	$\frac{Inertzia-indarra}{Gainazal\ tentsio-indarra}$	Gainazal tentsioa garrantzitsua denean

Taula 3: Zenbaki adimentsional ezagun batzuen definizioak, esangura fisikoak eta zein motako problemetan duten garrantzia.

3.2 Reynolds zenbakia

Reynolds zenbakia, fluidoen mekanikako zenbaki adimentsionalik ezagunena, honela definitzen da:

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} \equiv \frac{vl}{\nu}, \tag{66}$$

non $\rho =$ fluidoaren dentsitatea

$v =$ fluidoaren abiadura

$l =$ luzera karakteristikoa

$\mu =$ fluidoaren biskositatea edo likatasuna ($[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$)

$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$ fluidoaren biskositate zinematikoa.

Inertzia-indarren eta biskositate-indarren arteko zatidura gisa ulertzen da zenbaki hau normalean. Horrela, Reynolds zenbakia txikia izateak gure probleman biskositate-indarrak gailentzen direla esan nahi du, eta efektu inertzialak arbuiatzea posiblea izan daiteke; hau da, jariakinaren dentsitatea ez da aldagai esanguratsua izango kasu horretan. Eta alderantziz, zenbaki hau handia bada inertzia-indarrek izango dute garrantzia handiagoa eta biskositatearen efektua baztertzea posiblea izan daiteke, likatasunik gabeko fluidoa dugula kontsideratuz. Orokorrean, Reynolds zenbakia handia denean fluidoaren jarioa zurrunbilotsua izan ohi da, eta txikia denean laminarra.

Beraz, gure probleman likatasun- eta inertzia-indarrak baditugu, ziurtasunez esan dezakegu Reynolds zenbakia agertuko zaigula. Zenbaki honen neurriak inertzia- eta biskositate-indarren garrantzia erlatiboa adierazten duela esatea ez da zuzena kasu guztietan, baina ondokoa bai dela beti egia: Reynolds zenbakiaren balio jakin baterako inertzia-indarrak nagusitzen badira, balio handiago guztietarako ere nagusitasun hori mantenduko dute; eta biskositate-indarrak inertzia-indarrak guztiz gainditzen badituzte Reynols zenbakiaren balio baterako, balio txikiagoetarako ere berdina gertatuko da.

3.3 Froude zenbakia

Froude zenbakia honela definitzen da, normalean:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{lg}}, \tag{67}$$

non $v =$ fluidoaren abiadura

$l =$ luzera karakteristikoa

$g =$ grabitatearen azelerazioa.

Talde adimentsional honek inertzia-indarren eta grabitazio-indarren arteko proportzioa adierazten du. Inertzia-indarra $\frac{\rho v^2}{l}$ faktorearekiko proportzionala da, eta grabitate-indarra ρg da. Bien arteko zatidura eginez, ratio hori Froude zenbakiaren karratuarekiko proportzionala dela ikus dezakegu. Arrazoi honengatik, goian definitu dugun zenbakiaren karratuari esaten zaio Froude zenbakia batzuetan.

Aztertzen ari garen jarioan gainazal askeen efektua garrantzizkoa bada, zenbaki adimentsional hau aurkitu dugu. Froude zenbakia unitatea baino txikiagoa denean jarioa *subkritikoa* edo *azpikritikoa* dela esaten da, eta unitatea baino handiagoa denean *superkritikoa* dela. Jarioa superkritikoa denean jarioaren abiadura uhin-abiadura baino handiagoa da; azpikritikoaren kasuan, berriz, uhin-abiadura jario-abiadura baino handiagoa. (Laku batera jaurtitako harri batetik irtetzen diren olatutxoen abiadura uhin-abiadura da; jario-abiadura, aldiz, uretan dagoen hosto baten abiadura.)

3.4 Euler zenbakia eta Kabitazio zenbakia

Euler zenbakia bi punturen arteko presio-diferentziak garrantzia duen problemetan agertzen da (hodietan zehar doazen jariakinen kasuak, adibidez), eta presio- eta inertzia-indarren arteko proportzioaren neurri bezala interpreta daiteke.

Honela definitzen da zenbaki adimentsional hau:

$$Eu = \frac{p}{\rho v^2} \equiv \frac{\Delta p}{\rho v^2}, \tag{68}$$

non $p \equiv \Delta p =$ presioa (presio-diferentzia) ($[p] = ML^{-1}T^{-2}$)
$\rho =$ fluidoaren dentsitatea
$v =$ fluidoaren abiadura.

Euler zenbakiaren bertsio berezi bat Kabitazio zenbakia da, zeinak jariakinean kabitazioa gertatzeko potentziala karakterizatzen duen. Likido batean presio-aldaketa azkarrek sortutako lurrun-hutsuneen (burbuilen) eraketa da kabitazioa. Honela definitzen da zenbaki hori:

$$Ca = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho v^2}, \tag{69}$$

non $p =$ presio lokala
$p_v =$ fluidoaren lurrun-presioa.

Kabitazio zenbakia zenbat eta txikiagoa izan, kabitazioa gertatzeko aukera handiagoa da. Komenigarria da aipatzea batzuetan zenbaki hau ez dela Ca ikurrarekin adierazten, jarraian aztertuko dugun Cauchy zenbakiarekin ez nahasteko. Arrazoi honengatik, 3 taulan Ca^* idatzi dugu.

3.5 Cauchy zenbakia

Cauchy zenbakia parametro esanguratsua da fluido konprimagarrien karakterizazioan, eta inertzia- eta konpresio-indarren arteko zatidura adierazten du. Bere definizioa ondokoa da:

$$Ca = \frac{\rho v^2}{B}, \tag{70}$$

non $\rho =$ fluidoaren dentsitatea
$v =$ fluidoaren abiadura
$B =$ fluidoaren modulu bolumetrikoa ($[B] = [p]$).

3.6 Mach zenbakia

Mach zenbakia aerodinamikan erabiltzen da, objektu batek ingurune batean duen abiadura soinuak ingurune berean eta baldintza berdinetan (tenperatura, presioa) duen abiadurarekiko zein den adierazteko. Definizioz, beraz:

$$Ma = \frac{v}{c}, \tag{71}$$

non $v =$ objektuaren abiadura (hegazkin batena, adibidez)
$c =$ soinuaren abiadura ingurune berean.

Zenbaki honen balioaren arabera, abiadurek izen desberdinak hartzen dituzte:

- $Ma < 1$ bada, objektuaren abiadura soinuarena baino txikiagoa da eta abiadura *subsonikoa* dela esaten da.
- $Ma \sim 1$ bada, objektuaren abiadura soinuarenaren antzekoa da eta abiadura *transonikoa* dela esaten da.
- $Ma > 1$ bada, objektuaren abiadura soinuarena baino handiagoa da eta abiadura *supersonikoa* dela esaten da.
- $Ma >> 1$ bada, objektuaren abiadura soinuarenaren baino askoz handiagoa da eta abiadura *hipersonikoa* dela esaten da.

Bestalde, aipatu beharra dago gas ideal baten jarioa isoentropikoa denean, Mach zenbakiaren karratua Cauchy zenbakiaren berdina dela:

$$Ma^2 = \frac{v^2}{c^2} = v^2 \frac{\rho}{K} = Ca \tag{72}$$

3.7 Strouhal zenbakia

Strouhal zenbakia honela definitzen da askotan:

$$St = \frac{fl}{v}, \tag{73}$$

non $f =$ oszilazioen maiztasuna ($[f] = T^{-1}$)
$l =$ luzera karakteristikoa
$v =$ jarioaren abiadura.

Parametro honek garrantzia handia du jario oszilakorra agertzen den problemetan, eta jarioa geldikorra ez izateagatik sortutako inertzia-indar lokalen eta konbekzioak sortutako inertzia-indarren arteko zatidura adierazten du. Mota horretako jario ez-geldikorrak fluidoa bere ibilbidean kokatutako gorputz solido baten albotik pasatzean sortzen dira.

3.8 Weber zenbakia

Weber zenbakia azalduz bukatuko dugu zenbaki adimentsionalei buruzko atal hau. Parametro honek inertzia-indarren eta gainazal tentsio-indarren arteko zatidura adierazten du eta honela definitzen da:

$$We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}, \tag{74}$$

non ρ = fluidoaren dentsitatea
v = fluidoaren abiadura
l = luzera karakteristikoa
σ = gainazal tentsioa ($[\sigma] = MT^{-2}$).

Zenbaki hau garrantzitsua izan ohi da bi fluidoren arteko mugalde bat dugunean, gainazal tentsioak eragin handia izaten baitu horrelako kasuetan. Weber zenbakiak garrantzia izan dezakeen problemen adibide arruntak likido geruza fin baten jarioa eta tanten sorrera izan daitezke. Ibai batean zeharreko uraren jarioan, aldiz, gainazal tentsioaren eragina guztiz arbuiagarria da, inertzia- eta grabitazio-indarrak nagusitzen baitira, eta Weber zenbakiaren balioa oso handia da ondorioz ($We >> 1$).

4 Modelaketa dimentsionala

Lanaren azken zati honetan, analisi dimentsionalaren aplikaziorik garrantzitsuenena aztertuko dugu: modelaketa.

4.1 Sarrera

Modelaketa dimentsionalaren helburua ondokoa da: jatorrizko eraikuntza (*prototipo*) baten eskalatutako erreplika (*eredu*) batean esperimentuak egin ahal izatea, ereduarekin lortutako emaitzak prototipoari *proiektatzeko*. Ereduen erabilera oso onuragarria da askotan sistema fisiko edo ingeniaritza-sistemen diseinuan eta proban. Ondo diseinatutako eta eraikitako ereduetan esperimentuak egiteak prototipoan akats garestiak egiteko probabilitatea asko murrizten du. Gainera, kasu batzuetan eskala-osoko produktuetan probak egitea oso zaila edo ezinezkoa izan daiteke.

Ereduak eraikitzea gomendagarria da ondoko hauek lortu nahi ditugunean:

- Prototipoarentzat baliogarriak diren datu esperimentalak.
- Sistema fisiko baten portaera.
- Aldagaien arteko erlazio funtzionalak, forma analitikoa oso konplexua, ez-zehatza edo ezezaguna bada.

Horregatik, orokorrean, prototipoa oso txikia edo oso handia denean, prototipoa eskuragarri ez dugunean edo bertan probak egiteak oso denbora luzea emango lukenean egiten dira ereduak.

Eredua fisikoki prototipoa baino txikiagoa izan behar dela uste oker bat da. *Eskala-txikiko* ereduak ohikoenak izan arren, aukeraketa hori ez da derrigorrezkoa. Adibidez, miniaturazko mekanismoen ezaugarri dinamikoak zehazteko, egokiagoa da *eskala-handiko* eredu bat egitea. Eredua eta prototipoa geometrikoki antzekoak izan behar direla beste ideia oker bat da baita ere. Askotan komenigarria da antzekotasun geometrikoa, baina hori lortzea ez da beti posible izaten, eta geometrikoki antzekoak ez diren ereduak ere erabilgarriak izan daitezke kasu batzuetan.

Ingeniaritzako hainbat diseinu eta probatan erabiltzen dira ereduak, aplikazio horietako batzuk hauek izanik:

- Erreaktore nuklearretako ontziak eta antzeko beste edukiontzi batzuk.
- Urpeko egiturak (urtegiak, adibidez).
- Orokorrean handiak eta konplexuak diren egiturak (zubiak, esate baterako).
- Aerodinamika, hidrodinamika eta talka-efektuekin lotutako gertaerak (eztandak, haizea, olatuak...) .
- Beroaren hedapenarekin lotutako problemak, eta partikularki eroankortasunarekin eta konbekzioarekin.

Modelatzeko, beharrezkoa da modelatuko dugun fenomenoaren oinarri fisikoa ulertzea, aldagai, parametro eta konstante esanguratsu guztiak kontsideratzeko. Baina ez da beharrezkoa aldagai, parametro eta konstante horiek emaitzetan duten eraginari buruzko jakintza analitiko zehatza izatea. Hori da modelaketaren metodo honen ezaugarri erakargarriena, analisi dimentsionalean oinarritua baitago.

Sarrera honekin amaitzeko, modelaketa-esperimentu bat egiteko jarraitu beharreko prozesuen segida aipatuko dugu. Modelaketa eraginkorra izateko, ondoko urratsak orden kronologikoan burutu behar dira:

1. Oinarri teorikoa ezarri, Eredu Legea (4.4.3 atala) barne.
2. Eredua diseinatu.
3. Eredua eraiki.
4. Esperimentuak eta probak egin ereduan.
5. Datu esperimentalak ebaluatu.
6. Ondorioak atera.

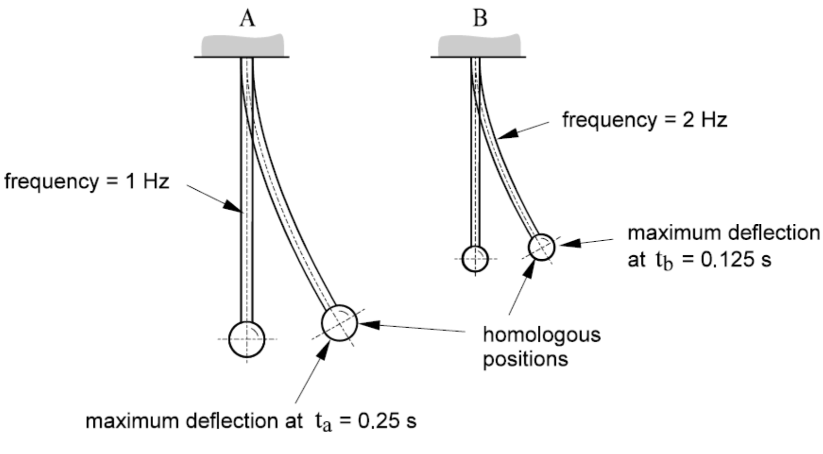
Sarritan ondorioek ereduan aldaketak egiteko beharra adierazten dute. Kasu horietan, goiko protokoloa berriz errepikatu behar da, (2) edo (3) pausotik hasiz normalean. Hain zuzen ere, eredu bat izatearen abantaila nagusia bertan aldaketak egitea prototipoan egitea baino askoz errazagoa, azkarragoa eta merkeagoa dela da.

4.2 Homologia

Homologia kontzeptua orain argitzea komenigarria da, ondoren antzekotasuna definitu ahal izateko. Oro har, homologiak baliokidetasuna esan nahi du. Prototipo bat eta bere eredua geometrikoki antzekoak badira, bi gorputzen artean puntuz puntuko baliokidetasun bat existitzen da. Era horretan lotutako puntu bikoteak puntu *homologoak* direla esaten da. Beste aldagai batzuk, esate baterako tentsioa, deformazioa, tenperatura, abiadura, azelerazioa, etab. ere baliokideak egin daitezke prototipoan eta ereduan. Ezaugarri horiek ere homologoak izan daitezke, baina kontuz ibili behar dugu. Bi gorputzetan puntu homologoetan jasandako tentsioak homologoak dira *denbora homologoetan* gertatzen badira soilik.

Denbora homologoen kontzeptua ulertzea zaila izan daiteke hasiera batean, ez baitu aldiberekotasuna suposatzen. Definizioz, bi prozesuk (gorputzek) denbora homologoetan lortzen dituzte egoera (posizioak, konfigurazioak, etab.) homologoak. Definizio hori zertxobait zirkularra da, denbora homoloak egoera homologoen menpean definitzen dituelako, eta alderantziz. Baina jarraian aztertuko dugun adibidea aproposa da homologia kontzeptua argitzeko.

Irudia 3: Bi ziri oszilakorrek denbora homologoetan lortzen dituzte posizio homologoak. ([15], Figure 17-1)



3 irudian bi ziri ditugu, A eta B, 1 Hz eta 2 Hz-eko maiztasunekin oszilatzen, hurrenez hurren. Zirien pausaguneko posizioak homologoak dira, eta baita desbideratze maximoko posizioak ere. Denbora pausaguneko posizioan neurtzen hasten bagara, zirien desbideratze maximoak $t_A = 0.25$ s eta $t_B = 0.125$ s denboretan lortuko ditugu, hurrenez hurren. Ondorioz, t_A eta t_B denbora homologoak dira, nahiz eta kronologikoki desberdinak izan.

4.3 Antzekotasun espezifikoak

Noiz dira bi gorputz, sistema edo egitura antzekoak? Orokorrean, "A eta B antzekoak dira" entzuten badugu, automatikoki ulertzen dugu "A-ren *itxura* B-renaren antzekoa da, baina handiagoa (edo txikiagoa) da". Adibide horretan antzekotasun geometrikoari buruz hitzegiten ari gara, noski. Baina badaude beste hainbat antzekotasun *espezifiko*. Aldagai posibleen kopuru oso handia dago, eta bakarra bi sistemetarako berdina bada, esan dezakegu bi sistemak *antzekoak* direla aldagai horrekiko. Ondorioz, bi sistemen artean antzekotasun posibleen kopurua oso handia da.

Definizio ez-zehatz hori ez denez lagungarria ereduaren eta prototipoaren arteko erlazio baliotsuak lortzeko, zorrotzagoak izan behar gara antzekotasun motak definitzerako orduan. Jarraian antzekotasun espezifiko erabilienak azalduko ditugu laburki.

4.3.1 Antzekotasun geometrikoa

Tamaina ezberdineko bi gorputz geometrikoki antzekoak dira, txikiena handienaren baliokidea egin badezakegu handipen nahikoarekin. Behaketa soilarekin, esan dezakegu bi zirkulu, bi esfera, bi kubo eta beste solido erregularren edozein bikote geometrikoki antzekoak direla, handipen egokiarekin baliokideak egin baitaitezke. Froga daiteke baita ere, nahiz eta tribiala ez izan, parabola guztiak geometrikoki antzekoak direla.

Baina kurba denek ez dute ezaugarri hori betetzen. Elipseak, adibidez, bi parametro independente erabiliz definitzen dira: a ardatzerdi nagusia eta b ardatzerdi txikia. Bi elipse geometrikoki antzekoak dira $\frac{a}{b}$ ratioa bietan berbera bada soilik.

4.3.2 Antzekotasun zinematikoa

Zinematikak mugimenduak aztertzen dituenez, kasu honetan parte hartzen duten aldagaiak luzera eta denbora dira; indarrek ez dute garrantziarik. Bi sistema mugikor zinematikoki antzekoak dira beraien puntu homologoek mugimendu bera jasaten badute denbora homologoetan. Irizpide honek desplazamendu lineal eta angeluarrak, abiadurak eta azelerazioak biltzen ditu. Azpimarratzekoa da gehienetan aldiberekotasuna ez dela mantentzen: denbora homologoak ez dira orokorrean denbora kronologikoen baliokideak.

4.3.3 Antzekotasun dinamikoa

Dinamikak indarrekin duenez zerikusia, bi gorputz dinamikoki antzekoak dira beraien puntu homologoek indar berberak jasaten badituzte denbora homologoetan. Kasu honetan, *indar* hitzak indar momentuak ere barnehartzen ditu. Beraz, hauen bidez hartzen ditugu kontutan indarrak eta momentuak:

- Kanpo-indarrak (gorputzak kontaktuan).
- Efektu hidrostatikoak (presioa).
- Inertzia-efektuak.
- Barneko efektu elastikoak.
- Grabitazio-efektuak.
- Gainazal-tentsioa (erakarpen molekularra).
- Marruskadura eta biskositate efektuak.

Indar horien konbinazioen ratioak (lehen aztertu ditugun zenbaki adimentsionalak) berdinak badira bi sistemetarako, parte hartzen duten indarrekiko bi sistemak dinamikoki antzekoak direla esaten da. 3 atalean ikusi dugu zenbaki adimentsional horietako askok izen propioa dutela.

4.3.4 Antzekotasun termikoa

Bi gorputz termikoki antzekoak dira, beraien puntu edo gainazal homologoek tenperatura berdinak badituzte denbora homologoetan. Definizio hau ez da oso zehatza, eta zoritxarrez ez da erraza argiagoa egitea. Baina ideia nagusia hau da: bi gorputzetan bero-jarioaren eredua antzekoa bada, gorputz horiek termikoki antzekoak direla kontsidera daiteke.

4.4 Antzekotasun dimentsionala

Antzekotasun dimentsionala modelaketa dimentsionalaren ardatz nagusia da. Aurrerago ikasi dugu sistema fisiko baten portaera esanguratsuak diren aldagai fisikoez osatutako zenbaki adimentsionalen multzo osoak definitzen duela. Honek iradokitzen du bi sistemek aldagai adimentsional guzti horietarako zenbakizko balio berberak badituzte, bi sistemak *dimentsionalki antzekoak* direla. Gainera, dimentsionalki antzekoak diren bi sistema baditugu, beraien portaerak erlazionatuta daude eta bietako batean egindako neurketak besteari proiekta diezazkiokegu. Hori da modelaketa dimentsionalaren muina. Ondorioz, eredu-esperimentu baten lehen urratsa sistemari dagozkion aldagai adimentsionalen multzo osoa eraikitzea da; eta aldagai adimentsional horien balioak ereduarentzat eta prototipoarentzat berdinak egitea bigarrena.

Orain, esanguratsuak diren aldagai fisikoen zerrendan aldagai bakarra dela menpekoa suposatuko dugu. Baldintza oso garrantzitsua da hau. Nahiz eta teorian hainbat menpeko aldagai dituguneko kasuak landu ditzakegun, agertzen diren zailtasunak saihestea ez da erraza izaten gehienetan. Horren ondorioz, bi arau hauek formulatuko ditugu:

- **Modelaketa dimentsionalaren lehen araua.** *Sistema baten aldagai adimentsionalen multzo osoa eraikitzerakoan, multzoak menpeko aldagai fisiko bakarra duela ziurtatu.*
- **Modelaketa dimentsionalaren bigarren araua.** *Sistema baten aldagai adimentsionalen multzo osoa eraikitzerakoan, menpeko aldagai fisiko bakarra aldagai adimentsional bakarrean agertzen dela ziurtatu.*

Lehen araua zailtasunak ekiditeko da, nahiz eta, neurri egokiak hartuz, salbuespenak kudeatu daitezkeen. Bigarren araua erraz bete dezakegu menpeko aldagai fisikoa hondar-aldagaien azpimultzoan jarriz (2.5.1 atala, 4. urratsa). Bi arau horietatik ondoko definizioa idatz dezakegu:

Definizioa 5. *Bi sistema dimentsionalki antzekoak dira sistemak deskribatzen dituzten aldagai adimentsionalak bikoteka identikoak badira egituran zein balioan.*

Horrez gain, aurreko bi arauak betetzen badira, ondoko teorema dugu:

Teorema 3. *Bi sistematarako (prototipoa eta eredua), dagozkien aldagai independenteez soilik osatutako aldagai adimentsionalen bikote guztiak identikoak badira, orduan falta den bikotea osatzen duten aldagai adimentsionalak ere (menpeko aldagaia dutenak) identikoak dira.*

Hau da, prototipoa eta bere eredua N_P bikotekako egitura identikodun aldagai adimentsionalez deskribatzen badira, eta horietako $N_P - 1$ bikote numerikoki identikoak badira (prototiporako eta eredurako), orduan falta den bikotea ere numerikoki identikoa izango da. Beraz, N_P bikote guztiak izango dira numerikoki identikoak.

Frogapena. Buckingham-en teoremaren arabera, sistema baten portaera honako erlazio baten bidez deskriba daiteke:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{N_P}), \tag{75}$$

non N_P aldagai adimentsionalen kopurua den, eta horietatik π_1-ek soilik du menpeko aldagai fisikoa. Beraz, $N_P - 1$ aldagai adimentsionalek $(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{N_P})$ aldagai independenteak soilik dituzte. Ondorioz, azken talde hau identikoa baldin bada bi sistemetarako, orduan π_1 ere identikoa izan behar da bietarako. Horrek teorema frogatzen du. □

Korolarioa 4. *Bi sistemak bikotekako egitura eta balio bereko $N_P - 1$ aldagai adimentsional badituzte (eta aldagai independentez osatuak soilik), orduan bi sistema horiek dimentsionalki antzekoak dira.*

Korolario honen laguntzaz antzekotasun dimentsionalaren aurreko definizioa zorroz dezakegu:

Definizioa 6. *Bi sistemak (bikotekako egitura bereko N_P aldagai adimentsional dituztenak) bikotekako zenbakizko balio identikoko n aldagai adimentsional badituzte, orduan*

- $n = N_P - 1$ bada, bi sistemak *dimentsionalki antzekoak* dira.
- $0 < n < N_P - 1$ bada, bi sistemak *dimentsionalki partzialki antzekoak* dira.
- $n = 0$ bada, bi sistemak *dimentsionalki ez-antzekoak* dira.

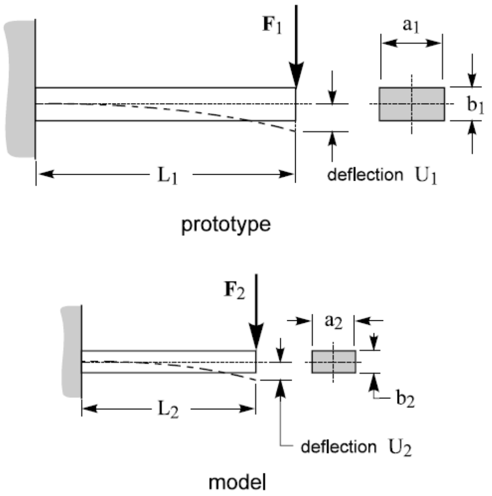
Jarraian aztertuko dugun adibideak definizio honen erabilera argituko digu.

4.4.1 Adibidea: Barra baten okertzea karga kontzentratu baten eraginez

Demagun gure prototipoa altzairuzko (Young-en modulua $E_1 = 2 \times 10^{11}$ N/m^2) barra bat dela, $L_1 = 2.4$ m luzerakoa, eta bere sekzioa $a_1 = 0.15$ m zabal eta $b_1 = 0.05$ m lodi dela. Haga horrek $F_1 = 6400$ N-eko karga jasan behar du. Modelaketa-esperimentu baten bidez, 4 irudiko U_1 okertzea zein izango den jakin nahi dugu.

Lehen pausoa aldagai adimentsionalen multzo osoa lortzea izango da. Horretarako, 2.5.1 ataleko urratsak jarraituko ditugu. Eman dizkiguten datuak begiratuz, kontura gaitezke aldagai fisiko horien dimentsioak FL sistema dimentsionala erabiliz honela idatz ditzakegula:

Irudia 4: Karga kontzentratu baten eraginez okertutako barra baten modelaketa: prototipoa (goian) eta eredua (behean). ([15], Figure 17-7)



Aldagaia	Ikurra	Dimentsioa
okertzea	U	L
sekzioaren zabalera	a	L
luzera	L	L
karga kontzentratua	F	F
sekzioaren lodiera	b	L
Young-en modulua	E	FL^{-2}

6 aldagai ditugu, eta FL sistema dimentsionalaren ordena 2 denez, 6 - 2 = 4 aldagai adimentsional lortu behar ditugu Buckingham-en teoremaren arabera. b eta E magnitudeak aukeratuko ditugu oinarri moduan (oinarri osoa betetzen dute, matrize dimentsionalaren determinantea ez nulua da eta), eta hondar bakoitzari dagokion aldagai adimentsionala eraikiko dugu. Hauek dira lortzen ditugun zenbaki adimentsionalak:

$$\pi_1 = \frac{U}{b}; \qquad \pi_2 = \frac{a}{b}; \qquad \pi_3 = \frac{L}{b}; \qquad \pi_4 = \frac{F}{b^2 E} \tag{76}$$

Eman dizkiguten datuak ordezkatuz, ondokoak dira π_2, π_3 eta π_4-ren balioak prototipoaren kasuan:

$$\pi_2 = \frac{a_1}{b_1} = 3; \qquad \pi_3 = \frac{L_1}{b_1} = 48; \qquad \pi_4 = \frac{F_1}{{b_1}^2 E_1} = 1.28 \times 10^{-5} \tag{77}$$

Jarraian, gure eredua aluminiozkoa ($E_2 = 6.65 \times 10^{10}$ N/m^2) eta $a_2 = 0.03$ m-koa izatea *aukeratuko* dugu. Ereduarentzat aurreko aldagai adimentsional horien balioa berbera izatea nahi dugunez, ondoko baldintzak bete beharko ditu ereduak:

$$\pi_2 = \frac{a_2}{b_2} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad b_2 = \frac{a_2}{3} = 0.01 \text{ m} \tag{78}$$

$$\pi_3 = \frac{L_2}{b_2} = 48 \qquad \Rightarrow \qquad L_2 = 48 \cdot b_2 = 0.48 \text{ m} \tag{79}$$

$$\pi_4 = \frac{F_2}{{b_2}^2 E_2} = 1.28 \times 10^{-5} \qquad \Rightarrow \qquad F_2 = 1.28 \times 10^{-5} \cdot {b_2}^2 E_2 = 85.12 \text{ N} \tag{80}$$

Ondorioz, b_2, L_2 eta F_2 magnitudeei balio horiek ematen badizkiogu gure ereduan, π_2, π_3 eta π_4 balioak berdinak dira prototipoarentzat eta ereduarentzat. N_P = 4 aldagai adimentsional ditugu, eta horietatik N_P - 1 = 3 identikoak direnez bientzat, eredua eta prototipoa dimentsionalki antzekoak dira 4 korolarioaren arabera. Horrez gain, π_2, π_3 eta π_4-ek aldagai fisiko independenteak bakarrik dituzte; ondorioz, 3 teoremaren arabera, falta den aldagai adimentsionala (π_1 kasu honetan) ere identikoa izango da prototipoarentzat eta ereduarentzat. Horrela, ondokoa dugu:

$$\pi_1 = \frac{U_1}{b_1} = \frac{U_2}{b_2} \qquad \Rightarrow \qquad U_1 = U_2 \cdot \frac{b_1}{b_2} \tag{81}$$

Orain, ereduaren okertzearen *neurketa* eginez (kalkulatutako baldintzetan), zuzenean kalkula dezakegu gure prototipoaren okertzea zenbatekoa izango den. Demagun $U_2 = 0.0189$ m-ko okertzea neurtu dugula ereduan. Zuzenean ondorioztatzen dugu prototipoa U_1= 0.0945 m okertuko dela.

Ereduarentzako, antzekotasun dimentsional osoak agindutako $F_2 = 85.12$ N-eko karga erabili beharrean, beste karga bat erabiliko bagenu, π_4 ez litzateke identikoa izango prototipoan eta ereduan. Honen ondorioz *antzekotasun partziala* soilik lortuko genuke, ez osoa, eta ezingo genuke prototipoaren okertzearen balioa zein izango zen kalkulatu ereduan neurketak eginez soilik.

4.4.2 Eskala Faktoreak

Eskala faktoreen erabilerak asko errazten eta hobetzen du modelaketa-prozesua: datuen kudeaketa erraztu, teknika ulergarriagoa egin eta prozedura bera sinpleagotzen du.

Eskala faktore batek beti egiten dio erreferentzia aldagai fisiko jakin bati. Horregatik, edozein modelaketa-esperimenturen eskala faktore kopurua aldagai fisiko kopuruarenaren berdina da. Aldagai fisiko bati dagokion eskala faktorea S letra larriaz adieraziko dugu, magnitude fisikoaren ikurraren azpiindizearekin. Esate baterako, L ikurra erabiltzen badugu luzera adierazteko, Luzera Eskala Faktorea S_L izango da.

Eskala faktore baten definizioa ondokoa da:

Definizioa 7. *Aldagai fisiko jakin bati dagokion eskala faktorea aldagai horren ereduaren eta prototipoaren zenbakizko balioen arteko zatidura da.*

Adibidez, prototipoaren luzera $L_1 = 3.4$ m bada, eta bere ereduarena $L_2 = 1.7$ m, Luzera Eskala Faktorea hau da:

$$S_L = \frac{L_2}{L_1} = \frac{1.7}{3.4} = 0.5 \tag{82}$$

Ereduaren balioa beti ipini behar dugu zenbakitzailean, eta 2 azpiindizea daroa; prototipoaren balioa beti doa izandatzailean, 1 azpiindizearekin. Ikus daitekeenez, eskala faktore bat beti da zenbaki adimentsional bat.

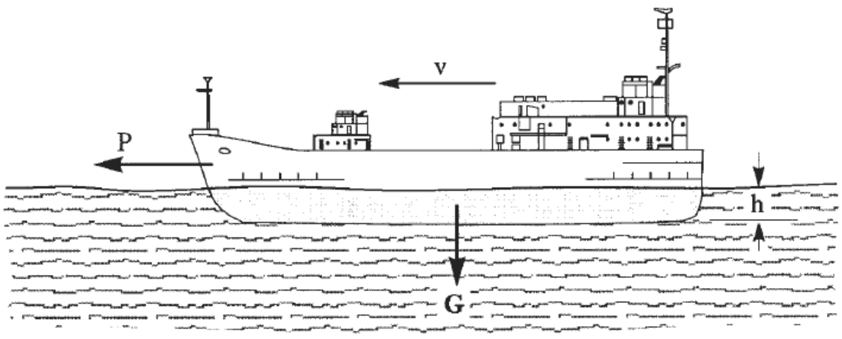
4.4.3 Eredu Legea

Definizioz, Eredu Legea modelaketa kasu jakin bati dagokion eskala faktoreen arteko erlazio, edo erlazio-multzo, bat da. Nahiz eta eskala faktoreen arteko erlazio bat baino gehiago egon, Eredu Legea bakarra da.

Eredu Legea modelaketa-esperimentu bat diseinatzeko tresna nagusia da, eta horregatik edozein prestaketa fisiko edo saiakera burutu aurretik lortu behar da. Horrez gain, Eredu Lege bat jada existitzen diren edo hipotetikoak diren sistemen portaeren konparaketa egiteko erabili daiteke askotan. Kasu horietan, konparaketak eredu bat eraiki gabe edo inolako probarik egin gabe egin daitezke. Laburbilduz: Eredu Legea saiakuntzarik gabe erabilgarria izan daiteke, baina saiakuntzak ezin dira erabilgarriak izan Eredu Legerik gabe.

Eredu Legearen determinazioa beti egiten da aldagai adimentsionalak erabiliz. Adibide bat aztertuz ikusiko dugu nola lortu Eredu Lege bat:

Demagun, modelaketa-esperimentu baten bidez, G_1 pisuko itsasontzi bat v_1 abiaduraz atoian eramateko beharrezko P_1 potentzia zein den jakin nahi dugula. 5 irudian ikus dezakegu sistemaren eskema.



Irudia 5: Pisu jakin bateko itsasontzi bat atoian eramateko beharrezko potentzia. ([15], Figure 17-9)

4.4.1 adibidean erabilitako urrats berberak jarraituz, gure sistemari dagozkion aldagai adimentsionalak lortuko ditugu. Aldagai fisiko esanguratsuen zerrendan, eman dizkiguten datuez gain, g grabitatearen azelerazioa eta ρ uraren dentsitatea ere sartu behar ditugu. g parametroa kontuan hartu behar dugu itsasontziaren higidurak olatuak sortzen dituelako eta hauek, beraien mugimendu bertikala dela eta, grabitatearen eragina pairatzen dutelako. Horrez gain, ρ dentsitatea sartu behar dugu inertzia-indarrengatik eta h kalatuan duen eraginagatik, azken honek era berean eragina duelako beharrezko potentzian. MLT sistema dimentsionala erabil dezakegu:

Aldagaia	Ikurra	Dimentsioa
beharrezko potentzia	P	ML^2T^{-3}
itsasontziaren pisua	G	MLT^{-2}
itsasontziaren abiadura	v	LT^{-1}
uraren dentsitatea	ρ	ML^{-3}
grabitatearen azelerazioa	g	LT^{-2}

5 aldagai eta 3 dimentsio ditugunez, 5 - 3 = 2 aldagai adimentsional daude. Oinarri osoa v, ρ eta g magnitudeak erabiliz osatzen badugu, ondokoak lortuko ditugu:

$$\pi_1 = \frac{Pg^2}{v^7\rho}; \qquad \pi_2 = \frac{Gg^2}{v^6\rho} \tag{83}$$

Orain, eredua prototipoaren dimentsionalki antzekoa izatea nahi baldin badugu, π_2-ren zenbakizko balioa bientzat berbera izatea *egin* behar dugu. Honen arrazoia $N_P = 2$ dela da, 4 korolarioaren arabera N_P - 1 = 1 aldagai adimentsional identikoak izan behar direlako. Horrez gain, aldagai adimentsional horrek aldagai fisiko independenteak soilik izan behar ditu, horregatik π_2 aldagai adimentsionala da kasu honetan identikoa egin behar duguna (P potentzia beste aldagaien menpekoa delako). Baina honen balioa berbera bada prototipoarentzat eta ereduarentzat, orduan π_1 ere berbera izan behar da (3 teorema). Beraz, hau idatzi dezakegu:

$$\pi_1 = \frac{P_1 {g_1}^2}{{v_1}^7 \rho_1} = \frac{P_2 {g_2}^2}{{v_2}^7 \rho_2} \tag{84}$$

$$\pi_2 = \frac{G_1 {g_1}^2}{{v_1}^6 \rho_1} = \frac{G_2 {g_2}^2}{{v_2}^6 \rho_2} \tag{85}$$

Azken bi ekuazio hauek honela berridatziko ditugu:

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^7 \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1}\left(\frac{g_2}{g_1}\right)^2 \tag{86}$$

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^6 \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{G_2}{G_1}\left(\frac{g_2}{g_1}\right)^2 \tag{87}$$

Eta aldagai bakoitzari dagokion eskala faktorea ordezkatuz:

$${S_v}^7 S_\rho = S_P {S_g}^2; \qquad {S_v}^6 S_\rho = S_G {S_g}^2 \tag{88}$$

Azken erlazio hauek, definizioz, sistemaren Eredu Legea osatzen dute. Kasu konkretu honetan $S_g = S_\rho = 1$ betetzen denez (uraren dentsitatea eta grabitatearen azelerazioa berdinak dira prototipoa zein eredua erabili), aurreko erlazioak sinplifikatu egiten dira:

$${S_v}^7 = S_P; \qquad {S_v}^6 = S_G \tag{89}$$

Erlazio hauek eta zenbakizko datu konkretuak erabiliz, bilatzen ari garen soluzioa lor dezakegu 4.4.1 adibidean egin dugun bezala. Horretarako, eredua lortutako baldintzekin eraiki eta bertan neurketa bat egin beharko dugu.

4.4.4 Aldagai motak modelaketan

Aurreko modelaketa-esperimentuen adibideak aztertuz, hiru motako aldagaiak aurki ditzakegu: batzuk *eman* egin dizkigute, beste batzuk Eredu Legea erabiliz *zehaztu* ditugu, eta gainerakoak ereduan *neurtuak* izan dira. Hau ikusita, modelaketa prozesuan agertzen diren aldagaiak sailkatzeko maila desberdin hauek definituko ditugu:

- **1. Maila.** Aldagai bat modu askean aukera badezakegu, edo *a priori* eman badaiteke, edo modelaketarekin zerikusirik ez duen modu batean zehaz badaiteke, 1. Mailakoa da. Hau da, 1. Mailako aldagai baten zenbakizko balioa jakina da, edo lor daiteke, modelaketa-prozesua hasi aurretik.
- **2. Maila.** Aldagai baten zenbakizko balioa Eredu Legeak zehazten badu, 2. Mailakoa da. Aldagaiaren balioaren determinazioan edozein modutan Eredu Legeak parte hartzen badu, aldagaia maila honetakoa da.
- **3. Maila.** Mota honetako aldagaien zenbakizko balioak ereduan neurketa zuzena eginez zehazten dira. Ondorioz, ereduari dagozkion aldagaiak soilik izan daitezke maila honetakoak.

Maila bakoitzeko zenbat aldagai espero behar ditugun kalkulatzeko, ikur hauek erabiliko ditugu:

$$\begin{aligned}
N_P &= \text{aldagai adimentsionalen kopurua} \\
N_S &= \text{eskala faktoreen kopurua} \\
N_V &= \text{aldagai fisiko esanguratsuen kopurua} \\
N_d &= \text{oinarrizko dimentsionalitateen kopurua} \\
N_e &= \text{Eredu Legeko ekuazioen kopurua} \\
(N_V)_1 &= \text{1. Mailako aldagaien kopuru totala prototipoan eta ereduan} \\
(N_V)_2 &= \text{2. Mailako aldagaien kopuru totala prototipoan eta ereduan} \\
(N_V)_3 &= \text{3. Mailako aldagaien kopuru totala prototipoan eta ereduan}
\end{aligned}$$

Aldagai bakoitzak bere eskala faktore propioa duenez,

$$N_S = N_V \tag{90}$$

betetzen da. Gainera, aldagai adimentsional bakoitzak Eredu Legeko erlazio bat sortzen du:

$$N_e = N_P \tag{91}$$

Baita ere, Buckingham-en teoremaren arabera:

$$N_P = N_V - N_d \tag{92}$$

Bestalde, $2 \cdot N_V$ aldagai daudenez prototipoa eta eredua karakterizatzeko eta N_e ekuazio Eredu Legean, orduan $2 \cdot N_V - N_e$ aldagai *ez* ditu Eredu Legeak zehazten. Beraz:

$$(N_V)_1 + (N_V)_3 = 2 \cdot N_V - N_e = 2 \cdot N_V - (N_V - N_d) = N_V + N_d \tag{93}$$

Ereduan *neurtu* beharreko aldagaia bakarra da, orduan:

$$(N_V)_3 = 1 \tag{94}$$

$$(N_V)_1 = N_V + N_d - 1 \tag{95}$$

Bukatzeko, azken emaitza horiek ordezkatuz:

$$(N_V)_1 + (N_V)_2 + (N_V)_3 = 2 \cdot N_V \qquad \Rightarrow \qquad (N_V)_2 = N_V - N_d = N_P \tag{96}$$

Konproba daiteke aurreko adibideetan kopuru horiek betetzen direla.

Kasu batzuetan posiblea da bi aldagai beste aldagai berri batean elkartzea, 2. Mailako aldagaien kopurua txikiagotuz. Horrek ereduaren ezaugarriak aukeratzerako orduan askatasun gehiago ematen digu, eta oso gomendagarria izan ohi da praktikan.

5 Ondorioak

Lan hau burutzean atera ditudan ondorio nagusiak ondokoak izan dira:

- Lan osoan zehar hainbat adibide aztertu ditugu analisi dimentsionala benetan erabilgarria dela erakusteko. Ikasi dugu analisi formal bat burutzea posiblea ez denean ere aldagaien arteko erlazioak lor ditzakegula. Gai honi buruzko liburu eta testu askoren hitzaurreak eta sarrerak irakurriz, analisi dimentsionala erraza dela pentsa dezakegu, baina hori uste izateak kalte egingo liguke.

  Metodoa oso logikoa da eta ondo erabiliz gero, lortzen diren emaitzak zuzenak dira, bai. Baina zehaztasun hori lortzeko, lehenengo urratsa aztergai dugun fenomenoari buruzko fisika ondo ulertzea eta formulatzea da. Erabiliko ditugun aldagai edo parametro esanguratsu independente guztiak ondo aukeratzea guztiz beharrezkoa da, emaitza zuzenak lortu nahi baditugu. Eta hori ez da erraza izaten kasu askotan.

  Hala ere, oso komenigarria da ahal dugun neurrian analisi dimentsionala aplikatzea, esfortzu gutxirekin emaitza baliogarriak eman diezazkiguke eta.

- Modelaketa-esperimentuetan analisi dimentsionala erabiltzeak onura handiak dakartza. Egia da esperimentu mota guztietan ezin daitekeela aplikatu, baina aplika daitekeenean analisi dimentsionala ez erabiltzeak esperimentuaren diseinua askoz astunagoa eta baldarragoa egin ohi du.

  Ondokoak dira analisi dimentsionala erabiltzeak modelaketa-esperimentuei ekar diezazkioken onura horietako batzuk: doitu beharreko aldagai independenteen kopurua murriztuz ikerketa esperimentala asko murriz daiteke; aldagai baten eragina beste aldagai baten aldaketa neurtuz zehaz daiteke; ikertzen ari garen fenomenoan aldagai jakin batek eraginik ez duela erakutsi diezaguke, edo aldagai esanguratsuren bat ez dugula kontutan hartu; esperimentuen kostu ekonomikoa asko murriz daiteke eskalatutako ereduetan saiakerak eginez; etab.

- Analisi dimentsionalaren aplikazio gehienak ez dira zalantzan jartzen, esperimentuek zuzenak direla frogatzen baitute. Hala ere, metodoaren oinarri teoriko eta filosofikoari buruzko eztabaida etengabekoa da autore desberdinen artean; bakoitzak hari buruzko interpretazio propioa du eta irizpide desberdinak erabiltzen dituzte metodoa azaltzeko. Matematikariek oinarrizko argudio horietan zorroztasun falta sumatu eta gaia beraien eran berdefinitzeko joera izan ohi dute; fisikari eta ingeniari askok, aldiz, analisia formulatzean erabilitako hitzen benetako esangura fisikoari buruzko zalantzak izaten dituzte.

  Arazo nagusia hau da: analisi dimentsionalaren printzipioak ulertzeko, zientziaren kontzeptu oinarrizkoenetara jo behar dugu, eta horiek ondo ulertzea ez da batere tribiala. Horregatik, lan honen hasieran kontzeptu garrantzitsuenak ondo definitu eta argitzea beharrezkoa iruditu zait, lanean zehar horiek zuzentasunez erabili ahal izateko.

Erreferentziak

[1] Bridgman, P.W. (1922, 1931). *Dimensional Analysis.* Yale University Press.

[2] Bridgman, P.W. (1969). *Dimensional Analysis.* Encyclopaedia Britannica 7, 439-449.

[3] Buckingham, E. (1914). *On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations.* Physical Review 4, 345-376.

[4] Daw, M. S. (2008). *Introduction to Dimensional Analysis.* Clemson University.

[5] Fourier, J.B.J. (1822). *Théorie analitique de la chaleur.*

[6] Gibbings, J. C. (2011). *Dimensional Analysis.* Springer. ISBN 978-1-84996-316-9.

[7] Ipsen, D.C. (1960). *Units, Dimensions and Dimensionless numbers.* McGraw-Hill.

[8] Palacios, J. (1964). *Análisis Dimensional.* Espasa-Calpe, S.A.

[9] Pérez Rodríguez, M. (2012). *Análisis dimensional de los modos de vibración de un eje ferroviario.* Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III.

[10] Rayleigh, L. (1915). *The Principle of Similitude.* Nature 95, 66-68.

[11] Reynolds, O. (1883). *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels.* Philosophical Transactions of the Royal Society 174, 935-982.

[12] Riabouchinsky, D. (1911). *Méthode des variables de dimension zéro et son application en aérodynamique.* L'Aérophile, 407-408.

[13] Sonin, A. A. (2001). *The Physical Basis of Dimensional Analysis.* Department of Mechanical Engineering, MIT.

[14] Sotolongo Costa, O. (2003). *Análisis Dimensional.* Universidad de La Habana.

[15] Szirtes, T. (2007). *Applied Dimensional Analysis and Modeling.* Buttenworth-Heinemann. ISBN 0-07-062811-4.

[16] Tan, Q. M. (2011). *Dimensional Analysis With Case Studies in Mechanics.* Springer. ISBN 978-3-642-19233-3.

[17] Vaschy, A. (1892). *Sur les lois de similitude en physique.* Annales Télégraphiques 19, 25-28.

[18] Zohuri, B. (2015). *Dimensional Analysis and Self-Similarity Methods for Engineers and Scientists.* Springer. ISBN 978-3-319-13475-8.

[19] `https://en.wikipedia.org/wiki/SI_base_unit`

[20] `https://en.wikipedia.org/wiki/Supercritical_flow`

[21] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cavitation`

[22] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_number`

[23] `http://www.engineeringtoolbox.com/mach-number-d_581.html`