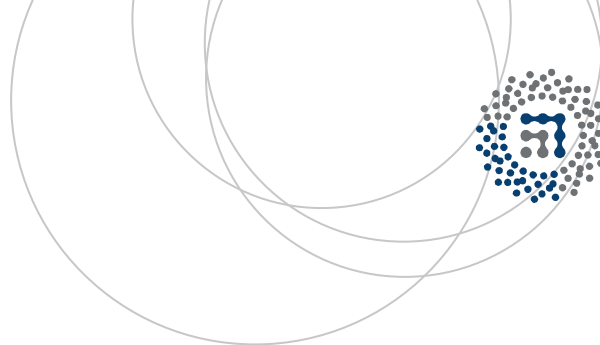


eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea



ZTF-FCT

Zientzia eta Teknologia Fakultatea  
Facultad de Ciencia y Tecnología



Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado  
Fisikako Gradua / Grado en Física

## Random Matrix Theory eta aplikazioa Kaos Kuantikoan

Egilea/Autora:  
Itsasne Iparragirre Apraiz  
Zuzendaria/Director:  
Jon Urrestilla Urizabal



## Laburpena

Gradu amaierako lan honetan ausazko matrizeen teoriari, RMT-ri, buruzko sarrera orokor bat egiten da ondoren aplikazio fisiko bat emateko. Teoriaren aplikazioa egiteko Kaos kuantikoa deritzon fisikaren arloa erabiliko da. Lehenik eta behin, RMT-ren kontzeptu batzuk azalduko dira helburutzat lehen auzokideen distantziaren distribuzioaren espresio lortzea izanik. Izan ere, distribuzio honek erakutsiko baititu Kaosak kuantikoki uzten dituen aztarnak. Bigarren kapituluan, aplikazio fisikoa azalduko da. Lehenengo Kaosean RMT nola aplikatzen den ikusiko da, ondoren adibide batzuen bidez argituz, eremu magnetiko batean dagoen hidrogeno atomoa eta billar kuantikoak izenarekin ezagutzen diren sistemak, batik bat.

## Resumen

En este trabajo de fin de grado tenemos una introducción general de la teoría de matrices aleatorias, RMT, la cual posteriormente se utilizara para aplicarlo en un sistema físico. Esta aplicación se realizara en la física conocida como el Caos Cuántico. En primer lugar, se explica la obtención de algunos conceptos de RMT con el objetivo de alcanzar la expresión de la distribución de la distancia a primeros vecinos. Ya que, esta distribución muestra las huellas que deja el caos en cuántica. En el segundo capítulo, se muestra la aplicación física. Primero se explica cómo se aplica RMT en el caos cuántico y después se muestran algunos ejemplos, tales como, el átomo de hidrogeno en un campo magnético y los sistemas conocidos como billares cuánticos.

## Abstract

In this work we have a general introduction to random matrix theory, RMT, that later is used to apply to a physical system. This application will be held in an area of physics known as quantum chaos. Firstly, we are going to explain how to obtain some concepts of RMT in order to achieve an expression for the distribution of nearest neighbor spacing. Since this distribution shows the traces that chaos left in quantum. In the second chapter the physical application is shown. Firstly, it is explained how RMT is applied in quantum chaos and then some examples are given, such as, the hydrogen atom in a magnetic field and the systems known as quantum billiards.

# Gaien Aurkibidea

<b>1</b>	<b>Sarrera</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Random Matrix Theory</b>	<b>3</b>
2.1	Sarrera . . . . .	3
2.2	Multzo gausiarrak . . . . .	4
2.3	Baterako probabilitate dentsitatearen funtzioa . . . . .	6
2.3.1	Matrizeen elementuak . . . . .	6
2.3.2	Matrizeen autobalioak . . . . .	9
2.4	Egoeren dentsitatea . . . . .	12
2.5	Unfolding prozesua . . . . .	13
2.6	Distantzia laburretako estatistikoak . . . . .	16
2.6.1	Lehenengo auzokideekiko distantzia . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Fisikan aplikazioa: Kaos Kuantikoa</b>	<b>21</b>
3.1	Kaos Klasikoa eta kuantikoa . . . . .	21
3.2	RMT-ren aplikazioa . . . . .	22
3.2.1	BGS suposizio . . . . .	24
3.2.2	Adibideak . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Ondorioak</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Erabilitako programak</b>	<b>31</b>
A.1	Egoera dentsitatea . . . . .	31
A.2	Lehenengo auzokideekiko distantzia . . . . .	32
	<b>Bibliografia</b>	<b>34</b>

## 1 Sarrera

Ausazko matrizeen teoria, RMT<sup>1</sup> 1930. urtean sortu zen eredu estatistiko bat da baina ez zuen bere lehenengo erabilera izan 1950 arte. Urte honetan Fisika Nuklearrean aplikatu zen eta bere arrakastaz ohartu ziren, geroztik garapen itzela izan baitu.

Hasieran Wigner-en proposizioan oinarrituz gorputz askoko sistema konplexuetan erabiltzen zen soilik. Geroago baieztatu da bere aplikazioa beste hainbat sistema motatan egin daitekeela. Gaur egun hainbat arlotan aplikatzen da, fisikan zein matematikan. Fisikaren barnean kaos kuantikoan, bi dimentsioko Grabitate kuantikoan, ultrasoinuen erresonantzia eta beste arlo batzuetan aplikatu da. Matematikan aldiz, Riemann-en zeroak kalkulatzeko erabili da.

Teoria honekin aztertzen diren sistemak oso konplexuak dira, zeina euren hamiltondarraren itxurak ez duen garrantzirik. Hau da, sistemen energien fluktuazio lokalak soilik interesatzen zaizkigu, sistema bakoitzak dituen berezko propietateak ez baitute informazio baliagarria ematen. Hori dela eta, fisikoki elkarrekintza guztiak ekuiprobableak direla suposatzen da, ez baitakigu zein den egokiena. Elkarrekintza zehatzaren informazioa galtzen dugu eta energiaren fluktuazioen propietateak soilik aztertzen dira. Sistema bakoitzaren eragin globala ezabatu egingo dugu unfolding deituriko prozesu batekin. Horrela, sistema guztiak batez besteko dentsitatearen jarrera berdintsua izango dute, eta sistemen multzo bat aztertu ahal izango dugu.

Hortaz, sistemaren inguruan behar dugun informazio guztia bere propietate simetrikoak dira. Simetria hauen arabera matrizeen multzoak eraikitzen dira, modu honetan multzo bakoitzak sistema desberdin bat adieraziko du. Schrödinger-en ekuaziotik abiatzen bagara, hau da, fisikoki neurtu daitezkeen eragileetan oinarritzen bagara, matrizeak hermitikoak izan behar dira. Hortik abiatuz Dyson-ek frogatu zuen lau multzo bereiz daitezkeela, multzo gauziarrak izenekin ezagutzen direnak: GDE<sup>2</sup>, GOE<sup>3</sup>, GUE<sup>4</sup> eta GSE<sup>5</sup>. Lan honetan lehenengo hiru multzoak aztertuko dira, izan ere, euren simetriak, gero aipatuko direnak, esperimentalki gehien ematen direnak baitira.

Teoria honen funtsa matrizeetan dago, aztertzen ari garen sistemaren hamiltondarra ausazko hamiltondarren multzo bategatik ordezkatzeko da zeinek sistemaren simetria batzuk dituzten. Hau da, sistemaren simetriak betetzen dituen ausazko matrizeen multzo bat sortzen da sistema ordezkatzeko. Matrizean ausaz sartutako zenbaki hauek bataz besteko nulua eta  $\sigma^2$  bariantza duten zenbakiak izango dira. Ondoren, behin ausazko matrizea sortu dela, hamilton-

<sup>1</sup>Ausazko matrizeen teoriaren siglak ingelesez, Random matrix theory

<sup>2</sup>Multzo gauziarrak eta diagonalaren siglak ingelesez, Gaussian Diagonal Ensemble

<sup>3</sup>Multzo gauziarrak eta ortogonalaren siglak ingelesez, Gaussian Orthogonal Ensemble

<sup>4</sup>Multzo gauziarrak eta unitarioaren siglak ingelesez, Gaussian Unitary Ensemble

<sup>5</sup>Multzo gauziarrak eta simpletikoaren siglak ingelesez, Gaussian Symplectic Ensemble

dar horien autobalioak kalkulatu dira espektro energetikoa lortzeko. Hortik estatistikoaren laguntzaz sistema bakoitzaren jarrera behatu daiteke.

Ikusi dezakegun bezala, mekanika estatistikoan erabiltzen den metodoarekin antzekotasuna dauka, izan ere biak estatistikan oinarritzen dira. Bien desberdintasuna aukeratutako multzo estatistikoan dago. Mekanikan estatistikoan hamiltondar bakar batetik abiatuz hasierako baldintzak desberdinak dituen sistemen multzo bat hartzen dugu. RMT-en, aldiz, hamiltondarren multzo bat kontsideratzen da sistema bakar bat adierazteko.

Lanaren helburua ausazko matrizeen teoriarik nondik norakoak aipatzea da, hau da, teoriaren planteamendu orokor bat egitea ondoren aplikazio fisikoa emateko. Horregatik lanaren zati handi bat bibliografikoa dela esan daiteke. Fisikaren historia kontuan izanda teoria hau berria da, horregatik, bestalde ere, helburuetako bat teoria honen berri ematea da. Ondoren, errealitatean erabiltzen den teoria dela ikusteko fisikan aplikazio batzuk komentatuko dira laburki. Horretarako, zientzialariek lortutako emaitza batzuk aztertuko ditugu.

Lana bi ataletan zatitu dugu. Lehenengo zatian geroago aztertuko diren sistema fisikoak azaltzeko beharrezkoak ditugun erremintak azalduko ditugu. Alegia, ausazko matrizeen teoriaren azalpen batzuk emango ditugu. Erreminta hauen artean azkenengo estatistikoa soilik da geroago erabiliko dena baina puntu horretara heltzeko hainbat pausuren azalpena beharrezkoa da, probabilitate dentsitatearen lorpena, batik bat. Halatan, lehen zati hau ere hainbat azpi ataletan zatitu dugu hasierako sarreratxoan azalduko dugun bezala. Atal honetan lortutako emaitza teorikoak frogatzeko Wolfram Mathematica programaz baliatu gara. Frogapen hau egiteko erabili diren programak lanaren bukaeran dauden gehigarrietan aurki daitezke.

Lanaren bigarren zatian ausazko matrizeen teoriak fisikan duen aplikazioa komentatzen da, aplikaziorako Kaos Kuantikoa deritzon fisikako arloa erabili da. Hasieran teoria eta fisikako arlo honen loturak emango ditugu eta ondoren benetako adibide batzuk aipatuko ditugu esandakoa berresteko. Bertan ikusiko da, aipatutako estatistikoak, kaos kuantikoaren aztarnak erakusten dituela, energiaren endekapen eza batik bat.

## 2 Random Matrix Theory

### 2.1 Sarrera

Esan bezala teoria honen funtsa sistema baten hamiltondarra hamiltondarren multzo batengatik ordezkatzean datza, non hamiltondar hauek sistemaren simetria zehatzak betetzen dituzten. Ordezkatuko den hamiltondar honek espin eta paritate zehatzak izango ditu. Hau da, hamiltondarra bere espin totalaren eta paritatearen espazioan eraikita egongo da, euren autofuntzioen oinarrian, hain zuzen ere. Modu honetan, blokeka banatuta dagoen matrize bat izango dugu eta  $N \times N$  dimentsioko bloke bakoitzaren azterketa egingo da. Hilbert-en espazioa infinitua mugatu egiten dugu, matrize infinituak izatetik matrize finituak izatera pasatzen gara. Bloke desberdinak nahasten baditugu lortutako emaitzak okerrak izan daitezke, autobalioen arteko korrelazioa desagertu daitekeelako eta ez genuke energia mailen alderapena ikusiko, hau da, kaosaren aztarnak galduko lirakeke. Beraz, fluktuazioen azterketa egiterakoan oso garrantzitsua da aztertzen ari garen hamiltondarrak espin eta paritate berdinak izatea eta baita ere espeketroak osoak eta puruak izatea.

Pasarte honen helburua ausazko matrizeen teoriak auresaten dituen adierazpen teorikoak lortzea da, energien lehen auzokideen distantziaren distribuzioa<sup>6</sup> lortzea, hain zuzen ere. Izan ere, estatistiko honek erakutsiko baitigu energia mailen artean endekapena badagoen edo ez.

Horretarako lehenik eta behin matrizeek izan behar dituzten simetriak finkatu behar ditugu. Errealitatean neurtu ahal diren sistema fisikoak aztertuko ditugunez, jakina denez, sistema hauek matrize hermitikoen bitartez adierazten dira. Hortaz, erabiliko diren matrize guztiak hermitikoak izango dira, hau da, lortutako energia mailak errealak izango dira. RMT-en mota honetako ausazko matrizeak multzo gaussiarrek biltzen dituzte. Ikusiko dugun bezala multzo gaussiar honen barnean beste azpimultzo batzuk bereiz daitezke simetrien arabera.

Behin sistemaren simetria finkatuta daukagula, sistemaren egoeren dentsitatea lortu behar dugu, estatistikoen adierazpena lortzeko. Baina ezin da zuzenean lortu, horretarako matrizearen autobalioen probabilitate dentsitatea behar dugu. Horregatik simetrietatik abiatuz elementuen baterako probabilitate dentsitatearen funtzioa lortuko dugu eta ondoren aldagai aldaketa batez autobalioena.

Estatistikoen kalkulua egin aurretik egoera dentsitatearen zati unibertsala bakandu behar dugu. Lehen aipatu bezala teoriaren helburua energiaren fluktuazio unibertsalak aztertzea da, beraz, egoera dentsitatearen reeskalaketa bat egin behar da soilik zati unibertsalarekin geratzeko. Modu honetan lortzen dugun espektra homogeneoa da, mailen arteko distantzia batz bestean bat

<sup>6</sup>Ingeleses Nearest-Neighbor Spacing bezala ezagutzen den estatistikoa, NNS siglekin adierazten dena.

izango da. Sistemaren inguruko informazio guztia galtzen dugu baina ez energien fluktuazioena.

Azkenik, behin espektro homogeen bat lortu dugula, sistema desberdinen azterketa egin dezakegu edota sistema berdinean energia tarte desberdinen arteko azterketa, sistemaren berezko propietateen eragina deuseztatu delako. Beraz, reeskalatutako egoera dentsitateen energien lehen auzokideekiko distantzien distribuzioa kalkulatu dugu. Distantzia laburreko estatistiko honek erakutsiko dizkigu Kaosak kuantikoki uzten dituen aztarnak.

## 2.2 Multzo gausiarrak

Ausazko matrizeak eraikitzeak aipatu dugun bezala ezin da edozein modutan egin sistemak dituen simetria batzuk hartu behar dira kontuan, simetria hauen arabera multzo unibertsalak eraiki daitezke. Lan honetan multzo gausiarren lan egingo dugu, Schrödinger-en ekuaziotik ateratzen diren multzo motak. Horrela deitzen ditugu sartutako matrizeko elementuak distribuzio gausiarra jarraitzen dutelako. Multzo honen barruan aplikatutako simetriaren arabera talde desberdinak daude, diagonalak, ortogonalak, unitarioak eta sinpletikoak batik bat. Orain talde bakoitzaren ezaugarriak azalduko ditugu.

Matrize gausiarrak printzipioz guztiz ausazkoak dira, horregatik ezin dute erabilitako espazio bektorialaren menpekotasuna izan, hau da, edozein oinarri baliagarria izango da. Ondorioz, gure matrize hermitikoak inbariantek izan behar dira transformazio unitarioekiko, izan ere, hauek baitira oinarri aldaketaz arduratzen diren matrize motak. Arrazoiketa honetatik gure multzoko lehen azpimultzoa ondorioztatu daiteke, hau da, simetria gabeko sistemaren multzoa. Multzo honi gausiar unitario deritza, GUE, bere matrizeak hermitikoak dira, ez baitago beste simetriarik. Gainera, bere ausazkotasuna dela eta inbariantea izango da transformazio unitarioekiko.

Bestalde, inbertsio tenporalarekiko simetria duten sistemak ditugu, hau da, denbora aldaketarekiko inbariantek direnak. Fisika kuantikoaren ikuspuntutik ikusita, jakina denez, honek esan nahi duena da,  $[H, T] = 0$  izango dela. Kasu honetatik espinaren arabera bi multzo atera ditzakegu. Inbertsio tenporalaren eragilea honako hau bada:

$$T = UC \rightarrow \begin{cases} U \in \text{unitario}, U\bar{U}^T = 1 \\ C \in \text{komplexu konjokatua}, CC^* = 1, C|\psi\rangle = |\psi^*\rangle \end{cases}$$

Bere buruaren karratua egiten badugu, honek bi zeinu desberdin izan ditzake:

$$T^2 = UCUC = UU^*CC = UU^* = \alpha \xrightarrow[\text{bukaeran}]{U^T \text{ biderkatuz}} UU^*U^T = \alpha U^T$$

$$\xrightarrow[U^*U^T=1]{\text{unitarioa}} U = \alpha U^T \xrightarrow[\text{eginez}]{\text{transposatua}} U^T = \alpha (U^T)^T = \alpha U = \alpha \alpha U^T$$

$$\alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = \pm 1$$

Hortaz konstante honen zeinuaren arabera bi azpimultzo desberdin bereiz ditzakegu. Mekanika kuantikoan ikusten den bezala zeinu hauek espinarekin dute lotura, honela lotzen dira:

$$T^2 = (-1)^{2j} \rightarrow \begin{cases} j \in \text{osoa}, T^2 = +1 \\ j \in \text{erdiosoa}, T^2 = -1 \end{cases}$$

non T aipatutako inbertsio denboralaren eragilea den eta j spin totalaren zenbaki kuantikoa.

Positiboa dena hartuz gero, GOE taldea izango da, honako baldintza hauek beteko ditu:

$$H_{ij} = \langle i | H | j \rangle = \langle i | (T^2 H) | j \rangle = (\langle i | H | j \rangle)^* = H_{ij}^*$$

non  $H_{ij}$  matrize hamiltondararen elementuak diren. Hau da, matrizearen elementu guztiak errealak izango dira. Aurreko talde gausiarrean, GUE-en, izandako baldintzei<sup>7</sup> azken simetria hau gehitzen bazaie bigarren talde gausiar honen, GOE-ren, baldintzak lortuko ditugu. Alegia, matrizeak simetrikoak eta matrize ortogonalen transformazioekiko inbariantek izango dira.

Bestalde, espina erdiosoa den kasua hartzen badugu,  $T^2 = -1$ , GSE multzoa daukagu. Kasu honetan egoera guztiak binaka endekatuta daude. Orduan,  $H_{ij}$  elementu kuarternionikoak izango dira Self-Dual matrize bat osatzen dutenak. Hala ere, talde honen jarrera duen sistema fisikorik ez da aurkitu oraindik fisika kuantiko kaotikoan, horregatik, ez dugu gehiago aztertuko.

Bukatzeko talde diagonalak daukagu, matrizea zuzenean diagonalak izateko sistemaren simetria kopurua eta matrizearen heina berdinak izan behar dira. Honekin esan nahi duguna da autobalio bakoitzak besteen independentea den simetria propioa izango duela, hots, hauen artean ez dela korrelaziorik egongo. Ondorioz, autobalio bakoitza ausazko zenbaki bat izango da, hau da, diagonalako elementuak ausazko zenbakiak dituen matrize diagonalak izango dugu.

Aipatutakoa laburbilduz, hiru talde aztertuko ditugu. Alde batetik "Gaussian Orthogonal ensemble" inbertsio tenporala eta espin osoa duten sistemak ordezkatzeko dituen edota inbertsio tenporala eta errotazioekiko simetria duten sistemak. Hauen matrizeak simetrikoak eta errealak izango dira baita transformazio ortogonalekiko inbariantek. Gero, "Gaussian Unitary Ensemble" multzoa daukagu, kasu honetan matrizeak hermitikoak dira eta transformazio unitarioekiko inbariantek. Honako honek inbertsio tenporalarekiko simetriarik ez duten sistemen ordezkari dira. Azkenik "Gaussian Diagonal Ensemble" multzoa daukagu, matrize hauek diagonalak izango dira, eta simetria asko dituen multzoa

<sup>7</sup>Gogoratu matrizeak hermitikoak eta transformazio unitarioekiko inbariantek zirela



adieraziko dute. Hala nola, kaos gabeko sistemen antzekotasunak erakusten dituen taldea izango da.

### 2.3 Baterako probabilitate dentsitatearen funtzioa

Azterketa estatistikoa egiteko, hau da, estatistikoak kalkulatzeko lehenik eta behin probabilitate dentsitatea behar dugu, hots, elementuen talde batek matrize bat eratzeko duen probabilitatea. Pasarte honen helburua hori da. Lehenengo, matrizeko elementuen probabilitatea kalkulatu dugu eta ondoren hortik abiatuz matrizearen autobalioena. Kalkulu hauek aurreko atalean aipatutako taldeen kasuan egingo ditugu, GOE-ren eta GUE-ren kasuan.

Schrödinger-en ekuaziotik sortutako multzo gaussiarren matrizeetako autoenergiak ez dituzte simetria nahiko euren artean korrelazioa desagertzeko. Hori dela eta, ezin dezakegu matrize diagonalak zuzenean eratu, izan ere, probabilitatea dentsitatearen beharra daukagu. Aldiz, GDE multzoa hartzen badugu autobalioak ez dute korrelaziorik, bada matrize diagonalak eratu daitezke zuzenean. Horregatik, hirugarren taldearen probabilitate dentsitatearen funtzioa ez dugu kalkulatu pasarte honetan. Izan ere, euren j.p.d.<sup>8</sup> autobalioena zein elementuena berdina izango da:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left(-A \sum H_{ii}^2\right) \quad (1)$$

non  $H_{ii}$  hamiltondarraren elementuak diren,  $N$  matrizearen dimentsioa eta  $A$  bariantzaren bitartez kalkulatu den konstante bat. Hau da, j.p.d.f-a zuzenean distribuzio gausiarrarena da.

#### 2.3.1 Matrizeen elementuak

Elementuen probabilitate funtzioa kalkulatzeko aurreko puntuan aipatutako baldintzak erabiliko ditugu. Hasteko ezin da oinarriaren menpekotasunik egon:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(H'_{11}, \dots, H'_{NN}) \quad (2)$$

non  $H_{ij}$  eta  $H'_{ij}$  oinarri desberdina erabiliz lortzen diren hamiltondarraren elementuak diren.

Trazen propietateak kontuan izanik:

$$\text{Tr}(H') = \text{Tr}(U^{-1}HU) = \text{Tr}(HUU^{-1}) = \text{Tr}(H) \quad (3)$$

non  $H_{ij}$  eta  $H'_{ij}$  oinarri desberdina duten matrizeko elementuak diren eta  $U$  oinarri aldaketako matrizea. Ikusi dezakegu, baterako probabilitate dentsitatea

<sup>8</sup>Baterako probabilitate dentsitatearen funtzioaren siglak ingelesez, Joint Probability Density Function

trazen menpe jartzean oinarriaren menpekotasun eza ziurtatzen dugula. Ondorioz, probabilitate dentsitate funtzio bateratua  $H$ -ren potentzien trazen menpekoea izan ahal da bakarrik.

Bestalde, matrizeko elementuen probabilitate dentsitatea kalkulatzeko hauek i.i.d<sup>9</sup> dauden elementuak direla suposatuko dugu, hau da, askeak eta modu berean bananduta daudela. Honekin esan nahi dugu funtzio bateratua elementu guztien bakarkako probabilitate dentsitatearen biderkadura izango dela:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(H_{11})p(H_{12})\dots p(H_{NN}) \quad (4)$$

non  $H_{ij}$  matrizeko elementuak diren eta  $p$  euren probabilitate dentsitatea adierazten duen. Suposizio hau onartzean elementuen arteko korrelazioa nulua dela suposatu dugu baita ere. Baldintza guzti hauek kontuan izanik adierazpen bakar batera heltzen gara:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) \propto \exp[-B \operatorname{Tr}(H) - A \operatorname{Tr}(H^2) + D] \quad (5)$$

Adierazpen hau gehiago laburtu dezakegu.  $D$  konstantea kendu dezakegu, zenbaki bat izanik proportzionaltasun konstantearen barnean sartu ahal baita. Bestalde  $B$ -rekin doan terminoa ere ezabatu daiteke erreferentzi puntua aldatzen duen termino bat baino ez delako. Hortaz, 5. ekuaziotik, adierazpen sinple bat lortu dugu j.p.d.f-rako:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = C \exp[-A \operatorname{Tr}(H^2)] \quad (6)$$

Non  $A$  bariantzarekin lotuta dagoen konstantea den eta  $C$  normalizazio konstantea den.

Behin adierazpen orokorra lortu dugula, talde gausiar bakoitzari dagokion espresioa lortu behar dugu. Lehenengo talde gausiar ortogonalaren funtzioa kalkulatu dugu. Kasu honetan, diagonaleko  $N$  elementuak eta diagonalaren kanpoko  $\frac{N^2-N}{2}$  elementuak dira totalen beharko diren aldagai independente guztiak, zehazki,  $\frac{N(N+1)}{2}$  elementu izango ditugu. Matrizea simetrikoa denez, hurrengo baldintza betetzen du:

$$\operatorname{Tr}(H^2) = \sum_{j,i=1}^N H_{ij}^2 \quad (7)$$

non  $H$  hamiltondarra den eta  $H_{ij}$  bere elementuak. Azken ekuazio hau erraz froga daiteke:

$$R = H \cdot H \rightarrow R_{ij} = \sum_{k=1}^n H_{ik}H_{kj}$$

---

<sup>9</sup>independente eta berdintsu banatuta hitzen siglak ingelesez, Independent Identically Distributed

non  $R_{ij}$  R matrizearen elementuak izango diren eta  $H_{ik}$  eta  $H_{kj}$  H matrizearenak. Frogatu nahi den adierazpenean, 7. ekuazioan, R matrizearen traza nahi dugunez diagonaleko balioak bakarrik behar dira,  $R_{ii}$ -ren balioak:

$$R_{ii} = \sum_{k=1}^N H_{ik} H_{ki} \xrightarrow[H_{ij}=H_{ji}]{H \text{ Simetrikoa}} R_{ii} = \sum_{k=1}^N H_{ik}^2$$

Hortaz diagonaleko elementu guztiak batzen badira 7. ekuazioa lortzen da.

Azkenik, C normalizazio konstantea kalkulatu dugu:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(H_{11}, \dots, p_{NN}) \prod dH_{ij} = C \cdot \left[ \underbrace{\left( \sqrt{\frac{\pi}{A}} \right)^N}_{\text{diagonalekoak}} \cdot \underbrace{\left( \sqrt{\frac{\pi}{2A}} \right)^{\frac{N^2-N}{2}}}_{\text{off-diagonalekoak}} \right] \quad (8)$$

Beraz, GOE multzoarentzat elementuen j.p.d.f-a hurrengoa da:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left( \frac{A}{\pi} \right)^{\frac{N}{2}} \left( \frac{2A}{\pi} \right)^{\frac{N(N-1)}{4}} \exp \left[ -A \sum_{ij} H_{ij}^2 \right] \quad (9)$$

non A konstantea bariantzaren bitartez kalkulatu den konstantea den.

Multzo unitarioaren kasuan, aldagai independenteen kopurua ez da berdina izango. Kasu honetan diagonalaren kanpoko zenbakiak finkatzeko aldagai kopuru bikoitza behar da, zenbaki konplexuaren zati erreala eta irudikaria ordezkatzeko. Hortaz, oraingoan  $N^2$  aldagai independente izango ditugu eta bere traza modu honetan idatziko da:

$$\text{Tr}(H^2) = \sum_{j,i=1}^N ((H_{ij})_R)^2 + ((H_{ij})_{Im})^2 = \sum_{j,i=1}^N |H_{ij}|^2 \quad (10)$$

non  $(H_{ij})_R$  eta  $(H_{ij})_{Im}$  hamiltondarreko elementuen zati erreala eta irudikaria diren<sup>10</sup>. Aurreko taldearekin egin den bezala normalizazio konstantea kalkulatu badugu, GUE taldearentzako j.p.d.f-a hurrengoa izango da:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left( \frac{A}{\pi} \right)^{\frac{N}{2}} \left( \frac{2A}{\pi} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \exp \left[ -A \sum_{ij} [((H_{ij})_R)^2 + ((H_{ij})_{Im})^2] \right] \quad (11)$$

Bi kasuetan A konstantea matrizeko elementu baten bariantzaren funtzioan jarri dezakegu. Bariantza orokorra kalkulatu dugunez, kontuan izan behar da

<sup>10</sup>Ekuazio hau 7. ekuazioa bezala frogatu daiteke, kontuan izanik matrizea hermitikoa dela,  $H_{ik} = H_{ki}^*$ .

multzo bakoitzak aldagai independenteen kopuru desberdina dutela.  $\beta$  konstantea definitzen badugu,  $\frac{\beta N(N-1)}{2}$  diagonalaren kanpoko elementuak definitzeko behar diren aldagai independenteen kopurua izango da. Bariantza kalkulatzeko badugu, kontuan izan media nulua dela<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle H_{ii}^2 \rangle - \langle H_{ii} \rangle^2 = \langle H_{ii}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_{ii}^2 \cdot p(H_{11}, \dots, p(H_{NN})) \prod dH_{ij} \\ &= C \underbrace{\left( \frac{\sqrt{\pi}}{2A^{\frac{2}{3}}} \right)^N}_{\text{diagonalekoak}} \cdot \underbrace{\left( \frac{\sqrt{\pi}}{2(2A)^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{\beta N(N-1)}{2}}}_{\text{off-diagonalekoak}} \end{aligned} \quad (12)$$

Jakinik C konstanteak hurrengo balioa duela, lehen 8. ekuazioan kalkulatu bezala:

$$C = \left( \frac{A}{\pi} \right) \cdot \left( \frac{2A}{\pi} \right)^{\frac{\beta N(N-1)}{4}}$$

Bariantzak honako balio hau izango du:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2N + \beta N(N-1) \cdot A^{\frac{2N + \beta N(N-1)}{2}}}$$

non  $\beta$  aurretik definitutako konstantea den eta alderapen konstantea deituko dioguna. GOE-ren kasua 1 balio du eta GUE-ren kasuan, aldiz, 2.

Elementu baten bariantza hartzen badugu, hau da,  $N = 1$ , orduan,  $\sigma^2 = \frac{1}{2A}$  izango da. Aurreko adierazpenetan ordezkatzuz gero, j.p.d.f-rako formula orokorrera heltzen gara:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{N}{2}} (\pi \sigma^2)^{-\frac{2N + \beta N(N-1)}{4}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{ij} \|H_{ij}\|^2 \right] \quad (13)$$

non N matrizearen dimentsio den eta  $H_{ij}$  bere elementuak.

### 2.3.2 Matrizeen autobalioak

Behin matrizeko elementuen j.p.d.f-a lortu dugula autobalioena erraz lor dezakegu aldagai aldaketa bat aplikatuz. Aldagai aldaketa honetan matrizeko elementuak,  $H_{ij}$ , hamiltondarraren autobalioengatik,  $E_i$  eta oinarri aldaketako matrizea definitzeko behar diren  $\theta_i$  elementuengatik ordezkatzeko dira:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(E_1, \dots, E_N, \theta_1, \dots, \theta_r) \cdot |J| \quad (14)$$

non r aldagai independenteen talde osoa betetzeko beharrezkoak diren parametro kopurua finkatzen duen zenbakia den eta  $|J|$  aldagai aldaketa aplikatzean

<sup>11</sup>Sarreran esan bezala matrizeei ezarritako baldintza bat da

beharrezkoa den jakobiarraren determinantea.

$$|J| = \left| \frac{\partial(H_{11}, \dots, H_{NN})}{\partial(E_1, \dots, E_N, \theta_1, \dots, \theta_l)} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{11}}{\partial E_1} & \dots & \frac{\partial H_{11}}{\partial \theta_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_{NN}}{\partial E_1} & \dots & \frac{\partial H_{NN}}{\partial \theta_l} \end{pmatrix} \right| \quad (15)$$

Kontuan izanik matrize baten traza diagonaleko elementuen batura dela, autobalioen oinarria hartzen badugu, matrizea diagonalean autoenergiak dituen matrizea izango denez honako hau beteko da:

$$Tr(H^2) = \sum E_i^2 \quad (16)$$

Baieztapen hau edozein talde gaussiarraren kasuan betetzen da, izan ere, talde honetan matrizeak beti hermitikoak dira eta hauen autobalioak beti errealak dira. Hau kontuan izanik funtzioa lortzeko dagoen zailtasun bakarra jakobiarraren kalkuluan dago. Kalkulu hau talde ortogonalarekin egingo dugu eta ondoren talde unitarioarena erraz lor daiteke pausu berdinak jarraituz.

Jakobiarra kalkulatzeko aldagaien deribatuak behar ditugu, hauek kalkulatzeko  $H = OH_D O^T$  adierazpena erabiliko dugu,  $H_D$  matrizea diagonal izanik,  $O$  aldaketa matrize ortogonal izanik eta  $H$  zorizko aldagaiekin sortutako matrize simetriko eta erreal. Lehenik autobalioekiko deribatua kalkulatu dugu:

$$\frac{\partial H}{\partial E_k} = O \cdot \frac{\partial H_D}{\partial E_k} \cdot O^T$$

Elementu bakoitzeko jartzen badugu:

$$\sum_k \frac{\partial H_{ij}}{\partial E_k} = O_{ik} O_{kj} \quad (17)$$

Azken berdintza erraz ondorioztatu dezakegu, kontuan izanik matrizea diagonal dela eta bere autobalioekiko deribatua soilik izango dugula, zeinen balioa bat izango den.

Beste parametroekiko deribatua egiteko hurrengoa izan behar dugu kontuan:

$$\frac{\partial(OO^T)}{\partial \theta_j} = 0 = \frac{\partial O}{\partial \theta_j} \cdot O^T + O \cdot \frac{\partial O^T}{\partial \theta_j} \mapsto \frac{\partial O}{\partial \theta_j} \cdot O^T = -O \cdot \frac{\partial O^T}{\partial \theta_j} \equiv S^j$$

Bada, matrizearen deribatua hurrengoa izango da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \theta_j} &= \frac{\partial O}{\partial \theta_j} \cdot H_D \cdot O^T + O \cdot H_D \cdot \frac{\partial O^T}{\partial \theta_j} = \\ &OO^T \frac{\partial O}{\partial \theta_j} \cdot H_D \cdot O^T + O \cdot H_D \cdot \frac{\partial O^T}{\partial \theta_j} \cdot OO^T = O [S^j, H_D] O^T \end{aligned}$$

Elementu bakoitza hartzen badugu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{nm}}{\partial \theta_j} &= O_{n\alpha} \left( S_{\alpha\gamma}^j \cdot (H_D)_{\gamma\beta} - (H_D)_{\alpha\gamma} \cdot S_{\gamma\beta}^j \right) O_{\beta m}^T \\ &= (E_\beta - E_\alpha) O_{n\alpha} \cdot S_{\alpha\beta}^j \cdot O_{\beta m}^T \end{aligned} \quad (18)$$

Jakobiarraren ordezkatzan baditugu:

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \frac{\partial(H_{11}, \dots, H_{NN})}{\partial(E_1, \dots, E_N, \theta_1, \dots, \theta_l)} \right| = \left| \begin{pmatrix} O_{n\alpha} O_{\alpha m}^T & (E_\beta - E_\alpha) O_{n\alpha} S_{\alpha\beta}^j O_{\beta m} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| O_{n\alpha} \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & (E_\beta - E_\alpha) S_{\alpha\beta}^j \end{pmatrix} O_{\alpha m}^T \right| = |O_{n\alpha}| \left| \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & (E_\beta - E_\alpha) S_{\alpha\beta}^j \end{pmatrix} \right| |O_{\alpha m}^T| \\ &= \prod_{\beta > \alpha} (E_\beta - E_\alpha) \left| \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & S_{\alpha\beta}^j \end{pmatrix} \right| \end{aligned} \quad (19)$$

Parametro gehigarrien,  $\theta_j$ , integrala egiten badugu, jakobiarraren bukaeran dagoen matrizearen determinantea bat da. Hortaz, GOE multzoaren autobalioen j.p.d.f-a modu honetan adierazi dezakegu:

$$p(E_1, \dots, E_N) = C \prod_{\alpha < \gamma}^{1 \dots N} |E_\gamma - E_\alpha| e^{-\frac{1}{2} \sum_i E_i^2} \quad (20)$$

Beste multzoaren kasuan berdina egin dezakegu, elementu gehigarrien kopurua bikoitza eta aldaketa matrizea unitario izanik. Hau bera eginez lortzen den emaitza hurrengoa da:

$$p(E_1, \dots, E_N) = C \prod_{\alpha < \gamma}^{1 \dots N} |E_\gamma - E_\alpha|^2 e^{-\frac{1}{2} \sum_i E_i^2} \quad (21)$$

Lehen egin den bezala bariantza  $\sigma^2 = \frac{1}{\beta}$  dela kontuan izanik, biak ekuazio orokor batean jar ditzakegu, alderapen parametroa erabiliz:

$$p(E_1, \dots, E_N) = C_\beta \prod_{\alpha < \gamma}^{1 \dots N} |E_\gamma - E_\alpha|^\beta e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i E_i^2} \quad (22)$$

non  $\beta$ , esan bezala, alderapen konstantea den 1 edo 2 balio duena GOE edo GUE taldea gaussiarra bada, hurrenez hurren. Eta  $C_\beta$  normalizazio konstantea da eta [8] liburuan ageri den bezala, honako balio hau du:

$$C_\beta^{-1} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \beta^{-\frac{2N+\beta N(N-1)}{4}} [\Gamma(1 + \beta/2)]^{-N} \prod_j^N \Gamma\left(1 + \frac{\beta j}{2}\right) \quad (23)$$

## 2.4 Egoeren dentsitatea

Lortutako balioak datu esperimentalekin alderatu ahal izateko autobalioen dentsitatea behar dugu. Egoeren dentsitatea aurreko pasartean kalkulatu j.p.d.f-tik abiatuz atera dezakegu:

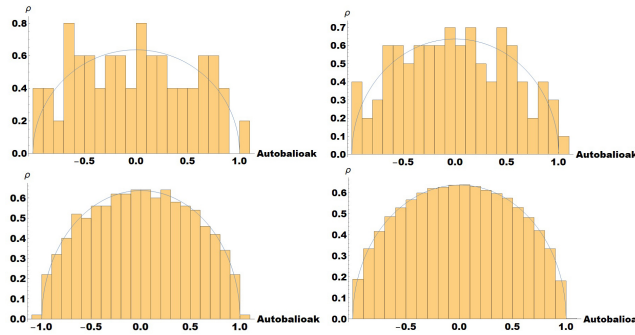
$$\rho(E) = N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(E, E_2, \dots, E_N) dE_2 \dots dE_N \quad (24)$$

non  $\rho$  egoera dentsitatea den eta  $p(E, E_2, \dots, E_N)$  autobalioen j.p.d.f-a. N handiko limitean bakarrik zentratuko gara. Wigner-ek kalkulatu zuen bezala,  $N \rightarrow \infty$  doanean hiru talde gausiarrek joera berdina dute. Unibertsaltasun hau "Wigner Semicircle Law" izeneko legeak biltzen du. Limitean egoera dentsitatearen itxura hurrengo dela plazaratu zuen Wigner-ek:

$$\rho(E) = \begin{cases} \frac{1}{N\pi\sigma^2} \sqrt{2N\sigma^2 - E^2}, & |E| \leq \sigma\sqrt{2N} \\ 0, & |E| > \sigma\sqrt{2N} \end{cases} \quad (25)$$

Honek esan nahi duena da limitean autobalioen distribuzioak forma unibertsala duela eta autobalio guztiak erdi-zirkulu batean mugatuta egongo direla.

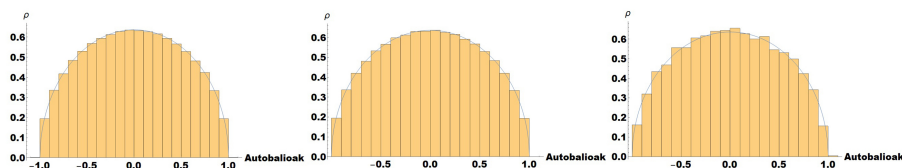
Unibertsaltasuna egia dela frogatzeko Wolfram Mathematica programa erabili dugu. Bertan programa txiki bat egin dugu, ausazko matrizeak kalkulatu dituen, talde bakoitzari dagozkion simetriak kontuan izanik. Ondoren, euren autobalioak kalkulatu ditugu. Gero, honen dimentsio aldatuz joan gara eta ikusi dugu limitean egia dela erdi zirkulu horretara mugatzen direla autobalio guztiak. Aurrerago erakusten den irudian, 1.irudian, dimentsio desberdineko GOE taldeko matrizeekin lortutako emaitzak behatu ditzakegu.



Irudia 1: Irudian, Mathematica programaren laguntzarekin irudikatutako dimentsio desberdineko GOE matrizeen autobalioen histogramak ikusi ditzakegu. Matrizeen dimentsioak irudiak ezkerretik eskumara eta goitik behera ikusita 50, 100, 500 eta 5000 dira hurrenez hurren. Histogramarekin batera Wigner-ek ondorioztatutako 25. funtzio irudikatu da marra beltzez.

Programaren bitartez ikusi ahal izan dugu ere N ez dela oso handia izan behar

erdizirkulura hurbiltzeko, hau da, arin hurbiltzen da Wigner-en emaitza teorikora. Programa bera erabiliz kalkulu berak egin ditugu GUE eta GSE taldeetako ausazko matrizeekin eta emaitza bera lortu dugu. 2. irudian  $N = 5000$  den kasurako lortutako emaitzak bildu dira.



Irudia 2: Irudian, Mathematica programaren laguntzarekin irudikatutako matrizeen autobalioen histogramak ikusi ditzakegu. Matrizearen dimentsioa 5000 da eta irudi batetik bestera matrizearen simetriak aldatu ditugu, ezkerretik eskumara begiratuta GUE, GSE eta distribuzio normala ditugu. Histogramarekin batera Wigner-ek ondorioztatutako 25. funtzio irudikatu da marra beltzez.

Wolfram Mathematica-ren erabilerarekin frogatu dugu hiru talde gaussiarrek limite berdina daukatela, hau da, limitea unibertsala dela. Unibertsaltasun honen arrazoia oraindik ez dago guztiz ziurtatuta baina seguruenik limitearen teorema zentrolean dago. Teorema honek dio zorizko aldagaien multzo baten distribuzioaren funtzioa distribuzio normalera hurbiltzen dela limite handian.

## 2.5 Unfolding prozesua

Espektroaren azterketa egin aurretik egoera dentsitatearen reeskalaketa bat egi-tea komeni zaigu, ingelesez unfolding deituriko prozesuaren aplikazioa. Prozesu honen zergatia sistemak dentsitatean duen eraginean dago. Sarreran aipatu bezala, sistema bakoitzak berezko propietate desberdinak ditu eta sistemen multzoak erabiltzen direnez, eragin hau desagertzea komeni da. Modu honetan fluktuazio lokalak soilik izango ditugu eta egingo diren azterketetan sistemen jarrera globalak ez du eraginik izango. Hortaz prozesu honekin sistemaren dentsitatearen informazioa galduko da, baina batez besteko dentsitate honen inguruan dauden energiaren fluktuazioak aztertu daitezke, fluktuazio lokalak. Azkenean, hau bera da nahi duguna, gure helburua sistema desberdinetan kaosak edo beste fenomeno batzuk duten eragina aztertzea baita eta hori energiaren fluktuazioetan ikusiko dugu.

Prozesu honen ideia orokorra  $\rho(E)$  egoera dentsitatea konstantea bihurtzea da, hau bera, aldagai aldaketa baten bidez lor daiteke. Horretarako egoera dentsitatea bi zatitan banatuko dugu. Alde batetik, zati leuna izango dugu, sistemen menpekotasun handia duena, unibertsala ez den zatia, hain zuzen ere. Bestalde, zati fluktuatzailea dugu, sistemen banako propietateekiko independentea den zatia, hau da, zati unibertsala. Azken zati honek sistema kaotikoa



edo integragarria den bakarrik du kontuan, beraz kaos kuantikoaren azterketan behar dugun dentsitatearen zatia da.

$$\rho(E) = \rho_{\text{leuna}}(E) + \rho_{\text{fluktuatzailea}}(E) = \bar{\rho}(E) + \tilde{\rho}(E) \quad (26)$$

non  $\rho$  egoera dentsitatea den. Hortaz, kaos kuantikoa duten sistemen azterketa egiteko zati leuna konstantea izatea nahi dugu. Gainera espektroaren ondoz ondoko mailen arteko batez besteko distantzia unitatea izatea ere nahi dugu, modu honetan sistema kuantiko desberdinen espektroak alderatu daitezke, espektro homogeen bat sortzen baita. Orduan reeskalaketaren helburua  $\langle \bar{\rho}(\varepsilon_i) \rangle = 1$  lortzean datza. Zati fluktuatzailea soilik erabiliko dugu, RMT-tek emandako emaitzekin alderatzeko.

Gure helburua lortzeko aldagai aldaketa bat aplikatu behar dugu, horretarako banaketa funtzioa<sup>12</sup> erabiliko dugu, aurreko zatiketa bera aplikatuz gero, horrela definitu daitekeena:

$$\eta(E) = \bar{\eta}(E) + \tilde{\eta}(E) = \int_{-\infty}^E \rho(E) dE \quad (27)$$

non  $\eta$  banaketa funtzioa den eta  $\bar{\eta}$  eta  $\tilde{\eta}$  funtzio honen zati leuna eta fluktuatzailea.  $\langle \bar{\rho}(\varepsilon_i) \rangle = 1$  lortzeko aldagai aldaketa egokia  $\varepsilon_n = \bar{\eta}(E_n)$  izango da. Aldagai aldaketa aplikatzean, hurrengora banaketa funtzioa daukagu:

$$\eta(\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \tilde{\eta}(E_n(\varepsilon_n)) = \varepsilon_n + \tilde{\eta}(\varepsilon_n) \quad (28)$$

Hemendik egoera dentsitatea kalkulatzen badugu, banaketa-dentsitatea deribatzen, hurrengo lortzen dugu:

$$\bar{\rho}(\varepsilon) = \frac{d\bar{\eta}}{d\varepsilon} = 1 \quad (29)$$

$$\tilde{\rho}(\varepsilon) = \frac{d\tilde{\eta}}{dE} \cdot \frac{dE}{d\varepsilon} = \tilde{\rho}(E) \cdot \frac{1}{\bar{\rho}(E)} = \frac{\tilde{\rho}(E)}{\bar{\rho}(E)} \quad (30)$$

Hemen dago lortu da nahi genuena, zati leuna 1 izatea. Orain zailtasuna zati leuna topatzean dago. Egoera dentsitatetik bi zati hauek bereiztea ez baita gauza tribiala. Kasu batzuetan aukera naturala eduki dezakegu, dentsitatea oso ondo ezagutzen delako. Baina normalean ez da hau gertatzen eta zenbait metodo dauzkagu hau egiteko, globalak zein lokalak.

### Lokalak

Metodo honetan banaketa funtzioaren finkapena lokalki egiten dugu, hau da, maila bakoitzaren inguruan. Batez besteko egoera dentsitatea alde bakoitzean

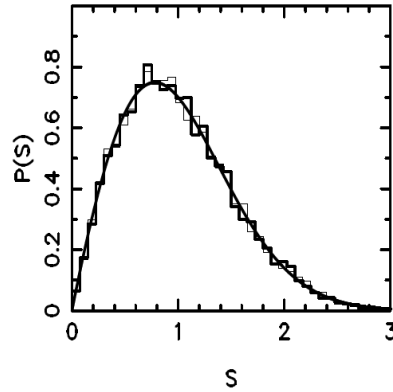
<sup>12</sup>Energia zehatz batetik behera dauden egoera kopurua finkatzen duen funtzioa.

$v$  maila dituen funtzio lineala dela suposatzen dugu. Hau kontuan izanik egoera dentsitatea hurrengo dugu:

$$\rho(E_i) = \frac{2v}{E_{i-v} - E_{i+v}} \quad i \in [v + i, N - v] \quad (31)$$

non  $\rho$  egoera dentsitatea den eta  $v$   $i$  autobalioaren inguruan zabaltzen dugun zatiaren neurria. Autobalioei muga hori jarri zaie, aipatutako autoenergiek inguruan  $v$  maila izan behar dituztelako. Formula honetan  $v$  konstanteari balio bat ezarri behar diogu, horrekin kontuz ibili behar da, oso txikia aukeratuz gero ez ditugu fluktuazioak izango eta aldiz, handiegia hartuz gero reeskalaketa benetako egoera dentsitateak alden du egingo da.

Hurrengo irudian, 3. irudian, reeskalaketa metodo hau erabiliz lortutako distantzia laburreko estatistikoaren irudikapena ikusi dezakegu. Beste reeskalaketa metodo bat erabili da ere, reeskalaketa naturala, hain zuzen ere. Beraz, alde batetik, aukeraketa naturala ikusi dezakegu eta bestetik, metodo lokala.



Irudia 3: Irudian,  $N = 10000$  dimentsioko GOE matrize baten  $p(s)$  funtzioa ikusi dezakegu. Marra finak egiteko reeskalaketa lokala erabili da eta marra lodia egiteko, aldiz, erdi-zirkuluaren legea erabili da. Kurba beltzak emaitza teorikoa adierazten du. [6] erreferentziatik hartuta.

Ikusi dezakegun bezala metodo hau baliagarria da estatistiko honen kalkulurako, emaitzak bateragarriak baitira.

### Globalak

Metodo honetan espektro osoa erabiltzen dugu eta zabalketa gausiarra izenez ere ezagutzen dugu. Kasu honetan egoera bakoitza  $\sigma$  zabalerako gausiar batez ordezkatzeko dugu eta orduan egoera dentsitatea den batura izango da:

$$\rho(E) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_i \exp\left[-\frac{(E - E_i)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (32)$$

Aipatutako bi metodo hauek parametro baten dependentzia dute. Frogatu da parametro hauek independenteak direla soilik distantzia laburretako estatistikoaren kalkuluan. Aurrerago erakutsi dugun irudian, 3. irudian, ikusten dugun bezala mota honetako estatistikoaren kasuan ez du eraginik reeskalaketa motak, teorikoarekin bateragarria den emaitza lortzen da eta.

Distantzia luzeetarako estatistikoetan, aldiz, sistemarekin zerikusirik ez duten korrelazioak agertzen zaizkigu. Hori dela eta, estatistiko hauekin lan egiteko beste reeskalaketa metodo batzuen beharra dago. Hortaz, kontuz eduki beharra dago aukeraketan, gero estatistikoak reeskalaketaren dependentzia baitute. Aukeraketatik egokiena beti naturala izango da, modu honetan ez dira Kaos kuantikoaren aztarna faltsuak agertuko.

## 2.6 Distantzia laburretako estatistikoak

Estatistikoak fluktuazio espektralak kalkulatzeko erabiltzen ditugun espresioak dira. Bariantza eta batez bestekoa jakinda, zuzenean energiaren espektrotik kalkulatu daitezke. Hainbat estatistiko ditugu, batzuk distantzia laburrerako informazioa ematen digute eta beste batzuk distantzia luzera. Kaosa argien erakusten duen estatistikoa lehenengo auzokideekiko distantzia da, beraz hau bera aztertuko dugu. Bertan, geroago ikusiko den bezala, espektro kaotiko bat aztertzen badugu energia mailen alderapena ikusiko da. Aldiz, espektroa erregularra bada energiaren endekapena izango dugu.

### 2.6.1 Lehenengo auzokideekiko distantzia

Lehen aipatu dugun bezala distantzia laburrean informazioa ematen duen estatistikoa lehenengo auzokideekiko distantzia da. Lehenengo auzokideekiko distantziaren distribuzioa,  $p(s)$ , ondoz ondoko bi autoenergiaren arteko desberdintasunaren,  $S_i = E_{i+1} - E_i$ , distribuzioa da. Horregatik, distribuzio honek edozein  $S_i$  distantziak  $[S, S + dS]$  tartean autoenergia bat izateko probabilitatea emango digu. Distribuzio hau kalkulatzeko hurrengo egin behar dugu:

$$p(s) = R_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int \dots \int P_\beta(E_1, \dots, E_N) d\varepsilon_3 \dots d\varepsilon_N \quad (33)$$

non  $R_2$  bi puntuko korrelazio funtzioa den eta  $s = S/D$ ,  $D$  energiaren arteko bataz besteko distantzia. Funtzio hau berez ez da bi aldagaien menpekota ikusten den bezala, izan ere, bi puntuko korrelazio funtzioa bi energiaren diferentziaren menpekotasuna du soilik. Probabilitate dentsitatearen funtzioaren itxuraz ohartzean argi ikusten duguna. Hori dela eta, distribuzioa  $s$ -ren menpekota izango da bakarrik.

Funtzioak hurrengo baldintzak betetzen ditu, bata probabilitatearen normalizazioagatik eta bestea reeskalaketaren ondoren sortutako baldintzagatik, hots,

espektrro homogeneo bat dagoela eta batez besteko distantzia unitatea dela:

$$\begin{aligned} \int p(s) ds &= 1 \\ \langle s \rangle &= \int s \cdot p(s) ds = 1 \end{aligned} \quad (34)$$

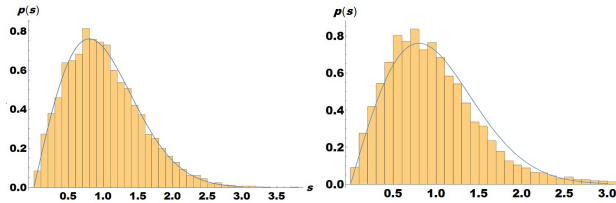
non  $s = S/D$  den  $S$  bi autobalioren distantzia izanik eta  $D$  distantzien batz bestekoa. Integralaren kalkulu zehatza egitea kalkulu luzea da. Hala ere, Wigner-ek bi dimentsioko matrizeak erabiliz hurbilketa on bat egin zuen  $N \rightarrow \infty$  doanerako. Hurbilketak erabiliz, honako hauek dira Wigner-ek kalkulatu zituen distribuzioen itxura hiru talde gausiarrentzako:

$$p(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} s \cdot e^{-\frac{\pi s^2}{4}}, & \beta = 1 \text{ GOE} \\ \frac{32}{\pi^2} s^2 \cdot e^{-\frac{4s^2}{\pi}}, & \beta = 2 \text{ GUE} \\ \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \cdot e^{-\frac{64s^2}{9\pi}}, & \beta = 4 \text{ GSE} \end{cases} \quad (35)$$

non  $\beta$  alderapen konstantea den.

Ekuazio honetan distantzia oso txikia denean dagoen egoeren arteko alderapena bereiz dezakegu. Alegia,  $p(s \rightarrow 0) = 0$  dela ikusten dugu, ondorioz, talde gausiarretan ez dira bi egoera berdinak aurkituko. Energia mailak hurbiltzen joango dira baina azkenean aldentzen amaituko dute. Hau bera da Kaosak erakusten duen jarreretariko bat.

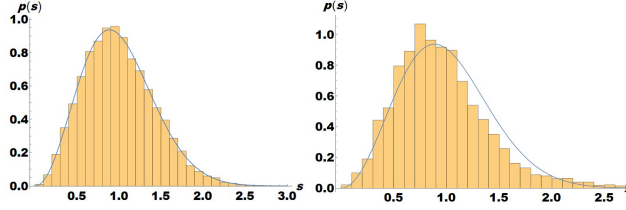
Wolfram Mathematica programa erabili dugu ikusteko benetan 2x2-ko matrizeekin lortzen den emaitza  $N \rightarrow \infty$  duten matrizeentzako baliagarria dela. Ondorengo irudian, 4. irudian, GOE matrizearekin lortutako emaitzak ikusi ditzakegu, alde batetik 2x2-ko matrizeekin lortutako emaitza dugu eta alboan 10000 dimentsioko matrizeekin lortutakoa.



Irudia 4: Irudi honetan mathematica programarekin lortutako GOE matrizeen  $p(s)$  distribuzioaren histogramak ikusi ditzakegu 35. ekuazioren irudikapen teorikoarekin batera. Ezkerreko irudian 2x2-ko matrizeak erabili dira, 10000 matrize hartuz. Eskumakoan, aldiz, 10000x10000-ko matrize bakarra hartu da.

Lortutako emaitzak erakusten digute baliagarria dela Wigner-ek plazaratutako emaitza erabiltzea  $N$ -ren limite handian. Izan ere, doiketa ona dela ikusten da. Hurrengo irudian, 5. irudian, kalkulu berak egin ditugu GUE taldeko ausazko matrizeentzako. Lortutako emaitzak ere egokiak dira, teorikoarekin bat datoz

eta.



Irudia 5: Irudi honetan 4 irudiko kalkulu berak ikus daitezke baina GUE matrizeak erabiliz. Kasu honetan ere, ezkerreko irudian  $2 \times 2$ -ko matrizeak erabili dira, 10000 matrize hartuz. Eskumakoan, aldiz,  $10000 \times 10000$ -ko matrize bakarra hartu da.

Talde diagonalaren kasuan, Poissonen distribuzioa lortzen da, hots, ez da alderapenik ikusten distantzia txikitara. Talde honek sistema integragarri baten espektroa emango digu:

$$p(s) \propto e^{-s}$$

Azken adierazpen hau erraz frogatu dezakegu horrela dela. Matrize diagonalen taldean, GDE, autobalioak ez dute euren artean inolako dependentziarik, hau da, ez dago korrelaziorik i.i.d. ausazko aldagaiak dira. Beraz, tarte batean energia bat edo beste bat izateko probabilitate bera du,  $\rho = \frac{1}{D}$ , hain zuzen ere, non  $D$  distantzien batzuk besteko den.

Distantzia  $S$  izateko probabilitatea kalkulatzeko  $[E, E + S + dS]$  tarte hartuko dugu, nahi duguna da  $[E, E + S]$  tartean egoerarik ez egotea eta  $[E + S, E + S + dS]$  tartean egoera bat egotea. Egoerarik ez egoteko tartean probabilitatea kalkulatzeko, tarte  $N$  zati berdinetan zatituko dugu,  $\rho$  egoera bat egoteko probabilitatea badugu  $1 - \rho$  ez egoteko probabilitatea izango da. Orduan:

$$p(\text{egoera ez } [E, E + S]) = \left(1 - \frac{\rho S}{N}\right)^N \xrightarrow[\text{zati txikiak hartuz}]{N \rightarrow \infty} e^{-\rho S}$$

Bestalde, beste tartean:

$$p(\text{egoera bai } [E, E + S]) = \rho dS$$

Bi ekintza independente direnez probabilitate totala, alboan dauden bi autobalioak  $s$  distantzia izateko probabilitatea, bien biderkadura izango da:

$$p(S) = C \rho e^{-\rho S} \tag{36}$$

Normalizazio baldintzak erabiltzen baditugu:

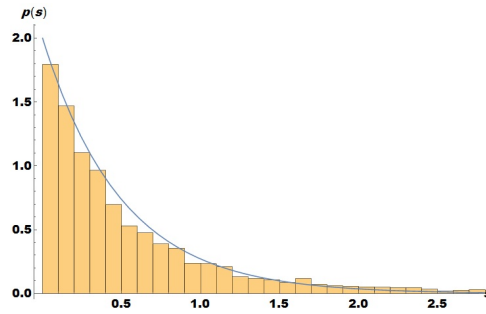
$$1 = \int_0^{\infty} p(S) dS = C \rightarrow C = 1$$

$$1 = \int_0^{\infty} Sp(S) dS = \frac{1}{\varrho} \rightarrow \varrho = 1$$

$D$  batez besteko espazioa bada,  $s = S/D = \varrho S$ , aurreko baldintzak kontuan izanik orduan matrize diagonalaren kasuan lehenengo auzokideekiko distantzia poissonen distribuzioari jarraitzen dio:

$$p(s) = e^{-s} \rightarrow \text{GDE}, \beta = 0 \quad (37)$$

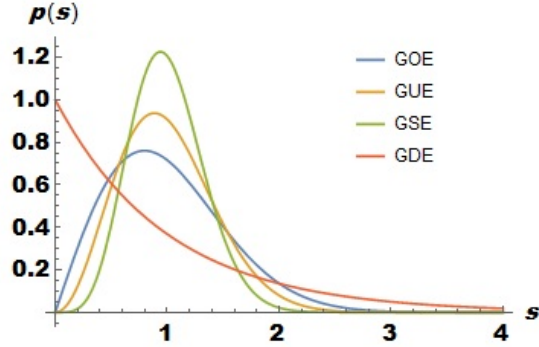
Hau ere, mathematica programaren bitartez frogatu dugu. Hurrengo irudian, 6. irudian, ikusi dezakegu lortutako emaitzak egokiak direla, alegia, ausaz sortutako matrize diagonal baten  $p(s)$  distribuzioak Poissonen kurbari jarraitzen diola.



Irudia 6: Irudi honetan mathematica programarekin lortutako GDE taldearen  $p(s)$  distribuzioaren irudikapena ikus daiteke.  $N=10000$  dimentsioko matrizeak erabili dira. Bertan Poissonen distribuzioa ere ikusi daiteke.

Lau taldeen lehen auzokideekiko distantziaren espresio irudikatzen bada, 7. irudian dagoena lortzen dugu. Bertan ondo bereiz daiteke, egoeren alderapena existitzen den ala ez.

Hala ere, errealitatean aurkitzen ditugun sistemak ez dira guztiz kaotikoak ezta erregularrak, baizik eta bi hauen nahasketa bat erakusten dute. Kasu honetan sistemak erdiko egoera batean egongo dira, hau da, poisson eta GOE-en erdiko egoeraren bat. Zientzialari batzuek kalkuluak egin dituzte honen inguruan eta hurbilketa desberdinak topatu dituzte. Teorikoki batek ere ez du ezer lortzen, definizio fenomenologikoak baitira, baina egoerak kuantitatiboki ikusteko baliagarriak dira. Erabilienak Brody eta Izrailev-en metodoak dira. Biak batzen dituzte Poissonen kasua eta Wignerrek sortutako hiru talde gausiarretako bat.

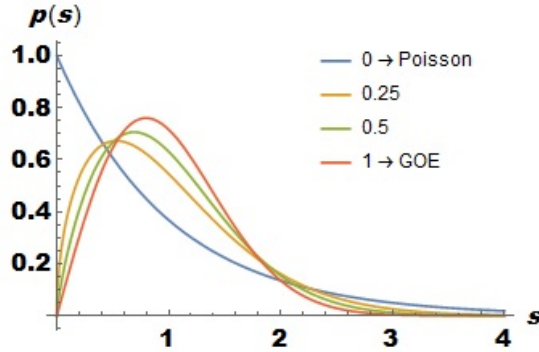


Irudia 7: Irudi honetan talde gausiarren  $p(s)$ -ren irudikapena ikus daiteke.

Brody-k honako espresio hau plazaratu zuen:

$$p(s, \beta) = \left( \Gamma \left( \frac{\beta + 2}{\beta + 1} \right) \right)^{\beta + 1} (\beta + 1) s^{\beta} \exp \left[ - \left( \Gamma \left( \frac{\beta + 2}{\beta + 1} \right) s^{\beta + 1} \right) \right] \quad (38)$$

non  $\beta$  nahasketa maila adierazten duen parametroa den, nulua bada Poissonen kasua da eta unitatea bada, aldiz, GOE. 8. irudian ikusi daitekeen bezala, batetik bestera mugitzen da.



Irudia 8: Aurreko irudian Brody-ren funtzioa irudikatu da  $\beta$  parametroaren balio desberdinetarako, bertan ikus daitekeen bezala 0(Poissonen kasua), 0.25, 0.5 eta 1(GOE-ren kasua) balioak jarri dira.

Izrailev-ek bestalde honako hau ondorioztatu zuen:

$$p(s, \beta_{ef}) = A_{\beta_{ef}} s^{\beta_{ef}} \exp \left[ - \frac{\pi^2 \beta_{ef}}{16} s^2 - \left( C_{\beta_{ef}} - \frac{\pi \beta_{ef}}{4} \right) s \right] \quad (39)$$

Zientzialariek ahalegina egin dute bi ekuazio hauetan agertzen diren konstanteak,  $\beta_{ef}$  eta  $\beta$  bateratu ahal izateko baina ikerketa zabalik dago oraindik.

### 3 Fisikan aplikazioa: Kaos Kuantikoa

Gaur egun interes handiko den fisikako arloa dugu Kaosa. Edward Lorenz izan zen termino honi esangura eman zion zientzialaria, Tximeleta efektua izeneko fenomenoaren sorreraz. Hasieran mekanika klasikoan aplikatzen zen terminologia zen, hasierako baldintzak berdintsuak zituzten bi egoeren ibilbidean oinarritzen zen definizio batean. Ondoren, kuantikaren agertzearekin, fisika berri honetan terminoaren definizio baten beharra ikusi zuten, izan ere, fisika klasikoa fisika kuantikoaren limitean azaleratzen baita. Testuinguru honetan sartzen da lanean aipatu dugun teoria, RMT, kuantikoki Kaosak dituen aztarnak ikustea ahalbideratzen baitu. Laneko atal honetan ausazko matrizeen teoriak eta kaosak duten lotura aipatuko dugu. Ondoren adibide batzuk emanez lortutako emaitza batzuk erakutsiko ditugu, teoriaren baliozkotasuna erakusten dutenak.

#### 3.1 Kaos Klasikoa eta kuantikoa

Kaosa erakusten duten sistemetan ezinezkoa da aurrerata etorkizunean gertatuko dena, izan ere, hasierako baldintzetan aldaketa minimoa bat egiteak sistema beste leku desberdinen batera heltzea eragiten baitu. Hau da, sistema kaotiko batek, emaitzak hasierako baldintzen menpekotasun handia duen inguru bat definitzen du.

Klasikoki sistema batean kaosa daukagu hasierako puntua hurbil duten bi ibilbide esponentzialki aldentzen direnean, ekuazio diferentzialak ez-linealak izango dira eta ezin izango ditugu askatu. Aldiz, ibilbideak potentzia batzuen arabera aldentzen badira, sistema integragarria dela esango dugu, kasu honetan, ekuazio diferentzialak linealak eta kontserbakorrak dira, askatu ahal izango ditugu. Kaosaren graduaren arabera, hiru motatako sistema kaotiko topa ditza-kegu sistema ergodikoak, mixing eta K sistemak. Azken hauek guztiz kaotikoak diren sistemak dira, bertan ez dira egonkorak diren ibilbiderik topatuko.

Eskala mikroskopikora bagoaz, kaosa definitzen saiatzean hainbat zailtasun agertzen zaizkigu, ezin da klasikoki erabilitako definizio bera hartu. Heisenberg-en ziurgabetasun printzipio dela eta, kuantikoki ezin ditugu ibilbideak definitu, arlo honetan uhinen paketeak erabiltzen ditugu. Baina uhinen paketa hauek ezin ditugu definizioan erabili, Schrödinger-en ekuazioaren linealtasuna dela eta, denboraren eboluzioa unitarioa baita. Beraz, bi uhinen arteko antzekotasuna beti konstantea izango da:

$$\forall t \text{ izanda } |\langle \psi(0) | \phi(0) \rangle|^2 = |\langle \psi(t) | \phi(t) \rangle|^2 \quad (40)$$

Orduan, alferrikakoa da klasikoki erabilitako definizioa kuantikoan erabiltzea, beste metodo baten beharra daukagu kaosaren aztarnak hausnartzeko. XX. mendearen bukaeran konparaziozko ikerketa erabiltzen hasi zen, hau da, klasikoki kaotikoak edo integragarriak diren sistemak kuantikoki duten jarrera aztertzen duten ikerketak. Hemendik abiatuz hurrengo definiziora mugatu da Kaos kuantikoa:



*"Analogo klasikoa kaotikoa duten sistema kuantikoak kaotikoak izango dira".* Hala ere, ez da behin betiko definizio, izan ere, oraindik zabalik dagoen arloa da. Aipatutako konparaziozko ikerketa hau energiaren espektroen bidez egiten dugu, konturatu baitziren klasikoki kaotikoak edo integragarriak ziren sistemak jarrera ezberdinak erakusten zituztela espektro kuantikoan.

Hortaz, fisika kuantikoan kaosa aztertzerakoan hamiltondarrak perturbazioen aurrean duen sentsibilitateari behatzen diogu. Sentikortasun hau ikusteko energiaren espektroaren fluktuazioak aztertzen ditugu, horretarako estatistikoaren beharra dago. Hau da, espektroaren propietate estatistikoek sistemaren izaera finkatuko digute. Honetarako, hain zuzen ere, erabiltzen da ausazko matrizeen teoria, hain sistema konplexuak dira zeina hamiltondarraren itxura ez da kontuan hartzen. Orduan, sistemaren analogo klasikoa kaotikoa bada RMT-ko GOE talde gausiarreko kurbak lortuko ditugu. Aldiz, analogoa integragarria bada, RMT-ko GDE taldeko emaitzak behatuko ditugu.

Analogo klasikorik ez duten sistemekin, gorputz askoko sistemekin<sup>13</sup> adibidez, ezin dugu konparaketarik egin. Hori dela eta, analogo klasikoa duten sistemetatik ondorioztatutako irizpideak erabiltzen ditugu. Hau da, konparazioa ahalbideratzen zuten hainbat sistema aztertu dira eta hortik geroago aipatuko diren zenbait irizpide baieztatu ahal izan dira kaosa detektatzeko. Gaur egun irizpide hauek baliagarriak dira edozein sistema kuantikoren kaosaren gradua analizatzeko.

Laburbilduz, azterketa semiklasiko batetik abiatuz edozein sistema kuantikorentzat baliagarriak diren irizpideak ondorioztatu ahal izan dira, eta hau lanean aipatutako teoriak ahalbideratu du, izan ere sistema hauek RMT-ek emandako sistemen egiturei jarraitzen baitie.

## 3.2 RMT-ren aplikazioa

Aurrerago aipatu dugun bezala kaosak sistema kuantikoetan uzten dituen azterketa energia mailen multzoaren estatistikoekin kalkulatu dira. Baina hau aztertu aurretik sistemek duten egoera unibertsala nahi dugu, horregatik, lehenik sistema guztientzat berdina den espektroaren zatia bakanduko da. Hau da, unfolding deituriko prozesua aplikatu behar dugu. Modu honetan, espektro homogeneoak eraikitzen dira sistema desberdinen arteko konparaketa ahalbideratzen dutenak edota espektro berdinen barne energia tarte oso ezberdinen artekoa.

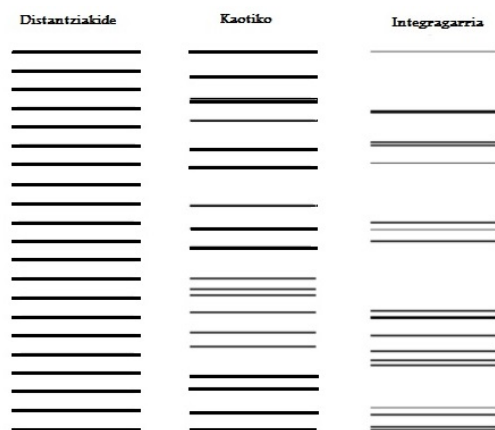
Aurretik aipatu bezala reeskalaketa hau egitean erabiltzen den metodoa edota metodoaren parametroen aukeraketak eragin handia dauka datuen azterketan, estatistikoetan eragin handia baitute. Hori dela eta, datuak aztertu aurretik

<sup>13</sup>Partikula asko dituen sistema batek ez du analogo klasikorik partikulen izaera bosonikoa edo fermionikoa denean.

erabilitako reeskalaketa prozesuaren berri jakin beharra dago. Hala ere, estatistiko batzuk beste batzuk baino sentikorragoak dira, lanean aipatuko duguna distantzia laburretarako estatistikoak ez du besteak bezainbesteko dependentsia.

Behin espektro homogeneo berria daukagula, aproposena den estatistikoa erabil daiteke kaosa detektatzeko. Guztietatik sinpleena lan honetan erabiltzen duguna da, lehen auzokideekiko distantzia, batik bat.

Lanean landu dugun estatistikoetan sistema batek kaosa duenean sortzen diren saihestutako gurutzaketak ikus ditzakegu. Sistema kaotiko baten energiak euren artean aldentzeko joera erakusten dute, espektro distantziakide bat sortzera jotzen dute, 9. irudian behatzen den bezala. Hau dela eta, kaosa daukan sistema batek GOE-ek erakusten duen jarrera bera edukiko du. Aldiz, kaos gabeko sistema bat badago, hau da integragarria dena, honek ez du energiaren alderapena erakutsiko, endekapena baimenduta baitago. Kasu honetan energiak ez dute espektro homogeneoa eratzeko joera izango. Hortaz, egonkorra den sistema batek GDE edo Poissonen kurbak jarraituko ditu. Bi sistema mota hauen espektroaren itxuran dagoen alderapena 9. irudian ikusi dezakegu.



Irudia 9: Irudi honetan espektro baten itxura beha daiteke, ezkerretik eskumara begiratuz, espektro distantziakidea, kaotikoa eta integragarria bereiz daitezke.

Sistema integragarrien kasuan frogapen numeriko asko lortu dira, analogo klasikoa duten sistema kuantikoekin zein sistema guztiz kuantikoekin. Sistema irregularrekin, aldiz, ez da guztiz frogatua geratu, emaitza esperimenteral asko lortu diren arren. Emaitza honetan oinarrituta BGS izenarekin ezagutzen zen suposizioa plazaratu zen.

### 3.2.1 BGS suposizio

XX. mendean egindako aburu honek, espektroaren propietate estatistikoak jarrerara kaotiko edo erregularrarekin lotzen ditu. Garai honetan hainbat esperimentu egin ziren hainbat konposaturen nukleo atomikoen espektroekin baita espektro atomikoekin ere eta lortutako emaitzak GOE-ek aurreratu zuenarekin bateragarriak ziren. Ikerketa hauetaz aparte, geroago aipatuko ditugun adibideetan biltzen den sistemetak baten, Sinai Billarraren, simulazioa ere egin zen eta honek kurba berdinak jarraitzen zituela ikusi zen. Guzti honek aburu hau azaltzera bultzatu zien. Bohigas Giannoni Schmit, BGS, suposizioak honela dio:

*"Inbertsio tenporalarekiko inbariantek diren eta analogo klasikotzat K sistema kaotikoa duten sistema kuantikoen energiaren espektroaren fluktuazioak GOE-ek aurreratu dituenaren berdinak dira."*

Aipatutako enuntziatua hasieran proposatutakoa da, geroago, hainbat saiakuntzak ikusi zuten baliagarri zela ere gradu txikiagoko sistema kaotikoentzat. Horregatik K sistemak sistema ergodikoengatik ordezkatu ziren enuntziatuan. Aldiz, denboraren inbertsioarekiko inbariantek ez diren sistemek, GUE-ek aurrerandakoak jarraituko ditu. Azken talde gaussiar honekin ez dira saiakuntza esperimental asko izan, soilik bi saiakuntza lortu dira, mikrouhinen barrunbeekin lortutakoak. Hau kontuan izanik, argi dago kaosean GOE talde gausiarra dela erabiliena, errazagoa baita honek adierazten dituen simetriak dituen sistema topatzea.

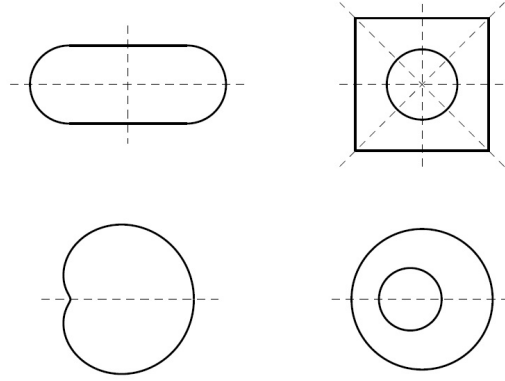
Hainbat saiakera egin dira aburu hau frogatzeko baina ez da behar bezalako den frogapen teorikoa aurkitu. Esan daiteke partikula bakarreko sistementzat ia frogatuta dagoela, ikusitako ebidentzien aurrean baina gorputz askoko sistemetan ezin da berdina esan. Frogatzeko egindako esfortzu guztiak hurbilketa semiklasikoan oinarritzen dira. Egin diren saiakera guztietatik egokienetako bat Berry-ik egin zuen 1985. urtean, estatistikoak kalkulatu zituen semiklasikoki eta RMT-ren kurbekin bat zetozela frogatu zuen.

### 3.2.2 Adibideak

Pasarte honetan datu esperimentaletan oinarritzen diren adibideak emango ditugu. Zenbait adibide aipatuko dira, guztiz kaotikoak diren sistemenak baita integragarriak direnenak ere.

Lehenengo adibidean billar kuantiko bezala ezagutzen diren sistemak aipatuko ditugu. Billar kuantikoak potentzial infinitudun hormez inguratutako gune batean mugitzen den partikula puntual baten jarrerara simulatzen dute. Hau da, bi dimentsioko potentzial putzu infinituak dira. Analogo klasikoari behatzen badiogu, bi dimentsioko espazio batean modu askean mugitzen den partikula izango dugu non hormekin dituen talkak elastikoan diren. Hau da, talketan ez da energiarik galtzen, talkan aurreko abiadura eta angelua talkan ostean

dauzkan berdina dira. Deskripzio hau kontuan izanik argi dago billarren itxurak sistemaren simetria propietateak zehaztuko dituela. Horregatik billarren itxuraren arabera sistema kaotikoak edo integragarriak izango ditugu. Sistema erregularra adierazten duen billar tipikoena zirkularra da. Bestalde, kaotikoa adierazten duena estadio formakoa edo Sinai izenez ezagutzen den billarra izan daitezke. Irudi honetan, 10. irudian, billar kaotiko batzuen adibideak klasikoki beha ditzakegu.



Irudia 10: Billar kaotikoen itxura desberdinak ikus daitezke, ezkerretik eskumara eta goitik behera begiraturaz, Bunimovich estadioa, Sinai, Pascalen barraskiloa eta eraztun itxurako billarrak. Lerro marratuz bakoitzaren simetria ardatzak irudikatuta daude. [10] erreferentziatik hartuta.

Sistema hauek, billarrak, egokiak dira azterketa kaotikoa egiteko. Alde bateatik, propietate lokal eta globalak modu zehatzean bakandu ahal direlako. Bestalde, kaosaren ikuspuntutik, askatasun-gradu gutxien behar dituen sistemak direlako.

Billar kuantikoen datu esperimentalak lortzeko mikrouhinen barrunbeak erabiltzen dira, hauen tamaina eta frekuentziak aldatuz. Datuen bateragarritasun hau ematen da ekuazioen antzekotasuna dela eta. Billar kuantikoko partikulak potentzial putzu infinitu bateko Schrödinger-en ekuazio betetzen dute. Jakina den bezala ekuazioa hurrengo da:

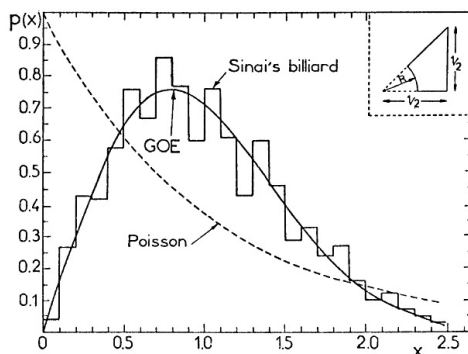
$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \rightarrow \left(\nabla^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

non  $\nabla^2$  laplaziarra den,  $m$  partikularen masa,  $E$  partikularen energia,  $\psi$  partikularen uhina eta  $H$  hamiltondarraren eragilea. Aldiz, uhinek Helmholtz-en ekuazio elektromagnetikoa betetzen dute:

$$(\nabla^2 - k^2)\psi = 0$$

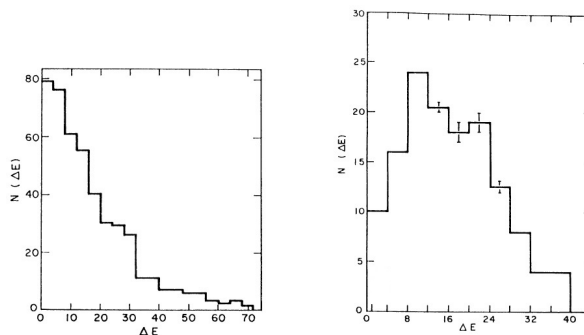
non  $k$  zenbaki bat den. Beraz, argi ikusten da bien antzekotasuna.

Esan bezala, partikulak Schrodinger-en ekuazioa jarraitzen dute, horrek esan nahi du denboraren inbertsioarekiko inbarianteak direla. Beraz, sistema kaotikoa baldin bada GOE-ren kurbak jarraitu beharko ditu. Hurrengo irudian, 11. irudian, Sinai billarra simulatzean lortzen diren energien  $p(s)$  distribuzioa ikusi dezakegu. Lortutako emaitza eta RMT-tek aurrezaten duena guztiz bateragarriak direla ikusten da, bada, BGS suposizioarekin bat dator.



Irudia 11: Sinai billarreko energien lehen auzokideekiko distribuzioaren irudikapena dago, hau da,  $p(x)$  vs  $x$ . Histograma egiteko 740 autobalio erabili dira. [2] erreferentziatik hartuta.

Hurrengo irudian, 12. irudian, billar kuantikoen beste bi adibide ikusi ditzakegu. Kasu honetan billar zirkularra eta Bunimovich-en estadioaren energien  $p(s)$ -ak hartu dira.



Irudia 12:  $p(s)$  vs  $s$  histograma ikusi daiteke, ezkerrean billar borobilerako eta eskuman Bunimovich estadiorako. [10] erreferentziatik hartuta.

Ikusten den bezala bata, ezkerrekoak, poissonen distribuzioari jarraitzen dio, horrek esan nahi du sistema integragarria dela. Ondorioz, auresandakoa betetzen da, izan ere, zirkulu itxurako billarrak klasikoki integragarriak baitira. Bigarren irudiak, berriz, ez du RMT-ren GOE-ko kurba guztiz jarraitzen baina antzekoa dela esan daiteke. Bertan ikusten da, energia mailak distantzia txikietara egoteko probabilitatea txikia dela, sistema kaotikoetan gertatzen den bezala. Hortaz, kasu honetan ere BGS suposizioa betetzen da, izan ere, estadio itxurako billarra kaotikoa baita klasikoki.

Azkenengo adibidean hidrogeno atomoak eremu magnetiko uniforme baten eraginpean duen jarrera ikusi dezakegu. Eremu honen intentsitatea aldatuz espektro desberdinak lortu dira<sup>14</sup> eta hauen  $p(s)$ -ak 13. irudian ikusi ditzakegu.

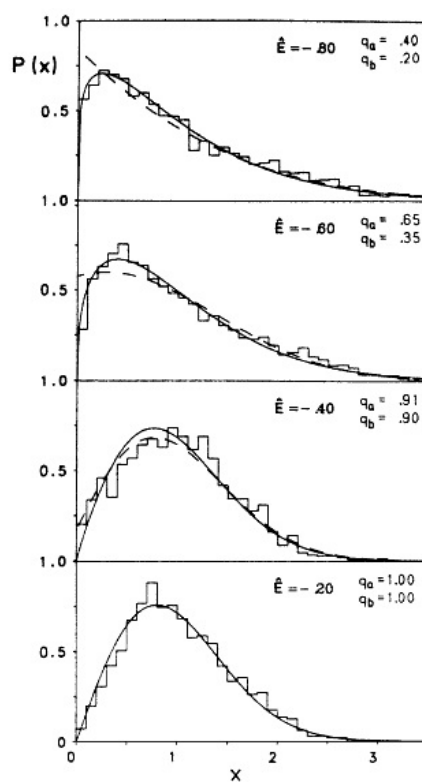
Adibide honetan hidrogeno atomoak sistema erregularretik irregularrera duen trantsizioa ikusi daiteke. Lehenengo irudian,  $\hat{E} = -0.8$  denean, poissonen itxurara hurbiltzen da, alegia, sistema integragarria da. Aldiz,  $\hat{E} = 0.2$  denean, guztiz kaotikoa den sistema bat daukagu, GOE-ko kurben doikuntzaren duen egokitasuna dela eta.

Lehen aipatu ditugu sistema nahastuentzako teorikoki kalkulatu dauden adierazpenak daudela, 2.6.1 pasartearen bukaeran, hain zuzen ere. Hidrogeno atomoaren adibidean Brody-ren adierazpena erabiltzen bada, irudian lerro marratuez irudikatuta dagoena, sistemaren emaitzaren doikuntza hoberena dela behatu dezakegu. Irudi bakoitzaren goiko aldean  $q_B$  parametroaren balioa daukagu, parametro hau guk teorian, 38. ekuazioan, erabilitako  $\beta$  parametroa da, hots, nahasketa maila adierazten duen zenbakia. Azkenengo irudian,  $q_B = 1$  da, esan bezala azkenengo kasuan GOE-ren kurbak guztiz jarraituko dituen sistema bat daukagu eta.

Adibide guzti hauek aztertu ondoren BGS suposizioaren baliagarritasunaz jabetzen gara. Nahiz eta frogapena oraindik zabalik dagoen, ikerkuntzan hainbat adibide topatu dira egia izan daitekeela erakusten digutenak.

---

<sup>14</sup>Eremuaren intentsitatea  $\hat{E}$  energia laburtuan dago,  $\hat{E} = \frac{E}{\gamma^{2/3}}$  non  $\gamma$  eremuaren intentsitatea den eta  $E$  energia



Irudia 13: Eremu magnetiko sendo batean dagoen Hidrogeno atomoaren energia mailen perturbazioen lehen auzokideekiko distantziaren grafikoa ikusi daiteke. Erabilitako autobalio kopurua 1000 eta 3000 bitartean dago. [11] erreferentziatik hartuta.

## 4 Ondorioak

Gradu amaierako lan honekin ausazko matrizeen teoriari buruzko informazio orokorra eskuratu dugu. Sarreran aipatutako puntu guztiak garatu ditugu gure azken helburura iristeko, lehen auzokideekiko distantziaren espresioa lortzea.

Lehenik eta behin simetriari aukeraketa egin dugu. Nahiz eta beste hainbat sistema mota egon, lanean talde gausiarrak soilik aipatu ditugu. Aukeraketa hau laneko bigarren atalari, aplikazio fisikoari, begira egin da, izan ere, esperimentera adibide gehien dituen multzoak baitira. Behin matrize motak aukeratu ditugula beharrezkoak ziren erremintaren kalkuluan barneratu gara. Azkenean, beharrezkoak ziren pausuak jarraituz lehen auzokideekiko distantziaren distribuziora heldu gara.

Kalkulu guzti hauen artean egoera dentsitatearen adierazpena lortu dugu. Bertan ikusi ahal izan dugu edozein talde gausiar erabilita limite berdinerara helzen garela, Wigner-ek plazaratu zuen bezala. Unibertsaltasun honi arrazoiak topatzeko hainbat metodo erabili dira. Oraindik ziurtatuta ez dagoen arren limitaren teorema zentralarekin zerikusia duela esan dezakegu. Izan ere, teorema honek dio distribuzio guztiak limite handian distribuzio gausiarrera hurbiltzen direla.

Lehenengo pasartean egindako kalkulu matematiko guztiak egokiak zirela ikusteko, Wolfram Mathematica programaren laguntzaz baliatu gara. Modu honetan baieztatu ahal izan dugu lortutako espresioak egokiak zirela matrizeen dimentsio handi baterako. Hortaz, fisika estatistikoan gertatzen den moduan, frogatu dugu teoria hau baliagarria dela dimentsio handiekin lan egiten dugunean. Gainera, behatu ahal izan dugu, kasu batzuetan ez zela oso  $N$  handia behar emaitzara heltzeko, nahiko arin lortzen baikenuen nahi genuen itxura.

Ondorengo atalean, aplikazio fisikoan, ikusi ahal izan dugu distantzia laburretako estatistikoak soilik erabiliz sistema bat kaotikoa edo erregularra den jakin daitekeela. Izan ere, distribuzio honen bitartez ikusi daiteke energien artean korrelazioa dagoen edo ez. Sistema kaotikoan energiak ezin dira endekatuta egon euren arteko korrelazioa dela eta, horregatik  $p(s=0) = 0$  izango da. Beste sistema motara joz gero, energien endekapena posiblea da, beraz,  $p(s=0) \neq 0$  izango da. Beraz, nahiz eta, estatistiko bakarri erabili dugun argi ikusi ahal izan dugu Kaosa kuantikoki ere existitzen dela eta sistemaren energia mailetan aztarnak uzten dituela. Hala ere, jakina da, distantzia luzeetako estatistikoak ere daudela zeinak distantzia luzeetako energien korrelazio neurtzen duten. Estatistiko hauen artean garrantzitsuenak eta erabilienak zurruntasun espektrala da. Estatistiko honi esker, aztertzen den espektroa espektro uniforme batetik aldentzen dena neurtu dezakegu. Ondorioz, kaosaren aztarna gehiago ikusi ahalko dira euren azterketa eginez gero. Baina lanaren luzera dela eta, ezin izan dugu honi buruzko azalpenik eman.



Hortaz, lanaren garapenean kontzeptu berri asko barneratzea lortu dugu. Halaber, nahiz eta kontzeptu berriak izan esparru batzuetan graduako klaseetan ikasitakoa aplikatu ahal izan dugu, ausazko matrizeen teoria eta fisikaren artean loturak ezarriz.

Lana garatzen genuen heinean, teoria honek fisikan izan dezakeen baliagarritasunaz jabetu gara, hau da, fisikaren beste hainbat arlotan ere aplikatu daitekeela. Teoria hau fisikaren munduan berria den arren, azken urteetan aurrerapauso asko izan ditu, hainbat erreminta berriren sorrerari esker.

# Gehigarriak

## A Erabilitako programak

Gehigarri honetan gradu amaierako lan honetan erabilitako Wolfram Mathematica-ko programak aurki ditzakegu. Programa hauek egiteko Mathematica programako azken bertsioa erabili dugu, 10.3a hain zuzen ere. Azken edizio honek abantaila handiak ditu, izan ere, hainbat funtzio berri barneratu baititu. Erreminta berri hauen artean batzuk erabilgarriak dira lan honetan aipatutako teoriaren garapenerako. Aurrerago aipatuko diren programak errazago ulertzeko erabilitako funtzio hauen azalpen txiki bat emango dugu.

Lehenik eta behin, *GaussianOrthogonalMatrixDistribution[n]*, *GaussianUnitaryMatrixDistribution[n]* eta *GaussianSymplecticMatrixDistribution[n]* funtzioak ditugu. Hiru adierazpen hauek simetria desberdinak dituzten  $n$  dimentsioko ausazko matrize bat ematen dizute, *RandomVariate* komandoa erabiliz. Alegia, aipatutako talde gauziarren distribuzioak ordezkatzeko dituzte. Lehenengoa GOE taldeko simetriak dituen matrizeen distribuzioa izango da, hau da, simetrikoak eta elementu errealak dituen matrizeak ematen dituen distribuzioa. Bigarrenak, aldiz, GUE taldeko simetriak dituen matrizeen distribuzioa adierazten du. Azkenekoak, berriz, GSE taldeko simetriak dituen matrizeena.

Erabili den beste funtzioetako bat *MatrixPropertyDistribution[expr, x  $\approx$  mdistribuzioa]* izan da, funtzio honi esker matrizeen propietate baten distribuzioa eratu daiteke. Hau da, adierazpen honek matrizearen propietate baten distribuzioa sortzen du, *expr* bezala adierazi duguna, non matrizearen ausazko aldagaiak,  $x$ -ek, *mdistribuzioa* jarraitzen duen.

Behin azalpen txiki hau eman dugula, hurrengo bi pasartean lanean erabilitako programak erakutsiko ditugu.

### A.1 Egoera dentsitatea

Pasarte honetan egoera dentsitatearen distribuzioaren kalkuluan erabili dugun programa aurki dezakegu. Hau da, lehenengo eta bigarren irudiak lortzeko erabili duguna. Kalkulu hau bi modu desberdinetan egin dugu.

Lehenengorako honako programa hau erabili dugu:

```
n = 50;
dist = MatrixPropertyDistribution[Eigenvalues[x], x  $\approx$  GaussianOrthogonalMatrixDistribution[n]];
numeroaleatorio = RandomVariate[dist]; (*Ausazko matrize bat hartzen dugu distribuziotik*)
normalizado = numeroaleatorio/Max[numeroaleatorio]; (*Normalizatzen dugu*)
g1 = Histogram[normalizado, {0.1}, PDF]; (*Autobalioen histograma egiten dugu*)
```

```
g2 = Plot[2/Pi(1 - (t)^2)^(1/2), {t, -10, 10}]; (*Balio teorikoa irudikatzen dugu*)
Show[{g1, g2}, AxesLabel -> {Autobalioak, ρ}]
```

Bigarreneko honako hau:

```
n = 100;
lista = RandomVariate[GaussianOrthogonalMatrixDistribution[n]];
lista2 = Eigenvalues[lista];
g1 = Histogram[lista2/Max[lista2], Automatic, "PDF"];
g2 = Plot[2/Pi(1 - (t)^2)^(1/2), {t, -1, 1}];
Show[{g1, g2}, AxesLabel -> {Autobalioak, ρ}]
```

Biek emaitza bera ematen digute desberdintasuna exekutatzeko behar duen denboran dago. Bigarren programarekin denbora gehiago behar du, matrize guztien autobalioak atera behar dituelako. Lehenengoan zuzenean autobalioen distribuzioa daukagunez denbora gutxiago behar du exekutatzeko. Hortaz, zenbaki handiak erabiltzeko lehenengo programa egokiena da.

Gero hasieran jarritako  $n$  zenbakiaren balio aldatuz dimentsio desberdinetako matrizeen autobalioen egoeren dentsitatea lortu dugu. Ondoren, beste talde gausiarrekin lan egin dugu programa bera erabiliz, aldatu dugun bakarri matrizearen distribuzioa da. GUE-rentzat kalkulua egiteko "*GaussianUnitaryDistribution*" erabili dugu, GSE-rentzat "*GaussianSymplecticDistribution*" eta azkenik distribuzio normalerako "*MatrixNormalDistribution*". Azken kasu honetan, matrizeen distribuzio normalarekin lan egin dugunean, programari baldintza bat gehitu diogu autobalio errealak soilik hartzeko. Izan ere, matrize hermitikoak nahi ditugunez, hauek soilik autoenergia errealak izan ditzakete.

## A.2 Lehenengo auzokideekiko distantzia

Pasarte honen lehen auzokideekiko distantzia kalkulatzeko erabili ditugun programak erakutsiko ditugu. 4., 5. eta 6. irudietan ikusten diren grafikoak, batik bat. Aipatutako lehen irudietan, 4. eta 5. irudietan, GOE eta GUE talde gausiarrak erabili ditugu, alde batetik  $2 \times 2$ -ko matrizeak erabili ditugu eta bestetik  $10000 \times 10000$ -ko matrizeak. Lehen esan bezala bi talde gausiarrentzako programa berdina erabili ditugu aldatu dugun bakarri matrizearen distribuzio mota izan da. Lehenengo programan  $2 \times 2$ -ko matrizeak erabili dira:

```
n = 10000;
dist = MatrixPropertyDistribution[{-1, 1}.MinMax[Eigenvalues[x]], x ≈ GaussianOrthogonalMatrixDistribution[2]]; (*Bi autobalioen arteko desberdintasunaren distribuzioa sortzen dugu*)
zenb = Normalize[RandomVariate[dist, n], Mean]; (*Normalizatzen dugu*)
g1 = Histogram[zenb, {0.1}, PDF];
```

```
g2 = Plot[Pi/2 * t * Exp[-Pi * (t/2)^2], {t, 0, 3}];
Show[{g1, g2}, AxesLabel -> {s, p[s]}
```

```
Bigarren programan, aldiz, 10000x10000-ko matrize bat: n = 15;
autovalor = Sort[Eigenvalues[RandomVariate[GaussianOrthogonalMatrixDistribution[n]]]];
distantziak = {};
Do[AppendTo[distantziak, Abs[Nearest[Drop[autovalor, {i}], autovalor[[i]] - autovalor[[i]]], {i, 1, n}];
(*Hurbilen dauden autobalioen arteko distantzia kalkulatu*)
distantziak1 = {};
Do[AppendTo[distantziak1, distantziak[[i, 1]], {i, 1, n}];
(*Aurrekoan lista bat bestearen barruan dagoenez, pausu honekin lista bakarra lortzen dugu*)
dis = Normalize[distantziak1, Mean];
g1 = Histogram[dis, {0.1}, PDF];
g2 = Plot[Pi/2 * t * Exp[-Pi * (t/2)^2], {t, 0, 3}];
Show[{g1, g2}, AxesLabel -> {s, p[s]}
```

```
Azkenik, 6. irudia lortzeko erabilitako programa hurrengo da: n = 10000;
diagonala = Table[RandomVariate[NormalDistribution[0, 1]], {n}];
(*Matrizearen autobalioak zuzenean hartzen ditut*)
distantziak = {};
distantziak1 = {};
Do[AppendTo[distantziak, Nearest[Drop[diagonala, {i}], diagonala[[i]] - diagonala[[i]], {i, 1, n}];
(* Autobalioen arteko distantzia kalkulatu*)
Do[If[distantziak[[i, 1]] > 0, AppendTo[distantziak1, distantziak[[i, 1]]], {i, 1, n}];
(*Sortutako bi listak bakarra bihurtu*)
dis = Normalize[distantziak1, Mean];
g1 = Histogram[dis, {0.1}, "ProbabilityDensity"];
g2 = Plot[2 * E^(-2 * x), {x, 0, 3}];
Show[{g1, g2}, AxesLabel -> {s, p[s]}
```

Kasu honetan ez da matrizearen distribuziorik erabili GDE taldearen lehen aukideekiko distantziaren distribuzioa delako. Alegia talde honetako autobalioak ausazkoak dira eta beraz euren arteko distantzia ausazko bi zenbakiren arteko distantzia izango da.

## Bibliografía

- [1] Ashraf A. Abul-Magd and Adel Y. Abul-Magd. Unfolding of the spectrum for chaotic and mixed systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 396:185 – 194, 2014.
- [2] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1–4, Jan 1984.
- [3] Oriol Bohigas. Quantum chaos. *Nuclear Physics A*, 751:343 – 372, 2005. Proceedings of the 22nd International Nuclear Physics Conference (Part 1).
- [4] Andrés Granados del Águila. Teoría de matrices aleatorias, polinomios ortogonales y variables de grassmann. Master’s thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2008.
- [5] Didina Serban Paul Wiegmann Anton Zabrodin Édouard Brézin, Vladimir Kazakov. *Applications of Random Matrices in Physics*. Springer, 2004.
- [6] D. Rafael Alejandro Molina Fernández. *Caos cuántico en sistemas hamiltonianos de muchos cuerpos*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2001.
- [7] Steven W. McDonald and Allan N. Kaufman. Spectrum and eigenfunctions for a hamiltonian with stochastic trajectories. *Phys. Rev. Lett.*, 42:1189–1191, Apr 1979.
- [8] Madan Lal Mehta. *Random Matrices*. Elsevier Academic Press, third edition, 2004.
- [9] Laura Muñoz Muñoz. *Caos cuántico en sistemas esquemáticos de partículas idénticas*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2008.
- [10] Axel Müller–Groeling Thomas Guhr and Hans A. Weidenmüller. Random matrix theories in quantum physics: Common concepts. *Elsevier Academic Press*, 1997.
- [11] D. Wintgen and H. Friedrich. Classical and quantum-mechanical transition between regularity and irregularity in a hamiltonian system. *Phys. Rev. A*, 35:1464–1466, Feb 1987.