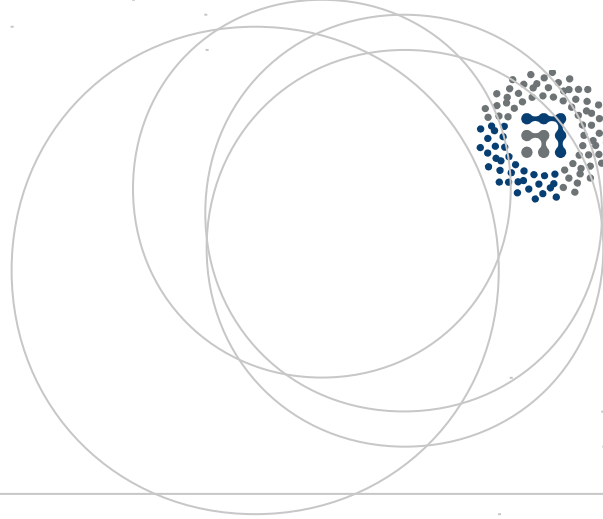


eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



ZTF-FCT

Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología



Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado
Fisikako Gradua / Grado en Física

Inflación Eterna y el Multiverso

Un estudio desde los problemas de la teoría del
Big Bang hasta el Multiverso inflacionario.

Egilea/Autor/a:
Josu Calvo Aurrekoetxea
Zuzendaria/Director/a:
José Juan Blanco-Pillado

Acknowledgements

Me gustaría agradecer al profesor J.J Blanco-Pillado que haya aceptado supervisar este Trabajo Fin de Grado, así como sus consejos y ayuda a lo largo del curso sobre cuestiones relacionadas con mi futuro académico.

Abstract

En este Trabajo Fin de Grado se hace un estudio de la Teoría de la Inflación Cósmica como solución de los problemas de la teoría del Big Bang a partir del acoplo gravitatorio de un campo escalar. Además, se analizan potenciales con mínimos con constante cosmológica $\Lambda > 0$ de Sitter (dS), $\Lambda < 0$ Anti-de Sitter (AdS) y las transiciones cosmológicas entre ellos. Por último, se presenta un modelo dS-dS para el cual el escenario final es una región con múltiples universos inflacionarios; pudiendo estar causalmente desconectados entre sí.

Índice general

Índice general	III
Índice de figuras	v
1. Introducción	1
2. Cosmología del Big Bang	3
2.1. Dinámica del Big Bang	4
2.2. Big Bang Puzzles	6
2.2.1. El problema del horizonte	6
2.2.2. El problema de la planitud	8
2.2.3. El problema de los monopolos	8
3. Teoría de la Inflación Cósmica	9
3.1. Concepto básico	9
3.2. Puzzles del Big Bang revisados	10
3.2.1. Revisión del problema del horizonte	10
3.2.2. Revisión del problema de la planitud	10
3.2.3. Revisión del problema de los monopolos	11
3.3. Física de Inflación	11
3.3.1. Dinámica de un campo escalar	12
3.3.2. Parámetros Slow-Roll	13
3.3.3. Final de Inflación	14
3.4. Modelos de inflación	15
3.4.1. Inflación caótica [5]	15

3.4.2. Inflación de Starobinsky [4]	16
4. Instantones	18
4.1. Aproximación WKB	18
4.2. Transiciones de campos escalares	19
4.2.1. Solución para el instantón	21
4.2.1.1. The thin-wall approximation	21
4.2.1.2. Método computacional fuera de la thin-wall approximation	23
4.2.2. Evolución de la burbuja	25
4.3. Instantones gravitacionales	27
4.3.1. The gravitational thin-wall approximation	28
4.3.2. Evolución y geometría de la burbuja	28
4.3.3. Solución numérica	29
4.3.3.1. Minkowski & Anti-De Sitter	30
4.3.3.2. De Sitter & De Sitter	31
5. Inflación Eterna	32
6. Conclusiones	37
Apéndice A: The thin-wall approximation	39
.1. Escalar	39
.2. Gravitacional	40
Referencias	42

Índice de figuras

2.1. Curvaturas espaciales del universo y S_k correspondientes.	5
2.2. Diagrama conformal de la cosmología del Big Bang.	7
3.1. Revisión de los problemas del horizonte y planitud.	11
3.2. Potencial caótico, soluciones para el campo y el factor de escala. .	16
3.3. Potencial Starobinsky, soluciones para el campo y el factor de escala.	17
4.1. Ejemplo de potencial escalar con dos mínimos relativos	20
4.2. Representación del instantón con simetría $O(4)$	22
4.3. Potenciales e instantones para caso escalar.	24
4.4. Evolución de la burbuja tras su materialización.	26
4.5. Instantón y solución del factor de escala para el caso Mink-AdS .	30
4.6. Instantón y solución del factor de escala para el caso dS-dS	31
5.1. Potencial Aurrekoetxea	33
5.2. Instanton, soluciones del factor de escala Euclídeo y de las ecuacio- nes de inflación para el campo escalar y factor de escala Lorentziano.	34
5.3. Escenario sin y con Inflación Eterna.	35
5.4. Trayectorias en función del tiempo de paredes de burbujas con distintos centros de nucleación.	36

Capítulo 1

Introducción

En el último siglo el entendimiento del universo ha progresado a pasos agigantados. La teoría de la relatividad general de Einstein supuso un increíble avance por aquellos tiempos y gracias a ello se resolvieron un gran número de problemas que hasta aquel entonces parecían indescifrables. Además, nuevas facetas del universo fueron desenmascaradas: agujeros negros, Big Bang...

Teniendo disponible una herramienta tan completa y potente como lo es la relatividad general, fue posible la formulación de modelos que explicasen propiedades que vemos actualmente en el universo. Sin embargo, a medida que se fue avanzando y profundizando, nuevas cuestiones aparecieron. Es por ello que hasta hace 35 años, la cosmología del Big Bang no sabía dar respuesta a tres problemas principalmente: El problema del horizonte, el problema de la planitud y el problema de los monopolos. En la década de los ochenta, sin embargo, apareció una idea que revolucionó el panorama de la cosmología del universo primitivo, la Inflación.

Esta teoría es un complemento al inicio del Big Bang convencional en la que se estudia un periodo en el cual el universo sufre una expansión acelerada, aumentando su tamaño inmensamente. Para ello, un modelo simple que estudiaremos será un campo escalar acoplado con gravedad. Sin embargo, para que se solucionen los *puzzles* del Big Bang, veremos que este potencial ha de tener una forma determinada.

En cualquier caso, existen infinitud de potenciales válidos para un periodo inflacionario, y es por ello que en el tercer capítulo nos dedicaremos a estudiar las transiciones entre los mínimos de los campos escalares mediante la teoría de los instantones. En primer lugar, analizaremos las propiedades de un campo escalar puro y posteriormente con acoplamiento gravitatorio. Veremos que existen soluciones en las que el campo tiene una probabilidad no nula de traspasar una barrera de potencial y formar una burbuja la cual tiene valores distintos del campo en el interior y exterior. Además, estudiaremos un tipo de potenciales que llevan inevitablemente al colapso de la burbuja y otros que permiten un proceso inflacionario.

Por último, en el capítulo cuatro, pondremos en práctica todo lo analizado a lo largo del trabajo con un modelo en concreto. Obtenendremos las propiedades de la burbuja, la evolución del campo y de la geometría en el interior y exterior de esta. Finalmente, veremos que potenciales con formas adecuadas pueden dar lugar a escenarios con múltiples burbujas causalmente desconectadas, acercando el término *Multiverso* a un ámbito más científico.

En el desarrollo de todo el trabajo se tomará $c = \hbar = 1$ y será útil la definición de la masa de Planck $M_P^2 = \kappa^{-1}$.

Capítulo 2

Cosmología del Big Bang

La cosmología se centra en describir el universo a grandes escalas. Para ello, aplica la relatividad general a todo el universo en su conjunto. Vamos a poner el punto de partida en la acción de Einstein-Hilbert a partir de la cual se derivan las ecuaciones de Einstein,

$$S_{EH} = \int dx^4 \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} R + S_M \quad (2.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica, $g = \det(g_{\mu\nu})$, R es el escalar de Ricci, $\kappa = 8\pi G$, G es la constante de gravitación universal y S_M es la acción correspondiente a la distribución de materia. Minimizando esta acción mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange se llega a

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

donde los términos de la izquierda tienen que ver con la geometría del espacio-tiempo y siguen las siguientes definiciones.

$$\text{Símbolos de Christoffel:} \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (2.3)$$

$$\text{Tensor de Riemann:} \quad R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \quad (2.4)$$

$$\text{Tensor de Ricci:} \quad R_{\mu\lambda} = g^{\nu\sigma} R_{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (2.5)$$

$$\text{Escalar de Ricci:} \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

Por otra parte, el término de la derecha corresponde a la distribución de materia (energía). El objeto $T_{\mu\nu}$ es un tensor de segundo orden que se obtiene a partir de la acción de la materia S_M .

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.7)$$

Por lo tanto, la presencia de materia (energía) determina la geometría del espacio-tiempo y viceversa, la geometría determina el movimiento de la materia.

2.1. Dinámica del Big Bang

En el universo hay multitud de objetos: estrellas, galaxias, grupos de galaxias... es increíblemente inhomogéneo. Nosotros, sin embargo, cuando observamos en distintas direcciones vemos la misma densidad de galaxias. Además, a partir de los datos del CMB¹, tenemos evidencias de que el universo a gran escala es extremadamente homogéneo e isótropo. Esto es lo que se conoce como el principio cosmológico y si queremos describir como se comporta el universo a gran escala debemos respetarlo. La métrica que describe el universo en su conjunto y que nos garantiza estas propiedades es la métrica FLRW².

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega_2^2) \quad (2.8)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, $d\Omega_2$ es una 2-esfera y $S_k(\chi)$ es una función que depende de la curvatura del espacio como se ve en la figura (2.1). Como el paréntesis multiplicando al factor de escala en (2.8) no depende del tiempo, toda la dinámica está contenida en $a(t)$. En (2.8) se usan coordenadas comóviles, esto es, coordenadas que se mueven junto al sistema de referencia. Si queremos obtener la distancia física real,

$$\text{Distancia física} = a(t) \times \text{distancia comóvil.} \quad (2.9)$$

¹Por sus siglas en inglés *Cosmic Microwave Background*, Fondo Cósmico de Microondas.

²Friedmann Lemaître Robertson Walker.

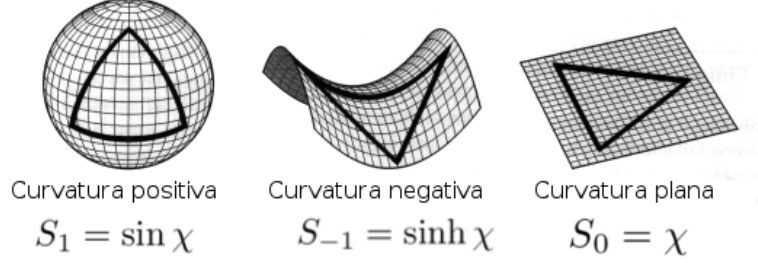


Figura 2.1: Curvaturas espaciales posibles y S_k correspondientes: Un universo con $k = 1$ es un universo cerrado; con $k = -1$ abierto; y con $k = 0$ plano.

A continuación modelaremos el universo por un tensor energía-momento para un fluido perfecto, por lo que solo nos aparecerán dos parámetros, la densidad de energía ρ y la presión P .

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, P, P, P) \quad (2.10)$$

Aplicando (2.2) a (2.8) y (2.10) obtenemos lo que se conocen como las ecuaciones de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3M_P^2}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{1}{6M_P^2}(\rho + 3P) \quad (2.12)$$

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho + P) = 0 \quad (2.13)$$

donde los puntos denotan la derivación respecto a la coordenada de tiempo t y k es una constante que depende de la curvatura del espacio como se ve en la figura (2.1). Si asumimos una ecuación de estado simple como lo es $P = w\rho$, siendo w constante, las ecuaciones se simplifican y son fácilmente integrables

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(1+w)\rho = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho \sim a^{-3(1+w)} \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3M_P^2}\rho - \frac{k}{a^2} \quad \longrightarrow \quad a \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (2.15)$$

Obviamente, dependiendo de qué es lo que domina en el universo, la constante de proporcionalidad $w \equiv \rho/p$ toma distintos valores que nos darán distintas dependencias para la densidad y el factor de escala. Por ejemplo, cuando la materia ordinaria no-relativista predomina en el universo $w = 0$ y por tanto $p = 0$. A partir de las ecuaciones (2.14) y (2.15) se obtiene $\rho \sim a^{-3}$ y $a \sim t^{2/3}$. Otro ejemplo importante es cuando lo que predomina en el universo es radiación, $w = 1/3$ y $\rho \sim a^{-4}$ $a \sim t^{1/2}$. Por último, y el caso de mayor interés para este trabajo, cuando $w = -1$, es decir, un universo gobernado por constante cosmológica positiva donde $\rho \sim \text{cte}$ y $a \sim e^{Ht}$.

2.2. Big Bang Puzzles

2.2.1. El problema del horizonte

La cinemática de los fotones cosmológicos puede ser mejor estudiada si introducimos una nueva coordenada para el tiempo llamada tiempo conforme $dt \equiv a(\tau)d\tau$. Con esta nueva coordenada, la métrica (2.8) se reescribe

$$ds^2 = a(\tau)^2(-d\tau^2 + d\mathbf{x}^2). \quad (2.16)$$

Esta última expresión es la métrica de Minkowski estática multiplicada por un factor de escala dependiente del tiempo. Recordando que los fotones siguen trayectorias tipo luz ($ds^2 = 0$), mediante esta nueva métrica hemos conseguido que podamos representar sus trayectorias en rectas a $\pm 45^\circ$ en el plano $\tau - \mathbf{x}$ como se ve en la figura (2.2).

Si partimos de la definición del tiempo conforme y tenemos en cuenta que $dt = (dt/da)da$ y la definición del parámetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$,

$$\tau_m = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{da}{a\dot{a}} = \int d\log(a) \left(\frac{1}{aH} \right). \quad (2.17)$$

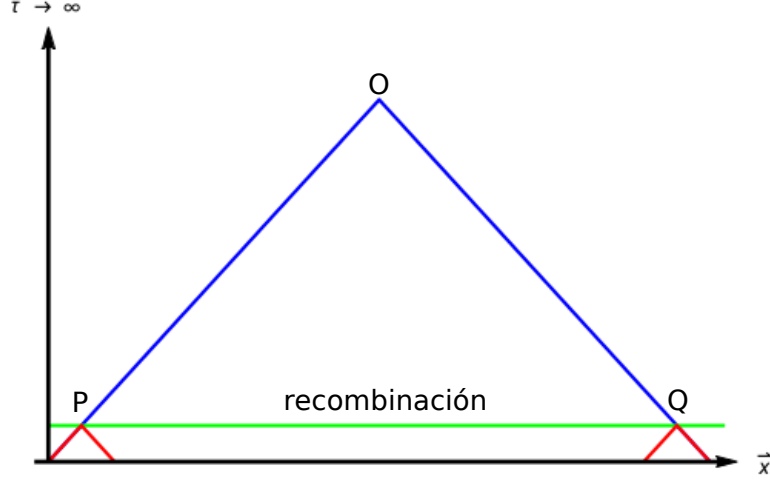


Figura 2.2: Fotones que llegan al punto O desde P y Q están desconectados causalmente, ya que sus conos de luz no tienen una región en común.

Introduciendo las expresiones obtenidas para $a(t)$ en (2.15) es trivial obtener,

$$\tau_m \sim t^{\frac{1+3w}{3(1+w)}} \sim a^{\frac{1+3w}{2}}. \quad (2.18)$$

La dependencia viene claramente determinada por el signo de $1 + 3w$. Para la cosmología del Big Bang, esto es, un universo dominado por radiación o materia, $1 + 3w > 0$, y por tanto $\tau = 0$ es una cota inferior.

En la figura (2.2) se observa el problema del horizonte gráficamente. Los fotones empezaron a viajar en el universo en la época de la recombinación, esto es, cuando el universo se enfrió lo suficiente como para que estos pudiesen escapar de aquella sopa de partículas. Podemos seguir los conos de luz del pasado de los fotones que nos llegan actualmente hasta la época de la recombinación. Si nos fijamos en el punto P y Q , vemos que ambos están causalmente desconectados ya que sus conos de luz no tienen una región en común ($\tau = 0$ es una cota inferior), por lo que les ha sido imposible interactuar. Sin embargo, si observamos el CMB, vemos que es isótropo en todas las direcciones y que les corresponde una temperatura de 2.7 K aproximadamente. ¿Cómo es posible que se haya establecido equilibrio térmico entre regiones que están causalmente desconectadas? Esto es lo que se conoce como el problema del horizonte.

2.2.2. El problema de la planitud

Despejamos la densidad de la expresión (2.15) $\rho = 3M_P^2 (H^2 + k/a^2)$ y definimos el parámetro de curvatura $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}}$ donde la densidad crítica es la densidad que correspondería a un universo plano ($k = 0$), esto es, $\rho_{crit} = 3M_P^2 H^2$. Por tanto,

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(aH)^2} \quad (2.19)$$

Además, como

$$\frac{1}{aH} \sim a^{\frac{1+3w}{2}} \quad (2.20)$$

y para la cosmología del Big Bang $1 + 3w > 0$, $1/aH$ aumenta con el tiempo, haciendo que (2.19) se aleje rápidamente del valor nulo. Esto es, el universo con el tiempo deja de ser plano. A partir de medidas experimentales del parámetro de Hubble, se pueden obtener datos observacionales de (2.19) y se sabe que actualmente $|\Omega - 1| < 10^{-2}$. Y como esta diferencia debe crecer con el tiempo, mucho antes Ω debía estar mucho más cerca a la unidad. Por ejemplo, en la época de nucleosíntesis, se estima que $|\Omega - 1| < 10^{-18}$.

Si se va más atrás en el tiempo, este valor cada vez se vuelve más pequeño, lo que exige unas condiciones iniciales muy finamente ajustadas. ¿Por qué el universo era tan plano?

2.2.3. El problema de los monopolos

Simplemente mencionaremos en qué consiste pero sin profundizar ya que es consecuencia de predicciones de la física de partículas. Según las teorías de gran unificación, en el Big-Bang pudieron haberse creado multitud de objetos exóticos como monopolos. De existir estas reliquias en una etapa primordial del universo, sus densidades de energía decrecieron más lentamente que la radiación (la radiación a^{-4} y la materia a^{-3}), por lo que en el universo actual deberíamos observarlas. Sin embargo, en las observaciones no hay rastro de ellas y además no se han visto efectos producidos por su existencia en el pasado.

Capítulo 3

Teoría de la Inflación Cósmica

Con el objetivo de resolver los problemas de la cosmología del Big bang, el físico estadounidense Alan Guth propuso la teoría de la inflación cósmica en 1980. Según esta, el universo tuvo una época en la cual sufrió una expansión acelerada que duró muy poco tiempo pero aumentó muchísimo su tamaño. A continuación desarrollamos el fundamento y las características de esta teoría.

3.1. Concepto básico

Como hemos visto en (2.17), los problemas que han aparecido en la teoría del Big Bang han sido consecuencia de considerar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) > 0. \quad (3.1)$$

Veamos qué implicaciones tiene suponer unas condiciones en las que ocurra lo contrario,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0 \quad \longrightarrow \quad -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0. \quad (3.2)$$

Al estar al cuadrado el divisor, siempre es positivo por lo que para que se verifique la desigualdad hemos de exigir que

$$\ddot{a} > 0 \quad (3.3)$$

lo que implica gravedad repulsiva. Ahora, teniendo en cuenta (2.12), se debe cumplir que

$$\rho + 3P < 0 \quad \longrightarrow \quad P < -\frac{\rho}{3} \quad (3.4)$$

lo cual considerando la densidad de energía positiva, implica una presión negativa. Esto se puede conseguir tomando en la ecuación de estado $w = -1$, es decir, un universo dominado por una constante cosmológica positiva. Y siguiendo la expresión (2.14), la densidad de energía es constante por lo que a partir de (2.11), $H^2 = \frac{1}{3M_P^2}\rho = cte$. Integrando, la dependencia del factor de escala viene dada por

$$a \sim e^{Ht} \sim e^{\sqrt{\frac{\rho}{3M_P^2}}t} \quad (3.5)$$

Como la función exponencial crece muy rápidamente, en el periodo inflacionario el factor de escala aumenta de manera desmesurada. Esto tendrá increíbles consecuencias en los problemas de la teoría del Big Bang como veremos a continuación.

3.2. Puzzles del Big Bang revisados

3.2.1. Revisión del problema del horizonte

Al ser la presión negativa durante la época inflacionaria, $1 + 3w < 0$; por lo que el comportamiento de la expresión (2.18) cambia, ya que va hasta $-\infty$ cuando vamos atrás en el tiempo. Esto añade tiempo conforme como se ve en la figura (3.1a), permitiendo que regiones que vemos actualmente causalmente desconectadas pudiesen interactuar durante inflación a diferencia de lo que ocurría en la figura (2.2).

3.2.2. Revisión del problema de la planitud

Si en la expresión (2.19) introducimos la dependencia del factor de escala que hemos obtenido durante inflación, se llega a

$$\Omega - 1 \sim e^{-2Ht} \quad (3.6)$$

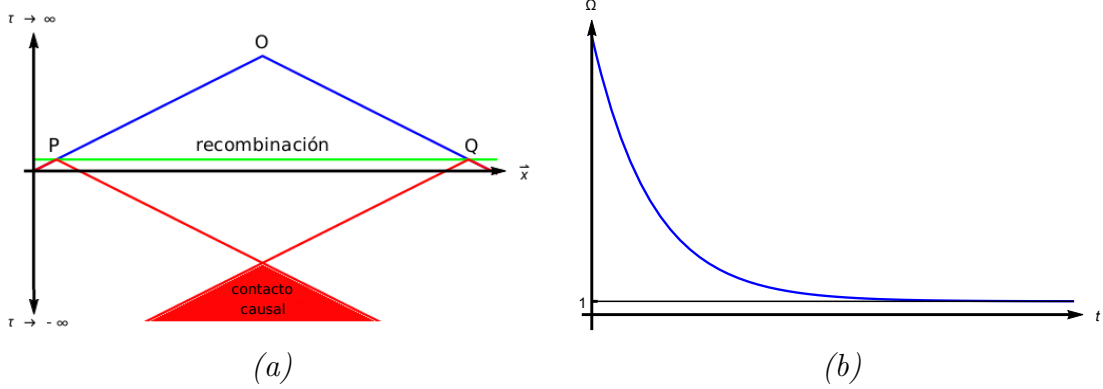


Figura 3.1: (a): Inflación añade tiempo conformal permitiendo que regiones actualmente desconectadas causalmente, interactuasen, pudiendo establecer equilibrio térmico. (b): Inflación fuerza que al final del proceso $\Omega = 1$.

Por consiguiente, durante el periodo inflacionario, el parámetro de curvatura tiende a 1 a medida que crece t como se ve en la figura (3.1b). Es decir, la rápida expansión del universo fuerza que este sea extremadamente plano al final del proceso. El universo sufrió una expansión inmensa tan rápida que las observaciones actuales dirían que es plano, al igual que al hacer zoom en una superficie curva, esta resulta plana.

3.2.3. Revisión del problema de los monopolos

Sin ahondar en detalles, dada la rápida y extrema expansión que sufre el universo durante inflación, estos objetos son diluidos, haciendo que no se observen en el universo actual y que no afecten a la evolución del universo.

3.3. Física de Inflación

En esta sección vamos a analizar el mecanismo más simple que produce el proceso inflacionario, además de ver qué condiciones han de cumplirse para que se solucionen los puzzles del Big Bang.

3.3.1. Dinámica de un campo escalar

Un modelo simple que tiene las propiedades que se han comentado anteriormente es un campo escalar llamado inflatón acoplado con gravedad. La acción correspondiente viene dada por

$$S = S_{EH} + S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] \quad (3.7)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar y el campo es homogéneo, $\phi = \phi(t)$. Vamos a asumir que la métrica es la correspondiente a un universo homogéneo e isótropo, es decir, FLRW (2.8). A partir de la ecuación (2.7) podemos obtener el tensor de energía-momento, que para este caso toma la forma de un fluido perfecto con

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.8)$$

$$P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta la relación lineal que hemos determinado entre ambas en la ecuación de estado, podemos obtener la constante de proporcionalidad w .

$$w \equiv \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (3.10)$$

Esta última expresión es de gran interés y es clave para el mecanismo inflacionario ya que en el caso en el que el potencial $V(\phi)$ domine sobre $\dot{\phi}^2$, se obtiene que la constante $w \approx -1$. Además, partiendo de la acción (3.7), podemos obtener las ecuaciones de movimiento del campo inflatón y el factor de escala.

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.11)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_P^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (3.12)$$

3.3.2. Parámetros Slow-Roll

La ecuación dinámica del universo (2.12), para un universo dominado por un campo escalar homogéneo se puede reescribir de la siguiente forma,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon) \quad (3.13)$$

donde ϵ se conoce como un parámetro slow-roll y está definido por

$$\epsilon \equiv - \left(\frac{\dot{H}}{H} \right) \frac{1}{H} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}}{M_P^2 H^2}. \quad (3.14)$$

Como habíamos visto anteriormente, para que se produzca la expansión acelerada el parámetro de Hubble tiene que ser constante durante un tiempo de Hubble H^{-1} . Esto significa que durante la época inflacionaria, se debe cumplir que $\epsilon < 1$. Además, queremos que el proceso se mantenga durante un periodo de tiempo suficientemente grande. Para ello, otro requisito es que en (3.11) se cumpla que $|\ddot{\phi}| < 3H\dot{\phi}$ y $|\ddot{\phi}| < V'(\phi)$. Es por ello que se define un segundo parámetro slow-roll δ ,

$$\delta \equiv - \left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right) \frac{1}{H} \quad (3.15)$$

al que se le tiene que exigir que $\delta < 1$. Teniendo en cuenta estas aproximaciones en las ecuaciones (3.11) y (3.12), llegamos a

$$3H\dot{\phi} + V'(\phi) \approx 0 \quad (3.16)$$

$$H^2 \approx \frac{V(\phi)}{3M_P^2}. \quad (3.17)$$

Cada modelo inflacionario vendrá caracterizado por el potencial del campo escalar elegido, por lo que es conveniente tenerlos definidos en función de $V(\phi)$.

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \quad (3.18)$$

$$\eta(\phi) = \delta + \epsilon \approx M_P^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \quad (3.19)$$

Por tanto, si conseguimos una función $V(\phi)$ con un intervalo en el cual $\epsilon < 1$ y $\eta < 1$, tendremos inflación.

3.3.3. Final de Inflación

Hasta ahora hemos visto las condiciones necesarias para que se produzca inflación y se resuelvan los puzzles de la cosmología del Big Bang. Sin embargo, esta época de expansión acelerada tiene que llegar a su fin en algún momento para que la evolución del universo venga determinada por la teoría del Big Bang convencional y las predicciones sean compatibles con nuestras observaciones hoy en día. ¿Cuándo finaliza el proceso inflacionario?

Como hemos visto, una condición necesaria para que se produjese inflación es que los parámetros slow-roll fuesen pequeños. Por tanto, este proceso terminará cuando se violen las condiciones de slow-roll

$$\epsilon(\phi_f) \approx 1 \quad \eta(\phi_f) \approx 1. \quad (3.20)$$

Una vez finalizada la expansión acelerada, se puede calcular en qué factor exponencial ha aumentado el tamaño del universo. Esto viene dado por el número de e-folds N a partir de $a_f = a_i e^N \Rightarrow N = \ln \frac{a_f}{a_i}$.

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a} = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right) d\phi \quad (3.21)$$

donde se han hecho los cambios $da = \dot{a} dt$ y $dt = \dot{\phi}^{-1} d\phi$. Si a continuación hacemos uso de las expresiones (3.16), (3.17) y (3.18) para dejar este resultado en función de objetos característicos de cada modelo,

$$N \approx \int_{\phi_{fin}}^{\phi} \left(\frac{V(\phi)}{M_P^2 V'(\phi)} \right) = \int_{\phi_{fin}}^{\phi} \frac{1}{M_P} \left(\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \right) d\phi. \quad (3.22)$$

Finalmente, para que se solucionen los puzzles del Big Bang el número de e-folds no puede ser cualquiera [7], sino que

$$N \geq 60. \quad (3.23)$$

3.4. Modelos de inflación

Como hemos dicho, existen infinidad de modelos ya que la elección del potencial escalar $V(\phi)$ es completamente arbitraria siempre y cuando se respete el número mínimo de e-folds. Además, es posible considerar acciones más complicadas que la definida en (3.7), con más de un campo escalar por ejemplo. En este capítulo, sin embargo, trabajaremos con potenciales simples como el caótico y Starobinsky.

3.4.1. Inflación caótica [5]

Vamos a aplicar lo desarrollado anteriormente al caso más simple en el que el potencial del campo escalar es un oscilador armónico. Este modelo tiene el nombre de inflación caótica.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.24)$$

A pesar de tratarse de un potencial simple como para realizar un tratamiento teórico, vamos a resolver las ecuaciones (3.11) y (3.12) numéricamente. Para ello, se ha escrito un código en *Mathematica*.

En las figuras (3.2b) y (3.2c) se observa como el campo empieza a rodar partiendo de las condiciones iniciales $\phi(0) = 15M_P$ y $\dot{\phi}(0) = 0M_P$ para finalmente terminar oscilando entorno al mínimo. Las condiciones iniciales que se han elegido para el campo son arbitrarias ya que la trayectoria de slow-roll es un atractor. Además, en la figura (3.2d) vemos que el factor de escala aumenta exponencialmente (linealmente en la gráfica logarítmica) mientras se respetan las condiciones de slow-roll.

Una vez tenemos las soluciones para estas condiciones iniciales, es inmediata la obtención del número de e-folds mediante integración numérica. Para este caso,

$$N = \int_0^{32100} H dt \approx 170 \quad (3.25)$$

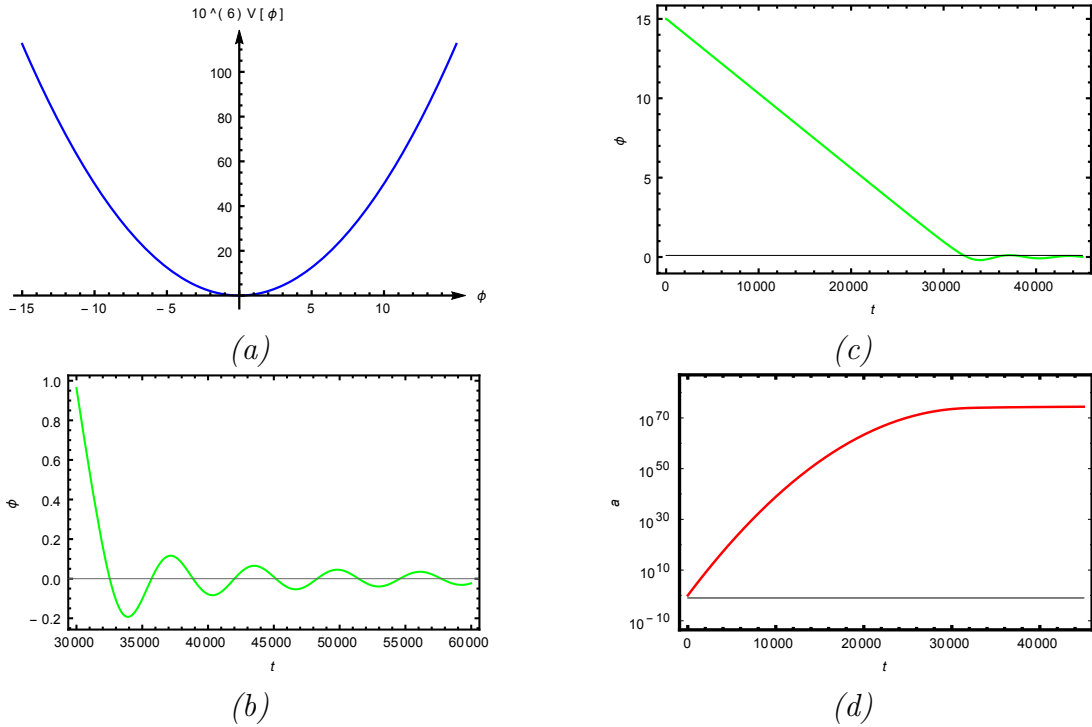


Figura 3.2: (a): Potencial caótico para $m = 10^{-3}M_P$. (b): Zoom de la solución del campo en la que se ve claramente la oscilación entorno al mínimo. (c): Solución para el campo. (d): Plot logarítmico de la solución del factor de escala.

por lo que era suficiente con empezar desde un valor de $\phi(0) < 15M_P$ ya que como hemos mencionado en (3.23), solo son necesarios 60 e-folds.

3.4.2. Inflación de Starobinsky [4]

Otro potencial interesante es el potencial de Starobinsky cuya forma viene dada por la siguiente expresión

$$V(\phi) = m \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}} - 1 \right). \quad (3.26)$$

Como se ve en la figura (3.3c), la condición inicial ha sido $\phi(0) = -5M_P$. Por la forma del potencial, el campo va rodando muy lentamente hacia el mínimo, por lo que el factor de escala sufre un incremento exponencial como se ve en la figura (3.3d) hasta que el campo empieza a oscilar entorno al mínimo, que es cuando se

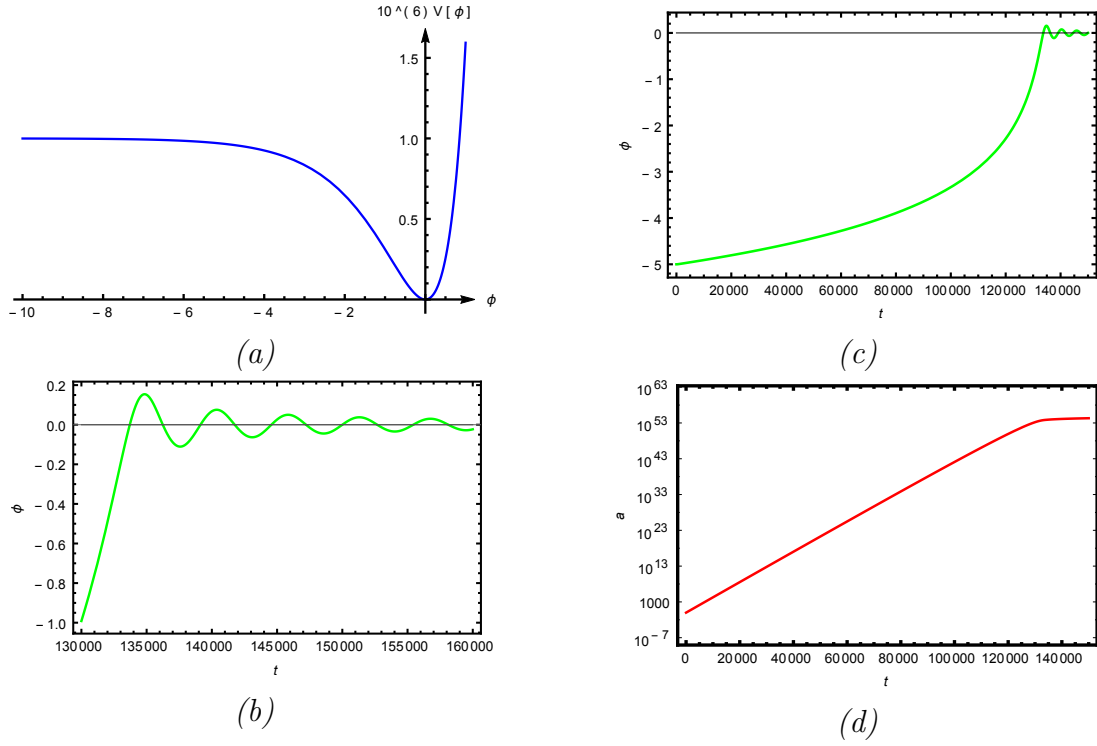


Figura 3.3: (a): Potencial de Starobinsky con $m = 10^{-6} M_P^4$. (b): Zoom de la solución del campo en la que se ve claramente la oscilación entorno al mínimo. (c): Solución para el campo. (d): Plot logarítmico de la solución del factor de escala.

violan las condiciones de slow-roll.

Al igual que para el potencial caótico, podíamos haber empezado desde valores del campo más próximos al mínimo, ya que

$$N = \int_0^{134000} H dt \approx 124. \quad (3.27)$$

Capítulo 4

Instantones

Las teorías inflacionarias resuelven los problemas más importantes de la cosmología del Big Bang. Sin embargo, introducen nuevas cuestiones a considerar. ¿Por qué el campo inicialmente se encuentra en un valor concreto? Como hemos visto en el capítulo anterior, tenemos infinitas posibilidades para elegir la forma del potencial escalar $V(\phi)$. Es por ello que en este capítulo estudiaremos potenciales más complicados que los vistos anteriormente desde un punto de vista de aproximaciones semiclásicas pero que en ocasiones pueden servirnos para dar respuesta a alguna de estas preguntas. Vamos a usar el convenio $(+, -, -, -)$.

4.1. Aproximación WKB

Sabemos que desde un punto de vista cuántico una partícula tiene una probabilidad no nula de traspasar una barrera de potencial por efecto túnel. Esta probabilidad se puede obtener a partir de la aproximación WKB.

$$\Gamma = Ae^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (4.1)$$

siendo

$$B = 2 \int_{q_0}^{q_f} dq [2(V(\vec{q}) - E)]^{1/2} \quad (4.2)$$

y donde q_0 y q_f son los puntos de entrada y salida. La trayectoria más probable desde una posición estable $q = q_0$ se puede obtener, siguiendo el principio de Jacobi, extremando la acción.

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{q}}{dt} \right)^2 + V(\vec{q}) \right] \quad (4.3)$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d^2 q_j}{d\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (4.4)$$

Finalmente, encontrando las soluciones se llega a que

$$B[\vec{q}] = S_E[\vec{q}] - S_E[\vec{q}_0] \quad (4.5)$$

4.2. Transiciones de campos escalares

En esta sección vamos a generalizar lo anterior para un campo escalar con un estado meta-estable como lo es el potencial de la figura (4.1). El potencial V posee dos mínimos en ϕ_- y ϕ_+ . Sin embargo, solo uno es mínimo absoluto. Análogamente al caso de una partícula ante una barrera de potencial, existe una probabilidad de transición al mínimo absoluto. La probabilidad de que dicha transición ocurra es [1]

$$\frac{\Gamma}{V} = A e^{-B/\hbar} \quad (4.6)$$

donde B es la acción del instantón¹

$$B = S_E(\phi) - S_E(\phi_+). \quad (4.7)$$

Vamos a analizar el instanton para un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \quad (4.8)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial escalar que en los casos más simples que considera-

¹Un instantón es la solución de las ecuaciones Euclídeas de una teoría.

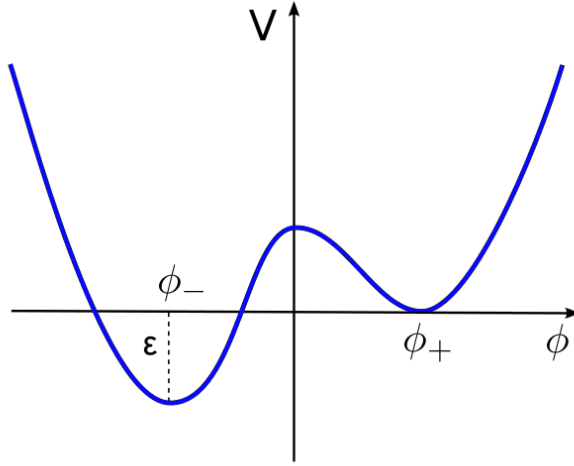


Figura 4.1: Potencial escalar con un mínimo local en ϕ_+ y un mínimo global en ϕ_- , separados por un valor del potencial $\Delta V = \varepsilon$. El punto ϕ_+ es meta-estable y existe una probabilidad no nula de que decaiga a ϕ_- .

remos tendrá un falso vacío. Podemos obtener la acción Euclídea mediante una rotación de Wick ($t_E = it$).

$$S_E = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right) \quad (4.9)$$

A continuación vamos a encontrar una solución de esta acción, el instantón ϕ . La obtención de las ecuaciones de movimiento es inmediata a partir de la definición de su acción y el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\partial_\mu \partial_\mu \phi = V'(\phi) \quad (4.10)$$

donde $' \equiv d/d\phi$. Las condiciones de contorno vienen dadas por el problema que queremos resolver. Un campo está inicialmente en $\phi = \phi_+$ y decae por efecto túnel a un estado de menor energía $\phi = \phi_-$. Las condiciones que queremos que se cumplan son,

$$\lim_{t_E \rightarrow \pm\infty} \phi(t_E, \mathbf{x}) = \phi_+ \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi(t_E, \mathbf{x}) = \phi_+ \quad (4.11)$$

ya que queremos la solución de un campo que en el tiempo Euclídeo $t_E \rightarrow -\infty$

está en el falso vacío ϕ_+ y en $t_E \rightarrow +\infty$ se encuentra en ϕ_+ de nuevo, para que la acción sea finita.

Un instanton con simetría $O(4)$ tiene la menor acción, por lo que la probabilidad (4.6) es máxima [1]. Dada esta simetría, lo más conveniente es elegir el sistema de coordenadas en el centro. Gracias a esto se nos van a simplificar mucho las expresiones ya que nuestra solución ϕ únicamente dependerá de una coordenada radial que llamaremos r . La ecuación de movimiento (4.10) nos queda entonces,

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\phi}{dr} = V'(\phi) \quad (4.12)$$

y las condiciones de contorno (4.11) pasan a ser

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \phi_+ \quad \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.13)$$

ya que queremos que la acción sea finita y que (4.12) no diverga en $r = 0$.

4.2.1. Solución para el instantón

La resolución de la ecuación diferencial no es de ninguna forma inmediata. Además, depende del potencial del campo escalar $V(\phi)$ que no hemos determinado aún. Como hemos visto, para el caso más simple que vamos a considerar, el potencial va a ser de la forma de la figura (4.1). Sin embargo, la diferencia del valor del campo en cada punto $\Delta V = V(\phi_+) - V(\phi_-)$ va a ser crucial para la resolución de la ecuación de movimiento. A continuación, introduciremos dos métodos distintos.

4.2.1.1. The thin-wall approximation

Como bien indica el nombre, este método se trata de un método aproximado cuando la pared de la burbuja es fina comparada con el radio. Vamos a empezar suponiendo que tratamos con un potencial

$$V(\phi) = V_0(\phi) + \varepsilon \frac{(\phi - a)}{2a} \quad (4.14)$$

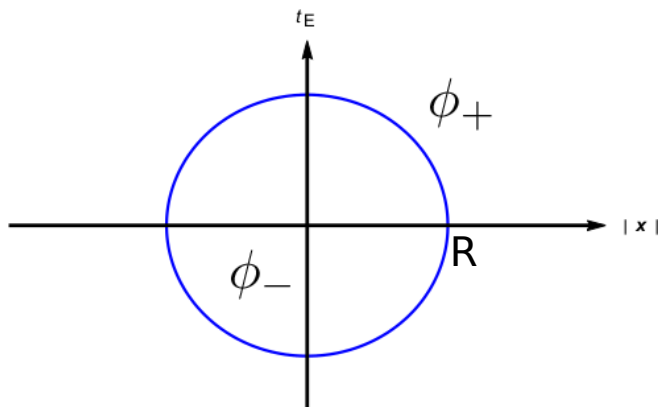


Figura 4.2: Representación gráfica del "mar" de falso ϕ_+ vacío con la burbuja de radio R en cuyo interior el campo ha traspasado la barrera por efecto túnel y se encuentra en el verdadero vacío ϕ_- .

siendo $V_0(\phi)$ un potencial simétrico y ε un parámetro pequeño y positivo. Tiene un mínimo global en ϕ_- con un valor $V(\phi_-) = V_0 - \varepsilon$ y un mínimo local en ϕ_+ con $V(\phi_+) = V_0$.

Teniendo en cuenta la expresión (4.10), podemos hacer una analogía clásica de la ecuación para entender de forma cualitativa de qué es lo que está sucediendo. Una partícula se encuentra en un potencial $-V(\phi)$, inicialmente en ϕ_- . Permanece en este punto por un largo tiempo hasta que en un instante dado $r \approx R$ rueda rápidamente y se va frenando hasta que llega a ϕ_+ en $r = \infty$. Debido a la simetría esférica, esto se puede entender como un mar de falso vacío donde en un instante aparece una burbuja de radio R en cuyo interior el campo se encuentra en el verdadero vacío y en el exterior el falso vacío (figura (4.2)).

Se solucionan las ecuaciones siguiendo el proceso del apéndice A y se encuentra así el valor de la acción del instantón

$$B = 2\pi R^3 S_1 - \frac{1}{2}\pi^2 R^4 \varepsilon. \quad (4.15)$$

Haciendo extremal, obtenemos el valor de R óptimo

$$R = \frac{3}{\varepsilon} S_1 \quad (4.16)$$

para el cual

$$B = 27\pi^2 \frac{S_1^4}{2\varepsilon^3}. \quad (4.17)$$

Con esto completamos la descripción de la creación de la burbuja desde el punto de vista de la aproximación de la pared fina.

4.2.1.2. Método computacional fuera de la thin-wall approximation

Otra forma de resolver la ecuación (4.12) es numéricamente. Para ello, se ha escrito un programa en *Mathematica*. En este apartado obtendremos la solución para el siguiente potencial, habitualmente mencionado en la bibliografía

$$V(\phi) = M^4 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{M} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{M} \right)^3 + \frac{c}{8} \left(\frac{\phi}{M} \right)^4 \right) \quad (4.18)$$

donde M es una constante que nos sirve para escalar, dar unidades y el valor c es una constante que como se observa en la figura (4.3a) tiene la función de aumentar o disminuir la diferencia de energía entre los mínimos de la función.

Lo primero que haremos para obtener la solución será desarrollar $\phi(r)$ en un entorno cercano a $r = 0$ para evitar la singularidad de la ecuación diferencial (4.12).

$$\phi(r) \approx \phi_0 + \phi_1 r + \phi_2 r^2 + \dots \quad (4.19)$$

A continuación introducimos este ansatz en la ecuación de movimiento y obtenemos las siguientes relaciones.

$$\phi_1 = 0 \quad (4.20)$$

$$8\phi_2 - \left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_0} = 0 \quad (4.21)$$

Consecuentemente, podemos reescribir la expresión (4.45) en función de un único parámetro ϕ_0

$$\phi \approx \phi_0 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_0} r^2 + \dots \quad (4.22)$$

donde ϕ_0 es el valor de ϕ en $r = 0$, es decir, es el valor que nos da información

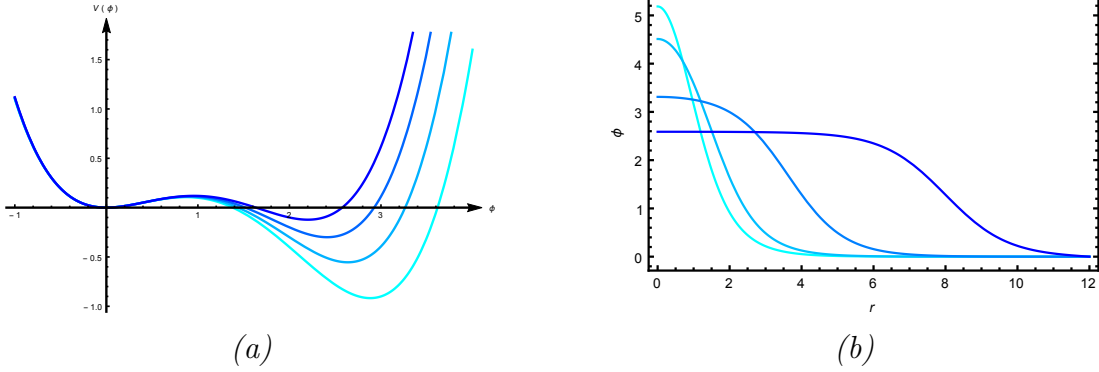


Figura 4.3: (a): Potencial (4.18) para valores de $c = 0,2; 0,4; 0,7; 0,86$ de color claro a oscuro. (b): Solución de las ecuaciones de movimiento del campo para el potencial (4.18). A medida que $c \rightarrow 1$, el tunneling se produce entre valores más cercanos y además el radio de la burbuja tiende a infinito.

sobre el campo en el centro de la burbuja.

Ahora, lo que haremos será obtener la solución numérica completa para $\phi(r)$. Para ello, usaremos el método del disparo en el parámetro ϕ_0 . Esto es, iremos probando con distintos valores de ϕ_0 hasta que se cumplan las condiciones de contorno. Estas no serán exáctamente las que aparecen escritas en (4.13) ya que el hecho de tener una condición en el infinito nos dará problemas, además de que la ecuación es altamente inestable. Este problema lo podemos solventar teniendo en cuenta que la solución para este potencial se comporta $\phi(r \rightarrow \infty) \approx 0$, por lo que podemos despreciar los términos no lineales de $V'(\phi)$, quedando la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\phi}{dr} - \phi = 0 \quad (4.23)$$

cuya solución es

$$\phi(r) = \frac{\text{BesselK}(1, r)}{r} \quad (4.24)$$

y consecuentemente, una condición de contorno más adecuada será

$$\phi'(r_f) = -\frac{\text{BesselK}(2, r_f)}{r_f} \quad (4.25)$$

donde r_f es un valor lo más grande posible computacionalmente que simulará el

infinito. Para pequeños valores de c la solución se puede obtener de forma relativamente fácil. A medida que $c \rightarrow 1$, es decir, a medida que el potencial se convierte en un doble pozo degenerado, la obtención de ϕ_0 se vuelve extremadamente compleja ya que el radio de la burbuja tiende a infinito.

En la figura (4.3b) se muestran resultados para distintos c . Vemos que para valores de r pequeños el campo se encuentra cerca del verdadero vacío del potencial. A partir de un valor de r el valor de ϕ decrece hasta llegar a $\phi \approx 0$. Es decir, como habíamos dicho, la solución se puede entender como una burbuja en cuyo interior el campo ha traspasado la barrera y se encuentra en un entorno del vacío verdadero mientras que en el exterior sigue cerca del falso vacío. Cuanto mayor sea el radio de la burbuja en comparación con la anchura en la que se produce el cambio del $\phi(r)$, más justificada estará la aproximación de la pared fina.

4.2.2. Evolución de la burbuja

En las secciones anteriores hemos visto la materialización de la burbuja. Sin embargo, también nos interesa saber como evoluciona con el tiempo [1]. Queremos trasladar los anteriores resultados al mundo físico real y para ello vamos a deshacer la rotación de Wick ($t = it_E$) en la ecuación (4.10). Para evitar ambigüedades denotaremos por ϕ_L la solución Lorentziana.

$$(\nabla^2 - \partial_t^2) \phi_L = V'(\phi_L). \quad (4.26)$$

La burbuja evolucionará siguiendo la ecuación de movimiento (4.26) a partir de las condiciones iniciales

$$\phi_L(t = 0, \mathbf{x}) = \phi(t_E = 0, \mathbf{x}) \quad (4.27)$$

$$\partial_t \phi_L(t = 0, \mathbf{x}) = 0. \quad (4.28)$$

La clave de todo el proceso anterior es que la solución que nos determinará la evolución de la burbuja es la continuación analítica de la solución en el espacio Euclídeo. Como hemos visto, la solución Euclídea tiene simetría $O(4)$, $\phi(t_E, \mathbf{x}) =$

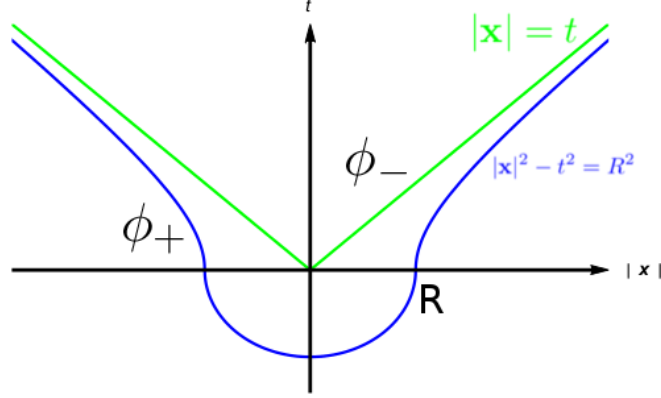


Figura 4.4: Evolución de la burbuja tras su materialización. La velocidad de expansión rápidamente tiende a la velocidad de la luz, aproximándose al cono de luz $t = \pm x$ en el infinito.

$f\left(\sqrt{t_E^2 + |\mathbf{x}|^2}\right)$. Por tanto, haciendo la continuación analítica,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = f\left(\sqrt{|\mathbf{x}|^2 - t^2}\right). \quad (4.29)$$

En $t = 0$ habíamos visto que teníamos una burbuja de radio R rodeada de falso vacío. Como se ve en la expresión (4.29), la solución en el futuro únicamente depende de $|\mathbf{x}|^2 - t^2$, por lo que la evolución del radio de la burbuja vendrá dada por

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{R^2 + t^2} \quad (4.30)$$

Como se muestra en la figura (4.4), la pared casi instantáneamente se expande a la velocidad de la luz. Una cantidad importante es la energía de la pared de la burbuja, que se puede obtener a partir de la velocidad, de la tensión y de la superficie de la pared de la burbuja [1].

$$E_{wall} = 4\pi|\mathbf{x}|^2 \frac{S_1}{(1 - v^2)^{1/2}} = 4\pi|\mathbf{x}|^3 \frac{S_1}{R} \quad (4.31)$$

que para la aproximación de la pared fina,

$$E_{wall} = \frac{4}{3}\pi\varepsilon|\mathbf{x}|^3 \quad (4.32)$$

en la que se ve que la energía que lleva la pared es la energía que se contendría en todo el volumen, lo que muestra la conservación de la energía. Si quisiésemos salirnos de la aproximación, únicamente tendríamos que obtener el valor de S_1 mediante integración numérica a partir de (7) del apéndice A.

4.3. Instantones gravitacionales

Hasta ahora únicamente hemos considerado el caso de un campo escalar. Sin embargo si queremos comprobar si una de estas burbujas puede dar lugar a un proceso inflacionario en su interior, es obligatoria la descripción con el acoplamiento gravitatorio. En este caso la acción a considerar es ([2])

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{2\kappa} R \right). \quad (4.33)$$

Vamos a asumir que el hecho de añadir los términos correspondientes a la gravedad no altera la simetría $O(4)$ que poseía la descripción del instanton puramente escalar. Consecuentemente, la siguiente métrica Euclídea es adecuada para describirlo.

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho(\xi)^2 d\Omega^2. \quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta que $d\Omega^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$,

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho(\xi)^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \quad (4.35)$$

y a partir de (2.2), (4.33) y (4.35) podemos calcular las ecuaciones de movimiento del instanton. Para el campo escalar y el factor de escala Euclídeo,

$$\phi'' + \frac{3\rho'}{\rho} \phi' = \frac{dV}{d\phi} \quad (4.36)$$

$$\rho'^2 = 1 + \frac{1}{3M_P^2} \rho^2 \left(\frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi) \right) \quad (4.37)$$

donde la prima denota $d/d\xi$. Derivando esta última,

$$\frac{\rho''}{\rho} = -\frac{1}{3M_P^2} (\phi'^2 + V(\phi)). \quad (4.38)$$

4.3.1. The gravitational thin-wall approximation

En este apartado vamos a usar de nuevo el potencial (4.14) para obtener los valores de R y B . El proceso seguido hasta los resultados que se presentan a continuación se encuentra en el apéndice A.

Para potenciales en los que el decay se produce desde un valor positivo a uno nulo, es decir, de la forma $V(\phi_+) = \varepsilon$ y $V(\phi_-) = 0$,

$$R = \left(\frac{R_0}{1 + (R_0/2\Lambda)^2} \right) \quad B = \frac{B_0}{[1 + (R_0/2\Lambda)^2]^2} \quad (4.39)$$

donde R_0 y B_0 son los valores del radio (4.16) y de la acción del instanton escalar (4.17) respectivamente. Vemos que en la situación en la que consideramos efectos gravitatorios, el radio de la burbuja disminuye con respecto al valor puramente escalar y además la probabilidad de formación aumenta, ya que B disminuye.

Por otra parte, puede darse el caso en el que el decay ocurra desde un estado de densidad de energía nula a otro estado con un valor negativo, $V(\phi_+) = 0$ y $V(\phi_-) = -\varepsilon$,

$$R = \left(\frac{R_0}{1 - (R_0/2\Lambda)^2} \right) \quad B = \frac{B_0}{[1 - (R_0/2\Lambda)^2]^2} \quad (4.40)$$

Existe un valor crítico para $\Lambda^2 = R_0^2/4$ ya que el radio de la burbuja se hace infinito y la probabilidad nula.

4.3.2. Evolución y geometría de la burbuja

Para analizar la evolución de la burbuja una vez formada, vamos a seguir el mismo proceso que para el caso escalar, vamos a hacer la continuación analítica de la métrica (4.35) al espacio Lorentziano [8]. La geometría en el exterior de la burbuja es

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho(\xi)^2 (-d\tau^2 + \cosh^2 \tau d\Omega_2^2). \quad (4.41)$$

En el interior de la burbuja, sin embargo, la geometría viene descrita exactamente por la métrica FLRW para un universo abierto

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega_2^2). \quad (4.42)$$

Esta es la clave de todo el proceso, gracias a esto existe la posibilidad de tener inflación dentro de las burbujas.

4.3.3. Solución numérica

Vamos a resolver las ecuaciones (4.36) y (4.38) numéricamente. Para ello, hacemos uso una vez más de *Mathematica*. En primer lugar vamos a desarrollar $\phi(\xi)$ y $\rho(\xi)$ cerca del origen para evitar la singularidad en $\xi = 0$.

$$\phi(\xi) \approx \phi_0 + \phi_1 \xi + \phi_2 \xi^2 + \dots \quad (4.43)$$

$$\rho(\xi) \approx \xi + \rho_2 \xi^2 + \rho_3 \xi^3 + \dots \quad (4.44)$$

Introducimos estos ansatz en las ecuaciones (4.36) (4.37) y resolvemos para cada orden dejando todo en función del potencial $V(\phi)$ y de un único parámetro ϕ_0 .

$$\phi(\xi) \approx \phi_0 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_0} \xi^2 + \dots \quad (4.45)$$

$$\rho(\xi) \approx \xi - \frac{1}{18} V(\phi) \xi^3 + \dots \quad (4.46)$$

Las condiciones de contorno a usar son

$$\begin{aligned} \phi(\infty) &= \phi_+ & \rho(\xi \approx 0) &= \xi \\ \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)_{\xi=0} &= 0 & \left(\frac{d\rho}{d\xi} \right)_{\xi=0} &= 1 \end{aligned} \quad (4.47)$$

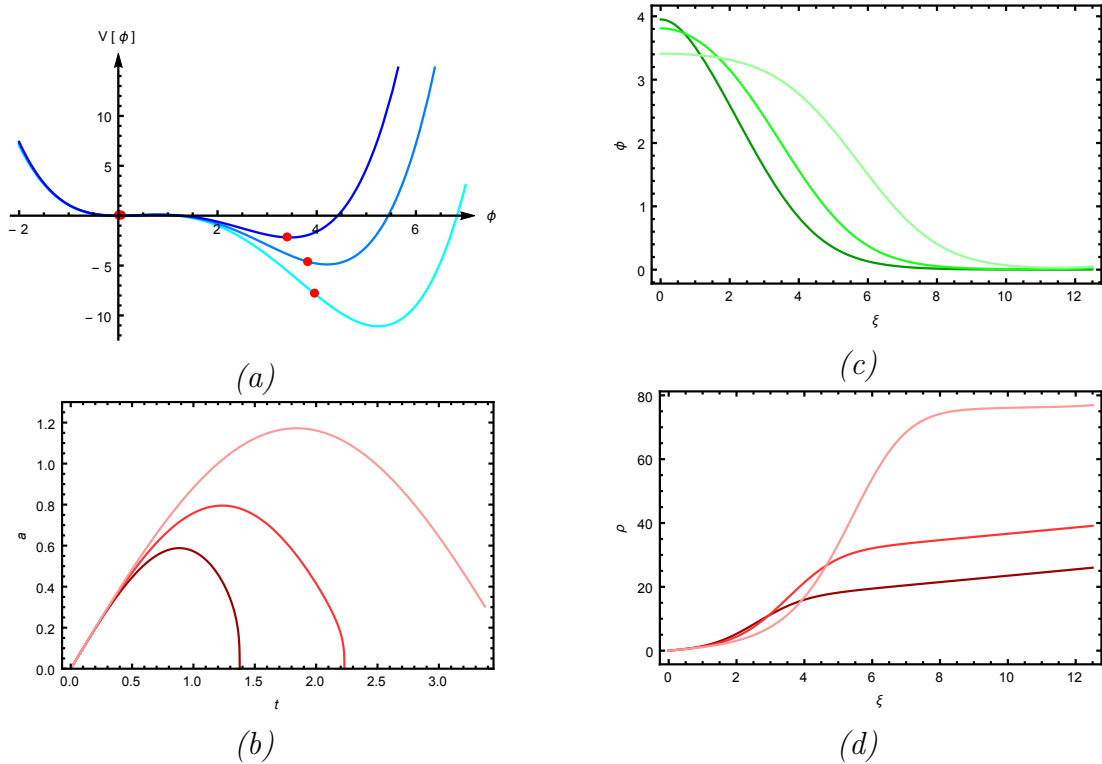


Figura 4.5: (a): Potencial (4.18) para valores de $c = 0,5; 0,6; 0,7$ (de color claro a oscuro respectivamente) y puntos por los que se produce el tunneling. (b): Solución del factor de escala para el interior de la burbuja. (c): Instanton. (d): Solución del factor de escala para el exterior de la burbuja.

4.3.3.1. Minkowski & Anti-De Sitter

Para el primer caso vamos a usar el mismo potencial que para el caso escalar.

$$V(\phi) = M_P^4 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^3 + \frac{c}{8} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^4 \right) \quad (4.48)$$

Resolviendo las ecuaciones para ϕ , ρ y a , se obtienen las figuras (4.5c), (4.5d) y (4.5b). Es fácil comprobar que la solución cumple lo previsto. Esto es, en la parte exterior de la burbuja $V(\phi) = 0$ y por tanto se trata de espacio de Minkowski por lo que $\rho(\xi)$ se comporta como la recta $\rho = \xi$. En el interior, sin embargo, se trata de espacio Anti De Sitter que lleva inevitablemente a un Big-Crunch (figura (4.5b)) por lo que descartamos este tipo de potenciales.

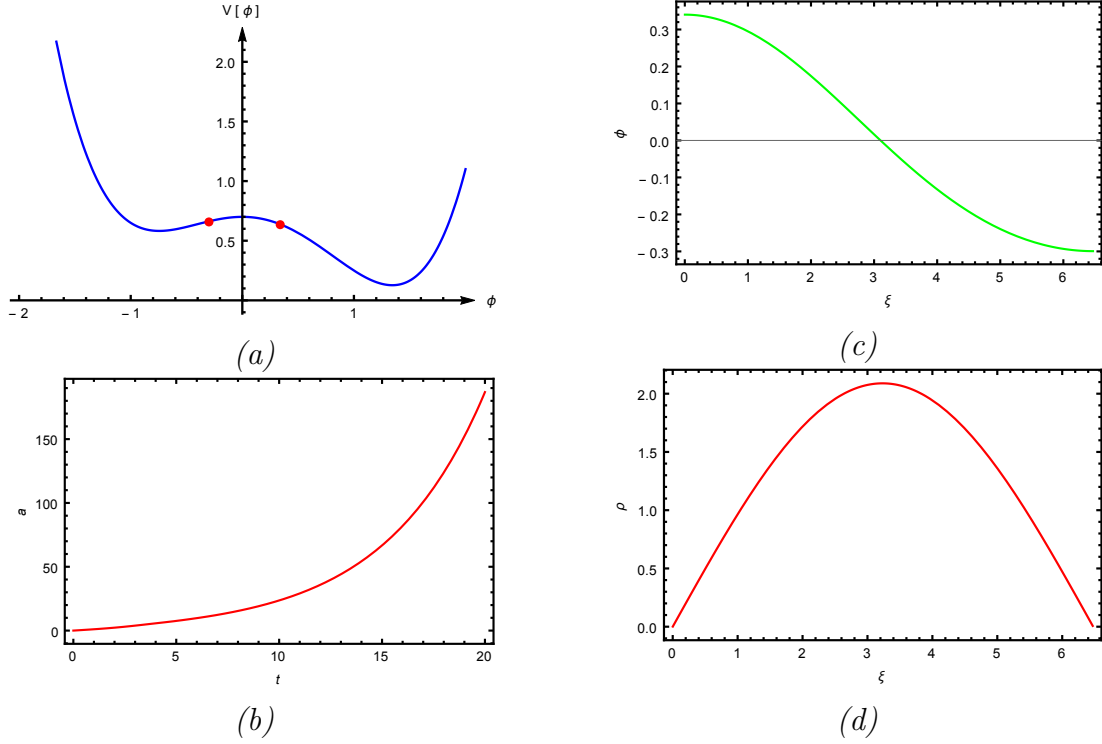


Figura 4.6: (a): Potencial (4.49) con $D = 0,7$ y puntos por los que se produce el tunneling. (b): Solución del factor de escala para el interior de la burbuja. (c): Instanton. (d): Solución del factor de escala para el exterior de la burbuja.

4.3.3.2. De Sitter & De Sitter

Para analizar este caso, tomaremos el siguiente potencial

$$V(\phi) = M_P^4 \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^4 + D \right) \quad (4.49)$$

donde la constante D únicamente juega el papel de aumentar todo $V(\phi)$ en su conjunto. De esta forma, podemos obtener un potencial cuyos mínimos se encuentran en valores positivos del potencial. Vemos en la figura (4.6c) que el tunneling se produce entre regiones próximas a los mínimos. Además, para este tipo de potenciales el factor de escala interior a la burbuja no colapsa (figura (4.6b)) y la geometría en el exterior de la burbuja es de Sitter en unas coordenadas no habituales [2].

Capítulo 5

Inflación Eterna

En este último capítulo vamos a aplicar todo lo desarrollado a lo largo de este trabajo a un modelo en concreto. El potencial a usar es el potencial *Aurrekoetxea* cuya expresión analítica es

$$V(\phi) = aM_P^4 \left(\left(\frac{\phi}{M_P} \right)^2 + \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^5 - b^2 \right)^2 + \frac{cM_P^4}{\cosh^{20} \left(\left(\frac{\phi}{M_P} \right) + d \right)} \quad (5.1)$$

donde a , b , c y d son constantes que determinan la forma exacta. Para $a = 10^{-3}$, $b = 6$, $c = 3/2$ y $d = 1$, el potencial toma la forma peculiar que viene representada en la figura (5.1).

Este potencial tiene dos mínimos; en $\phi_- = -1,46387M_P$ se encuentra el mínimo local y en $\phi_+ = 2M_P$ el global¹. Por ello, un estado que se encuentre en un entorno cercano a ϕ_- será meta-estable y existirá una probabilidad, que vendrá dada por la expresión (4.6) de que traspase la barrera por efecto túnel.

Al igual que hemos hecho en el capítulo anterior, podemos resolver las ecuaciones de movimiento para el instanton, el campo y para el factor de escala. El procedimiento a seguir es el mismo que en la sección (4.3.3). Las soluciones para $\phi(\xi)$ y $\rho(\xi)$ se muestran en las figuras (5.2a) y (5.2b). El tunneling ocurre de

¹En este capítulo, a diferencia del anterior, denotaremos por ϕ_+ al verdadero vacío y ϕ_- al falso.

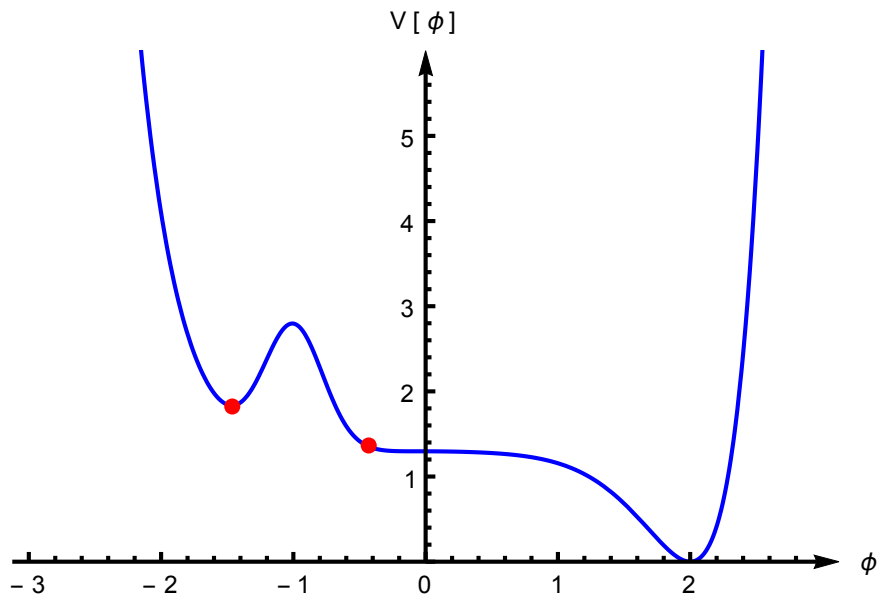


Figura 5.1: Forma del potencial Aurrekoetxea, expresión (5.1) con $a = 10^{-3}$, $b = 6$, $c = 3/2$ y $d = 1$. En rojo, los puntos entre los cuales se produce el tunneling.

$\phi \approx -1,460M_P$ a $\phi \approx -0,428M_P$, y se forma una burbuja en cuyo interior el campo se encuentra en el segundo valor.

Por otra parte, vemos que la solución del factor de escala $\rho(\xi)$ nos da una geometría De Sitter - De Sitter por la forma sinusoidal, ya que el tunneling se produce entre dos estados con valores de potencial positivos.

A continuación nos centraremos en lo que ocurre en el interior de la burbuja. Como hemos visto, en esta región nos encontramos en $\phi \approx -0,428M_P$ pero el potencial no impide que continúe rodando hasta el mínimo global que se encuentra en $\phi = 2M_P$ con valor $V(2) = 0$. Por tanto, vamos a resolver las ecuaciones de movimiento para el campo escalar y para el factor de escala, es decir, las expresiones (3.11) y (3.12) que hemos introducido en el capítulo número dos pero para un universo abierto.

Las soluciones se muestran en las figuras (5.2c) y (5.2d). El campo va rodando

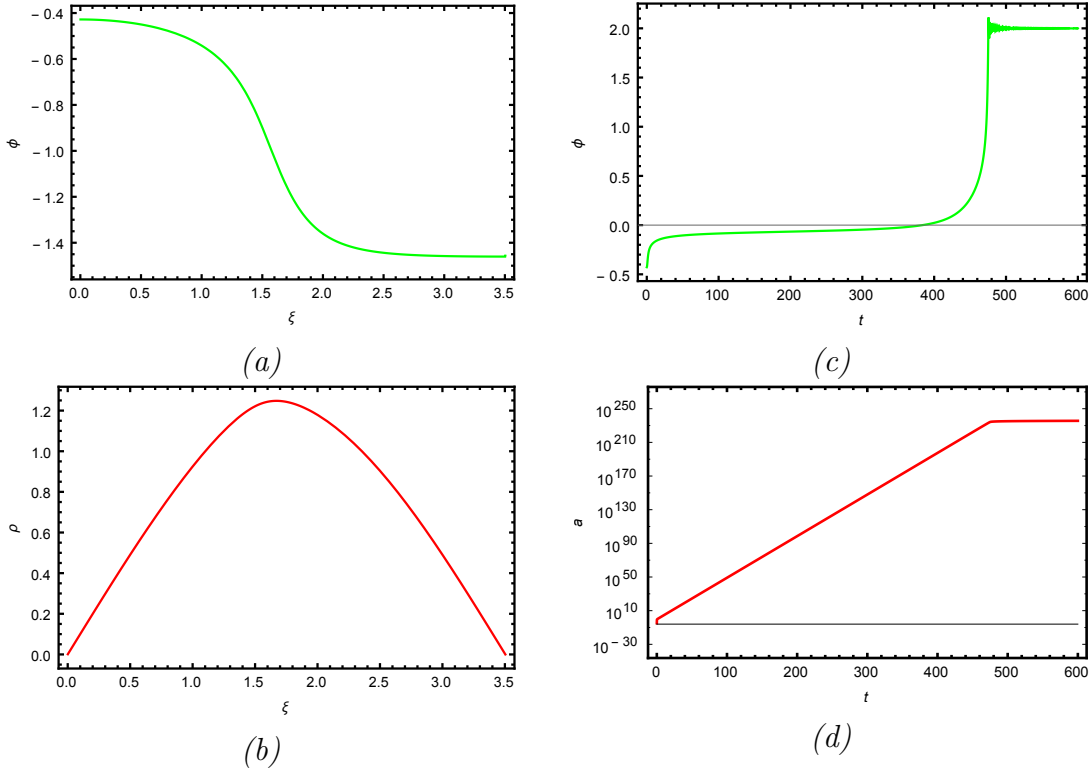


Figura 5.2: (a): Instanton para el potencial Aurrekoetxea. El tunneling se produce de $\phi \approx -1,460$ a $\phi \approx -0,428$. (b): Solución del factor de escala Euclídeo. Al ser un tunneling tipo dS - dS , era de esperar la forma sinusoidal. (c): Solución del campo inflatón. A partir del valor del campo en el interior de la burbuja, posterior evolución. (d): Representación logarítmica del factor de escala comprobándose el comportamiento lineal mientras las condiciones de slow-roll son respetadas.

lentamente por lo que se satisfacen las condiciones slow-roll y consecuentemente, el factor de escala se incrementa exponencialmente. En el momento en el que el campo se acerca al mínimo, comienza a rodar rápidamente, los parámetros de slow-roll se acercan a la unidad y por tanto el universo deja de expandirse aceleradamente. Finalmente, el campo oscila entorno al mínimo $\phi = 2M_P$. El número de e-folds es

$$N = \int_0^{470} H dt \approx 550. \quad (5.2)$$

Hasta ahora, únicamente hemos analizado la formación de una burbuja en cuyo interior tenemos un proceso inflacionario que da lugar a un universo con los puzzles del Big Bang resueltos. ¿Pero qué pasa considerando la evolución del

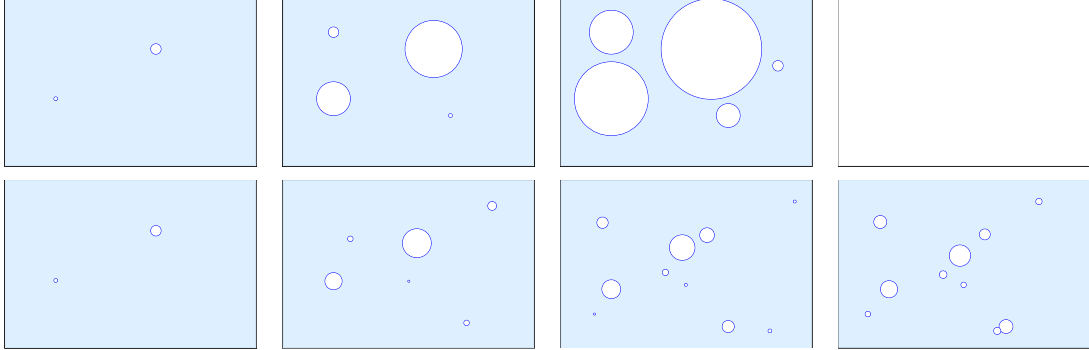


Figura 5.3: (Superior): Si la geometría del exterior de la burbuja es estática, las burbujas expandiéndose acaban llenando todo el espacio, por lo que el falso vacío sufre una transición de fase al verdadero. (Inferior): Si la geometría del exterior de la burbuja es de Sitter, su tamaño aumenta exponencialmente, pudiendo expandirse más rápidamente de lo que lo hacen las paredes de las burbujas, quedando así causalmente desconectadas.

exterior y el interior de la burbuja?

Supongamos que el exterior de la burbuja es estático. Lo que ocurrirá será que se formarán burbujas en distintos instantes y se expandirán, llegando un momento en el cual todo falso vacío ha sufrido una transición al verdadero vacío, figura superior de (5.3).

Sin embargo, hemos visto en el capítulo anterior que en esta región de falso vacío con $V(\phi_-) > 0$, la geometría es de Sitter. Por tanto, el exterior de la burbuja no es estático, sino que se expande como $\rho \sim e^{Ht}$, donde el parámetro de Hubble H lo podemos obtener de la expresión (3.12).

$$H = \frac{1}{M_P} \sqrt{\frac{V(\phi_-)}{3}} \quad (5.3)$$

Esto tiene unas consecuencias increíbles ya que el hecho de que el exterior de la burbuja se expanda más rápidamente que el interior implica que dependiendo de la tasa de formación (expresión (4.6)), podrán existir regiones en las que el falso vacío no decae. Si la tasa es muy grande, el fondo no tendrá tiempo suficiente para expandirse como para que las burbujas no colapsen y llenen todo de verdadero

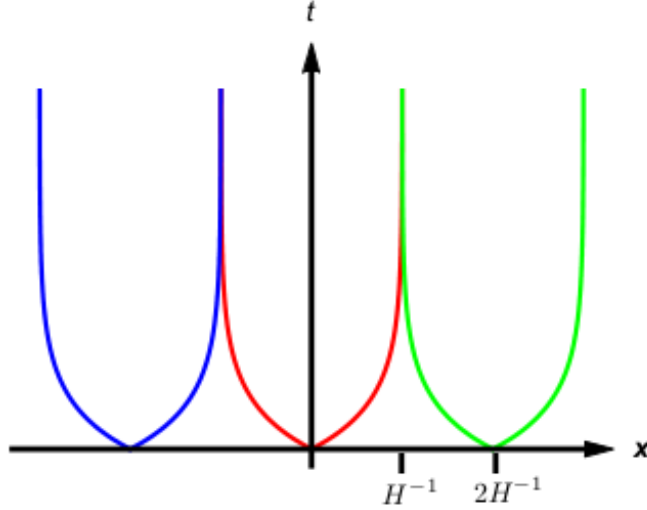


Figura 5.4: Trayectorias en función del tiempo de paredes de burbujas con distintos centros de nucleación.

vacío. Sin embargo, si la tasa es pequeña, en el intervalo de tiempo en el que se forman dos burbujas este habrá aumentado mucho su tamaño, creando burbujas lo suficientemente distanciadas como para que estén causalmente desconectadas por siempre. ¿Cuál es la distancia crítica? La métrica en el exterior es

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} d\mathbf{x}^2. \quad (5.4)$$

Si suponemos que las paredes se expanden a la velocidad de la luz (habíamos visto en (4.4) que rápidamente alcanzan esta velocidad), $ds^2 = 0$, por lo que integrando (5.4),

$$\mathbf{x}(t) = \pm \frac{1}{H} (1 - e^{-Ht}). \quad (5.5)$$

Esta trayectoria se muestra en la figura (5.4). Si los centros de dos burbujas están separados por una distancia mayor a $2H^{-1}$, estarán desconectadas causalmente. Por lo tanto, el escenario que tendremos será el de un *mar* de falso vacío en un proceso inflacionario *eterno* en el cual existen regiones en forma de burbujas con universos en su interior, *Eternal Inflation*.

Capítulo 6

Conclusiones

En los primeros dos capítulos hemos introducido cuales son los problemas de la teoría del Big Bang y como se pueden resolver por medio de una época en la que el universo se expande aceleradamente. Además, hemos visto que un mecanismo simple puede ser un campo escalar acoplado con gravedad. Nos hemos adentrado en las propiedades y hemos estudiado la dinámica que subyace en la teoría. Posteriormente, hemos analizado el modelo caótico y de Starobinsky como unos de los modelos más simples e importantes de la inflación, poniendo en práctica lo aprendido en secciones anteriores desde un punto de vista computacional. Sin embargo, a pesar de que mediante la introducción de un campo escalar hemos solucionado los problemas del Big Bang, nuevas cuestiones han aparecido, como por ejemplo ¿cuál es la forma del potencial? ¿por qué el universo se encuentra inicialmente en un valor concreto?

Para ello, en el tercer capítulo hemos analizado potenciales de campos escalares más complejos, con un falso y un verdadero vacío. Hemos visto que desde un punto de vista semiclásico existe la probabilidad de que se produzca efecto túnel entre entornos próximos a los mínimos. Mediante la teoría de los instantones hemos estudiado el proceso de tunneling en un campo escalar sin gravedad, interpretando la solución del instantón como una burbuja de radio R en la que en el interior se encuentra el campo en el verdadero vacío, y en el exterior en el falso vacío. La aproximación de la pared fina ha sido de gran ayuda para poder hacer un desarrollo analítico de las expresiones para el cálculo de la probabilidad de

formación, pero una vez entendidos los conceptos, hemos vuelto a las expresiones sin aproximar y se han resuelto numéricamente.

El hecho de querer tener inflación en el interior de una de estas burbujas nos ha obligado a acoplar a la descripción escalar la gravitación. Hemos analizado las soluciones del decaimiento de ϕ_+ a ϕ_- desde un punto de vista teórico y numérico para distintos tipos de potenciales. Hemos obtenido en la aproximación de la pared fina que la inclusión de la gravedad disminuye el radio de la burbuja y aumenta la probabilidad de formación para el caso dS-Mink mientras que para Mink-AdS, ocurre lo contrario, con un límite en el que el radio se hace infinito y la probabilidad nula. Hemos resuelto las ecuaciones numéricamente para un potencial en el que el decaimiento ocurre entre $V(\phi_{\pm}) > 0$ (dS-dS); y para un potencial en el que $V(\phi_+) = 0$ y $V(\phi) < 0$ (Mink-AdS), obteniendo así el instantón y el factor de escala. Por último, a la hora de querer entender la evolución de la burbuja, hemos hecho uso de la geometría de Coleman-De Luccia como continuación analítica de las soluciones euclídeas obtenidas al espacio Lorentziano viendo que para el caso Mink-AdS es imposible un proceso inflacionario en el interior de la burbuja ya que el Big Crunch es inevitable en este tipo de potenciales.

En el último capítulo se ha presentado el modelo *Aurrekoetxea* con la intención de englobar todas las ideas desarrolladas en el trabajo. En primer lugar, hemos obtenido la solución al instantón y hemos visto que el tunneling se produce desde un entorno del falso vacío a un entorno del verdadero. Tomando ese valor del campo en el interior de la burbuja como condición inicial, hemos resuelto las ecuaciones del campo inflatón obteniendo así la evolución del factor de escala con el tiempo. Por último, hemos visto que un potencial con esta forma nos lleva a un escenario en el cual tenemos la región de falso vacío en expansión eterna, mientras que en su interior se crean burbujas de verdadero vacío que dan lugar a procesos inflacionarios y posteriormente descritos por la teoría del Big Bang. Además, hemos visto que $2H^{-1}$ es una distancia crítica entre los centros de distintas burbujas que determina la causalidad entre ellas. Por lo tanto, puede que estemos viviendo en el interior de una de estas burbujas rodeados por un universo en expansión acelerada.

Apéndice A: The thin-wall approximation

En este apéndice explicaremos el desarrollo que se ha hecho para llegar a los resultados de las secciones 4.2.1.1 y 4.3.1. Este desarrollo fue realizado por Coleman en sus papers [1] y [2].

.1. Escalar

Cerca de la superficie de la burbuja $r \approx R$, podemos despreciar el término viscoso de la ecuación (4.12) y el parámetro ε que nos generaba la asimetría en el potencial, por lo que la ecuación de movimiento aproximada queda

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = V_0'(\phi) \quad (1)$$

e integrando una vez y exigiendo que se cumpla la condición de contorno $\phi(\infty) = \phi_+$,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V_0(\phi) = V_0(\phi_{\pm}) \quad (2)$$

A continuación vamos a estimar el valor de R mediante método variacional, ya que la burbuja tendrá el radio óptimo que le favorezca energéticamente. Volvemos a la acción (4.9), e integramos las variables posibles en el diferencial de superficie de cuatro dimensiones, obteniendo $d^4x = 2\pi^2 r^3 d\rho$.

$$S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty r^3 dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V_0(\phi) \right] \quad (3)$$

En primer lugar, vamos a dividir la burbuja en tres regiones: Exterior, pared e

interior de la burbuja. Para cada una de estas, obtendremos el valor de la acción del instantón B definido por (4.7). Para el exterior, tenemos que el campo está en el falso vacío $\phi = \phi_+$ y por tanto

$$B_{out} = 0 \quad (4)$$

Dentro de la burbuja, sin embargo, el campo ha traspasado la barrera y se encuentra en el verdadero vacío $\phi = \phi_-$ con $V(\phi_-) = -\varepsilon$. Por consiguiente, la contribución de este término a la expresión (4.7) es

$$B_{in} = 2\pi^2 \int_0^R r^3 dr (-\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2} \pi^2 R^4 \quad (5)$$

El último caso que nos queda a considerar es sobre la pared de la burbuja. En esta región $r \approx R$ por lo que

$$B_{wall} = 2\pi R^3 \int dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V_0(\phi) - V_0(\phi_+) \right] = 2\pi R^3 S_1 \quad (6)$$

donde S_1 es la tensión de la pared

$$S_1 = \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi [2(V_0(\phi) - V_0(\phi_+))]^{1/2}. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta las tres contribuciones que hemos calculado, podemos obtener una expresión para B total.

$$B = 2\pi R^3 S_1 - \frac{1}{2} \pi^2 R^4 \varepsilon \quad (8)$$

.2. Gravitacional

A partir de (4.35), calculamos $\sqrt{-g}$ y R reescribimos la expresión para la acción euclídea. Además, como hemos hecho para el caso escalar, tras hacer el cambio de variable de d^4x , integramos las variables independientes del integrando.

$$S_E = 2\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3 \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V \right) + \frac{3}{\kappa} (\rho^2 \rho'' + \rho \rho'^2 - \rho) \right) \quad (9)$$

Integrando por partes,

$$S_E = 2\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3 \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V \right) - \frac{3}{\kappa} (\rho \rho'^2 + \rho) \right) \quad (10)$$

y finalmente usando (4.37),

$$S_E = 4\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3 V - \frac{3\rho}{\kappa} \right). \quad (11)$$

A continuación vamos a seguir el mismo proceso que para el caso del instanton puramente escalar. Empecemos dividiendo el problema en tres regiones. Para el caso del exterior de la burbuja, tenemos el falso vacío $\phi = \phi_+$.

$$B_{out} = 0 \quad (12)$$

En la pared, al tener que $\rho = R$ y $V = V_0$, se pueden sacar estos parámetros de la integral quedando como sigue.

$$B_{wall} = 4\pi^2 R^3 \int d\xi [V_0(\phi) - V_0(\phi_+)] = 2\pi^2 R^3 S_1 \quad (13)$$

Finalmente, en el interior de la burbuja $\phi = \phi_-$. Usando las ecuaciones de FRW, se tiene que $d\xi = d\rho (1 - \frac{1}{3}\kappa\rho^2 V)^{-1/2}$, por lo que haciendo el cambio de variable en (11),

$$B_{in} = -\frac{12\pi^2}{\kappa} \int_0^R \rho d\rho \left\{ \left[1 - \frac{1}{3}\kappa\rho^2 V(\phi_-) \right]^{1/2} - \left[1 - \frac{1}{3}\kappa\rho^2 V(\phi_+) \right]^{1/2} \right\} \quad (14)$$

$$= \frac{12\pi^2}{\kappa^2} \left(\frac{[1 - \frac{1}{3}\kappa R^2 V(\phi_-)]^{3/2} - 1}{V(\phi_-)} - \frac{[1 - \frac{1}{3}\kappa R^2 V(\phi_+)]^{3/2} - 1}{V(\phi_+)} \right) \quad (15)$$

Si a continuación queremos obtener el valor de R para el cual B se hace mínimo, y por tanto la probabilidad de formación de la burbuja es máxima, seguimos el método variacional que hemos realizado para el caso escalar a $B = B_{in} + B_{wall} + B_{out}$.

$$R = \left(\frac{R_0}{1 \pm (R_0/2\Lambda)^2} \right) \quad (16)$$

donde R_0 es el radio de la burbuja sin el acoplamiento gravitatorio dado por la expresión (4.16) y $\Lambda \equiv (\kappa\varepsilon/3)^{-1/2}$.

Referencias

- [1] Sidney Coleman. Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Phys. Rev. D*, 15:2929–2936, May 1977. [19](#), [21](#), [25](#), [26](#), [39](#)
- [2] Sidney Coleman and Frank De Luccia. Gravitational effects on and of vacuum decay. *Phys. Rev. D*, 21:3305–3315, Jun 1980. [27](#), [31](#), [39](#)
- [3] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, Jan 1981.
- [4] A.A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, 91(1):99 – 102, 1980. [iv](#), [16](#)
- [5] A.D. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, 108(6):389 – 393, 1982. [iii](#), [15](#)
- [6] Sidney Coleman. *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, 1985.
- [7] D. Baumann. TASI Lectures on Inflation. *ArXiv e-prints*, July 2009. [14](#)
- [8] X. Dong and D. Harlow. Analytic Coleman-De Luccia geometries. *ArXiv e-prints*, November 2011. [28](#)
- [9] Y. Goto and K. Okuyama. Numerical Analysis of Coleman-de Luccia Tunneling. *ArXiv e-prints*, January 2016.