



---

# Makina termokuantikoa

---

Fisikako Gradua

Eneko Zabala Cordobes

*Zuzendaria:*  
**Iñigo Egusquiza**

Leioa  
2016ko Ekainak 27

# Gaien Aurkibidea

<b>1</b>	<b>Sarrera</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Jarzynski eta Crooks</b>	<b>5</b>
2.1	Azterketa Klasikoa . . . . .	5
2.1.1	Crooks . . . . .	5
2.1.2	Jarzynski . . . . .	6
2.1.2.1	Jarzynski Crooks-en garapenetik abiatuta . . . . .	7
2.1.2.2	Jarzynkiren jatorrizko garapena . . . . .	7
2.2	Azterketa kuantikoa . . . . .	9
2.2.1	Crooks . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Makina termodinamikoak</b>	<b>12</b>
3.1	Azterketa Klasikoa . . . . .	13
3.1.1	Carnot-en ziklo klasikoa . . . . .	14
3.1.2	Otto-ren ziklo klasikoa . . . . .	15
3.2	Azterketa Kuantikoa . . . . .	16
3.2.1	Carnot-en ziklo kuantikoa . . . . .	18
3.2.2	Otto-ren ziklo kuantikoa . . . . .	19
3.3	Carnot eta Otto ziklo kuantikoen arteko alderaketa . . . . .	20
3.3.1	Ottoren ziklo kuantikotik Carnoten ziklo kuantikora . . . . .	20
3.3.2	Carnoten ziklo kuantikotik Ottoten ziklo kuantikora . . . . .	22
3.3.3	Etekinen alderaketa . . . . .	23
3.4	Ottoren ziklo kuantiko baliokide bat . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Esperimentu proposamena</b>	<b>27</b>
4.1	Esperimentua . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Ondorioak</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>Itzulgarritasun mikroskopikoa</b>	<b>33</b>
<b>B</b>	<b>Cooper bikoteak</b>	<b>35</b>
<b>C</b>	<b>Josephson lotura</b>	<b>37</b>
<b>D</b>	<b>Karga qubita eta transmoia</b>	<b>38</b>
<b>E</b>	<b>Hamiltondarraren eraiketa</b>	<b>40</b>

# Kapitulua 1

## Sarrera

Termodinamika, sistema baten ezaugarriak makroskopikoki aztertzen dituen fisikaren arloa da, sistemaren partikula osatzaileei erreparatu gabe. Sistema makroskopiko bera, partikula osatzaileen azterketaren bidez deskribatzen duen arloa aldiz, mekanika estatistikoa da. Mekanika estatistikoan mikroegoera eta makroegoera kontzeptuak sartzen dira non mikroegoera sistemaren askatasun gradu bakoitzaren egoera den eta makroegoera aldiz mikroegoera guztien ekarpenek zehaztutako egoera. Fisikaren bi arlo hauek lotura estua dute, [1]. Termodinamikaren bidez lortutako magnitude makroskopikoen balioak izatez, mekanika estatistikoa aztertutako mikroegoera guztien ekarpenen batazbestekoak baitira. Magnitude makroskopikoen izaera estatistikoa dela eta, magnitude hauek fluktuazioak jasaten dituzte, hau da, neurtutako balioek aldaketak jasaten dituzte denboran. Fluktuazio hauek termodinamika estokastikoaren bidez deskriba daitezke non sistemaren partikula osatzaile guztien ibilbideak kontutan hartzen diren. Ibilbide hauen hasiera eta bukaera puntuak berdinak izan arren ibilbideak ezberdinak izan daitezke. Sistemen analisi estokastikoak, lan honen oinarri diren [2] Jarzynskiren eta [3] Crooksen adierazpenak ekarri ditu, zeinek sistemak oreka egoeretatik kanpo aztertzea ahalbideratzen dituzten.

Mekanika estatistikoa sistemaren partikula osatzaileak aztertzen dituenek, emaitzen zehaztasuna eta fluktuazioen ekarpenak partikula kopuruaren araberakoa izango da. Horrela partikula kopurua handia denean ohiko mekanika estatistikoa erabiltzen da eta kasu honetan fluktuazioen ekarpena arbuiagarria da. Partikula kopurua murriztean fluktuazioak nabariagoak dira, hori dela eta mekanika estokastikoa erabili ohi da. Fluktuazio hauek partikula kopuruarekin lotuta daudenez, jatorri estatistikoa dutela esaten da. Bukatzeko partikula kopurua gehiago murrizten bada, fluktuazioek bi jatorri izan ditzakete, batek jatorri estatistikoa eta bestetik, sistema kuantikoa baldin bada, mekanika kuantikoaren ekarpena. Argitu behar da, partikula kopurua txikia izateak ez duela mekanika kuantikoaren beharra inposatzen. Hala ere, egia da orokorrean partikula gutxiko sistemak kuantikarekin erlazionatzen direla.

Sistema makroskopikoen prozesu termodinamikoak ulertzeak, aurrerapen teknologiko handiak ekarri zituen, esaterako makina termikoak. Gaur egun, partikula gutxiko sistemen prozesu termodinamikoen ulerpenetik antzeko jauzi teknologiko bat lor daitekeela uste da.

Lan honen helburua [2] Jarzynskiren eta [3] Crooksen adierazpenak egiaztatzea ahalbideratzen duen makina termokuantiko bat proposatzea da. Horretarako, lana ondorengo eran antolatzen da. Hasteko, [2] Jarzynskiren eta [3] Crooksen lanak aztertzen dira, klasikoki zein kuantikoki. Ondoren, Carnot eta Ottoren ziklo termodinamikoak aztertzen dira, hauek ere klasikoki zein kuantikoki. Gainera Ottoren ziklo kuantikoa lortzeko prozesu baliokide bat aztertzen da. Jarraian, bi qubit (bi energi mailako sistema) erabiliz makina termokuantiko bat proposatu eta aztertzen da. Bukatzeko, lana ulertzeko beharrezkoak diren kontzeptu batzuen azalpenak ematen dira eranskinetan.

## Kapitulua 2

# Jarzynski eta Crooks

Kapitulu honetan [2] Jarzynskiren eta [3] Crooksen lana aztertzen dira. Kronologikoki Jarzynskik bere artikulua Crooksek baino lehenago argitaratu zuen arren, lan honetan Crooksen adierazpena aztertzen da lehenengo, Crooksen adierazpenetik posible baita Jarzynskiren berdintza ondorioztatzea. Hala ere posible da Jarzynskiren berdintza beste bide batetik lortzea Jarzynskik [2] artikuluan jarraitzen duen prozeduraren bidez. Hori dela eta lan honetan bi bideak aurkezten dira, bi bideetatik emaitza bera lor daitekeela frogatzeko eta aldi berean Crooks-en adierazpenaren orokortasuna azpimarratzeko.

Lan honen helburua makina termokuantikoa aztertzea denez, analisisian bi baldintza izan behar dira kontutan. Batetik prozesua mekanika kuantikoaren bidez deskribatu behar da, eta ondorioz azalpen klasikoaz gain, kuantikoa ere ematen da. Bestetik, makina termikoa aztertzea denez helburu, eta bertan partikula kopurua finko mantentzea erabaki denez, multzo kanonikoa erabiltzea da egokiena.

Bi adierazpenen azalpenekin hasi aurretik aipamen garrantzitsu bat. Adierazpen hauek termodinamika estokastikoaren bidez ondorioztatu ziren eta sarrean aipatu den moduan termodinamika estokastikoak sistemaren partikula osatzaile guztien ibilbideak azertzen ditu. Hori dela eta, praktikoena partikula gutxiko sistemen kasuan aztertzea da, edozein partikula kopurudun sistemetan aplikagarriak diren arren.

## 2.1 Azterketa Klasikoa

### 2.1.1 Crooks

Crooksen adierazpena "entropy production theorems" izenpean ezagutzen diren teoremetan oinarritzen da. Teorema hauek ulertzeko, lehenengo mikrogoera eta makrogoera kontzeptuak argitu behar dira. Mikrogoera bat sistemaren askatasun gradu bati dagokion egoera da eta makrogoera aldiz mikrogoera banaketa batek definitutako egoera. Sistema bat orekan dagoenean makrogoera finko batean dago, hala ere, makrogoera hori definitzen duten mikrogoerak hainbat izan daitezke eta aldatuz joaz daitezke. "Entropy production

theorems” delakoetan, sistema egoera batetik bestera igarotzean, mikrogoera bakoitzak entropian duen ekarpena hartzen da kontutan. Mikrogoerek entropian duten ekarpena  $S = -k_B \sum_1^\infty P_n \ln(P_n)$  da non  $P_n$  mikrogoera bat egoera horretan aurkitzeko probabilitatea den.



**1.irudia:** A eta B makrogoeren artean mikrogoera ezberdinek egindako ibilbideak.

Crooksen (2.1) adierazpena teorema hauetan oinarritzen da non sistema  $A$  hasierako egoeratik  $B$  bukaerako egoerara gidatzen da, prozesua denbora alderantzketarekiko inbariantea izateko moduan. Ondorengo notazioa erabiltzen da:  $P_{A \rightarrow B}(S)$  prozesu zuzenari dagokion entropiaren probabilitate dentsitatea da eta  $P_{B \rightarrow A}(-S)$  denboran alderantzketarekiko aldaezina den prozesuaren probabilitate dentsitatea. Orduan:

$$\frac{P_{A \rightarrow B}(S)}{P_{B \rightarrow A}(-S)} = e^S. \quad (2.1)$$

Sistema multzo kanonikoaren bidez deskribatzea posible denez, multzo honetan entropiak duen adierazpena ondokoa da,  $S = -\beta \Delta F + \beta W$ .  $F$  energia askea hasierako eta bukaerako posizioen menpekotasun soila du, hau da, ez da ibilbidearen menpekota. Orduan hasierako eta bukaerako egoerak aldatzen ez diren bitartean, entropiaren aldaketan ekarpena izango duen gaia ibilbidean zehar egindako lana izango da,  $W$ . Ondorioz (2.1) adierazpena lanaren probabilitate funtzioaren menpe berridatz daiteke, jarraian erakusten den moduan:

$$\frac{P_{A \rightarrow B}(W)}{P_{B \rightarrow A}(-W)} = e^{-\beta \Delta F + \beta W} \quad \text{non} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad \text{den.} \quad (2.2)$$

(2.1) edota (2.2) adierazpenak aplikagarriak izan daitezten, aztertutako prozesua mikroskopikoki itzulgarria izan behar da (ikusi A eranskina). Horrela sistemak zuzeneko zein alderantzizko prozesuetan trukatu duen entropia balio absolutuan berdina izatea bermatzen da.

## 2.1.2 Jarzynski

Jarzynskiren adierazpena ondorioztatzeko bi bide jarrai daitezke. Batetik, Jarzynskik [2] artikuluan egindako garapena jarrai daiteke. Prozedura honetan sistema oreka egoeratik atara eta pausu finitudun prozesuen bidez bukaerako egoerara eramaten da. Pausu finitudun prozesu bakoitzean, mikrogoerak egindako lana kalkulatu behar da eta pausu finitudun prozesu guztien gaineko batura egin, horrela mikrogoera jakin horren metatutako lana kalkulatu da. Horrela sistemaren mikrogoera guztiakin. Beste aukera, Jarzynskiren berdintza Crooksen adierazpenetik zuzenean ondorioztatzea da. Espero den moduan, bi bideetatik ondorengo berdintza ondorioztatzen da:

$$\langle e^{-\beta W} \rangle = e^{-\beta \Delta F}. \quad (2.3)$$

### 2.1.2.1 Jarzynski Crooks-en garapenetik abiatuta

Atal honetan Jarzynskiren adierazpena lortzeko bigarren bidea erabiltzen da, hau da, Crooksen adierazpenetik ondorioztatzen da. Horretarako (2.1) ekuazioetik  $\langle e^{-S} \rangle$  batzbestekoa kalkulatzeko da:

$$\langle e^{-S} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_{A \rightarrow B}(S) e^{-S} dS = \int_{-\infty}^{\infty} P_{B \rightarrow A}(S) e^{-S} e^S dS = 1. \quad (2.4)$$

Sistema multzo kanonikoaren bidez deskribatzen bada, entropiaren aldaketa ondorengoa dela:

$$S = -\beta \Delta F + \beta W. \quad (2.5)$$

(2.4) eta (2.5) ekuazioetatik ondorengoa lortzen da:

$$e^{\langle \beta \Delta F - \beta W \rangle} = 1. \quad (2.6)$$

Energia askearen diferentzia  $\Delta F$  hasiera eta bukaerako egoeren menpekora baino ez denez, mikrogoera guztietarako diferentzia berdina izango da eta ondorioz  $\langle \Delta F \rangle = \Delta F$  izango da. Lanaren batzbestekoarekin ordea ez da gauza bera gertatuko, mikrogoera bakoitzaren lana ibilbidearen menpekora baita. Bukatzeko aurreko adierazpeneko gaiak berrantolatzen dira Jarzynski-ren (2.3) adierazpena berreskuratzeko:

$$\langle e^{-\beta W} \rangle = e^{-\beta \Delta F}. \quad (2.7)$$

Ondorengo atalean ekuazio berbera ondorioztatzen da Jarzynskik jarraitutako prozedura erabiliz. Hala ere, aipatu behar da orain jarraitutako prozedura erosoagoa kontsideratzen dela. Alde batetik, Jarzynskiren ekuazioa ondorioztatzeko termodinamikako ohiko erlazioak menperatzearekin nahikoa da eta bestetik, prozedura honek orokorrak diren prozesuen azterketa ahalbideratzen du. Adibidez, sistema bero iturri batekin kontaktuan egoteaz gain partikula iturri batekin ere kontaktuan badago, prozeduran multzo makrokanonikoa eta honekin loutako erlazioak erabili beharko lirarteke, baina prozedura berdina izaten jarraituko luke.

### 2.1.2.2 Jarzynskiren jatorrizko garapena

Atal honetan Jarzynskik [2] artikuluan erabilitako prozedura jarraitzen da. Horretarako sistema  $A$  makrogoeratik  $B$  makrogoerara prozesu kuasiestatikoaren bidez eraman beharrean, mikrogoera bakoitzaren ibilbidea aztertzen da pausu finitudun prozesuen bidez. Horretarako ondorengo notazioa erabiliko da. Alde batetik, suposa bedi sistema  $\lambda$ -ren bidez parametrizatuta dagoela, horrela sistema  $A$  egoeran dagoenean  $\lambda = 0$  izango da eta sistema  $B$  egoeran dagoenean  $\lambda = 1$ . Gainera sistema  $A$ -tik  $B$ -ra joatean  $T$  denbora igarotzen bada  $\lambda = t/T$  moduan defini daiteke. Bestetik,  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  sistemaren fase espazioko puntu bat bada eta Hamiltondarra  $\lambda$  parametroaz gidatuta badago, Hamiltondarra ondorengo eran adieraz daiteke,  $H_\lambda(\mathbf{z})$ . Notazioaren argibideekin bukatzeko  $H_\lambda(\mathbf{z})$  Hamiltondarrak deskribatutako ibilbidea  $\mathbf{z}(t)$  moduan adierazten da.

Jarzynskiren adierazpena bi kasutan aztertuko da, lehena sistema eta bero iturriaren arteko kontaktua hasieran bakarrik gertatzen denean eta bigarrena sistema eta bero iturria uneoro kontaktuan daudenean. Lehenengo kasua aztertzeko sistema hasieran bero iturriarekin kontaktuan jartzen da. Sistemak bero iturriarekin oreka termikoa lortzean  $\mathbf{z}_0$  hasierako mikroegoera multzoa finkatzen da. Egoera honi dagokion fase dentsitatea ondorengo izango da:

$$f(\mathbf{z}_0, 0) = \frac{e^{-\beta H_0(\mathbf{z})}}{Z_0} \quad \text{non} \quad Z_0 = \int e^{-\beta H_0(\mathbf{z})} d\mathbf{z}. \quad (2.8)$$

Sistema orain bero iturritik desakoplatzen da, horrela sistemaren gainean eragingo duen Hamiltondarrak  $H_\lambda(\mathbf{z})$  izango da. Orduan horrelako Hamiltondar bat izanda, Liouvilleren teorema ( $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_\lambda\} = 0$ ) aplikatzen bada, fase dentsitatea denboran konstante mantentzen dela ikus daiteke:

$$f(\mathbf{z}, t) = f(\mathbf{z}_0, 0) = \frac{e^{-\beta H_0(\mathbf{z})}}{Z_0}. \quad (2.9)$$

Sistema orain  $A$  egoeratik  $B$  egoerara eramaten da pausu finituen bidez, eta  $H_\lambda(\mathbf{z})$  Hamiltondarraren menpekota baino ez denez, sistema  $\mathbf{z}(t)$  ibilbidean zehar desplazatuko da. Ibilbidean zehar sistemak egindako lana ondorengo eran defini daiteke,  $w(\mathbf{z}, t) = H_\lambda(\mathbf{z}) - H_0(\mathbf{z}_0)$ . Honi metatutako lana deritzo eta fase espazioko  $\mathbf{z}_0$  hasierako puntutik,  $\mathbf{z}(t)$  ibilbidea jarraituz,  $t$  aldiuneraino sistemak egindako lana adierazten du. Jarzynskiren adierazpena lortzeko  $\langle e^{-\beta W} \rangle$  ondorengo eran kalkulatu da:

$$\langle e^{-\beta W} \rangle = \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}, t) e^{-\beta w(\mathbf{z}, t)}. \quad (2.10)$$

Fase espazioko dentsitatea kontserbatzen denez, (2.9) berdintza ordezkatzeko da aurreko adierazpenean:

$$\langle e^{-\beta W} \rangle = \int d\mathbf{z} \frac{e^{-\beta(w(\mathbf{z}, t) + H_0(\mathbf{z}_0))}}{Z_0}. \quad (2.11)$$

Aurreko adierazpenean, sistema  $T$  aldiuneraino garatzen uzten bada, metatutako lanaren definitzik zuzenean  $w(\mathbf{z}, T) + H_0(\mathbf{z}_0) = H_1(\mathbf{z})$  identifikazioa egin daiteke. Orduan adierazpena honela geratzen da:

$$\langle e^{-\beta W} \rangle = \frac{Z_1}{Z_0}. \quad (2.12)$$

Kasu honen frogapenarekin bukatzeko multzo kanonikoko  $\Delta F = -\beta^{-1} \ln\left(\frac{Z_1}{Z_0}\right)$  berdintza kontutan izanda, Jarzynski-ren (2.3) adierazpena berreskuratzen da.

Orain bigarren kasua kontsideratuko da, hau da, sistema uneoro bero iturriarekin kontaktu termikoan dagoela. Kasu honetan fase espazioan sistemari dagokion  $\mathbf{z}$  puntuaz gain bero iturriari dagokiona ere kontsideratu behar da,  $\mathbf{z}'$ , orduan bi fase espazioak biltzen dituen puntua  $\mathbf{y} = (\mathbf{z}, \mathbf{z}')$  moduan adieraz daiteke. Horrela sistemaren gainean eragiten duen Hamiltondarrak  $G_\lambda(\mathbf{y}) = H_\lambda(\mathbf{z}) + H(\mathbf{z}') + h_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{z}')$  izango da non  $H(\mathbf{z}')$  bero iturriaren ekarpena den



eta  $h_{int}(z, z')$  elakrrekintzari dagokiona. Notazioarekin bukatzeko  $G_\lambda(y)$  Hamiltondarraren menpeko partizio funtzioa  $Y_\lambda$  izendatuko da, aurreko kasutik desberdintzeko.

Jarzynskiren (2.3) ekuazioa berreskuratzeke bi hipotesi egiten dira. Bate-tik bero iturria sistemarekin alderatuz handia dela kontsideratzen da, horrela sistema eta bero iturria akoplatuta egoteak ez du inolako eraginik izango bero iturriaren egoeran. Bestetik, bero iturri eta sistemaren arteko akoplamendua arbuiagarria dela kontsideratzen da, horrela sistemaren garapena  $H_\lambda(z)$  Hamiltondarrak emandakoa izango da. Bi hipotesi hauek eginda, sistema eta bero iturriaren arteko oreka termikoa lortzean, sistema osoaren (bero iturri eta sistema) hasierako egoera  $e^{G_0(y)}$  Boltzmannen faktoreak finkatutakoa izango da. Hasierako egoera multzo hau  $G_\lambda(y)$  Hamiltondarrak definitutako  $y(t)$  ibilbidea jarraituko du,  $G_0(y)$ -tik  $G_1(y)$ -ra. Metatutako lana  $w(z, t) = G_\lambda(z) - G_0(z_0)$  moduan definitzen bada eta aurrerako prozedura jarraituz, (2.12) ekuaziaren parekoa den,

$$\langle e^{-\beta W} \rangle = \frac{Y_1}{Y_0} \quad (2.13)$$

ekuazioa lortzen da. Hemendik zuzenean  $\Delta F = -\beta^{-1} \ln\left(\frac{Y_1}{Y_0}\right)$  ekuazioan ordezkatzuz (2.3) ekuazioa berreskuratzen da, hau da, Jarzynskiren adierazpena. Aztertutako bi adierazpenek ez dute denborarekiko inolako menpekotasunik. Jarzynskiren adierazpenaren analisiarekin bukatzeko, analisia edozein sistemarako baliagarria den arren, bere aplikagarritasuna askatasun gradu gutxiko sistemetara mugatzen da. Neurtutako lanen balioak elkarrengandik oso ezberdinak badira  $\langle \text{angle} e^{-\beta W} \rangle$  batazbestekoaren balio onargarri bat lortzeko hainbat neurketa egin beharko lirateke eta hori mikroegoera ugaridun sistemetan egitea ez da praktikoa. Hori dela eta Jarzynskiren egiaztapen esperimentalak mikroegoera gutxiko sistemetara mugatzen da.

## 2.2 Azterketa kuantikoa

Helburua orain Crooks-en adierazpenaren bertsio kuantikoa lortzea baino ez da izango, ikusi den moduan behin Crooksen adierazpena izanda posible baita Jarzynskiren berdintza ondorioztatzea.

Crooksen adierazpen kuantikoa lortzeko [4] eta [5] artikuluetan oinarritzen da. Gainera azterketa egiteko sistema baldintza berdinetan mantentzen dela suposatzen da. Batetik sistema bero iturri batekin kontaktuan egoteagatik multzo kanonikoa erabiltzen jarraituko da eta bestetik prozesuak mikroskopikoki itzulgarriak izaten jarraituko dute.

### 2.2.1 Crooks

Izan bedi  $\hat{H}(\lambda_t)$  sistemaren eboluzioa ematen duen Hamiltondar eragilea. Sistema bero iturri batekin kontaktupean dagoenez, sistemaren dentsitate banaketa Boltzmann-en banaketak emandakoa izango da, hau da,

$$\rho(\lambda_t) = \frac{e^{-\beta\widehat{H}(\lambda_t)}}{Z(\lambda_t)} \quad \text{non} \quad Z(\lambda_t) = \text{Tr}[e^{-\beta\widehat{H}(\lambda_t)}]. \quad (2.14)$$

Azterketa klasikoan erakutsi den moduan posible da (2.2) Crooks-en ekuazioa, lanaren probabilitate dentsitatearen funtzio adieraztean. Sistema klasikoe-tan lana definitzeko eragozpenik ez dagoen bitartean, kuantikaren ikuspuntutik lanaren behagarria definitzean arazoak agertzen dira. Kuantikan magnitude bat behagarritzat hartzeko, dagokion eragilea hermitikoa izan behar da eta lanaren kasuan eragile hermitiko bat lortzeko hainbat aukera daude. Arazoa eragile hauen artean egokiena zein den hautatzean dago. Hori dela eta, kuantikoki lana definitzeko bide bat aurkitu beharra dago, jarraian lanaren probabilitate banaketa kuantikoa definitu ahal izateko. Lan honetan, lana TTEM (Two Time Energy Measurement) metodoaren bidez kalkulatzen da, zeinean sistemak egindako lana kalkulatzeko bi neurketa egiten diren. Lehen, hasierako egoerari dagokion energia finkatzeko eta bigarrena  $\tau$  denbora igaro ondoren sistema bukaerako egoerara iristean izango duen energia lortzeko. Horrela lana bi energien arteko diferentzia moduan definitzen da.

Sistema bero iturri batekin kontaktu termikoan dagoenez, hasiera batean sistemaren egoera nahasia izango da. Lehenengo neurketa  $t = 0$  aldiunean egiten bada, neurtuko diren egoera eta energiak ondokoak izango dira:  $|\psi_n^{\lambda_0}\rangle$  eta  $E_n^{\lambda_0}$ .

Bukaerako egoerari dagokion energia neurtzeko, sistema denboran garatzen uzten da,  $\widehat{U}$  denboraren garapena ematen duen eragile unitarioaren bidez.  $\tau$  denbora igarotzean sistema bukaerako egoerara iristen bada, aldiune horretan energiaren bigarren neurketa egiten da:  $|\psi_m^{\lambda_\tau}\rangle$  eta  $E_m^{\lambda_\tau}$ .

Hasierako eta bukaerako egoerei dagozkien energiak lortu direnez, prozesuari dagokion lana  $W = E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}$  izango da. Sistemari bi egoera horien arteko trantsizioa,  $|\psi_n^{\lambda_0}\rangle \rightarrow |\psi_m^{\lambda_\tau}\rangle$  gertatzeko probabilitatea ondorengoa da:

$$p_{mn}(\lambda) = p_{m|n} p_n^{\lambda_0} = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z(\lambda_0)} |\langle \psi_m | U | \psi_n \rangle|^2. \quad (2.15)$$

Lanaren probabilitate dentsitatea definitzerakoan, adierazpenak mikroegoera guztietatik, bakarrik  $W = E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}$  lana egiten dutenak hautatu behar ditu. Orduan [4] eta [5] artikuluetan oinarrituz sistema kuantiko baten  $W$  lana lortzeko probabilitate dentsitatea ondorengoa da:

$$p[W, \lambda] = \sum \delta(W - [E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}]) \frac{e^{-\beta E_n}}{Z(\lambda_0)} |\langle \psi_m | U | \psi_n \rangle|^2. \quad (2.16)$$

Lanaren probabilitate dentsitatea definituta dagoenez, orain posible da Crooksen adierazpen kuantikoa ondorioztatzea. (2.16) ekuazioak zuzeneko prozesuaren lanaren probabilitate dentsitatea adierazten du. Denboran alderantzizkoa den prozesuarena lortzeko, ondorengo prozedura jarraitzen da. Lehenengo, ekuazioa lanaren exponentzialarekin biderkatzen bada,

$$e^{-\beta W} p[W, \lambda] = \sum \delta(W - [E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}]) \frac{e^{-\beta W} e^{-\beta E_n}}{Z(\lambda_0)} |\langle \psi_m | U | \psi_n \rangle|^2 \quad (2.17)$$

ekuazioa lortzen da. Dirac-en delta bat dagoenez  $W$  lana bi egoeren arteko energi diferentziaren berdina izan behar da, gainontzeko balio guztietarako probabilitatea nulua izango baita. Orduan:

$$e^{-\beta W} p[W, \lambda] = \Sigma \delta(W - [E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}]) \frac{e^{-\beta(E_m - E_n)} e^{-\beta E_n}}{Z(\lambda_0)} |\langle \psi_m | U | \psi_n \rangle|^2. \quad (2.18)$$

Helburua aurreko adierazpeneko eskuineko atala denbora alderaztua duen prozesuaren lanaren probabilitate dentsitatea lortzea da. Horretarako ondorengo bi aldaketak aplikatuko dira:

$$\delta(W - [E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}]) = \delta(-W + [E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}]), \quad (2.19)$$

$$|\langle \psi_m | U | \psi_n \rangle|^2 = |\langle \psi_n | U | \psi_m \rangle|^2. \quad (2.20)$$

Aldaketa horiez gain, denboran alderantziko prozesuari dagokion  $Z(\lambda_\tau)$  partizio funtzioa sartzen da. Bi prozesuei dagozkien parametroak desberdintzeko, alderantziko prozesuari dagokiona  $\lambda'$  izandatzeko da non  $\lambda_\tau$  alderantziko prozesuari dagokion hasierako uneko parametroaren balioa den. Horrela, jarraian ikusten den moduan denboran alderantzizkoa den prozesuari dagokion lanaren dentsitate probabilitateak ordezkatzeko beharrezkoak diren elementu guztiak agertzen dira:

$$\frac{Z(\lambda_\tau)}{Z(\lambda_0)} \sum \delta(-W + [E_m^{\lambda_\tau} - E_n^{\lambda_0}]) \frac{e^{-\beta E_m}}{Z(\lambda_\tau)} |\langle \psi_n | U | \psi_m \rangle|^2 = \frac{Z(\lambda_\tau)}{Z(\lambda_0)} p[-W, \lambda']. \quad (2.21)$$

Denboran alderantzizkoa den lanaren dentsitate probabilitatea ordezkatzeko bada ondorengo adierazpena lortzen da:

$$e^{-\beta W} p[W, \lambda] = \frac{Z(\lambda_\tau)}{Z(\lambda_0)} p[-W, \lambda']. \quad (2.22)$$

Bukatzeke bi partizio funtzioen arteko erlazioa bilatu behar da. Prozesua denbora alderantzizkoarekin inbariantea denez, zuzeneko prozesuaren hasierako puntua eta alderantzizkoaren bukaerakoa berdinak dira, eta alderantziz,

orduan partizio funtzioen arteko erlazioa  $\Delta F = -\beta^{-1} \ln\left(\frac{Z(\lambda_\tau)}{Z(\lambda_0)}\right)$  adierazpenaren bidez ordezkatu daiteke. Horrela Crooksen adierazpen kuantikoa lortzeko:

$$\frac{p[W, \lambda]}{p[-W, \lambda']} = e^{\beta(W - \Delta F)}. \quad (2.23)$$

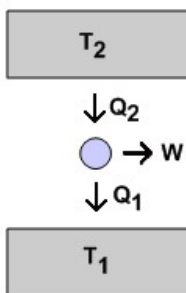
Ikusten denez Crooksen adierazpena ez da aldatzen sistema klasikoetatik sistema kuantikoetara, kasu bietan zuzeneko prozesuan  $W$  lana lortzeko probabilitatea eta denboran alderantzizko prozesuan  $-W$  lortzeko probabilitatea era berean erlazionatzen baitira. Aldatzen dena probabilitate hori definitu eta kalkulatzeko bidea da. Bestalde sistema klasikoen analisisian egin den prozedura berdina jarraituz posible da Jarzynskiren adierazpen kuantikoa lortzea, hori dela eta lanean ez da Jarzynskiren adierazpen kuantikoaren kalkulurik egingo.

## Kapitulua 3

# Makina termodinamikoak

Kapitulu honetan Carnot eta Ottoren ziklo termodinamikoak aztertuko dira. Lehenengo atalean ziklo hauen propietateak ikuspuntu klasikotik azaltzen dira, [6]. Bigarren atalean Carnot eta Otto zikloen analogo kuantikoak azaltzen dira, horretarako beharrezkoak diren definizio klasikoak mundu kuantikora moldatu ondoren. Gainera bigarren atal honetan bi zikloen arteko konparaketa ere egingo da. Bukatzeko hirugarren atal bat dago, zeinean Ottoren ziklo kuantikoaren parekoa den ziklo interesgarri bat azaltzen den.

Kapitulu honetan Carnot eta Otto zikloen bidezko makina termikoak aurkezten direnez komeni da makina termikoaren kontzeptua gogoratzea. Horretarako, suposa bedi sistema bat tenperatura ezberdineko bi bero iturriekin kontaktu termikoan dagoela. Sistemak  $T_2$  tenperaturako bero iturritik  $Q_2$  beroa jasotzen du eta  $Q_1$  beroa igorriko dio  $T_1$  tenperaturako bero iturriari. Sistema osoa makina termiko baten moduan kontsideratu ahal izateko  $T_2 > T_1$  dela onartu behar da. Orduan bi bero truke horien diferentziatik posible da lan positibo bat ateratzea.



**2. irudia:** Makina termikoaren eskema.

Makina termiko guztiak, klasiko zein kuantikoak, era berean definitzen diren arren, denak ez dira parekoak. Makina termikoa gauzatzeko erabili den zikloaren arabera, bero iturri berdinaren eraginpean lor daitezkeen lana oso ezberdina izan baitaiteke. Propietate honen erakusgarri da etekina ( $\eta$ ). Etekinak edo efizientziak, sistemak jasotako bero unitateko egin dezakeen lana adierazten du. Ondorengo adierazpenaren bidez ematen da:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_2|} \quad \text{non} \quad |W| = |Q_2| - |Q_1|. \quad (3.1)$$

### 3.1 Azterketa Klasikoa

Zikloen azterketa klasikoa gauzatzeko, termodinamikatik beharrezkoak diren kontzeptuak errepatatuko dira lehengo. Hasteko termodinamikaren lehen eta bigarren printzipioak gogoratuko dira eta jarraian Carnot eta Otto zikloen osagai diren prozesuak azalduko dira.

**1 printzipioa:** Termodinamikaren lehen printzipioak energiaren kontserbazioa adierazten du:

$$\Delta U = Q + W. \quad (3.2)$$

Printzipio honen bidez prozesu termodinamiko ezberdinetan gertatuko diren bero trukeak kalkulzea posible izango da.

**2. printzipioa:** Bigarren printzipioak hainbat enuntziatu baliokide ditu. Jarraian lanerako garrantzizkoak izango diren bi enuntziatu ageri dira:

- a) Kelvin-Planck: Ez dago prozesu termodinamikorik zeinaren ondorio bakarra gorputz berotik lortutako bero guztia lan bihurtzea den.
- b) Clausius: Ez dago prozesu termodinamikorik zeinaren ondorio bakarra gorputz hotzetik berorako bero-transferentzia den.

Bi enuntziatu hauetatik ondorengo ondorioak atera daitezke. Alde bate-tik, Kelvin-Planck-en enuntziatuaren arabera makina termikoen etekina mugatuta dago, ezinezkoa da etekina unitatea duen makina termikorik sortzea. Etekin handieneko makina termikoa Carnoten zikloak emandakoa da. Clausiusen enuntziatuak bestalde bero tranferentziari noranzko konkretu bat ezartzen dio. Inongo kanpo eraginik ez dagoen bitartean, beroa beti igorriko da gorputz berotik hotzera eta ez aurkako noranzkoan.

Bestalde, Carnot eta Ottoren zikloetan prozesu isoterma, isokoro eta adiabaticoak ageri direnez hauen errepataso arin bat egitea ere komeni da.

**Prozesu isotermaok:** Prozesu bat isoterma dela esaten da, tenperatura konstante mantentzen bada hasiera eta bukaerako egoeren bitartean.

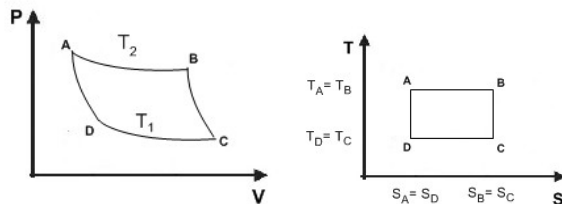
**Prozesu adiabaticoak:** Prozesu bat adiabatico dela esaten da, prozesuan zehar sistemak inolako bero trukerik jasaten ez badu.

**Prozesu isokoroak:** Prozesu bat isokoroa dela esaten da, prozesuan zehar sistemak inolako lanik egin edo jasotzen ez badu.

Beharrezkoak diren kontzeptu termodinamikoak gogoratuta, zikloen azterketa klasikoarekin hasten da.

### 3.1.1 Carnot-en ziklo klasikoa

Carnoten zikloak, termodinamikaren bigarren printzipioa hautsi gabe lor daitekeen etekin maximoaren muga adierazten duen ziklo ideala da. Zikloa lau prozesuz osatuta dago, alde batetik bi prozesu isoterma,  $T_1$  eta  $T_2$  tenperaturerakoak, eta bestetik bi prozesu adiabatiko. Jarraian zikloaren  $P/V$  eta  $T/S$  diagramak ageri dira, non argi ikus daitezkeen zikloaren lau prozesu osatzaileak.



**3. irudia:** Carnoten ziklo klasikoaren  $P/V$   $T$  eta  $T/S$  diagramak.

Jarraian prozesu bakoitzean sistemak trukaturako beroaren kalkulua gauzatu da. Kalkulua errazteko gas ideala kontsideratzen da, orduan jakina baita sistemaren barne energia  $C_v$  bolumen konstantepeko bero-ahalmenaren eta tenperaturaren menpekoa dela,  $\Delta U = C_v \Delta T$ . Erlazio honetaz eta termodinamikaren lehen printzipioaz baliatuz, prozesu bakoitzean trukaturako beroa ematen da.

**A  $\rightarrow$  B:** Prozesu honetan sistemak  $T_2$  tenperaturako expantsio isoterma jasaten du. Tenperatura konstante mantentzen denez  $\Delta U = 0$  lortzen da zuzenean eta hortaz termodinamikaren lehen printzipiotik:

$$Q_2 = -W = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \quad (3.3)$$

**B  $\rightarrow$  C:** Prozesu adiabatikoa denez zuzenean bero trukea nulua da.

**C  $\rightarrow$  D:** Prozesu honetan sistemak  $T_1$  tenperaturako konpresio isoterma jasaten du. Tenperatura konstante mantentzen denez  $\Delta U = 0$  lortzen da zuzenean eta hortaz termodinamikaren lehen printzipiotik:

$$Q_1 = -W = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \quad (3.4)$$

**D  $\rightarrow$  A:** Prozesu adiabatikoa denez zuzenean bero trukea nulua da.

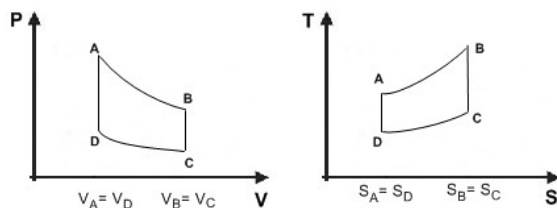
Ziklo osoan zehar sistemak jasango dituen bero trukeak lortu direnez, orain posible da Carnoten zikloari dagokion etekinaren adierazpena ematea:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \text{non} \quad T_1 < T_2. \quad (3.5)$$

Aurreko adierazpena makina termiko baten etekin maximoa adierazten du. Hala ere, Carnoten zikloa ziklo ideal bat da, ikuspuntu termodinamikitik itzulgarria delako. Hori dela eta errealitatean ezinezkoa da ziklo hau gauzatzea. Hori dela eta ondorengo azpiatalean Ottoren zikloa aztertzen da.

### 3.1.2 Otto-ren ziklo klasikoa

Ottoren zikloa ere lau prozesuz osatutako sistema da. Kasu honetan zikloaren prozesu osatzaileak bi prozesu isokoro eta bi prozesu adiabatiko dira. Carnoten zikloa ez bezala, termodinamikaren ikuspuntutik ziklo hau ez da itzulgarria, hau da, prozesu isokoroan zehar entropia handitu egiten da. Orduan bigarren printzipioaren arabera sistema itzulezin bat egoera batetik bestera eramatean entropia handitu egingo da. Jarraian zikloaren  $T/S$  eta  $P/V$  diagramak eranstean dira.



4. irudia: Otto ziklo klasikoaren  $P/V$  eta  $T/S$  diagramak.

Prozedura berdina jarraituko da oraingo kasuan ere, lehenengo prozesu bakoitza bere aldetik aztertuko da hauetan zehar sistemak jasaten dituen bero trukeak lortzeko. Kalkuluak errazteko, oraingoan ere gas ideala kontsideratuko da.

**A → B :** Prozesua adiabatikoa denez sistemak trukatu duen beroa nulua da.

**B → C :** Prozesu isokoroa denez sistemak ez du inongo lanik egingo ez jasango,  $W = 0$ . Ondorioz lehenengo printzipioaren arabera sistemak trukatu duen beroa eta barne energia identikoak dira,  $\Delta U = Q$ . Ondorioz:

$$Q_2 = C_V(T_C - T_B) > 0. \quad (3.6)$$

Sistemak bero xurgatzen du, espero den moduan.

**C → D :** Prozesua adiabatikoa denez sistemak trukatu duen beroa nulua da.

**D → A :** Prozesu isokoroa denez sistemak ez du inongo lanik egingo ez jasango,  $W = 0$ . Ondorioz lehenengo printzipioaren arabera sistemak trukatu duen beroa eta barne energia identikoak dira,  $\Delta U = Q$ .

$$Q_1 = C_V(T_A - T_D) < 0. \quad (3.7)$$

Sistemak beroa askatzen du, espero zen moduan.

Behin sistemak bero iturriekin trukutzen dituen beroak lortuta, Ottoren zikloari dagokion etekina,  $\eta_O$  kalkula daiteke:

$$\eta_O = 1 - \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}. \quad (3.8)$$

Kasu honetan zikloa termodinamikoki itzulgarria ez denez, Carnoten zikloa ez bezala, posible da ziklo hau errealitatean gauzatzea.

## 3.2 Azterketa Kuantikoa

Atal honetan Carnot eta Otto zikloen baliokide kuantikoak aztertuko dira. Ziklo hauek ulertzeko [7] artikulua hartu da oinarri moduan. Analisia gauzatzeko azterketa klasikoan berrikusitako kontzeptuak ikuspuntu kuantikotik definitu behar dira. Azterketa klasikoko antolaketa berdina jarraitzeko, lehenengo termodinamikaren lehen eta bigarren printzipioak aztertuko dira.

- 1. printzipioa:** Termodinamikaren lehen printzipioak, (3.2), sistemaren barne energia, sistemak trukaturako bero eta egindako lanarekin erlazionatzen ditu. Printzipio honen baliokide kuantikoa lortzeko, sistemaren  $\hat{H}$  Hamiltondarrara,  $E_n$  autobalioak eta  $P_n$  probabilitateak ezagunak direla suposatzen da. Orduan sistemaren barne energia ondorengoa da:

$$U = \langle H \rangle = \sum_1^{\infty} P_n E_n. \quad (3.9)$$

Barne energia bero eta lanarekin erlazionatu behar dira. Helburu horrekin barne energiaren diferentziala kalkulatu da eta lortzen diren bi gaiak bero eta lanarekin identifikatu dira:

$$dU = \sum_1^{\infty} (E_n dP_n + dE_n P_n). \quad (3.10)$$

Lana, sistema egoera batetik beste batera igarotzean, sistemaren energiak izan duen aldaketarekin erlazionatzen da. Orduan goiko adierazpenean ondorengo identifikazioa egin daiteke:

$$\delta W = \sum_1^{\infty} P_n dE_n. \quad (3.11)$$

Bestalde, beroa  $\delta Q = TdS$  moduan definitzen da. Beroa (3.10) adierazpeneko geratzen den gaiarekin identifikatu da, entropia eta sistema maila jakin batean egoteko probabilitatea  $S = -k_B \sum_1^{\infty} P_n \ln(P_n)$  erlazioaz lotuta daudelako. Orduan:

$$\delta Q = \sum_1^{\infty} E_n dP_n. \quad (3.12)$$

Identifikazio hauen bidez, termodinamikaren lehen printzipioaren baliokide kuantikoa lortzen da.

- 2. printzipioa** Bigarren printzipioak prozesuen itzulgarritasuna aztertzen du. Honen arabera prozesu espontaneo batean, bero gorputz berotik hotzera trukaturako da. Ikuspuntu klasikoaren arabera prozesu bat itzulgarria izango da entropia aldaketa nulua denean, beste prozesuetarako unibertsoaren entropia handitu egiten da. Bigarren printzipioa kuantikoki enuntziatzean hainbat eztabaida egon dira, hori dela eta oraindik ez dago guztiz zehaztuta.



Prozesu termokuantikoak azaltzeko, lortu berri den termodinamikaren lehen printzipio kuantikoa erabiliko da. Azterketa klasikoan bezala aztertu beharreko prozesuak, prozesu isotermo, adiabatiko eta isokoroak izango dira. Prozesu hauen azalpenetan bi energi mailako sistemak (qubitak) erabiliko dira. Alde batetik lanaren helbururako nahikoa delako mota honetako sistemak aztertzea eta bestetik kalkuluak sinplifikatzen direlako. Qubita deskribatzeko ondorengo notazioa erabiliko da: Oinarrizko egoera eta energia  $|1\rangle$  eta  $E_1$  izango dira; egoera kitzikatuaren kasuan aldiz,  $|2\rangle$  eta  $E_2$ . Gainera bi energi mailen artekoa aldea edo "gap-a honela adieraziko da:  $\Delta = E_2 - E_1$ . Aztergai den sistema deskribatuta dagoelarik, aipatutako prozesuen azterketarekin hasten da.

**Prozesu isotermo kuantikoak:** Prozesu isotermoak, tenperatura konstante mantentzen duten prozesuak dira. Sistema kuantikoetan arazoa tenperatura definitzea da. Prozesu isotermoetan tenperatura konstante mantentzen denez qubita,  $T$  tenperaturako bero iturri batekin kontaktuan dagoela kontsideratzen da, hortaz sistema egoera dentsitatea ondokoa da:

$$\rho = \frac{e^{-\beta\Delta}}{Z}. \quad (3.13)$$

Qubitari dagokion tenperatura eraginkorra lortzeko  $\delta Q = E_1 dP_1 + E_2 dP_2$  beroaren adierazpenetik has daiteke, non  $P_1 + P_2 = 1$  normalizazio baldintza bete behar den. Orduan  $\delta Q = \Delta dP_2$  lortzen da. Bi energi mailako sistema batentzat entropiaren adierazpena  $S = -k_B P_1 \ln(P_1) - k_B P_2 \ln(P_2)$  denez, entropiaren diferentzia ondokoa da:

$$dS = k_B \ln(P_2^{-1} - 1) dP_2. \quad (3.14)$$

Ondorioz qubit batek trukutzen duen beroa ondorengo eran adieraz daiteke:

$$\delta Q = \frac{\Delta}{k_B \ln(P_2^{-1} - 1)} dS. \quad (3.15)$$

Aurreko adierazpena  $\delta Q = T dS$ -rekin alderatzen bada sistemaren tenperatura eraginkorra ondorengo eran defini daiteke:

$$T = \frac{\Delta}{k_B \ln(P_2^{-1} - 1)}. \quad (3.16)$$

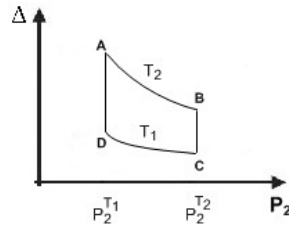
**Prozesu isokoro kuantikoak:** Prozesu isokoroetan sistemak ez du inolako lanik egiten. Lehen printzipioaren bertsio kuantikotik lanaren adierazpena hartzen bada, lana nulua izateko bete behar den baldintza  $E_n$  energi mailak eta hortaz  $\Delta$  konstante mantentzea da.

**Prozesu adiabatiko kuantikoak:** Prozesu adiabatikoetan bestalde, sistemak ez du inolako bero trukerik jasaten. Lehen printzipiora bueltatuz, bero trukea nulua izateko bete behar den baldintza  $P_n$  konstante mantentzea da. Gainera termodinamikaren  $\delta Q = T dS$  adierazpenetik prozesu itzulgarri adiabatikoetan entropia konstante mantentzen dela jakina da.

Behin prozesu hauek azalduta Carnot eta Ottoren ziklo kuantikoen analisia-  
rekin hasia posible da. Gogoratu behar da, ziklo hauetan aztergai den sistema  
bi energi mailako sistema izango dela, hau da, qubita.

### 3.2.1 Carnot-en ziklo kuantikoa

Carnoten ziklo kuantikoa aztertzeko, ziklo klasikoa hartzen da oinarri moduan .  
Ziklo kuantikoa, klasikoa moduan bi prozesu isotermo eta bi adiabatikoz osatuta  
dago. Ikusi denez, aztergai den sistema qubita bada prozesu termodinamikoak  
deskribatzeko  $\Delta$  eta  $P_2$  aldagaiak erabiltzea komeni da, hori dela eta ziklo kuan-  
tikoa diagrama aldagai hauen funtzioan adierazten da jarraian.



5. irudia: Carnoten ziklo kuantikoaren  $\Delta/P_2$  diagrama.

$\eta_{QC}$  (Quantum Carnot) zikloaren etekina lortzeko helburuarekin, zikloko  
prozesu adiabatikoez ezarritako baldintzak aztertzen dira. Analisia  $B \rightarrow C$   
prozesua adiabatikoarekin egiten den arren,  $D \rightarrow A$  prozesua era berean az-  
tertzen da.  $B \rightarrow C$  prozesu adiabatikoan zehar sistema egoera jakin batean  
aurkitzeko probabilitatea konstantea da. Izan ere prozesu adiabatikoetan ent-  
ropia konstante batentzen da, eta ikusi denez, qubitaren kasuan entropia alda-  
keta eta sistema egoera kitzikatuan aurkitzeko probabilitatea (3.14) ekuazioaren  
bidez erlaziona daitezke. Orduan (3.14) adierazpena nulua izateko aukera ba-  
karra  $dP_2$  nulua izatea da, hau da, prozesuaren hasiera eta amaieran sistema  
egoera kitzikatuan aurkitzeko probabilitatea berdina izatea. Ondorioz bi energi  
mailatan aurkitzeko probabilitatearen ratioa konstante mantentzen da:

$$\frac{P_2(B)}{P_1(B)} = \frac{P_2(C)}{P_1(C)}. \quad (3.17)$$

(3.13) dentsitate matritzetik probabilitateak lortzen badira eta gaiak berran-  
tolatzen badira ondorengo adierazpena lortzen da:

$$\frac{E_1(B) - E_2(B)}{E_1(C) - E_2(C)} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (3.18)$$

Honez gain, prozesu adiabatikoetan entropia konstante mantentzen dela kon-  
tutan hartu behar da,  $S(B) = S(C)$  eta  $S(A) = S(D)$ . Bi baldintza hauek  
beharrezkoak dira etekinaren azken adierazpena lortzeko.

Etekinaren kalkuluarekin hasteko, zikloan zehar sistemak xurgatu eta aska-  
tutako beroak kalkulatu dira. Bero transferentziak prozesu isotermo itzulga-  
rrietan zehar gertatzen direnez, posible da bero trukeak  $\delta Q = TdS$  adierazpen  
termodinamikoaren bidez lortzea:

$$Q_2 = T_2[S(B) - S(A)] > 0 \quad \text{eta} \quad |Q_1 = T_1[S(D) - S(C)]| < 0. \quad (3.19)$$

Orduan bero truke horiek (3.1) ekuazioan ordezkutzen badira etekinaren ondorengo adierazpena lortzen da:

$$\eta_{QC} = 1 - \frac{T_1[S(C) - S(D)]}{T_2[S(B) - S(A)]}. \quad (3.20)$$

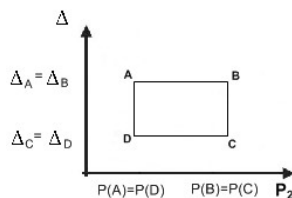
Prozesu adiabatikoetan entropia konstante mantentzen dela aplikatzen bada Carnoten ziklo klasikoari dagokion adierazpena berreskuratzen da, (3.5). Hala ere, ziklo kuantikoetan posible da etekina beste era batera adieraztea, horretarako (3.18) baldintza ezartzen da. Horrela etekina energi tartekin ondorengo eran erlazionatzen da:

$$\eta_{QC} = 1 - \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}. \quad (3.21)$$

Hortaz, Carnoten ziklo kuantikoarentzako bi adierazpen lortu dira. Alde batetik ziklo klasikoak ematen duena berreskuratzen da eta bestetik etekina sistema kuantikoa deskribatzen duen aldagai batekin lotu da, energi tartea. Azpimarratu behar da,  $\Delta^{T_{1,2}}$  notazioaren bidez, bi energi mailako sistemak  $T_{1,2}$  temperaturetan duten tartea adierazten dela.

### 3.2.2 Otto-ren ziklo kuantikoa

Ottoren ziklo kuantikoa, bi prozesu isokoro eta bi adiabatikoz osatuta dago. Aurreko kasuan egin den moduan, ziklo kuantikoaren diagrama  $\Delta$  eta  $P_2$  erakusten da, adierazgarriagoa baita.



**6. irudia:** Ottoten ziklo kuantikoaren  $\Delta/P_2$  diagrama.

Helburua oraingoan ere berdina da,  $\eta_{QO}$  (Quantum Otto) Ottoren ziklo kuantikoaren etekina lortzea. Kasu honetan bero trukeen kalkulurako  $\delta Q = TdS$  adierazpena aplikatzea ezinezkoa da, zikloa ez baita itzulgarria eta gainera ez dago prozesu isotermorik. Ondorioz sistemak xurgatu eta askatutako beroak kalkulatzeko (3.12) adierazpena erabili behar da. Jakina da, prozesu adiabatikoetan bero trukea nulua dela hortaz, kalkulua prozesu isokoroetan baino ez da egin behar.

Prozesu isokoroetan energi mailak konstante mantentzen direnez, ( $E_{1,2}^A = E_{1,2}^B$  eta  $E_{1,2}^C = E_{1,2}^D$ ) bero trukeen kalkulua zuzena da:

$$Q_2 = \sum_1^2 \int_A^B E_n^A dP_n = E_1^A[P_1(B) - P_1(A)] + E_2^A[P_2(B) - P_2(A)], \quad (3.22)$$

$$Q_1 = \sum_1^2 \int_C^D E_n^C dP_n = E_1^C [P_1(D) - P_1(C)] + E_2^C [P_2(D) - P_2(C)]. \quad (3.23)$$

Ondorioz etekinaren adierazpena ondorengoa da:

$$\eta_{QO} = 1 - \frac{E_1^C (P_1(D) - P_1(C)) + E_2^C (P_2(D) - P_2(C))}{E_1^A (P_1(B) - P_1(A)) + E_2^A (P_2(A) - P_2(A))}. \quad (3.24)$$

Adierazpena sinplifikatzeko prozesu adiabatikoek ezarritako baldintza erabiltzen da. Azaldu den moduan prozesu adiabatikoetan energi maila bakoitzari dagokion probabilitatea konstante mantentzen da, hortaz,  $P_{1,2}(B) = P_{1,2}(C)$  eta  $P_{1,2}(D) = P_{1,2}(A)$ . Orduan:

$$\eta_{QO} = 1 - \frac{|E_1^C (P_1(D) - P_1(C)) + E_2^C (P_2(D) - P_2(C))|}{|E_1^A (P_1(D) - P_1(C)) + E_2^A (P_2(D) - P_2(C))|}. \quad (3.25)$$

Bukatzeko azken aldaketa bat egiten da, adierazpena sinplifikatzeko helburuarekin, sistemaren oinarritzko energi maila erreferentzizat hartuko da, horrela sistema edozein tenperaturatan egonik ere  $E_1^{C,A} = 0$  mantenduko da eta ondorioz egoera kitzikatuaren energia maila,  $E_2$  izango da aldatuz joango dena, gainera  $E_2^{C,A} = \Delta^{C,A}$  beteko da. Aldaketa honen ondorioz,  $\eta_{QO}$ -ren adierazpen simple bat lortzen da:

$$\eta_{QO} = 1 - \frac{\Delta^C}{\Delta^A}. \quad (3.26)$$

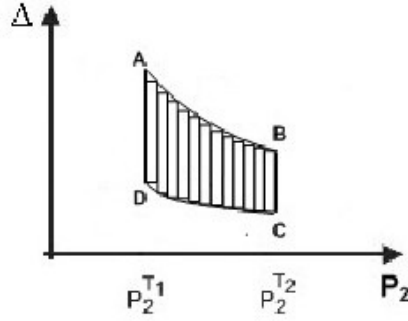
Kasu honetan azpimarratzekoa da  $\Delta^{A,C}$  notazioaren bidez sistemak prozesu isokoroetan zehar duen energi tartea adierazten dela.

### 3.3 Carnot eta Otto ziklo kuantikoen arteko alderaketa

Atal honetan Carnot eta Ottoren ziklo kuantikoak konparatzen dira. Lehenengo Otto ziklo infinitesimalen bidez Carnoten zikloa eratzen da. Ondoren aurkako bidea jarraitzen da, Carnoten ziklo infinitesimalen bidez Ottoren zikloa eratzeko. Bukatzeko, bi zikloen etekinen arteko konparaketa egin eta erlazio bat bilatzen saiatzen da.

#### 3.3.1 Ottoren ziklo kuantikotik Carnoten ziklo kuantikora

Helburua Ottoren zikloen bidez Carnoten zikloa azaltzea da. Horretarako Carnoten zikloa, N Ottoren ziklo infinitesimalen segida moduan kontsideratzen da.



**7. irudia:** Carnoten ziklo kuantikoa Ottoren  $n$  ziklo kuantikotan deskonposatuta.

Carnoten zikloa, Ottoren  $N$  ziklo infinitesimaletan deskonposatzen denez zentzuzkoa da Carnoten zikloan zehar trukaturako beroa, Ottoren ziklo infinitesimaletan trukaturako beroaren batura izatea. Bi bero truke hauek ez nahasteko ondorengo notazioa erabiliko da:  $Q_{QC}$  Carnoten zikloari dagokiona adierazteko eta  $Q_{QO,n}$  Ottoren  $n$ . zikloari dagokiona. Behin notazioa argiturik sistemak trukutzen duen beroaren adierazpen orokorra ondorengo da:

$$Q_{QC} = \sum_0^N Q_{QO,n}. \quad (3.27)$$

Ottoren ziklo bakoitzean trukaturako beroa kalkulatzeko (3.12) ekuziotik abiatzen da:

$$Q_{QO,n} = E_{n,1}(P_1(n+1) - P_1(n)) + E_{n,2}(P_2(n+1) - P_2(n)) \quad \text{non } n \in [0, N]. \quad (3.28)$$

Ottoren zikloetan bero trukea prozesu isokorietan gertatzen denez  $E_{n,1,2}$  energia mailen balioak konstante mantentzen dira, non  $n$  azpiindizeak Ottoren  $n$ . zikloari dagokion energi maila adierazten duen. Erreztasunez  $E_{n,1}$  guztiak erreferentzizat hartzen dira, horrela  $E_{n,1} = 0$  eta  $E_{n,2} = \Delta_n$  izango dira. Bestalde Boltzmannen banaketatik, (3.16), energia tartearen adierazpena probabilitatearen eta tenperaturaren menpe lor daiteke. Ottoren zikloak infinitesimalak direnez eta Carnoten zikloan bero trukea lerro isotermoetan zehar gertatzen direnez, Ottoren ziklo guztietan tenperatura berdina dela kontsideratzen da. Horrela Ottoren  $n$ . zikloarentzat ondorengo adierazpena lortzen da:

$$Q_{QO,n} = k_B T \ln(P_{n,2}^{-1} - 1)(P_2(n+1) - P_2(n)) \quad \text{non } n \in [1, N]. \quad (3.29)$$

Ottoren ziklo infinitesimal bati dagokion beroa lortuta,  $N$  ziklo guztietan xurgaturako edo trukaturako beroa batutzen bada, Carnoten zikloan trukaturako beroa lortzen da:

$$Q_{QC}^{T_2} = k_B T_2 \sum_0^N \ln(P_{n,2}^{-1} - 1)(P_2(n+1) - P_2(n)), \quad (3.30)$$

$$Q_{QC}^{T_1} = k_B T_1 \sum_0^N \ln(P_{n,2}^{-1} - 1)(P_2(n) - P_2(n+1)). \quad (3.31)$$

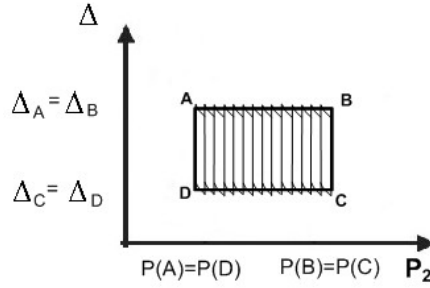
Orduan, bero trukeak jakinda, etekina lor daiteke:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}. \quad (3.32)$$

Ikus daitekeenez Ottoren ziklo kuantiko infinitesimalen bidez Carnoten zikloaren etekina berreskuratzen da, (3.5). Hala ere Carnot eta Ottoren zikloak ez dira inoz baliokideak izango, infinitesimalki aztertuz gero antzekoak izan arren. Carnoten zikloa, Ottoren zikloa ez bezala, itzulgarria baita.

### 3.3.2 Carnoten ziklo kuantikotik Ottoten ziklo kuantikora

Kasu honetan aurkako bidea jarraitzen da. Oraingoan helburua Carnoten ziklo infinitesimalen bidez Ottoren zikloa berreskuratzea da. Horretarako Ottoren zikloa,  $N$  Carnoten ziklo infinitesimaletan deskonposatzen da.



**8. irudia:** Ottoren ziklo kuantikoa Carnoten  $n$  ziklo kuantikotan deskonposatuta.

Erabiliko den notazioa aurrekoaren antzekoa da: Ottoren zikloan xurgatutako beroa  $Q_{QO}$  moduan adierazten da eta Carnoten  $n$ . ziklo infinitesimala  $Q_{QC,n}$ . Orduan aurreko kasuan moduan, Ottoren zikloari dagokion bero trukea ondorengo eran lortzen da:

$$Q_{QO} = \sum_0^N Q_{QC,n}. \quad (3.33)$$

Ottoren zikloa itzulezina eta prozesu isoterma gabekoa den arren, Carnoten ziklo infinitesimaletan deskonposatzeak,  $\delta Q_{QC,n}^{OUT/IN} = T_n^{(1,2)} dS_n$  adierazpena erabiltzea ahalbideratzen du, non  $T_n^{(1,2)}$ -k Carnoten  $n$ . zikloari dagokion prozesu isotermaoren tenperatura adierazten duen eta gainera  $T_n^{(2)} > T_n^{(1)}$  den.  $T_n^{1,2}$  tenperaturaren ordez (3.16) ekuazioa ordezkatzen bada, ondorengo ekuazioa lortzen da,

$$\delta Q_{QC,n}^{T^1/T^2} = \frac{\Delta_n^{T^{1,2}}}{k_B \ln(P_{n,2}^{-1} - 1)} dS_n, \quad (3.34)$$

non  $\Delta_n^{T^{1,2}}$   $T_n^{(1,2)}$  isotermaori dagokion energi tartea den. 8. irudian ikus daitekeenez  $\Delta_n^{T^{1,2}} = \Delta^{T^{1,2}}$  betetzen da ziklo infinitesimal guztietarako. Hau da, isoterma guztietan energi tartearen aldaketa berdina da. Orduan, garapenarekin jarraitzeko aldagai aldaketa bat egiten da non entropiaren ordez sistema egoera

kitzikatuan aurkitzeko probabilitatea jartzen den. Horretarako, entropia eta probabilitatearen arteko erlazioa ondokoa da:

$$S_n = -k_B P_{n,1} \ln(P_{n,1}) - k_B P_{n,2} \ln(P_{n,2}). \quad (3.35)$$

Normalizazio baldintza hartzen bada,  $P_{n,1} + P_{n,2} = 1$ , eta entropiaren diferentziala kalkulatzen bada sistema egoera kitzikatuan aurkitzeko probabilitatearekiko, ondorengo erlazioa lortzen da:

$$dS_n = k_B \ln(P_2^{-1} - 1) dP_{n,2}. \quad (3.36)$$

Aldaketa hau (3.34) ekuazioan ordezkatu eta gaiak sinplifikatzen dira:

$$\delta Q_{QC,n}^{T^1/T^2} = \Delta^{T^{(1,2)}} dP_{n,2}. \quad (3.37)$$

Ottoren ziklo osoan xurgatu eta askatutako beroak lortzeko ziklo infinitesimal guztien ekarpena izan behar da kontutan, hortaz:

$$Q_{QO}^{T^2} = \Delta^{T^2} \sum_0^N \int_A^B dP_{n,2}, \quad (3.38)$$

$$Q_{QO}^{T^1} = \Delta^{T^1} \sum_0^N \int_B^A dP_{n,2}. \quad (3.39)$$

Sistemak trukaturako beroak etekinaren (3.1) adierazpenean ordezkatzeko bada Ottoren ziklo kuantikoari dagokion (3.26) etekina berreskuratzen da:

$$\eta = 1 - \frac{\Delta^{T^1}}{\Delta^{T^2}}. \quad (3.40)$$

Kasu honetan ere, ikusi da posible dela Carnoten ziklo infinitesimalen bidez Ottoren ziklo kuantikoa lortzea. Hala ere, aurreko atalean egin den moduan, gogoratu behar da egindako garapena hurbilketa bat baino ez dela, Otto eta Carnoten zikloak inoiz ez baitira izango baliokideak. Ottoren zikloa itzulezina delako eta Carnotena aldiz itzulgarria.

### 3.3.3 Etekinen alderaketa

Aurreko bi azpiataletan Carnot eta Ottoren ziklo kuantikoak erlazioatzea posible dela frogatu da, baina ez da beraien etekina konparatu. Atal honetan azterketa hori egingo da. Horretarako bi zikloak baldintza berdin eraginpean izatea ezinbestekoa da. Horrela, bero iturriak eta sistemaren energi tartekak berdinak kontsideratuko dira. Energi tartekak berdinak hartuko diren arren, beraien interpretazio fisikoa oso desberdina dela gogoratu behar da. Alde batetik, Carnoten zikloko etekinean, energi tartekak prozesu isotermoekin daude erlazioatuta eta bestetik, Ottoren zikloko etekinean, energi aldeak prozesu isokoroekin daude lotuta.

Etekinen alderaketa gauzatzeko, Ottoren zikloari dagokion etekinetik hasten da (3.26). Boltzmannen banaketa funtzioa erabiliz adierazpena tenperaturaren funtzioan jartzen da:

$$\eta_{QO} = 1 - \frac{T_1 \ln((P_2^{T_1})^{-1} - 1)}{T_2 \ln((P_2^{T_2})^{-1} - 1)}. \quad (3.41)$$

Adierazpen honetan logaritmoen ekarpena txikia denez hauen Taylorren garapena egiten da  $P_2$  egoera kitzikatuaren probabilitatearekiko:

$$\eta_{QO} \approx 1 - \frac{T_1}{T_2} \left(1 - \frac{\delta}{\delta P_2} [\ln(\ln(P_2)^{-1} - 1))(P_2^{T_2} - P_2^{T_1})]\right). \quad (3.42)$$

Orduan Carnoten zikloari dagokion etekina (3.5) dela jakinik ondorengo adierazpena lortzen da:

$$\eta_{QO} \approx \eta_{QC} + \frac{T_1}{T_2} \frac{\delta}{\delta P_2} [\ln(\ln(P_2)^{-1} - 1))(P_2^{T_2} - P_2^{T_1})]. \quad (3.43)$$

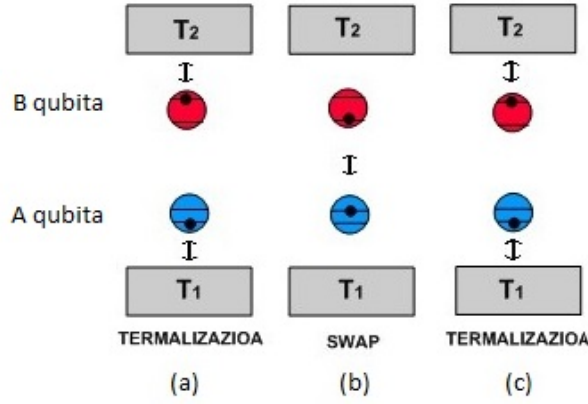
Bukatzeko, froga daiteke aurreko adierazpeko bigarren gaia negatiboa dela ondorioz  $\eta_{QO} < \eta_{QC}$  ondorioztatzen da. Emaitza hau lortzea espero zen, izatez Carnoten zikloak, makina termiko baten lor dezakeen etekin maximoaren muga adierazten duen zikloa baita.

### 3.4 Ottoren ziklo kuantiko baliokide bat

Kapitulu honekin bukatzeko, [7] artikuluan aurkezten den Ottoren ziklo baliokide bat deskribatzen da zeinean lan egiten duen sistema moduan bi qubit erabiltzen diren. Bi qubitak desberdintzeko  $A, B$  azpiindizeak erabiliko dira. Kalkuluak errazteko qubiten oinarriko energi mailak erreferentzitzat hartzen dira, horrela qubit bakoitzaren energiak honakoak izango dira:  $E_{1A,B} = 0$  eta  $E_{2A,B} = \Delta_{A,B}$ . Gainera zikloko lana nulua izan ez dadin energi tartek ezberdinak izan behar dira.

Zikloa hiru prozesutan banatzen da. Hasieran bi qubitak desakoplatuta daude eta bakoitza bero iturri batekin kontaktu termikoan, horrela A qubita  $T_1$  bero iturriarekin eta B qubita  $T_2$  bero iturriarekin egongo dira. Zikloak lan positiboa egin dezan  $T_2 > T_1$  eta  $\Delta_B > \Delta_A$  hartzen dira. Bi qubitak bero iturriekin oreka termikoa lortu ondoren, qubitan akoplatu eta SWAP eragiketa gauzatzen da, horrela bi qubitak elkar trukatzeari lortzen da. Bukatzeko, qubitak desakoplatu eta bero iturriekin kontaktu termikoan jartzen dira. Ziklo honetan, termalizazioak prozesu adiabatikoaren papera egiten du, honetan ez baitago bi qubiten arteko bero truketik. SWAP eragiketak aldiz, prozesu isokoroaren lana egiten du, qubitak trukatzeari hauen energia mailak konstante mantentzen baitira.





- 9.irudia:** (a) Qubit bakoitza dagokion bero iturriarekin oreka termikoa.  
 (b) Qubiten arteko SWAP eragiketa.  
 (c) SWAP eragiketaren osteko termalizazioa.

Behin zikloaren funtzionamentua deskribatuta honen analisia egiten da. Hasierako egoeran, qubitak desakoplatuta daude eta bakoitza bero iturri batekin kontaktupean. Orduan qubit bakoitzari dagokion dentsitate matrizea independenteki kalkula daiteke:

$$\rho_A(1) = \frac{1}{Z_A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_1 \Delta_A} \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \rho_B(1) = \frac{1}{Z_B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_2 \Delta_B} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Oreka termikoa lortzean bi qubitak akoplatu egiten dira. Akoplatutako egoeraren dentsitate matrizea lortzeko bi dentsitate matrizeen arteko biderkadura tentsoriala egiten da:

$$\rho(1) = \rho_A(1) \otimes \rho_B(1) = \frac{1}{Z_A Z_B} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_2 \Delta_B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta_1 \Delta_A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Qubitak akoplatu ondoren, qubitak elkartrukutzen dira, horretarako SWAP eragiketa unitarioa erabiltzen da:

$$\rho(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_2 \Delta_B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta_1 \Delta_A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

$$\rho(2) = \frac{1}{Z_A Z_B} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_1 \Delta_A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta_2 \Delta_B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Qubitak trukatu ondoren desakoplatu eta bero iturriekin kontaktu termikoa jartzen dira:

$$\rho_A(2) = \frac{1}{Z_B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_2 \Delta_B} \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \rho_B(2) = \frac{1}{Z_A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_1 \Delta_A} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Sistema hasierako konfigurazioa bueltatzean, zikloa bukatutzat ematen da.

Zikloaren etekina kalkulatzeko, sistemak trukutzen duen beroa kalkulatu behar da, horretarako bi qubitek xurgatutako beroak kalkulatzeko dira:

$$Q_A = Tr[H\rho_A(2)] - Tr[H\rho_A(1)] = \Delta_A \left( \frac{e^{-\beta_2 \Delta_B}}{Z_B} - \frac{e^{-\beta_1 \Delta_A}}{Z_A} \right). \quad (3.49)$$

$$Q_B = Tr[H\rho_B(1)] - Tr[H\rho_B(2)] = \Delta_B \left( \frac{e^{-\beta_2 \Delta_B}}{Z_B} - \frac{e^{-\beta_1 \Delta_A}}{Z_A} \right). \quad (3.50)$$

$\Delta_B > \Delta_A$  denez argi ikusten da  $Q_B > Q_A$  izago dela, orduan zikloak egin dezakeen lan netoa  $W = Q_B - Q_A$  izango da. Orduan zikloaren etekina ondokoa da:

$$\eta = \frac{W}{Q_B} = 1 - \frac{\Delta_A}{\Delta_B}. \quad (3.51)$$

Ikus daitekeenez Ottoren ziklo kuantikoari dagokion etekina berreskuratu da.

## Kapitulua 4

# Esperimentu proposamena

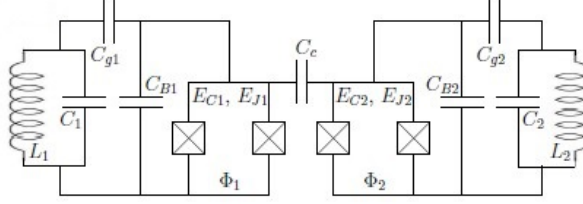
Kapitulu honetan, Ottoren ziklo baliokidean oinarritutako esperimentu bat proposatzen da. Esperimentuaren helburua, aurretik aztertutako Ottoren ziklo baliokidea sistema erreal baten ezartzea izango da. Horrela aurretik aztertutako Crooksen berdintzaren eta Ottoren ziklo kuantikoaren etekinaren egiaztapen esperimental bat proposatzen da.

Esperimentuaren zehaztasunetara igaro aurretik, erabiliko den qubit mota hautatu behar da. Azken hamarkadetan konputagailu kuantikoa sortzeko desira dela eta bi energi mailako hainbat sistema aurkeztu dira qubit hautagai modura. Esaterako, fotoien polarizazioan oinarritutakoak, isolatutako atomo sistemak (Trapped atomic ions) edo zirkuitu supereroaleetan oinarritutakoak. Sistema hauez gain, [8] artikuluan beste sistema batzuk proposatzen dira.

Guzti hauen artean esperimentua gauzatzeko zirkuitu supereroaleetan oinarritutakoak hautatu dira. Qubit hauen izaera elektronikoa eta makroskopikoa dela eta posible da qubita esperimentu edo sistemaren beharrianetara moldatzea. Zirkuitu supereroalearen diseinuaren arabera hiru multzo bereizten dira, karga qubita, fase qubita eta fluxu qubita [9],[10]. Hauetatik karga qubita eta konkretuki transmoia erabiltzen da esperimentuan, hauen bibliografia ugaria baita (karga qubitari eta transmoitari dagozkien propietateak eranskinetan aurki daitezke).

### 4.1 Esperimentua

Aurreko kapituluan azaldu den moduan, Ottoren ziklo baliokidea, bi termalizazio prozesu eta SWAP eragiketa batez osatuta dago. Hortaz prozesu hauek transmoien kasuan nola gauza daitezkeen aztertu behar da. Transmoien arteko SWAP eragiketa jadanik gauzatua izan da [11] artikuluan azaltzen den moduan. Hori jakinda [11] artikuluan aztertutako zirkuitua hartuko da oinarritzat.



**10.irudia:** SWAP eragiketaren gauatzeko zirkuitua. SWAP eragiketa kondentsadore bidez gauatzen da. Alboetako LC zirkuituak transmoien egoerak kontrolatzeko erabiltzen dira. Irudia [11] artikulutik hartu da.

Termalizazio prozesuei dagokienez, transmoiak supereroaletasunean oinarrituta egotean, bero iturri erreal batekin kontaktuan jartzeko zailtasunak agertzen dira, izan ere supereroaletasunak tenperaturarekiko menpekotasun handia baitu eta tenperatura handiegi batek zirkuituaren izaera supereroalea apur dezake. Hori dela eta proposamen honetan, egoera termiko baten baliokidea den egoera bat eraikitzea proposatzen da, horretarako kanpotik kontrolatutako parametro bat erabiliz. Horretarako, Ottoren ziklo baliokidean horrelako egoera kuantiko bat sortzea posible den aztertu behar da. Horrela bero iturriak akoplatzeko zailtasunak gainditzean, lan honetan proposatzen den sistemak kalibrazio moduan jokatu luke. Hau da, esperimentuan lortutako emaitzak lan honetan proposatutako sistemaren emaitzekin alderatzea posible izango da, esperimentuaren zehaztasun edo baliagarritasuna egiaztatuz.

3.4 atalean azaldu da, Ottoren ziklo baliokidean termalizazioa prozesuek prozesu adiabatikoen papera egiten dutela, orduan termalizazioetan egoera bakoitzaren probabilitatea konstante mantentzen da. Gainera termalizazioan qubitak desakoplatuta daude, hortaz qubit bakoitza bere aldetik azter daiteke. Hori dela eta, qubit bakar baten analisia egingo da. Suposa bedi qubit bakar baten egoera ondokoa dela:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle. \quad (4.1)$$

Aurreko kapituluan egin den moduan, lehen energi maila erreferentzizat hartuko da, horrela  $E_1 = 0$  eta  $E_2 = \Delta$  izango dira. Termalizazio prozesuak, prozesu adiabatikoaren papera hartzen duenez, egoeren probabilitateen arteko ratioa konstante mantentzen da. Egoera termiko artifiala sortu nahi denez ondorengo identifikazioa egiten da:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{|b|^2}{|a|^2} = e^{-\beta\Delta}. \quad (4.2)$$

Orduan qubitaren (4.4) egoera ondorengo eran berriatuz daiteke:

$$|\psi\rangle = a(|1\rangle + e^{-\beta\Delta/2}|2\rangle). \quad (4.3)$$

Egoera normalizatuta egon behar denez, erraz ikusten da  $a = \sqrt{Z}$  izan behar dela non  $Z$ -k partizio funtzioa adierazten duen. Orduan ikusi da, ziklo honetan posible dela tenperatura kanpoko parametro baten bidez ezartzea, kasu honetan, kanpoko parametroa  $\beta$  izanda. Azpimarratu behar da, sistema ez dela bero iturri erreal batekin kontaktuan jarriko eta ondorioz transmoien gauzatuko energi trukeak gertatuko direla eta ez bero transferentzia. Guzti hau dela eta

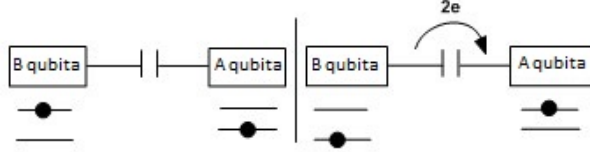
ezin da esan makina termiko bat aztertzen denik, hala ere Ottoren ziklo balio-kidea sistema honetan ulertzeko nahikoa da.

Orduan Ottoren ziklo balio-kidea ondorengo eran eraikiko da. Hasteko transmoiak desakoplatuta daude eta transmoi bakoitza tenperatura efektibo baten kokatzen da. Gogoratu behar da Ottoren ziklo balio-kidean onartu den moduan  $T_2 > T_1$  eta  $\Delta_B > \Delta_A$  hartzen direla. Horrela qubiten hasierako egoerak ondokoak izango dira:

$$|\psi(1)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{Z_1}}(|1\rangle_A + e^{-\beta_1 \Delta_A/2}|2\rangle_A), \quad (4.4)$$

$$|\psi(1)\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{Z_2}}(|1\rangle_B + e^{-\beta_2 \Delta_B/2}|2\rangle_B). \quad (4.5)$$

Behin bi transmoiak aurreko egoera puruetan prestatuta, qubiten arteko SWAP eragiketa gauzatzen da, zeinean transmoiak akoplatu eta beraien egoerak trukutzen dituzte. Eragiketa hau kondentsadore baten bidez gauza daiteke. Kondentsadoreak bi qubiten arteko akoplamendua ahalbideratzen duenena, transmoien arteko energi trukeak daude. Kondentsadorea guztiz deskargatzean transmoiak desakoplatu egiten dira eta gerta daiteke une horretan A transmoia egoera kitzikatuan aurkitzea eta B transmoia aldiz oinarritzko egoeran, horrela B transmoitik A transmoirako energia transferentzia bat egon da.



**11.irudia:** SWAP eragiketaren eskema. Ezkerreko irudiak kondentsadorea kargatu barik adierazten du. Eskuinekoak, aldiz, kondentsadorearen deskarga.

Eragiketa honen bidez transmoiek askatu eta xurgatzen dituzten beroak (3.51) eta (3.52) adierazpenak emandakoak dira. SWAP eragiketa bukatutzean A transmoia egoera kitzikatuan dago eta B transmoia oinarritzko egoeran:

Orduan SWAP osteko egoerak hauek dira:

$$|\psi(2)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{Z_2}}(|1\rangle_A + e^{-\beta_2 \Delta_B/2}|2\rangle_A), \quad (4.6)$$

$$|\psi(2)\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{Z_1}}(|1\rangle_B + e^{-\beta_1 \Delta_A/2}|2\rangle_B). \quad (4.7)$$

Transmoien egoera aldaketa dela eta energi transferentzia bat gertatzen da. Xurgatutako energiak ondokoak dira:

$$\delta E_A = \langle \psi(2) | \widehat{H}_A | \psi(2) \rangle_A - \langle \psi(1) | \widehat{H}_A | \psi(1) \rangle_A = \Delta_A \left( \frac{e^{-\beta_2 \Delta_B}}{Z_2} - \frac{e^{-\beta_1 \Delta_A}}{Z_1} \right), \quad (4.8)$$

$$\delta E_B = \langle \psi(2) | \widehat{H}_B | \psi(2) \rangle_B - \langle \psi(1) | \widehat{H}_B | \psi(1) \rangle_B = \Delta_B \left( \frac{e^{-\beta_1 \Delta_A}}{Z_1} - \frac{e^{-\beta_2 \Delta_B}}{Z_2} \right). \quad (4.9)$$

$\Delta_B > \Delta_A$  denez, prozesuan energia askatzen da, orduan SWAP eragiketarik atera daitekeen lana  $W = \delta E_B - \delta E_A$  da eta hortaz etekina (3.4) atalean lortutako berdina:

$$\eta = 1 - \frac{\Delta_A}{\Delta_B}. \quad (4.10)$$

Zikloak bukatutzat emateko, transmoiak hasierako egoerara eraman behar dira. Kondentsadorea jadanik deskargatuta dagoenez, transmoiak ez daude akoplatuta eta ondorioz bakoitza bere aldetik azter daiteke. Hala ere E eranskinean erakusten den bezala transmoiak hasierako egoeretara bueltatzeko erabiltzen diren transformazio unitarioak alderantzizkoak dira, hori dela eta hemen A transmoiari dagokiona baino ez da agertzen. Ondoko hau da:

$$\widehat{U} = \frac{1}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \begin{pmatrix} 1 + e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A + \beta_2 \Delta_B}{2}} & e^{-\frac{\beta_2 \Delta_B}{2}} - e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A}{2}} \\ e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A}{2}} - e^{-\frac{\beta_2 \Delta_B}{2}} & 1 + e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A + \beta_2 \Delta_B}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Orduan transformazio unitario hauen osteko egoerak ondokoak dira:

$$\widehat{U}|\psi(2)\rangle_A = |\psi(1)\rangle_A \quad \text{eta} \quad \widehat{U}^{-1}|\psi(2)\rangle_B = |\psi(1)\rangle_B. \quad (4.12)$$

Transformazio unitario hauek direla eta beste energi transferentzia bat dago:

$$\delta E_A = \langle \psi(1) | \widehat{H}_A | \psi(1) \rangle_A - \langle \psi(2) | \widehat{H}_A | \psi(2) \rangle_A = \Delta_A \left( \frac{e^{-\beta_1 \Delta_A}}{Z_1} - \frac{e^{-\beta_2 \Delta_B}}{Z_2} \right), \quad (4.13)$$

$$\delta E_B = \langle \psi(1) | \widehat{H}_B | \psi(1) \rangle_B - \langle \psi(2) | \widehat{H}_B | \psi(2) \rangle_B = \Delta_B \left( \frac{e^{-\beta_2 \Delta_B}}{Z_2} - \frac{e^{-\beta_1 \Delta_A}}{Z_1} \right). \quad (4.14)$$

Ikus daitekeenez kasu honetan transmoi bakoitza pairatutako energi trukea, SWAP eragiketaren aurkakoa da, ondorioz kasu honetan sistemak lan egin beharrean sistemari energia ematen zaio hasierako konfiguraziora bueltatzeko.

Kalibrazio sistema honetan bi energi truke ezberdin aztertu dira. Lehena Ottoren ziklo baliokidearen parekoa den prozesuarena. Izatez, ezin da esan ziklo hori Ottoren zikloa izan denik, bero iturrien falta dela eta. Hala ere, behin bero iturriak zirkuituan nola ezarri daitezkeen aztertuta, Ottoren zikloaren deskribapena gauzatzeko baliagarria da, zeinean tenperatura altuagoko transmoi batetik tenperatura baxuagoko transmoi batera bero transferentzia azter daitekeen SWAP eragiketaren bidez. Bigarrenean, aurkako bidea gauzatu da non sistemari kanpotik energia eman zaion hasierako konfigurazioa lortzeko. Ikusi da, energi trukeen ekarpen guztiak kontutan hartzen badira, hasierako egoerara bueltatzen dela, zikloa itxiz.

## Kapitulua 5

# Ondorioak

Lan honek hainbat helburu izan ditu. Lehen Jarzynski eta Crooksen lana ulertzea izan da, klasikoki zein kuantikoki. Horretarako, lehenengo adierazpenak klasikoki aztertu dira eta Jarzynskiren adierazpena Crooksen adierazpenetik era simple eta zuzen batean ondorioztatu daitekeela erakutsi da. Hala ere lanean, Jarzynskiren jatorrizko kalkulua ere aztertu da.

Jarraian, Crooksen adierazpena kuantikoki lortu da, horretarako prozesuan egindako lana kuantikoki kalkulatzeko bide bat aurkitu behar izan da, lan honetan TTEM (Two Times Energy Measurement) metodoa jarraitu da zeinean lana kalkulatzeko sistemaren energia bi aldiz neurtu behar den, prozesuaren hasieran eta bukaeran.

Bigarren helburua ziklo termokuantikoak aztertzea izan da, zehazki Carnot eta Ottoren zikloak. Horretarako lehenengo zikloak klasikoki aztertu dira, horrela ziklo kuantikoak eraikitzekeo klasikoak oinarritzat hartzeko. Termodinamika sistema kuantikoan aplikatzeko, termodinamikaren lehen printzipioa ikuspuntu kuantikotik aztertu da. Behin lehen printzipioa kuantikoki aztertuta, honek prozesu isokoro, adiabatiko eta isoterminoak kuantikoki definitzeko bidea eman du, beti ere aztergai den sistema qubita dela kontsideratuz.

Carnot eta Ottoren zikloak aztertu direnez, hauen arteko konparaketa ere egin da. Bi ziklo hauek infinitesimaliki aztertuz gero oso antzekoak izan daitezkeela ikusi da. Hala ere, espero zen moduan Carnoten zikloaren etekina beti Ottorena baino handiagoa dela ikusi da, izatez Carnoten zikloak etekin maximoen zikloa baita.

Ziklo termokuantikokin bukatzeko bi qubit bidezko Ottoren ziklo bat eraikitzea posible dela ikusi da. Ziklo honen azterketa interesgarria da, izan ere, azken urteotan qubiten funtzioa betetzen duten hainbat sistema aurkeztu dira eta hauen elkarrekintzatik lana lortzea posible dela ikusi da.

Azken kapituluaren helburua, aipaturiko Ottoren ziklo kuantiko baliakidez baliatuta makina termokuantiko baten proposamena izan da. Hautatutako qubit mota dela eta (transmoia), benetako makina termokuantiko bat aurkezteko zailtasunak agertu dira, hala ere baliokidea den prozedura baten bidez Ottoren

zikloa azaldu da bi transmoiren kasurako. Bidean SWAP eragiketa transmoien-gan nola gauzatzen den ere aztertu da. Horrela benetako makina termokuantikoarentzat kalibratze sistema bat sortu da. Benetako ziklo termokuantiko bat izateko bero iturriak akoplatzea eta egoera puruen ordez Boltzmannen banaketak emandako dentsitate matrizea aplikatzea baino ez da falta.

Bero iturrien akoplamendua gauzatuta Crooksen adierazpena aplikagarria izango litzateke egoera puru eta koherenteen ordez, egoera nahasiak agertuko liratekeelako. Horrela zikloan Crooksen adierazpena egiaztatu ahalko litzateke. Bukatzeko eta orain arte aipatu ez den arren, posible da Otto eta Carnoten etekinen arteko konparaketa bat egitea Crooksen adierazpenetik abiatuta, [13] artikuluan adierazten den bezala. Horrela lanean zehar aztertutako atal guztiak saiakera baten bidez aztertzea posible izango zen.



## Eranskina A

# Itzulgarritasun mikroskopikoa

Itzulgarritasun mikroskopikoaren kontzeptua garatu ahal izateko, mekanika kuantikoan ikasitako denbora alderanzketaren kontzeptutik abiatu behar da. Horretarako lehenengo denbora alderanzketa fisika klasikoaren ikuspuntutik aztertzen da. Sistema klasikoetan partikulen higidurari buruzko informazioa ematen duen ekuazioa Newtonen bigarren legeak emandakoa da.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \nabla V(\vec{r}) \quad (\text{A.1})$$

Ekuazio honek bi soluzio posible ditu, alde batetik ohikoa den  $\vec{r}(t)$  soluzioa eta bestetik,  $\vec{r}(-t)$  soluzioa. Sistemaren gainean indar barreiatzailerren bat badago posible da bi soluzioak desberdintzea baina aldiz, indar barreiatzailerrik ez badago ezinezkoa da bi soluzioetatik zeinek adierazten duen denbora aurreraka edo atzerako daraman auresatea. Azken kasu honetan sistema denbora alderanzketarekiko aldaezina dela esaten da. Hobeto ulertzeko, suposa bedi sistema  $A$  eta  $A'$  konfigurazioak erlazionatzen dituen ibilbidearen punturen batean dagoela pausagunean,  $P$  puntuan esaterako. Sistemari orain garatzen uzten zaio. Sistemaren garapena aztertuz, sistema hasierako zein bukaerako egoerarantz abiatzen dela auresateko gai ez bagara orduan sistema denbora alderanzketarekiko aldaezina da.

Denbora alderanzketaren kontzeptua sistema kuantikoetara hedatzeko, mekanika kuantikako oinarritzko ekuazioa, Schrodinger-en ekuazioa, aztertu behar da.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi \quad (\text{A.2})$$

Sistema kuantikoetarako ere bi soluzio posible daude,  $\psi(\vec{r}, -t)$  eta  $\psi^*(\vec{r}, -t)$ . Fisika klasikoan gertatzen den moduan, sistema denbora alderanzketarekiko inbariantea dela esango da bi uhin funtzioak desberdintzea ezinezkoa denean. Simetria honi,  $\hat{\Theta}$  eragilea dagokio. Behagarri bat, denbora alderanzketarekiko aldaezina bada,  $\hat{\Theta} \hat{A}^{-1} \hat{\Theta} = \hat{A}$  betetzen da eta aldiz, aldakorra bada  $\hat{\Theta} \hat{A}^{-1} \hat{\Theta} = -\hat{A}$ .

Jarraian magnitude batzuk sailkatzen dira denbora alderanzketarekiko aldaezintasunaren arabera:

**Aldaezinak:** Posizioa ( $\vec{r}$ ), azelerazioa ( $\vec{a}$ ), eremu elektrikoa ( $\vec{E}$ ), energia ( $E$ )...

**Aldakorrak:** Abiadura ( $\vec{v}$ ), momentu lineala ( $\vec{p}$ ), eremu magnetikoa ( $\vec{B}$ ), beroa ( $Q$ ), entropia ( $S$ )...

Behin denbora alderanzketa azalduta, itzulgarritasun mikroskopikoa enuntzia daiteke. Honen arabera sistema estatistikoa batean edozein prozesu bere denbora alderantzizkoarekin orekan egon behar da aldiuneoro. Horrela sistema bat  $P_1$  egoeratik  $P_2$  egoerara aldatzean magnitude jakin baten neurketan  $A$  balioa neurtu bada, sistema  $P_2$  egoeratik  $P_1$  egoerara aldatzean magnitude bera neurtzean  $\pm A$  balioa neurtu behar da;  $+A$  magnitude hori denbora alderanzketarekiko aldaezina bada eta  $-A$  aldakorra bada.

## Eranskina B

# Cooper bikoteak

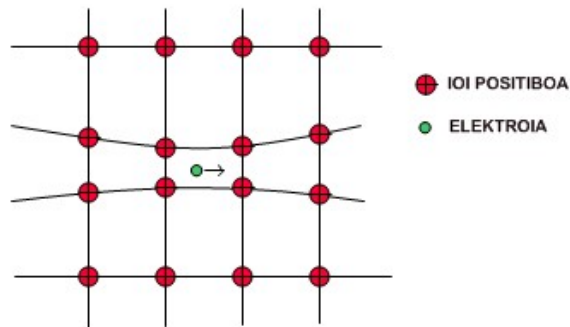
BCS (Bardeen, Cooper, Schielfer) teoriaren arabera, supereroaletasuna Cooper bikotean, elektroi bikotean, oinarritzen da. Hori dela eta, beharrezkoa da Cooper bikotearen sorrera ulertzea.

Elektroiak fermioi motako partikulak dira, hori dela eta Pauliren Bazterketa printzipioa bete behar dute, hau da, ezin dira egon zenbaki kuantiko berdinak dituzten bi elektroi. Ondorioz, energia maila bakoitzean bi elektroi egon daitezke, bata spin positiboarekin eta bestea spin negatiboarekin. Elektroi bat, energia maila jakin batean aurkitzeko probabilitate fermiren banaketak emandakoa da,

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \quad \text{non } E_F \text{ Fermiren energia den.} \quad (\text{B.1})$$

Sistema  $T = 0$  temperaturan dagoenean, elektroiak energia minimoko egoeretan kokatzen saiatzen dira, baina Pauliren bazterketa printzipioa bete behar denez, energia mailako bi elektroi baino ezin dira egon. Horrela energia mailak  $E_F$  energia mailaraino betetzen dira.  $E < E_F$  energiadun elektroiek Fermiren itsasoa eratzen dutela esan ohi da.

Supereroaletasunaren teoria mikroskopikoa ulertzeko, Fermiren itsasotik kanpoko bi elektroien arteko erakarpenezko elkarrekintza kontsideratu behar da. Horretarako elektroien gainean eragiten duten potentzial Coulombdarra gainditzeko duen potentzial erakarlea behar da. Potentzial erakarle honen jatorria metalaren ioi positiboek ekarpenean dago. Suposa bedi, metal bateko ioi sarea, printzipioz elektroi askerik ez dagoen bitartean ioiak posizio finkoetan mantentzen dira, orekan. Saretik elektroi aske bat igarotzean, Coulomben indarraren ondorioz ioi sarean perturbazioa bat agertzen da, ioiak oreka posizioetatik desplazatuz.



**13. irudia** Elektroi batek temperatura baxuko sare metalikoan sortutako deformazioa.

Sareko deformazio honen ondorioz, karga positibo handiagoko gune bat sortzen du sarean, hori dela eta, beste elektroi bat erakarria da gune horretara. Elektroien arteko elkarrekintza erakarle efektiboa Coulomben elkarrekintza aldaratzailea baino handiagoa bada, bi elektroiek Cooper bikote bat sortzen dute. Egoera honetan elektroien posizio erlatiboaren arabera, elektroien arteko elkarrekintza netoa aldaratzaile eta erakarle artean aldatuz doa, ondorioz elektroi bikoteak oszilatu daude. Hori dela eta Cooper bikoteetan elektroi bikoteak fonoiz lotuak daudela esaten da. Gainera Cooper bikotearen energia Fermiren energia baino txikiagoa dela ikus daiteke, izan ere Cooper bikotearen energia osoan elektroi bakoitzari dagokion energiaz gain erakarpenezko elkarrekintzari dagokion energia dago,  $E_{2e} < E_F$  lortuz.

# Eranskina C

## Josephson lotura

Josephsonek, elkarren ondoan kokatutako bi elektrodo supereroaleren artean Cooper bikoteen fluxu bat ager zitekeela aurresan zuen 1962an. Honela kontaktuan ez dauden baina elkarrengandik gertu dauden bi supereroaleren artean korrante elektrikoa ager daitekeela azaldu zuen.

Suposa bedi, isolatuta dauden bi supereroale daudela. Cooper bikote baten uhin funtzioak izango duen fasea ezberdina izango da supereroale bakoitzean. Bi supereroaleak elkarrengandik oso urrun baldin badaude, ez dago Cooper bikoteen fluxua gertatzeko aukerarik, uhin funtzioak gainditu beharreko potentziala handiegia baita. Bi supereroaleak hurbildu ahala, gainditu beharreko potentzialak txikitzeko joera du eta ondorioz Cooper bikoteak supereroale batetik bestera tunel efektuaren bidez igarotzeko probabilitatea handituz doa. Supereroalearen arteko distantzia behar bezain txikia bada, tunel efektua gertatzeko probabilitatea handia da eta orduan Cooper bikoteen fluxu bat aurki daiteke, hau da korrante elektrikoa, [15] [14],

$$I_s = I_c \sin \Delta\phi. \quad (\text{C.1})$$

Korrante kritikoak,  $I_c$ , loturak onar dezakeen korrante maximoa adierazten du eta  $\Delta\phi$  Cooper bikoteen uhin funtzioek, bi supereroaleetan duten faseen diferentzia den.

Josephon loturari potentzial bat aplikatzen bazaio,  $\Delta\phi$  denborarekin aldatzen dela ikus daiteke,

$$\frac{d(\Delta\phi)}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (\text{C.2})$$

(C.4) eta (C.5) adierazpenetatik abiatuz, bi elektrodoetan metatutako energia elektrikoa ondorioztatzen da eta bidez batez Josephon loturari dagokion energia karakteristikoa definitzen da,  $E_J$ :

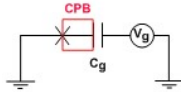
$$\int I_s V dt = \int I_s \left(\frac{\hbar}{2e}\right) d(\Delta\phi), \quad (\text{C.3})$$

$$E = -E_J \cos(\Delta\phi) + kte \quad \text{non} \quad E_J = \frac{\hbar I_c}{2e}. \quad (\text{C.4})$$

## Eranskina D

# Karga qubita eta transmoia

Karga qubita, CPB (Cooper Pair Box) irla super eroale baten oinarritzen da, hau da, cooper bikote ugari dituen supereroalea. CPB irlaren funtzioa zirkuitua cooper bikoteez hornitzea da. CPB-a Josephson lotura baten bidez konektatzen da inguruarekin eta kapazitate baten zehar igarotzen den potentzialaren bidez gidatzen da. Hau da, ezarritako potentzialaren arabera irlako Cooper bikoteek, Josephson lotura zeharkatzeko probabilitatea handiagoa izango da. Lotura igarotzen duten Cooper bikote kopuruaren arabera,  $n$ , sistema energia maila batean edo bestean egongo da [9],[12].

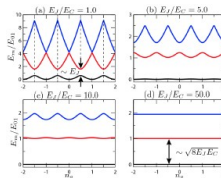


**12. irudia:** Karga qubitaren eskema.

Zirkuituari dagokion Hamiltondarra eraginkorra ondorengoa da:

$$\hat{H} = 4E_C \sum (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{E_J}{2} \sum (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|). \quad (\text{D.1})$$

(D.1) ekuazioan ikus daitekeenez, karga qubiten Hamiltondarra deskribatzeko nahikoa da,  $E_J = \frac{\hbar I_c}{2e}$  Josephson loturaren energia,  $E_C = \frac{e^2}{2C_g}$  elektroi bakarraren energia ekarpena eta  $n_g$  irlaren Cooper bikote kopurua. Parametro hauen arabera, energia mailen arteko aldea eta zarata aldatuz doa. Alde batetik  $n_g = m + \frac{1}{2}$  balioetarako energi mailen arteko aldea optimoa da, hori dela eta  $n_g$ -ren balio horiei "sweet point" deitzen zaie. Bestalde  $E_J \gg E_C$  esparruan sistemaren gaineko zarata arbuigarria da. Esparru honetan diseinatutako karga qubitei transmoi deritze.



**13. irudia:** Karga qubitaren energia mailen arteko aldea  $n_g$  eta  $E_J/E_C$  parametroen funtzioan. [16]

## Eranskina E

# Hamiltondarraren eraiketa

Eranskin honetan esperimentu proposamenean aplikatutako Hamiltondarraren eraiketa gauzatzen da. Horretarako qubitaren hasierako eta SWAP osteko egoerak gogoratu behar dira. Lehenengo A tranmoiaren kasua aztertuko da.

$$|\psi(1)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{Z_1}}(|1\rangle_A + e^{-\beta_1 \Delta_A/2} |2\rangle_A) \quad (\text{E.1})$$

$$|\psi(2)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{Z_2}}(|1\rangle_A + e^{-\beta_2 \Delta_B/2} |2\rangle_A) \quad (\text{E.2})$$

Hauetako dagozkien egoera perpendikularrak, ondorengoak dira.

$$|\psi(1)^\perp\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{Z_1}}(e^{-\beta_1 \Delta_A/2} |1\rangle_A - |2\rangle_A) \quad (\text{E.3})$$

$$|\psi(2)^\perp\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{Z_2}}(e^{-\beta_2 \Delta_B/2} |1\rangle_A - |2\rangle_A) \quad (\text{E.4})$$

Orduan  $U_A$  eragilea honela eraikitzen da.

$$\widehat{U}_A = |\psi(1)\rangle\langle\psi(2)|_A + |\psi(1)^\perp\rangle\langle\psi(2)^\perp|_A \quad (\text{E.5})$$

$$\widehat{U}_A = \frac{1}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \begin{pmatrix} 1 + e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A + \beta_2 \Delta_B}{2}} & e^{-\frac{\beta_2 \Delta_B}{2}} - e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A}{2}} \\ e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A}{2}} - e^{-\frac{\beta_2 \Delta_B}{2}} & 1 + e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A + \beta_2 \Delta_B}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

Prozedura berdina B tranmoiaren kasuan aplikatzen bada.

$$\widehat{U}_B = |\psi(1)\rangle\langle\psi(2)|_B + |\psi(1)^\perp\rangle\langle\psi(2)^\perp|_B \quad (\text{E.7})$$

$$\widehat{U}_B = \frac{1}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \begin{pmatrix} 1 + e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A + \beta_2 \Delta_B}{2}} & e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A}{2}} - e^{-\frac{\beta_2 \Delta_B}{2}} \\ e^{-\frac{\beta_2 \Delta_B}{2}} - e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A}{2}} & 1 + e^{-\frac{\beta_1 \Delta_A + \beta_2 \Delta_B}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.8})$$

Bi eragileen alderantzizkoak kalkulatu badira, bata bestearen alderantzizkoa dela ikusten da.

# Bibliografia

- [1] J. Millem and A. Xuereb, *New J. Phys.* **18** (2016)
- [2] Jarzynski, *Phys. Rev. Lett* **78** (1997)
- [3] G. E. Crooks, *Phys. Rev. E* **60** (1999)
- [4] M. Esposito, U. Harbola and S. Mukamel, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009)
- [5] M. Campisi, P. Hänggi and P. Talkner, *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011)
- [6] Herbert B. Callen, *Termodinamica* (Editorial AC, Madrid)
- [7] H.T. Quan, Yu-xi Liu, C.P. Sun and F. Nori, *Phys. Rev E* **76** (2007)
- [8] T.D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme Y. Nakamura, C. Monroe and J.I. OBrien, *Nature* **464** (2010)
- [9] J.Q. You and F. Nori, *Phy. Today* **42** (2005)
- [10] R.J Schoelkopf and S.M. Girvin, *Nature Vol* **451** (2008)
- [11] A. D'Arrigo and E. Paladino, *New Journal of Physics*, Vol **14** (2012)
- [12] A. A. Houck, Jens Koch, M. H. Devoret, S. M. Girvin and R. J. Schoelkopf, *Quantum information processing Volume* **8** (2009)
- [13] M. Campisi, J. Pekola and R. Fazio, *New Journal of Physics* **17** (2015)
- [14] Michae Tinkham, *Introduction to superconductivity* (Dover publications, Mineola, New York, 2004), second edition
- [15] A.C. Rose-Innes and E.H. Rhoderick, *Introduction to Superconductivity*,(Pergamon press,) second edition
- [16] J. Koch, Terri M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **76** (2007)