

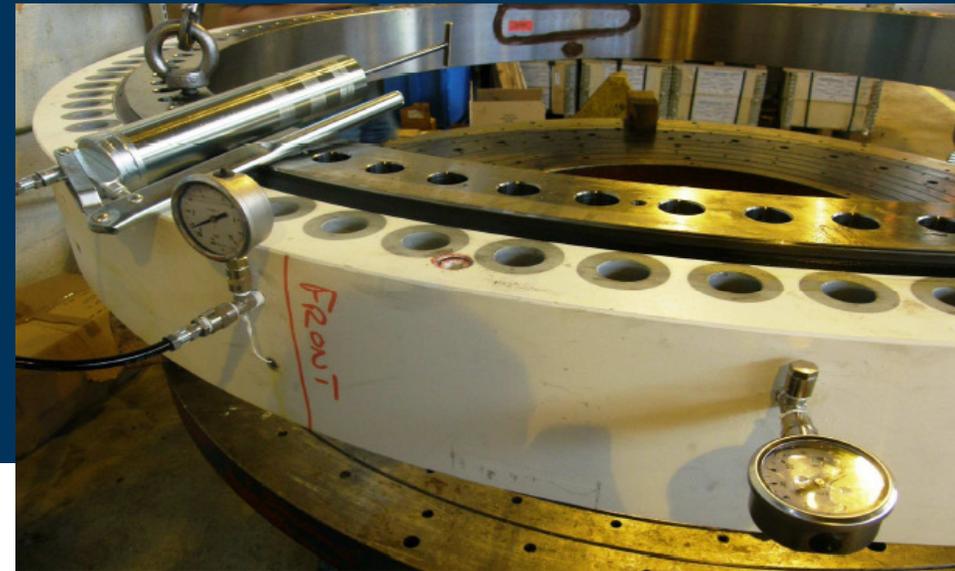
MODELOS PARA EL ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO  
EN SERVICIO DE RODAMIENTOS DE VUELCO DE  
CONTACTO ANGULAR DE 4 PUNTOS.

## MODELOS PARA EL ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO EN SERVICIO DE RODAMIENTOS DE VUELCO DE CONTACTO ANGULAR DE 4 PUNTOS.

### TESIS DOCTORAL

presentada para optar al título de **Doctor Ingeniero Industrial**

**Jon Plaza González**



**Jon Plaza González**

### DIRECTORES

Dr. Josu Aguirrebeitia Celaya

Dr. Mikel Abasolo Bilbao

Departamento de Ingeniería Mecánica / Ingeniaritza Mekanikoa Saila

*Bilbao, diciembre 2016*

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Departamento de Ingeniería Mecánica / Ingeniaritza Mekanikoa Saila

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea



Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Bilbao

# Modelos para el análisis del comportamiento en servicio de rodamientos de vuelco de contacto angular de 4 puntos

## Tesis doctoral

D. Jon Plaza González

*Directores de Tesis*

Prof. Dr. D. Josu Aguirrebeitia Celaya

Prof. Dr. D. Mikel Abasolo Bilbao

Bilbao, diciembre 2016





*A mis padres*

## *Agradecimientos*

Me extendería demasiado al nombrar a todas las personas que me han apoyado en esta tarea en la que me embarqué algunos años atrás. Indudablemente las primeras palabras y de mayor reconocimiento deben ir dirigidas a mis directores de Tesis Doctoral, Josu y Mikel. No sólo han resuelto las innumerables dudas que iban surgiendo sino que han sido una voz de ánimo continua.

Esta Tesis Doctoral no hubiera comenzado sin la ayuda de Javier Vázquez. Los primeros pasos dentro de la industria, en lo que a investigación tecnológica se refiere, fueron de su mano. Gracias por ayudarme a poner en orden todas aquellas semillas que iban brotando y por tu formación en uno de los campos más difíciles, la sensatez.

Quisiera agradecer muy especialmente al Experto en Respuesta Dinámica de turbomáquinas, Roberto. No sólo por sus ideas y puntos de vista que servían de incalculable ayuda, sino por ser ante todo un amigo.

Finalmente, todas las personas que han estado cerca, especialmente cuando las dificultades hacían que el trabajo se estancara y sobre todo el ánimo se redujera. Me habéis ido apoyando y me habéis impulsado a seguir en la consecución de esta Tesis Doctoral; y merecéis mi más sincero agradecimiento.

Una mención destacada deben tener Begoña y Roberto, mis padres.

*GRACIAS POR ESTAR AHÍ SIEMPRE.*



# Índice General

<b>Agradecimientos</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xxv</b>
<b>Abreviaturas</b>	<b>xxvii</b>
<b>Símbolos</b>	<b>xxix</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1-1</b>
1.1 Resumen . . . . .	1-1
1.2 Objetivos . . . . .	1-4
1.3 Organización de la Tesis Doctoral . . . . .	1-6
<b>2 Antecedentes</b>	<b>2-1</b>
2.1 Los rodamientos de vuelco. Definición. . . . .	2-1
2.2 Aplicaciones de los rodamientos de vuelco . . . . .	2-8
2.3 Tipologías de rodamientos de vuelco . . . . .	2-10
2.4 Criterios de selección de rodamientos de vuelco . . . . .	2-17
2.4.1 Capacidad estática . . . . .	2-19
2.4.1.1 Definición. . . . .	2-20
2.4.1.2 Criterio <i>Core crushing</i> para la capacidad estática . . . . .	2-24
2.4.2 Rigidez . . . . .	2-31
2.4.3 Par de fricción en vacío y bajo carga . . . . .	2-32
2.4.4 Otros criterios. Capacidad dinámica - fatiga, rangos de movimiento... . . . . .	2-34
2.5 Antecedentes directos de la Tesis Doctoral . . . . .	2-36
2.5.1 Conceptos básicos en cálculo de rodamientos . . . . .	2-37
2.5.1.1 Parámetros geométricos del rodamiento de bolas de cuatro puntos de contacto angular . . . . .	2-37
2.5.1.2 Planteamiento teórico del estado tensional en el contacto elemento rodante-pista. Aplicación de la Teoría de Hertz. . . . .	2-38
Caso de rodamiento de bolas de 4 puntos de contacto . . . . .	2-45
2.5.1.3 Distribución de carga en los elementos rodantes . . . . .	2-48
Distribución teórica de carga debida a esfuerzo axial $F_A$ . . . . .	2-49

	Distribución de carga teórica debida al momento de vuelco $M$ . Modelo de Stribeck . . . . .	2-50
	Distribución de carga teórica debida al esfuerzo radial $F_R$ . Modelo de distribución de carga debida a la combinación de esfuerzo axial, radial y de momento. Modelo de Jones [Jones, 1946] . . . . .	2-51 2-54
2.5.2	Modelo analítico básico para el cálculo de la capacidad de carga estática . . . . .	2-65
2.5.3	Modelo de Elementos Finitos para cálculos resistentes de rodamientos de vuelco. . . . .	2-76
2.5.4	Modelos para el cálculo del par de fricción . . . . .	2-85
2.5.4.1	Modelos simplificados . . . . .	2-86
	Distribución de carga debida a esfuerzo axial $F_A$ . . . . .	2-87
	Distribución de carga debida al momento de vuelco $M$ . . . . .	2-87
	Distribución de carga debida al esfuerzo radial $F_R$ . . . . .	2-88
2.5.4.2	Comparativa de coeficientes de las componentes de carga. . . . .	2-89
2.5.4.3	Modelo de Todd. . . . .	2-90
	Componente de Microdeslizamiento . . . . .	2-91
	Componente de Histéresis . . . . .	2-92
	Componente de Pivotamiento . . . . .	2-92
2.5.4.4	Modelo de Hamrock y Leblanc. Particularización de Joshi . . . . .	2-94
<b>3</b>	<b>Modelo analítico para el cálculo de la capacidad estática generalizada</b>	<b>3-1</b>
3.1	Desarrollo del modelo analítico con ángulo variable. . . . .	3-2
3.1.1	Formulación del modelo analítico con ángulo variable . . . . .	3-3
3.1.2	Resultados del modelo analítico con ángulo variable . . . . .	3-13
3.2	Desarrollo del modelo analítico con ángulo variable y precarga. . . . .	3-21
3.2.1	Formulación del modelo analítico con ángulo variable y precarga . . . . .	3-22
3.2.2	Resultados del modelo analítico con ángulo variable y precarga . . . . .	3-28
3.3	Desarrollo de una nueva metodología de selección en base a la capacidad estática . . . . .	3-30
3.3.1	Estudio del fallo en el contacto bola pista para la nueva metodología de selección de rodamientos. . . . .	3-34
3.3.2	Estudio del fallo en unión atornillada para la nueva metodología de selección de rodamientos . . . . .	3-36
3.3.3	Ejemplo particular para la nueva metodología de selección de rodamientos. . . . .	3-42

<b>4</b>	<b>Modelos de elementos finitos para la simulación del comportamiento resistente</b>	<b>4-1</b>
4.1	Modelo de elementos finitos básico . . . . .	4-2
4.1.1	Resultados de los modelos de reparto de cargas . . . . .	4-5
4.1.2	Influencia de la precarga en la rigidez del rodamiento . . . . .	4-10
4.2	Modelo de Elementos Finitos mediante la técnica de superelementos . . .	4-16
4.2.1	Fundamentos de la técnica de Superelementos . . . . .	4-17
4.2.2	Modelo de Elementos Finitos de un aerogenerador usando la técnica de Superelementos . . . . .	4-21
<b>5</b>	<b>Modelos preliminares para la estimación del momento de fricción</b>	<b>5-1</b>
5.1	Planteamiento de las ecuaciones de gobierno del elemento rodante. . . . .	5-3
5.1.1	Pseudodeslizamientos . . . . .	5-12
5.1.2	Fuerzas Locales . . . . .	5-21
5.2	Modelo de Elementos Finitos para el cálculo del momento de fricción . . .	5-23
5.2.1	Modelo Geométrico de una bola. . . . .	5-24
5.2.2	Modelo de Elementos Finitos de una bola. . . . .	5-24
5.2.3	Resultados preliminares del modelo de fricción de Elementos Finitos . . . . .	5-27
<b>6</b>	<b>Conclusiones, líneas futuras y publicaciones derivadas de la Tesis</b>	<b>6-1</b>
6.1	Conclusiones . . . . .	6-1
6.2	Líneas futuras de la Investigación . . . . .	6-3
6.3	Publicaciones derivadas de la Tesis Doctoral . . . . .	6-4
6.3.1	Publicaciones JCR . . . . .	6-4
6.3.2	Congresos . . . . .	6-5



# Índice de Figuras

1.1	Modelos, herramientas de cálculo y validación desarrollados en la Tesis Doctoral . . . . .	1-4
2.1	Esquema de las partes principales de los rodamientos de vuelco . . . . .	2-3
2.2	Diferentes configuraciones para mecanismos de guiado . . . . .	2-4
2.3	Lubricación en rodamientos de vuelco . . . . .	2-5
2.4	Separadores de elementos rodantes . . . . .	2-5
2.5	Topología de rodamiento de contacto angular de 4 puntos de contacto [Aguirrebeitia et al., 2010a] . . . . .	2-7
2.6	Aplicaciones de rodamientos de vuelco . . . . .	2-12
2.7	Tipos de elementos rodantes [Harris and Kotzalas, 2007a] . . . . .	2-13
2.8	Cotas comunes [Aguirrebeitia et al., 2012b] . . . . .	2-14
2.9	Tipos de Rodamientos de bolas [Rothe-Erde, 2009] . . . . .	2-15
2.10	Tipos de Rodamientos de rodillos . . . . .	2-16
2.11	Tipos de Rodamientos con diseños especiales . . . . .	2-18
2.12	Expresión teórica y simplificada de la relación entre carga axial y radial, frente a la capacidad estática equivalente [ISO/TR10657, 1991] . . . . .	2-23
2.13	Superficie de aceptación de la capacidad estática generalizada [Aguirrebeitia et al., 2010c] . . . . .	2-24
2.14	Modelo de Elementos Finitos general y detalle de espesor de superficie templada[Lai et al., 2009] . . . . .	2-26
2.15	Esquema de modelización de la transición entre la sección templada y el núcleo sin templar [Lai et al., 2009] . . . . .	2-27
2.16	Tres tipos de grieta observada en el ensayo de fatiga por contacto [Lai et al., 2009] . . . . .	2-28
2.17	Presión de contacto para una indentación permanente de $10^{-4}d_w$ en función del espesor templado en los anillos para dos materiales diferentes con diferentes espesores de endurecimiento [Lai et al., 2009] . . . . .	2-29
2.18	Presión de contacto admisible para fallo estático por aparición de grieta subsuperficial en función del espesor templado en los anillos para dos materiales diferentes con diferentes espesores de endurecimiento [Lai et al., 2009] . . . . .	2-30
2.19	[Lai et al., 2009] . . . . .	2-30
2.20	Placa rigidizadora para un rodamiento de pala <i>Fuente: <a href="http://www.gamesacorp.com/es/">http://www.gamesacorp.com/es/</a></i> . . . . .	2-36
2.21	Descripción de los parámetros geométricos del rodamiento de [Aguirrebeitia et al., 2012c] . . . . .	2-38

2.22	Distancias axial y radial entre los centros de las pistas . . . . .	2-39
2.23	Radios de curvatura en contacto hertziano [Harris and Kotzalas, 2007a] . . . . .	2-41
2.24	Distribución de presiones elipsoidal en el área de contacto . . . . .	2-43
2.25	Radios de curvatura para un rodamiento de bolas de cuatro puntos de contacto, [Harris et al., 2009] . . . . .	2-46
2.26	Distribución teórica de carga entre las Z debida a esfuerzo axial ([Rollix, 2007]) . . . . .	2-49
2.27	Distribución teórica de carga debido al momento de vuelco ([Rollix, 2007]) . . . . .	2-50
2.28	Distribución teórica de carga debido al esfuerzo radial ([Rollix, 2007]) . . . . .	2-52
2.29	Modelo de interferencia geométrica para carga axial tomado de [Harris and Kotzalas, 2007a] . . . . .	2-56
2.30	Deflexión radial en rodamiento sometido a esfuerzo radial y axial [Harris and Kotzalas, 2007a] . . . . .	2-57
2.31	Carga axial descentrada, equivalente a momento de vuelco [Harris and Kotzalas, 2007a] . . . . .	2-60
2.32	Desplazamientos relativos entre los anillos para el modelo de Jones de la ecuación 2.68. [Harris and Kotzalas, 2007b] . . . . .	2-63
2.33	Modelo de interferencia geométrica en Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] . . . . .	2-66
2.34	Nube de puntos que describe la superficie de aceptación [Aguirrebeitia et al., 2010b] . . . . .	2-73
2.35	Curvas de aceptación en el plano $F_A - F_R$ para varios valores de momento de vuelco normalizado [Aguirrebeitia et al., 2010b] . . . . .	2-74
2.36	Buje de un aerogenerador ( <i>Fuente: <a href="http://www.structuralia.com/">http://www.structuralia.com/</a></i> ) . . . . .	2-75
2.37	Tres sectores para el mallado paramétrico del rodamiento [Aguirrebeitia et al., 2012b] . . . . .	2-78
2.38	Descripción y rango de valores de los parámetros geométricos con la nomenclatura adoptada por Aguirrebeitia en [Aguirrebeitia et al., 2012b] . . . . .	2-80
2.39	Representación esquemática del modelo de Daidie [Daidié et al., 2008] . . . . .	2-81
2.40	Condiciones de contorno y modelización de las uniones atornilladas en [Aguirrebeitia et al., 2012b] . . . . .	2-82
2.41	Comparativa de modelo analítico [Aguirrebeitia et al., 2010b] frente a modelo de Elementos Finitos [Aguirrebeitia et al., 2012b] . . . . .	2-84
2.42	Resultados publicados por Gamesa Eólica en [Plaza et al., 2008] . . . . .	2-93
2.43	Sistema de referencia global del rodamiento utilizado por Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] y Joshi [Joshi et al., 2015] . . . . .	2-95
2.44	Sistema de referencia local del rodamiento utilizado por Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] y Joshi [Joshi et al., 2015] . . . . .	2-96
2.45	Cinemática interna utilizado por Hamrock [Hamrock et al., 1972], Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] y Joshi [Joshi et al., 2015] . . . . .	2-99
2.46	Fuerzas y momentos locales actuando sobre una de las bolas [Hamrock et al., 1972] . . . . .	2-103

2.47	Esquema del ensayo experimental llevado a cabo por Joshi en [Joshi et al., 2015]	2-106
3.1	Definición del Modelo de Interferencia Geométrica en [Aguirrebeitia et al., 2012c]	3-4
3.2	Sistema de referencia en coordenadas esféricas	3-8
3.3	Vista frontal y de perfil del volumen de aceptación, en [Vallejo et al., 2010]	3-9
3.4	Vista frontal y de perfil del volumen de aceptación, en [Aguirrebeitia et al., 2012b]	3-12
3.5	Construcción gráfica para la obtención de $\alpha_{lim}$ [Aguirrebeitia et al., 2013]	3-12
3.6	Comparativa de la superficie de aceptación para el enfoque de $\alpha$ constante y $\alpha$ variable	3-15
3.7	Resultados del modelo analítico con ángulo de contacto variable, para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750kw	3-17
3.8	Resultados del modelo analítico con ángulo de contacto variable, para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750kw, con conformidades $C=\{1.05, 1.06, 1.07\}$ .	3-19
3.9	Resultados del modelo analítico con ángulo de contacto variable, para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750kw, con ángulos de contacto iniciales $\alpha_0 = \{40, 45, 50\}$ .	3-20
3.10	Interferencia inicial en el contacto bola-pista	3-21
3.11	Modelo de interferencia geométrica incluyendo la precarga [Aguirrebeitia et al., 2013]	3-22
3.12	Variación de los centros de curvatura incluyendo el efecto de la precarga [Aguirrebeitia et al., 2013]	3-27
3.13	Superficie de aceptación para $p = 0.0$ , $p = 0.1$ , y $p = 0.2$ [Aguirrebeitia et al., 2013]	3-28
3.14	Comparativa de diferentes precargas con conformidad 1.07 y ángulo de contacto inicial $45^\circ$ , para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750 kw [Aguirrebeitia et al., 2013]	3-29
3.15	Parámetros geométricos fundamentales de la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011]	3-32
3.16	Curvas de selección para un rodamiento de la serie POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011]	3-33
3.17	Isolíneas de Fuerza radial de la superficie de aceptación para un rodamiento de vuelco [Abasolo et al., 2015]	3-34
3.18	Curvas de capacidad de carga para el fallo por presión de contacto bola-pista en rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto [Abasolo et al., 2015]	3-35
3.19	Fuerza axial actuante [Abasolo et al., 2015]	3-38
3.20	Distribución de carga en los tornillos bajo un momento de vuelco puro $M$ [Abasolo et al., 2015]	3-39

3.21	Curva de capacidad de carga para el fallo en la unión atornillada en rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto [Abasolo et al., 2015]	3-40
3.22	Nuevas curvas de selección para la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011]	3-43
3.23	Verificación de la validez del rodamiento 5 de la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011], considerando el fallo en el contacto bola-pista, de acuerdo a las curvas de selección de la Figura 3.22	3-45
3.24	Verificación de la validez del rodamiento 5 de la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011], considerando el fallo de la unión atornillada, de acuerdo a las curvas de selección de la Figura 3.22	3-46
4.1	Modelización de la bola en Elementos Finitos de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2012b]	4-4
4.2	Esquema de la modelización de la bola en Elementos Finitos con precarga [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-5
4.3	Configuración en estado de precarga del modelo adaptado (líneas finas: inicial; líneas gruesas:deformada) [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-6
4.4	Relación $\delta_p - x$ de la modelización de la Figura 4.2 [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-7
4.5	Capacidad de carga radial para diferentes precargas para el rodamiento grande. Comparativa modelo analítico y modelo de Elementos Finitos [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-10
4.6	Desplazamiento axial para diferentes niveles de fuerza axial a tres grados de precargas [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-12
4.7	Desplazamiento radial para diferentes niveles de fuerza radial a tres grados de precargas [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-13
4.8	Desplazamiento angular para diferentes niveles de momento de vuelco a tres grados de precargas [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-14
4.9	Capacidad de carga radial para diferentes precargas. Comparativa modelo analítico y modelo de Elementos Finitos [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-15
4.10	Izquierda, modelo de Elementos Finitos de un ala de avión original; derecha modelo de Elementos Finitos de ese ala mediante Superelemento [Plaza et al., 2015]	4-18
4.11	Ejemplo para comparar el coste computacional de dos modelos de Elementos Finitos completos frente a la modelización por superelementos [Plaza et al., 2015]	4-19
4.12	Elementos no nulos en la matriz de rigidez de los modelos de la Figura 4.11 [Plaza et al., 2015]	4-20
4.13	Componentes de un aerogenerador, sistema de orientación de pala ( <i>pitch</i> ) y de góndola ( <i>yaw</i> ) del aerogenerador ECO80 de ALSTOM	4-22
4.14	Modelo de Elementos Finitos de conjunto pala-rodamiento-buje [Plaza et al., 2015]	4-24

4.15	Sección de detalle del modelo de Elementos Finitos de la Figura 4.14, extraída de [Plaza et al., 2015]	4-24
4.16	Parámetros geométricos del rodamiento de vuelco de cuatro puntos de contacto en el modelo 4.14 [Plaza et al., 2015]	4-25
4.17	Modelo de Elementos Finitos del rodamiento de la Figura 4.16: izquierda modelo completo; derecha modelo con superelementos [Plaza et al., 2015]	4-26
4.18	Distribución de carga obtenida en el modelo de Elementos Finitos de la Figura 4.17 [Plaza et al., 2015]	4-27
4.19	Modelo de Elementos Finitos basado en superelementos para el conjunto pala-rodamiento-buje [Plaza et al., 2015]	4-28
4.20	Análisis de los contactos del anillo interior-pala y del anillo exterior-buje [Plaza et al., 2015]	4-30
4.21	Deformada de las modelizaciones del conjunto pala-rodamiento-buje [Plaza et al., 2015]	4-31
4.22	Distribución de carga en las bolas [Plaza et al., 2015]	4-31
4.23	Representación en diagrama polar de la distribución de carga en las bolas para los resultados de las Figuras 4.22 [Plaza et al., 2015]	4-32
5.1	Sistema de referencia para las velocidades relativas en el área de contacto de acuerdo a la teoría clásica de contactos	5-6
5.2	Progresión relativa de un punto en la dirección de avance del movimiento	5-7
5.3	Cálculo de la tensión en el algoritmo FASTSIM	5-10
5.4	Zonas de adhesión y deslizamiento	5-11
5.5	Coeficientes de pseudodeslizamiento de Kalker [Kalker, 1982]	5-12
5.6	Diagrama para el proceso de cálculo del par de fricción incorporando el algoritmo de Kalker FASTSIM para resolver el contacto bola-pista en rodadura	5-13
5.7	Sistema de referencia global del rodamiento y definición de los cuadrantes correspondientes a cada contacto	5-14
5.8	Descomposición de velocidades para el contacto 1	5-15
5.9	Descomposición de velocidades para el contacto 2	5-17
5.10	Descomposición de velocidades para el contacto 3	5-19
5.11	Descomposición de velocidades para el contacto 4	5-20
5.12	Parámetros geométricos de las Tablas 5.1 y 5.2, de manera esquemática [Aguirrebeitia et al., 2015]	5-25
5.13	Desplazamiento angular del anillo interior [Aguirrebeitia et al., 2015]	5-27
5.14	Zonas de adhesión para el cuadrante 1 (izquierda) y el cuadrante 3 (derecha) para el primer caso de la Tabla 5.4	5-29
5.15	Distribución de presiones y tensiones tangenciales para el primer caso de la Tabla 5.4	5-29
5.16	Direcciones y sentidos de las tensiones tangenciales en los contactos activos para el primer caso de la Tabla 5.4	5-30

---

5.17	Distribución de presiones y tensiones tangenciales en los contactos para el segundo caso de la Tabla 5.4 . . . . .	5-31
5.18	Zonas de adhesión y deslizamiento para el segundo caso de la Tabla 5.4. De izquierda a derecha: cuadrante 2, 1, 3 y 4. . . . .	5-31
5.19	Dirección y sentido de los vectores de tensiones tangenciales para el segundo caso de la Tabla 5.4. . . . .	5-32
5.20	Evolución del momento de fricción para ambos casos de la Tabla 5.4 [Aguirrebeitia et al., 2015] . . . . .	5-33

# Índice de Tablas

2.1	Los cinco casos básicos diferentes de interferencia geométrica en Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b]	2-70
2.2	Variación de la capacidad en función del diámetro medio. Teórico Vs FEM	2-85
2.3	Variación de la capacidad en función del diámetro medio. Teórico Vs FEM	2-85
2.4	Tabla comparativa de los diferentes coeficientes utilizados por algunos fabricantes extraídos de sus propios catálogos	2-90
3.1	Variación de la capacidad axial máxima para el Modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] frente al modelo con ángulo variable	3-14
3.2	Diferentes expresiones de la carga axial equivalente de acuerdo a varios fabricantes	3-32
4.1	Parámetros geométricos de los rodamientos analizados [Aguirrebeitia et al., 2013]	4-7
4.2	Capacidades de carga para los rodamientos de la Tabla 4.1 en ausencia de precarga	4-8
4.3	Desplazamientos en las 3 direcciones y total del punto de aplicación de carga para el modelo de la Figura 4.21	4-30
5.1	Parámetros básicos para la definición geométrica del modelo de Elementos Finitos de una bola	5-24
5.2	Parámetros derivados para la definición geométrica del modelo de Elementos Finitos de una bola	5-25
5.3	Tamaño de elementos para las diferentes zonas de mallado [Aguirrebeitia et al., 2015]	5-26
5.4	Parámetros para la definición geométrica del modelo de Elementos Finitos de una bola para el cálculo del momento de fricción	5-28
5.5	Resultados globales de los casos de la tabla 5.4	5-28



# Abreviaturas

**IEC** International **E**lectrotechnial **C**ommission

**ISO** International **O**rganization for **S**tandardization

**NREL** National **R**enewable **E**nergy **L**aboratory



# Símbolos

Símbolo	Descripción	Unidades
$A$	Distancia entre los centros de curvatura de cada pista	[mm]
$B$	$f_i + f_o - 1$ , curvatura total	[-]
$a$	semieje mayor de la elipse	[mm]
$b$	semieje menor de la elipse	[mm]
$C$	Conformidad $2r/d_w$	
$C_{0a}$	Capacidad estática de carga axial pura según la norma ISO 76	[N]
$d_{pw}$	diámetro medio del rodamiento	[mm]
$d_w$	diámetro de la bola	[mm]
$E$	Módulo de elasticidad	[MPa]
$F_A$	Esfuerzo aplicado al rodamiento en dirección axial	[N]
$F_R$	Esfuerzo aplicado al rodamiento en dirección radial	[N]
$f$	Relación entre el radio de la pista y el diámetro de la bola $r/d_w$	
$i$	Número de filas de los elementos rodantes	
$J_a$	Integral de carga Axial	
$J_r$	Integral de carga Radial	
$J_m$	Integral de Momento de vuelco	
$M$	Momento de vuelco aplicado al rodamiento	[N·m]
$\nu$	coeficiente de Poisson	
$Q$	Carga normal en el contacto elemento rodante-pista	[N]
$r$	Radio de curvatura de la pista	[mm]
$s$	ratio de osculación $1/C$	
$Z$	Número de bolas del rodamiento	

$\psi$	ángulo azimutal de los centros de las bolas	[rad]
$\alpha_0$	ángulo inicial de contacto entre la bola y la pista	[rad]
$\alpha$	ángulo efectivo de contacto entre la bola y la pista	[rad]
$\Delta_a$	distancia axial entre los centros de las pistas	[mm]
$\Delta_r$	distancia radial entre los centros de las pistas	[mm]
$\delta_a$	desplazamiento axial entre anillos	[mm]
$\delta_r$	desplazamiento radial entre anillos	[mm]
$\delta_\theta$	desplazamiento angular entre anillos debido al vuelco	[mm]
$\mu$	coeficiente de fricción en deslizamiento	
$\omega$	frecuencia angular	[rads <sup>-1</sup> ]
$\mathcal{K}$	integral elíptica completa de primera especie	
$\mathcal{E}$	integral elíptica completa de segunda especie	
$Z$	Número de bolas	

### Subíndices

$a$	Dirección Axial
$i$	Pista interior
$n$	Dirección colineal con las cargas normales
$o$	Pista exterior
$r$	Dirección Radial
$\theta$	Dirección de giro de vuelco

# 1

## Introducción

### 1.1. Resumen

Los rodamientos de vuelco son rodamientos de grandes dimensiones utilizados como elementos de orientación para aplicaciones sometidas a altas cargas, cuya velocidad de rotación es lenta y operan la mayoría de veces de manera oscilatoria. Otra de las características destacables es su gran diámetro nominal con geometrías de anillos muy esbeltas, siendo considerablemente más flexibles que los rodamientos convencionales. Para incrementar su rigidez y precisión, en la mayoría de las aplicaciones se introduce una precarga en el rodamiento; esto se consigue realizando el montaje del rodamiento con interferencia entre los elementos rodantes y la pista. De todas las configuraciones de anillos y elementos rodantes existentes, en esta Tesis Doctoral se van a tratar únicamente los rodamientos de vuelco de contacto angular de cuatro puntos de contacto.

Es en el sector eólico donde en los últimos años se han dedicado más esfuerzos al desarrollo de herramientas que permitan analizar estos rodamientos de vuelco. Es por ello que esta Tesis Doctoral tiene como antecedentes directos estas metodologías desarrolladas

para dimensionamiento y cálculo de los sistemas de orientación de aerogeneradores. Aún así, las herramientas de cálculo existentes no incorporan ciertos parámetros relevantes como la precarga o presentan métodos de resolución computacionalmente muy costosos.

El criterio comúnmente utilizado para evaluar la capacidad estática de un rodamiento de bolas proviene de la norma ISO 76 [ISO76, 2006] en la que se establece que el fallo estático del rodamiento se produce si en alguno de sus contactos bola-pista se alcanza la presión de 4200 MPa, calculada ésta de manera elástica. Existen modelos analíticos que pueden ser usados para el cálculo de la capacidad estática del rodamiento aunque aplican un enfoque que se denomina directo. Este enfoque directo consiste en resolver las ecuaciones de equilibrio para cada combinación de esfuerzos, dando como resultado las interferencias existentes en cada contacto. Estas interferencias son comparadas con la interferencia límite que provoca la presión de contacto máxima citada inicialmente. Si esta interferencia límite no es alcanzada, o se ve superada con la combinación de esfuerzos que se ha impuesto inicialmente, habrá que probar otra combinación de esfuerzos hasta que se obtenga en alguno de los contactos el fallo estático. De esta manera iterativa, se irían obteniendo las distintas combinaciones de esfuerzos que originan el fallo estático mediante el método directo, lo cual es muy poco eficiente. Si en lugar de presentar el cálculo directo, se aplica el cálculo de manera inversa se tiene que, partiendo de las interferencias límite que provocan el fallo estático, se consiguen obtener de manera inmediata las combinaciones de esfuerzos que corresponden a éstas. Esta metodología inversa proporciona una herramienta muy útil y rápida a la hora de evaluar si un rodamiento es capaz de soportar una combinación de cargas determinada. En esta Tesis Doctoral se utiliza este enfoque inverso partiendo de los trabajos realizados por Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b]. Este modelo ha sido desarrollado para que incorpore el efecto del ángulo de contacto variable y de la precarga. Aunque en algunos modelos de enfoque directo también se incluya el parámetro de ángulo de contacto como variable, este enfoque directo es mucho menos eficiente computacionalmente que el método inverso para el cálculo de la capacidad estática del rodamiento. Especialmente

destacable es el hecho de incluir la precarga en los métodos de cálculo, ya que este parámetro no se incluía en los métodos de cálculo de rodamientos de vuelco.

Como aplicación industrial directa del modelo analítico desarrollado se ha realizado una metodología de selección de rodamientos en base a la capacidad estática. Esta metodología puede ser incluida por los fabricantes en sus catálogos, aportando a los diseñadores de sistemas de actuación una herramienta muy útil que permite obtener de manera efectiva si un rodamiento es válido para los esfuerzos estáticos externos a los que se va a ver expuesto.

Además, se ha trabajado en un modelo por Elementos Finitos con ángulo de contacto variable y posibilidad de introducir una precarga para validar el modelo analítico, que evalúe también el efecto de la flexibilidad de los anillos y de las estructuras unidas a los mismos, así como la influencia de los tornillos que los unen. Estas dos últimas características son exclusivas del modelo de Elementos Finitos y el modelo analítico no permite evaluar la influencia de la rigidez de los anillos y del apriete de la unión atornillada. En esta línea, se ha completado este estudio proponiendo también un modelo mediante la técnica de Super elementos que optimice el coste computacional sin penalizar la precisión, y permita a los diseñadores realizar una modelización del sistema de actuación completo para evaluar reparto de esfuerzos y flexibilidad del conjunto.

Así mismo, se ha trabajado de manera preliminar en modelos analíticos para la estimación del par de fricción con inclusión de las zonas de stick-slip en lugar de considerar que todo el área de contacto se encuentra deslizando. Esta asunción de considerar todo el área de contacto en estado de deslizamiento es una de las hipótesis simplificadoras que se establecen en los actuales modelos de cálculo del par de fricción en los rodamientos. Si bien, para el valor de par de fricción global no representa un error excesivo al menos en determinados casos de carga, esta simplificación desvirtúa la manera en la que se comporta el contacto bola-pista, por lo que se propone una nueva forma de abordar este problema incluyendo métodos de cálculo consolidados para analizar adecuadamente la cinemática del contacto entre ambos cuerpos.

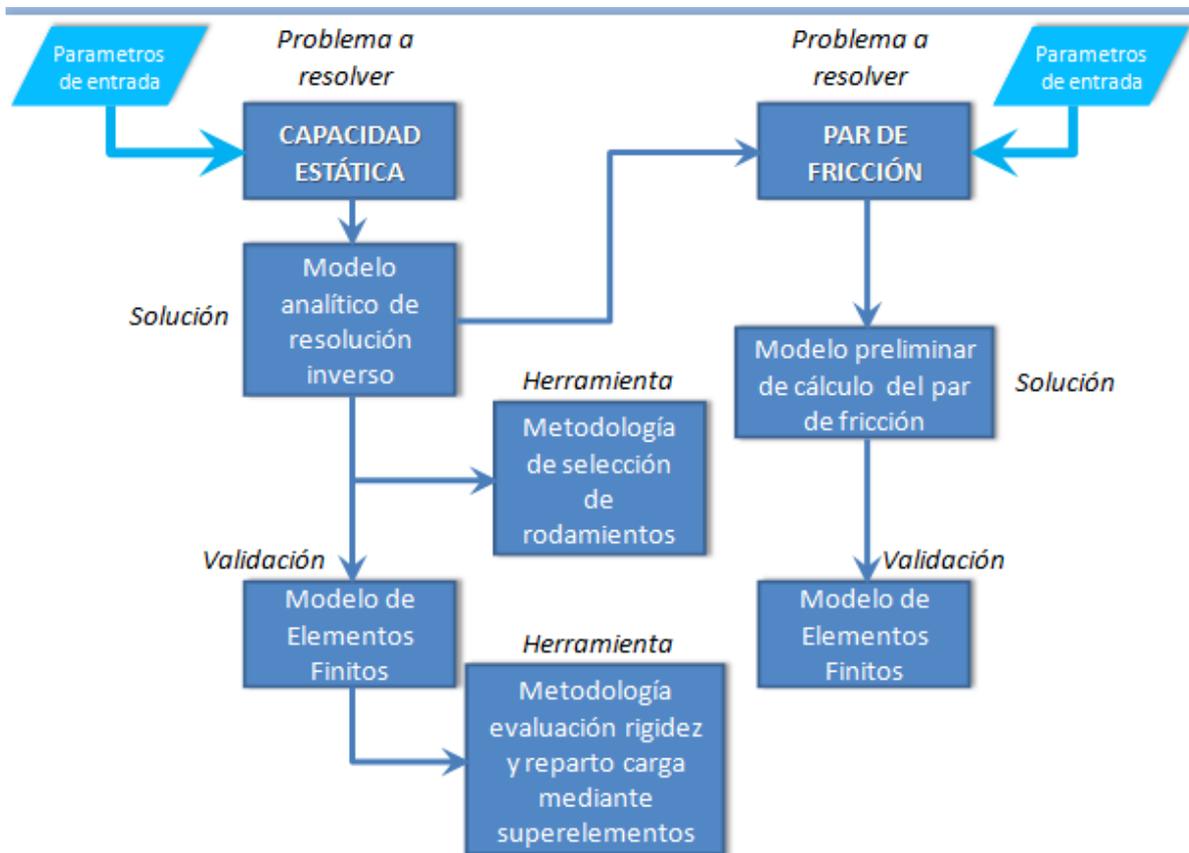


Figura 1.1: Modelos, herramientas de cálculo y validación desarrollados en la Tesis Doctoral

Paralelamente, del mismo modo que para el caso de la metodología para el cálculo de la capacidad estática, se ha desarrollado un modelo de Elementos Finitos con el objetivo de validar esta modelización analítica del momento de fricción.

En el diagrama de la Figura 1.1 se muestran de forma resumida los modelos desarrollados junto con su validación, y las herramientas de cálculo derivadas de los mismos.

## 1.2. Objetivos

Los objetivos perseguidos en esta Tesis Doctoral son los expuestos a continuación, formulados de manera secuencial.

**Desarrollo de un modelo de cálculo de la capacidad estática que contemple los parámetros geométricos principales así como la variación del ángulo de contacto y la precarga de las bolas computacionalmente eficiente.** Quedan fuera todas las geometrías y configuraciones que no se ajusten a rodamientos de bolas con cuatro puntos de contacto angular. Es decir, el objetivo principal de la Tesis Doctoral es el de abordar una modelización avanzada de la capacidad de carga de rodamientos de vuelco en función de parámetros como su diámetro, el diámetro de los elementos rodantes, la conformidad elemento rodante y pista, el ángulo de contacto y la precarga, a fin de utilizarla para seleccionar y/o diseñar rodamientos para aplicaciones específicas.

**Se pretende, así mismo, que sea un modelo con carácter general que no sólo estime la capacidad estática del rodamiento sino que permita también analizar el reparto de carga de las bolas dentro del mismo,** de manera que dote de una herramienta de diseño a la hora de verificar si el rodamiento de vuelco es adecuado para una determinada aplicación en la que se dan unos niveles de carga establecidos.

**Desarrollo de un modelo multiparamétrico de Elementos Finitos de rodamientos de vuelco para validar los resultados obtenidos y poder evaluar el efecto de la rigidez de los anillos y estructuras a las que se une y entre las que se quiere permitir el giro relativo.** Esto permitirá estimar de manera más precisa la distribución de carga en los diferentes elementos rodantes debido a la gran flexibilidad que los anillos de estos rodamientos tienen.

Puesto que los cálculos de dicho modelo FEM son demasiado costosos, se pretende **desarrollar una metodología eficiente que permita optimizar el cálculo por elementos finitos del conjunto rodamiento y estructuras entre las que se desea permitir el giro relativo.** Para ello se tiene como objetivo diseñar la reducción de un modelo multiparámetro de elementos finitos en base a la técnica de superelementos.

**Proponer un modelo preliminar de fricción orientado a rodamientos de vuelco que resuelva los problemas que presentan los actuales modelos de fricción a la hora de**

**hallar zonas de adhesión y deslizamiento dentro del área de contacto.** Para la validación del modelo de fricción se propone diseñar una metodología por Elementos Finitos mediante un modelo paramétrico que permita correlar el modelo analítico de estimación de la fricción con las variaciones que se puedan dar en los diferentes parámetros que intervengan en el modelo.

### 1.3. Organización de la Tesis Doctoral

La Tesis Doctoral aparece repartida en varios capítulos tal y como se expone a continuación.

En el **Capítulo 2** se recogen los antecedentes de la Tesis Doctoral. Se define inicialmente qué es un rodamiento de vuelco y cuáles son sus características y parámetros principales, y se muestran de manera general aplicaciones en las que se montan este tipo de rodamientos así como diferentes configuraciones de anillos y elementos rodantes. El desarrollo de esta Tesis Doctoral se ha centrado únicamente en rodamientos de vuelco de bolas donde el contacto se produce de manera angular en cuatro puntos. Al describir los requisitos funcionales que este tipo de rodamientos deben cumplir en las diferentes aplicaciones, se aprecia la necesidad de disponer de métodos de cálculo adecuados que permitan analizar y diseñar los sistemas de orientación de los que forman parte los rodamientos. Este capítulo también recoge los métodos de cálculo que constituyen los antecedentes directos de esta Tesis Doctoral, donde se extraen las carencias de las que adolecen estos métodos y se muestra la necesidad de mejora de los mismos.

En el **Capítulo 3** se presenta el modelo para el cálculo de la capacidad estática en un rodamiento de vuelco de contacto axial de cuatro puntos.

Se han ido añadiendo parámetros de cálculo respecto al modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b], comprobando cómo influyen. Al validarlo con el modelo de Elementos Finitos (modelo descrito en el Capítulo 4) se ha visto que la introducción de estos parámetros hace que se representen más fielmente los efectos que realmente se

están dando en el rodamiento. Finalmente se presenta un método gráfico de selección de rodamientos desarrollado con el objetivo de que los fabricantes de rodamientos los incluyan en sus catálogos y sea una herramienta de diseño muy rápida para los diseñadores de sistemas de actuación cuando no se necesita absoluta precisión.

En el **Capítulo 4** se detalla el modelo de Elementos Finitos utilizado para validar el modelo analítico. Así mismo, este modelo complementa al modelo analítico del capítulo anterior en el sentido en que el modelo de Elementos Finitos además de considerar todos los parámetros que considera el modelo analítico, tiene en cuenta también las rigideces de anillos y estructuras adyacentes así como la precarga de los tornillos que sirven de elemento de unión entre los rodamientos y las estructuras entre las que se desea permitir el giro relativo. Teniendo en cuenta estos efectos, en la última parte del capítulo se describe una metodología de cálculo basada en la técnica de superelementos que permite incluir el efecto de la flexibilidad de los anillos y de las estructuras unidas a los mismos, reduciendo el coste computacional de manera que el cálculo resulta mucho más eficiente con una reducción de la precisión muy baja.

En el **Capítulo 5** se realiza una propuesta de modelo de fricción preliminar el cual analiza las posibles zonas de adherencia y deslizamiento, adecuándose de manera más exacta a los efectos que realmente se dan en este tipo de rodamientos en los que las velocidades son bajas y las presiones en el contacto bola-pista muy altas. Finalmente se analizan estos efectos mediante un modelo de Elementos Finitos que muestra claramente la necesidad de tenerlos en cuenta a la hora de analizar de forma más exhaustiva el contacto.

En el **Capítulo 6** se recogen las conclusiones principales de esta Tesis Doctoral así como las líneas futuras abiertas por la investigación llevada a cabo.

Para concluir, el apartado bibliográfico recopila las referencias citadas a lo largo de la Tesis Doctoral.



# 2

## Antecedentes

### 2.1. Los rodamientos de vuelco. Definición

Los rodamientos de vuelco o *slewing bearings* son rodamientos de grandes dimensiones que se utilizan como elementos de orientación para aplicaciones sometidas generalmente a altas cargas. El hecho de servir de elemento de orientación describe en gran medida su modo de trabajo habitual: la velocidad de rotación es lenta y operan la mayoría de veces de manera oscilatoria en lugar de mediante giro continuo. A diferencia de los rodamientos convencionales que van montados sobre un eje, los rodamientos de vuelco se montan sobre superficies planas, a las que se unen mediante uniones bridadas. Otra de las características destacables de este tipo de rodamientos es su gran diámetro nominal, definido como el diámetro en el que orbitan los elementos rodantes, en comparación con el diámetro de los propios elementos rodantes. Es habitual que los rodamientos de vuelco presenten diámetros nominales desde 0.5 m hasta los 15 m, pudiendo haber diámetros incluso mayores pero siendo de momento diseños preliminares o prototipos; esta característica implica geometrías de anillos muy esbeltas, lo que a su vez permite una distancia muy reducida entre las plataformas unidas.

En cuanto a las partes constituyentes de los rodamientos de vuelco, éstos están compuestos por anillo exterior, anillo interior, elementos rodantes y tornillos de unión para unir ambos anillos a las estructuras entre las que se desea permitir el giro relativo. En este sentido, como se observa en la Figura 2.1, es habitual que el rodamiento cuente con un dentado que engrana con el sistema de accionamiento encargado de introducir la rotación entre estructuras; el dentado puede hallarse en el anillo exterior o en el interior (Figuras 2.2 a), b) y c)). Como alternativa al dentado, también existen mecanismos de accionamiento de tipo biela-manivela alimentados por cilindros hidráulicos (Figura 2.2 d)).

En uno de los anillos que no disponga de dientes tallados, se pueden colocar orificios que permitan extraer la grasa deteriorada e introducir una renovada para la lubricación del rodamiento; esta lubricación puede ser a su vez autónoma, con sistemas automatizados de engrase, especialmente en aplicaciones de difícil acceso al rodamiento, o cuando se busque reducir costes y tiempos de mantenimiento. Precisamente la función de los retenes de la Figura 2.1 es la de servir de elementos de estanqueidad, impidiendo que el lubricante se pierda hacia el exterior y bloqueando la entrada de suciedad hacia el interior.

Los elementos rodantes pueden ser rodillos (rectos, esféricos o cónicos) o bolas. Por lo general, los rodillos son utilizados en aplicaciones en las que se requiere una gran capacidad de carga, y las bolas en aplicaciones en las que el par de giro resistente es el parámetro limitante. En determinadas aplicaciones se combinan rodillos y bolas, aprovechando las ventajas de unos y otras. Además, los elementos rodantes pueden situarse en una o varias hileras, o colocarse de tal modo que parte de los elementos soporte carga en una dirección (por ejemplo dirección axial) y parte en otra (por ejemplo, radial). En la sección 2.3 se hará una descripción detallada de las diferentes configuraciones existentes y de sus características particulares. Por último, los elementos rodantes suelen ir separados para que no contacten entre ellos y por tanto la fricción se disminuya; como elementos separadores se pueden encontrar geometrías más o menos continuas que abarquen toda la circunferencia, denominadas normalmente jaulas, pudiendo estar a veces divididos en

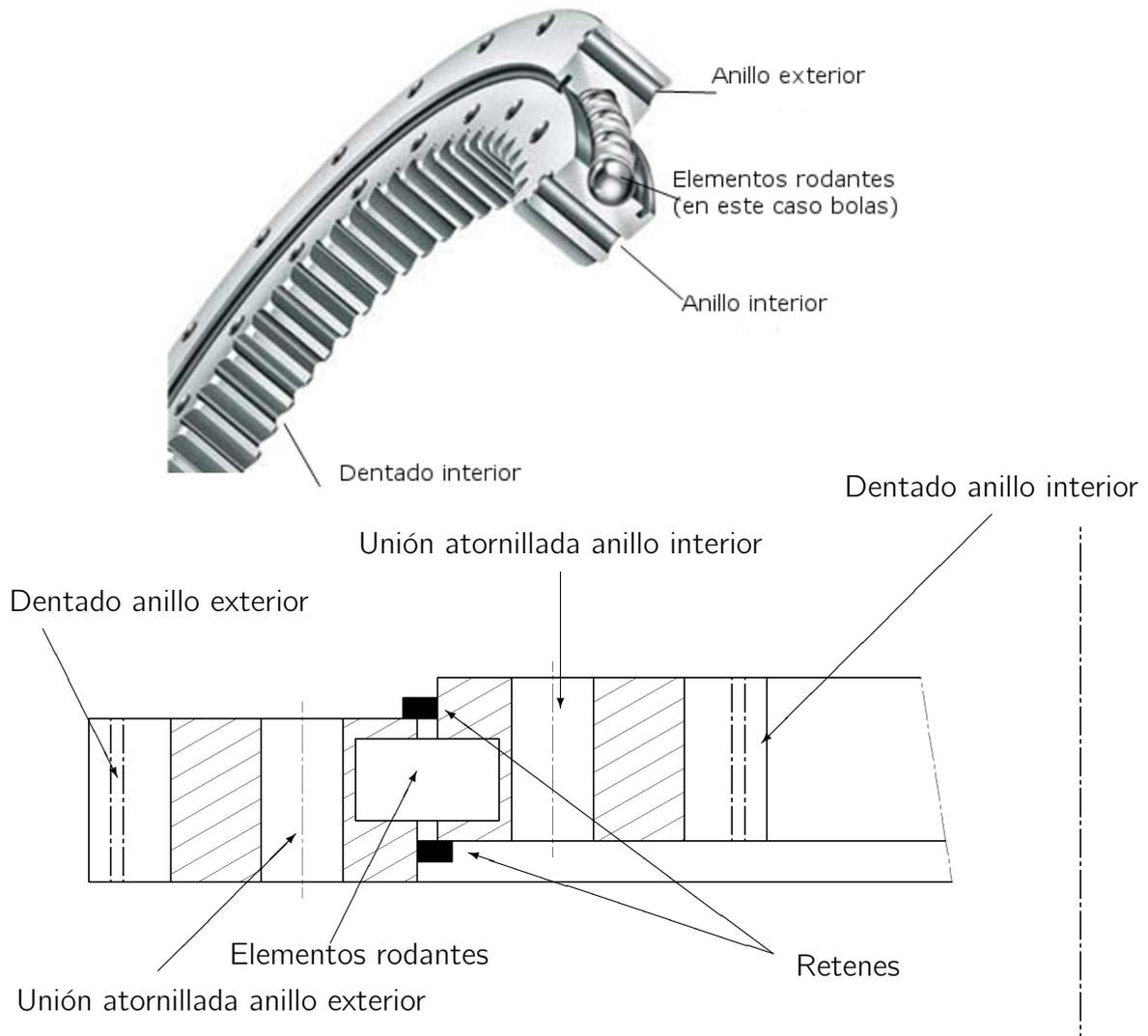
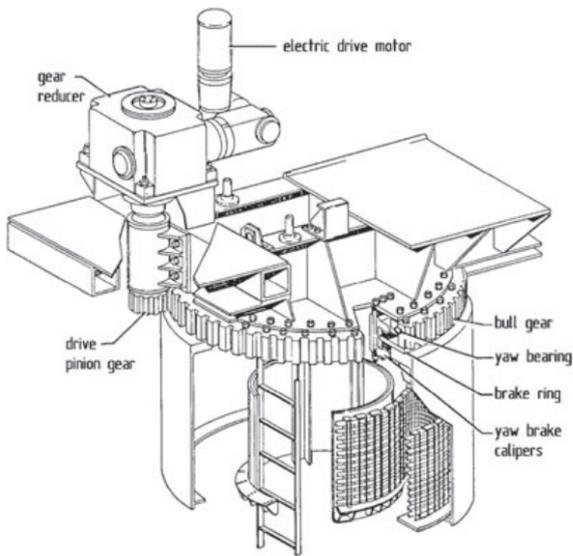


Figura 2.1: Esquema de las partes principales de los rodamientos de vuelco

dos o más sectores por razones como las de facilitar su fabricación, transporte y montaje; otra solución alternativa de separación son los elementos discretos colocados entre dos elementos rodantes consecutivos (denominados habitualmente separadores).

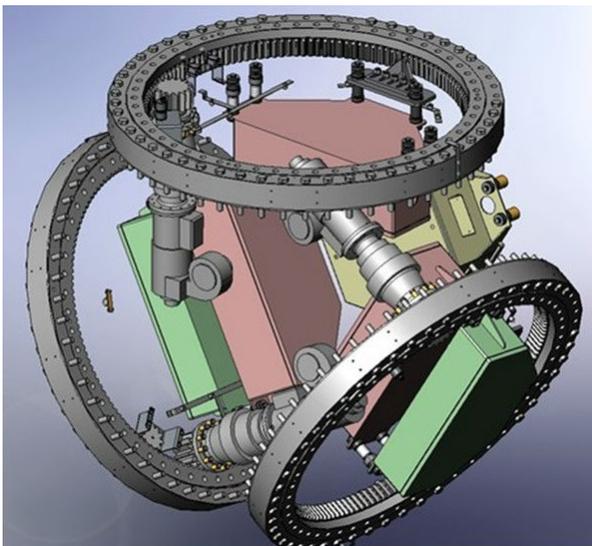
Una vez descritas sus partes constituyentes, se pasa a analizar la forma de trabajo. Según se ha comentado anteriormente, la velocidad de giro es reducida, de forma que rara vez sobrepasa 1 rpm en condiciones estacionarias. Si bien es cierto que en determinadas aplicaciones donde el control de la posición de giro es muy ajustado pueden darse velocidades de giro instantáneas mucho más altas, pero tan sólo durante un pequeño ángulo (no mayor que el ángulo equivalente al tamaño de uno de los elementos rodantes). En la



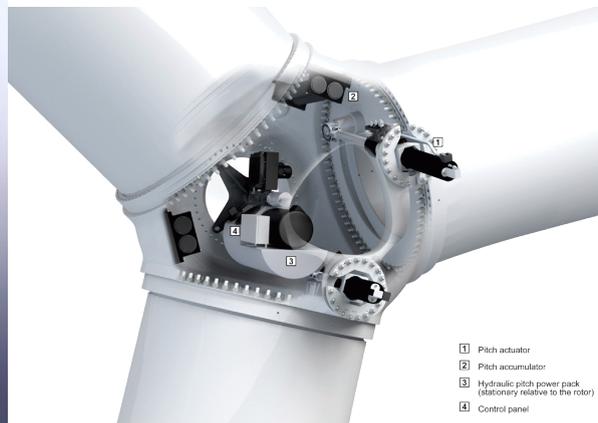
a) Guiado exterior dientes rectos [Hau, 2006]



b) Guiado exterior mediante tornillo sin-fin de Iraundi [Iraundi, 2011]

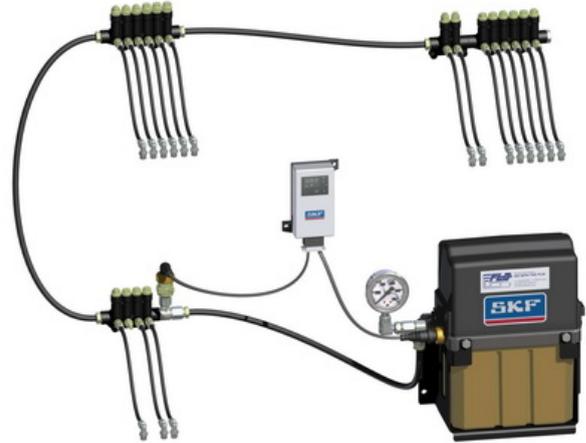
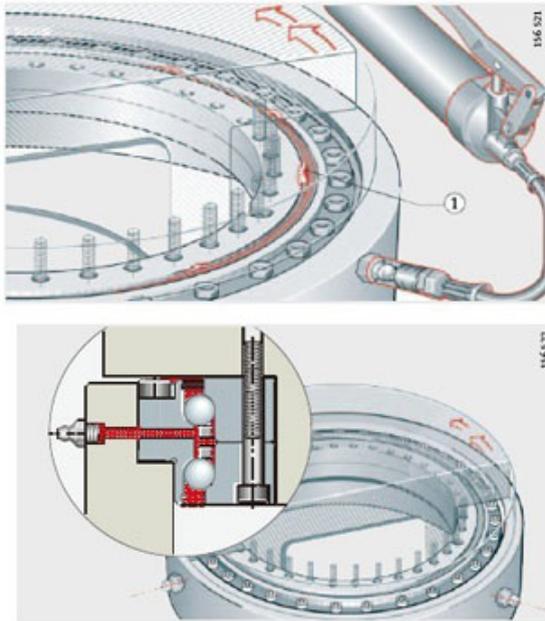


c) Guiado mediante engrane interior para sistema eléctrico de orientación de pala  
Fuente: <https://www.vestas.com/>



d) Guiado mediante mecanismo biela-manivela para orientación de pala  
Fuente: <http://www.avnenergy.com/>

Figura 2.2: Diferentes configuraciones para mecanismos de guiado



a) Orificios de lubricación  
<http://www.rtr-bearing.com/>

b) Sistema automático de lubricación de SKF [SKF, 2009]

Figura 2.3: Lubricación en rodamientos de vuelco



a) Jaula de rodillos

b) Jaula de bolas

c) Separadores discretos

Figura 2.4: Separadores de elementos rodantes  
 Fuente: <http://cgcem166.rollers-online.com/>

mayoría de las aplicaciones, el giro se da además de forma oscilatoria, con pequeños ángulos de barrido, aunque existan casos extremos como son los del sistema de orientación de pala de un aerogenerador en los que las palas giran alrededor de  $2^\circ$  de media.

Habiéndose descrito las características geométricas principales y su modo de movimiento, en esta última parte se abordará la cuestión de los esfuerzos que soportan estos rodamientos.

La Figura 2.5 indica las cargas actuantes sobre el rodamiento de vuelco. La nomenclatura de las cargas suele ser en base a su propio sistema de referencia local. Por tanto se denominan cargas axiales ( $F_A$ ) a aquellas cargas aplicadas en la dirección del eje de giro del rodamiento, las cargas radiales ( $F_R$ ) corresponden a aquellos esfuerzos que tienden a comprimir los anillos en la dirección del radio, y finalmente los esfuerzos de vuelco ( $M$ ) se asocian a aquellos pares aplicados en torno a un eje definido por alguno de los diámetros. Los rodamientos se diseñan para soportar una combinación de cargas axial, radial y de momento de vuelco. El origen y la magnitud de estas cargas depende enormemente de la aplicación en la que están instalados e incluso de la orientación en la que tengan su posicionamiento habitual de trabajo. Así, si el rodamiento está colocado con su eje de giro de forma predominantemente vertical, las cargas axiales serán debidas al peso tanto de la estructura como de la carga colocada encima; la fuerza radial será menor, únicamente debida a descentramientos o inclinaciones. En algunas aplicaciones el momento de vuelco no es muy elevado, pero en otras como la eólica, donde las estructuras son muy esbeltas, se genera mucho momento de vuelco debido al elevado brazo. Volviendo al ejemplo ilustrativo de los rodamientos de pala de aerogenerador, éstos soportan fuerzas axiales, radiales y de momento de vuelco variables debidas al propio peso de las palas en función de su posición; adicionalmente, soportan una combinación de esfuerzos axiales, radiales y de momento debidas a las cargas del viento en función de su orientación; finalmente, existe también una contribución a la fuerza axial debida a la fuerza centrífuga que se origina por el giro de las palas. En cambio, si se analiza otro ejemplo como es el de los rodamientos que unen la torre a la góndola, estos sufren una fuerza axial prácticamente constante debida al peso del conjunto palas-rotor-góndola, un esfuerzo

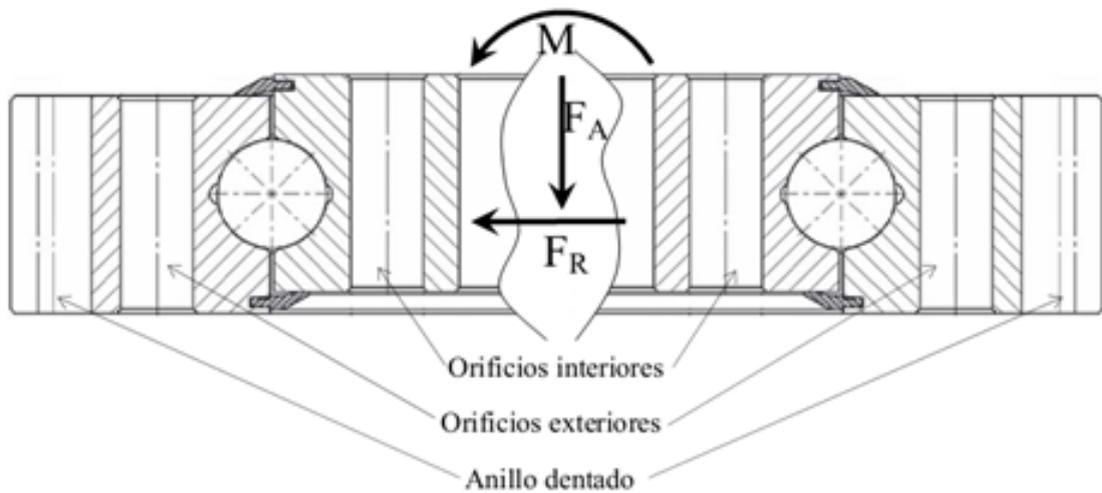


Figura 2.5: Topología de rodamiento de contacto angular de 4 puntos de contacto [Aguirrebeitia et al., 2010a]

radial variable debido al viento (mucho menos variable que en el caso de los rodamientos de pala), y un momento de vuelco debido a todas las fuerzas anteriormente citadas que tampoco varía con tanta intensidad como lo hace para el caso de los rodamientos de pala.

Debido al reducido tamaño de la sección transversal en relación con el diámetro nominal, los rodamientos de vuelco son considerablemente más flexibles que los rodamientos convencionales. Con el objeto de incrementar su rigidez y precisión, en la mayoría de las aplicaciones se introduce una precarga en el rodamiento, entendida como la eliminación del posible juego existente entre los elementos rodantes y la pista de rodadura; esto se consigue realizando el montaje del rodamiento con interferencia entre los elementos rodantes y la pista. Además de aumentar la rigidez y precisión, esta operación aporta otros efectos positivos como son la reducción de vibraciones [Kang and Tesar, 2003], lo que alarga la vida del rodamiento al operar en condiciones más regulares y suavizadas. No obstante, un excesivo valor de precarga tiene como efecto negativo más evidente el incremento de las fuerzas de fricción en el contacto entre los elementos rodantes y la pista; esto no sólo afecta al rodamiento, el cual sufre un aumento de temperatura y desgaste prematuro que reduce su vida útil, sino que también afecta a los sistemas de

actuación, dado que necesitan más potencia para conseguir hacer girar al rodamiento al aumentar el par de fricción.

## 2.2. Aplicaciones de los rodamientos de vuelco

Como se ha descrito en la sección anterior, los rodamientos de vuelco son rodamientos de grandes dimensiones que trabajan a bajas velocidades angulares, operando la mayoría de las veces con rangos de giro incompletos o de manera oscilatoria y soportando altas cargas. Con estas características, el campo de aplicaciones es muy amplio: industria energética, de transporte, obras públicas, forestal, militar, telecomunicaciones, entre otros. En la Figura 2.6 se muestran algunos ejemplos de aplicaciones en las que los rodamientos de vuelco están presentes. A continuación se hace un breve repaso a alguna de estas aplicaciones para enmarcar el contexto en el que operan estos rodamientos.

En las grúas, tanto del tipo de obras públicas o forestal como grúas fijas para desplazamiento de cargas, el momento de vuelco que debe soportar el rodamiento tiene más importancia que los esfuerzos radial y axial. En estas aplicaciones suele existir un entorno severo, debiéndose cuidar especialmente la estanqueidad para evitar la entrada de suciedad que provoque un desgaste prematuro del rodamiento. En la Figura 2.6 se muestran ejemplos de estas aplicaciones que se acaban de mencionar.

En aplicaciones de minería y tuneladoras, el momento de vuelco no es tan importante pero las cargas (especialmente axiales) son muy variables, induciendo vibraciones significativas. En estos casos el sellado también es importante por ser un ambiente muy agresivo.

Los rodamientos de vuelco también son muy empleados en aplicaciones *offshore*, en las que aparte de un momento de vuelco importante, se tienen cargas muy variables debido a la superficie inestable y el viento. A todo esto habría que añadir la corrosión como factor que afecta muy significativamente, y por ser muy costosas las tareas de mantenimiento y reparación, se suele exigir una elevada fiabilidad.

En determinadas aplicaciones, las cargas no son elevadas y el factor crítico es la estanqueidad, tanto para evitar que se contamine el interior de los rodamientos (por ejemplo, en depuradoras y tanques), como para evitar que la lubricación y las partículas que se originan debido al desgaste puedan contaminar los elementos manipulados (por ejemplo, durante el paletizado). La estanqueidad también es de vital importancia en los rodamientos empleados en la industria médica, por la necesidad de mantener un ambiente estéril; generalmente se requiere además de una gran precisión.

Otras aplicaciones en las que la precisión es un parámetro importante son los centros de mecanizado y los manipuladores o robots. En estos casos, las cargas tampoco son muy elevadas aunque sí pueden existir vibraciones, con lo que se busca una rigidez que permita tanto soportar las vibraciones como dotar al sistema de una alta precisión. En robots, no se suelen utilizar tamaños de rodamientos tan grandes como en otras aplicaciones y las velocidades de giro suelen ser mayores.

En aplicaciones como captadores o reflectores solares, antenas, telescopios y similares, la precisión, rigidez y tamaño del rodamiento son factores determinantes. La precisión es de máxima importancia para reflejar o bien captar adecuadamente las ondas electromagnéticas provenientes del sol, de satélites de telecomunicaciones, etc. Así mismo, al ser aplicaciones que operan a la intemperie y normalmente en zonas despejadas, los rodamientos están expuestos al viento (además del peso propio de las estructuras de gran tamaño que se montan sobre ellos), dando lugar a esfuerzos de gran magnitud y variabilidad.

Por último, se podría decir que donde más evolución han sufrido los rodamientos de vuelco es en el sector eólico. En un aerogenerador, este tipo de rodamientos se montan en el sistema de orientación de pala y en el de orientación de la góndola. Aparte de operar en prácticamente todos los entornos anteriormente comentados (*offshore*, ambientes severos con alto polvo como desiertos, temperaturas extremas, radiación solar intensa, alta humedad ambiental, ...), el mercado cada vez demanda máquinas con mayor capacidad de generar potencia. Como es sabido, la potencia generada del aerogenerador es directamente proporcional al área barrida por las palas, lo que implica que

los aerogeneradores deben ser cada vez más grandes. Para poder obtener una potencia constante en el aerogenerador, es necesario controlar el efecto que produce el viento en las palas. El sistema de orientación de palas es el encargado de esta función, aunque también tiene otras funciones secundarias como son la reducción de cargas originadas en el aerogenerador. Estos sistemas de control son cada vez más complejos gobernando cada pala individualmente teniendo además en cuenta instantes en los que se produce alineación de la pala con la torre y otra serie de eventos que modifiquen la aerodinámica de las palas. Es decir, la precisión es otro parámetro de importancia fundamental. Los fabricantes de rodamiento han dirigido muchos esfuerzos hacia este sector eólico en los últimos años, lo que ha hecho que se desarrollen numerosas investigaciones orientadas al análisis de los rodamientos de vuelco en aerogeneradores, las cuales representan un antecedente directo de esta Tesis Doctoral.

### 2.3. Tipologías de rodamientos de vuelco

En cuanto a la tipología de los rodamientos de vuelco, éstos se suelen clasificar de forma general según:

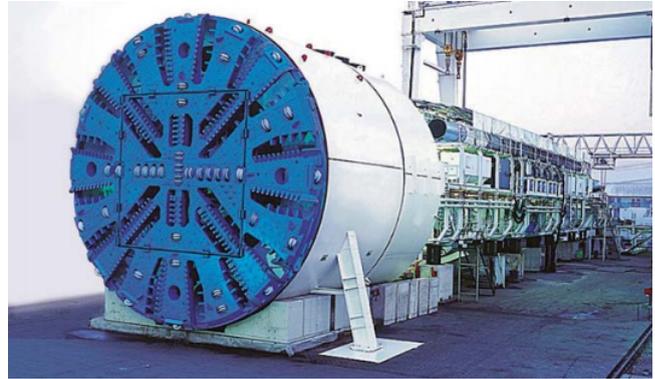
- Tipo de **elemento rodante**: bolas, rodillos y sus variantes (Ver Figura 2.7).
- **Número de hileras** de los elementos rodantes

Dada la amplia variedad de aplicaciones en los que se utilizan los rodamientos de vuelco, esta primera clasificación general no da cabida a todas las posibilidades ya que en muchas otras ocasiones hay diseños no convencionales que dan respuesta a necesidades concretas.

En la Figura 2.8, están representadas las cotas comunes y nomenclatura utilizada en los catálogos de fabricantes, necesarias para definir las dimensiones principales del rodamiento así como la unión entre los anillos y las estructuras adyacentes. Entre las dimensiones especificadas se encuentran el centro de las uniones atornilladas exterior e



a) Rodamiento de vuelco en grúas, obras públicas y forestal, [Imo, 2005].



b) Rodamientos de vuelco en minería y tuneladoras [Imo, 2005].



c) Rodamientos de vuelco para aplicaciones marinas [Imo, 2005].



d) Rodamientos de vuelco en paletizado, depuradoras y tanques [Imo, 2005].



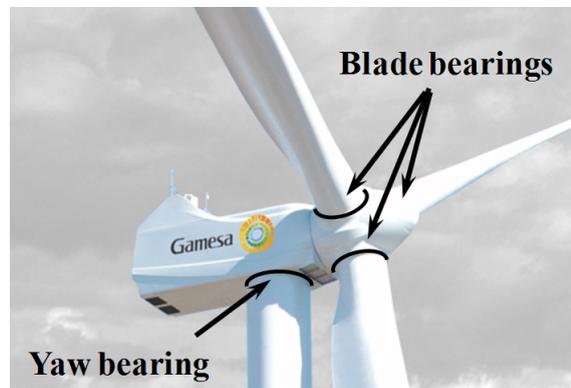
e) Rodamiento de vuelco en industria médica.



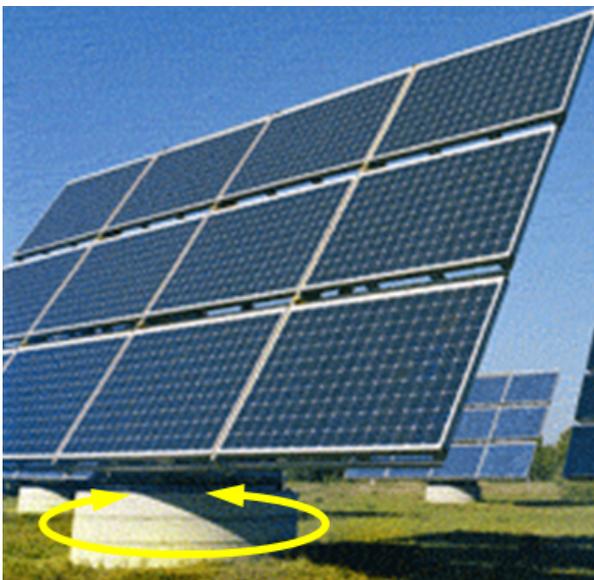
f) Rodamientos de vuelco para centros de mecanizado.



g) Rodamientos de vuelco en robots [Iraundi, 2011].



h) Ubicación de *Slewing bearings* en un aerogenerador [Aguirrebeitia et al., 2012c]



i) Rodamientos de vuelco en energía solar y antenas.

Figura 2.6: Aplicaciones de rodamientos de vuelco

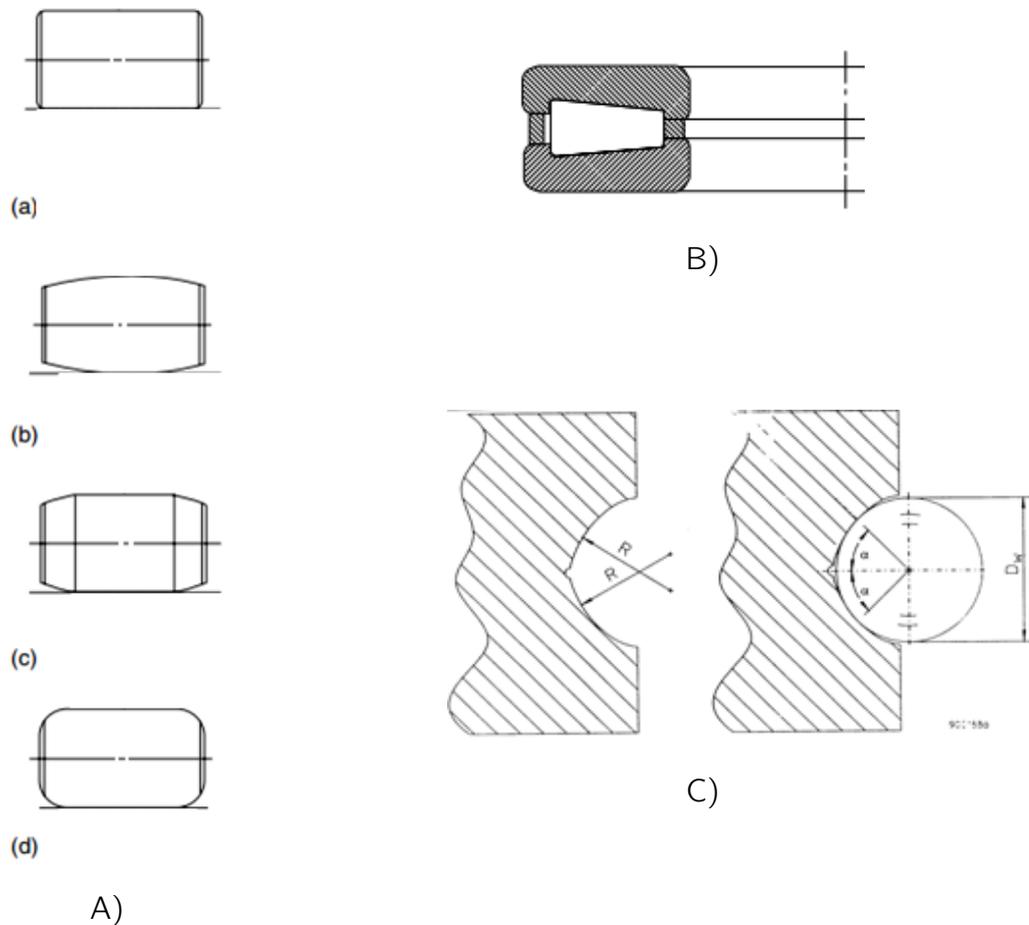


Figura 2.7: Tipos de elementos rodantes [Harris and Kotzalas, 2007a]

interior ( $T_a$  y  $T_i$  respectivamente) y sus diámetros o roscas  $D_h$ , los límites diametrales exteriores e interiores del conjunto ( $D_a$  y  $D_i$  respectivamente) y de cada anillo ( $d_a$  el diámetro interior del anillo externo y  $d_i$  el diámetro exterior del anillo interno), y las alturas y desfases entre los anillos ( $H$  y  $h$ , como se muestra en la Figura 2.8); aunque no está representado en esta Figura 2.8, también es común especificar el número de dientes y módulo de engrane para el anillo que disponga de dentado, si fuese el caso. En cuanto al elemento rodante, se especifica el tipo, número, geometría y disposición. En los rodamientos de bolas es importante definir también el ángulo de contacto bola-pista inicial  $\alpha_0$ , es decir, el ángulo al que se encuentra el punto de contacto entre la bola y la pista en ausencia de cargas exteriores; como se verá en secciones posteriores, este parámetro es fundamental a la hora de analizar el comportamiento del rodamiento bajo carga.

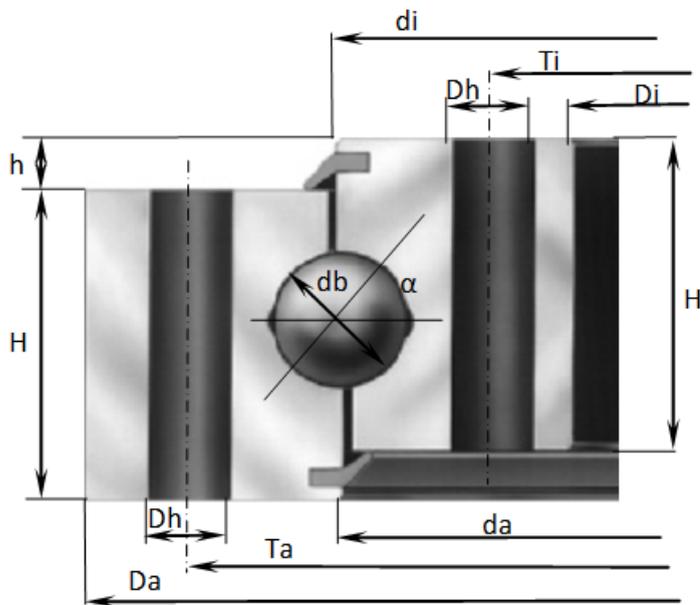


Figura 2.8: Cotas comunes [Aguirrebeitia et al., 2012b]

La elección entre bolas o rodillos suele venir determinada porque los rodillos tienen mayor capacidad de carga y aportan una mayor rigidez y precisión a la estructura sobre la que se montan. Como contrapartida, los rodamientos de rodillos necesitan sistemas de actuación más potentes al presentar mayor fricción, lo que se traduce a su vez en un calentamiento mayor. A continuación se muestran diferentes configuraciones de los elementos rodantes, extraídas de catálogos de fabricantes (Iraundi [Iraundi, 2011], Rollix [Rollix, 2007], Ina [Ina, 2006], Imo [Imo, 2005], ...).

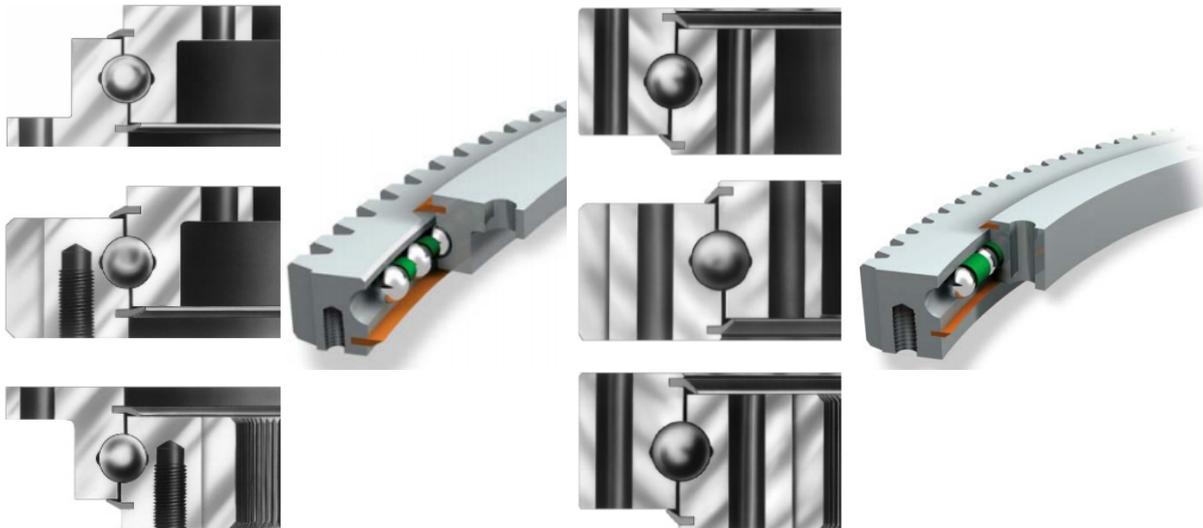
Los rodamientos de bolas más comunes son los de una sola hilera, como el mostrado en la Figura 2.9 a). Este tipo de configuración es utilizado normalmente en maquinaria para construcción de vehículos, mesas giratorias y aplicaciones genéricas de ingeniería mecánica sin elevadas cargas ya que por su baja rigidez no son capaces de soportar niveles altos de carga. Más adelante en la sección 2.4.2, se profundizará en esta característica mecánica de la rigidez. Si el rodamiento debe soportar cargas mayores, con un momento de vuelco significativo, las paredes de los anillos son más gruesas (Figura 2.9 b), usados en aplicaciones de elevación y manipulación de cargas, energía eólica) y se pueden disponer en dos hileras de bolas con una configuración similar a la de una hilera de bolas (Figura 2.9 d), utilizados en aplicaciones de manipulación de cargas de mayor

magnitud) o con la configuración de la Figura 2.9 c) que también soporta cargas axiales en ambos sentidos; estos últimos rodamientos poseen además como ventaja su facilidad de ensamblado aunque a costa de un incremento de peso considerable y su uso suele darse en aplicaciones de minería y manipulación de materias primas, aunque están siendo sustituidos por los de doble hilera como d). La diferencia principal entre los rodamientos de la Figura 2.9 c) y los de la Figura 2.9 d) estriba en el número de puntos de contacto de la bola con la pista. En c) cada bola tan sólo contacta en dos puntos mientras que en d) el número de puntos de contacto es de cuatro.

Los diseños de las Figuras 2.9 a) y b) y la Figura 2.10 a) son equivalentes, haciendo uso de bolas o rodillos como elementos rodantes respectivamente, en función de los requisitos de soporte de esfuerzos, par resistente, precisión y demás características mencionadas en la sección 2.3. Ambos diseños son utilizados para elevación y manipulación de cargas. Y si el rodamiento requiere soportar mayores cargas, podría utilizarse un diseño con doble hilera de rodillos cruzados como el del caso de la Figura 2.9 b). Una solución para el caso en el que tanto cargas axiales como radiales sean de elevada magnitud, se muestra en la Figura 2.10 c), en la que los rodillos colocados de forma vertical soportarían la componente radial y los rodillos situados de manera horizontal, soportarían las componentes axial y de momento. Esta última tipología estaría orientada fundamentalmente a aplicaciones en condiciones severas como son minería y aplicaciones *offshore*.

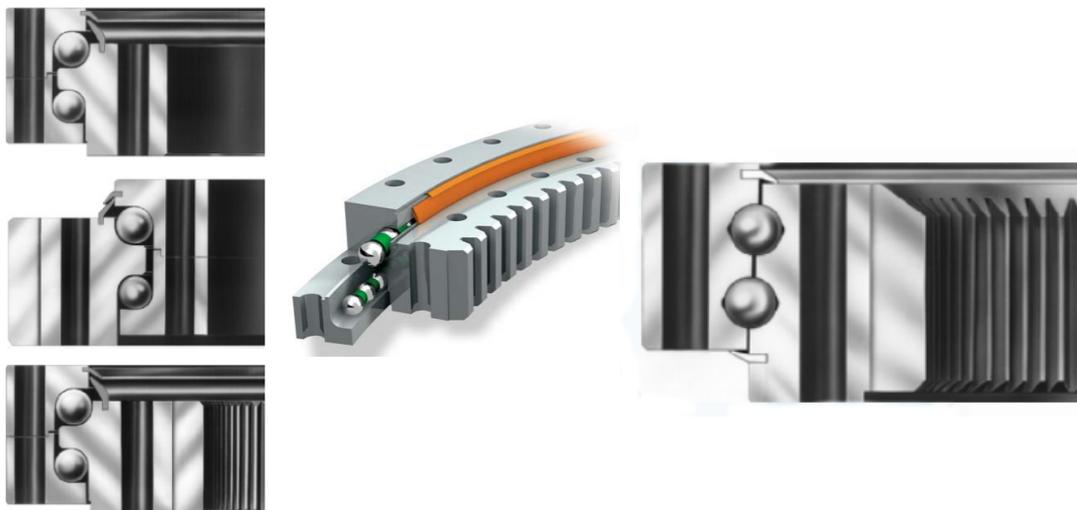
Para dar respuesta a necesidades concretas, se han diseñado otras soluciones como las mostradas en la Figura 2.11. En estos casos los objetivos pueden ir desde soportar cargas de determinada magnitud en una dirección concreta con una rigidez particular, como por ejemplo los del caso a) donde se combinan rodillos para soportar las cargas axiales más severas, y bolas para permitir cierta excentricidad de cargas axiales que generen momento, hasta realizar diseños en los que se tenga como reto principal reducir la fricción; éste sería por ejemplo el caso de la última imagen mostrada en las Figuras 2.11 b) y c).

Los desarrollos que se llevarán a cabo en esta Tesis Doctoral serán para rodamientos de bolas de cuatro puntos de contacto del tipo mostrado en las Figuras 2.9 a) y b), dado que



a) Rodamientos de simple hilera con bridas para su fijación

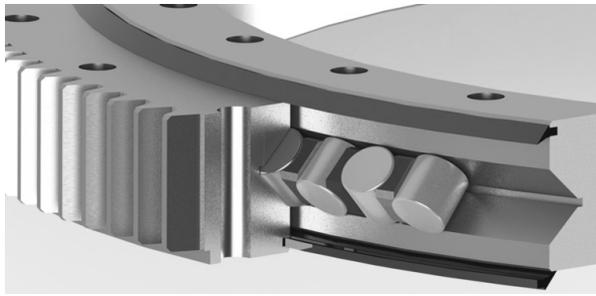
b) Rodamientos de simple hilera y cuatro puntos de contacto



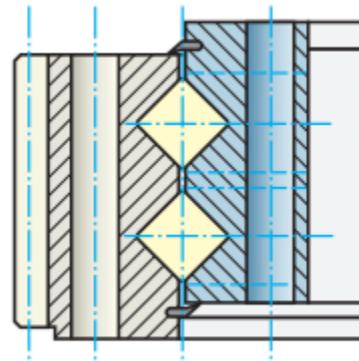
c) Rodamientos de bolas de dos hileras y doble punto de contacto

d) Rodamientos de doble hilera de bolas

Figura 2.9: Tipos de Rodamientos de bolas [Rothe-Erde, 2009]



a) Rodamientos de rodillos cruzados  
<http://laulagun.com>



b) Rodamientos de doble hilera de rodillos  
 [Rollix, 2007]



c) Rodamientos de tres hileras de rodillos  
 [Rothe-Erde, 2009]

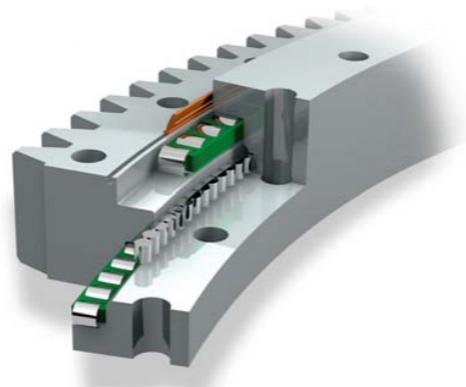
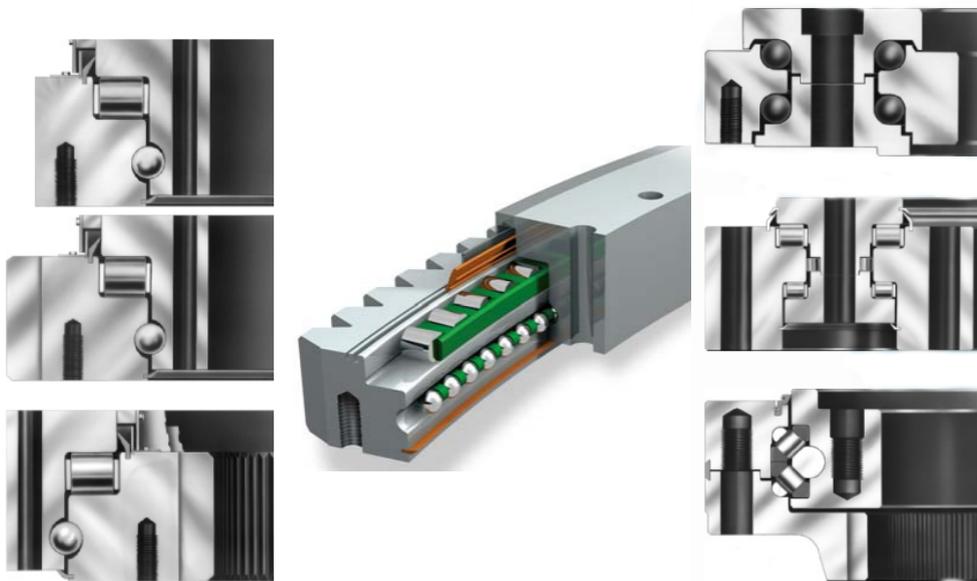


Figura 2.10: Tipos de Rodamientos de rodillos

son los más comúnmente utilizados. No obstante, la metodología desarrollada para los mismos es aplicable a otras configuraciones de rodamientos describiendo adecuadamente el campo de interferencias en el contacto entre elemento rodante y pista (este concepto será detallado en la sección 2.4.1.1).

## 2.4. Criterios de selección de rodamientos de vuelco

De acuerdo a lo descrito en la sección 2.3, a la hora de realizar la elección entre las diferentes tipologías de rodamientos de vuelco es necesario establecer unos criterios que



a) Rodamientos de rodillos y bolas  
[Rothe-Erde, 2009]

b) Rodamientos con diseños no estandar  
[Rothe-Erde, 2009]



c) Rodamiento diseño específico baja fricción de Franke [www.franke-gmbh.com](http://www.franke-gmbh.com)



Figura 2.11: Tipos de Rodamientos con diseños especiales

permitan evaluar la idoneidad del rodamiento para una determinada aplicación, o incluso que condicionen el propio diseño del rodamiento. Entre todos ellos, los criterios de selección más importantes para la mayoría de aplicaciones son la capacidad estática, la rigidez, el par de fricción y la capacidad dinámica. Si se cumplen los requisitos impuestos por estos criterios, el rodamiento queda totalmente definido primero desde el punto de vista estático, al ser capaz de soportar una determinada combinación de cargas estáticas y proporcionar una determinada rigidez al sistema; también desde el punto de vista

dinámico y de durabilidad, mediante la determinación de la capacidad dinámica; y finalmente desde el punto de vista del actuador necesario para su movimiento y el consumo energético del mismo, determinado por el par de fricción.

La capacidad dinámica queda fuera del alcance de esta Tesis Doctoral. La capacidad estática será tratada en la sección 2.4.1 en primer lugar ya que representa el punto de partida al describir el comportamiento del rodamiento bajo carga y permite realizar un dimensionamiento inicial de los parámetros geométricos mostrados en la Figura 2.8. En el Capítulo 3 se presentará un modelo para el cálculo de la capacidad de carga estática que aporta una serie de mejoras consiguiendo una mayor representatividad del estado de carga real del rodamiento.

En 2.4.2 se tratará el criterio de rigidez, la cual es necesaria para conseguir una determinada suavidad y precisión en el funcionamiento del rodamiento. En el Capítulo 4 se tratará el modelo desarrollado en esta Tesis Doctoral orientado al estudio de la rigidez.

Finalmente será tratado el criterio del par de fricción en 2.4.3, necesario como se ha indicado previamente para seleccionar el sistema de actuación de giro del rodamiento. El par de fricción será tratado de manera preliminar en esta Tesis Doctoral en el Capítulo 5 planteando posibles soluciones a las carencias existentes en los actuales modelos de fricción para rodamientos de vuelco.

### 2.4.1. Capacidad estática

La fiabilidad de los rodamientos de vuelco debe de ser alta ya que no son elementos fácilmente reemplazables y su reparación o sustitución son operaciones de considerable duración que requieren una logística determinada, provocando improductividades altas y costes elevados. Suelen ser necesarias grúas de gran tonelaje para poder manipular tanto las estructuras que se unen a los rodamientos como los propios rodamientos, y en la mayoría de las ocasiones estas reparaciones deben realizarse trasladándose hasta la instalación donde se encuentra montado el rodamiento.

En operación, los rodamientos de vuelco soportan tanto cargas estáticas como cargas de fatiga. El dimensionamiento inicial del rodamiento se realiza en base a las cargas extremas estáticas que debe soportar sin que se produzca el fallo, con el objeto de determinar un rango posible para el diámetro medio, el tipo de elemento rodante y su diámetro y número. Este dimensionamiento inicial condiciona el diseño o selección de otros componentes de la aplicación, y gracias a ello permite obtener unas condiciones operacionales preliminares a partir de las cuales se calculan las cargas de fatiga (sin olvidar que estas cargas de fatiga no dependen sólo del diseño mecánico adoptado sino también de la estrategia de control que se programe); en cualquier caso, aunque el diseño inicial adoptado pueda verse modificado para que sea capaz de soportar las cargas de fatiga, es el cálculo de la capacidad estática lo que permite realizar una primera selección del rodamiento.

#### 2.4.1.1. Definición

La capacidad de carga estática básica, tal y como se define en la norma [ISO76, 2006], es *"la máxima carga que es capaz de soportar el rodamiento sin que se produzca una deformación permanente mayor de 0.0001 veces el diámetro del elemento rodante, en el centro del contacto correspondiente al elemento rodante más cargado"*.

Y es que, dado el pequeño área de contacto existente entre elementos rodantes y pistas, las cargas externas sobre el rodamiento provocan deformaciones permanentes. Se trata por tanto de limitar dichas cargas para que no se produzcan daños funcionales que comprometan el correcto funcionamiento del rodamiento.

Esta definición de capacidad estática se basa en la experiencia, ya que tal y como se explica en la norma, es impracticable establecer si las deformaciones que aparecen en un rodamiento para una determinada aplicación son admisibles o no. Evaluar estas deformaciones requeriría realizar ensayos en especímenes fabricados para todos y cada uno de los diseños que se lleven a cabo. Por tanto, desde la norma se propone el método que se describe a continuación para determinar la validez del rodamiento seleccionado para la aplicación que se esté diseñando. A pesar de ser un criterio basado en la experiencia,

esta definición es generalmente aceptada y utilizada como base para los desarrollos del cálculo de la capacidad estática que se han llevado a cabo hasta el momento. De acuerdo a este criterio, se proponen en la norma los siguientes valores límite para la presión de contacto máxima:

- 4200 MPa para rodamientos de bolas
- 4000 MPa para rodamientos de rodillos.

En definitiva, lo que la norma indica como capacidad de carga estática básica es el estado de carga que provocaría la presión de contacto recién indicada en el centro del contacto elemento rodante-pista del elemento rodante más cargado del rodamiento. En la norma se menciona que estos valores límite de presión podrían ser diferentes (incluso mayores) en función de los requisitos de suavidad de operación, fricción o dependiendo de las superficies en contacto. Como estos valores se fundamentan en la experiencia, se recomienda en la norma consultar con los fabricantes valores concretos de capacidad para el caso particular que se esté estudiando.

Como se ha mencionado en la sección anterior, en esta Tesis Doctoral se trabajará con rodamientos de bolas de cuatro puntos de contacto, con lo cual se utilizará el valor de la presión límite de 4200 MPa .

La forma de calcular la capacidad estática para una carga axial pura que se propone en la norma es:

$$C_{0a} = f_0 Z d_w^2 \sin \alpha \quad (2.1)$$

Donde:

$f_0$  factor que tiene en cuenta la geometría del contacto, cuyo cálculo está detallado en [ISO/TR10657, 1991]. De manera simplificada se ajusta a la siguiente expresión:

$$f_0 = \frac{d_w \cos \alpha}{d_{pw}} \times 77.09 + 61.294$$

$Z$  es el número de bolas

$d_{pw}$  es el diámetro nominal o diámetro medio en el que se sitúa el centro de las bolas

$d_w$  es el diámetro de las bolas

$\alpha$  es el ángulo de contacto inicial

Es decir, para que no se produzca el fallo estático del rodamiento, la carga axial pura que soporta el rodamiento debe estar por debajo del valor de la capacidad estática axial  $C_{0a}$  calculada según la expresión 2.1.

En caso de existir también fuerza radial, se define una fuerza axial equivalente de acuerdo a la siguiente expresión:

$$P_{0a} = 2.3F_R \tan \alpha + F_A \quad (2.2)$$

De nuevo, la combinación de fuerzas axial y radial  $F_A - F_R$  no causará el fallo del rodamiento siempre y cuando su carga axial equivalente calculada según 2.2 sea inferior a la capacidad  $C_{0a}$  de la expresión 2.1. Esta expresión 2.2 es una aproximación respecto a los coeficientes obtenidos de manera exacta en función de las características geométricas tal y como aparece detallado en [ISO/TR10657, 1991]. En la Figura 2.12 se representan las curvas exactas de la norma para los casos de rodamientos de bolas y de rodillos, junto con la aproximación adoptada en la ecuación 2.2.

Esta expresión 2.2 tiene validez general para cualquier combinación de cargas radial y axial, teniendo en cuenta que las hipótesis simplificativas que introduce la norma conlleva algunas limitaciones. Una de las limitaciones de este enfoque de la norma [ISO76, 2006]

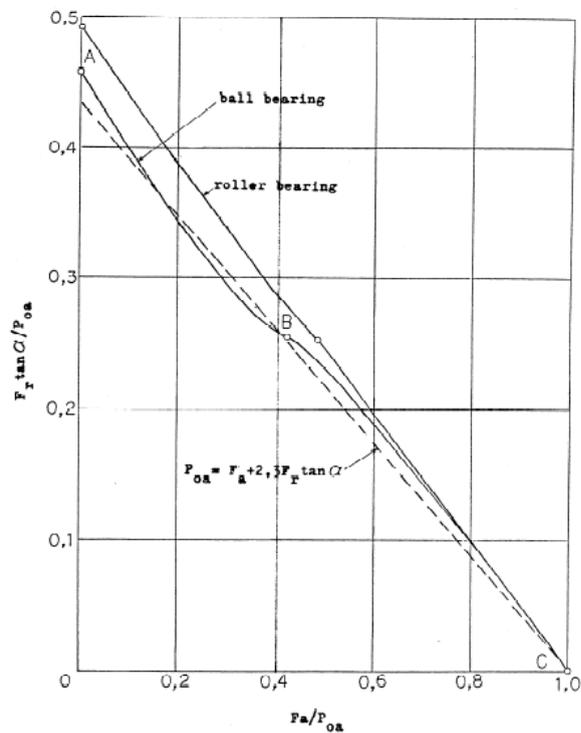


Figura 2.12: Expresión teórica y simplificada de la relación entre carga axial y radial, frente a la capacidad estática equivalente [ISO/TR10657, 1991]

es la consideración de un ángulo de contacto bola-pista constante, que se corresponde con el ángulo inicial de montaje del rodamiento. Además, tampoco se tiene en cuenta la flexibilidad de anillos y estructuras a las que se unen. No obstante, la mayor limitación en cuanto a su aplicación para rodamientos de vuelco es que no recoge la manera de considerar la aplicación de un momento de vuelco. Estas limitaciones son fruto de que la norma está orientada a rodamientos convencionales, no existiendo normativa específica para rodamientos de vuelco.

Se han desarrollado diferentes metodologías para el cálculo de la distribución de carga en elementos rodantes que serán tratados más adelante en la sección 2.5.1.3, pero respecto a la capacidad de carga no se han desarrollado prácticamente metodologías para determinar la capacidad estática de rodamientos de vuelco. Una metodología inicial orientada específicamente a rodamientos de vuelco es la desarrollada por Aguirrebeitia en [Aguirrebeitia et al., 2010c], en la que se define una capacidad de carga generalizada que tiene en cuenta la combinación de fuerzas axial, radial y de momento para las cuales

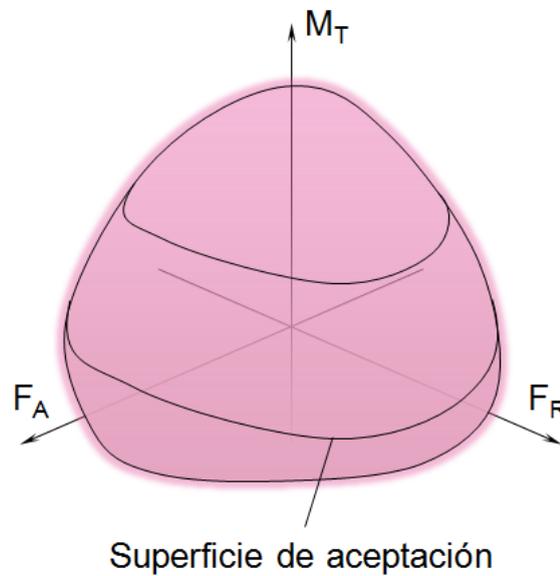


Figura 2.13: Superficie de aceptación de la capacidad estática generalizada [Aguirrebeitia et al., 2010c]

el rodamiento falla de forma estática. Esta capacidad es representable mediante un sistema de coordenadas cartesiano cuyos ejes son las acciones  $F_A$ ,  $F_R$  y  $M_T$ : los conjuntos de cargas que provocan el fallo estático de acuerdo a la presión máxima admisible que se determine, irán definiendo puntos de una superficie que representa la frontera entre el conjunto de acciones que provocan fallo (aquellos que queden fuera de la superficie) y las acciones admisibles (puntos interiores al volumen definido por dicha superficie). La Figura 2.13 muestra la representación geométrica de esta metodología, a la cual se denomina superficie de aceptación.

En esta Tesis Doctoral se ha trabajado en el Capítulo 3 en el estudio de la capacidad estática de rodamientos de vuelco partiendo del enfoque de [Aguirrebeitia et al., 2010b], sobre el que se profundizará en la sección 2.5.2.

#### 2.4.1.2. Criterio *Core crushing* para la capacidad estática

La capacidad estática que se establece como criterio en la norma ISO 76 [ISO76, 2006] de presión de contacto límite 4200 MPa presentado en la sección 2.4.1.1 está basada en la resistencia del material frente a la indentación. Esta resistencia se consigue mediante

un tratamiento térmico de templado que, aparte de un mejor comportamiento frente a la indentación, reduce la fricción y mejora la capacidad frente a fatiga. En rodamientos tradicionales, el templado se lleva a cabo en todo el volumen de las pistas (*through hardened* según la nomenclatura internacional); en cambio, en rodamientos de vuelco, debido a su gran tamaño, se suele templar únicamente un espesor superficial mediante inducción. Teniendo esto en cuenta, en los trabajos llevados a cabo por Lai [Lai et al., 2009] se analiza y compara el fallo por indentación plástica para rodamientos que han sido templados en todo su volumen frente al fallo bajo el espesor templado que hace que se produzca una nucleación de grietas que avancen hacia la superficie.

Este criterio había sido planteado con anterioridad para el estudio de fatiga en rodamientos clásicos. Más recientemente, en trabajos de Kunc [Kunc and Prebil, 2004, Kunc et al., 2007] ha sido tratada esta nucleación de grieta de manera simplificada para el caso de fatiga en rodamientos clásicos. Para el caso de capacidad estática en rodamientos clásicos existen diferentes criterios en función de si se permite plasticidad o no en el material de los anillos del rodamiento. Sague y Rumbarger [Sague and Rumbarger, 1977] afirman que para evitar la nucleación de grieta, la máxima tensión cortante bajo el contacto en las pistas de rodadura debe ser menor que el límite plástico de la tensión cortante, la cual se asume que es 0.425 veces la tensión última del material sin templar. Y por otra parte, se encuentra el criterio presentado por Zwirlein [Zwirlein and Wieland, 1983] donde se afirma que la presión bajo la superficie de contacto puede alcanzar valores de 1.25 veces la tensión última para rodamientos de bolas o 1.0 veces para el caso de rodamientos de rodillos. Además en [Zwirlein and Wieland, 1983] se afirma que indentaciones plásticas de valor hasta  $5 \times 10^{-4}d_w$  en el caso de carga estática, no tendría efectos negativos para fatiga en el caso de rodamientos de vuelco con superficies de rodadura templadas.

Pero para el caso de capacidad estática orientada a rodamientos de grandes dimensiones con superficies de contacto templadas, Lai [Lai et al., 2009] analiza estas generalizaciones mencionadas anteriormente y muestra que el espesor de la capa templada es un parámetro que se debe tener en cuenta a la hora de analizar el fallo estático de las superficies de

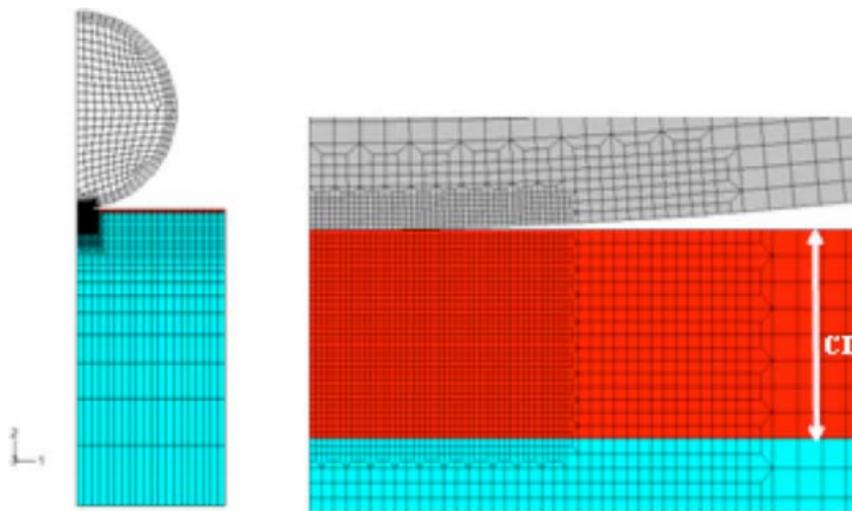


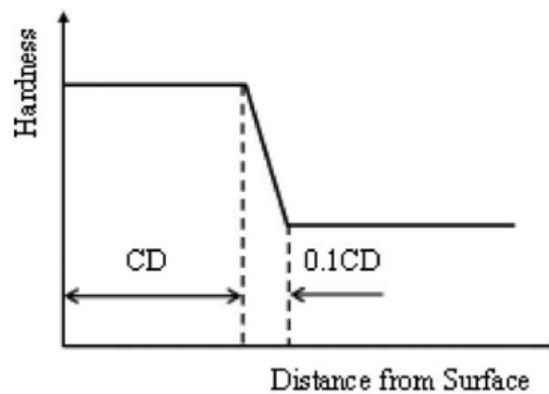
Figura 2.14: Modelo de Elementos Finitos general y detalle de espesor de superficie templada[Lai et al., 2009]

contacto. Para este análisis lleva a cabo un modelo de Elementos Finitos que tiene en cuenta la indentación plástica de la bola sobre la pista, para posteriormente desarrollar un modelo analítico partiendo de los cálculos previos por Elementos Finitos. Para ello incluye en su modelo lo siguiente:

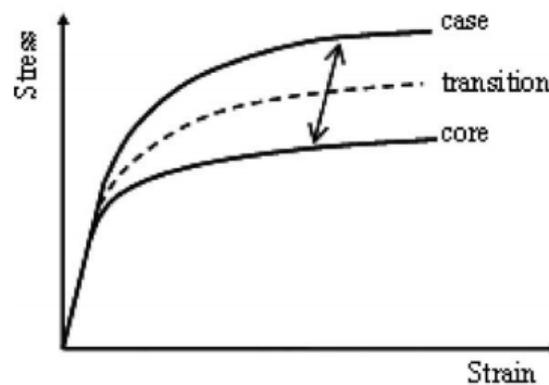
- Descripción de la indentación plástica y tensión residual remanente en la superficie, teniendo en cuenta la geometría del rodamiento, las propiedades del material y el espesor de la capa endurecida por inducción
- La tolerancia al daño de la sub-superficie a medida que descendemos el grado de templado al acercarnos al interior del anillo del rodamiento

El modelo consiste en un análisis elasto-plástico por Elementos Finitos donde estudia la deformación plástica y la superficie templada, así como las tensiones sub-superficiales resultantes de la indentación por carga estática del elemento rodante sobre la pista. La Figura 2.14 muestra el modelo de Elementos Finitos desarrollado donde se detalla de qué manera se ha tenido en cuenta en el modelo la superficie templada (capa de espesor CD).

El material templado, ha sido caracterizado mediante ensayos de compresión a diferentes niveles de endurecimiento. Bajo la capa templada, el material no está endurecido y para



(a)



(b)

Figura 2.15: Esquema de modelización de la transición entre la sección templada y el núcleo sin templar [Lai et al., 2009]

tener en cuenta una cierta progresividad en la dureza a lo largo del espesor, crea una zona de transición lineal de espesor  $0.1CD$  entre la capa de espesor  $CD$  y el núcleo sin endurecer. La Figura 2.15 muestra esquemáticamente esta hipótesis en a) y en b) se muestran tanto las curvas de caracterización de material endurecido (*case*) como de material sin templar, y la manera en la que se van definiendo las propiedades del material de transición a medida que se va acercando a la zona de material sin templar.

Las simulaciones se llevaron a cabo mediante un ciclo de carga y descarga a diferentes niveles, haciendo uso del criterio de fluencia de von Mises junto con endurecimiento isotrópico. En las zonas en las que se alcanzaba fluencia plástica, ésta originaba la aparición de tensiones residuales bajo la superficie. Si las cargas son altas y el espesor

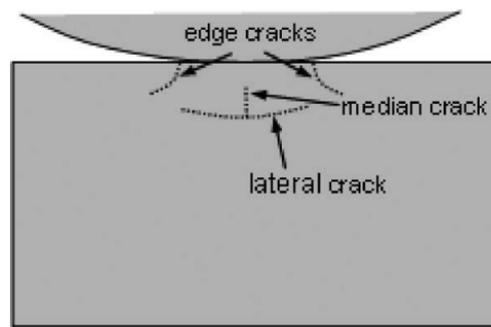


Figura 2.16: Tres tipos de grieta observada en el ensayo de fatiga por contacto [Lai et al., 2009]

templado es reducido, aparecerán tensiones residuales de elevado valor en la zona de transición del endurecimiento, lo que podría originar nucleación de grieta o delaminación entre la capa templada y el núcleo sin templar. También se estudió el caso en el que la plasticidad se produjera únicamente en el núcleo sin templar. En este caso se podría producir tal deformación que la superficie templada sufriera una deflexión posibilitando la aparición de grietas en la propia superficie templada. Este último caso sería propiamente el de *Core Crushing*, en el que la debilitación de la superficie sobre la que se apoya la capa de material templado, tenga como consecuencias la aparición de grietas o incluso desprendimiento de material de la superficie.

Para establecer una correlación entre la indentación y la aparición de daño sub-superficial, se realizaron ensayos experimentales mediante ensayos en una máquina vertical de fatiga por contacto en la que se aplicó una carga cíclica pulsante a un espécimen plano con una bola o con un rodillo. Esta metodología de validación fue propuesta por Alfredsson y Olsson en [Alfredsson and Olsson, 2000] del Royal Institute of Technology. En estos ensayos se pudo apreciar que para provocar una grieta lateral (de acuerdo a la nomenclatura de Lai [Lai et al., 2009], ver Figura 2.16), ésta se producía a una carga más baja que para las grietas de la zona media y extremas.

Estos ensayos le sirvieron para obtener una expresión para la tensión residual equivalente en la transición del espesor templado al núcleo sin templar, que provocara la formación de grietas laterales. Esta tensión residual se calcula mediante la siguiente expresión 2.3:

$$S = C_1 \sigma_y \left[ \tan^{-1} \left( C_2 \left\langle \frac{\sigma_e}{\sigma_y} - 1 \right\rangle - C_3 \right) + \tan^{-1}(C_3) \right] \quad (2.3)$$

donde

$\sigma_y$  es el punto de fluencia del material sin templar

$\sigma_e$  es la tensión equivalente de von Mises en la zona de transición de la parte templada y la parte sin templar

$C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son constantes que se ajustan mediante el modelo de Elementos Finitos expuesto en la Figura 2.14

Si se representa la presión de contacto correspondiente a una carga estática que provoca una indentación de  $10^{-4}d_w$  en función del espesor de la capa templada se obtiene la Figura 2.17. Se ha normalizado el espesor respecto al diámetro de la bola para poder comparar valores de espesor relativo respecto al tamaño del rodamiento. En esta Figura se ve que a medida que aumenta el espesor relativo endurecido, la presión de contacto que provoca esta indentación se acerca asintóticamente a 4200 MPa tal y como se propone en la norma ISO 76 [ISO76, 2006].

Por otro lado, si se analiza la presión de contacto alcanzada antes de que aparezca una grieta subsuperficial, en función del espesor relativo templado, se puede ver en la Figura 2.18 que la presión alcanzada es creciente a medida que se aumenta el espesor de capa templada en los anillos.

Estos dos criterios presentados en las Figuras 2.17 y 2.18 demuestran que es necesario definir la capacidad estática de los rodamientos templados superficialmente haciendo uso tanto de la tolerancia al daño por grieta subsuperficial como la tolerancia frente a la indentación plástica. La unión de estas dos consideraciones queda plasmada en la Figura 2.19 donde se aprecia el punto de intersección  $CD_t$  en el que se cruzarían ambos criterios y para un espesor menor de  $CD_t$  el criterio que prevalece es el de grieta subsuperficial

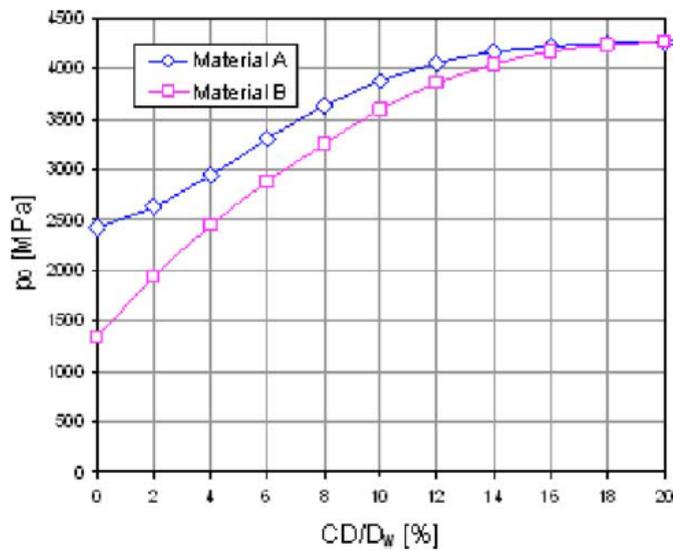


Figura 2.17: Presión de contacto para una indentación permanente de  $10^{-4}d_w$  en función del espesor templado en los anillos para dos materiales diferentes con diferentes espesores de endurecimiento [Lai et al., 2009]

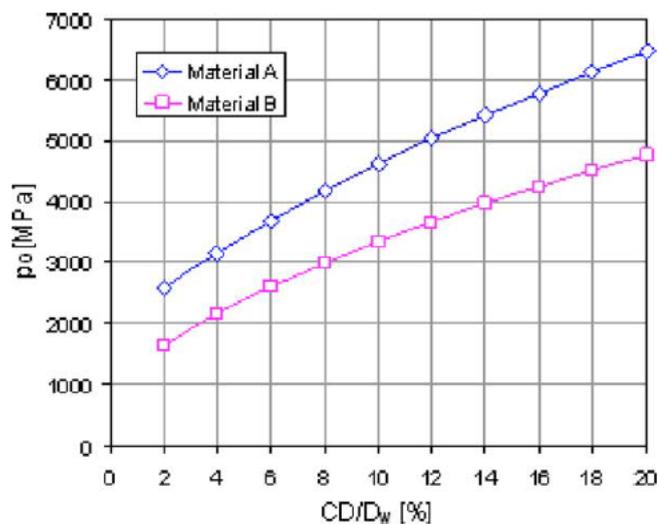


Figura 2.18: Presión de contacto admisible para fallo estático por aparición de grieta subsuperficial en función del espesor templado en los anillos para dos materiales diferentes con diferentes espesores de endurecimiento [Lai et al., 2009]

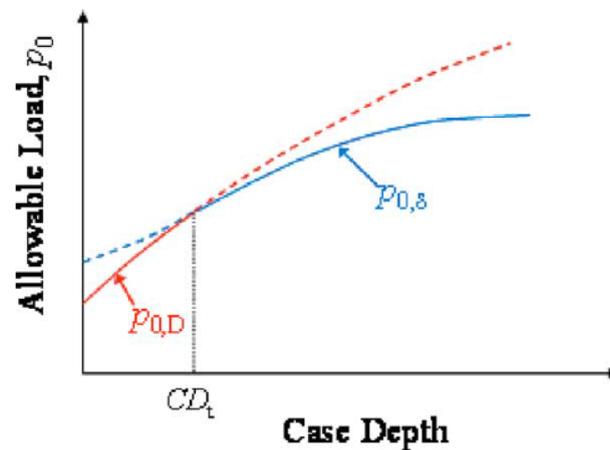


Figura 2.19: [Lai et al., 2009]

(curva  $p_{0,D}$  roja). A partir de una capa templada más gruesa que  $CD_t$  el criterio que es necesario aplicar es el de indentación plástica (curva  $p_{0,\delta}$  azul).

Por tanto, esta metodología propuesta por Lai [Lai et al., 2009] puede ser utilizada para determinar cuál es la presión de contacto que provoca el fallo en rodamientos cuyas pistas han sido templadas por inducción, en lugar de utilizar simplemente el valor conocido de 4200 MPa propuestos por la norma ISO 76 [ISO76, 2006] orientada a rodamientos templados en toda su sección (no sólo temple superficial). El criterio para calcular la presión de contacto máxima admisible se plantea como una comparación entre presión de contacto que provoca una indentación plástica de  $10^{-4}d_w$  y una presión de contacto que provocaría un daño sub-superficial (ecuación 2.3).

Para el caso de rodillos Göncz [Göncz and Glodež, 2015] realizó un análisis de capacidad de carga estática estudiando el espesor de la capa templado, comparándola tanto con el límite establecido por la ISO 76 [ISO76, 2006] como con el trabajo llevado a cabo por Kania [Kania et al., 2012].

Este criterio presentado para determinar la presión de contacto límite se utilizará en los modelos analíticos de cálculo de la capacidad estática que se llevan a cabo en esta Tesis Doctoral.

### 2.4.2. Rigidez

El criterio de rigidez es un criterio funcional, frente al criterio de integridad que representa la capacidad estática descrita en la sección anterior. Es decir, el rodamiento no sufre pérdida de propiedades, pero si a la hora de seleccionar un rodamiento de vuelco, éste permite que las estructuras que se unen al mismo se desplacen excesivamente bajo la aplicación de cierta carga, puede que el sistema del que forma parte el rodamiento no se comporte tal y como se había previsto. Además, es posible que se produzcan colisiones inesperadas entre partes o se pierda precisión a la hora de posicionar la estructura que se une al rodamiento.

La mayoría de los métodos de cálculo de reparto de carga para rodamientos de vuelco (a excepción de trabajos en los que se desarrollan análisis por Elementos Finitos como por ejemplo [Zupan and Prebil, 2001, Smolnicki and Rusinski, 2007, Smolnicki et al., 2008], o trabajos como el de Yao [Yao et al., 2012] que realiza un modelo de vigas curvas de Timoshenko) consideran los anillos y las estructuras unidas a los mismos como rígidas. El considerar únicamente las deformaciones debidas al contacto, cuando tanto anillos como estructuras a las que se montan tienen una flexibilidad, conlleva como problema más evidente el subestimar los desplazamientos totales. Otro de los efectos que se produce, más a nivel local, debido a la elasticidad de los anillos y estructuras, son cambios bruscos en ángulos y presiones de contacto entre elementos rodantes adyacentes. Además, como se ha comentado previamente, la distribución de cargas en las bolas será diferente al considerar la elasticidad de los anillos y estructuras. En definitiva, el funcionamiento del rodamiento no quedará correctamente representado al ignorar este efecto, excepto en determinados casos de estructuras muy rígidas o que han sido reforzadas para conseguir alta rigidez [Amasorrain et al., 2003]. El caso más general es distinto y la flexibilidad del conjunto anillos-estructura tiene gran influencia.

A la hora de intentar abordar este estudio, se han llevado a cabo desarrollos para rodamientos de engranajes planetarios en [Jones and Harris, 1962, Harris and Broschard, 1964, Mignot et al., 2010]. Sin embargo estos rodamientos están sometidos siempre a

las mismas condiciones de contorno y al mismo tipo de fuerzas, que están aplicada en dos puntos de la periferia diametralmente opuestos. En el caso de rodamientos de vuelco existe gran variedad de condiciones de contorno y las fuerzas en el contacto elemento rodante-pista no son conocidas a priori sino que son calculadas.

Otro de los aspectos que no ha sido tratado y que tiene una importancia fundamental en cuanto a la rigidez del rodamiento es la existencia de precarga, concepto ha sido ya mencionado en la sección 2.1 y sobre el que se ahondará más adelante en esta Tesis Doctoral.

En esta Tesis Doctoral se ha trabajado en el estudio de la rigidez incluyendo el efecto de la precarga en el Capítulo 4.

### 2.4.3. Par de fricción en vacío y bajo carga

Otra de las características funcionales que influyen a la hora de seleccionar un rodamiento de vuelco es el denominado par de fricción. En rodamientos, el par de fricción se refiere al momento resistente necesario para hacer girar un anillo con respecto al otro. Al igual que otras características funcionales que se han descrito hasta el momento, el fenómeno del par de fricción también se diferencia de forma notable respecto al de los rodamientos convencionales.

Como se ha mencionado, los rodamientos de vuelco son elementos guiados y por tanto conocer la resistencia al giro es fundamental para diseñar o seleccionar los sistemas de actuación. Este momento resistente tiene gran importancia en el comportamiento funcional del sistema de orientación o giro del que forma parte el rodamiento de vuelco. No sólo influye en la fatiga del propio rodamiento sino que a mayor par resistente la cadena cinemática que constituye el sistema de orientación estará más solicitada desde el punto de vista de la fatiga, además de requerir un actuador más potente lo que encarecerá todo el conjunto. Una subestimación del par resistente hará que no se llegue a orientar adecuadamente y las consecuencias pueden ser una falta de precisión, que se originen cargas

debidas al desalineamiento que afecten negativamente a la vida de la máquina o que se dé una pérdida de rendimiento en aplicaciones como eólica o solar; si por el contrario la estimación es muy conservadora, los sistemas de actuación se diseñarán sobredimensionados, lo que representa un sobre coste que hará que el rendimiento productivo de la máquina no sea óptimo.

Por tanto, el par de fricción no es solamente un criterio de selección que permita elegir entre diferentes diseños para la aplicación en concreto que se esté tratando, conocer en todo momento el valor del par de fricción hará que el control del sistema de actuación genere la respuesta adecuada para posicionar el rodamiento en el ángulo deseado y a la velocidad requerida. Con este propósito, se han desarrollado inicialmente modelos lineales simplificados que se tratarán en la sección 2.5.4.1.

El dimensionamiento de los rodamientos de orientación y su implicación sobre las estructuras que los soportan está siendo uno de los temas más estudiados dentro del mundo eólico en estos últimos años. A pesar de ello, siguen existiendo ciertas lagunas en temas relacionados con la estimación de vida a fatiga, el par de fricción bajo carga y su evolución con el tiempo y el comportamiento del componente en idling o en condiciones de orientación constante en las que se produce el denominado falso *brinelling*.

En esta Tesis Doctoral se ha trabajado en el estudio del par de fricción de forma preliminar, planteando modelos analíticos que pueden resolver las incertidumbres que existen para el comportamiento de los rodamientos de vuelco desde el punto de vista del par de fricción bajo carga en el Capítulo 5.

#### **2.4.4. Otros criterios. Capacidad dinámica - fatiga, rangos de movimiento...**

Continuando con criterios en régimen dinámico, al igual que en cualquier elemento mecánico, es necesario conocer el comportamiento a fatiga a lo largo de su vida útil. Lo habitual es que este tipo de rodamientos tengan una vida en funcionamiento prolongada,

con operaciones de mantenimiento de baja frecuencia. A la hora de calcular su capacidad de soportar cargas variables en el tiempo, se puede hacer de manera simplificada mediante la norma ISO 281 [281, 2007], orientada de igual manera que su equivalente para la capacidad estática (ISO 76 [ISO76, 2006]) para rodamientos tradicionales. En esta normativa se presentan una serie de parámetros que aparte de ser función de la geometría del rodamiento y de la capacidad estática, dependen de la lubricación, del acabado superficial de bolas y pistas, de la variabilidad de las cargas dinámicas, de la severidad del ambiente, . . . Es decir, para mejorar la capacidad de duración del rodamiento, además de tener unos acabados superficiales y tolerancias adecuadas que sí forman parte del criterio de selección del rodamiento propiamente, habrá que trabajar sobre elementos externos como pueden ser un sistema de lubricación de determinado nivel, una estanqueidad determinada, o de hasta un sistema adjunto de absorción de vibraciones. En rodamientos clásicos, la forma de aumentar la vida era intentando en la medida de lo posible que se produjera lubricación hidrodinámica. Ésto, en rodamientos de vuelco, no es posible dado su bajo régimen de giro.

Conocida la problemática de presentar estos rodamientos una forma de trabajo muy diferente a la de los rodamientos tradicionales, la guía NREL [Harris et al., 2009] recoge una serie de recomendaciones para modificar los parámetros de la norma ISO 281 [281, 2007] o simplemente indicaciones en cierta manera cualitativas acerca de cómo programar el sistema de control cuando las oscilaciones del rodamiento de vuelco son de muy baja amplitud o sin rotación durante largos periodos, para prolongar la vida útil de los rodamientos de vuelco. A pesar de ser una guía orientada a la energía eólica, sus recomendaciones pueden ser aplicadas siempre que los rodamientos de vuelco operen de manera similar a como se menciona en citada la guía.

Otros requisitos funcionales como pueden ser una determinada capacidad dinámica, el ser capaces de soportar esfuerzos permaneciendo en una determinada posición sin rotar, soportar cargas en una dirección predominante o disponer de determinadas características en la unión atornillada, más que condicionar un determinado diseño en sí, condicionan el diseño de los elementos auxiliares que se montan junto con el rodamiento. Por ejemplo,

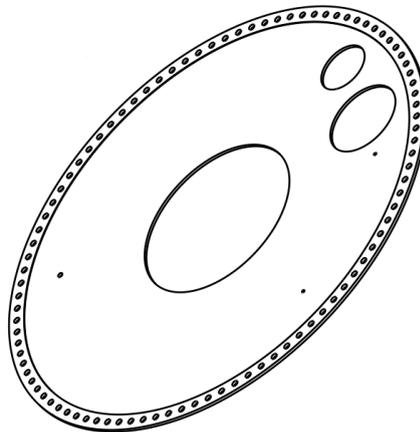


Figura 2.20: Placa rigidizadora para un rodamiento de pala

Fuente: <http://www.gamesacorp.com/es/>

si el rodamiento va a tener una dirección predominante en la que van a actuar fuerzas y su rango de movimiento va a ser limitado, puede que haya que pensar en reforzar de alguna manera los anillos para repartir de forma más uniforme la carga en las bolas reduciendo la flexibilidad de los anillos. A tal efecto en determinados casos se ha adoptado como solución el añadir un plato rigidizador como el de la Figura 2.20.

A la hora de seleccionar rodamientos de vuelco, existe otra preocupación que pudiera hacer que un fabricante se diferenciara respecto al resto, y es la reducción de ruido. Son estructuras muy grandes que tienen un contacto metal-metal y que normalmente están unidas a otras estructuras que pueden tener geometría cilíndrica y actuar de esta manera como amplificadores del ruido.

Finalmente, se pueden mencionar otros requisitos funcionales exigidos a los rodamientos de vuelco en función de sus aplicaciones, muchos de los cuales ya han sido indicados anteriormente: rango de temperatura de trabajo, tratamientos superficiales determinados por estar a la intemperie o en ambientes específicos, capacidad de soportar rayos, estanqueidad, etcétera. Todos estos criterios mencionados en esta sección quedan fuera del alcance de esta Tesis Doctoral.

## 2.5. Antecedentes directos de la Tesis Doctoral

Tal y como se ha mencionado en la sección anterior, los fabricantes e investigadores involucrados en la temática de los rodamientos de vuelco aspiran a poder disponer de modelos matemáticos mejorados. En esta Tesis Doctoral se desarrollarán una serie de modelos que ayudan a profundizar en el estudio del comportamiento en servicio de los rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto. En concreto, se han desarrollado herramientas de cálculo para la obtención de la capacidad estática bajo una combinación cualquiera de cargas, así como para el cálculo de la rigidez del rodamiento, y finalmente una metodología preliminar para la estimación del par de fricción. Estas herramientas parten de una serie de modelos matemáticos fundamentales que se van exponer en esta sección, y que han supuesto el antecedente directo de esta Tesis Doctoral.

### 2.5.1. Conceptos básicos en cálculo de rodamientos

Para cualquier cálculo resistente de rodamientos, es necesario conocer el estado tensional del contacto elemento rodante-pista bajo la carga que esté aplicada sobre el rodamiento. Para el caso estático, como puede ser el cálculo del reparto de carga o la capacidad estática del rodamiento, o los casos dinámicos, como son el cálculo a fatiga y el momento de fricción, es fundamental conocer este estado tensional ya que condiciona directamente el reparto de cargas en los elementos rodantes. A continuación se describe cómo se define el contacto que se produce entre elementos rodantes y pistas en función de la geometría de ambos, centrado en rodamientos de bolas de cuatro puntos de contacto que son los que se estudian en esta Tesis Doctoral.

En primer lugar, se indican los parámetros geométricos básicos en rodamientos de vuelco; posteriormente, se estudia el estado tensional en el contacto bola-pista; y por último, se analiza la distribución de cargas en el rodamiento bajo cargas externas.

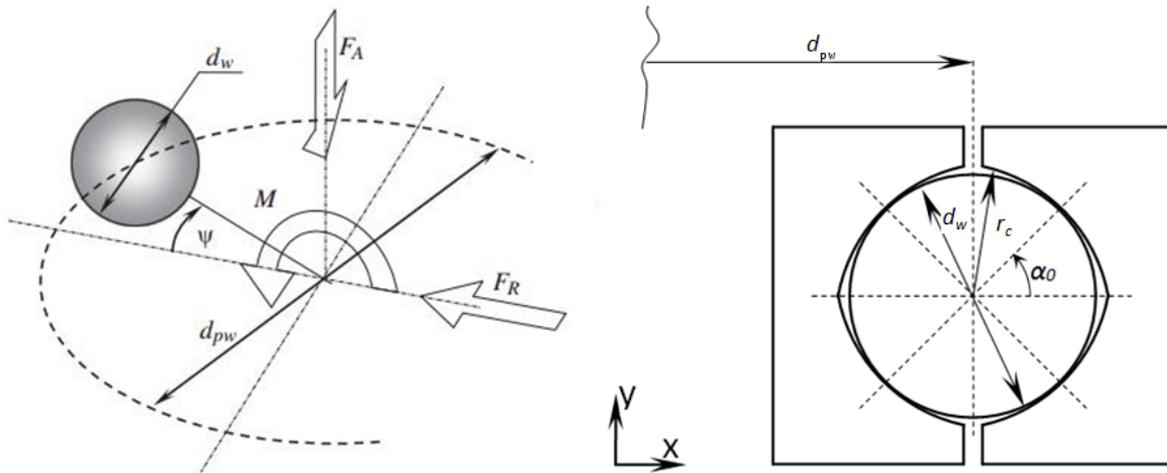


Figura 2.21: Descripción de los parámetros geométricos del rodamiento de [Aguirrebeitia et al., 2012c]

### 2.5.1.1. Parámetros geométricos del rodamiento de bolas de cuatro puntos de contacto angular

Además de los mostrados anteriormente en la Figura 2.5, los parámetros geométricos utilizados para los modelos de cálculo serán los de la Figura 2.21.

En la Figura 2.21,  $d_w$  es el diámetro de la bola,  $d_{pw}$  es el diámetro nominal o diámetro medio en el que se sitúa el centro de las bolas,  $r_c$  es el radio de curvatura de las pistas y  $\psi$  es el ángulo azimutal en el cual se sitúan los centros de las bolas.

Entre bola y pistas existe un contacto conforme. Esta conformidad  $C$  (o su inverso, que es el ratio de osculación  $s$ ) se define como:

$$C = \frac{2r_c}{d_w} \quad \text{ó} \quad s = \frac{d_w}{2r_c} \quad (2.4)$$

Asimismo, es necesario definir la localización de los centros de curvatura de las pistas. Definimos  $\Delta_a$  como la distancia axial entre los centros de las pistas superior e inferior de los anillos interior y exterior respectivamente, y  $\Delta_r$  como la distancia radial entre

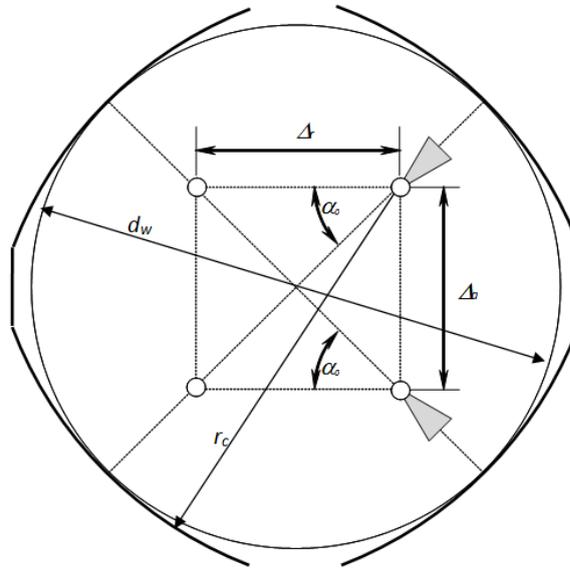


Figura 2.22: Distancias axial y radial entre los centros de las pistas

los centros de las pistas superior e inferior de los anillos interior y exterior respectivamente, como queda ilustrado en la Figura 2.22. Estas distancias axial y radial quedan determinadas mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\Delta_a &= (2r_c - d_w) \sin \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} \right) \sin \alpha_0 \\ \Delta_r &= (2r_c - d_w) \cos \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} \right) \cos \alpha_0\end{aligned}\quad (2.5)$$

De esta manera, quedaría también definido el ángulo inicial de contacto  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \arctan \left( \frac{\Delta_a}{\Delta_r} \right) \quad (2.6)$$

### 2.5.1.2. Planteamiento teórico del estado tensional en el contacto elemento rodante-pista. Aplicación de la Teoría de Hertz

El cálculo del estado tensional en el contacto elemento rodante-pista se basa en la teoría de Hertz [Hertz, 1896] para contacto entre dos cuerpos. Se va a introducir esta teoría de manera general para posteriormente particularizarla al caso de rodamientos de bolas de contacto angular. Las hipótesis de partida en las que se basa dicha teoría son:

- Todas las deformaciones ocurren en el rango elástico y son mucho menores que los radios de curvatura de las superficies.
- Las dimensiones de la zona de contacto son muy pequeñas comparadas con las dimensiones de los cuerpos y con los radios de curvatura de las superficies.
- El contacto se produce sin fricción, de forma que sólo se transmite una fuerza normal entre los cuerpos.
- Las superficies de los cuerpos son totalmente lisas (sin rugosidades) y no conformes.

En el caso de rodamientos de vuelco, el área de contacto bola-pista tiene una conformidad alta en una dirección (plano que contiene al eje de rotación del rodamiento) pero baja en la dirección perpendicular, lo cual hace que la dimensión del área de contacto en la primera dirección sea del orden de las dimensiones del elemento rodante. El contacto se produce con fricción, pero las tensiones tangenciales no distorsionan el área de contacto. Es decir, a pesar de no cumplirse todas las condiciones de las hipótesis de partida de la teoría de Hertz, ya que como se acaba de mencionar en una de las direcciones el área de contacto es del orden a las dimensiones del elemento rodante, existe fricción en el contacto y las superficies de los cuerpos tienen conformidad alta en una de las direcciones, utilizando estas simplificaciones se obtienen buenos resultados para el caso que nos ocupa. En [[Pandiyarajan et al., 2012](#)], Pandiyarajan realiza una comparación mediante Elementos Finitos y la teoría de contacto de Hertz para rodamientos de grandes dimensiones y comprueba que los resultados son satisfactorios.

Por tanto, en base a estas hipótesis de la teoría de Hertz los dos sólidos en contacto (en este caso bola y pista de rodadura) pueden asemejarse a sendos semiespacios infinitos y las superficies en contacto pueden ser representadas como dos paraboloides (superficies dos veces diferenciables, y con un radio de curvatura constante en las proximidades del punto de contacto). Esta semejanza se muestra en la Figura [2.23](#).

Para el caso general de la teoría de Hertz, se definen unos ejes de coordenadas centrados en el punto teórico de contacto tal que  $z$  es la dirección normal ( $x$ ,  $y$  están contenidos

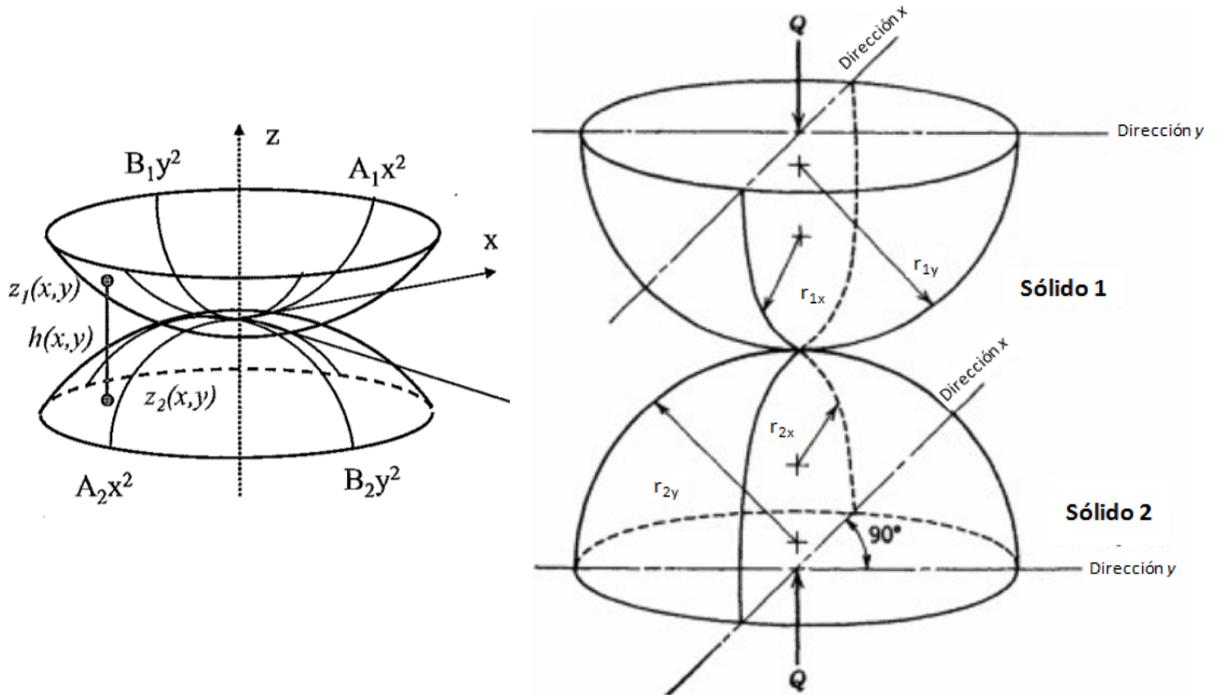


Figura 2.23: Radios de curvatura en contacto hertziano [Harris and Kotzalas, 2007a]

en el plano tangente al contacto).

La ecuación general de un paraboloides es  $z(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy$ . En un caso general, no tienen por qué coincidir las direcciones con los radios de curvatura principales de los dos cuerpos. En los ejes comunes, las superficies de cada cuerpo serán:

$$\begin{aligned} z_1(x, y) &= A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy \\ z_2(x, y) &= A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy \end{aligned} \quad (2.7)$$

A su vez, se define la distancia indeformada  $h(x, y)$  entre dos puntos de las superficies como:

$$h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y) = (A_1 + A_2)x^2 + (B_1 + B_2)y^2 + (C_1 + C_2)xy \quad (2.8)$$

En cada cuerpo existen dos radios de curvatura principales, situados según dos direcciones ortogonales, como se muestra en Figura 2.23. Si se plantea la superficie de cada cuerpo

$i$  en unos ejes coordenados que coincidan con estas direcciones de curvatura principales, la ecuación del paraboloides queda de la siguiente manera:

$$z_i(x_i, y_i) = A'_i x_i^2 + B'_i y_i^2 \quad (2.9)$$

Es muy frecuente que se den casos en los que sí coincidan las direcciones con las curvaturas principales de los dos cuerpos. Las direcciones de este nuevo sistema de coordenadas representan las direcciones principales de curvatura conjunta de los dos sólidos. Este sería el caso de los rodamientos de contacto angular que particularizaremos al final de esta sección. En este caso la distancia indeformada se simplifica a la siguiente expresión:

$$h(x, y) = D_1 x^2 + D_2 y^2 \quad (2.10)$$

Se definen  $R_x$  y  $R_y$ , las curvaturas equivalentes en  $x$  e  $y$  como:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{1x}} + \frac{1}{r_{2x}} \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{1y}} + \frac{1}{r_{2y}}$$

Donde:

$\frac{1}{r_{1x}}$  es la curvatura del cuerpo 1 en la dirección  $x$

$\frac{1}{r_{2x}}$  es la curvatura del cuerpo 2 en la dirección  $x$

$\frac{1}{r_{1y}}$  es la curvatura del cuerpo 1 en la dirección  $y$

$\frac{1}{r_{2y}}$  es la curvatura del cuerpo 2 en la dirección  $y$

A continuación se definen dos parámetros auxiliares. Por un lado, la suma de curvaturas:

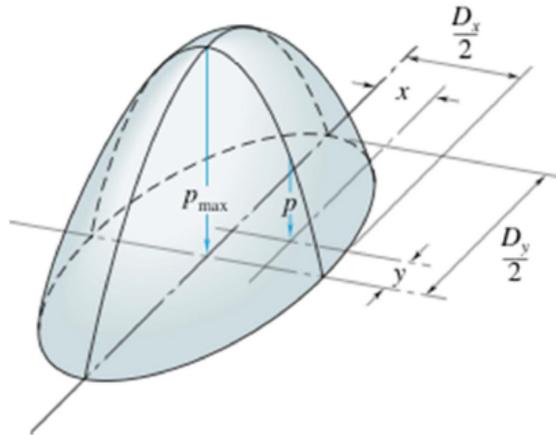


Figura 2.24: Distribución de presiones elipsoidal en el área de contacto

$$\sum \rho = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \quad (2.12)$$

Por otro lado, la diferencia de curvaturas:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sum \rho} \left( \frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) \quad (2.13)$$

Hertz asumió que la zona de contacto entre los dos sólidos debía ser una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  y, por analogía, la distribución de presiones un elipsoide sobre esa superficie elíptica, tal y como se muestra en la Figura 2.24. Es decir, la distribución de presiones en el contacto tiene la siguiente expresión:

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (2.14)$$

Donde  $p_0$  es la presión máxima, que se da en el centro de la elipse de contacto ( $x = y = 0$ ).

El campo de desplazamientos originado por dicha distribución de presiones en las superficies paraboloides es compatible con la forma elíptica de contacto supuesta en el desarrollo de Hertz. Primeramente es necesario calcular de forma iterativa la relación de

elipticidad  $\kappa = \frac{a}{b}$  de la zona de contacto. Para ello hay que resolver de forma iterativa la siguiente ecuación:

$$1 - \frac{2\kappa^2}{1 - \kappa^2} \left( \frac{\mathcal{K}(\kappa)}{\mathcal{E}(\kappa)} - 1 \right) - \mathcal{F} = 0 \quad (2.15)$$

siendo  $\mathcal{K}(\kappa)$  la integral elíptica completa de primera especie

$$\mathcal{K}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) \sin^2 \phi}} d\phi \quad (2.16)$$

y  $\mathcal{E}(\kappa)$  integral elíptica completa de segunda especie

$$\mathcal{E}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) \sin^2 \phi} d\phi \quad (2.17)$$

Calculados estos tres parámetros, se obtiene lo que se conoce como semiejes adimensionales de contacto ( $a^*$  y  $b^*$ ) y la interpenetración adimensional ( $\delta^*$ ):

$$a^* = \left( \frac{2\mathcal{E}(\kappa)}{\pi\kappa^2} \right)^{1/3} \quad (2.18)$$

$$b^* = \left( \frac{2\mathcal{E}(\kappa)}{\pi} \right)^{1/3}$$

$$\delta^* = \frac{2\mathcal{K}(\kappa)}{\pi} \left( \frac{\pi\kappa^2}{2\mathcal{E}(\kappa)} \right)^{1/3} \quad (2.19)$$

Además de estos parámetros geométricos, es necesario definir también un módulo de elasticidad equivalente del contacto entre los dos cuerpos para obtener las dimensiones reales de la elipse de contacto y la deformación en el contacto. Si  $\nu_1$  y  $\nu_2$  son los coeficientes de Poisson de los cuerpos 1 y 2 respectivamente, y  $E_1$  y  $E_2$  son los módulos de Young de los cuerpos 1 y 2 respectivamente, el módulo de Young equivalente se expresa como:

$$E' = \frac{2}{\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}} \quad (2.20)$$

Y los semiejes de la elipse de contacto quedan finalmente:

$$a = a^* \left( \frac{3Q}{E' \Sigma \rho} \right)^{1/3} \quad (2.21)$$

$$b = b^* \left( \frac{3Q}{E' \Sigma \rho} \right)^{1/3}$$

De igual manera la interpenetración elástica, que no es otra cosa que el acercamiento entre los dos cuerpos en la dirección normal de contacto debida únicamente a la deformación de los mismos, se expresa como:

$$\delta = \frac{\delta^* \Sigma \rho}{2} \left( \frac{3Q}{E' \Sigma \rho} \right)^{2/3} \quad (2.22)$$

Una vez calculados los semiejes  $a$  y  $b$  de la elipse de contacto, la presión máxima  $p_0$  se obtiene igualando el volumen de medio elipsoide, es decir, la integral de la distribución de presiones de la Figura 2.24, a la carga  $Q$ .

$$\frac{2}{3} \pi a b p_0 = Q$$

de donde:

$$p_0 = \frac{3Q}{2\pi a b} \quad (2.23)$$

Para contacto puntual, se obtiene a partir de la ecuación 2.22 la siguiente relación carga normal frente a deformación:

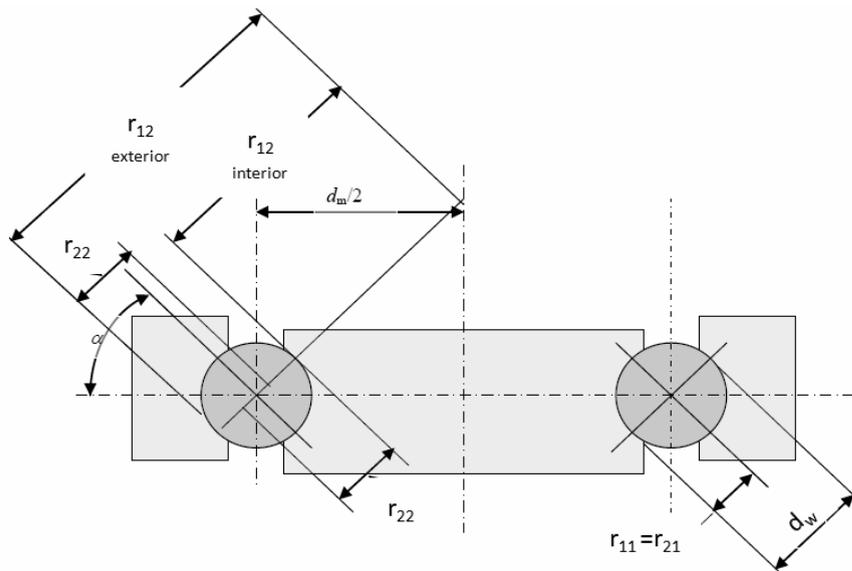


Figura 2.25: Radios de curvatura para un rodapiamiento de bolas de cuatro puntos de contacto, [Harris et al., 2009]

$$Q = K_n \delta^{3/2} \quad (2.24)$$

Siendo  $K_n$  la constante de deflexión de Hertz, cuya expresión partiendo de la ecuación 2.22 es:

$$K_n = \frac{E' \sum \rho}{3} \left( \frac{2}{\delta^* \sum \rho} \right)^{3/2} \quad (2.25)$$

### Caso de rodapiamiento de bolas de 4 puntos de contacto

Una vez descritos los parámetros geométricos de la teoría de contacto hertziano que se aplicarían al cálculo de rodapiamientos de bolas, se van a particularizar esos parámetros al contacto bola-pista de un rodapiamiento de bolas de cuatro puntos de contacto angular.

La curvatura puede considerarse con signo positivo o negativo. Si el centro de curvatura cae dentro del mismo sólido, la curvatura es positiva; en cambio si el centro de curvatura no pertenece al sólido, la curvatura es negativa. Para el caso concreto de un rodapiamiento

de bolas de cuatro puntos de contacto los radios de curvatura para el contacto hertziano se muestran en la Figura 2.25. Los subíndices se refieren, al igual que en las expresiones 2.11, el primero al número del sólido y el segundo a la dirección principal de contacto. Como sólido 1 se elige la bola y como sólido 2 se elige la pista.

En lugar de trabajar con los valores de los radios, se trabaja con su inverso, es decir, la curvatura. Se definen como curvaturas principales del sólido 1 (en nuestro caso la bola):

$$\rho_{11} = \rho_{21} = \frac{2}{d_w} \quad (2.26)$$

y como curvaturas principales del elemento 2 (en nuestro caso los anillos), donde el signo superior aplica al anillo interior y el inferior al anillo exterior:

$$\rho_{12} = \pm \frac{1}{\frac{d_{pw}}{2 \cos \alpha} \mp \frac{d_w}{2}}; \quad \rho_{22} = -\frac{2s}{d_w} \quad (2.27)$$

La suma de curvaturas queda:

$$\sum \rho = \frac{2}{d_w} \left( 2 \pm \frac{\gamma}{1 \mp \gamma} - \frac{1}{2f_{i,e}} \right) \quad (2.28)$$

Y la diferencia de curvaturas:

$$F(\rho) = \frac{\pm \frac{\gamma}{1 \mp \gamma} + \frac{1}{2f_{i,e}}}{2 \pm \frac{\gamma}{1 \mp \gamma} - \frac{1}{2f_{i,e}}} \quad (2.29)$$

En las ecuaciones 2.28 y 2.29 los subíndices  $i,e$  están referidos a pista interior y exterior respectivamente, y los parámetros  $\gamma$ ,  $f_i$  y  $f_e$  son:

$$\gamma = \frac{d_w \cos \alpha}{d_{pw}}$$

$$f_i = \frac{r_i}{d_w}$$

$$f_e = \frac{r_e}{d_w}$$

donde  $r_i$  y  $r_e$  son los radios de curvatura de la pista interior y exterior, respectivamente.

La constante de deflexión de Hertz se define para cada punto de contacto y depende de las curvaturas de ambos cuerpos según lo reflejado en la expresión 2.25. Ricci [Ricci, 2010d] obtuvo la siguiente expresión para la constante de deflexión de Hertz equivalente al contacto de la pista interior  $i$  y exterior  $e$  simultáneamente:

$$K_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi E' \left[ \left( \frac{\mathcal{K}^3(\kappa)}{\kappa \mathcal{E}(\kappa) R} \right)_i^{1/3} + \left( \frac{\mathcal{K}^3(\kappa)}{\kappa \mathcal{E}(\kappa) R} \right)_e^{1/3} \right] \quad (2.30)$$

Esta relación carga deformación es no lineal no sólo por el exponente  $\frac{3}{2}$  característico de contacto puntual, sino por la expresión 2.25 para la constante de deflexión, que a pesar del nombre que se le da es altamente no lineal, debiéndose obtener los parámetros de los que depende de forma iterativa como se ha visto anteriormente en el desarrollo. De esta resolución iterativa se pueden obtener las dimensiones de la elipse de contacto ( $a$  y  $b$ ), la presión máxima ( $p_0$ ) y la deformación total en el contacto ( $\delta$ ). Para evitar todo esto en cada problema concreto, existen trabajos que han adaptado las fórmulas de Hertz para el caso de los rodamientos, dando lugar a fórmulas simplificadas. Daidié en [Daidié et al., 2008] obtuvo a partir del trabajo de Houpert [Houpert, 2001] las siguientes expresiones ( $a$ ,  $b$  y  $\delta$  en milímetros, y la presión  $p_0$  en [MPa] ) para cuando el elemento rodante es una bola.

$$\begin{aligned} a &= 1.71 \times 10^{-2} (1-s)^{-0.4091} d_w^{1/3} \left( 1 \pm \frac{d_w \cos \alpha}{d_{pw}} \right)^{-0.0758} Q^{1/3} \\ b &= 1.52 \times 10^{-2} (1-s)^{0.1974} d_w^{1/3} \left( 1 \pm \frac{d_w \cos \alpha}{d_{pw}} \right)^{0.5307} Q^{1/3} \\ \delta &= 8.97 \times 10^{-4} (1-s)^{0.1946} \frac{Q^{2/3}}{d_w^{1/3}} \\ p_0 &= 1.84 \times 10^3 (1-s)^{0.2117} \left( 1 \pm \frac{d_w \cos \alpha}{d_{pw}} \right)^{-0.4550} \frac{Q^{1/3}}{d_w^{2/3}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

### 2.5.1.3. Distribución de carga en los elementos rodantes

La distribución de carga en los elementos rodantes es el pilar fundamental sobre el que se asienta el análisis del comportamiento de rodamientos de vuelco. Desde el cálculo resistente de la capacidad estática, pasando por la rigidez/deformaciones, momento de fricción y fatiga, se hace necesario conocer la forma en que se distribuyen internamente las cargas aplicadas en el rodamiento.

En cuanto al cálculo estático en la sección 2.4.1 ya se ha descrito la forma simplificada en la que la norma ISO 76 [ISO76, 2006] considera que un rodamiento alcanza su capacidad estática mediante la estimación de una carga axial equivalente. Si se conoce la distribución de cargas en las bolas bajo cualquier combinación de esfuerzo axial, radial y de momento de vuelco, se puede calcular la capacidad de carga estática de forma general para cualquier carga actuante; es decir, se pueden obtener las combinaciones de cargas que provocan el fallo estático del rodamiento.

Igualmente, para el caso del cálculo de la rigidez, retomando la expresión de Hertz para contacto puntual (2.24) se ve que la deflexión  $\delta$  en el contacto depende de la carga  $Q$  que existe entre los cuerpos. Lo mismo sucede para el cálculo del momento de fricción, cuya magnitud también depende de la carga normal, como se verá en la sección 2.5.4 dedicada a los modelos para el cálculo del par de fricción existentes.

Es decir, previo al estudio de cualquier ámbito del comportamiento mecánico de un rodamiento, es necesario conocer la distribución de cargas interna en los elementos rodantes.

A continuación se van a mostrar los modelos elementales del reparto de carga, que sirvieron como punto de partida para desarrollar los modelos más complejos de distribución de carga, los cuales son un antecedente directo para el modelo desarrollado en esta Tesis Doctoral.

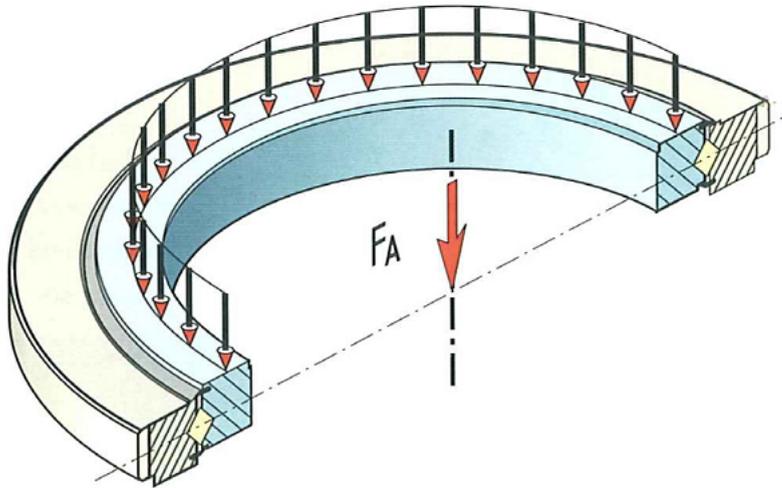


Figura 2.26: Distribución teórica de carga entre las  $Z$  debida a esfuerzo axial ([Rollix, 2007])

### Distribución teórica de carga debida a esfuerzo axial $F_A$ .

Considerando de forma separada la carga axial  $F_A$ , ésta se reparte uniformemente entre todas las bolas. Es decir, la carga en cada una de las  $Z$  bolas es:

$$Q = \frac{F_A}{Z} \quad (2.32)$$

### Distribución de carga teórica debida al momento de vuelco $M$ . Modelo de Stribeck

La distribución de carga teórica debida al momento  $M$  se representa en la Figura 2.27.

En este caso, asumiendo según la Figura 2.27 que la carga que llega a un elemento rodante y su deformación generada es proporcional a la distancia de dicho elemento rodante a la línea neutra, se tiene que:

$$\frac{\delta_0}{R} = \frac{\delta_n}{R \cdot \cos(\lambda \cdot n)}$$

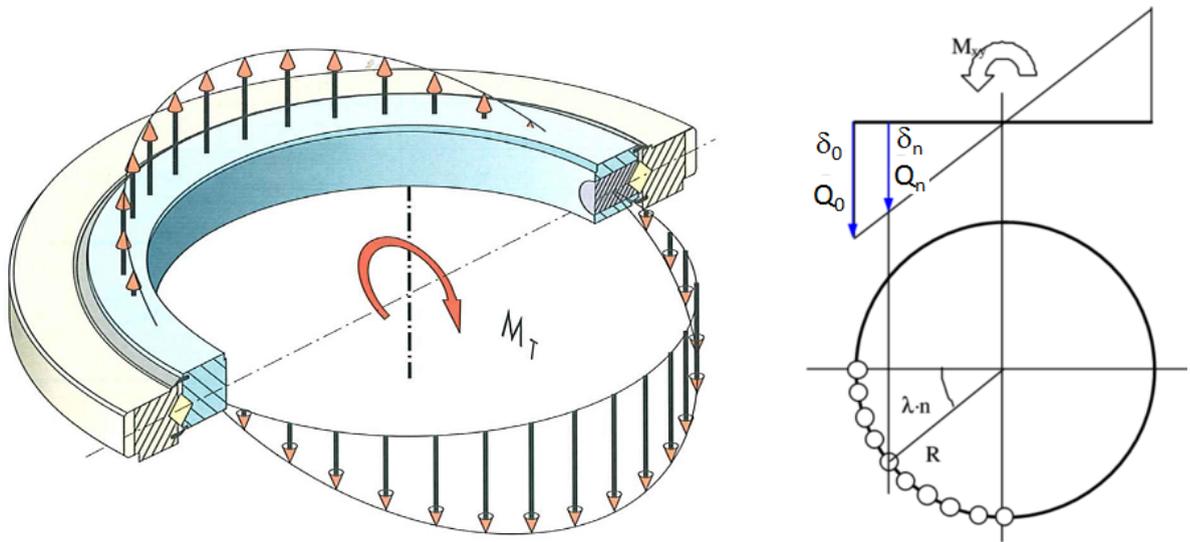


Figura 2.27: Distribución teórica de carga debido al momento de vuelco ([Rollix, 2007])

$$\delta_n = \delta_0 \cos\left(\frac{2\pi n}{Z}\right) \quad (2.33)$$

Donde como se puede ver en la figura 2.27,  $\lambda \cdot n$  es el ángulo azimutal de la bola  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, Z$ ),  $R$  es el radio correspondiente al centro de las bolas y  $\delta_0$  es la deflexión en el contacto para la bola más cargada.

Utilizando la relación carga-deformación obtenida por Hertz [Hertz, 1896] para contacto puntual, la carga en cada una de las bolas es:

$$Q_n = Q_0 \left(\frac{\delta_n}{\delta_0}\right)^{3/2} = Q_0 \cos^{3/2}\left(\frac{n2\pi}{Z}\right) \quad (2.34)$$

Donde de nuevo como se aprecia en la Figura 2.27  $Q_0$  es la fuerza normal de contacto correspondiente a la bola más cargada.

Llevando esta última expresión a la condición de equilibrio, obtenemos la siguiente expresión:

$$M = \sum_{n=1}^Z Q_0 R \cos^{5/2} \left( \frac{2\pi n}{Z} \right) \quad (2.35)$$

Por tanto la fuerza en la bola más cargada toma la forma:

$$Q_0 = \frac{4M}{d_{pw}Z} \quad (2.36)$$

Introduciendo esta última ecuación en la expresión 2.33, la carga en cada una de las bolas en función de su ángulo azimutal y el momento de vuelco queda:

$$Q_n = \frac{4M}{d_{pw}Z} \cos \left( \frac{2\pi n}{Z} \right) \quad (2.37)$$

### Distribución de carga teórica debida al esfuerzo radial $F_R$ .

Por último, para el caso de una carga radial pura  $F_R$ , la deformación sigue una distribución sinusoidal como se representa en la Figura 2.28.

$$\delta_n = \delta_0 \cos \left( \frac{n2\pi}{Z'} \right)$$

donde  $Z'$  es el número de bolas efectivas que soportan la carga, en este caso la mitad del número total de elementos rodantes, y por tanto  $n$  ahora será  $n = 1, 2, \dots, Z'$ .

Utilizando la relación carga-deformación obtenida por Hertz [Hertz, 1896] para contacto puntual, la carga en cada una de las bolas es:

$$Q_n = Q_0 \left( \frac{\delta_n}{\delta_0} \right)^{3/2} = Q_0 \cos^{3/2} \left( \frac{n2\pi}{Z'} \right) \quad (2.38)$$

Con lo cual, la expresión del equilibrio para el esfuerzo radial queda de la siguiente manera:

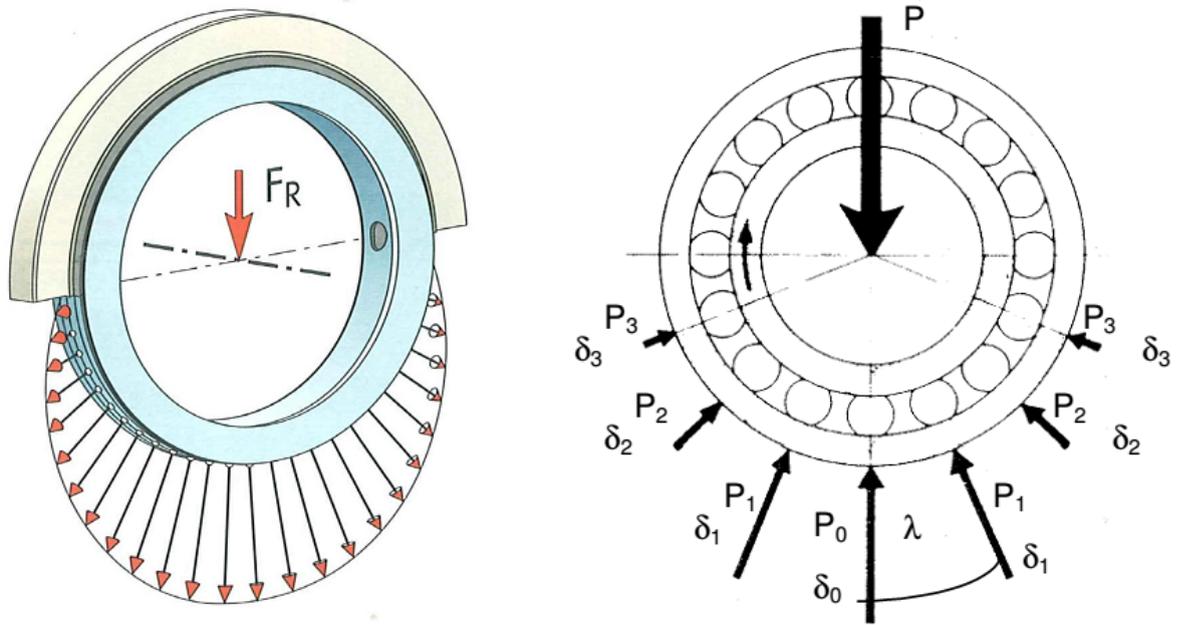


Figura 2.28: Distribución teórica de carga debido al esfuerzo radial ([Rollix, 2007])

$$\begin{aligned}
 F_R &= \sum Q_i = Q_0 + 2Q_1 \cos\left(\frac{2\pi}{Z'}\right) + 2Q_2 \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{Z'}\right) + \dots + 2Q_n \cos\left(\frac{n2\pi}{Z'}\right) = \\
 &= Q_0 \left(1 + 2 \cos^{5/2}\left(\frac{2\pi}{Z'}\right) + 2 \cos^{5/2}\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{Z'}\right) + \dots + 2 \cos^{5/2}\left(\frac{n2\pi}{Z'}\right)\right) = \\
 &= Q_0 \cdot \chi
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Si se realiza el cálculo de ese sumatorio, se obtiene  $\chi = \frac{4.37}{Z'}$ . Este valor de 4.37 es muy utilizado por los fabricantes de rodamientos para estimar de manera conservadora la carga debida a esfuerzo radial. Por tanto despejando 2.39, para la bola más cargada la expresión es:

$$Q_0 = 4.37 \frac{F_R}{Z'} \tag{2.40}$$

Y en general para cada bola, introduciendo esta última expresión en 2.38:

$$Q_n = 4.37 \frac{F_R}{Z'} \cos^{3/2}\left(\frac{n2\pi}{Z'}\right) \tag{2.41}$$

Estos repartos de carga axial, radial y de momento, muestran simplemente la distribución de carga teórica en las bolas debida a cada uno de los esfuerzos de manera separada, en las que no se tienen en cuenta, entre otros, los siguientes efectos:

- La conformidad entre pista y bola.
- La no linealidad del área de contacto con la carga, y por tanto la no linealidad de la rigidez del contacto bola-pista con la carga.
- El ángulo de contacto, tanto inicial como su variación en estado de carga.
- La posible precarga de las bolas.
- La flexibilidad de los anillos y las estructuras a las que se unen.

Además, a la hora de calcular la presión de contacto, al no tener en cuenta la geometría del propio contacto (geometría de los elementos rodantes, conformidad entre pista y bola y ángulo de contacto), el modelo no permite calcular las áreas de contacto y por tanto no es válido para ser utilizado en el cálculo de la capacidad estática tal y como se define en la norma ISO76 [ISO76, 2006].

Stribeck utilizó modelos simples similares a los que se acaban de presentar en sus estudios [Stribeck, 1901, Stribeck, 1902], donde analizó la capacidad de carga de rodamientos de bolas y las propiedades del par de fricción en función de la carga respectivamente. Estos dos artículos representan los primeros pasos en el análisis de reparto de cargas y comportamiento de rodamientos.

### **Modelo de distribución de carga debida a la combinación de esfuerzo axial, radial y de momento. Modelo de Jones [Jones, 1946]**

Debido a que la base de los métodos de cálculo para los rodamientos de vuelco son los modelos desarrollados para rodamientos convencionales, se va a continuar haciendo una

revisión de estos modelos, que van incluyendo cada vez más efectos de los citados anteriormente como son la conformidad, el ángulo de contacto y la combinación simultánea de cargas.

Sjoväll [Sjoväll, 1933] propuso inicialmente un método para el cálculo del reparto de carga en las bolas cuando el rodamiento está sometido a una combinación de cargas axial y radial. Más tarde Rumbarger [Rumbarger, 1962] propuso otro para una combinación de cargas axial y de momento de vuelco. Finalmente Jones [Jones, 1946], propuso un modelo que tenía en cuenta la combinación de los tres esfuerzos (axial, radial y momento de vuelco). Todos estos modelos asumen que todas las bolas están inicialmente en contacto sin precarga ni holgura, es decir las bolas contactarían en las pistas con presión nula y no habría hueco entre la bola y la pista. Con estos mismos supuestos (todas las bolas inicialmente en contacto y con carga nula) y partiendo de las ecuaciones de reparto de carga en rodamientos de Jones [Jones, 1946] se han desarrollado modelos aplicados a rodamientos de vuelco como el de Amasorrain [Amasorrain et al., 2003].

En [Harris and Kotzalas, 2007a] y [Harris and Kotzalas, 2007b] se recogen de manera muy extensa y actualizada los métodos de cálculo para rodamientos convencionales. Aunque el modelo de Jones es más completo y está sirviendo como base a muchos de los análisis que se están desarrollando en cuanto al comportamiento de rodamientos de vuelco, por facilitar su comprensión se va a comenzar detallando los modelos de Sjoväll [Sjoväll, 1933] y posteriormente el de Rumbarger [Rumbarger, 1962], para finalizar con el modelo completo de Jones [Jones, 1946], que conceptualmente une las dos modelizaciones planteadas por sus precedentes. Estos tres modelos calculan la distribución de cargas para un rodamiento con anillos rígidos de manera que la deformación resultante únicamente se debe al contacto bola-pista, a partir de los esfuerzos aplicados externamente y teniendo en cuenta variaciones del ángulo de contacto de acuerdo al estado de carga. Sus ecuaciones parten de la relación carga-deformación para contacto puntual desarrolladas por Hertz en las que la deformación  $\delta$  en el contacto bola pista cumple la siguiente relación con la carga  $Q$ :

$$\delta \propto Q^{2/3} \quad (2.42)$$

Esta proporcionalidad vendría dada por la constante de deflexión de Hertz (ec. 2.25), por tanto:

$$\delta = \left( \frac{Q}{K_n} \right)^{2/3} \quad (2.43)$$

Previamente se va a describir el reparto de cargas para esfuerzo axial y para esfuerzo radial de forma separada, considerando conformidad y ángulo de contacto. Para el caso de esfuerzo axial, el reparto de carga en las bolas se distribuye equitativamente, pero a diferencia del modelo de reparto de carga simple presentado en la anterior sección, ahora se tienen en cuenta los ángulos de contacto inicial  $\alpha_0$  y final  $\alpha$ . Siendo uniforme la distribución de cargas, la carga en cada bola es:

$$Q = \frac{F_A}{Z \sin \alpha} \quad (2.44)$$

Tal y como se ve en la figura 2.29, se produce una deflexión axial  $\delta_a$  (siendo ésta una componente de la deflexión total en la dirección del contacto  $\delta_n$ ), que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\delta_n = Bd_w \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) \quad (2.45)$$

donde  $B$  es la curvatura total del contacto bola-pista  $B = \frac{r_i}{d_w} + \frac{r_o}{d_w} - 1$

Teniendo en cuenta la relación carga-deformación de Hertz (2.43)

$$Q = K_n (Bd_w)^{3/2} \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right)^{3/2} \quad (2.46)$$

Sustituyendo esta última expresión en (2.44) se llega a la igualdad:

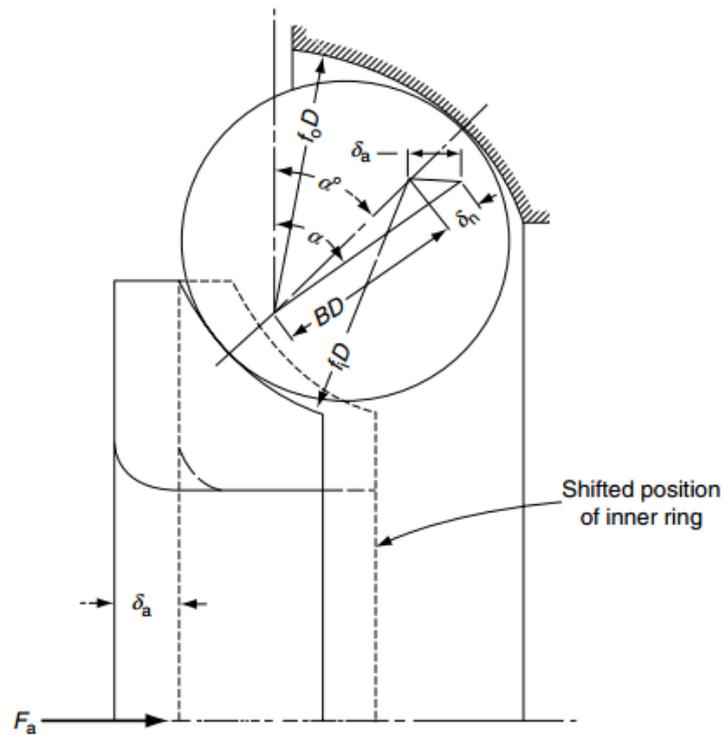


Figura 2.29: Modelo de interferencia geométrica para carga axial tomado de [Harris and Kotzalas, 2007a]

$$\frac{F_A}{ZK_n(Bd_w)^{3/2}} = \sin \alpha \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right)^{3/2} \quad (2.47)$$

A su vez  $K_n$  es función del ángulo final de contacto  $\alpha$ , con lo cual la anterior igualdad debe resolverse iterativamente para obtener la solución exacta. Jones [Jones, 1946], obtuvo una expresión aproximada para  $K_n$ , comprobando que prácticamente permanecía constante con el ángulo de contacto y únicamente dependía del material y de la curvatura total  $B$ . Por tanto se podría obtener de la siguiente expresión (2.48) la constante  $K$  a partir de la constante de deflexión de Hertz (2.25) para el ángulo de contacto inicial  $\alpha_0$ .

$$K_n = \frac{Kd_w^{3/2}}{B^{3/2}} \quad (2.48)$$

La expresión 2.47 queda simplificada y toma la siguiente forma:

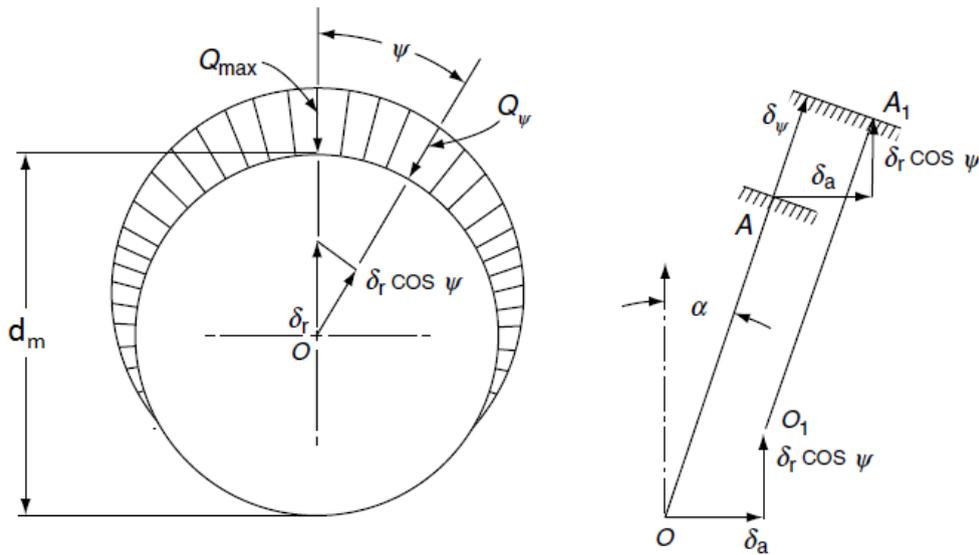


Figura 2.30: Deflexión radial en rodamiento sometido a esfuerzo radial y axial [Harris and Kotzalas, 2007a]

$$\frac{F_A}{ZKd_w^2} = \sin \alpha \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right)^{3/2} \quad (2.49)$$

Para el caso de reparto de cargas bajo esfuerzo radial, considerando conformidad y ángulo de contacto, tal y como se puede ver en [Harris and Kotzalas, 2007a] para un rodamiento de bolas de contacto angular de dos puntos, considerando que todas las bolas están inicialmente en contacto y sin precarga, la deflexión radial  $\delta_\psi$  de un anillo respecto al otro para una posición azimutal  $\psi$  viene dada por:

$$\delta_\psi = \delta_r \cos \psi \quad (2.50)$$

donde  $\delta_r$  es la deformación radial en  $\psi = 0$  representada en la Figura 2.30, es decir, coincidente con la dirección de aplicación de la carga radial.

Esta deflexión  $\delta_\psi$ , como se ha visto, genera una carga  $Q_\psi$  en la bola posicionada en el ángulo azimutal  $\psi$ . Estableciendo el equilibrio estático, la fuerza radial aplicada debe ser igual a la suma de las componentes en la dirección  $\psi = 0$  de las cargas en las bolas. Esta

suma se extenderá a lo largo del ángulo en el que exista deflexión efectiva positiva, dado que en otro caso implica que no hay contacto, y por tanto la carga  $Q$  para esa posición será nula. En consecuencia:

$$F_R = \sum_{\psi=0}^{\psi=\psi(\delta_{\psi \geq 0})} Q_{\psi} \cos \alpha \quad (2.51)$$

Utilizando la relación 2.50, y denominando  $Q_{max}$  a la carga que soportaría la bola en la dirección de la fuerza radial aplicada, es decir la bola en  $\psi = 0$ :

$$F_R = Q_{max} \sum_{\psi=0}^{\psi=\psi(\delta_{\psi \geq 0})} (\cos \psi)^{3/2} \cos \alpha \quad (2.52)$$

Es común expresar este sumatorio de manera integral

$$F_R = ZQ_{max} \cos \alpha \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi(\delta_{\psi \geq 0})}^{+\psi(\delta_{\psi \geq 0})} (\cos \psi)^{3/2} \cos \psi d\psi \quad (2.53)$$

A la integral se le denomina integral radial  $J_R$ .

Como se ha mencionado anteriormente, Sjoväll [Sjoväll, 1933] propuso un método para el cálculo del reparto de carga en las bolas cuando el rodamiento está sometido a una combinación de cargas axial y radial. Si se introduce el efecto del ángulo de contacto en el reparto de carga radial desarrollado previamente, en la posición  $\psi$  se obtiene que la deflexión total  $\delta_{\psi}$  corresponde a la de la Figura 2.30 y se puede expresar de la siguiente manera proyectando la deflexión axial y la radial sobre la dirección que define  $\psi$ :

$$\delta_{\psi} = \delta_a \sin \alpha + \delta_r \cos \alpha \cos \psi \quad (2.54)$$

Fijando la condición  $\psi = 0$ , ésta será donde se produzca igualmente la máxima deformación, pero esta vez incluyendo tanto carga axial como radial:

$$\delta_{max} = \delta_a \sin \alpha + \delta_r \cos \alpha \quad (2.55)$$

De esta manera, el equilibrio estático se definirá tanto para la dirección radial como para la dirección axial

$$F_R = \sum_{-\psi(\delta_\psi \geq 0)}^{+\psi(\delta_\psi \geq 0)} Q_\psi \cos \alpha \cos \psi \quad (2.56)$$

$$F_A = \sum_{-\psi(\delta_\psi \geq 0)}^{+\psi(\delta_\psi \geq 0)} Q_\psi \sin \alpha \quad (2.57)$$

También se puede reescribir en términos de integral radial e integral axial de forma que

$$F_R = ZQ_{max}J_R \cos \alpha \quad (2.58)$$

$$F_A = ZQ_{max}J_A \sin \alpha \quad (2.59)$$

donde, como se ha indicado previamente:

$$J_R = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi(\delta_\psi \geq 0)}^{+\psi(\delta_\psi \geq 0)} (\cos \psi)^{3/2} \cos \psi d\psi \quad (2.60)$$

$$J_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi(\delta_\psi \geq 0)}^{+\psi(\delta_\psi \geq 0)} (\cos \psi)^{3/2} d\psi \quad (2.61)$$

Es importante mencionar que una de las simplificaciones que realizó Sjöväll [Sjöväll, 1933] es que el ángulo de contacto es el mismo para todas las bolas. Por tanto esta

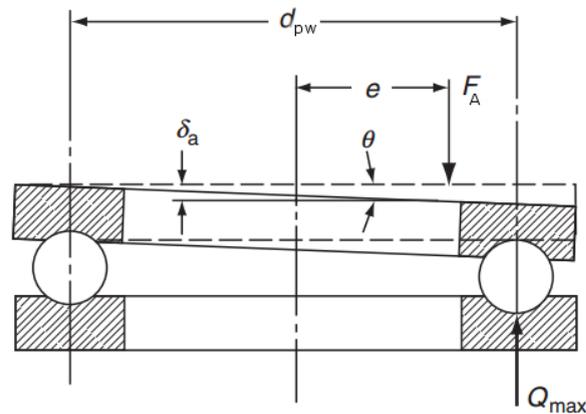


Figura 2.31: Carga axial descentrada, equivalente a momento de vuelco [Harris and Kotzalas, 2007a]

solución será aproximada, aunque suficiente para la mayoría de los cálculos estáticos que se realizan en rodamientos convencionales.

La propuesta de Rumbarger [Rumbarger, 1962] para resolver el caso de combinación de fuerza axial y momento de vuelco se basa en considerar el momento de vuelco como una fuerza axial descentrada. Esta idea se puede ver en la Figura 2.31.

Bajo este estado de carga, la deflexión que sufrirá una bola situada en el ángulo  $\psi$  es suma del efecto axial puro  $\delta_a$  y en ángulo de inclinación  $\theta$  que adquiera un anillo respecto al otro, quedando la expresión

$$\delta_\psi = \delta_a + \frac{1}{2}\theta d_{pw} \cos \psi \quad (2.62)$$

Como en anteriores ocasiones, el ángulo  $\psi = 0$  será en el que se produzca la deformación máxima

$$\delta_{max} = \delta_a + \frac{1}{2}\theta d_{pw} \quad (2.63)$$

De igual manera, se define la carga para la bola en la posición  $\psi$ :

$$Q_\psi = Q_{max}(\cos \psi)^{3/2} \quad (2.64)$$

Para finalmente plantear el equilibrio estático, en este caso de fuerza y momento:

$$\begin{aligned} F_A &= \sum_{\psi=0}^{\psi=\pm\pi} Q_\psi \sin \alpha \\ M &= e \cdot F_A = \sum_{\psi=0}^{\psi=\pm\pi} \frac{1}{2} Q_\psi d_{pw} \sin \alpha \cos \psi \end{aligned} \quad (2.65)$$

El cual se puede escribir también en forma integral:

$$\begin{aligned} F_A &= Z Q_{max} J_A \sin \alpha \\ M &= e \cdot F_A = \frac{1}{2} Z Q_{max} d_{pw} J_M \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.66)$$

Donde la integral axial ha sido definida en 2.61 y de forma equivalente la integral de momento es:

$$J_M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_{(\delta\psi \geq 0)}}^{+\psi_{(\delta\psi \geq 0)}} (\cos \psi)^{3/2} \cos \psi d\psi \quad (2.67)$$

Finalmente el modelo de Jones [Jones, 1946] se basa igualmente en el concepto de interferencia geométrica pero aplicado simultáneamente para resolver el equilibrio en la dirección axial, radial y para el momento de vuelco, considerando además la variación del ángulo de contacto desde la posición inicial  $\alpha_0$  hasta la posición en condición de carga  $\alpha$ . Se obtiene de esta forma el siguiente equilibrio de fuerzas y momentos:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_A - K_n \Delta^{3/2} \sum_{\psi=0}^{\psi=\pm\pi} \frac{\left\{ \left[ (\sin \alpha_0 + \bar{\delta}_a + \mathcal{R} \bar{\theta} \cos \psi)^2 + (\cos \alpha_0 + \bar{\delta}_r \cos \psi)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}^{3/2} (\sin \alpha_0 + \bar{\delta}_a + \mathcal{R} \bar{\theta} \cos \psi)}{\left[ (\sin \alpha_0 + \bar{\delta}_a + \mathcal{R} \bar{\theta} \cos \psi)^2 + (\cos \alpha_0 + \bar{\delta}_r \cos \psi)^2 \right]^{1/2}} = 0 \\ F_R - K_n \Delta^{3/2} \sum_{\psi=0}^{\psi=\pm\pi} \frac{\left\{ \left[ (\sin \alpha_0 + \bar{\delta}_a + \mathcal{R} \bar{\theta} \cos \psi)^2 + (\cos \alpha_0 + \bar{\delta}_r \cos \psi)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}^{3/2} (\cos \alpha_0 + \bar{\delta}_r \cos \psi)}{\left[ (\sin \alpha_0 + \bar{\delta}_a + \mathcal{R} \bar{\theta} \cos \psi)^2 + (\cos \alpha_0 + \bar{\delta}_r \cos \psi)^2 \right]^{1/2}} = 0 \\ M - \frac{d_{pw}}{2} K_n \Delta^{3/2} \sum_{\psi=0}^{\psi=\pm\pi} \frac{\left\{ \left[ (\sin \alpha_0 + \bar{\delta}_a + \mathcal{R} \bar{\theta} \cos \psi)^2 + (\cos \alpha_0 + \bar{\delta}_r \cos \psi)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}^{3/2} (\sin \alpha_0 + \bar{\delta}_a + \mathcal{R} \bar{\theta} \cos \psi)}{\left[ (\sin \alpha_0 + \bar{\delta}_a + \mathcal{R} \bar{\theta} \cos \psi)^2 + (\cos \alpha_0 + \bar{\delta}_r \cos \psi)^2 \right]^{1/2}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.68)$$

Donde :

$\Delta = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} = (2r_c - d_w)$ , es la distancia total entre centros de curvatura, mostrada en la Figura 2.22.

$\mathcal{R} = \frac{d_{pw}}{2} + \left( r_c - \frac{d_w}{2} \right) \cos \alpha_0$ , es el radio equivalente que permite transformar el ángulo  $\bar{\theta}$  en deflexión axial.

Las deformaciones axiales, radiales y angulares de la expresión (2.68) corresponden al movimiento relativo entre los dos anillos representado en la Figura 2.32.

Las ecuaciones (2.68) son altamente no lineales y deben resolverse de manera iterativa por métodos numéricos. Una vez resueltas, se obtiene la distribución de cargas en todos y cada uno de los elementos rodantes. Por tanto, una vez conocida la distribución de cargas, si el valor del esfuerzo soportado por el elemento más solicitado se utiliza para, mediante el modelo de contacto hertziano descrito en la sección 2.5.1.2, calcular la presión en el contacto, y ésta se compara con un valor límite de presión como se propone en la norma ISO 76 [ISO76, 2006] (en este caso el valor límite de presión se recuerda

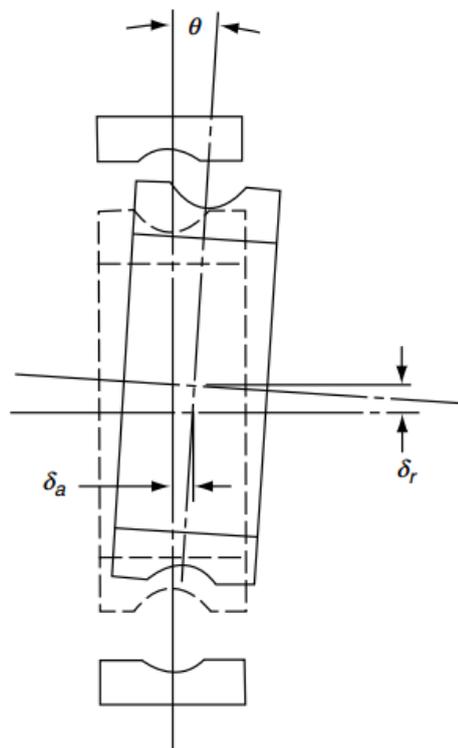


Figura 2.32: Desplazamientos relativos entre los anillos para el modelo de Jones de la ecuación 2.68. [Harris and Kotzalas, 2007b]

que es 4200 MPa), se tiene un modelo de cálculo para comprobar si el rodamiento falla o no en un estado concreto de carga estática.

Basándose en la generalización de las ecuaciones obtenidas por Jones [Jones, 1946], se han desarrollado numerosos trabajos relativos a la distribución de cargas en rodamientos de vuelco cuando los esfuerzos aplicados externamente son conocidos.

Un desarrollo preliminar de Liao en [Liao and Lind, 2001] presenta una metodología similar al modelo de Jones pero para el caso de fuerza axial, radial y momento de vuelco, donde trata este último como una fuerza axial descentrada. En este trabajo Liao [Liao and Lind, 2001] tan sólo se plantea el caso de rodamientos de dos puntos de contacto, mostrando resultados de deformación axial y radial para diferentes casos de carga. En lugar de obtener el ángulo  $\theta$ , expresa esta deformación mediante la deflexión axial  $\delta_a$  en función del ángulo azimutal  $\psi$ .

Por otra parte, Amasorrain en [Amasorrain et al., 2003] presenta un procedimiento para obtener las cargas en las bolas cuando el rodamiento se ve sometido a esfuerzo axial, radial y de momento, extendiendo para cuatro puntos de contacto la metodología de Jones de rodamientos que es para rodamientos de dos puntos de contacto únicamente.

Con diferente objetivo pero haciendo uso de esta misma formulación de Jones aplicada a rodamientos de cuatro puntos de contacto, Zupan y Prebil [Zupan and Prebil, 2001] desarrollaron un trabajo en donde se analizaba la influencia en el cálculo de la capacidad de carga de parámetros geométricos y de rigidez del propio rodamiento y de las estructuras a las que se unen. Dentro de los parámetros geométricos, el estudio está orientado a mostrar la influencia de la conformidad de las pistas y la posición de los centros de curvatura, y por tanto del ángulo de contacto. Respecto al análisis de la rigidez de las estructuras que se unen al rodamiento, realiza un modelo de Elementos Finitos de las mismas para obtener una matriz de rigidez equivalente en las direcciones radial y axial, que introduce posteriormente en el modelo analítico. Esta matriz de rigidez se expresa de la siguiente manera:

$$K = \begin{pmatrix} K_{rr} & K_{ra} \\ K_{ar} & K_{aa} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Y las condiciones de equilibrio entre las fuerzas de contacto  $Q$  y las fuerzas debidas a las deformaciones elásticas resultan en un sistema lineal de  $2Z$  ecuaciones:

$$F = KU - Q = 0 \quad (2.70)$$

siendo  $U$  la matriz de desplazamientos.

A continuación se tratarán los modelos existentes para el estudio de la capacidad de carga estática, la cual está directamente relacionada con la distribución de carga en las bolas recién explicado, y es un importante criterio de selección del rodamiento de vuelco.

### 2.5.2. Modelo analítico básico para el cálculo de la capacidad de carga estática

El modelo de Jones y las extensiones descritas en la sección anterior, se pueden utilizar para determinar la capacidad de carga estática tomando como punto de partida el criterio planteado en la norma [ISO76, 2006] de comparar la presión de contacto máxima con un valor admisible (explicado en la sección 2.5.1.3). Esto implica realizar un gran número de cálculos iterativos para resolver el sistema no lineal de ecuaciones de Jones para cada solución aproximante de la presión de contacto máxima. Este método representa un enfoque directo, mediante el cual cada conjunto de combinación de esfuerzos axial  $F_A$ , radial  $F_R$  y de momento de vuelco  $M$  aplicados se ha de resolver mediante el sistema de ecuaciones de Jones para comprobar si se alcanza la presión de contacto máxima o no. Utilizar este enfoque directo para resolver un número representativo de combinaciones de esfuerzos, es muy poco eficiente.

Un enfoque novedoso desarrollado por Aguirrebeitia se presenta en [Aguirrebeitia et al., 2010b] donde, en lugar de presentar el cálculo directo de la capacidad para posteriormente ser comparado con el estado de cargas real, en Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] se aplica el cálculo de manera inversa de forma que lo que se obtiene es la combinación de cargas que provoca el fallo estático según el criterio de la presión admisible presentado en la norma ISO 76 [ISO76, 2006]. El cálculo de la capacidad estática se lleva a cabo no a modo de cargas equivalentes como en la norma ISO 76 [ISO76, 2006], sino teniendo en cuenta la contribución de los esfuerzos aplicados en dirección radial, axial y de vuelco, simultáneamente. El modelo de reparto de cargas utilizado para la obtención de las cargas equivalentes máximas es una simplificación del modelo de Jones [Jones, 1946], ya que se utiliza la hipótesis de ángulo de contacto constante, pero llevando a cabo igualmente el equilibrio estático dependiente de combinación de las tres componentes de carga, no sólo de dos de ellas.

Es este planteamiento del cálculo inverso el que representa una mayor innovación ya que aporta una herramienta muy útil a la hora de evaluar si un rodamiento es capaz de soportar

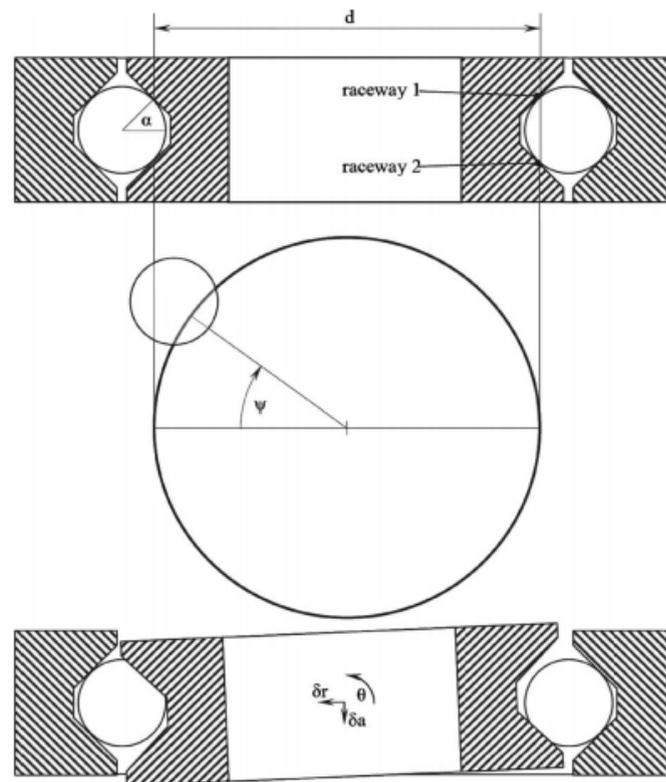


Figura 2.33: Modelo de interferencia geométrica en Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b]

una combinación de cargas determinada. Esta metodología de cálculo de capacidad de carga estática mediante el enfoque inverso, ha servido como base a posteriores trabajos, entre ellos esta Tesis Doctoral, y se va a presentar a continuación donde se describirán estos conceptos de cálculo inverso y superficie de aceptación que han sido introducidos. Será en el Capítulo 3 donde se detallará en profundidad este modelo para presentar las mejoras introducidas por esta Tesis Doctoral.

Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] comienza planteando el modelo de interferencia geométrica de Jones [Jones, 1946] extendido a rodamientos de cuatro puntos de contacto, pero considerando un ángulo de contacto constante e igual en todas las bolas. El esquema utilizado se puede ver en la Figura 2.33.

Se define por tanto, la interferencia geométrica total resultante como el desplazamiento en la dirección perpendicular a cada contacto, mediante las siguientes expresiones que

únicamente se diferencian del modelo de Jones en que Aguirrebeitia considera que el ángulo de contacto  $\alpha$  no varía con los esfuerzos aplicados y es igual en todas las bolas:

$$\delta_{\psi}^1 = \delta_a \sin \alpha + \cos \alpha \cos \psi + \frac{\theta d}{2} \sin \alpha \cos \psi \quad (2.71)$$

$$\delta_{\psi}^2 = -\delta_a \sin \alpha + \cos \alpha \cos \psi - \frac{\theta d}{2} \sin \alpha \cos \psi \quad (2.72)$$

Por claridad, se definen los siguientes parámetros auxiliares, relacionados con las deflexiones axial, radial y de momento de vuelco:

$$\begin{aligned} A &= \delta_a \sin \alpha \\ R &= \delta_r \cos \alpha \\ M &= \frac{\theta d}{2} \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.73)$$

Quedando las expresiones para las interferencias geométricas de la siguiente manera:

$$\delta_{\psi}^1 = A + (R + M) \cos \psi \quad (2.74)$$

$$\delta_{\psi}^2 = -A + (R - M) \cos \psi \quad (2.75)$$

Como criterio conservador, se establece habitualmente que la dirección de aplicación de la fuerza radial  $F_R$  y del momento de vuelco  $M$  coinciden. Esa dirección se toma como origen de referencia para el ángulo azimutal, es decir,  $\psi = 0$ . De manera que la posición azimutal de la bola más y menos cargada se corresponde con los ángulos  $\psi = 0$  y  $\psi = \pi$ , es decir cuando el valor absoluto del  $\cos \psi$  sea 1. Para  $\psi = 0$  las expresiones de las interferencias geométricas para los contactos de las pistas 1 y 2 respectivamente quedan:

$$\begin{aligned}\delta_0^1 &= A + R + M \\ \delta_0^2 &= -A + R - M\end{aligned}\tag{2.76}$$

Y para la posición  $\psi = \pi$ :

$$\begin{aligned}\delta_\pi^1 &= A - R - M \\ \delta_\pi^2 &= -A - R + M\end{aligned}\tag{2.77}$$

Por tanto, para evaluar la capacidad de carga estática, únicamente se hará en esas posiciones ( $\psi = 0$  y  $\psi = \pi$ ) en las que se encuentra la bola más cargada, y únicamente podrá existir carga cuando las interferencias sean positivas (de otro modo, en lugar de interferencia existiría separación en el contacto).

Reescribiendo las ecuaciones 2.71 y 2.72 en estos términos, las expresiones para las interferencias geométricas de los respectivos contactos resultan:

$$\delta_\psi^1 = \frac{1}{2} \left[ (\delta_0^1 + \delta_\pi^1) + (\delta_0^1 - \delta_\pi^1) \cos \psi \right]\tag{2.78}$$

$$\delta_\psi^2 = \frac{1}{2} \left[ (\delta_0^2 + \delta_\pi^2) + (\delta_0^2 - \delta_\pi^2) \cos \psi \right]\tag{2.79}$$

Haciendo uso de estas expresiones, se desarrolla un estudio exhaustivo analizando cada una de las cinco posibles configuraciones de interferencias en el contacto bola-pista que pudieran darse. Este análisis permite además evaluar en cual de los dos posibles valores del ángulo  $\psi$  ( $0$  ó  $\pi$ ) se produce el límite entre interferencia positiva e interferencia nula, para cada caso. Las posibles situaciones que se dan y que se representan en la tabla 2.1 son:

1. El primer caso de interferencia que se analiza es aquel para el cual la bola más cargada corresponde al ángulo  $\psi = 0$  y el efecto del esfuerzo axial y del momento de vuelco se suman provocando que todas las bolas de la pista correspondiente

(pista 1 ó 2 según la figura 2.33) estén cargadas, es decir, tengan interferencia positiva a lo largo de todo  $\psi$ . Puede existir esfuerzo radial, pero éste nunca es lo suficientemente elevado como para vencer el efecto de los esfuerzos axial y de momento, de tal manera que no existe ningún sector en el rodamiento para el cual se produzca contacto nulo ( $\delta_\psi \leq 0$ ).

2. El segundo caso de interferencia es equivalente al primero, cambiando únicamente el sentido del momento de vuelco.
3. El caso tres corresponde a aquellos casos en los que el esfuerzo axial genera un efecto contrario al del momento de vuelco y esto provoca que no todas las bolas estén cargadas en los contactos 1 ó 2 (solamente lo estarán aquellas situadas entre las posiciones azimutales  $[-\psi, +\psi]$  tales que  $2\psi < 2\pi$ ). Este también es el caso en el que el esfuerzo radial compensa los esfuerzos axiales y de momento, de forma que para cierto sector se produce descarga en el contacto de las bolas pertenecientes al mismo.
4. El cuarto caso sería equivalente al tercero, cambiando los sentidos del esfuerzo radial y del momento.
5. El último caso, corresponde a la situación en la que ninguna bola de la pista tiene presión de contacto. Esta situación se da en la pista opuesta a la de los casos 1 y 2.

Mediante la extensión de las ecuaciones de Jones [Jones, 1946] incluyendo la influencia de los contactos 1 y 2 simultáneamente, se plantean las ecuaciones de equilibrio estático para las tres componentes de carga axial, radial y momento de vuelco:

$$\frac{F_A}{Z \sin \alpha} = Q_{MAX}^1 J_A(\delta_0^1, \delta_\pi^1) - Q_{MAX}^2 J_A(\delta_0^2, \delta_\pi^2) \quad (2.80)$$

$$\frac{F_R}{Z \cos \alpha} = Q_{MAX}^1 J_R(\delta_0^1, \delta_\pi^1) + Q_{MAX}^2 J_R(\delta_0^2, \delta_\pi^2) \quad (2.81)$$

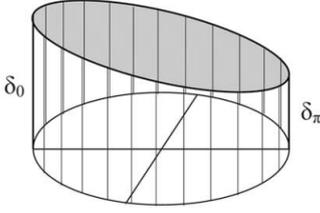
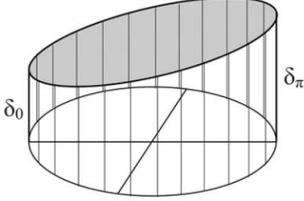
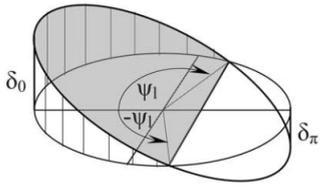
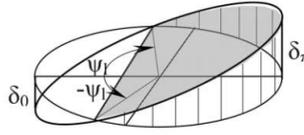
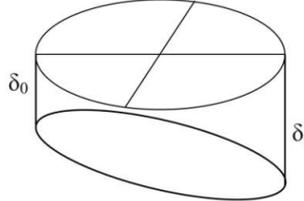
Casos de interferencia		Condiciones y ecuaciones	
1.		$\delta_0 > 0$ $\delta_\pi \geq 0$ $\delta_0 \geq \delta_\pi$	$\delta_{MAX} = \delta_0$ $\psi_l = \pi$ $\delta_\psi = \delta_0 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_\pi}{\delta_0} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\delta_\pi}{\delta_0} \right) \cos \psi \right]$
2.		$\delta_0 \geq 0$ $\delta_\pi > 0$ $\delta_\pi \geq \delta_0$	$\delta_{MAX} = \delta_\pi$ $\psi_l = \pi$ $\delta_\psi = \delta_\pi \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_0}{\delta_\pi} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_0}{\delta_\pi} - 1 \right) \cos \psi \right]$
3.		$\delta_0 > 0$ $\delta_\pi < 0$	$\delta_{MAX} = \delta_0$ $\psi_l = \cos^{-1} \left( \frac{\delta_\pi + \delta_0}{\delta_\pi - \delta_0} \right)$ $\delta_\psi = \delta_0 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_\pi}{\delta_0} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\delta_\pi}{\delta_0} \right) \cos \psi \right]$
4.		$\delta_0 < 0$ $\delta_\pi > 0$	$\delta_{MAX} = \delta_\pi$ $\psi_l = \cos^{-1} \left( \frac{\delta_\pi + \delta_0}{\delta_\pi - \delta_0} \right)$ $\delta_\psi = \delta_\pi \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_0}{\delta_\pi} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_0}{\delta_\pi} - 1 \right) \cos \psi \right]$
5.		$\delta_0 < 0$ $\delta_\pi < 0$	$\delta_{MAX} = 0$ $\psi_l = 0$ $\delta_\psi = 0$

Tabla 2.1: Los cinco casos básicos diferentes de interferencia geométrica en Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b]

$$\frac{M/d}{Z \sin \alpha} = Q_{MAX}^1 J_M(\delta_0^1, \delta_\pi^1) - Q_{MAX}^2 J_M(\delta_0^2, \delta_\pi^2) \quad (2.82)$$

Donde las integrales axial, radial y de momento, son equivalentes a las de las expresiones 2.61, 2.60 y 2.67, pero aquí se definen mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} J_A(\delta_0, \delta_\pi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \geq 0} \left( \frac{\delta_\psi}{\delta_{MAX}} \right)^{3/2} d\psi \\ J_R(\delta_0, \delta_\pi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \geq 0} \left( \frac{\delta_\psi}{\delta_{MAX}} \right)^{3/2} \cos \psi d\psi \\ J_M(\delta_0, \delta_\pi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\delta \geq 0} \left( \frac{\delta_\psi}{\delta_{MAX}} \right)^{3/2} \cos \psi d\psi \end{aligned} \quad (2.83)$$

Estas integrales, deben ser evaluadas para cada uno de los casos de la tabla 2.1, pudiéndose escribir el equilibrio estático de las ecuaciones 2.80, 2.81 y 2.82 en función de la máxima carga.

$$\frac{F_A}{Q_{MAX} Z \sin \alpha} = f_Q^1 J_A(\delta_0^1, \delta_\pi^1) - f_Q^2 J_A(\delta_0^2, \delta_\pi^2) \quad (2.84)$$

$$\frac{F_R}{Q_{MAX} Z \cos \alpha} = f_Q^1 J_R(\delta_0^1, \delta_\pi^1) + f_Q^2 J_R(\delta_0^2, \delta_\pi^2) \quad (2.85)$$

$$\frac{M/d}{Q_{MAX} Z \sin \alpha} = f_Q^1 J_M(\delta_0^1, \delta_\pi^1) - f_Q^2 J_M(\delta_0^2, \delta_\pi^2) \quad (2.86)$$

Para la resolución de las mismas se impone la siguiente condición y se detallan las expresiones  $f_Q^{\{1,2\}}$  que permiten tomar  $Q_{MAX}$  como factor común y desarrollar todas las expresiones siguientes en función de una única carga máxima independientemente de que se produzca en la pista 1 o en la 2.

$$\begin{aligned}
& \text{si } \left\{ \begin{array}{l} \delta_0^1 = \max\{\delta_0^1, \delta_\pi^1, \delta_0^2, \delta_\pi^2\} \\ o \\ \delta_\pi^1 = \max\{\delta_0^1, \delta_\pi^1, \delta_0^2, \delta_\pi^2\} \end{array} \right\} \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} f_Q^1 = 1 \\ f_Q^2 = \left( \frac{\max\{\delta_0^2, \delta_\pi^2\}}{\max\{\delta_0^1, \delta_\pi^1\}} \right)^{3/2} \end{array} \right\} \\
& \text{si } \left\{ \begin{array}{l} \delta_0^2 = \max\{\delta_0^1, \delta_\pi^1, \delta_0^2, \delta_\pi^2\} \\ o \\ \delta_\pi^2 = \max\{\delta_0^1, \delta_\pi^1, \delta_0^2, \delta_\pi^2\} \end{array} \right\} \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} f_Q^1 = \left( \frac{\max\{\delta_0^1, \delta_\pi^1\}}{\max\{\delta_0^2, \delta_\pi^2\}} \right)^{3/2} \\ f_Q^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (2.87)
\end{aligned}$$

A la hora de representar las soluciones de carga máxima  $Q_{MAX}$  para el equilibrio anterior, lo hace en función de la capacidad de carga axial  $C_{0a}$  de la ecuación 2.1 tal y como se define en la norma [ISO76, 2006]:

$$Q_{MAX} = \frac{C_{0a}}{Z \sin \alpha} \quad (2.88)$$

que al sustituir en la ecuaciones 2.84, 2.85 y 2.86 se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{F_A}{Q_{MAX} Z \sin \alpha} &= \frac{F_A}{C_{0a}} \\
\frac{F_R}{Q_{MAX} Z \cos \alpha} &= \frac{F_R}{C_{0a}} \tan \alpha \\
\frac{M/d}{Q_{MAX} Z \sin \alpha} &= \frac{M/d_{pw}}{C_{0a}}
\end{aligned} \quad (2.89)$$

A su vez, esto puede ser visto como las coordenadas de un punto en un diagrama tri-dimensional con los ejes  $\frac{F_A}{C_{0a}}$ ,  $\frac{F_R}{C_{0a}} \tan \alpha$  y  $\frac{M/d_{pw}}{C_{0a}}$ . De esta manera, al estudiar los diferentes casos de interferencia definidos por la tabla 2.1 de acuerdo a la ecuación 2.87 resolviendo 2.84, 2.85 y 2.86 para cada caso, se obtiene una nube de puntos que describe la superficie de aceptación, tal y como ha sido descrita en la sección 2.4.1.1. Un ejemplo de esta nube de puntos se puede ver en la Figura 2.34 obtenida por Aguirrebeitia en este trabajo [Aguirrebeitia et al., 2010b] que se está detallando.

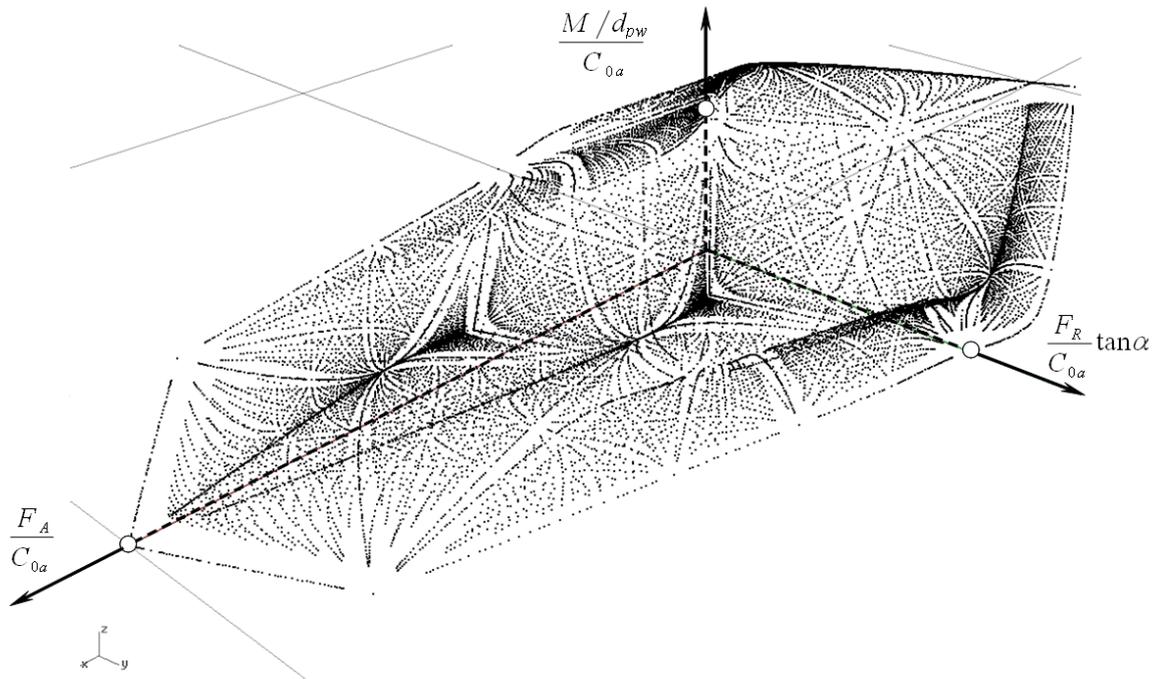


Figura 2.34: Nube de puntos que describe la superficie de aceptación [Aguirrebeitia et al., 2010b]

La superficie formada, no queda claramente representada mediante la anterior nube y presenta dificultades a la hora de trabajar con ella. Por ello, Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] propone representarlo mediante curvas de nivel de forma que mediante una representación plana, se pueda ver el caso de carga máxima más claramente. A modo de ejemplo, para el caso de diferentes valores del momento de vuelco normalizado proyectado sobre el plano  $F_A - F_R$  se muestra en la Figura 2.35, donde las diferentes curvas  $a, b, \dots$  representan los valores de aceptación para los esfuerzos radial y axial, a un determinado nivel de momento de vuelco aplicado.

A pesar de ser este modelo una mejora notable respecto a la norma ISO 76 [ISO76, 2006], presenta de igual manera la carencia de considerar un ángulo de contacto constante  $\alpha$  e igual para todas las bolas. En cambio Zupan [Zupan and Prebil, 2001] resuelve las ecuaciones de Jones completas teniendo en cuenta la variación del ángulo de contacto en estado de carga pero que, en lugar de aplicar una metodología inversa como la que propone Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] donde se obtiene directamente el

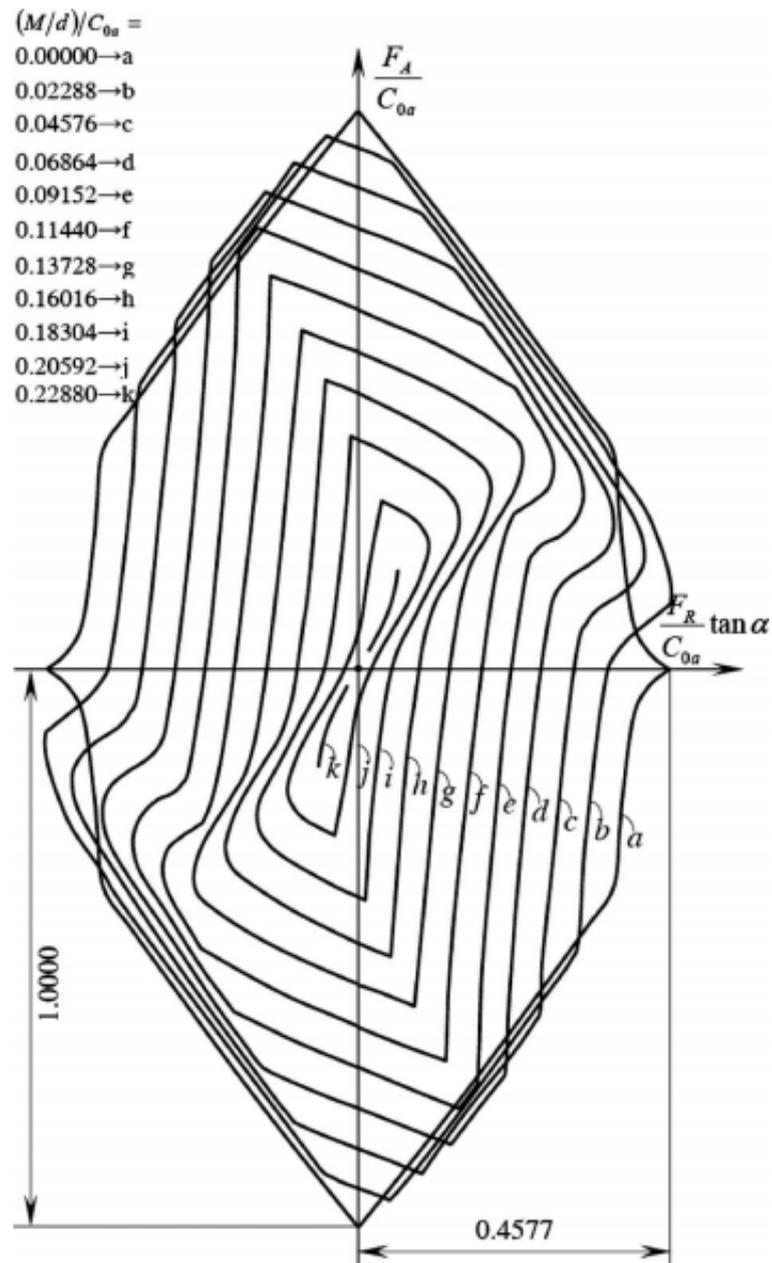


Figura 2.35: Curvas de aceptación en el plano  $F_A - F_R$  para varios valores de momento de vuelco normalizado [Aguirrebeitia et al., 2010b]



Figura 2.36: Buje de un aerogenerador (Fuente: <http://www.structuralia.com/>)

estado de cargas que provoca el fallo estático, se obtiene el reparto de cargas para una combinación de esfuerzos aplicados y la bola más cargada en esta distribución se compara contra la carga admisible para el contacto.

Otra de las simplificaciones que se asumen es la de ser los anillos y las estructuras unidas a ellos, infinitamente rígidas. La realidad es otra y como se puede ver en [Sawicki et al., 2008], el reparto de cargas y la deformación de los anillos tan esbeltos son problemas no lineales.

Estructuras relativamente poco rígidas y no completamente simétricas como son el buje de un aerogenerador (ver Figura 2.36), hacen que modelos que consideran anillos rígidos o los trabajos que se han mencionado de Yao [Yao et al., 2012] que realiza un modelo de vigas curvas de Timoshenko, no sean realistas a la hora de representar el comportamiento de una estructura de las características mencionadas para cualquier estado de carga y exista una destacable incertidumbre de cómo afecta exactamente la flexibilidad de las estructuras al reparto de cargas. La manera en la que se ha intentado resolver este problema es mediante el desarrollo de modelos de Elementos Finitos.

Otro de los efectos que tampoco quedan recogidos en esta metodología es el de la precarga. La práctica totalidad de este tipo de rodamientos van precargados y esto influye de manera muy importante en el reparto de cargas, y por ende en la capacidad de carga y en general en el funcionamiento del rodamiento. El modelo que se propondrá en esta Tesis Doctoral, representa una evolución de este modelo y sí tiene en cuenta tanto la variación del ángulo de contacto como la influencia de la precarga de las bolas.

### 2.5.3. Modelo de Elementos Finitos para cálculos resistentes de rodamientos de vuelco

El considerar únicamente las deformaciones debidas al contacto, cuando tanto anillos como estructuras a las que se montan y las propias uniones tienen una flexibilidad, conlleva como problema más evidente el tener desplazamientos totales mayores que hagan que la precisión requerida no se alcance o incluso en casos extremos se produzcan colisiones con partes estructurales cercanas. Otro de los efectos que se produce, más a nivel local, debido a la elasticidad de los anillos y estructuras, es una falta de continuidad en los ángulos y presiones de contacto que genera un reparto de carga distinto a la distribución cosenoidal que se ha considerado en las secciones anteriores. Además, como se ha comentado previamente, la distribución de cargas en las bolas será diferente. Y por tanto el funcionamiento del rodamiento, no quedará correctamente representado al ignorar este efecto.

La manera de analizar esta flexibilidad de los anillo y estructuras a las que se unen los mismos, ha sido mediante modelos de Elementos Finitos (a excepción de algunos modelos de vigas propuestos como el de Yao [Yao et al., 2012]). En la sección anterior ya se ha comentado el trabajo realizado por Zupan [Zupan and Prebil, 2001] que combina un modelo analítico con los resultados de rigidez aportados por un cálculo de Elementos Finitos, pero existen numerosos trabajos centrados en la modelización de rodamientos de vuelco junto con las estructuras a las que quedan unidos mediante Elementos Finitos. Este es el caso de Glodež [Glodež et al., 2012] y Göncz [Göncz et al., 2012] donde

estudian rodamientos de rodillos de tres hileras, o Potočnik [[Potočnik et al., 2013](#)] que modeliza la posible irregularidad de la geometría real de los anillos mediante Elementos Finitos para obtener la distribución de carga en las bolas.

Smolnicki [[Smolnicki and Rusinski, 2007](#)] realiza un estudio de un sistema completo de una grúa para minería y aplica la técnica de superelementos para simplificar el sistema y poder calcular el efecto de la flexibilidad de las estructuras en el reparto de carga. El análisis lo realiza únicamente para carga axial descentrada, sin carga radial. También realiza un estudio posterior mediante esta misma técnica en [[Smolnicki et al., 2008](#)] esta vez incluyendo cargas radiales.

Daidié [[Daidié et al., 2008](#)] desarrolló un modelo simplificado donde en lugar de utilizar elementos 3D sólidos para modelizar las bolas del rodamiento de vuelco, utilizó muelles no lineales a tracción entre los centros de curvatura de las pistas, haciendo uso de las relaciones obtenidas por Houpert en [[Houpert, 2001](#)]. Esta forma de modelizar los elementos rodantes, permite capturar la variación del ángulo de contacto. Este modelo de muelles será detallado posteriormente dentro de esta misma sección. Inicialmente el modelo de Daidié fue concebido para analizar cómo afectaba el reparto de carga en las bolas, a la unión atornillada del rodamiento con la estructura a la que se fija. Su enfoque se basa en la teoría de contacto de Hertz y las zonas de contacto están representadas mediante elementos placa rígidos para evitar singularidades numéricas. Una solución similar a ésta de añadir placas rígidas para modelizar el contacto, fue utilizado por Bourdon en [[Bourdon et al., 1999](#)]. Las combinaciones de carga para el modelo de Daidié pueden contener componentes tanto axial, radial como de momento de vuelco.

Por su relevancia y relación directa con esta Tesis Doctoral, se va a analizar el trabajo llevado a cabo por Aguirrebeitia en el que como continuación del modelo analítico de capacidad de carga estática presentado anteriormente en [2.5.2](#), presenta aquí una modelización multiparamétrica por Elementos Finitos para obtener la superficie de aceptación de capacidad de carga estática, sirviendo como validación del modelo analítico. En esta sección se va a presentar el modelo desarrollado en [[Aguirrebeitia et al., 2012b](#)] y se van

a mostrar los resultados principales en relación a la flexibilidad de los anillos. Al igual que en el caso del modelo analítico presentado en la sección 2.5.2, se realizará la descripción detallada del modelo de Elementos Finitos en el Capítulo 4, donde se utilizará como punto de partida para desarrollar el modelo de Elementos Finitos de esta Tesis Doctoral.

Este modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2012b], al igual que el de Daidié [Daidié et al., 2008] incluye la capacidad de obtener la variación del ángulo de contacto en cada bola, que se determina haciendo uso de los desplazamiento de los centros de curvatura, y admite un estado de carga que incluya las componentes axial, radial y de momento de vuelco. El enfoque es distinto al de Daidié citado anteriormente, ya que en Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2012b] mediante este modelo se obtiene una superficie de aceptación para la capacidad estática de carga basada en el concepto mostrado en la Figura 2.13 y que fue descrito en la sección 2.4.1.1.

La primera tarea como en todo modelo de Elementos Finitos, es cómo trabajar con la geometría. A la hora de tratar de desarrollar este modelo, existe un problema inicial añadido y es que no hay simetría cíclica, lo que añade dificultad a la hora de poder parametrizar la geometría del rodamiento. El número de agujeros para la tornillería puede ser diferente en el anillo interior y exterior, y estos números no coincidirán con el número de bolas existentes. Por tanto no es posible definir un único sector circular a repetir hasta completar la geometría del rodamiento. Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2012b] lo resuelve dividiendo la sección del rodamiento en tres zonas de manera que pueda definir tres sectores diferentes de manera paramétrica. En la Figura 2.37 se muestra esta solución adoptada extraída de este trabajo.

Cada uno de estos sectores se malla con diferente densidad y finalmente se define un contacto de adhesión total entre los mismos. A pesar de introducirse de esta manera una discontinuidad en las tensiones de las interfaces adheridas, éstas se presentan lo suficientemente alejadas del área de contacto bola-pista objeto de análisis para la capacidad estática. Por tanto se considera aceptable esta modelización para el propósito de la obtención de la capacidad de carga del rodamiento, y se puede afirmar que este mallado

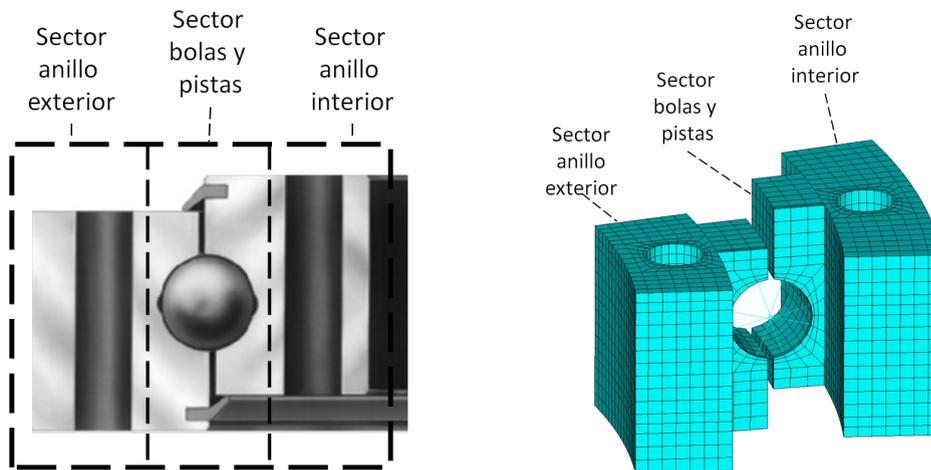


Figura 2.37: Tres sectores para el mallado paramétrico del rodamiento [Aguirrebeitia et al., 2012b]

no introduce un error significativo en el cálculo. Una vez resuelto esto, se presentan los parámetros geométricos utilizados para definir el modelo y que corresponden a la Figura 2.38.

Como el objetivo principal es hallar la capacidad de carga estática analizando el efecto de la flexibilidad de las estructuras, se busca calcular de la manera más precisa posible las tensiones del contacto bola-pista, y por tanto el mayor detalle en el mallado debe ser en esta zona. Presenta además el inconveniente de existir cuatro zonas de contacto por cada bola, con lo que el número de elementos y contactos crece enormemente, lo que implica un alto coste computacional y muy probablemente problemas de convergencia. Como solución a esta dificultad, se adopta un modelo simplificado desarrollado por el Laboratoire de Genie Mecanique de Toulouse y publicado en [Daidié et al., 2008], que ha sido experimentalmente validado. La Figura 2.39 muestra el esquema de esta modelización en Elementos Finitos donde las bolas como elementos sólidos tridimensionales completos, se sustituyen por muelles no lineales que trabajan únicamente a tracción. La flexibilidad del contacto bola-pista está representada en el muelle no lineal y los demás elementos (elementos cáscara y vigas de unión de éstos con el muelle) son elementos rígidos. Estos muelles tienen como nodos de origen los centros de curvaturas de las pistas.

Parámetro	Símbolo	Rango
Diámetros	$d_a$ [mm]	215.5-1095.5
	$T_a$ [mm]	260-1140
	$D_a$ [mm]	286-1166
	$d_i$ [mm]	212.5-1092.5
	$T_i$ [mm]	168-1048
	$D_i$ [mm]	142-1022
Alturas	$h$ [mm]	10
	$H$ [mm]	56
Diámetro del agujero	$D_h$ [mm]	14
Diámetro de la bola	$d_b$ [mm]	20
Número de bolas	$B_n$ [adimensional]	33-172
Número de tornillos exterior	$n_a$ [adimensional]	16-44
Número de tornillos interior	$n_i$ [adimensional]	20-48
Ángulo de contacto inicial	$\alpha$ [deg]	45
Conformidad bola/pista	$s$ [adimensional]	0.9434

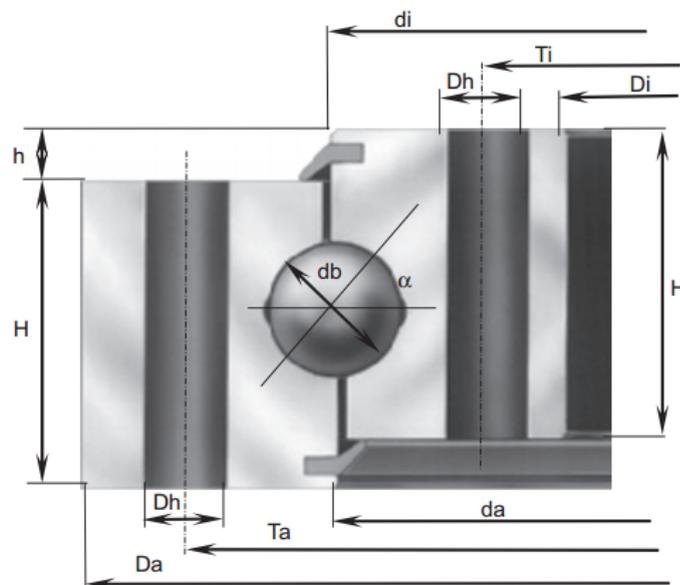


Figura 2.38: Descripción y rango de valores de los parámetros geométricos con la nomenclatura adoptada por Aguirrebeitia en [Aguirrebeitia et al., 2012b]

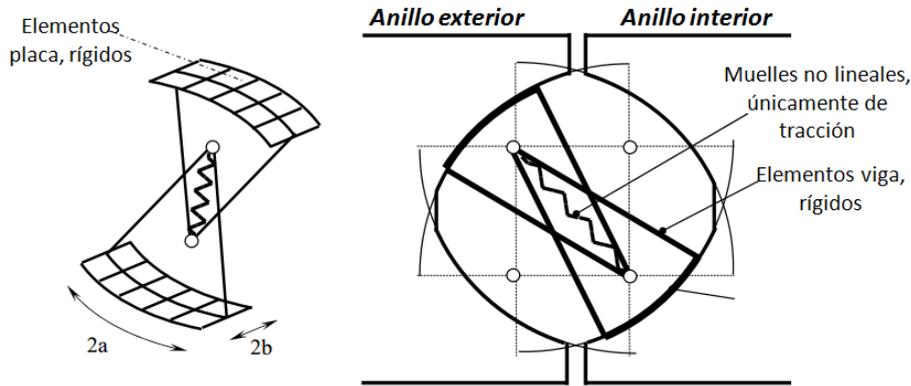


Figura 2.39: Representación esquemática del modelo de Daidie [Daidié et al., 2008]

A la hora de definir esta rigidez de los muelles, lo hace mediante la relación de contacto hertziano para la interacción entre bola y pista, haciendo uso de la siguiente expresión derivada de la relación analítica desarrollada por Houpert en [Houpert, 2001]

$$\delta = \frac{8.97 \times 10^{-4} (1 - s)^{0.1946}}{d_w^{1/3}} Q^{2/3} \quad (2.90)$$

Una vez modelizada la rigidez del contacto bola-pista, queda representar adecuadamente el área de contacto para poder obtener las presiones de forma correcta. Para ello, también se hace uso de expresiones analíticas obtenidas por Houpert [Houpert, 2001] para calcular los semiejes mayor  $a$  y menor  $b$  de la elipse de contacto.

$$\begin{aligned} a &\approx 1.71 \times 10^{-2} (1 - s)^{-0.4091} d_w^{1/3} Q^{1/3} \\ b &\approx 1.52 \times 10^{-2} (1 - s)^{0.1974} d_w^{1/3} Q^{1/3} \end{aligned} \quad (2.91)$$

En [Daidié et al., 2008] también se desarrolla una expresión analítica para la presión máxima del contacto (ecuación 2.92), dependiente únicamente del diámetro de la bola, el radio de la pista y la carga aplicada.

$$P_{MAX} \approx 1.84 \times 10^3 (1 - s)^{0.2117} \frac{Q^{1/3}}{d_w^{2/3}} \quad (2.92)$$

La cual, comparada con la presión máxima admisible determinada por la norma [ISO76, 2006]  $P_{MAX} = 4200$  MPa, nos proporciona la carga máxima admisible por bola. Esta presión en el modelo de Elementos Finitos se mide indirectamente a través de la carga  $Q$  en el muelle a partir de la expresión 2.92, resultando:

$$Q_{MAX} \approx P_{MAX}^3 \frac{d_w^2}{[1.84 \times 10^3 (1 - s)^{0.2117}]^3} \quad (2.93)$$

Es decir, cuando en el modelo de Elementos Finitos, en alguno de los muelles se alcanza el valor de  $Q_{MAX}$  para una combinación de fuerzas axial, radial y de momento de vuelco determinada, esa combinación representa un caso de capacidad máxima del rodamiento.

En la Figura 2.40 se muestra un sector del modelo de Elementos Finitos para el rodamiento de vuelco, que resulta de la modelización descrita mediante esta metodología. Las uniones atornilladas han sido modelizadas mediante restricciones multipunto, al igual que la forma de introducir las cargas aplicadas que se realiza también de esta manera uniéndose un punto central a los centros de la unión atornillada del anillo exterior. El anillo interior queda fijado a una superficie rígida que no tiene en cuenta la rigidez de la estructura a la que se une el rodamiento.

En lo que respecta a la comparación de los resultados obtenidos mediante este enfoque en [Aguirrebeitia et al., 2012b] frente a los resultados del modelo analítico teórico se puede apreciar una diferencia en la capacidad estática para cualquier combinación de esfuerzos, que se hace más evidente a medida que el tamaño del rodamiento crece. En la Figura 2.41 se muestra esta comparativa en la que se comparan las combinaciones de carga que representan los puntos de capacidad estática calculados mediante el modelo analítico de la sección 2.5.2 (puntos con la leyenda *theoretic*) con los obtenidos mediante este modelo de Elementos Finitos para diferentes diámetros de rodamientos. Estas gráficas se presentan normalizadas respecto a la capacidad axial máxima  $C_{0a}$  (ecuación 2.1) calculada tal y como aparece en la norma ISO 76 [ISO76, 2006]. De esta manera, al estar normalizadas, se pueden comparar las capacidades estáticas de rodamientos de

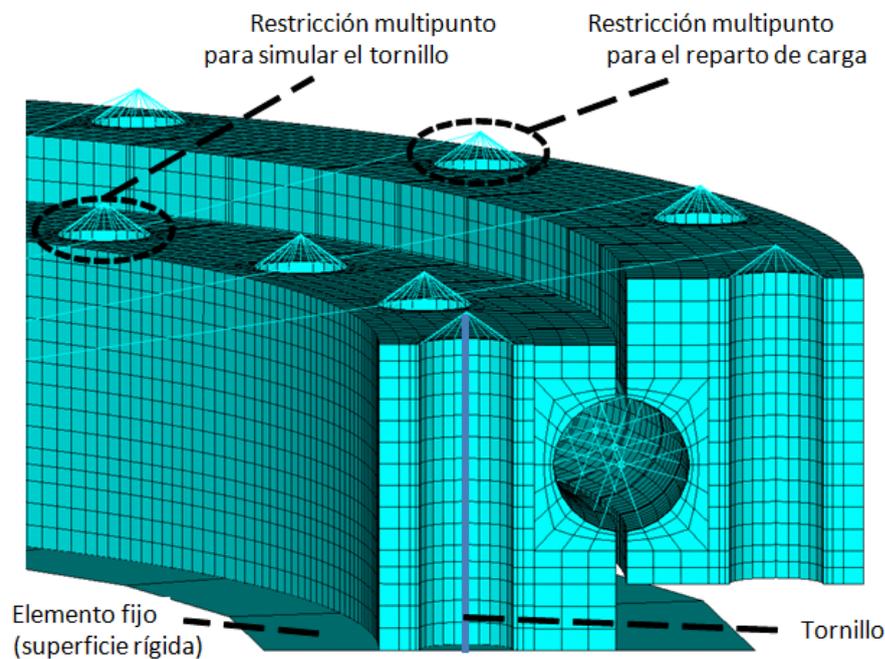


Figura 2.40: Condiciones de contorno y modelización de las uniones atornilladas en [Aguirrebeitia et al., 2012b]

diferentes diámetros medios y queda patente que a mayor diámetro medio, los anillos son más esbeltos y la flexibilidad de los mismos se hace más presente.

Además, hay que tener en cuenta que el modelo de Elementos Finitos tiene en cuenta el cambio de ángulo de contacto. De ahí que incluso para rodamientos de diámetro menor, en los que el efecto de la flexibilidad de los anillos es mucho menor, exista una diferencia entre el modelo teórico y el modelo desarrollado en [Aguirrebeitia et al., 2012b].

Para el eje de esfuerzo axial puro ( $F_A/C_{0a}$  de las gráficas a) y b) de la Figura 2.41), la fuerza axial normalizada por su capacidad axial es cercana a 1 como se espera ya que durante la carga axial no existe una deformación significativa. No obstante, sí existe un efecto respecto al sentido de aplicación del esfuerzo axial que es necesario remarcar. Se aprecia en las gráficas a) y b) de la Figura 2.41 que para el sentido negativo del eje  $F_A/C_{0A}$  (esfuerzo axial que hace que los anillos tiendan a separarse el uno del otro) la capacidad real es mayor que la predicha por el modelo teórico analítico. La razón de esta diferencia reside en que a la hora de modelizar el rodamiento en Elementos Finitos,

Capacidades[kN]	Rodamiento pequeño tamaño			Rodamiento tamaño medio			Rodamiento gran tamaño		
	Teórico	FEM	%	Teórico	FEM	%	Teórico	FEM	%
$C_{0a+}$	684.68	772.21	12.8	1348.62	1486.56	10.2	2095.54	2323.23	10.9
$C_{0a-}$	684.68	797.41	16.5	1348.62	1739.37	29	2095.54	2886.4	37.7
$C_{0r}$	313.36	429.79	37.2	617.22	988.27	60.1	959.06	1907.21	98.9
$C_{0m}$	33.63	36.84	9.5	128.16	130.25	1.6	309.76	302.23	-2.4

Tabla 2.2: Variación de la capacidad en función del diámetro medio. Teórico Vs FEM

Ratios de capacidades	Rodamiento pequeño tamaño			Rodamiento tamaño medio			Rodamiento gran tamaño		
	Teórico	FEM	%	Teórico	FEM	%	Teórico	FEM	%
$C_{0a-}/C_{0a+}$	1	1.0326	3.3	1	1.1701	17	1	1.2424	24.2
$C_{0r}/C_{0a+}$	0.4577	0.5566	21.6	0.4577	0.6648	45.3	0.4577	0.8209	79.4
$(C_{0m}/d)/C_{0a+}$	0.2295	0.2229	-2.9	0.2295	0.2116	-7.8	0.2295	0.2020	-12

Tabla 2.3: Variación de la capacidad en función del diámetro medio. Teórico Vs FEM

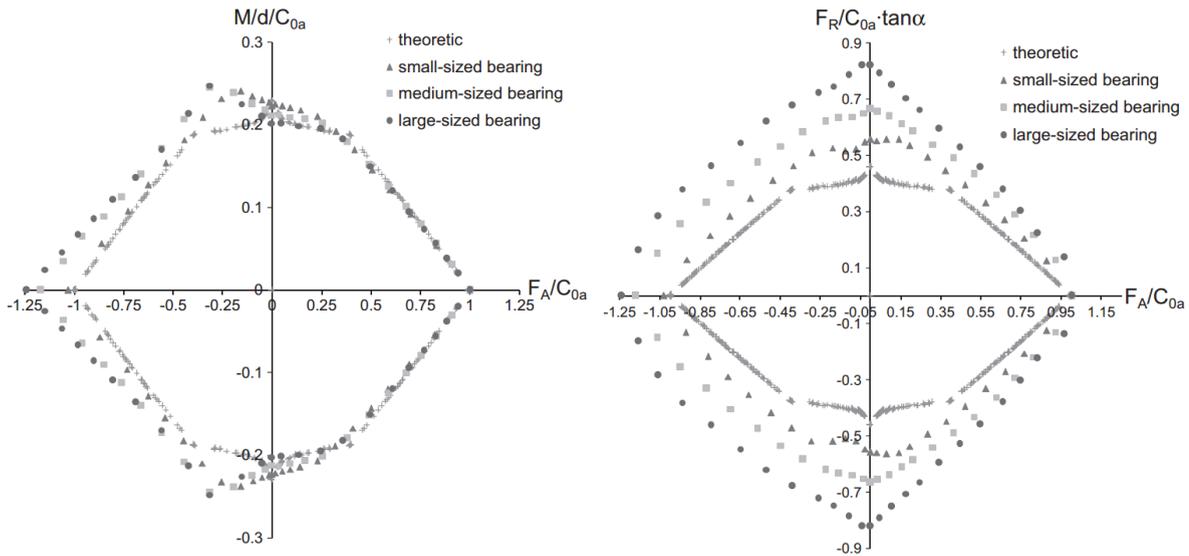
se impone como condición de contorno un empotramiento en la base del anillo interior (ver Figura 2.40) de forma que el rodamiento se comporta de manera más flexible si el sentido de la carga axial es negativo según el criterio establecido en la Figura 2.5, por tanto la capacidad axial en sentido negativo es mayor.

En [Aguirrebeitia et al., 2012b] se muestra en la Tabla 2.2 con variación de la capacidad estática axial según se aplique la carga en un sentido u otro, es decir, según sean los esfuerzos axiales positivos o negativos.

Las curvas de la Figura 2.41, han sido normalizadas respecto al valor positivo de la capacidad estática  $C_{0a+}$ . La siguiente Tabla 2.3 muestra las relaciones  $C_{0a-}/C_{0a+}$ ,  $C_{0r}/C_{0a+}$  y  $(C_{0m}/d)/C_{0a+}$ , que corresponden a los cortes con los ejes en las gráficas de la Figura 2.41.

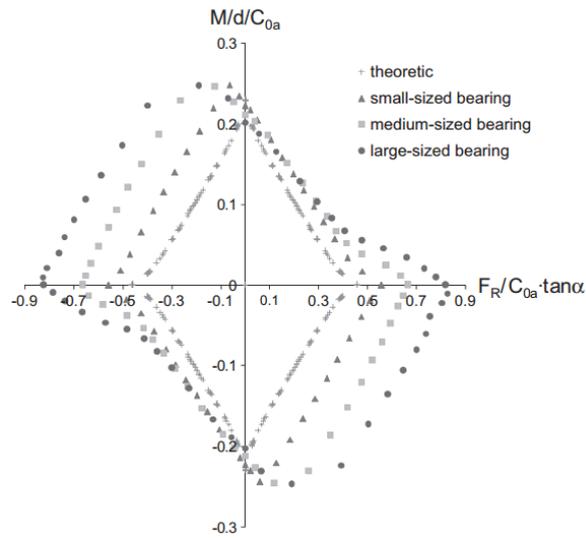
#### 2.5.4. Modelos para el cálculo del par de fricción

En esta Tesis Doctoral también se ha trabajado de manera preliminar en modelos analíticos para la estimación del par de fricción y los resultados alcanzados se presentarán en el Capítulo 5.



a) Superficie de aceptación en el plano  $F_A - M$ .

b) Superficie de aceptación en el plano  $F_A - F_R$ .



c) Superficie de aceptación en el plano  $F_R - M_T$ .

Figura 2.41: Comparativa de modelo analítico [Aguirrebeitia et al., 2010b] frente a modelo de Elementos Finitos [Aguirrebeitia et al., 2012b]

Una vez calculada la capacidad estática, la evaluación de la resistencia del rodamiento al giro bajo carga es el paso natural en el diseño de rodamientos de vuelco. La fuerza de fricción se suele representar de manera simplificada como proporcional a la fuerza normal. La constante de proporcionalidad es el llamado coeficiente de rozamiento  $\mu$ .

$$F_{\text{fricción}} = \mu N \quad (2.94)$$

Basándose en esta primera idea, se desarrollaron inicialmente modelos lineales simplificados, con esta misma estructura de 2.94, en los que se multiplica la fuerza de cada una de las bolas  $Q$ , por un coeficiente de rozamiento.

$$F = \mu \sum Q \quad (2.95)$$

En este caso, para hallar esa carga  $Q$ , se basaron en la distribución de carga teórica en las bolas expuesta en la sección 2.5.1.3.

Estos modelos simplificados son utilizados por la mayoría de los fabricantes de rodamientos. Así mismo, por ser modelos muy manejables a la hora de implementarlos en algoritmos de control de sistemas de actuación, poseen especial interés y se va a proceder a su análisis en esta siguiente sección.

#### 2.5.4.1. Modelos simplificados

Con modelos simplificados nos referimos a expresiones lineales del momento de fricción, en las que cada componente de carga tiene un efecto proporcional e independiente de las demás componentes. Estos modelos tienen una expresión del tipo:

$$M_{\text{fric}} = \mu \frac{d_{pw}}{2} \left[ A \cdot \frac{M}{d_{pw}} + B \cdot F_A + C \cdot F_R \right] + M_{f_0} \quad (2.96)$$

donde los factores que multiplican a cada componente  $A$ ,  $B$  y  $C$  resultan de la geometría macroscópica del rodamiento y de un coeficiente de fricción global. Es decir, la fórmula

es una combinación del par resistente proporcionado por la distribución de carga en las bolas debida a las componentes de carga del momento de vuelco  $M$ , la carga axial  $F_A$  y la carga radial  $F_R$ , asumiendo un coeficiente de fricción genérico  $\mu$ . A esto se le añade el momento de fricción en vacío  $M_{f_0}$  debido a las condiciones de montaje iniciales, esto es, en ausencia de cargas ( $M = F_A = F_R = 0$ ) y con las uniones atornilladas de los anillos interior y exterior adecuadamente tensionadas.

Estos modelos lineales se basan en la distribución de carga teórica en las bolas y no tienen en cuenta, entre otros, los siguientes efectos:

- El área de contacto es una función no lineal de la carga, y la fricción debería verse afectada
- La conformidad entre pista y bola hace que los deslizamientos en la zona de contacto se vean afectados
- La precarga de la bola, las modificaciones en el ángulo de contacto (tanto iniciales como en estado de carga) afectan al momento de fricción
- Diferentes coeficientes de fricción en rodadura y deslizamiento varían el momento de fricción total

A continuación analizaremos las diferentes distribuciones teóricas de carga en las bolas que dan origen a los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la ecuación 2.96.

### Distribución de carga debida a esfuerzo axial $F_A$

La carga axial  $F_z$ , se repartirá uniformemente entre todas las bolas y de acuerdo a la ecuación 2.32, daría como resultado un coeficiente  $B = 1$  para la ecuación (2.96).

Por tanto, este es un método para la obtención de un coeficiente de rozamiento genérico  $\mu$ , midiendo el par de fricción bajo una carga axial pura conocida.

### Distribución de carga debida al momento de vuelco $M$

La distribución de carga teórica debida al momento  $M$  se obtuvo en la ecuación 2.33.

Por tanto, si se utiliza una estimación muy conservadora en la que se considera que todas las bolas están cargadas al mismo nivel de fuerza que la bola más cargada, se toma la expresión:

$$Q_{max} = Q_0 = \frac{4M_{xy}}{d_{pw}Z}$$

y por tanto,  $A = 4$  en la ecuación (2.96).

También podemos calcular cuál es la fuerza media a lo largo de todas las bolas, y considerar este nivel medio en todas y cada una de las bolas:

$$Q_{media} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q_0 \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} Q_0 = \frac{8M_{xy}}{\pi d_{pw}Z} \quad (2.97)$$

y en este caso,  $A = \frac{8}{\pi}$

### Distribución de carga debida al esfuerzo radial $F_R$

De igual manera para el esfuerzo radial, partimos de la expresión obtenida por Stribeck 2.41. Al igual que para el caso del momento de vuelco, se puede utilizar un valor muy conservador en el que se considera que todas las bolas están igual de cargadas que la bola que soportaría el máximo esfuerzo. En este caso  $C = 4.37$  en (2.96), obtenido a partir de:

$$Q_{max} = Q_0 = 4.37 \frac{F_R}{Z}$$

También se podría aplicar el mismo criterio de considerar todas las bolas cargadas a un nivel de carga medio, el cual se obtendría de la siguiente manera:

$$Q_{media} = \frac{4.37F_R}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{3/2} \theta d\theta = \frac{4.37F_R 2\sqrt{2}\mathcal{K}(\frac{1}{2})}{3\pi Z} \approx 2.43156 \frac{F_R}{Z} \quad (2.98)$$

siendo  $\mathcal{K}(\frac{1}{2})$  la integral elíptica completa de primera especie.

En este caso de considerar una carga media,  $C$  es aproximadamente 2.43156.

#### 2.5.4.2. Comparativa de coeficientes de las componentes de carga

En base a los análisis de reparto de carga realizados en las secciones anteriores, se podrían formular los momentos de fricción atendiendo a criterios más o menos conservadores de la siguiente manera:

- Si utilizamos un criterio muy conservador, podemos convenir que todas las bolas tienen el mismo nivel de carga que el de la bola más cargada, es decir:

$$M_{fric} = \mu \frac{d_{pw}}{2} \left[ 4 \cdot \frac{M}{d_{pw}} + F_A + 4.37F_R \right] + M_{f_0} \quad (2.99)$$

- Otro segundo criterio podría ser el considerar que todas las bolas tienen un valor de carga igual a la media

$$M_{fric} = \mu \frac{d_{pw}}{2} \left[ \frac{8}{\pi} \cdot \frac{M}{d_{pw}} + F_A + 2.43156F_R \right] + M_{f_0} \quad (2.100)$$

En la práctica, estas relaciones obtenidas según los repartos de carga analizados y un primer ensayo de carga axial para poder obtener un coeficiente de fricción genérico, son adaptadas por diseñadores y fabricantes de acuerdo a su experiencia y particularidades del diseño, para obtener unos primeros valores del momento de fricción.

En la siguiente tabla se muestra una comparativa de los diferentes ajustes realizados por varios fabricantes, donde se puede ver la discrepancia de valores para una misma

Fabricante / Modelo	A	B	C
Máxima teórica	4	1	4.37
Media teórica	$\frac{8}{\pi}$	1	2.43156
NREL	4.4	1	2.2
Rothe Erde	4.4	1	3.8
ZWZ	4.37	1	2.18
Rollix	4.37	1	3.78
IMO	4.4	1	4

Tabla 2.4: Tabla comparativa de los diferentes coeficientes utilizados por algunos fabricantes extraídos de sus propios catálogos

geometría de rodamiento. Los valores denominados como "*Máxima teórica*" y "*Media teórica*" son los modelos 2.99 y 2.100 respectivamente, y el modelo denominado NREL es el propuesto por la guía de cálculo [Harris et al., 2009].

Como se puede apreciar, los modelos proporcionados por los fabricantes están del lado conservador teniendo en cuenta que estos rodamientos suelen tener como principal componente el momento de vuelco, con los problemas de sobredimensionamiento y baja eficiencia mencionados anteriormente. A esto hay que añadir la utilización a su vez de valores para los coeficientes de rozamiento  $\mu$  también del lado conservador.

#### 2.5.4.3. Modelo de Todd

Este modelo está basado en los desarrollos llevados a cabo por J.J.Todd, y que fueron publicados en el artículo [Todd, 1983]. Su modelo está orientado a rodamientos de estructuras aeroespaciales y tiene en cuenta los siguientes parámetros:

- contacto no lineal mediante la teoría de Hertz
- cambios en el ángulo de contacto en función de la carga
- el momento resistente total del rodamiento es debido a los efectos de microdeslizamiento, pivotamiento de la bola e histéresis originada por la deformación del contacto bola-pista.

En origen, este modelo fue desarrollado pensando en rodamientos de dos puntos de contacto. Todd extiende este modelo diciendo que los rodamientos de cuatro puntos de contacto pueden ser tratados como una combinación de dos rodamientos de contacto doble, colocados de forma adyacente.

En este modelo se asumen las siguientes hipótesis:

1. La bola rueda sin pivotar en uno de los contactos y pivota a medida que rueda solidariamente en el otro contacto.
2. El microdeslizamiento solamente se da en el contacto en el que se produce rodadura pura. Las pérdidas por histéresis se dan en ambos contactos.
3. El coeficiente de fricción entre la bola y la pista es independiente de la presión del contacto y de la velocidad de rodadura.
4. El par resistente neto del rodamiento es suma de las componentes de microdeslizamiento, histéresis y pivotamiento.

Todd divide la fricción en tres efectos diferenciados: microdeslizamiento, histéresis y pivotamiento. A continuación detallaremos cada una de las componentes del momento resistente para este modelo.

### Componente de Microdeslizamiento

Para esta componente de la fricción, Todd se basa en la teoría elemental de bandas para una bola rodando en una pista conforme de Johnson [Johnson, 1987]. En ella el par de fricción para cada contacto se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$M_m = \begin{cases} 0.00788^{0.695} \frac{\mu Q}{d_w^2} a^2 (d_{pw} \pm d_w \cos \alpha), & \text{si } 0 \leq \beta \leq 10 \\ 0.08 \mu \frac{Q}{d_w^2} a^2 \left(1 - 0.5e^{-(\beta-10)/25}\right) (d_{pw} \pm d_w \cos \alpha), & \text{si } \beta > 10 \end{cases} \quad (2.101)$$

donde:

el signo (+) es para la pista exterior y el signo (−) para la pista interior.

$$\beta = \frac{4a^2}{\mu Q_0 E_{eq} d_w^2}$$

$E_{eq}$  es el módulo de Young equivalente dado por la expresión 2.20

### Componente de Histéresis

Para las pérdidas debida a la histéresis del material por deformación elástica en la rodadura, toma el modelo desarrollado por Tabor [Tabor, 1955]. La expresión para cada contacto es la siguiente:

$$M_h = \frac{H a \alpha' Q}{4 \kappa D} (d_{pw} \pm D \cos \alpha) \quad (2.102)$$

El valor de  $H$  es aproximadamente  $\frac{4}{3\pi}$  para contacto conforme bola-pista y el valor de  $\alpha'$  es ca. 0.01 para aceros de alta dureza.

### Componente de Pivotamiento

El par requerido para que una bola pivote alrededor de área de contacto determinado por la teoría de Hertz se deriva de la distribución de presiones hertzianas. Para este par de pivotamiento el par resultante por cada contacto en el rodamiento es:

$$M_s = \frac{3\mu Q a \mathcal{E} \sin \alpha}{8} \quad (2.103)$$

A partir de un rodamiento con una geometría dada y unas deflexiones aplicadas, hay que calcular la carga soportada por cada contacto y los ángulos de contacto resultantes. Estas cargas de cada contacto se calcularían tal y como se describe en la sección 2.5.1.3 o mediante el que será propuesto en esta Tesis Doctoral en el Capítulo 3, obteniendo también las dimensiones de las elipses en los contactos.

Todd indica que inicialmente ha de evaluarse en cada pista el par de pivotamiento, dado que éste suele ser el término dominante <sup>1</sup>. El pivotamiento se asume que ocurre en la pista en la que el valor calculado del par de pivotamiento es menor.

Todd enumera al final de su artículo [Todd, 1983] los parámetros de entrada que no pueden ser calculados y deberían obtenerse de manera empírica. Estos parámetros son: el coeficiente de fricción  $\mu$ , el coeficiente de pérdida por histéresis  $\alpha'$  y el número de bolas que están realmente cargadas y a qué nivel de carga (nominal o mayor/menor que el que les correspondería según un modelo teórico).

Efectivamente los coeficientes de fricción y pérdidas deberán obtenerse para cada caso. Respecto al número de bolas cargadas y el nivel de carga de las mismas, un modelo básico de interferencia geométrica como el tratado en la sección 2.5.1.3 que considera rígidos los anillos del rodamiento y además una geometría perfecta tanto para anillos como para bolas, hace que los resultados obtenidos mediante este modelo analítico de fricción difieran ya no sólo por las propias simplificaciones sino también por estar utilizando datos de entrada que no son representativas de espécimen físico.

Podemos ver un ejemplo de aplicación de este modelo de Todd en [Plaza et al., 2008], en el que la empresa de aerogeneradores Gamesa Eólica realizó un estudio y ajuste de este modelo para realizar mejoras de diseño en sus sistemas de actuación al proporcionarles este modelo resultados más acordes con las mediciones realizadas en máquina real.

El modelo de Todd, con los ajustes adecuados, proporciona valores globales del momento de fricción muy útiles para el diseño de mecanismos de actuación.

---

<sup>1</sup>En los rodamientos de vuelco donde las presiones son muy altas, esto no se cumple

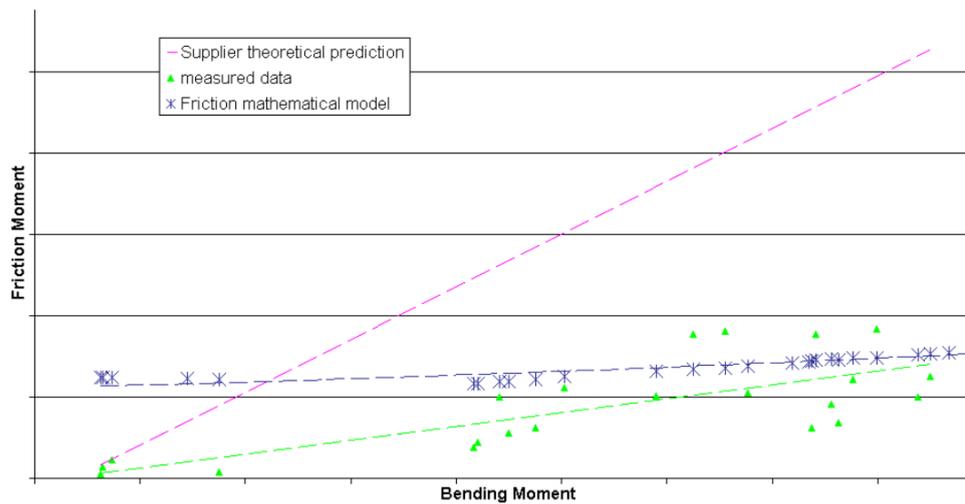


Figura 2.42: Resultados publicados por Gamesa Eólica en [Plaza et al., 2008]

#### 2.5.4.4. Modelo de Hamrock y Leblanc. Particularización de Joshi

Hamrock desarrolló en [Hamrock et al., 1972] un modelo para estudiar la fricción de rodamientos de bolas analizando dentro del área de contacto los fenómenos de deslizamiento que se producían. La metodología que desarrolla, considera que en todo el área de contacto se produce deslizamiento, a excepción de como máximo un punto que corresponde con el eje de pivotamiento de la bola. Este trabajo lo realizó para rodamientos de tres puntos de contacto en los cuales el centro de curvatura de la pista interior es único y en la pista exterior los centro de curvatura son no coincidentes. Las condiciones de funcionamiento de los rodamientos en este modelo eran de alta velocidad y baja carga. Posteriormente Leblanc en [Leblanc and Nelias, 2007] extendió el modelo para rodamientos de cuatro puntos de contacto y Joshi [Joshi et al., 2015] adaptó para rodamientos de baja velocidad y altas cargas, ya que el trabajo desarrollado por Hamrock y posteriormente Leblanc, incorporaba fuerzas centrífugas y efectos giroscópicos.

Los modelos presentados por Hamrock [Hamrock et al., 1972] y Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] necesitan resolver  $5 + 12Z$  ecuaciones acopladas. Donde 5 corresponden a los equilibrios de fuerzas axial, radiales (en dos ejes perpendiculares que definan un sistema de coordenadas global como el de la Figura 2.38) y de momento de vuelco (también en los dos mismos ejes perpendiculares de dicho sistema de coordenadas);  $6Z$

corresponden a restricciones geométricas de interferencia en el contacto bola-pista para cada una de las  $Z$  bolas; y  $6Z$  corresponden a equilibrio de fuerzas y momentos locales de cada uno de los cuatro contactos para cada bola.

Joshi [Joshi et al., 2015] desacopla el problema resolviendo inicialmente el reparto de esfuerzos en cada una de las bolas haciendo uso del modelo de Amasorrain [Amasorrain et al., 2003] y posteriormente resuelve las restantes ecuaciones correspondientes a la cinemática y el equilibrio local de fuerzas en cada bola para el caso de baja velocidad, lo que hace que el modelo sea más simple que el propuesto por Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] ya que no existen fuerzas centrífugas ni efectos giroscópicos y de esta manera la contribución de la fricción al par de giro total por parte de cada una de las bolas, puede ser estimado sin considerar los efectos de las otras bolas. A continuación se detalla este modelo de Joshi.

El sistema de referencia global del rodamiento que define Leblanc y hereda Joshi se muestra en la Figura 5.7, en la cual el eje  $x$  es el de giro. La nomenclatura de los contactos, se basa en el criterio adoptado por Hamrock en [Hamrock et al., 1972] donde éstos se denominaban según su posición (interior-derecha  $ir$ , interior-izquierda  $il$ , exterior-derecha  $or$ , exterior-izquierda  $ol$ ) de la aplicación concreta en la que trabajó.

Partiendo de las fuerzas externas aplicadas mostradas en la Figura 5.7 anterior, se resuelve inicialmente el equilibrio obteniéndose las fuerzas de contacto para cada bola  $Q_{il}$ ,  $Q_{ir}$ ,  $Q_{ol}$ ,  $Q_{or}$ , con sus respectivos ángulos de contacto  $\alpha_{il}$ ,  $\alpha_{ir}$ ,  $\alpha_{ol}$ ,  $\alpha_{or}$ . Estos parámetros sirven como parámetros de entrada para el cálculo de la cinemática de la bola.

El considerar los efectos giroscópicos y de fuerzas centrífugas como nulos, permite asumir algunas propiedades de simetría como son:  $\alpha_{il} = \alpha_{or}$ ,  $\alpha_{ir} = \alpha_{ol}$ ,  $Q_{il} = Q_{or}$  y  $Q_{ir} = Q_{ol}$ . Esta simetría hace que el ángulo  $\beta'$  que define Leblanc para representar la inclinación del eje de pivotamiento de la bola en el plano paralelo al eje de rotación absoluto  $x$  y se muestra en la Figura 2.44, tienda a cero.

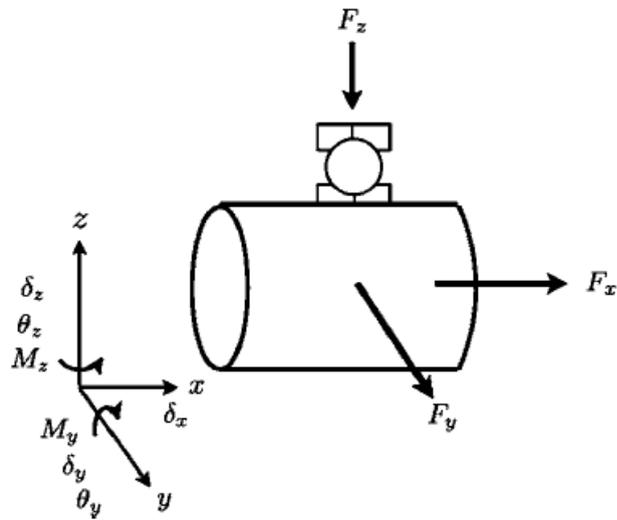


Figura 2.43: Sistema de referencia global del rodamiento utilizado por Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] y Joshi [Joshi et al., 2015]

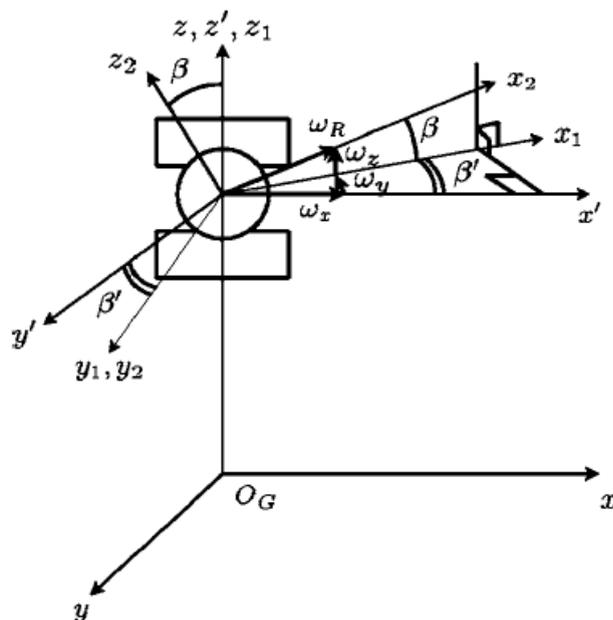


Figura 2.44: Sistema de referencia local del rodamiento utilizado por Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] y Joshi [Joshi et al., 2015]

Considerando las simplificaciones mencionadas previamente, la cinemática interna de cada bola viene determinada por el ángulo  $\beta$  de la Figura 5.7 que representa la inclinación del eje de pivotamiento de la bola respecto al eje de giro global del rodamiento; y por los radios efectivos efectivos de rodadura  $\bar{r}_{il}$ ,  $\bar{r}_{ir}$ ,  $\bar{r}_{ol}$ ,  $\bar{r}_{or}$ , que Hamrock define de acuerdo a las siguientes expresiones 2.104, 2.105, 2.106 y 2.107.

$$\bar{r}_{il} = \sqrt{R_i^2 - X_{il}^2} - \sqrt{R_i^2 - a_{il}^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_{il}^2} \quad (2.104)$$

$$\bar{r}_{ir} = \sqrt{R_i^2 - X_{ir}^2} - \sqrt{R_i^2 - a_{ir}^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_{ir}^2} \quad (2.105)$$

$$\bar{r}_{ol} = \sqrt{R_o^2 - X_{ol}^2} - \sqrt{R_o^2 - a_{ol}^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_{ol}^2} \quad (2.106)$$

$$\bar{r}_{or} = \sqrt{R_o^2 - X_{or}^2} - \sqrt{R_o^2 - a_{or}^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_{or}^2} \quad (2.107)$$

Donde  $a$  son los semiejes mayores de la elipse de contacto,  $X$  la coordenada correspondiente dentro de la elipse de contacto (ver Figura 2.45); y  $R_{i,o}$  es de acuerdo al modelo de contacto de Hertz, el radio de la superficie deformada en el plano del eje mayor de la elipse de contacto tal y como se muestra en la Figura 2.45) y cuya expresión es:

$$R_{i,o} = \frac{2f_{i,o}d_w}{2f_{i,o} + 1} \quad (2.108)$$

Estos radios efectivos, para cada conjunto de contactos en cada bola (interior-derecha, interior-izquierda, exterior-derecha, exterior-izquierda), están relacionados con los radios efectivos de los otros conjuntos de contactos de cada bola mediante la relación de la velocidad angular de pivotamiento de cada bola y las velocidades angulares relativas de la pista interior y exterior  $\left(\frac{\omega_B}{\omega_o} \text{ y } \frac{\omega_B}{\omega_o}\right)$ . Por tanto, la cinemática de cada bola es función únicamente de tres parámetros: dos radios efectivos (bien  $\bar{r}_{il}$ ,  $\bar{r}_{or}$  o bien  $\bar{r}_{ir}$ ,  $\bar{r}_{ol}$ ) y el ángulo  $\beta$ .

A continuación se describirán las velocidades relativas en cada uno de los contactos, necesarias para definir los deslizamientos y por tanto la fricción que se genera; y la relación de velocidad angular de pivotamiento frente a velocidad angular de las pistas interior y exterior, para poder posteriormente resolver el equilibrio de fuerzas y momentos locales en cada bola y que estas soluciones sean compatibles con la cinemática global del rodamiento.

Se denominará  $\omega_B$  a la velocidad de pivotamiento de la bola y  $\Omega_C$  a la velocidad angular del centro de la bola alrededor del eje de giro del rodamiento. Así mismo, la velocidad angular de la pista exterior se denominará  $\omega_o$  y la de la pista interior  $\omega_i$ . El sistema de referencia local para definir las velocidades se muestra en la Figura 2.44 anterior, y las componentes de la velocidad de pivotamiento teniendo en cuenta que a bajas velocidades  $\beta'$  es nula, son:

$$\omega_x = \omega_B \cos \beta \quad (2.109)$$

$$\omega_y = 0 \quad (2.110)$$

$$\omega_z = \omega_B \sin \beta \quad (2.111)$$

Este desarrollo de velocidades relativas, fue llevado a cabo por Hamrock en [Hamrock et al., 1972] y partió de la idealización de que el centro de la bola permanecía fijo en el espacio y las pistas exterior e interior eran las que giraban. Para el caso en el que la pista exterior permanezca fija, como es el caso habitual de los rodamientos de vuelco, la velocidad del centro de la bola  $\Omega_C$  será en los desarrollos posteriores igual a  $-\omega_o$ ; y la velocidad angular absoluta de la pista interior es  $\Omega_i = \omega_i + \Omega_C$ . Las velocidades angulares relativas, expresadas en términos de la velocidad angular absoluta de la pista interior y la velocidad de pivotamiento de la bola se expresan de la siguiente manera:

$$\omega_i = \frac{\Omega_i \frac{\omega_B}{\omega_o}}{\frac{\omega_B}{\omega_o} - \frac{\omega_B}{\omega_i}} \quad (2.112)$$

$$\omega_o = \frac{\Omega_i \frac{\omega_B}{\omega_i}}{\frac{\omega_B}{\omega_o} - \frac{\omega_B}{\omega_i}} \quad (2.113)$$

$$\omega_B = \frac{\Omega_i \frac{\omega_B}{\omega_o} \frac{\omega_B}{\omega_i}}{\frac{\omega_B}{\omega_o} - \frac{\omega_B}{\omega_i}} \quad (2.114)$$

En la Figura 2.45 se muestra la cinemática para el caso del contacto exterior-derecho de una bola.

Un punto  $(X_{ol}, Y_{ol})$  en la elipse del contacto exterior-derecho debido a la componente  $\omega_o \cos \alpha_{ol}$  de la velocidad angular de la pista exterior, las velocidades lineales de la pista exterior viene descritas por la siguiente expresión 2.115

$$V_{1ol} = -\frac{d_{pw}\omega_o}{2} - \bar{r}_{ol}\omega_o \cos \alpha_{ol} \quad (2.115)$$

Para el caso de la bola, un punto  $(X_{ol}, Y_{ol})$  en la elipse de contacto de la bola tiene la velocidad lineal

$$V_{2ol} = -\bar{r}_{ol}(\omega_z \sin \alpha_{ol} + \omega_x \sin \alpha_{ol}) \quad (2.116)$$

Por tanto, la velocidad a la que desliza la pista exterior sobre la bola en la dirección Y de acuerdo al sistema de referencia de la Figura 5.7 es:

$$V_{Yol} = V_{1ol} - V_{2ol} \quad (2.117)$$

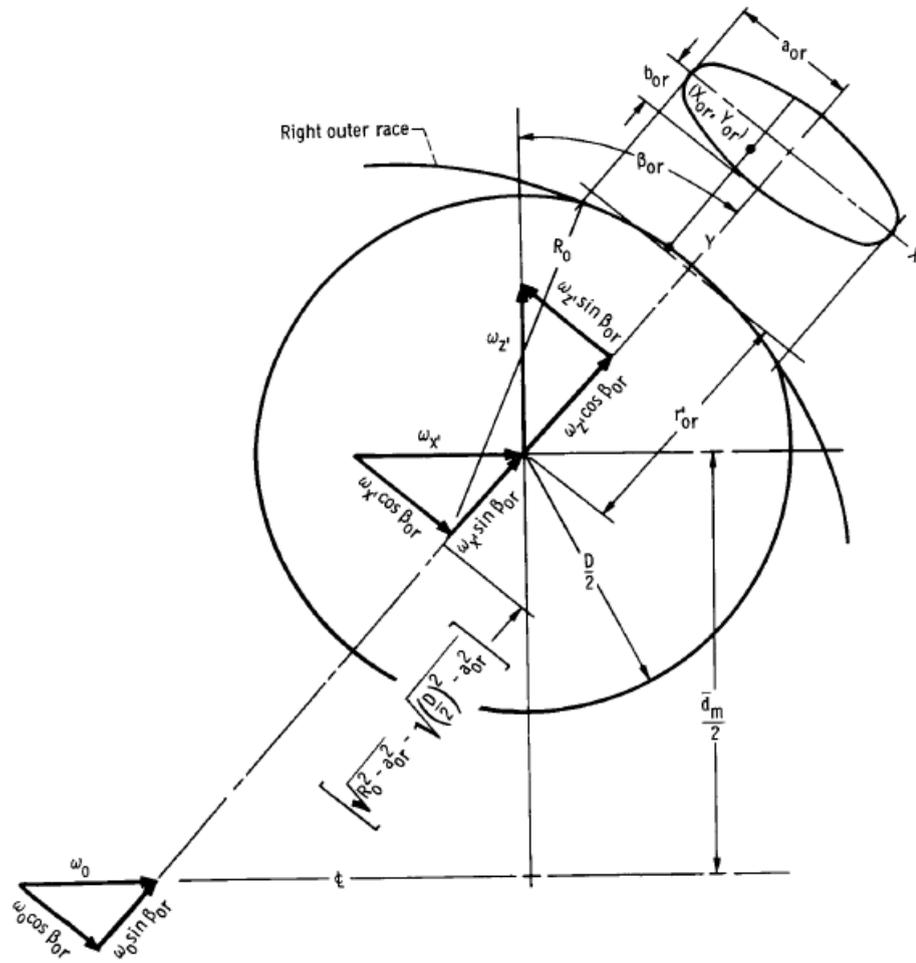


Figura 2.45: Cinemática interna utilizado por Hamrock [Hamrock et al., 1972], Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] y Joshi [Joshi et al., 2015]

Respecto al eje  $X$ , como  $\omega_y$  es nula de acuerdo a la ecuación 2.110, todos los puntos del área de contacto tienen velocidad nula en esa dirección:

$$V_{Xol} = -\omega_y \bar{r}_{ol} = 0 \tag{2.118}$$

Proyectando la velocidad angular de la pista exterior sobre la dirección definida por  $\alpha_{ol}$ , existe una velocidad de pivotamiento  $\omega_{S_{ol}}$  con respecto a la bola. Ésta se puede escribir de la siguiente manera:

$$\omega_{1ol} = -\omega_o \sin \alpha_{ol} \tag{2.119}$$

Así mismo, debido a las componentes  $\omega_z \cos \alpha_{ol}$  y  $\omega_x \sin \alpha_{ol}$  de la bola, la velocidad angular de la bola en la dirección  $\alpha_{ol}$  se puede escribir como:

$$\omega_{2ol} = \omega_z \cos \alpha_{ol} - \omega_x \sin \alpha_{ol} \quad (2.120)$$

Por tanto, el pivotamiento relativo de la pista exterior con respecto a la bola, se puede escribir como:

$$\omega_{Sol} = \omega_{1ol} - \omega_{2ol} \quad (2.121)$$

De forma equivalente, para el caso de la velocidad angular de rodadura, la expresión para el contacto exterior-izquierdo queda:

$$\omega_{Rol} = \omega_x \cos \alpha_{ol} + \omega_z \sin \alpha_{ol} - \omega_o \cos \alpha_{ol} \quad (2.122)$$

Para el caso del contacto exterior-derecho, el razonamiento es el mismo. Debido a la componente de la velocidad  $\omega_o \cos \alpha_{or}$  un punto  $(X_{or}, Y_{or})$  de la pista, tiene una velocidad lineal:

$$V_{1or} = -\frac{d_{pw}\omega_o}{2} - \overline{r_{or}}\omega_o \cos \alpha_{or} \quad (2.123)$$

Un punto  $(X_{or}, Y_{or})$  de la bola en el mismo contacto, debido a las componentes de velocidad  $\omega_x \cos \alpha_{or}$  y  $\omega_z \sin \alpha_{or}$ , tiene una velocidad lineal:

$$V_{2or} = \overline{r_{or}} (\omega_z \sin \alpha_{or} - \omega_x \cos \alpha_{or}) \quad (2.124)$$

Resultando la velocidad con la que la pista exterior desliza sobre la bola en ese contacto en la dirección  $Y$ :

$$V_{Yor} = V_{1or} - V_{2or} \quad (2.125)$$

De igual manera que para el anterior contacto, en la dirección  $X$  la velocidad lineal relativa será nula debido a la componente  $\omega_y = 0$

$$V_{Xor} = -\omega_y \bar{r}_{or} = 0 \quad (2.126)$$

Respecto a las velocidades angulares sobre el eje definido por  $\alpha_{or}$ , debido a la componente  $\omega_o \sin \alpha_{or}$  de la pista, se tiene la siguiente velocidad angular:

$$\omega_{1or} = \omega_o \sin \alpha_{or} \quad (2.127)$$

Fijándose en la bola, las componentes  $\omega_x \sin \alpha_{or}$  y  $\omega_z \cos \alpha_{or}$  dan como resultado la velocidad angular en el eje definido por  $\alpha_{or}$  siguiente:

$$\omega_{2or} = \omega_x \sin \alpha_{or} + \omega_z \cos \alpha_{or} \quad (2.128)$$

Obteniéndose finalmente la velocidad relativa de pivotamiento para el contacto exterior-derecho como:

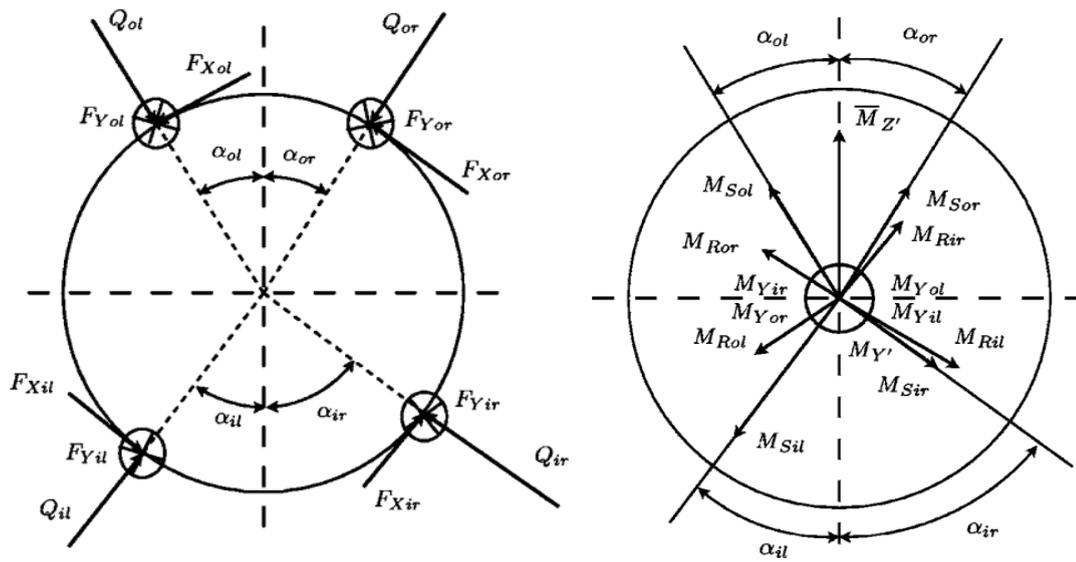
$$\omega_{Sor} = \omega_{1or} - \omega_{2or} \quad (2.129)$$

De manera similar, para la velocidad angular de rodadura resulta:

$$\omega_{Ror} = \omega_x \cos \alpha_{or} - \omega_z \sin \alpha_{or} - \omega_o \cos \alpha_{or} \quad (2.130)$$

Por el mismo procedimiento, se obtienen las velocidades relativas para los contacto interior-izquierdo e interior-derecho.

Haciendo uso de las expresiones 2.112, 2.113 y 2.114, las velocidades lineales y angulares relativas para cada contacto, quedarían expresadas en función de  $\frac{\omega_B}{\omega_o}$  y  $\frac{\omega_B}{\omega_o}$ , como se ha mencionado previamente.



a) Fuerzas actuando sobre la bola

b) Momentos actuando sobre la bola

Figura 2.46: Fuerzas y momentos locales actuando sobre una de las bolas [Hamrock et al., 1972]

Para un caso general, las fuerzas y momentos locales de fricción se representan en la Figura 2.46.

Las ecuaciones para estas fuerzas de fricción y momentos se obtienen de Jones [Jones, 1959]. Es necesario hacer el siguiente cambio de variable para integrar dentro del área de contacto elíptica:

$$q = \frac{X}{a} \quad (2.131)$$

$$t = \frac{Y}{b} \quad (2.132)$$

$$\kappa = \frac{a}{b} \quad (2.133)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{t}{\kappa q}\right) \quad (2.134)$$

$$\psi = \arctan \left( \frac{\frac{t}{\kappa} - \frac{V_x}{a\omega_S}}{q + \frac{V_y}{a\omega_S}} \right) \quad (2.135)$$

Y las ecuaciones de Jones [Jones, 1959] se pueden escribir entonces de la siguiente manera, aplicando los subíndices (*ir*, *il*, *or*, *ol*) correspondientes en cada una de las expresiones:

$$F_Y = \frac{3Q\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-q^2}}^{\sqrt{1-q^2}} \sqrt{1-q^2-t^2} \cos \psi dt dq \quad (2.136)$$

$$F_X = \frac{3Q\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-q^2}}^{\sqrt{1-q^2}} \sqrt{1-q^2-t^2} \sin \psi dt dq \quad (2.137)$$

$$M_S = \frac{3Q\mu a}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-q^2}}^{\sqrt{1-q^2}} \sqrt{1-q^2-t^2} \sqrt{q^2 + \frac{t^2}{\kappa^2}} \cos(\psi - \theta) dt dq \quad (2.138)$$

$$M_Y = \frac{3Q\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-q^2}}^{\sqrt{1-q^2}} \bar{r} \sqrt{1-q^2-t^2} \sin \psi dt dq \quad (2.139)$$

$$M_R = \frac{3Q\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-q^2}}^{\sqrt{1-q^2}} \bar{r} \sqrt{1-q^2-t^2} \cos \psi dt dq \quad (2.140)$$

Donde las cargas  $Q$  de cada bola se calculan de forma independiente como se ha indicado previamente, por ejemplo mediante el modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] o el modelo de Amasorrain [Amasorrain et al., 2003].

Finalmente, el equilibrio de fuerzas y momentos locales de cada bola, se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M_{Sor} \cos \alpha_{or} + M_{Ror} \sin \alpha_{or} + M_{Sol} \cos \alpha_{ol} - M_{Rol} \sin \alpha_{ol} \\ - M_{Sir} \cos \alpha_{ir} + M_{Rir} \sin \alpha_{ir} - M_{Sil} \cos \alpha_{il} - M_{Ril} \cos \alpha_{il} = 0 \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} M_{Sor} \sin \alpha_{or} - M_{Ror} \cos \alpha_{or} - M_{Sol} \sin \alpha_{ol} - M_{Rol} \cos \alpha_{ol} \\ + M_{Sir} \sin \alpha_{ir} + M_{Rir} \cos \alpha_{ir} - M_{Sil} \sin \alpha_{il} + M_{Ril} \sin \alpha_{il} = 0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$F_{Yil} + F_{Yol} + F_{Yor} + F_{Yir} = 0 \quad (2.143)$$

Resolviendo iterativamente mediante el algoritmo de Newton Raphson las ecuaciones 2.141, 2.142 y 2.143, permite hacer uso de las fuerzas y momentos locales obtenidos para calcular el par actuante en la pista interior y exterior del rodamiento de la siguiente manera:

$$T_i = F_{Yil} \left( \frac{d_{pw}}{2} - \bar{r}_{il} \cos \alpha_{il} \right) + F_{Yir} \left( \frac{d_{pw}}{2} - \bar{r}_{ir} \cos \alpha_{ir} \right) - Q_{ir} \sin \alpha_{ir} + Q_{il} \sin \alpha_{il} \quad (2.144)$$

$$T_o = F_{Yol} \left( \frac{d_{pw}}{2} + \bar{r}_{ol} \cos \alpha_{ol} \right) + F_{Yor} \left( \frac{d_{pw}}{2} + \bar{r}_{or} \cos \alpha_{or} \right) - Q_{or} \sin \alpha_{or} + Q_{ol} \sin \alpha_{ol} \quad (2.145)$$

Estas ecuaciones 2.144 y 2.145 representan la contribución al par de fricción total de cada bola. Si la bola está en equilibrio, estos valores serán similares. Para calcular el par total, por tanto, simplemente habrá que sumar la contribución del par interior y exterior de todas las bolas.

Joshi [Joshi et al., 2015] subraya que a pesar de estar este modelo orientado a rodamientos de vuelco con altas cargas y bajas velocidades, se espera un régimen elasto-hidrodinámico en la rodadura de las bolas y que no se produzcan efectos de *stick-slip*. Esto está de acuerdo con las comparaciones que realiza frente a los resultados obtenidos en la literatura por Todd y Johnson [Todd and Johnson, 1986, Todd, 1987] y Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007], aunque debería realizarse un estudio más detallado para comprobar que efectivamente existe régimen elasto-hidrodinámico. Así mismo, se realizaron comparaciones frente a medidas experimentales haciendo uso de modelo de Leblanc [Leblanc and Nelias, 2007] y de la adaptación de Joshi [Joshi et al., 2015]. El coeficiente de fricción para el contacto bola pista, fue obtenido previamente mediante un ensayo en tribómetro. El esquema del ensayo se muestra en la Figura 2.47, donde se montan dos rodamientos en paralelo y únicamente se introduce carga axial mediante el apriete de los tornillos situados en las bridas exteriores de los alojamientos superior e inferior de cada uno de los rodamientos. La medida del par se obtiene mediante la célula de carga inferior como reacción a la actuación del servo-motor superior.

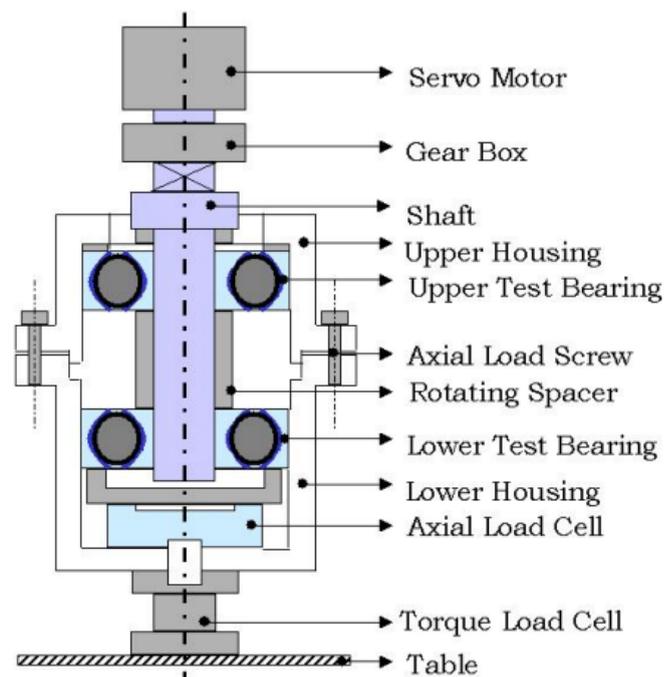


Figura 2.47: Esquema del ensayo experimental llevado a cabo por Joshi en [Joshi et al., 2015]

Las diferencias obtenidas entre el modelo y los ensayos experimentales llevados a cabo mediante el montaje mostrado en la Figura 2.47 van del 6% al 16% aproximadamente en función del estado de carga y de si las bolas tienen interferencia inicial (4 puntos de contacto) o se montan con holgura (2 puntos de contacto) respectivamente.

# 3

## Modelo analítico para el cálculo de la capacidad estática generalizada

En el Capítulo anterior se han mostrado diferentes modelos analíticos que pueden ser usados para el cálculo de la capacidad estática del rodamiento. Por ejemplo el modelo de Zupan [Zupan and Prebil, 2001] que presentaba un enfoque directo mediante el cual se calcula el reparto de carga en las bolas teniendo en cuenta la variación de ángulo. Para obtenerlo se hacía uso de las ecuaciones de Jones [Jones, 1946], y con este reparto de carga se comparaba la presión de la bola más cargada frente a la presión de contacto máxima admisible de manera que iterativamente se puede llegar a obtener la capacidad de carga del rodamiento. Otro de los modelos a destacar es el de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] que, a diferencia del anterior, presenta un enfoque inverso mediante el cual se parte de una presión de contacto admisible y se estiman los esfuerzos necesarios que hagan alcanzar este valor de presión de contacto en la bola más cargada. Estos modelos han sido detallados en la sección 2.5.2 y se han mostrado las carencias que existían para rodamientos de vuelco en los modelos analíticos de reparto de cargas como son: ángulo de contacto constante, que no se tenga en cuenta la interferencia

del montaje bola-pista inicial y que la rigidez de los anillos y estructuras unidas a ellos se considera infinitamente rígida. Por tanto, como se ha mostrado en el modelo de Elementos Finitos de la sección 2.5.3 utilizado no sólo como herramienta de cálculo de la capacidad estática del rodamiento, sino también como método de validación de los modelos analíticos anteriormente citados, la capacidad de carga estática era subestimada obligando a seleccionar rodamientos sobredimensionados que conllevan no sólo un sobre coste de adquisición sino que repercute directamente en los sistemas de guiado que accionan los mismos, demandando elementos de actuación más robustos y potentes.

En este Capítulo se va a presentar un modelo analítico que incluye tanto el ángulo de contacto variable como una precarga inicial o interferencia de montaje entre bola-pista que como ha sido mencionado en el Capítulo 2. El interés por disponer de un modelo analítico que considere no sólo esta variación del ángulo de contacto sino también la precarga es claro, ya que por requisitos de rigidez y mejora del reparto de cargas la forma habitual de trabajar de los rodamientos de vuelco es con esta interferencia de montaje inicial. Por tanto este modelo de reparto de carga presenta resultados más ajustados a la realidad y será el que se utilice para hallar la combinación de esfuerzos admisible de acuerdo al mismo criterio utilizado inicialmente de la normativa ISO76 [ISO76, 2006].

Inicialmente se desarrollará el modelo que incluye únicamente la variación del ángulo de contacto y finalmente se ampliará el modelo incorporando a la variación del ángulo de contacto, el efecto de la precarga.

### 3.1. Desarrollo del modelo analítico con ángulo variable

Este modelo analítico toma como punto de partida los desarrollos realizados por Aguirrebeitia en [Aguirrebeitia et al., 2010b], y el desarrollo del mismo se aplicará a un rodamiento con la geometría y el sistema de referencia para las cargas aplicadas descrita en la Figura 2.5. En [Aguirrebeitia et al., 2010b] se considera que el ángulo de contacto es constante e igual en todas las bolas. En realidad, el ángulo de contacto puede variar de forma notable bajo una combinación de cargas, pudiendo ser distinto además para cada

bola, y por tanto la capacidad estática del rodamiento se verá afectada. En la Figura 3.1 se muestra esquemáticamente el modelo de interferencia geométrica que incorpora la variación del ángulo de contacto.

En la Figura 3.1, partiendo de la situación inicial en la que el ángulo de contacto tiene valor  $\alpha_0$ , se considera fija la pista exterior (derecha de la Figura 3.1) y por acción de los esfuerzos se desplaza la pista interior (izquierda de la Figura 3.1) considerándose las condiciones de contacto elásticas. Este desplazamiento se puede dividir en sus tres componentes axial  $\delta_a$ , radial  $\delta_r$  y angular  $\delta_\theta$ , relacionadas con las direcciones de los esfuerzos aplicados de acuerdo a la Figura 2.5. Como puede observarse en la Figura 3.1, a consecuencia de estos desplazamientos los ángulos de contacto bola-pista desde su valor inicial  $\alpha_0$  a unos valores finales  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , respectivamente para cada contacto. A continuación se detalla el desarrollo de este modelo analítico.

### 3.1.1. Formulación del modelo analítico con ángulo variable

Para el desarrollo del modelo analítico con ángulo variable, se parte del mismo concepto propuesto por Jones [Jones, 1946] en su planteamiento de las ecuaciones de equilibrio estático del rodamiento. De acuerdo con éste, bajo una combinación de esfuerzos axial, radial y de momento de vuelco cualquiera, las interferencias geométricas de los contactos bola-pista en las direcciones de contacto  $c_1$  y  $c_2$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  respectivamente, se pueden describir como una combinación de interferencias axial  $\delta_a$ , radial  $\delta_r$  y angular  $\delta_\theta$ . Es decir, como se puede apreciar en la Figura 3.1 la distancia inicial entre los centros de curvatura es  $\Delta_a$  en dirección axial y  $\Delta_r$  en dirección radial. Considerando en anillo exterior fijo (lado derecho de la Figura 3.1) por efecto de los esfuerzos axial, radial y de momento de vuelco se producirá un desplazamiento en el anillo interior (lado izquierdo de la Figura 3.1). Este desplazamiento origina unas interferencias en ambas direcciones de los contactos, que como se ha indicado previamente se definirá en forma de combinación de interferencias que en dirección axial serán función de las interferencias axial  $\delta_a$  y angular  $\delta_\theta$ , y en

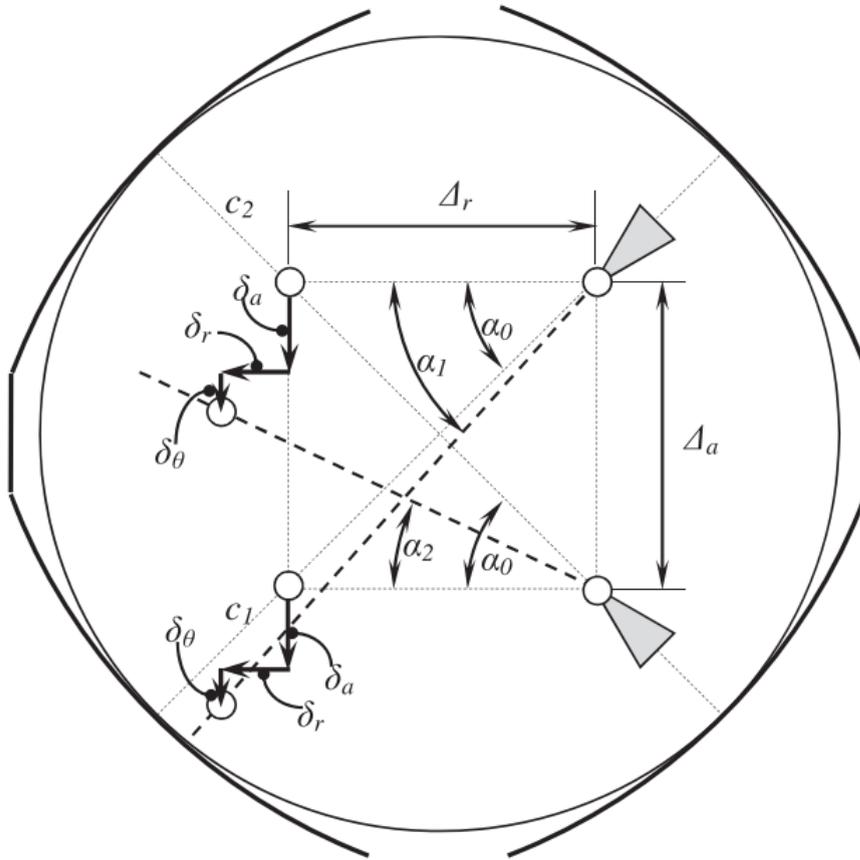


Figura 3.1: Definición del Modelo de Interferencia Geométrica en [Aguirrebeitia et al., 2012c]

dirección radial será función de la interferencia radial  $\delta_r$ , tal y como se indica en la Figura 3.1. Por tanto, para una bola cualquiera situada en un ángulo azimutal  $\psi$  (según la Figura 2.21), con ángulo inicial de contacto  $\alpha_0$ , se describen las interferencias debidas a los esfuerzos aplicados como la diferencia entre la distancia entre centros de curvatura final (expresión 3.2 donde el signo + es para la dirección de contacto 1 y el signo - para la dirección de contacto 2) y la distancia inicial de esos centros (expresión 3.1):

$$\text{Distancia Inicial Centros Curvatura} = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \quad (3.1)$$

$$\text{Distancia Final Centros Curvatura} = \sqrt{(\Delta_a \pm \delta_a \pm \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2} \quad (3.2)$$

Quedando finalmente las siguientes expresiones 3.3 y 3.4 de las interferencias para las direcciones de contacto 1 y 2 respectivamente:

$$\delta_1 = \sqrt{(\Delta_a + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \quad (3.3)$$

$$\delta_2 = \sqrt{(\Delta_a - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \quad (3.4)$$

Y de igual manera se pueden determinar los ángulos de contacto que se alcanzan una vez el rodamiento ha sido cargado ( $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de la Figura 3.1), mediante las siguientes expresiones para las mismas direcciones 1 y 2:

$$\alpha_1 = \arctan \left( \frac{\Delta_a + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi}{\Delta_r + \delta_r \cos \psi} \right) \quad (3.5)$$

$$\alpha_2 = \arctan \left( \frac{\Delta_a - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi}{\Delta_r + \delta_r \cos \psi} \right) \quad (3.6)$$

El fallo estático del rodamiento se producirá cuando la bola más cargada alcance el valor de 4200 MPa para presión de contacto bola-pista de acuerdo a la norma ISO76:2006 [ISO76, 2006]. La bola más cargada será aquella en la que la interferencia geométrica  $\delta_1$  ó  $\delta_2$  alcance mayor valor; por tanto, derivando las expresiones 3.3 y 3.4 respecto al ángulo azimutal  $\psi$  e igualando a cero, se obtienen las posiciones azimutales para las cuales la interferencia geométrica alcanza un extremo (pudiendo ser éste un máximo o un mínimo). La expresión de la derivada para el contacto 1 (expresión 3.3) queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial \psi} = \frac{-\sin \psi [\delta_\theta (\Delta_a + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi) + \delta_r (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)]}{\sqrt{(\Delta_a + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2}} \quad (3.7)$$

Los valores extremos para los que la expresión 3.7 es cero se producen en las posiciones azimutales:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= 0 \longrightarrow \psi = \{0, \pi\} \\ \cos \psi &= -\frac{\delta_\theta (\delta_a + \Delta_a) + \Delta_r \delta_r}{\delta_r^2 + \delta_\theta^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

De la misma forma, para la ecuación 3.4, la expresión de la derivada es:

$$\frac{\partial \delta_2}{\partial \psi} = \frac{\sin \psi [\delta_\theta (\Delta_a - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi) - \delta_r (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)]}{\sqrt{(\Delta_a - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2}} \quad (3.9)$$

Y los extremos para los que la ecuación 3.9 es cero, se alcanzan en las posiciones azimutales:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= 0 \longrightarrow \psi = \{0, \pi\} \\ \cos \psi &= -\frac{\delta_\theta (\delta_a - \Delta_a) + \Delta_r \delta_r}{\delta_r^2 + \delta_\theta^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comparando estos resultados con los presentados por Aguirrebeitia en [Aguirrebeitia et al., 2010b] donde no se considera la variación del ángulo de contacto en las diferentes posiciones azimutales se tiene que en este trabajo previo tan sólo eran posibles valores extremos para las posiciones  $\psi = 0$  y  $\psi = \pi$ , es decir, de acuerdo a ese modelo la expresión del extremo para el  $\cos \psi$  de las ecuaciones 3.8 y 3.10 no se contemplaban como posibles valores extremos.

Para verificar el valor de presión alcanzado en estos tres ángulos  $\psi$  (ecuación 3.8 y 3.10) se parte de la expresión de Daidie [Daidié et al., 2008] para la presión de contacto máxima derivada de los trabajos de [Houpert, 2001] orientado a contactos de Hertz:

$$P_{MAX} = 1.84 \times 10^3 (1 - s)^{0.2117} \left( 1 \pm \frac{d_w \cos \alpha}{d_{pw}} \right)^{-0.4550} \frac{Q^{1/3}}{d_w^{2/3}} \quad (3.11)$$

donde por ser el diámetro medio mucho mayor que el diámetro de las bolas  $d_{pw} \gg d_w$ , se puede hacer uso de la aproximación 2.92. Tomando como valor para  $P_{MAX}$  el recomendado por la norma ISO76:2006 [ISO76, 2006] de 4200 MPa y sustituyendo el

valor de la fuerza normal  $Q$  de 2.92 en 2.90, se llega a la expresión 3.12 de la interferencia que determina el fallo estático:

$$\delta_{lim} = 4.6736 \times 10^{-3} (1 - s)^{-0.2288} d_w \quad (3.12)$$

Cuando las interferencias  $\delta_1$  o  $\delta_2$  de las ecuaciones 3.3 o 3.4 son iguales a  $\delta_{lim}$ , la presión máxima es de 4200 MPa en el contacto y se da el fallo estático del rodamiento; por tanto de igualar 3.3 y 3.4 con 3.12 se obtendrán las combinaciones de  $\delta_a$ ,  $\delta_r$  y  $\delta_\theta$  que causen el fallo estático del rodamiento. Para ello, se considerará un espacio tridimensional en el que las coordenadas sean estas deflexiones axial, radial y angular. Si se hace un mapeado en coordenadas esféricas haciendo el cambio de coordenadas de la expresión 3.13 representado en la Figura 3.2, es posible calcular el valor del módulo del vector resultante en la dirección compuesta por estas tres componentes de la deflexión total en la situación de fallo estático, es decir, expresando el valor de  $\delta_{lim}$  como un vector de longitud  $\varepsilon d_w$  y direcciones en coordenadas esféricas  $\phi$  y  $\varphi$ , permite tratar de manera independiente la dirección del vector de su módulo. Es en realidad esta longitud la que indica cuándo se alcanza la interferencia límite.

$$\begin{cases} \delta_a = \varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi \\ \delta_r = \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi \\ \delta_\theta = \varepsilon d_w \cos \phi \end{cases} , 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (3.13)$$

La razón de expresar la longitud del vector  $\varepsilon$  independiente de  $d_w$  viene justificado porque al sustituir estas expresiones 3.13 en 3.3 y 3.4, e igualarlas a la interferencia límite 3.12 para cada una de las pistas en los ángulos donde pueden darse los valores extremos (3.8 y 3.10), se obtienen las siguientes expresiones 3.14 en cada uno de los ángulos 3.8 y 3.10, las cuales son independientes del valor del diámetro de la bola (se puede ver en la expresiones 2.5, que  $\Delta_a$  y  $\Delta_r$  también se pueden normalizar en función del diámetro de la bola). En estas expresiones 3.14, el signo superior se corresponde con el contacto  $i = 1$  y el inferior con  $i = 2$ :

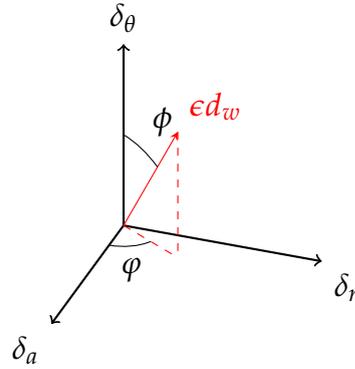


Figura 3.2: Sistema de referencia en coordenadas esféricas

$$\delta_{lim} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(\Delta_a \pm \epsilon d_w \sin \phi \cos \phi \pm \epsilon d_w \cos \phi)^2 + (\Delta_r + \epsilon d_w \sin \phi \sin \phi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \\ \sqrt{(\Delta_a \pm \epsilon d_w \sin \phi \cos \phi \mp \epsilon d_w \cos \phi)^2 + (\Delta_r - \epsilon d_w \sin \phi \sin \phi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \\ \sqrt{\left( \Delta_a \pm \epsilon d_w \sin \phi \cos \phi \mp \epsilon d_w \cos \phi \left( \frac{\epsilon d_w \cos \phi (\epsilon d_w \sin \phi \cos \phi \pm \Delta_a) + \Delta_r \epsilon d_w \sin \phi \sin \phi}{(\epsilon d_w \sin \phi \sin \phi)^2 + (\epsilon d_w \cos \phi)^2} \right) \right)^2 + \left( \Delta_r \mp \epsilon d_w \sin \phi \sin \phi \left( \frac{\epsilon d_w \cos \phi (\epsilon d_w \sin \phi \cos \phi \pm \Delta_a) + \Delta_r \epsilon d_w \sin \phi \sin \phi}{(\epsilon d_w \sin \phi \sin \phi)^2 + (\epsilon d_w \cos \phi)^2} \right) \right)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Discretizando los intervalos de las coordenadas esféricas  $0 \leq \phi \leq \pi$  y  $0 \leq \varphi < 2\pi$  en  $n + 1$  valores para  $\phi$  y  $2n$  valores para  $\varphi$  ( $\phi_i = i\pi/n$  con  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $\varphi_j = j\pi/n$  con  $j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$ ), se resuelven los casos de la expresión 3.14 para cada par  $\phi_i - \varphi_j$  obteniéndose seis posibles valores para  $\epsilon$ . Entre estos seis valores, se selecciona

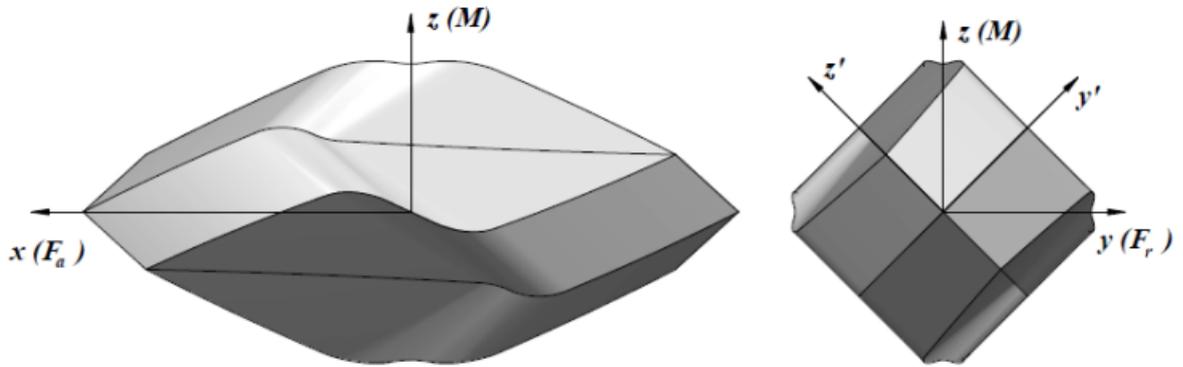


Figura 3.3: Vista frontal y de perfil del volumen de aceptación, en [Vallejo et al., 2010]

el menor valor positivo, dado que corresponde con el primero de los casos en los que se alcanza la situación de fallo estático. Sustituyendo este valor de  $\varepsilon$  en 3.13, se obtiene la combinación de deflexiones axial, radial y angular que provocan el fallo estático del rodamiento. Esta combinación representa las coordenadas de un punto en el espacio tridimensional descrito anteriormente cuyos ejes son  $\delta_a$ ,  $\delta_r$  y  $\delta_\theta$ , y que es parte de la superficie de aceptación que definen los  $2n(n+1)$  puntos que se resuelven para los pares  $\phi_i - \phi_j$ . El volumen encerrado por esta superficie de aceptación representa las posibles combinaciones de interferencias  $\delta_a$ ,  $\delta_r$  y  $\delta_\theta$  para las cuales el rodamiento no sufre fallo estático; y puntos exteriores representan combinaciones no admisibles desde el punto de vista de máxima capacidad de carga estática.

Trabajar en este espacio definido por las interferencias resulta poco práctico. Lo que realmente se quiere conocer es la combinación de esfuerzos axial, radial y de momento, aplicados al rodamiento que determinan el fallo estático de la bola más cargada. Con este objetivo se utilizan las ecuaciones del equilibrio estático definido por la expresión 3.15

$$\begin{cases} F_A = \sum_{i=1}^Z \left( K_n \delta_{1,i}^{3/2} \sin \alpha_{1,i} - K_n \delta_{2,i}^{3/2} \sin \alpha_{2,i} \right) \\ F_R = \sum_{i=1}^Z \left( K_n \delta_{1,i}^{3/2} \cos \alpha_{1,i} + K_n \delta_{2,i}^{3/2} \cos \alpha_{2,i} \right) \cos \psi_i \\ \frac{M}{d_{pw}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z \left( K_n \delta_{1,i}^{3/2} \sin \alpha_{1,i} - K_n \delta_{2,i}^{3/2} \sin \alpha_{2,i} \right) \cos \psi_i \end{cases} \quad (3.15)$$

siendo  $K_n$  la constante de interferencia de Hertz que se obtiene de las expresiones 2.92 y 3.12, y que resulta,

$$K_n = 37223d_w^{1/2}(1-s)^{-0.2918} \quad (3.16)$$

Sustituyendo en esta expresión 3.15 los valores de las interferencias  $\delta_a$ ,  $\delta_r$  y  $\delta_\theta$  que definen la superficie de aceptación de la Figura 3.3 y han sido resueltas previamente en las expresiones 3.3 y 3.4, en se obtienen los puntos que definen la superficie de aceptación en el espacio de cargas  $F_A$ ,  $F_R$  y  $M$ .

Los sumatorios en 3.15 se realizan para las bolas que tienen interferencia  $\delta$  positiva ya que una interferencia negativa indica despegue o falta de contacto bola-pista y no debe ser tenido en cuenta a la hora de calcular el equilibrio estático. También pueden expresarse en forma integral de manera que sean independientes del ángulo azimutal preciso. De este modo, la distribución de las bolas a lo largo del ángulo  $\psi$  queda expresado como una función continua en lugar de una discreta, como se muestra en la expresión 3.17

$$\begin{cases} \frac{F_A}{Z} = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} K_n \delta_{1,\psi}^{3/2} \sin \alpha_{1,\psi} d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} K_n \delta_{2,\psi}^{3/2} \sin \alpha_{2,\psi} d\psi \\ \frac{F_R}{Z} = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} K_n \delta_{1,\psi}^{3/2} \cos \alpha_{1,\psi} \cos \psi d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} K_n \delta_{2,\psi}^{3/2} \cos \alpha_{2,\psi} \cos \psi d\psi \\ \frac{M}{Zd_{pw}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\delta^+} K_n \delta_{1,\psi}^{3/2} \sin \alpha_{1,\psi} \cos \psi d\psi - \frac{1}{4\pi} \int_{\delta^+} K_n \delta_{2,\psi}^{3/2} \sin \alpha_{2,\psi} \cos \psi d\psi \end{cases} \quad (3.17)$$

En el trabajo previo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] se realizaba una normalización de estas ecuaciones 3.17 en función de la capacidad axial del rodamiento, pero esta capacidad axial era calculada considerando el ángulo de contacto invariable (ecuación 2.1). Si se expresa la capacidad de carga axial del rodamiento teniendo en cuenta la variación del ángulo de contacto tal y como se muestra en la expresión 3.18:

$$C_{0a} = ZK_n \delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim} \quad (3.18)$$

donde  $\alpha_{lim}$  es el ángulo de contacto que resulta cuando se produce la interferencia límite de la expresión 3.12 para una carga axial pura. Esta expresión se deduce de la relación carga-deformación obtenida por Hertz [Hertz, 1896], y por tanto la rigidez global del rodamiento frente a cargas aplicadas se corresponde con el término  $ZK_n$  y la interferencia en sentido axial con el término  $\delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim}$ .

Se pueden expresar las ecuaciones de equilibrio de 3.17 haciendo uso de esta normalización, quedando de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_A}{ZK_n \delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim}} = \frac{F_A}{C_{0a}} = \\ \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\sin \alpha_{1,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} d\psi - \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\sin \alpha_{2,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} d\psi \right] \\ \\ \frac{F_R \tan \alpha_0}{ZK_n \delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim}} = \frac{F_R \tan \alpha_0}{C_{0a}} = \\ \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha_{lim}} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\cos \alpha_{1,\psi}}{\cos \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi + \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\cos \alpha_{2,\psi}}{\cos \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi \right] \\ \\ \frac{M}{ZK_n \delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim} d_{pw}} = \frac{M}{C_{0a} d_{pw}} = \\ \frac{1}{4\pi} \left[ \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\sin \alpha_{1,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi - \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\sin \alpha_{2,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi \right] \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Resolviendo estas ecuaciones integrales 3.19 para todos los casos de interferencia en estado de fallo estático obtenidos en las expresiones 3.14, se obtiene una superficie de aceptación normalizada en el espacio de los esfuerzos aplicados de la Figura 3.4.

Analizando los parámetros geométricos que influyen en esta superficie de aceptación, es importante señalar que la parte derecha de las ecuaciones de 3.19 sólo es función del ratio de osculación  $s$  (expresión 2.4) y del ángulo de contacto inicial  $\alpha_0$ . Es decir, la relación  $\frac{\delta_{i,\psi}}{\delta_{lim}}$  depende sólo de  $s$  y de  $\alpha_0$ ; y en lo que respecta a  $\alpha_{lim}$  se puede obtener

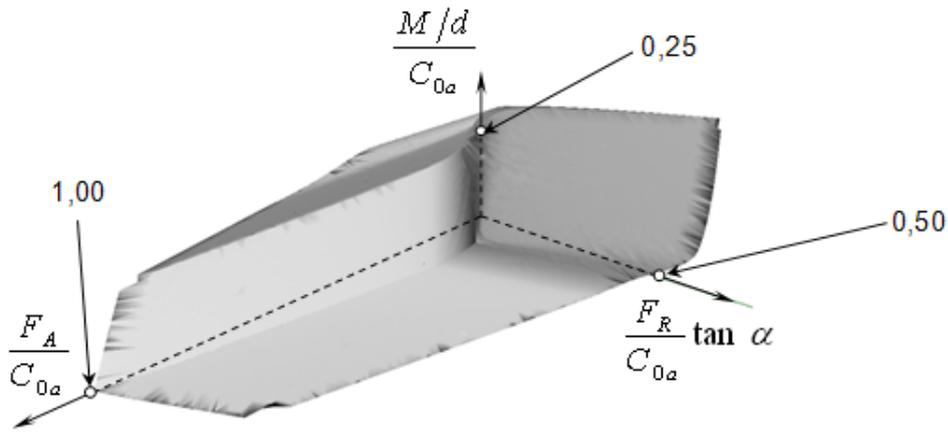


Figura 3.4: Vista frontal y de perfil del volumen de aceptación, en [Aguirrebeitia et al., 2012b]

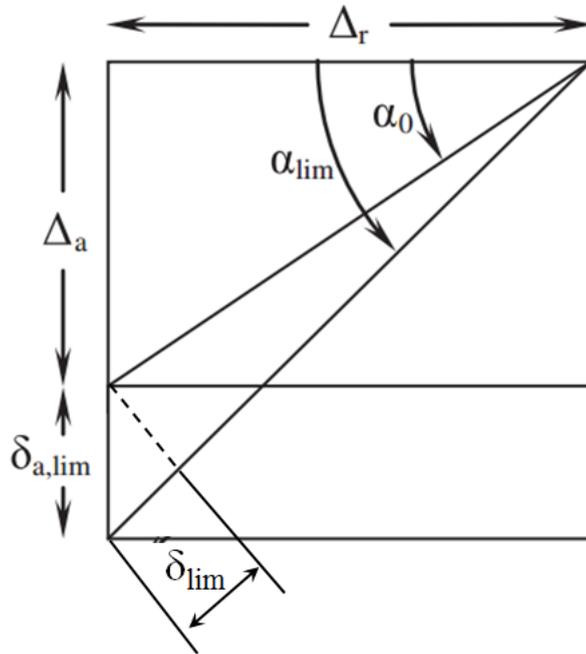


Figura 3.5: Construcción gráfica para la obtención de  $\alpha_{lim}$  [Aguirrebeitia et al., 2013]

aplicando la regla del seno tal y como se muestra en la expresión 3.20 obtenida de la Figura 3.5.

$$\frac{\left(\sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} + \delta_{lim}\right) \sin \alpha_{lim} - \Delta_a}{\sin(\alpha_{lim} - \alpha_0)} = \frac{\sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2}}{\sin(90 - \alpha_{lim})} \quad (3.20)$$

donde introduciendo las expresiones de 2.5, 3.12 y operando, llegamos a la expresión de  $\alpha_{lim}$  siguiente para unos valores  $s$  y  $\alpha_0$  dados:

$$\alpha_{lim} = \arccos \left[ \cos \alpha_0 \frac{\left( \frac{1-s}{s} \right)}{\left( \frac{1-s}{s} \right) + 4.6736 \cdot 10^{-3} (1-s)^{-0.2288}} \right] \quad (3.21)$$

Esto se traduce en que para diferentes valores en los diámetros  $d_{pw}$  y  $d_w$  de los rodamientos, que compartan el mismo ángulo de contacto inicial y ratio de osculación, tendrán una superficie de aceptación coincidente. Es decir, la superficie de aceptación es una superficie unificada para todos los tamaños de rodamientos con la misma osculación y el mismo ángulo de contacto inicial.

### 3.1.2. Resultados del modelo analítico con ángulo variable

A continuación se va a aplicar el modelo analítico desarrollado en la sección 3.1.1 a una geometría existente para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750kw, en la que se variarán los parámetros iniciales para analizar la influencia de los diversos factores que están presentes en la modelización. Como parámetros de partida se utilizarán:

- Diámetro medio del rodamiento de  $d_{pw} = 1100\text{mm}$ .
- Conformidad de las pistas de valor 1.07, por tanto ratio de osculación de  $s = 0.93458$ .
- $Z = 64$  bolas de diámetro  $d_w = 53.975\text{mm}$  (correspondiente a una medida de  $2\frac{1}{8}''$ ) distribuidas en una sola hilera.
- Ángulo de contacto inicial de  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

Este diseño corresponde a un rodamiento del tipo mostrado en la Figura 2.9 b) con separadores entre bolas. En la siguiente tabla se muestran los parámetros utilizados a

Parámetros	Modelo Ángulo Variable	Modelo Aguirrebeitia
$d_{pw}$ [mm]	1100	
$s$	0.9346	
$Z$	64	
$d_w$ [mm]	53.975	
$\alpha_0$ [°]	45	
$\alpha_{lim}$ [°]	51.0411	45
$C_{0a}$ [kN]	<b>9741.5937</b>	<b>8858.5044</b>

Tabla 3.1: Variación de la capacidad axial máxima para el Modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] frente al modelo con ángulo variable

la hora de calcular la capacidad de carga máxima axial, comparando el resultado final entre este modelo con ángulo variable y el modelo de Aguirrebeitia de ángulo constante [Aguirrebeitia et al., 2010b]. Para el cálculo de  $\delta_{lim}$  se utilizará la expresión 3.12 y da un valor de 0.4708 en ambos modelos dado que el ángulo de contacto no es un parámetro que influya en la interferencia límite. En cambio para  $\alpha_{lim}$  la expresión 3.20 en el caso del modelo de ángulo variable se establece fijo e igual a  $\alpha_0$  para el modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b], y para el cálculo de la capacidad axial del rodamiento se utilizará la expresión 3.18.

A la vista de estos resultados de la Tabla 3.1 se aprecia que la capacidad estática se subestima en el modelo de Aguirrebeitia, es decir, sin variar ningún parámetro geométrico del rodamiento y con el simple hecho de considerar variación en el ángulo de contacto en estado de carga, como de hecho se produce, el valor de la capacidad estática del rodamiento aumenta ya que el contacto entre bola y pista se produce de manera que la fuerza de reacción  $C_{0a}$  está más alineada con la fuerza aplicada. Como consecuencia de esto al rodamiento se le permite trabajar en todo su rango estático y se gana en este caso casi un 10% de rango funcional de capacidad axial máxima aproximadamente respecto al modelo de ángulo constante, el cual llevaría a la selección de rodamientos sobredimensionados para una aplicación concreta.

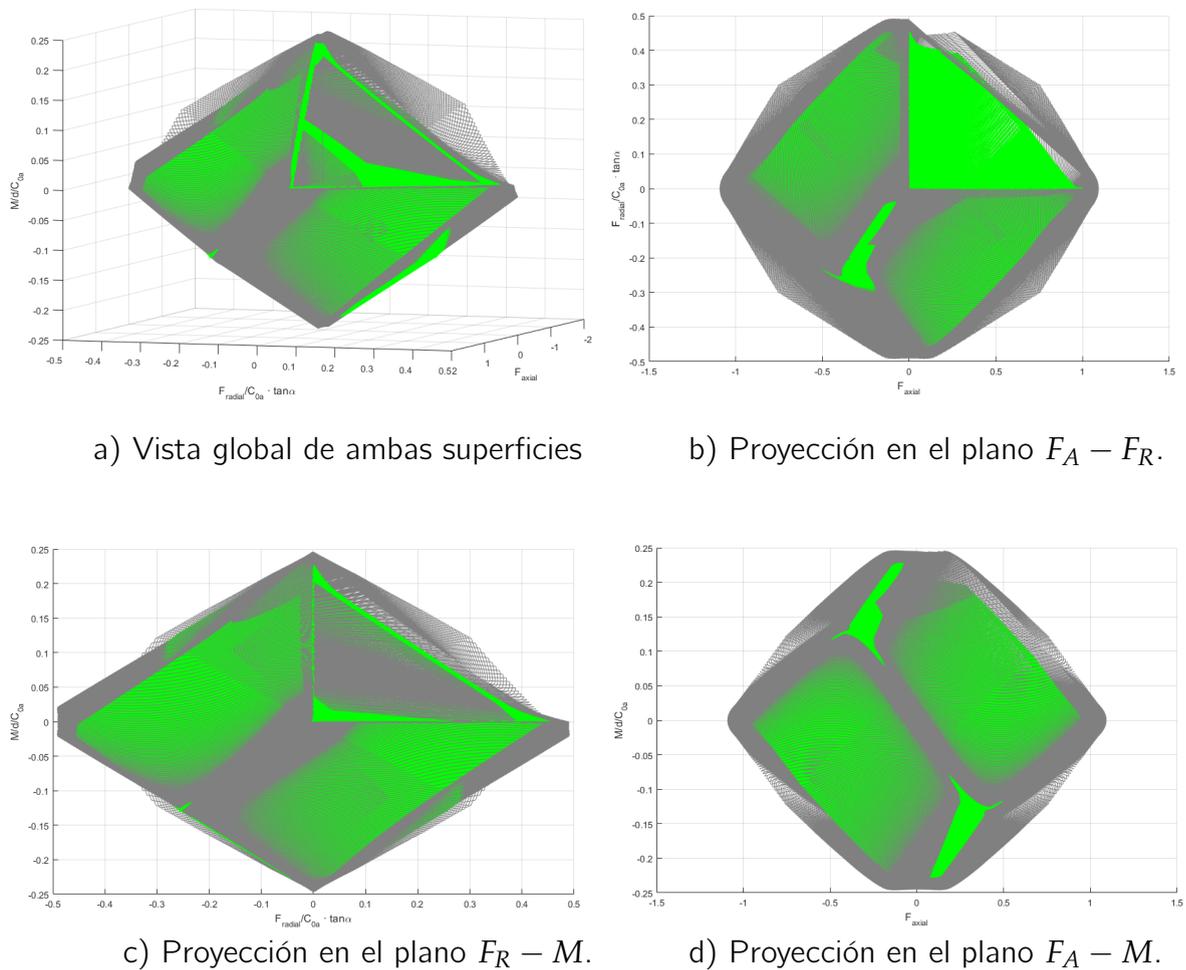


Figura 3.6: Comparativa de la superficie de aceptación para el enfoque de  $\alpha$  constante y  $\alpha$  variable

Si se comparan las superficies de aceptación en el dominio de los esfuerzos aplicados  $F_A$ ,  $F_R$  y  $M$  de ambos enfoques ( $\alpha$  constante y  $\alpha$  variable), no es sencillo apreciar las diferencias. En la Figura 3.6 se muestra una vista tridimensional de las superficies de aceptación calculadas mediante el enfoque de  $\alpha$  constante (en verde) y  $\alpha$  variable (en gris). Por claridad se ha realizado un corte en el primer cuadrante de forma que las soluciones obtenidas para esfuerzos positivos ( $F_A > 0$ ,  $F_R > 0$  y  $M > 0$ ) no están representados, y se muestran las proyecciones en los planos  $F_A - F_R$ ,  $F_R - M$  y  $F_A - M$  (casos b), c) y d) de la Figura 3.6 respectivamente). Se puede apreciar que la superficie de

aceptación obtenida con  $\alpha$  constante se sitúa siempre dentro del volumen de la superficie que define la solución obtenida mediante  $\alpha$  variable.

Para ilustrar de manera más clara las diferencias de ambos enfoques, se mostrarán los resultados en forma de cortes por planos paralelos a los definidos por el sistema de referencia en el espacio de los esfuerzos aplicados  $F_A - M$ ,  $F_A - F_R$  y  $F_R - M$ . Al igual que en la Figura 3.6, en esta Figura 3.7 las curvas descritas por los puntos verdes representan las soluciones del modelo de  $\alpha$  constante de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] frente a los grises que son solución del modelo de  $\alpha$  variable. Se han realizado 6 cortes por planos equidistantes entre la cota máxima de  $F_R$ ,  $M$  y  $F_A$  en a), b) y c) respectivamente de la Figura 3.7. En esta discretización se aprecia de manera más clara que la capacidad predicha por el modelo de  $\alpha$  constante es claramente menor. También se puede apreciar mediante esta representación por cortes de planos definidos por cada una de las cotas, que las curvas de un modelo y otro no son paralelas, lo que viene a mostrar que no sólo la superficie de aceptación describe un volumen menor sino que también esta superficie tiene una forma sensiblemente distinta.

Se puede apreciar que el modelo de ángulo variable se acerca más a las soluciones obtenidas mediante los modelos de Elementos Finitos que el modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b]. A pesar de no tenerse en cuenta la flexibilidad de los anillos en este modelo analítico, la variación del ángulo de contacto es importante, llegándose a un valor máximo de  $61.3^\circ$  para una combinación de  $F_A$ ,  $F_R$  y  $M$  concreta.

Si se hacen variar los parámetros de los que depende el modelo analítico como son la conformidad y ángulo de contacto inicial, la influencia de estas variaciones afecta de manera muy diferente considerando el ángulo de contacto variable o constante. Las Figuras 3.8 y 3.9 muestran las soluciones para tres valores distintos de conformidad (1.06, 1.07, 1.08) y de ángulo inicial de contacto ( $40^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $50^\circ$ ) respectivamente.

Analizando primeramente la influencia de la conformidad, los valores que se van a utilizar son 1.05 y 1.06. En la Figura 3.8 se muestran superpuestos los resultados para el caso inicial de conformidad 1.07 y las dos nuevas conformidades propuestas. Sólo se

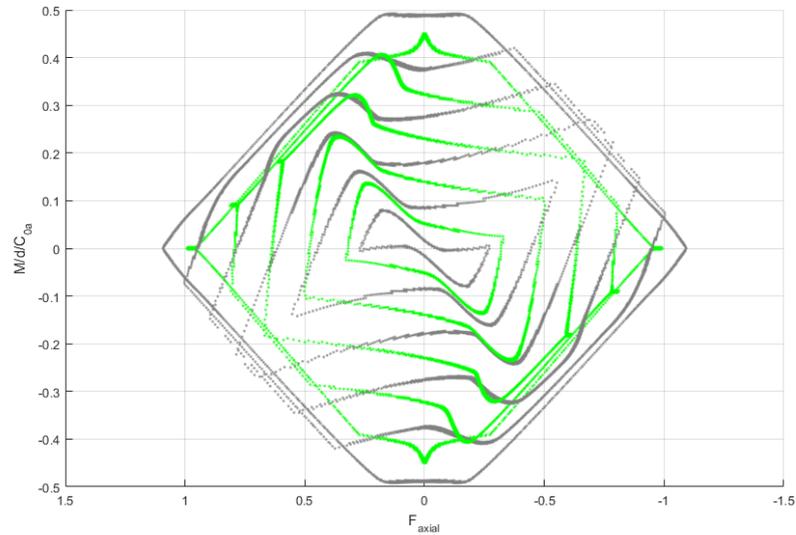
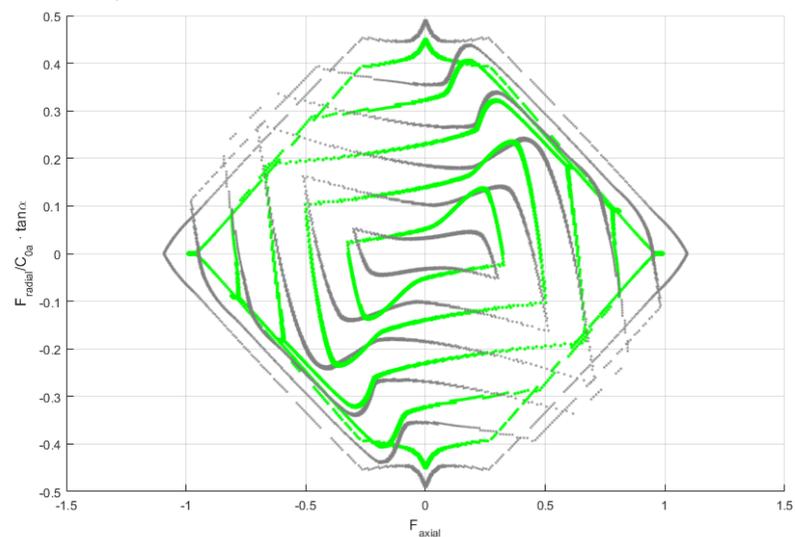
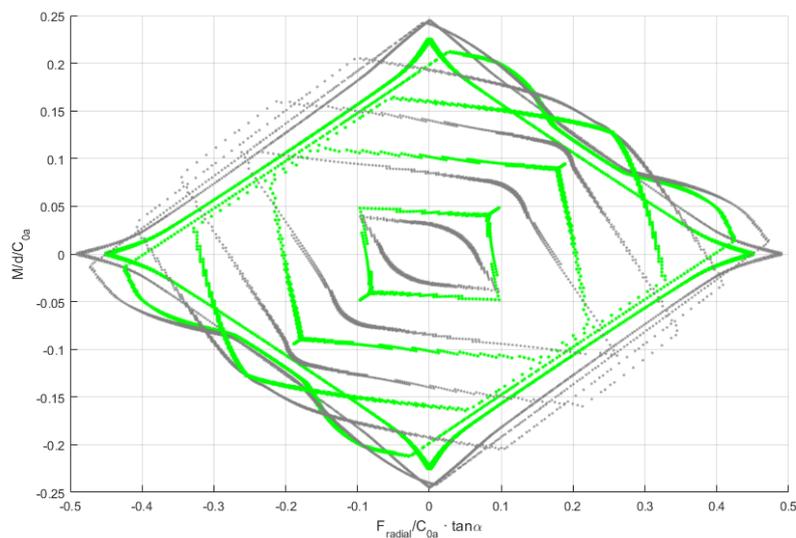
a) Superficie de aceptación en el plano  $F_A - M$ .b) Superficie de aceptación en el plano  $F_A - F_R$ .c) Superficie de aceptación en el plano  $F_R - M$ .

Figura 3.7: Resultados del modelo analítico con ángulo de contacto variable, para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750kw

muestran tres cortes: la cota cero, una cota media y la cota máxima de cada uno de los valores de  $F_R$ ,  $M$  y  $F_A$  en a), b) y c) de la Figura 3.8 respectivamente. Las curvas representadas con el color azul oscuro son solución para el modelo con ángulo variable del caso de conformidad 1.05 y las de color rojo oscuro del caso de conformidad 1.06. Se puede apreciar que a pistas más conformes la capacidad de carga aumenta dado que las elipses de contacto que se originan tienen un área mayor y por tanto la presión de contacto tarda más en alcanzar su valor límite para las cargas externas aplicadas. Y este aumento es apreciable, al contrario de lo que ocurre con el modelo de ángulo de contacto constante en el que no se percibe una variación tan clara como en el caso anterior. Las curvas correspondientes al modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] con ángulo constante son las de color verde, azul claro y magenta.

Esta misma tendencia se observa en la Figura 3.9 donde se han variado únicamente los ángulos de contacto inicial, añadiendo los casos de  $40^\circ$  y  $50^\circ$ , al caso previo de  $45^\circ$ . A excepción del corte a diferentes cotas del momento de vuelco (caso b) de la Figura 3.9) en el que sí se aprecia mayor influencia de este parámetro tanto para el modelo de ángulo variable como para el de ángulo constante, se muestra claramente que el modelo de ángulo variable es más sensible a los cambios en los parámetros que el modelo de ángulo constante.

Como conclusión se aprecia que el modelo de ángulo constante de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] no sólo prevee una capacidad de carga menor, sino que además es menos sensible frente a la variación de parámetros de diseño del rodamiento. Por tanto el modelo de ángulo variable que en esta Tesis Doctoral se propone, representa una importante mejora a la hora de diseñar rodamientos de vuelco.

En la siguiente sección se va a incluir otro efecto de suma importancia en el comportamiento de los rodamientos frente al reparto de cargas como es la interferencia inicial entre bola y pista.

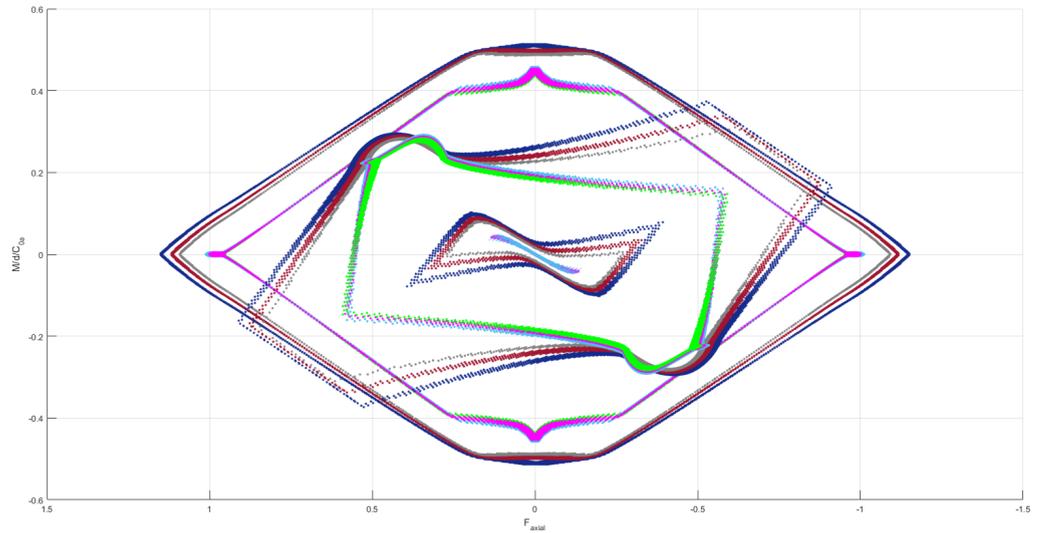
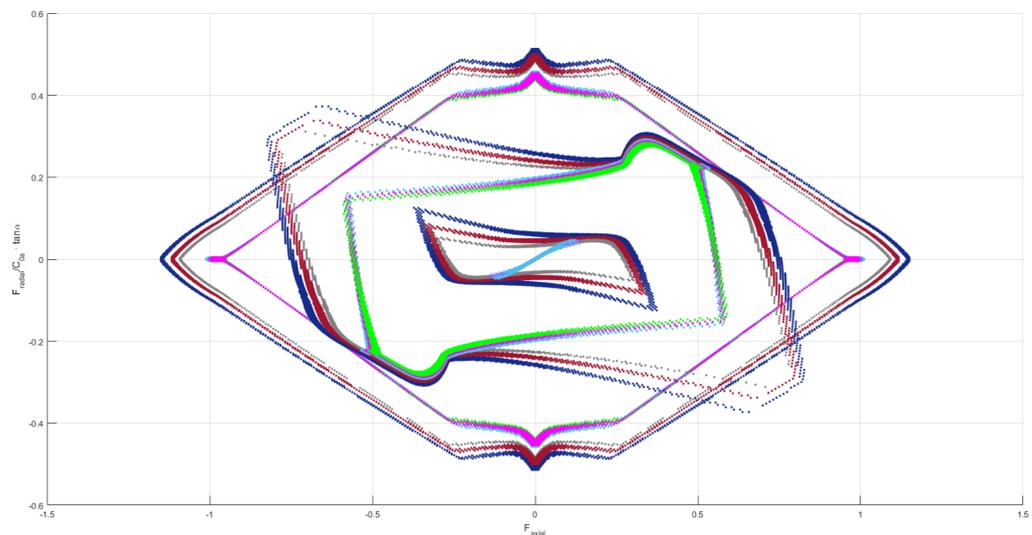
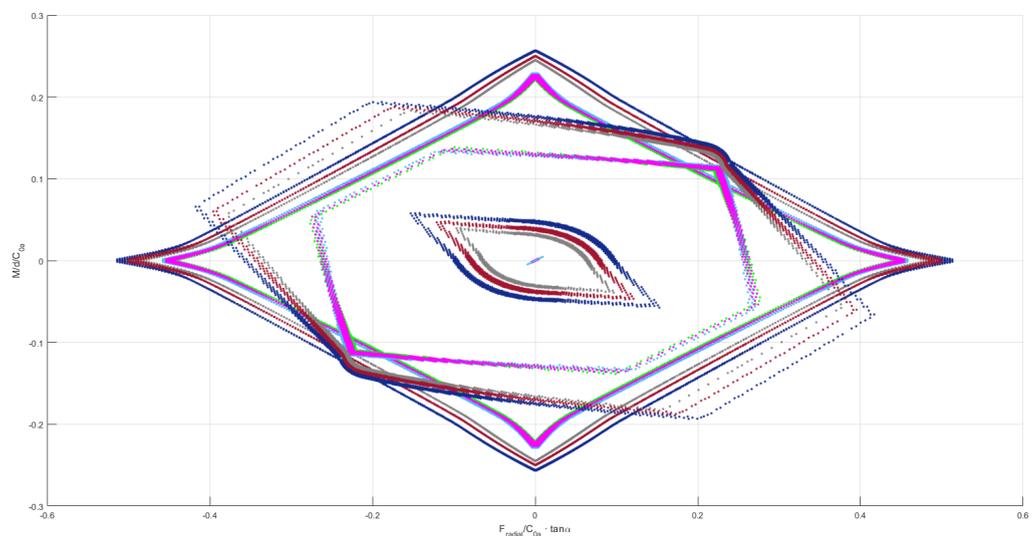
a) Superficie de aceptación en el plano  $F_A - M$ b) Superficie de aceptación en el plano  $F_A - F_R$ c) Superficie de aceptación en el plano  $F_R - M$ 

Figura 3.8: Resultados del modelo analítico con ángulo de contacto variable, para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750kw, con conformidades  $C=\{1.05, 1.06, 1.07\}$ .

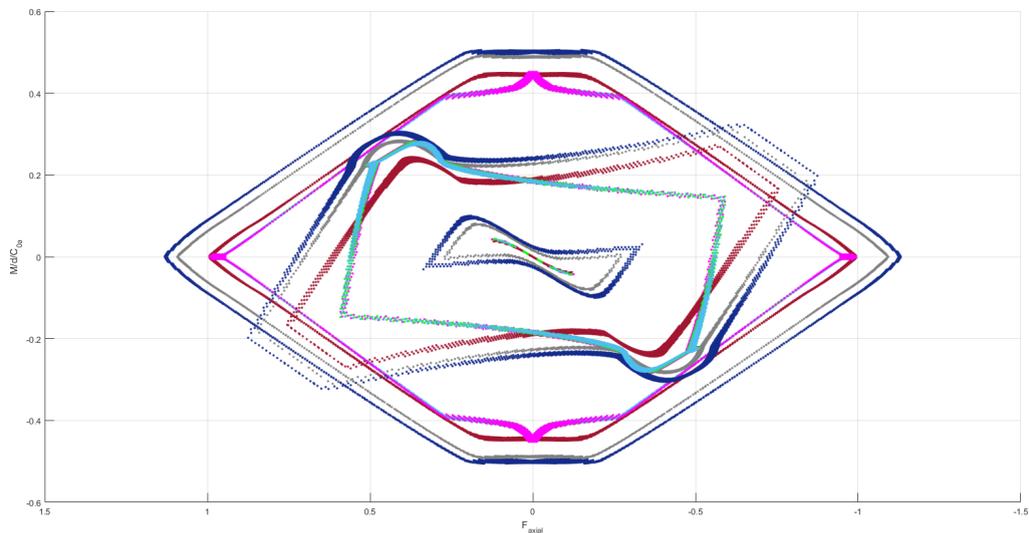
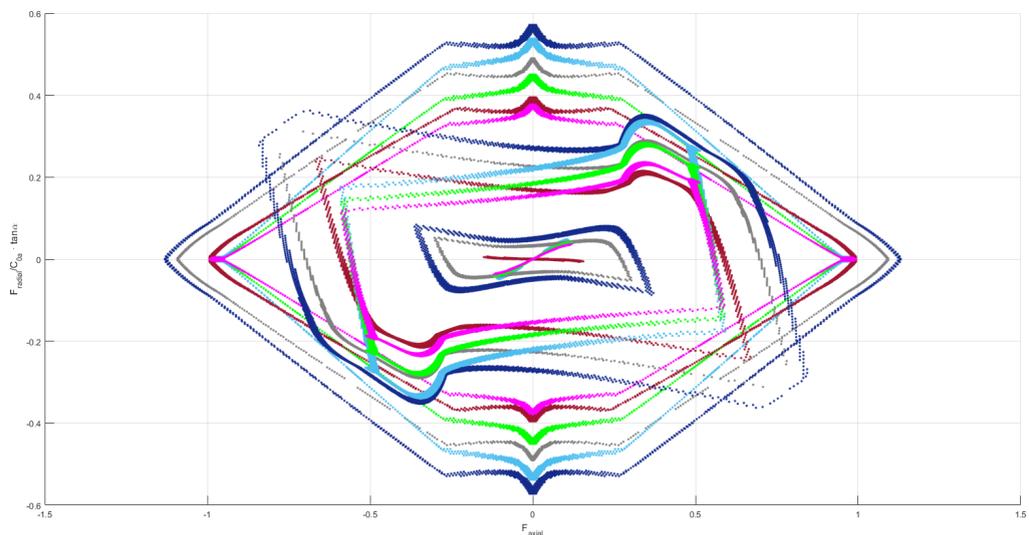
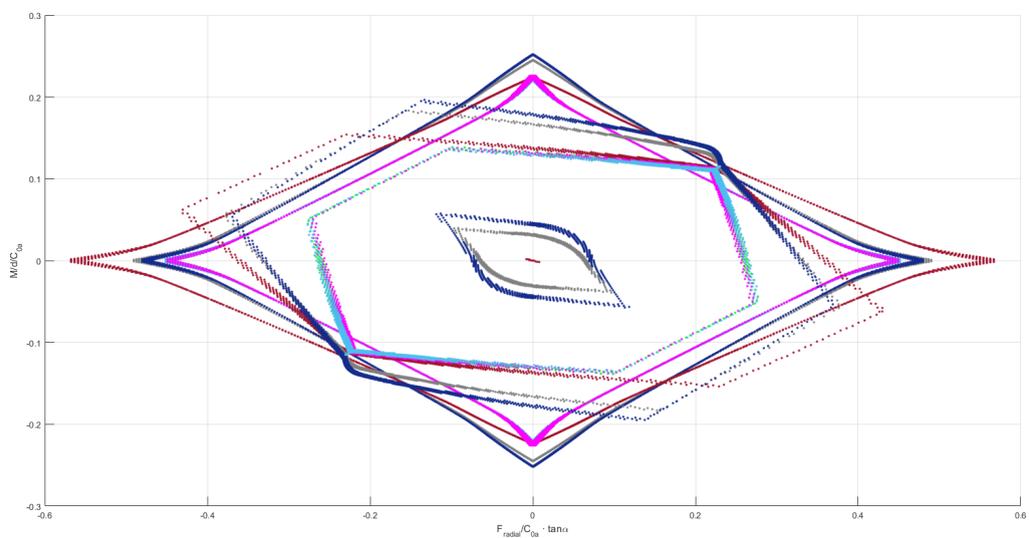
a) Superficie de aceptación en el plano  $F_A - M$ .b) Superficie de aceptación en el plano  $F_A - F_R$ .c) Superficie de aceptación en el plano  $F_R - M$ .

Figura 3.9: Resultados del modelo analítico con ángulo de contacto variable, para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750kw, con ángulos de contacto iniciales  $\alpha_0 = \{40, 45, 50\}$ .

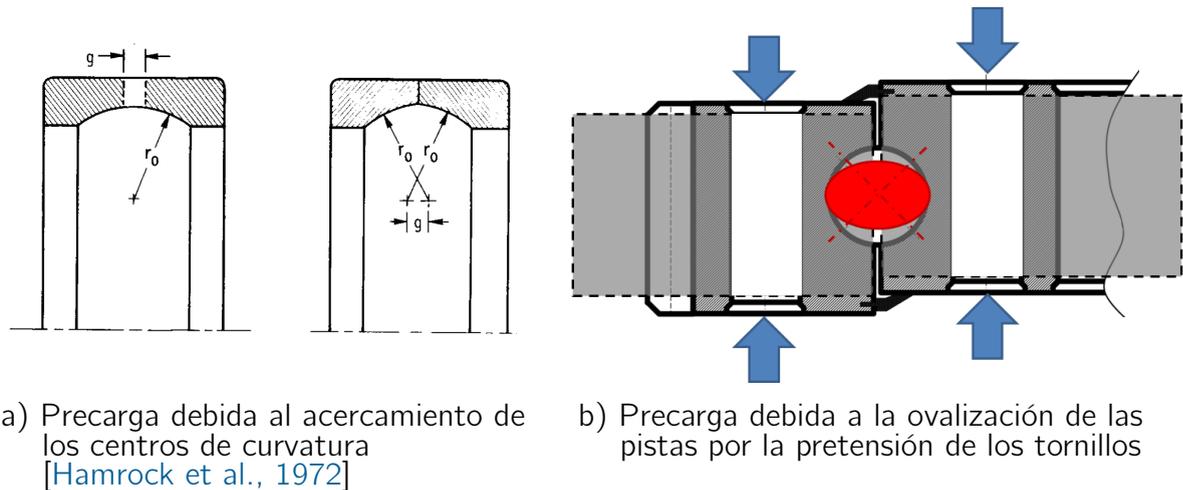


Figura 3.10: Interferencia inicial en el contacto bola-pista

### 3.2. Desarrollo del modelo analítico con ángulo variable y precarga

Una vez desarrollado el modelo analítico para el reparto de carga que incorpora el efecto del ángulo de contacto y una vez analizados sus efectos, se va a ampliar éste último modelo para incluir la interferencia que presenta en su montaje inicial el contacto bola-pista, denominado precarga.

Como se ha indicado en el Capítulo 2, dado que las cargas que soportan son muy altas, este tipo de rodamientos se montan con una precarga significativa que puede tener repercusiones importantes en la distribución de cargas antes analizada. El origen de la precarga es tanto geométrico al existir una interferencia inicial entre bolas y pista que se obtiene acercando los centros de curvatura de las pistas (caso a) de la Figura 3.10), como debido al apriete de la unión atornillada que origina en estos anillos esbeltos un aumento de la interferencia entre bolas y pista (caso b) de la Figura 3.10). Finalmente se mostrarán una serie de resultados que permitan analizar los efectos de esta precarga y qué valores de la misma mejoran o merman las capacidades del rodamiento.

Al incluir una interferencia inicial o precarga  $\delta_P$ , la cual actúa por igual en ambas pistas,

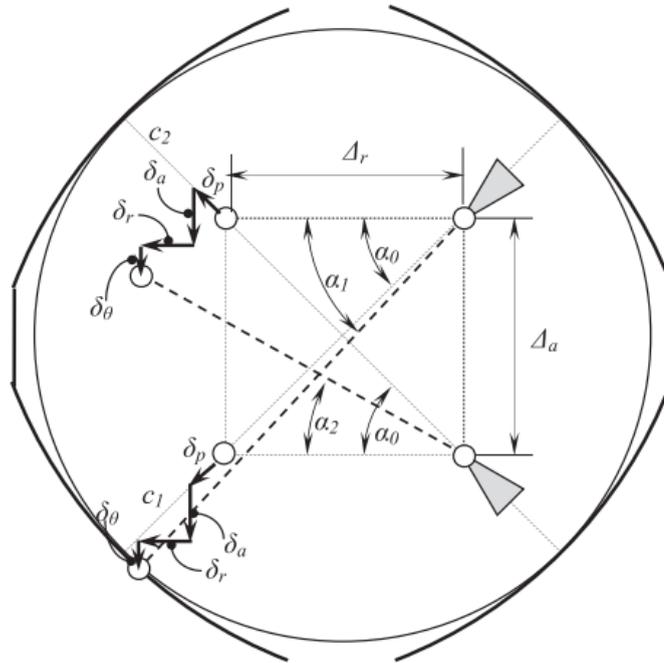


Figura 3.11: Modelo de interferencia geométrica incluyendo la precarga [Aguirrebeitia et al., 2013]

el modelo de interferencia geométrica mostrado anteriormente en la Figura 3.1, se transforma en el modelo de la Figura 3.11, donde se toma como punto de partida la situación posterior al montaje inicial que incorpora la interferencia  $\delta_p$ , para posteriormente aplicar los esfuerzos externos en el rodamiento y generarse las deflexiones  $\delta_a$ ,  $\delta_r$  y  $\delta_\theta$ .

A continuación se detalla el desarrollo de la formulación que describe este modelo analítico.

### 3.2.1. Formulación del modelo analítico con ángulo variable y precarga

La distancia entre centros mostrada en la ecuación 2.5 y como consecuencia el ángulo inicial de contacto  $\alpha_0$  de la expresión 2.6, quedan modificados tal y como puede verse en la Figura 3.11.

De forma que las expresiones de las distancias axiales y radiales entre los centros de curvatura de las pistas se modifican quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta_a^P &= [(2r_c - d_w) + \delta_P] \sin \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} + \frac{\delta_P}{d_w} \right) \sin \alpha_0 \\ \Delta_r^P &= [(2r_c - d_w) + \delta_P] \cos \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} + \frac{\delta_P}{d_w} \right) \cos \alpha_0\end{aligned}\quad (3.22)$$

Dado que la precarga solo actúa sobre la propia dirección del contacto ángulo inicial  $\alpha_0^P$  no varía tal y como se puede comprobar mediante la siguiente expresión.

$$\alpha_0^P = \arctan \frac{\Delta_a^P}{\Delta_r^P} = \arctan (\tan \alpha_0) = \alpha_0 \quad (3.23)$$

Una vez descritos los parámetros geométricos que toman parte en el cálculo del reparto de carga, ya estamos en situación de poder describir el modelo de interferencia geométrica que permite analizar cómo se reparte la carga en cada una de las bolas cuando al rodamiento se le somete a una combinación de cargas  $F_A$  axial,  $F_R$  radial y un momento de vuelco  $M$ , y compararlo con el modelo anterior de interferencia que no incluye el efecto de la precarga. Este modelo considera igualmente que los anillos son rígidos y que la interferencia es debida únicamente a la deformación en el contacto bola-pista. Si suponemos así mismo que es el anillo interior el que se desplaza como consecuencia de las deformaciones en los contactos bola-pista y el anillo exterior permanece fijo, en estado de precarga, una combinación de carga cualquiera podrá originar unos desplazamientos axiales  $\delta_a$ , radiales  $\delta_r$  y angulares  $\delta_\theta$  entre los anillos, como los que se muestran en la Figura 3.11. Para una bola cualquiera situada en un ángulo azimutal  $\psi$ , con ángulo inicial de contacto  $\alpha_0$ , las interferencias para las direcciones de contacto  $c_1$  y  $c_2$  son  $\delta_1$  y  $\delta_2$  respectivamente, se obtienen estas otras expresiones:

$$\delta_1^P = \sqrt{(\Delta_a^P + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \quad (3.24)$$

$$\delta_2^P = \sqrt{(\Delta_a^P - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \quad (3.25)$$

Y las expresiones para los ángulos de contacto también se modifican de la siguiente manera:

$$\alpha_1^P = \arctan \left( \frac{\Delta_a^P + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi}{\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi} \right) \quad (3.26)$$

$$\alpha_2^P = \arctan \left( \frac{\Delta_a^P - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi}{\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi} \right) \quad (3.27)$$

Una vez definido el nuevo modelo de interferencia geométrica que muestra el reparto de carga en las bolas, se utiliza igualmente para calcular la capacidad estática del rodamiento la tensión de contacto calculada de forma elástica de 4200 MPa en el contacto bola-pista de acuerdo a la norma ISO76 [ISO76, 2006] para contacto puntual.

Utilizando la misma metodología que en el modelo [Aguirrebeitia et al., 2012c], se deriva la expresión 3.24 respecto al ángulo azimutal para comprobar en qué ángulo la interferencia puede ser extrema (máxima o mínima), obteniéndose la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \delta_1^P}{\partial \psi} = \frac{-\sin \psi [\delta_\theta (\Delta_a^P + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi) + \delta_r (\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi)]}{\sqrt{(\Delta_a^P + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi)^2}} \quad (3.28)$$

Los valores extremos para los que la expresión 3.28 es cero son:

$$\begin{aligned} \sin \psi = 0 &\longrightarrow \psi = \{0, \pi\} \\ \cos \psi &= -\frac{\delta_\theta (\delta_a + \Delta_a^P) + \Delta_r^P \delta_r}{\delta_r^2 + \delta_\theta^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

De igual manera para la expresión 3.25, la derivada es:

$$\frac{\partial \delta_2^P}{\partial \psi} = \frac{\sin \psi [\delta_\theta (\Delta_a^P - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi) - \delta_r (\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi)]}{\sqrt{(\Delta_a^P - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi)^2}} \quad (3.30)$$

Y los extremos para los que la ecuación 3.30 es cero:

$$\begin{aligned} \sin \psi = 0 &\longrightarrow \psi = 0, \pi \\ \cos \psi &= -\frac{\delta_{\theta} (\delta_a - \Delta_a^P) + \Delta_r^P \delta_r}{\delta_r^2 + \delta_{\theta}^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para obtener el valor de la interferencia que provoca el fallo estático, se tomarán como base de nuevo las expresiones 2.92 y 2.90 obtenidas por Houpert [Houpert, 1999] y Daidié *et al.* [Daidié *et al.*, 2008], derivadas de las fórmulas de Hertz para contactos elípticos, y se utilizará la misma interferencia límite de la expresión 3.12.

Para encontrar las combinaciones de interferencias se define el mismo sistema de coordenadas cuyos ejes son cada una de esas interferencias axiales  $\delta_a$ , radiales  $\delta_r$  y angulares  $\delta_{\theta}$ . Se realiza el mismo cambio de coordenadas esféricas que en 3.13 y definiendo el vector de interferencias resultante cuyo módulo alcance  $\delta_{lim}$ , se estará analizando el mapa de posibles combinaciones de interferencias para las cuales se produce el fallo estático del rodamiento.

Es decir, aplicando la misma metodología que para el caso del modelo que incorporaba la variación del ángulo de contacto, si se sustituyen en 3.24 y 3.25 estos radiovectores para los ángulos azimutales en los que pueden darse los máximos 3.8 y 3.10, se llega a las siguientes expresiones donde igualmente el signo superior se corresponde con el contacto  $i = 1$  y el inferior con  $i = 2$ :

$$\delta_{lim} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(\Delta_a^P \pm \varepsilon d_w \sin \phi \cos \phi \pm \varepsilon d_w \cos \phi)^2 + (\Delta_r^P + \varepsilon d_w \sin \phi \sin \phi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \\ \sqrt{(\Delta_a^P \pm \varepsilon d_w \sin \phi \cos \phi \mp \varepsilon d_w \cos \phi)^2 + (\Delta_r^P - \varepsilon d_w \sin \phi \sin \phi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \\ \sqrt{\left( \Delta_a^P \pm \varepsilon d_w \sin \phi \cos \phi \mp \varepsilon d_w \cos \phi \left( \frac{\varepsilon d_w \cos \phi (\varepsilon d_w \sin \phi \cos \phi \pm \Delta_a^P) + \Delta_r^P \varepsilon d_w \sin \phi \sin \phi}{(\varepsilon d_w \sin \phi \sin \phi)^2 + (\varepsilon d_w \cos \phi)^2} \right) \right)^2 + \left( \Delta_r^P \mp \varepsilon d_w \sin \phi \sin \phi \left( \frac{\varepsilon d_w \cos \phi (\varepsilon d_w \sin \phi \cos \phi \pm \Delta_a^P) + \Delta_r^P \varepsilon d_w \sin \phi \sin \phi}{(\varepsilon d_w \sin \phi \sin \phi)^2 + (\varepsilon d_w \cos \phi)^2} \right) \right)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Resolviendo el equilibrio de fuerzas 3.19 para estas interferencias en la situación de precarga, se determina la superficie de aceptación en el espacio de los esfuerzos aplicados.

A la hora de determinar la precarga  $\delta_p$ , se puede hacer en base a una fracción de la interferencia límite de forma que se define el nivel de precarga  $p$  como una relación unitaria de  $\delta_{lim}$ :

$$\delta_p = p \cdot \delta_{lim} ; \quad \text{con } p = [0, \dots, 1.0] \quad (3.33)$$

Esta forma de definir la precarga permite no aplicar una interferencia de montaje mayor que la capacidad estática del rodamiento abarcando todos los posibles valores de interferencia. Además, a la hora de determinar el ángulo de contacto límite alcanzado, la

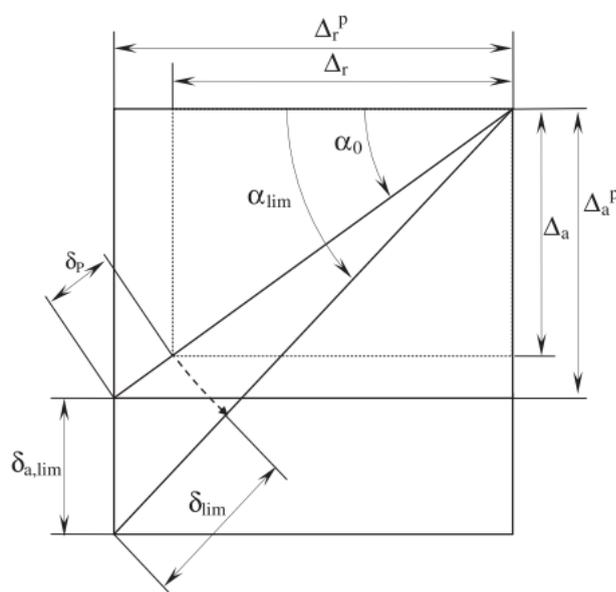


Figura 3.12: Variación de los centros de curvatura incluyendo el efecto de la precarga [Aguirrebeitia et al., 2013]

expresión de  $\alpha_{lim}$  se simplifica de manera que es posible calcularlo de forma explícita. Aplicando la regla del seno para el esquema de la Figura 3.12 se tiene:

$$\frac{\left(\sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} + \delta_{lim}\right) \sin \alpha_{lim} - \Delta_a - \delta_p \sin \alpha_0}{\sin (\alpha_{lim} - \alpha_0)} = \frac{\delta_p + \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2}}{\sin (90 - \alpha_{lim})} \quad (3.34)$$

Introduciendo las expresiones 2.5, 3.12 y 3.33 en 3.34 y operando se llega a:

$$\alpha_{lim} = \arccos \left[ \cos \alpha_0 \frac{\left(\frac{1-s}{s}\right) + 4.6736 \cdot 10^{-3} p (1-s)^{-0.2288}}{\left(\frac{1-s}{s}\right) + 4.6736 \cdot 10^{-3} (1-s)^{-0.2288}} \right] \quad (3.35)$$

El definir la precarga mediante la expresión 3.33 permite además que el modelo tenga sólo como parámetros independientes  $s$ ,  $\alpha_0$  y  $p$ .

Las superficies de aceptación que se obtienen incluyendo el efecto de la precarga, varían apreciablemente. La Figura 3.13 muestra tres superficies de aceptación para valores de precarga de  $p = 0.0$ ,  $p = 0.1$  y  $p = 0.2$ . En la siguiente sección se detalla el efecto de la precarga, presentando una serie de resultados obtenidos mediante este modelo analítico

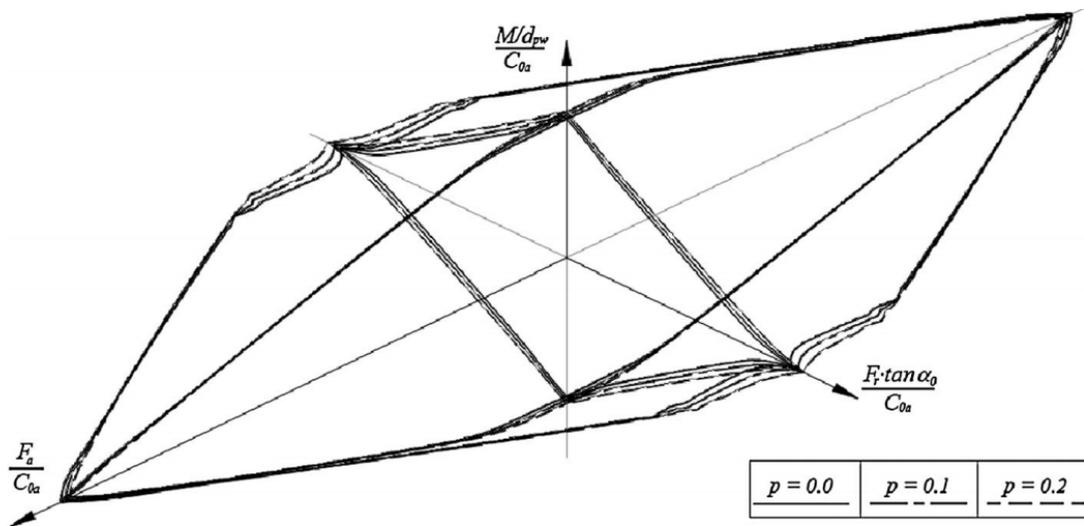
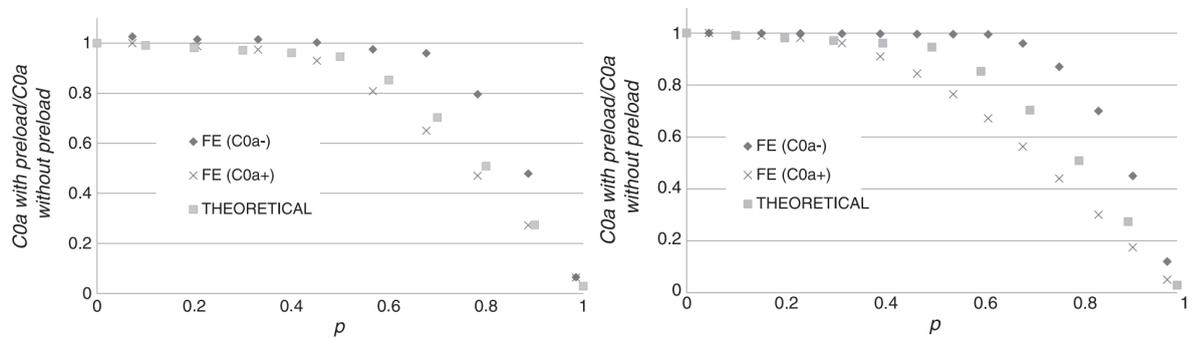


Figura 3.13: Superficie de aceptación para  $p = 0.0$ ,  $p = 0.1$ , y  $p = 0.2$  [Aguirrebeitia et al., 2013]

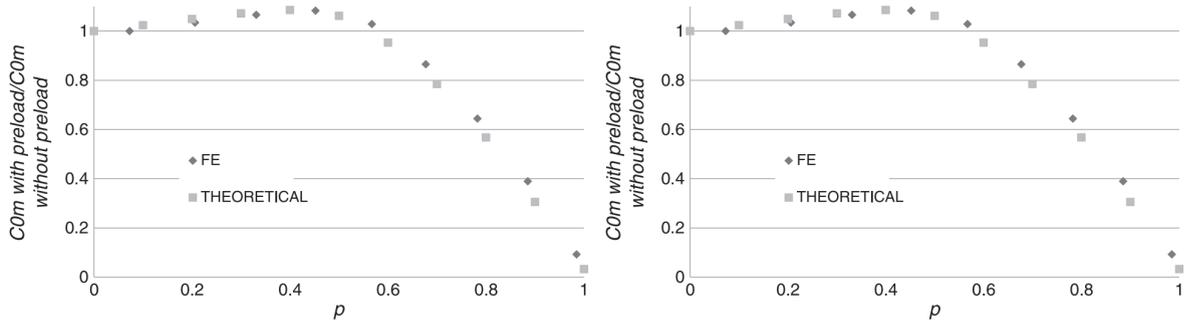
con ángulo variable desarrollado en esta sección y comparándolo frente al cálculo por Elementos Finitos, el cual será descrito en el Capítulo 4.

### 3.2.2. Resultados del modelo analítico con ángulo variable y precarga

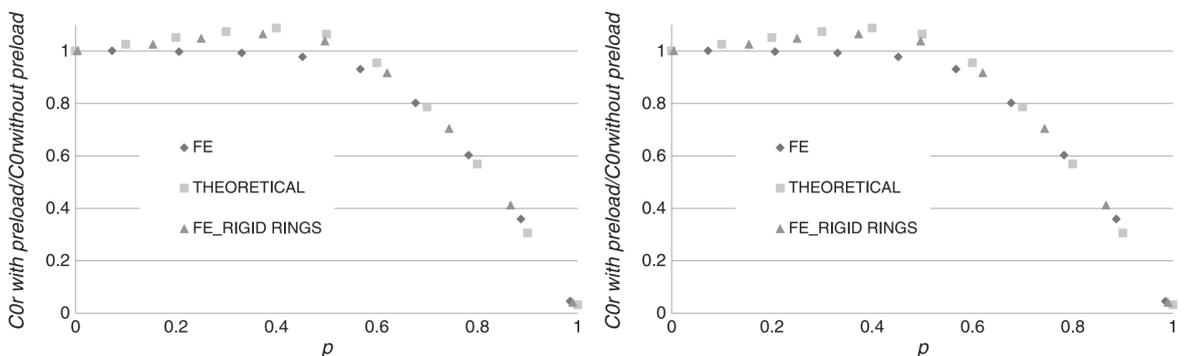
Como aplicación de este último modelo analítico que incluye la posibilidad de introducir precarga, se han estudiado diferentes niveles de precarga en el mismo rodamiento de la sección 3.1.2. Manteniendo un valor de conformidad de 1.07 y un ángulo de contacto inicial de  $45^\circ$ , los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.14. En este análisis se han aplicado niveles de precarga entre el 0% y el 100%, respecto a la interferencia límite tal y como se define en la expresión 3.33. Se puede apreciar en todos los planos que hasta un nivel de precarga del 45% se obtienen mejoras en la capacidad de carga. Estos resultados confirman la necesidad de introducir una precarga que mejore la distribución de carga en las bolas. No obstante, un valor de precarga excesivo hará que la mayor parte de la capacidad estática del rodamiento se utilice en la introducción de esta precarga y finalmente no quede disponibilidad de soportar esfuerzos externos, con lo que esfuerzos aplicados que el rodamiento es capaz de soportar se verían reducidos. Este es el caso de



- a) Capacidad axial para diferentes niveles de precarga frente al modelo  $\alpha$  constante y resultado por Elementos Finitos para rodamiento de pequeño diámetro (izda.) y uno de gran tamaño (dcha.)



- b) Capacidad del momento de vuelco para diferentes niveles de precarga frente al modelo de  $\alpha$  constante y resultado por Elementos Finitos para rodamiento de pequeño diámetro (izda.) y uno de gran tamaño (dcha.)



- c) Capacidad radial para diferentes niveles de precarga frente al modelo  $\alpha$  constante y resultado por Elementos Finitos para rodamiento de pequeño diámetro (izda.) y uno de gran tamaño (dcha.)

Figura 3.14: Comparativa de diferentes precargas con conformidad 1.07 y ángulo de contacto inicial  $45^\circ$ , para un rodamiento de vuelco de un aerogenerador de 750 kw [Aguirrebeitia et al., 2013]

los valores de precarga a partir del 50% mostrados, en los que se produce ya disminución de la capacidad estática del rodamiento.

A la vista de los resultados obtenidos mediante este nuevo método analítico se aprecia que las diferencias vienen dadas por no considerar la flexibilidad de los anillos, ya que

en los resultados obtenidos por Elementos Finitos modelizando como rígidos los anillos se obtienen resultados equivalentes. Queda probado por tanto que este método es más representativo que los actuales métodos analíticos y este enfoque puede ser utilizado para obtener la capacidad y reparto de carga de manera rápida y suficientemente precisa para la gran mayoría de las aplicaciones.

Basándose en este enfoque, a continuación en la sección 3.3 se ha desarrollado una nueva metodología de selección de rodamientos en base a la capacidad estática, para dar respuesta a la incertidumbre y falta de rigor teórico con el que a veces los fabricantes de rodamientos describen la capacidad de los rodamientos de vuelco.

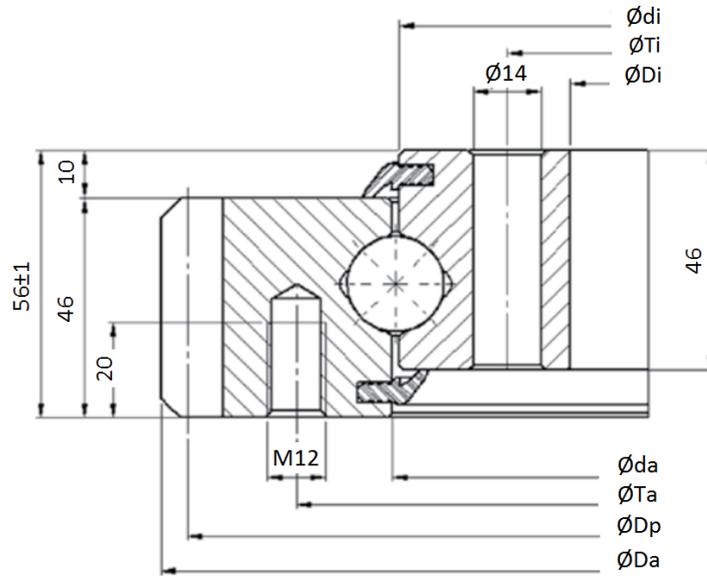
### 3.3. Desarrollo de una nueva metodología de selección en base a la capacidad estática

Mediante el modelo analítico mostrado en la sección anterior, es posible definir una superficie o volumen de aceptación para la capacidad estática de un rodamiento de vuelco, mucho más exacta que con los modelos analíticos disponibles hasta ahora. De todas formas, trabajar con este volumen puede no resultar muy práctico en tareas de selección de rodamientos para diseño de sistemas de orientación. Es común en catálogos de fabricantes de rodamientos, proporcionar una serie de curvas basadas en el concepto de la capacidad estática equivalente de la Figura 2.12 que determinen el límite de la combinación de esfuerzos para los cuales el rodamiento sufre daños permanentes por carga estática. A modo de ejemplo en la Figura 3.15 se presentan esquemáticamente las características geométricas principales de la serie POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011], correspondiente a una familia de ocho rodamientos de vuelco clasificados según sus diámetros medios, los cuales van desde 314mm a 1094mm. Una vez realizada una primera preselección del rodamiento de acuerdo al tamaño que resulte adecuado para la aplicación en particular, es necesario comprobar que los esfuerzos que va a sufrir el rodamiento están dentro de su rango de capacidad estática. Para ello IRAUNDI proporciona unas gráficas de capacidad como las mostradas en la Figura 3.16, las cuales

son muy similares a las de otros fabricantes de rodamientos. En esta gráfica se pueden ver ocho curvas, una para cada tamaño de rodamiento de la serie de la Figura 3.15, que representan el límite de capacidad estática para la combinación de esfuerzos de fuerza axial equivalente y momento de vuelco. Es decir, con un valor de momento de vuelco determinado y una fuerza axial equivalente se comprueba si esa composición de esfuerzos se sitúa por debajo de la curva de capacidad correspondiente al tamaño de rodamiento preseleccionado. Esta fuerza axial equivalente es calculada como combinación de fuerza axial y fuerza radial, de manera similar a la expresión 2.2 propuesta en la norma ISO76 [ISO76, 2006]. En el caso en el que la composición de esfuerzos sea superior a la curva de capacidad, debe seleccionarse un rodamiento de mayor tamaño.

En general, distintos fabricantes proporcionan curvas de catálogo muy similares (en ocasiones prácticamente idénticas) a éstas presentadas anteriormente. En estos catálogos simplemente se menciona que el fallo estático puede ser debido a dos efectos: por una parte el concepto tratado hasta ahora de excesiva presión en el contacto bola-pista y por otra el fallo de la unión atornillada que une el rodamiento a las estructuras entre las que permite el movimiento relativo. A modo de ejemplo ilustrativo, volviendo a las curvas de la Figura 3.16, se aprecian dos pendientes. La parte de pendiente positiva se corresponde con la capacidad estática de la unión atornillada, y la parte de pendiente negativa se corresponde con la capacidad estática del contacto bola-pista. En relación al cálculo de la carga axial equivalente, los fabricantes utilizan expresiones propias diferentes a la 2.2 de la ISO76 [ISO76, 2006] sin justificar la metodología seguida para la obtención de dichas expresiones (ver a modo de ejemplo la Tabla 3.2). Otro de los aspectos a considerar de estas curvas es que incorporan coeficientes de seguridad o se indica que se mayoran los esfuerzos de momento y fuerza axial equivalente por un coeficiente que varía en función de los requisitos de aplicación (severidad de operación, rigidez de las estructuras adyacentes, precisión del giro de los sistemas de actuación, ...).

En cualquier caso, la información aportada en los catálogos es realmente escasa. Los fabricantes sólo mencionan que las curvas están basadas en la capacidad estática del rodamiento, señalando que el fallo estático puede ser debido a dos efectos: una excesiva



**POS 214** dentado exterior / external gear

Bolas Ø 20 4 p.c / Balls Ø 20 4 c.p.

TIPO TYPE	Pos.	Dm (mm)	DIMENSIONES DIMENSIONS				AGUJEROS FIJACIÓN FIXING HOLES				DENTADO GEAR TEETH			PESO WEIGHT W (Kg)
			Da (mm)	Di (mm)	da (mm)	di (mm)	Ta (mm)	na (-)	Ti (mm)	ni (-)	Dp (mm)	M (mm)	Z (-)	
20-0001	1	314	404	242	315,5	312,5	355	20	268	20	395	5	79	24
20-0002	2	414	504	342	415,5	412,5	455	20	368	24	495	5	99	33
20-0003	3	544	640,8	472	545,5	542,5	585	28	498	32	630	6	105	44
20-0004	4	644	742,8	572	645,5	642,5	685	32	598	36	732	6	122	53
20-0005	5	744	838,8	672	745,5	742,5	785	36	698	40	828	6	138	59
20-0006	6	844	950,4	772	845,5	842,5	885	36	798	40	936	8	117	72
20-0007	7	944	1046,4	872	945,5	942,5	985	40	898	44	1032	8	129	78
20-0008	8	1094	1198,4	1022	1095,5	1092,5	1135	44	1048	48	1184	8	148	91

Figura 3.15: Parámetros geométricos fundamentales de la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011]

Fabricante	Carga Axial Equivalente
Rollix [Rollix, 2007]	$F_{A_{eq}} = F_A + 3.225 \cdot F_R$
Iraundi [Iraundi, 2011]	$F_{A_{eq}} = F_A + 5.05 \cdot F_R$
Rothe Erde [Rothe-Erde, 2009]	$F_{A_{eq}} = 1.225 \cdot F_A + 2.676 \cdot F_R$

Tabla 3.2: Diferentes expresiones de la carga axial equivalente de acuerdo a varios fabricantes

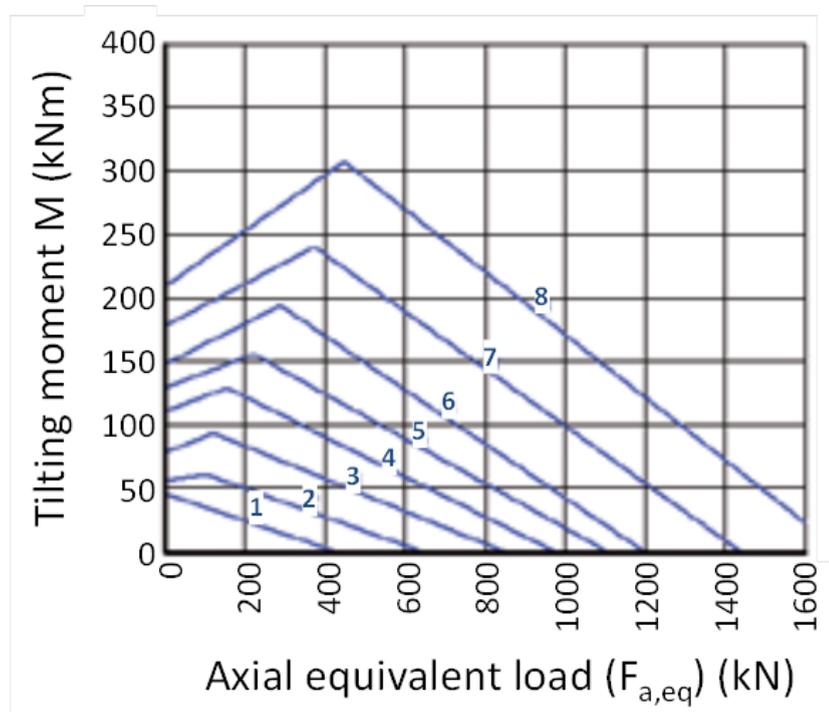


Figura 3.16: Curvas de selección para un rodamiento de la serie POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011]

presión en el contacto bola-pista, o una excesiva carga (por encima del punto de fluencia) en los tornillos de la unión atornillada. Estos hechos llevan a considerar que muchos fabricantes ignoran los fundamentos teóricos así como sus alcances y limitaciones, los cuales han sido reemplazados por la experiencia acumulada, normalmente proveniente de casos de fallo. Por tanto la capacidad del rodamiento suele estar fuertemente minorada, alimentada por esa desconfianza y dando lugar a rodamientos sobredimensionados.

Por todo ello, como aplicación industrial directa del modelo analítico para el cálculo de la capacidad estática generalizada de la sección 3.2.1, se va a presentar a continuación una metodología propia para la definición de curvas de selección de rodamientos de vuelco fundamentada en este modelo analítico. Las ventajas que aporta este desarrollo para la definición de curvas de capacidad de rodamientos de vuelco es por una parte que las bases teóricas están claramente descritas y validadas, y por otra parte que no se hace uso de ninguna carga axial equivalente sino que directamente la fuerza radial forma parte intrínseca de la metodología. Esta metodología se va a dividir en los dos modos de fallo

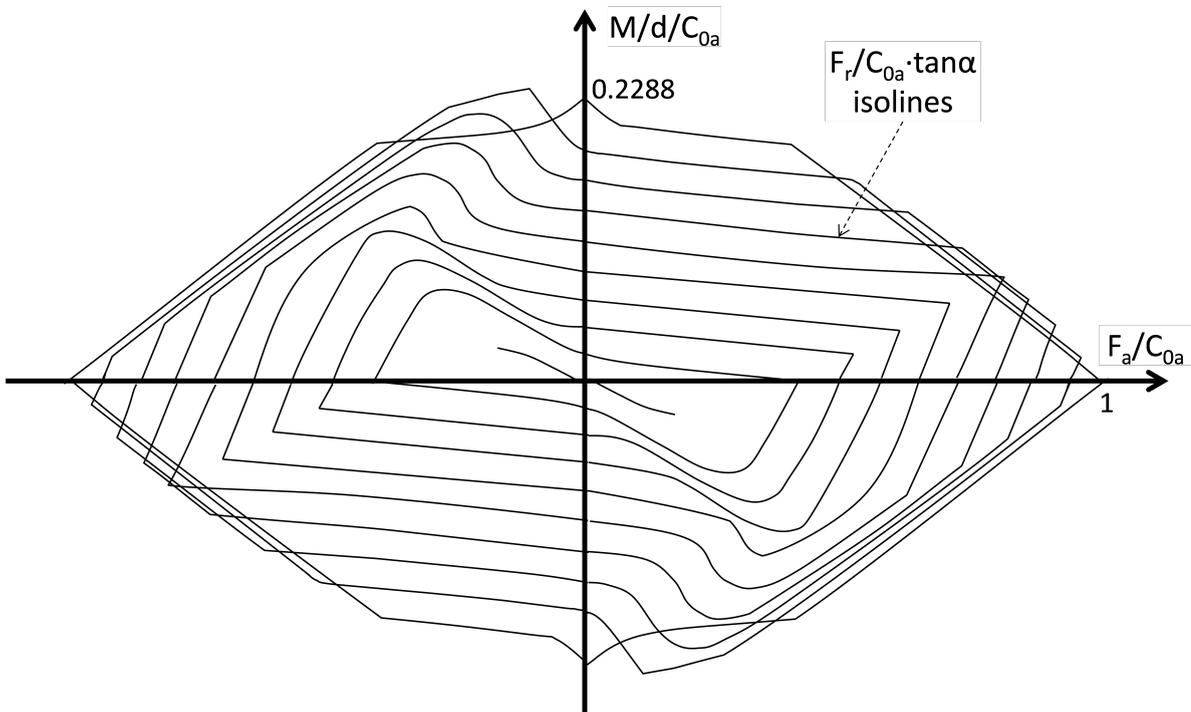


Figura 3.17: Isolneas de Fuerza radial de la superficie de aceptación para un rodamiento de vuelco [Abasolo et al., 2015]

posibles, por un lado el fallo por excesiva presión en el contacto bola-pista y por otro el fallo de la unión atornillada.

### 3.3.1. Estudio del fallo en el contacto bola pista para la nueva metodología de selección de rodamientos

Basándose en la idea de representar la superficie de aceptación mediante cortes por planos que definan diferentes niveles de esfuerzo radial como se mostró en la Figura 2.35 tomada de [Aguirrebeitia et al., 2010b], se puede representar la superficie de aceptación obtenida por el modelo descrito en la sección 3.2.1 en una gráfica bidimensional mostrando los esfuerzos radiales  $F_R/C_{0a} \cdot \tan \alpha$  mediante isocargas, y cuyos ejes correspondan a las normalizaciones  $F_a/C_{0a}$  (abscisas) y  $M/d_{pw}/C_{0a}$  (ordenadas). En la Figura 3.17 se expone esta representación.

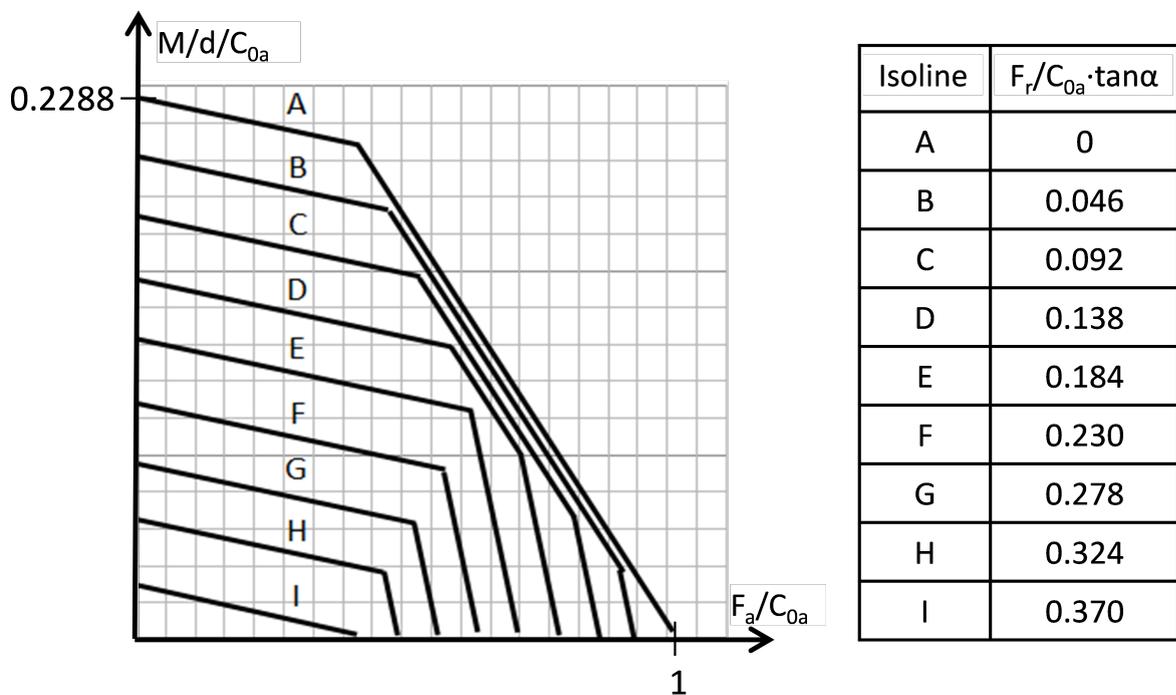


Figura 3.18: Curvas de capacidad de carga para el fallo por presión de contacto bola-pista en rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto [Abasolo et al., 2015]

Tal y como se aprecia en la Figura 3.17, las curvas de aceptación de carga estática son diferentes en función de la dirección de aplicación de los esfuerzos axiales y de momento de vuelco. Con el objetivo de obtener curvas generalistas que sean válidas para cualquier sentido de la carga y desde un punto de vista conservador, se propone condensar los cuatro cuadrantes en uno sólo superponiendo las curvas que den valores más conservadores en el primer cuadrante y dando lugar a las curvas de capacidad de la Figura 3.18.

Estas curvas de la Figura 3.18 tan sólo contemplan la capacidad de carga del rodamiento en términos del fallo en el contacto bola-pista, pero tal y como se ha indicado en la Figura 3.16 parte de las curvas de capacidad que aportan los fabricantes de rodamientos vienen definidas por la capacidad de la unión atornillada entre el rodamiento y las estructuras a las que se fija. En la siguiente sección se analizará la capacidad del rodamiento desde el punto de vista de la unión atornillada.

### 3.3.2. Estudio del fallo en unión atornillada para la nueva metodología de selección de rodamientos

De acuerdo a la información que se muestra de forma usual en los catálogos de fabricantes de rodamientos, las uniones atornilladas se precargan habitualmente hasta aproximadamente el 75% de su tensión de fluencia  $F_{yp}$ . En este estado de equilibrio inicial, los tornillos son tensionados mientras que los elementos unidos (anillos y estructuras adyacentes) se comprimen ligeramente, existiendo en todo el conjunto la misma fuerza de precarga  $F_p$ :

$$F_b = F_e = F_p = 0.75 \cdot F_{yp} \quad (3.36)$$

donde  $F_b$  es la precarga en el tornillo y  $F_e$  es la carga en los elementos unidos. A esta carga, hay que añadirle los esfuerzos externos axial, radial y de momento de vuelco que actúen sobre el rodamiento. La unión atornillada debe soportar también estas cargas de manera que en su capacidad máxima se alcanza la carga de fluencia  $F_{yp}$ , definiendo por tanto un modo de fallo para el rodamiento.

La manera en la que los esfuerzos externos actúan sobre la unión atornillada se analiza a continuación para cada una de las componentes axial, radial y de momento de vuelco. Desde el punto de vista del esfuerzo axial aplicado  $F_A$ , éste lleva a un nuevo estado de equilibrio en el que los tornillos y partes unidas comparten el esfuerzo aplicado; como los tornillos son más flexibles que los elementos unidos, éstos tan sólo reciben un pequeño porcentaje de la carga  $F_A$ . A partir de Bickford [Bickford, 1995, Bickford, 1998] y Sakai [Sakai, 2008] se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$F_b = F_p + C \cdot \frac{F_A}{n} \quad (3.37)$$

$$F_e = F_p - (1 - C) \cdot \frac{F_A}{n} \quad (3.38)$$

donde  $n$  es el número de tornillos en la unión (dado que el esfuerzo axial es distribuido de manera uniforme para todos los tornillos) y  $C$  es la relación de rigideces de la unión que se define como:

$$C = \frac{K_b}{K_b + K_e} \quad (3.39)$$

siendo  $K_b$  la rigidez de los tornillos frente a la tensión y  $K_e$  la rigidez a la compresión de los elementos unidos. Como se indica en las expresiones 3.37 y 3.38, el valor de  $C$  determina el porcentaje de la fuerza axial  $F_A$  que se llevan los tornillos y el resto,  $1 - C$ , es soportado por la unión atornillada. Si el sentido de la fuerza axial es tal que los anillos tienden a separarse (fuerza axial de tensión, ver caso a) de la Figura 3.19), los tornillos ven incrementada su tensión y los elementos unidos reciben menos carga de compresión; si la fuerza axial tiene a comprimir los anillo uno contra el otro (caso b) de la Figura 3.19), el efecto es el opuesto.

El fallo de la unión atornillada ocurre bajo una fuerza axial de tensión cuando la carga en el tornillo alcanza su fuerza de fluencia  $F_{yp}$ :

$$F_t = F_p + C \cdot \frac{F_A}{n} = F_{yp} \quad (3.40)$$

Simplificando esta expresión bajo un criterio conservador, se puede asumir que los tornillos soportan toda la carga axial  $F_A$  (por tanto  $C = 1$  en la expresión 3.40). Finalmente combinando las ecuaciones 3.36 y 3.40, se obtiene la fuerza axial pura que causa el fallo estático en la unión atornillada:

$$F_A = 0.25 \cdot F_{yp} \cdot n \quad (3.41)$$

Y por otra parte la expresión para el momento puro que provoca el fallo de la unión atornillada, se obtiene de un análisis equivalente. El momento externo aplicado  $M$  que

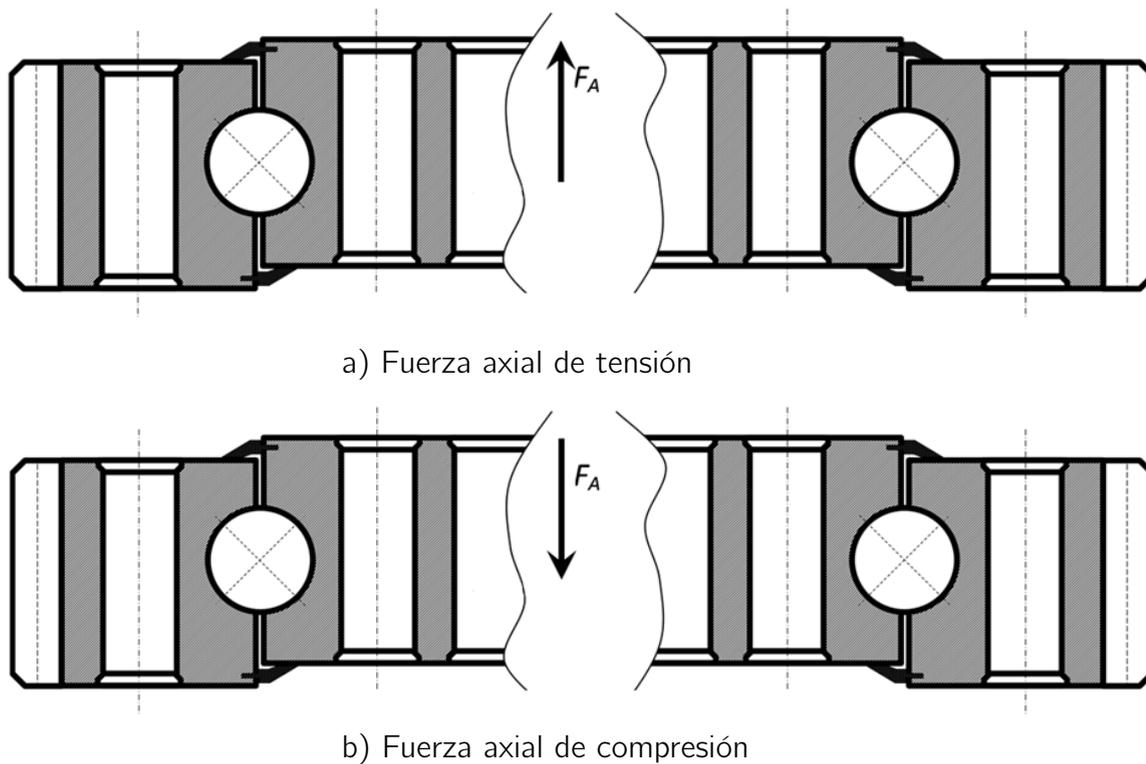


Figura 3.19: Fuerza axial actuante [Abasolo et al., 2015]

origina el fallo se muestra en la Figura 3.20, tensionando la mitad de los tornillos y comprimiendo la otra mitad.

Asumiendo de igual manera, bajo criterio conservador, que los tornillos soportan todo el esfuerzo del momento  $M$ , tal y como se muestra en la Figura 3.20, el tornillos más lejano al eje neutro ( $r_i = R$ ) es el más cargado ( $F_{b,max}$ ). Para todo tornillo  $i$  situado a una distancia  $r_i$ , de acuerdo a la Figura 3.20 la carga es:

$$F_{b,i} = F_{b,max} \cdot \frac{r_i}{R} = F_{b,max} \cdot \cos \theta_i \quad (3.42)$$

Por tanto:

$$M = \sum_{i=1}^n (F_{b,i} \cdot r_i) \quad (3.43)$$

De las ecuaciones 3.42 y 3.43 se obtiene finalmente:

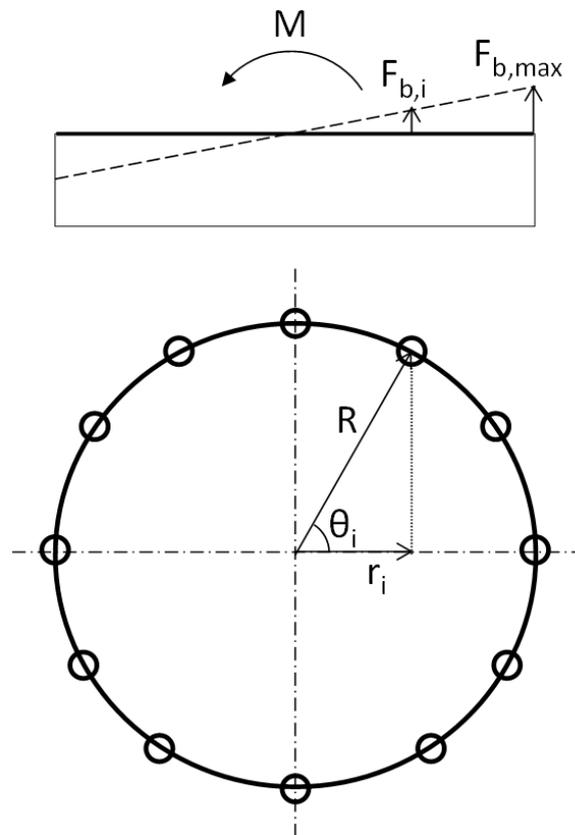


Figura 3.20: Distribución de carga en los tornillos bajo un momento de vuelco puro  $M$  [Abasolo et al., 2015]

$$M = \sum_{i=1}^n \left( F_{b,max} \cdot R \cdot \cos^2 \theta_i \right) = F_{b,max} \cdot R \cdot \frac{n}{2} \quad (3.44)$$

Considerando que además de soportar el momento de vuelco aplicado  $M$ , los tornillos tiene una pretensión  $F_p$ , el tornillo más cargado soportará un esfuerzo total de:

$$F_b = F_p + F_{b,max} = F_p + \frac{2 \cdot M}{R \cdot n} \quad (3.45)$$

De nuevo, el tornillo fallará cuando su carga sea igual a la carga de fluencia  $F_{yp}$ . Por tanto, combinando las ecuaciones 3.36 y 3.45 el momento que causa el fallo estático en la unión atornillada es:

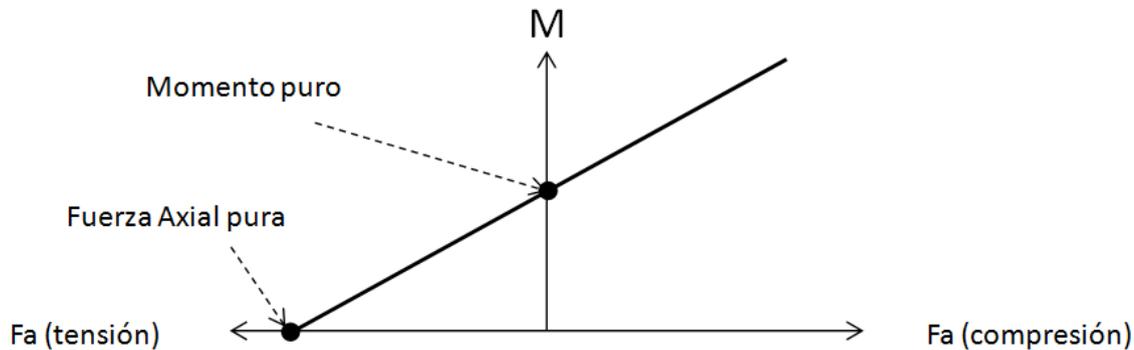


Figura 3.21: Curva de capacidad de carga para el fallo en la unión atornillada en rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto [Abasolo et al., 2015]

$$M = 0.25 \cdot F_{yp} \cdot R \cdot \frac{n}{2} \quad (3.46)$$

Valores combinados de fuerza axial y momento de vuelco se pueden representar a partir de las expresiones 3.41 y 3.46 tal y como se muestra en la Figura 3.21.

Como los rodamientos de vuelco disponen de dos uniones atornilladas, las gráficas de capacidad deben considerar la unión más limitante. En este caso, no aparece el término de fuerza radial ya que esta fuerza no afecta porque es absorbida por la fricción entre las caras del anillo del rodamiento y la estructura a la que se fija. La única comprobación que deberá hacerse es que la fuerza radial aplicada es menor que la fuerza de fricción en esta interfaz. Normalmente los esfuerzos radiales son mucho menores que los necesarios para que deslice la unión atornillada y la siguiente expresión 3.47 se cumple sin tener que imponer restricciones adicionales

$$F_R < \mu \cdot F_p \cdot n \quad (3.47)$$

donde  $F_p$  es la fuerza de precarga en los tornillos.

Una completa definición de la capacidad estática del rodamiento debe contener estos dos modos de fallo descritos previamente, tanto el fallo en el contacto bola-pista como el fallo en la unión atornillada. Combinando las curvas de las Figuras 3.18 y 3.21 se ha desarrollado la siguiente representación de la Figura 3.22 que permite mediante métodos gráficos seleccionar el tamaño adecuado de rodamientos de vuelco. En concreto los valores de la gráfica están particularizados para la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI de la figura 3.15, pero la metodología es igualmente aplicable a cualquier otra serie de rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto. La abscisa de la izquierda corresponde al momento de vuelco  $M$  mientras que en la parte inferior de las ordenadas se representa la fuerza axial  $F_A$ . Éstos serán los ejes de entrada con las fuerzas  $F_A$  y  $M$  que actúan sobre el rodamiento y éste deberá soportar. El primer cuadrante contiene las curvas de capacidad de carga para el fallo en el contacto bola-pista descrito anteriormente, estando los ejes normalizados de forma que en abscisas se muestran los valores  $F_A/C_{0a}$  y en ordenadas  $M/d_{pw}/C_{0a}$ . De acuerdo a los criterios del fabricante IRAUNDI para la serie POS214, se ha utilizado un factor de seguridad de valor igual a 2 para minorar la capacidad axial teórica  $C_{0a}$ . Por consiguiente, a la hora de introducir en este primer cuadrante la fuerza axial  $F_A$  actuante debe ser dividida por la capacidad axial teórica  $C_{0a}$ , de igual manera para el momento de vuelco que debe ser dividido por  $C_{0a}$  y por el diámetro medio  $d_{pw}$ . En este sentido, las rectas de los cuadrantes 2 y 4 de la Figura 3.22 se utilizan precisamente para poder realizar gráficamente esta división entre  $C_{0a}$  y  $d_{pw}/C_{0a}$  para cada tamaño de la serie de rodamientos (8 tamaños para el caso de la serie POS214 de IRAUNDI tal y como se mostró en la Figura 3.15). Finalmente se anexa la tabla de máxima fuerza radial  $F_{Rmax}$  que el rodamiento es capaz de soportar en combinación con las fuerzas axiales  $F_A$  y de momento de vuelco  $M$ . Cada fila de la tabla se corresponde con un tamaño de la serie POS214 (ver Figura 3.15) y cada columna con un valor determinado de las isocargas  $F_R/C_{0a} \cdot \tan \alpha$ .

Las curvas de capacidad de carga para el fallo de la unión atornillada, mostradas previamente en la Figura 3.21 se corresponden con el tercer cuadrante de la Figura 3.22. Así, cada una de las curvas representa el límite de la unión atornillada para los tamaños de 1

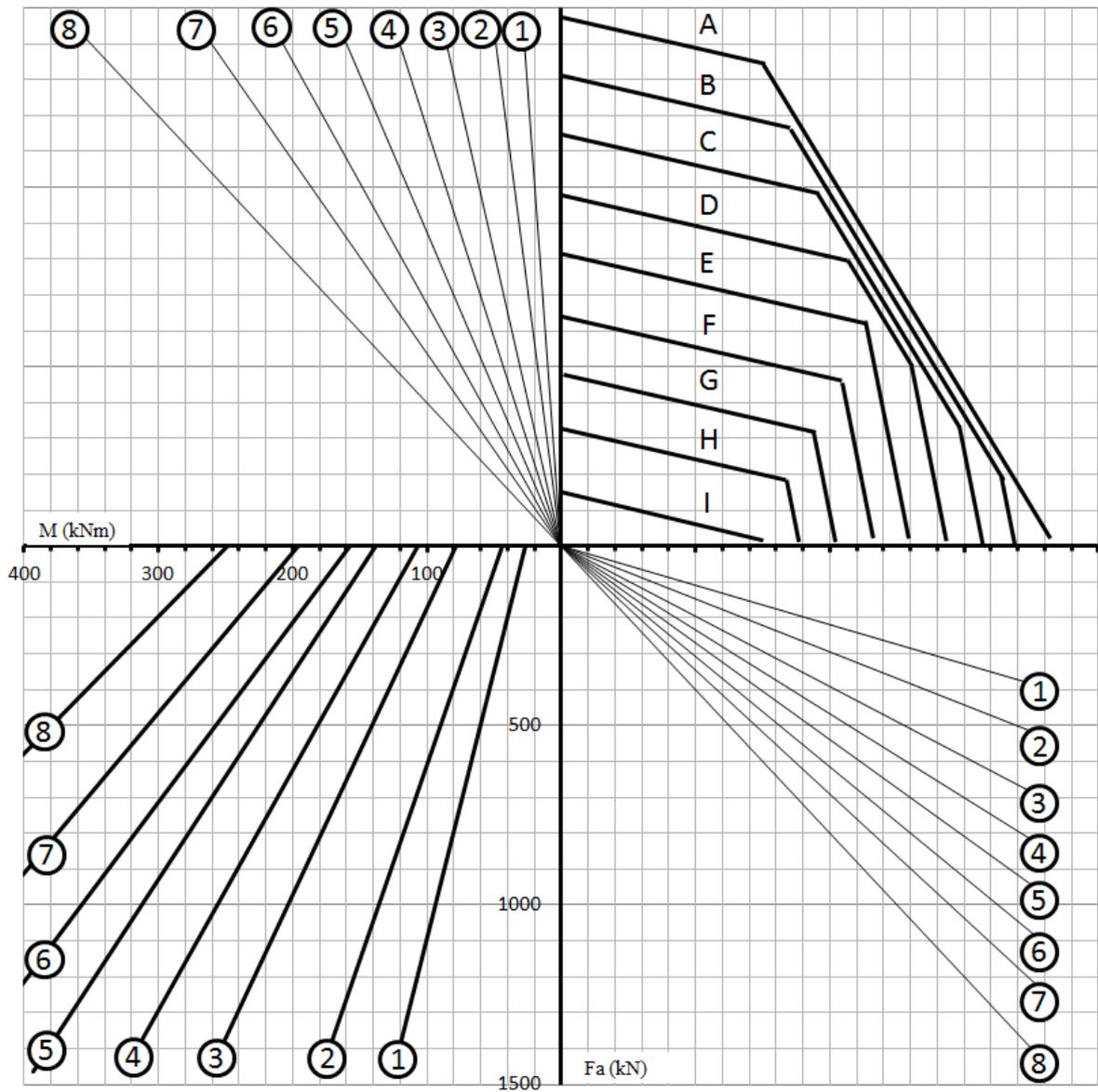
a 8 de la serie POS214, los cuales montan diferente número de tornillos y de diferente métrica.

Para mostrar cómo se utiliza de manera práctica esta propuesta de curvas de capacidad, se va a proceder a describir un ejemplo particular que permita ver el empleo de las mismas.

### 3.3.3. Ejemplo particular para la nueva metodología de selección de rodamientos

Supuesto que se ha seleccionado previamente la serie POS214 de rodamientos de IRAUNDI, por ser la que mejor se ajusta a la aplicación que se va a tratar (ver sección 2.4). Una vez seleccionada la serie, se selecciona un determinado tamaño de rodamiento en base a su diámetro medio de forma que los anillos se adecuen a las estructuras a las que se van a unir. Tómese a modo de ejemplo el tamaño número 5 cuyos parámetros geométricos pueden verse en la Figura 3.15. Los valores para los esfuerzos aplicados al rodamiento de vuelco, una vez tenidos en cuenta los coeficientes de mayoración mencionados al inicio de esta sección 3.3 son  $F_A = 495$  kN,  $F_R = 36$  kN y  $M = 75$  kNm. Para comprobar si el rodamiento es válido y en base a lo explicado, en la Figura 3.23 se muestra el procedimiento gráfico que se va a describir a continuación.

1. Como primer paso, se dibuja una línea horizontal al nivel  $F_A = 495$  kN en el eje inferior de ordenadas hasta que corte con la línea oblicua marcada con el número 5. Como se ha indicado previamente, mediante esta operación se normaliza la fuerza axial actuante respecto a la capacidad axial máxima  $C_{0a}$  del rodamiento de tamaño 5.
2. En el lado izquierdo del eje de abscisas partiendo del valor  $M = 75$  kNm se dibuja una línea vertical en el tercer cuadrante, que corte a la línea oblicua superior marcada de nuevo con el número 5. De nuevo, esta operación corresponde a la normalización del momento actuante respecto a la capacidad axial máxima  $C_{0a}$  y el diámetro medio  $d_{pw}$ .



Fr max (kN)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	0	18	37	55	74	92	110	129	147
2	0	25	50	74	99	124	149	173	198
3	0	33	65	98	131	164	196	229	262
4	0	39	78	117	156	196	235	274	313
5	0	45	90	135	180	226	271	316	361
6	0	51	103	154	206	257	309	360	412
7	0	58	116	174	231	289	347	405	463
8	0	67	134	201	268	335	402	469	536

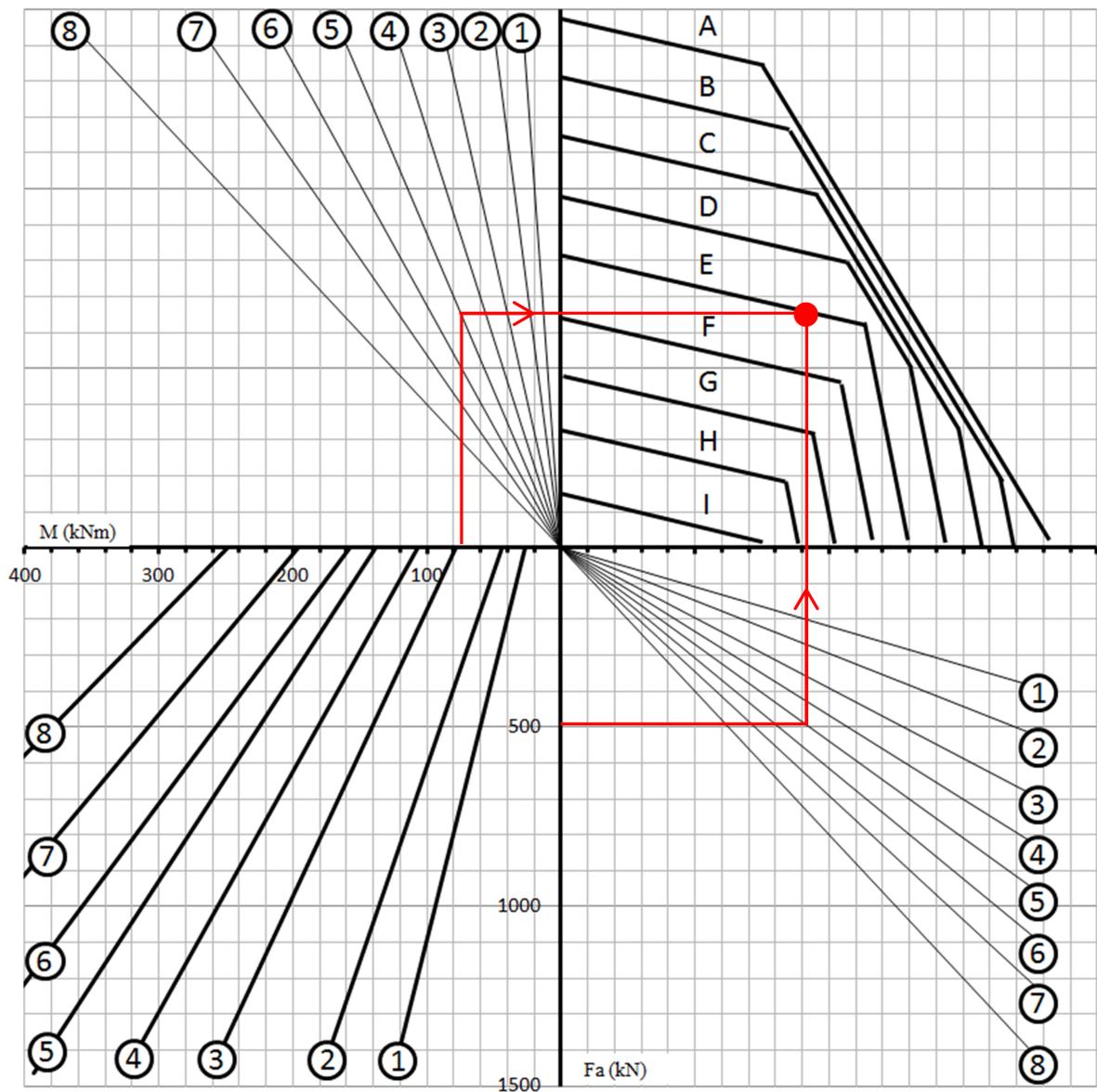
Figura 3.22: Nuevas curvas de selección para la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011]

3. El punto de corte de ambas líneas, señalado con un punto rojo en la Figura 3.23 que cae sobre la línea E en el primer cuadrante, lo que indica que la fuerza radial máxima que es capaz de soportar el rodamiento, en combinación con los niveles de fuerza axial y momento de vuelco indicados, es de  $F_{R,max} = 180$  kN. Ya que la fuerza radial actuante es  $F_R = 36 < 180$  kN, no se producirá fallo estático de acuerdo al criterio de tensión máxima admisible en el contacto bola-pista para este rodamiento de tamaño 5.

Como siguiente verificación queda comprobar que la unión atornillada también es capaz de soportar los esfuerzos aplicados. En este caso los pasos son los siguientes:

1. Se dibuja una línea horizontal al nivel  $F_A = 495$  kN en el eje inferior de ordenadas hacia el cuarto cuadrante.
2. Partiendo del valor  $M = 75$  kNm se dibuja una línea vertical en el cuarto cuadrante.
3. El punto de corte de ambas líneas se corresponde con punto rojo indicado en la Figura 3.24. Como este punto cae en el lado derecho de la curva de capacidad de la unión atornillada para el tamaño de rodamiento número 5, se concluye que no existirá fallo en la unión atornillada para estas cargas aplicadas.

De esta manera se puede finalmente concluir que el tamaño número 5 de la serie POS214 es válido desde el punto de vista de carga estática para los requisitos de esfuerzos a los que se verá sometido. Si en este proceso de comprobación hubiera resultado que el tamaño no fuese válido, se repetiría el procedimiento para el siguiente tamaño número 6.



Fr max (kN)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	0	18	37	55	74	92	110	129	147
2	0	25	50	74	99	124	149	173	198
3	0	33	65	98	131	164	196	229	262
4	0	39	78	117	156	196	235	274	313
5	0	45	90	135	180	226	271	316	361
6	0	51	103	154	206	257	309	360	412
7	0	58	116	174	231	289	347	405	463
8	0	67	134	201	268	335	402	469	536

Figura 3.23: Verificación de la validez del rodamiento 5 de la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011], considerando el fallo en el contacto bola-pista, de acuerdo a las curvas de selección de la Figura 3.22

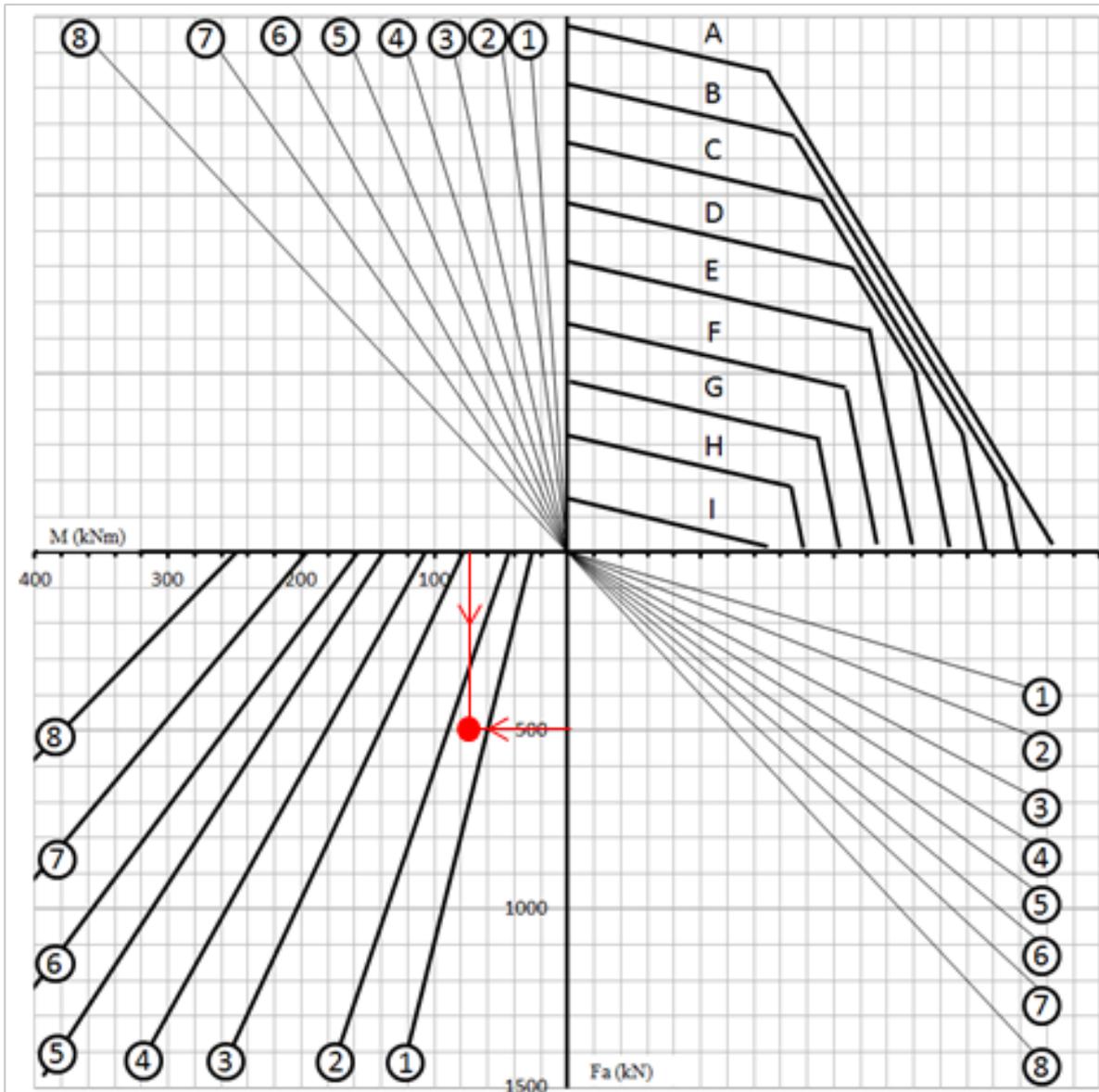


Figura 3.24: Verificación de la validez del rodamiento 5 de la serie de rodamientos POS214 del fabricante IRAUNDI [Iraundi, 2011], considerando el fallo de la unión atornillada, de acuerdo a las curvas de selección de la Figura 3.22

# 4

## Modelos de elementos finitos para la simulación del comportamiento resistente

A la hora de poder validar el modelo analítico para el cálculo de la capacidad de carga presentado en el Capítulo 3, resulta inasumible desde el punto de vista del coste realizar ensayos experimentales tanto en especímenes de serie como mediante prototipos a pesar de que puedan ser incluso a escala; siendo además la información que se pueda obtener de los mismos escasa, dado que captar cuándo se produce el fallo estático en el contacto bola pista no es posible. Una posibilidad sería el desarrollo de un modelo de Elementos Finitos. Este modelo además, aporta una solución al problema de cómo ser capaces de representar la rigidez de los tornillos y anillos del rodamiento de vuelco. Es decir, el desarrollo de un modelo de Elementos Finitos cumple dos objetivos principales. Por un lado se utiliza para correlar los resultados obtenidos mediante el modelo analítico del Capítulo 3 y por otro sirve para completar la carencia que presentaban estos modelos al no considerar la rigidez de las estructuras (anillos y estructuras a las que se unen éstos).

En este Capítulo se va a detallar el modelo de Elementos Finitos, desarrollado como validación del modelo analítico de capacidad de carga del Capítulo 3. Este modelo además de considerar el ángulo de contacto variable y la precarga de las bolas, tiene en cuenta la rigidez de los anillos, representando de esta forma más fielmente la respuesta estática del rodamiento frente a los esfuerzos axial, radial y de momento de vuelco aplicados. Además de como herramienta para validar el modelo analítico, este modelo de Elementos Finitos nos permite ver la influencia de las rigideces antes mencionadas a la hora de obtener mapas de reparto de cargas en las bolas. No obstante, el rodamiento aislado no es representativo plenamente de la rigidez del mecanismo de orientación en el que vaya montado el rodamiento ya que supone soportes rígidos, y en realidad estos soportes son asimismo flexibles. Si se busca estimar adecuadamente la rigidez del sistema, es necesario simular también las estructuras de soporte; sin embargo la complejidad del modelo y el coste computacional se disparan.

Con el propósito de aportar una solución a este problema del alto coste computacional a la hora de representar adecuadamente la rigidez global del sistema, en una segunda parte del Capítulo se va a describir un modelo optimizado de Elementos Finitos basado en superelementos, que contiene información acerca de la rigidez de las estructuras a las que se une. Éste último modelo de superelementos está orientado más particularmente a la estimación de la rigidez global que a la distribución de cargas y fallo del rodamiento en sí, dado que como se verá, el error que se comete en el cálculo del reparto de cargas y estimación del fallo estático del rodamiento es despreciable con el modelo de Elementos Finitos del rodamiento calculado de forma aislada con soportes rígidos, pero sí tiene mucha influencia a la hora de calcular el conjunto del sistema donde esté montado el rodamiento, considerando su interacción con las demás estructuras a las que se une.

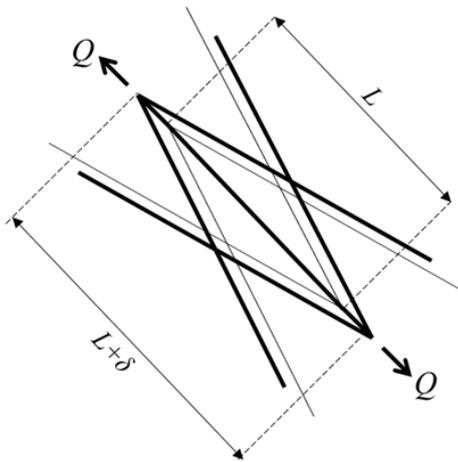
### 4.1. Modelo de elementos finitos básico

En esta sección se va a detallar el modelo de Elementos Finitos desarrollado para analizar de manera aislada el rodamiento y cuyo principal objetivo es validar el modelo analítico

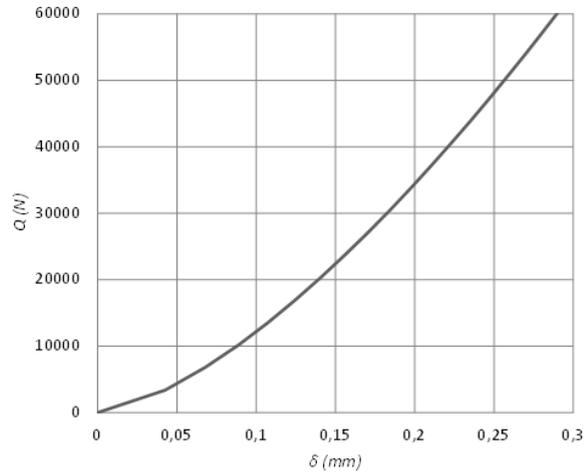
del Capítulo 3. Para ello se parte de los modelos desarrollados por Aguirrebeitia en [Aguirrebeitia et al., 2012b] que han sido detallados en la sección 2.5.3. La diferencia entre el modelo que aquí se presenta y el de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2012b] reside en la modelización de la bola, cuyo esquema se muestra en la Figura 2.39 donde el muelle está representado con una longitud excesiva con el propósito de ayudar a mostrar de forma más clara las partes constituyentes de esta construcción. En Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2012b] las bolas eran modelizadas sustituyendo la geometría esférica por una serie de muelles no lineales que sólo trabajaban a tracción, con una rigidez equivalente del contacto. El contacto entre bola-pista era representado mediante elementos placa rígidos formando un rectángulo cuyos lados tienen las dimensiones de los ejes de la elipse de contacto. En los extremos de cada zona que representa el contacto bola-pista se colocan dos elementos rígidos tipo viga de manera que confluyan en el centro de curvatura de las pistas. Finalmente, los muelles de tracción no lineales dispuestos entre estos centros de curvatura son los encargados de simular la rigidez de la bola. Esta disposición permite simular la variación del ángulo de contacto de la bola. Esta modelización ha sido desarrollada y validada experimentalmente en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica de Toulouse [Daidié et al., 2008].

Como se ha indicado, en el modelo de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2012b] los muelles se modelizaron mediante un único elemento no lineal que trabaja sólo a tracción (el elemento COMBIN39 en ANSYS©) con una longitud inicial  $L$  igual a la diferencia de diámetros entre pista y bola. Al actuar una fuerza  $Q$  sobre el muelle (ver Figura 4.1 a)), su deformación  $\delta$  es obtenida mediante la ecuación 2.90. Esta relación carga deformación viene representada en la Figura 4.1 b) para unas condiciones particulares de  $d_w = 20mm$  y  $s = 0.943$ , tomadas a modo de ejemplo.

Es en esta modelización en la que se ha trabajado para poder incluir el efecto de la precarga en las bolas. Con este objetivo, en lugar de representar la rigidez del contacto bola-pista mediante un único muelle, se ha realizado una construcción de tres muelles, cada uno de los cuales de longitud igual a la tercera parte de la diferencia entre el diámetro de la pista y el diámetro de la bola  $\frac{L}{3}$ . De estos tres elementos, tan sólo dos de ellos



a) Respuesta del modelo bajo una fuerza de tracción  $Q$  (líneas finas: inicial; líneas gruesas:deformada)

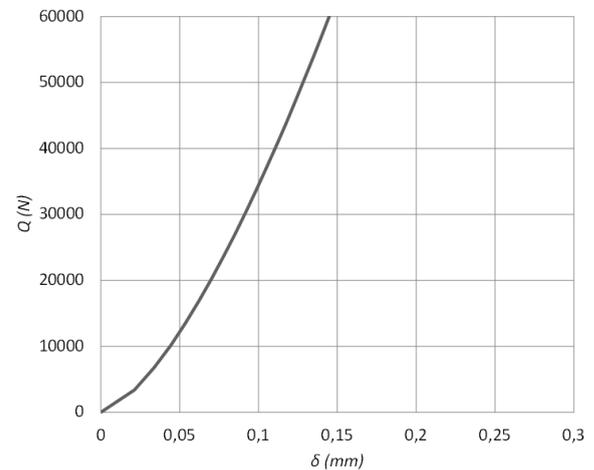
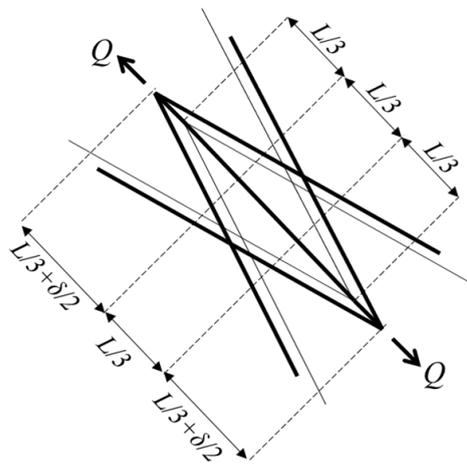


b) Curva  $Q - \delta$  del muelle no lineal

Figura 4.1: Modelización de la bola en Elementos Finitos de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2012b]

son elementos muelle no lineales (del tipo COMBIN39 de ANSYS©mencionados previamente), siendo el tercero un elemento tipo muelle lineal (COMBIN14 de ANSYS©) con rigidez infinita. De esta manera, cuando actúa una fuerza  $Q$  en el conjunto de muelles, el muelle lineal permanece indeformado (elemento central de la Figura 4.2 a)). La deformación de cada uno de los dos muelles no lineales es la mitad del valor definido por la ecuación 2.90 de manera que la deformación total del nuevo modelo bajo una carga  $Q$  es la misma que la del modelo original al ser ésta una configuración de dos muelles en serie, dando lugar a la relación carga-deformación cuya curva se muestra en la Figura 4.2 b) (igualmente para las condiciones particulares de  $d_w = 20mm$  y  $s = 0.943$ ).

La función del elemento muelle lineal COMBIN14 es simular la precarga de la bola reduciendo su longitud inicial  $\frac{L}{3}$  a un nuevo valor  $\frac{L}{3} - x$ . Este acortamiento provocará una elongación en los elementos no lineales tipo muelle COMBIN39, siendo su nueva longitud  $\frac{L}{3} + \frac{\delta_p}{2}$ , donde  $\delta_p < x$  dado que los anillos se acercan mutuamente; como consecuencia de esto, se crea una precarga ( $Q_p$ ) en la bola tal y como se representa en la Figura 4.3. La relación entre  $\delta_p$  y  $x$  para cada rodamiento se obtiene del modelo de Elementos Finitos y depende del tamaño del rodamiento. En la sección 4.1.1 se mostrarán valores de esta relación  $\delta_p - x$  para dos tamaños diferentes de rodamientos.



a) Respuesta del modelo adaptado bajo una fuerza de tracción  $Q$  (líneas finas: inicial; líneas gruesas: deformada)

b) Curva  $Q - \delta$  de la combinación de los dos muelles no lineales

Figura 4.2: Esquema de la modelización de la bola en Elementos Finitos con precarga [Aguirrebeitia et al., 2013]

El resto del modelo de Elementos Finitos es igual que el que se detalló en la sección 2.5.3. La Figura 2.40 muestra un detalle donde le pueden apreciar las siguientes características: el anillo interior se une a un elemento fijo el cual es modelizado mediante superficies rígidas por medio de tornillos pretensionados al 70% de su tensión de fluencia, y las fuerzas externas se aplican en el centro del rodamiento y son transmitidas hacia el anillo exterior del rodamiento mediante una restricción multipunto (elementos MPC de ANSYS®).

A continuación se presentan los resultados obtenidos mediante este modelo de Elementos Finitos para dos tamaños de rodamiento distintos con el doble objetivo de validar el modelo analítico presentado en el Capítulo 3 y ver cómo afecta la esbeltez de los anillos.

#### 4.1.1. Resultados de los modelos de reparto de cargas

En esta sección se van a analizar los resultados obtenidos mediante el modelo de Elementos Finitos con la capacidad de simular la precarga descrito en la sección 4.1 para dos tamaños de rodamiento. En la siguiente Tabla 4.1 se muestran los valores geométricos

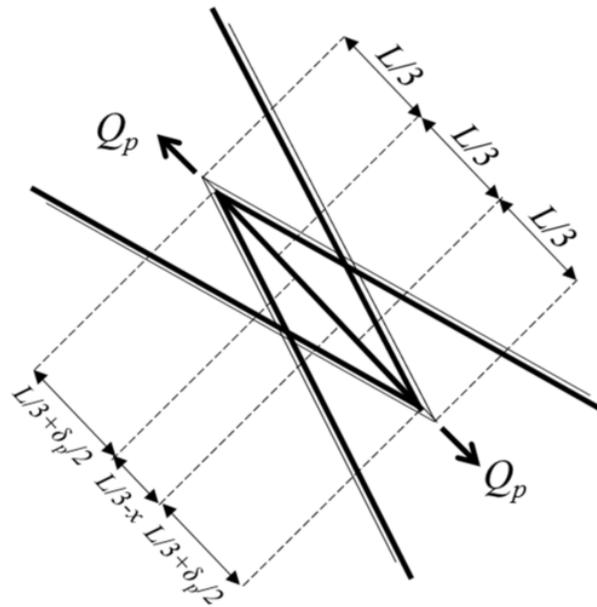
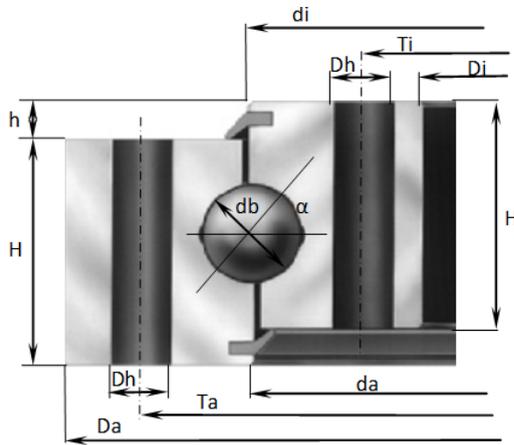


Figura 4.3: Configuración en estado de precarga del modelo adaptado (líneas finas: inicial; líneas gruesas: deformada) [Aguirrebeitia et al., 2013]

de la parametrización llevada a cabo de la misma manera que en 2.5.3.

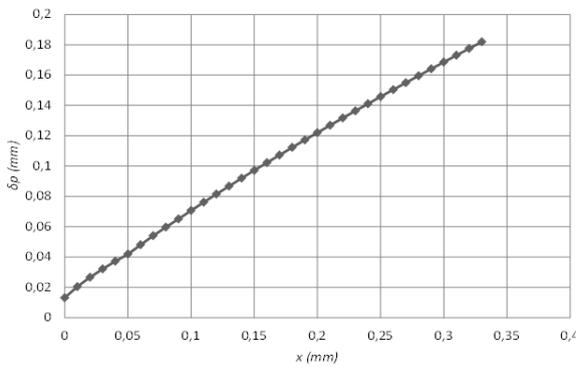
Como se ha mencionado previamente, la relación  $\delta_p - x$  de la modelización mostrada en la Figura 4.4 depende del tamaño del rodamiento ya que en rodamientos de gran tamaño la flexibilidad del conjunto es mucho mayor que en la de los pequeños. Las Figuras 4.4 muestran esta relación para los rodamientos de tamaño pequeño y grande respectivamente de la Tabla 4.1. Esto quiere decir que para un determinado valor de  $x$ , los anillos del rodamiento grande, al ser más flexible, no se acercan tanto como los del rodamiento pequeño y, por tanto, la  $\delta_p$  resultante y la precarga  $Q_p$  es menor. Debe señalarse que tal y como se ve en ambas gráficas de la Figura 4.4, para un valor  $x = 0$  existe una pequeña precarga. Esto es debido a que cuando los tornillos se pretensionan, se producen deformaciones en los anillos que generan una elongación en los muelles y consecuentemente una precarga en los mismos. Este fenómeno de introducción de precarga debida a la pretensión de los tornillos es un efecto que los fabricantes conocen y tienen en cuenta.

Como primer paso, se han obtenido los valores de la capacidad generalizada para los

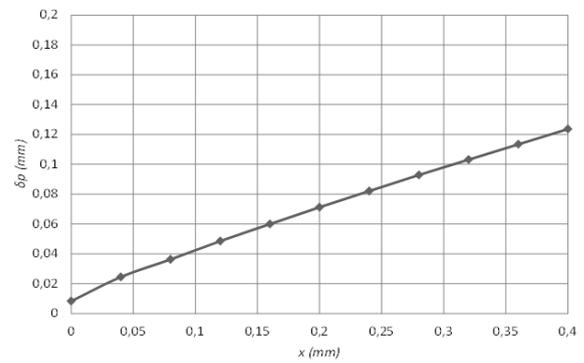


Parámetros	Tamaño rodamiento	
	Pequeño	Grande
$d_a$ [mm]	215.5	654.4
$T_a$ [mm]	260	690
$D_a$ [mm]	286	716
$d_i$ [mm]	212.5	642.5
$T_i$ [mm]	168	598
$D_i$ [mm]	142	572
$h$ [mm]	10	10
$H$ [mm]	46	46
$D_h$ [mm]	14	14
$D_b$ [mm]	20	20
$B_n$	33	101
$n_a$	16	32
$n_i$	20	36
$\alpha$ [°]	45	45
$s$	0.943	0.943

Tabla 4.1: Parámetros geométricos de los rodamientos analizados [Aguirrebeitia et al., 2013]



a) Rodamiento de pequeño tamaño



b) Rodamiento de gran tamaño

Figura 4.4: Relación  $\delta_p - x$  de la modelización de la Figura 4.2 [Aguirrebeitia et al., 2013]

Capacidades	$p = 0.0$					
	Rodamiento pequeño			Rodamiento grande		
	Modelo Teórico	Modelo EF	% Relación (EF/Teórico)	Modelo Teórico	Modelo EF	% Relación (EF/Teórico)
$C_{0a+}$ [kN]	764.0	772.2	1.07%	2351.3	2323.2	-1.20%
$C_{0a-}$ [kN]	764.0	797.4	4.37%	2351.3	2886.4	22.76%
$C_{0r}$ [kN]	341.3	429.8	25.93%	1051.9	1907.2	81.31%
$C_{0m}$ [kNm]	36.6	36.8	0.55%	339.1	302.2	-10.88%

Tabla 4.2: Capacidades de carga para los rodamientos de la Tabla 4.1 en ausencia de precarga

rodamientos de la Tabla 4.1 y se han comparado con los obtenidos mediante el modelo analítico del Capítulo 3, para la condición de precarga nula  $p = 0.0$ . Los resultados de ambos modelos se muestran en la Tabla 4.2. Para el caso del cálculo de la capacidad axial se muestran dos valores (uno para la carga axial en la dirección positiva y otro para la dirección negativa) ya que en el modelo de Elementos Finitos existe una asimetría en las condiciones de contorno tal y como se describió en la sección 2.5.3. Es destacable que en el rodamiento de pequeño tamaño las diferencias entre el modelo teórico y el modelo de Elementos Finitos son muy pequeñas para el caso de capacidad axial. En cambio para el caso de capacidad radial las diferencias comienzan a ser importantes. La razón de este hecho es que la flexibilidad de los anillos en el modelo de Elementos Finitos se hace patente, al contrario del modelo teórico que los considera rígidos. Esto es así dado que la flexibilidad en la dirección radial es muy alta por ser la sección transversal de los anillos mucho más pequeña que su diámetro medio. Esta flexibilidad de los anillos en el modelo de Elementos Finitos tiene una influencia directa en la manera en la que las cargas aplicadas se distribuyen entre las bolas, y por tanto influirá en la capacidad de carga del rodamiento. Un efecto similar tiene lugar para el caso del rodamiento de gran tamaño, y en este caso la desviación entre los resultados de la capacidad radial para el modelo teórico frente al modelo de Elementos Finitos es incluso mayor porque el rodamiento es mucho más flexible.

El caso de precarga nula  $p = 0.0$  en principio sólo tiene interés desde el punto de vista numérico ya que la forma habitual de trabajo de los rodamientos de vuelco es con una

precarga inicial. Esta precarga inicial se describió en forma de una relación respecto a la máxima deflexión admisible  $\delta_{lim}$  en 3.33 y los resultados del modelo de Elementos Finitos fueron expuestos en las imágenes de la Figura 3.14. En relación a la capacidad axial (caso a) de la Figura 3.14) se comparan las capacidades en sentido positivo y negativo ( $C_{0a+}$  y  $C_{0a-}$  respectivamente, según el sentido indicado para el esfuerzo axial en la Figura 2.5) con la calculada por el modelo teórico.

Respecto a la capacidad de carga axial del rodamiento, a medida que la precarga crece se aprecia en el caso a) de la Figura 3.14 que la capacidad disminuye ya que parte de la capacidad de soportar carga axial que tiene el rodamiento, se utiliza en precargar la bola. En el sentido en el que el rodamiento es más rígido ( $C_{0a+}$ ), se observa que los valores calculados por el modelo analítico y los calculados por el modelo de Elementos Finitos, son muy cercanos. En relación al caso b) de la Figura 3.14 donde se representa la capacidad del momento de vuelco, ésta aumenta para valores bajos de precarga ( $p < 0.5$ ) y disminuye para valores altos. Se aprecia además una correlación muy fiel entre el modelo de Elementos Finitos y al modelo analítico. En cambio, para el caso c) de capacidad radial de la Figura 3.14 se aprecian considerables diferencias. Se han extraído de nuevo soluciones para el tamaño mayor del rodamiento de la tabla 4.1 y se muestran en la Figura 4.5. Mientras que el modelo analítico predice un incremento de la capacidad para bajos niveles de precarga, el modelo de Elementos Finitos obtiene unos resultados con tendencia de capacidad decreciente. Queda patente por tanto el efecto de la flexibilidad de los anillos ya que si en el modelo de Elementos Finitos se multiplica el módulo elástico de los anillos por 100 (dando a entender que los anillos son rígidos), los resultados obtenidos son los que se muestran en el caso c) de la Figura 3.14 como "FE\_RIGID RINGS".

A modo de resumen, se pueden extraer tres conclusiones de los resultados obtenidos. La primera es que el modelo analítico estima en la mayor parte de los casos con considerable precisión la capacidad de carga del rodamiento. Una segunda conclusión es que la capacidad estática no varía significativamente cuando los valores de precarga se sitúan entre  $p = 0.0$  y  $p = 0.2$  (como se ha mencionado, éste tipo de rodamientos tienen su forma de trabajo habitual en el rango de 7-10% de precarga  $0.07 \leq p \leq 0.1$ ). Y finalmente una

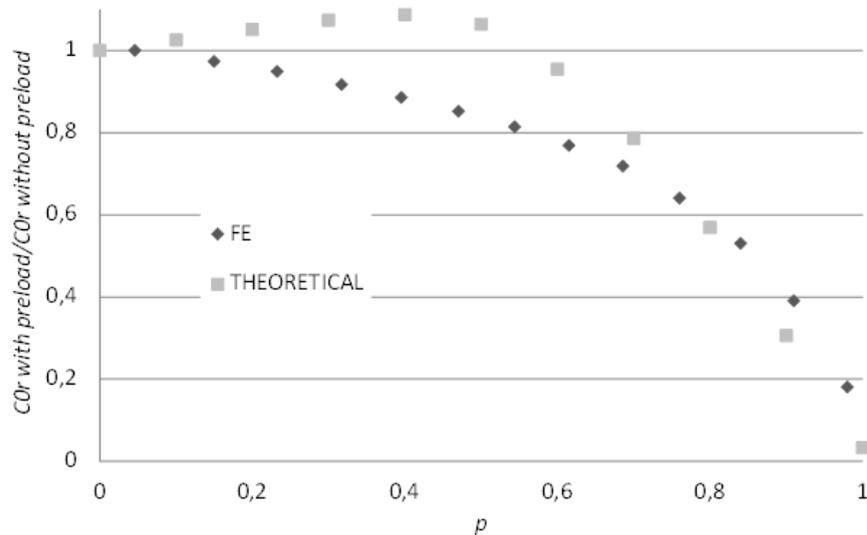


Figura 4.5: Capacidad de carga radial para diferentes precargas para el rodamiento grande. Comparativa modelo analítico y modelo de Elementos Finitos [Aguirrebeitia et al., 2013]

tercera conclusión es que la capacidad global del rodamiento (axial, radial y de momento) permanece prácticamente constante para valores de precarga entre  $p = 0,0$  y  $p = 0,5$ , a partir de la cual desciende progresivamente hasta cero.

El modelo analítico no sólo estima valores puros de capacidad axial, radial y precarga, sino la capacidad de carga estática para una combinación generalizada de esfuerzos, aplicados tal y como se mostró en las superficies de aceptación del Capítulo 3.

Dado que la rigidez del rodamiento es un factor muy influyente en la capacidad de carga del rodamiento, se va a proceder a realizar un análisis de cómo afecta la precarga en la rigidez global del mismo.

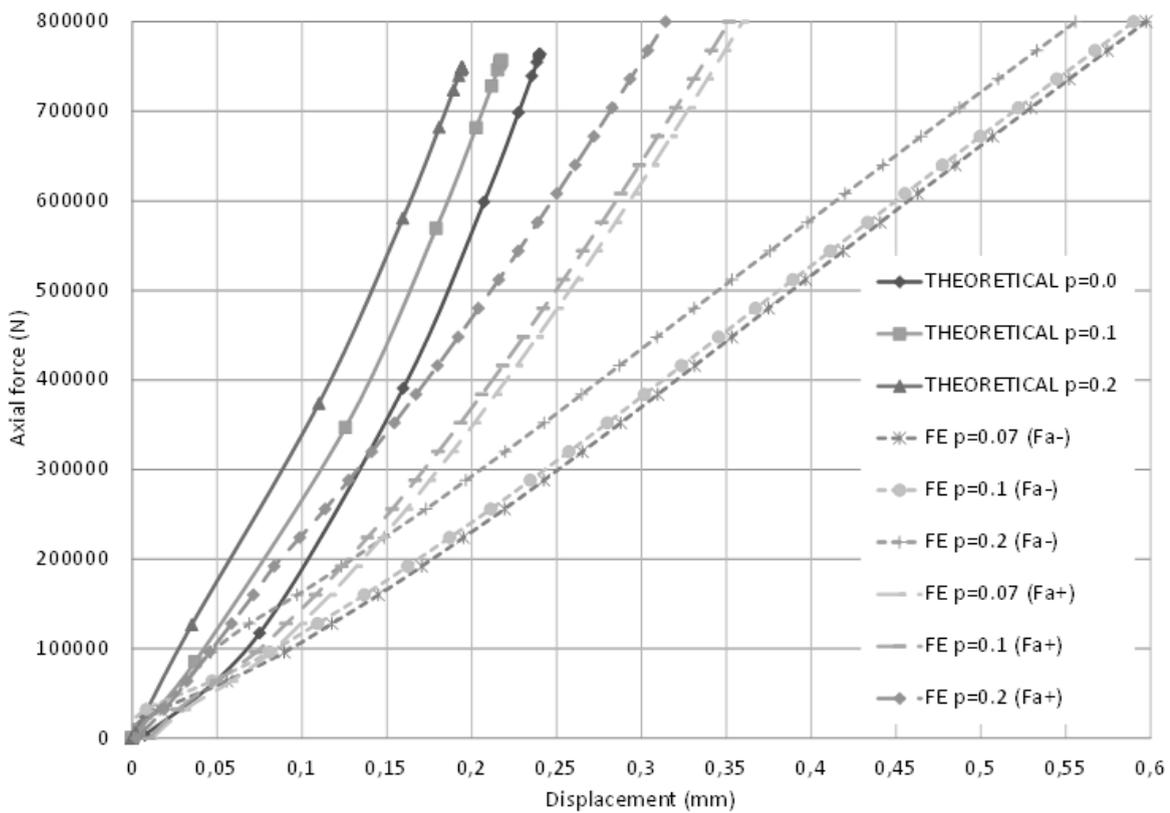
#### 4.1.2. Influencia de la precarga en la rigidez del rodamiento

Tal y como en un principio se pueda pensar, la rigidez del rodamiento aumenta a medida que se impone una mayor precarga. Las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8 muestran respectivamente las curvas esfuerzo externo aplicado frente a desplazamiento del punto donde se aplica dicho esfuerzo, para los casos axial, radial y de momento de vuelco a los niveles de

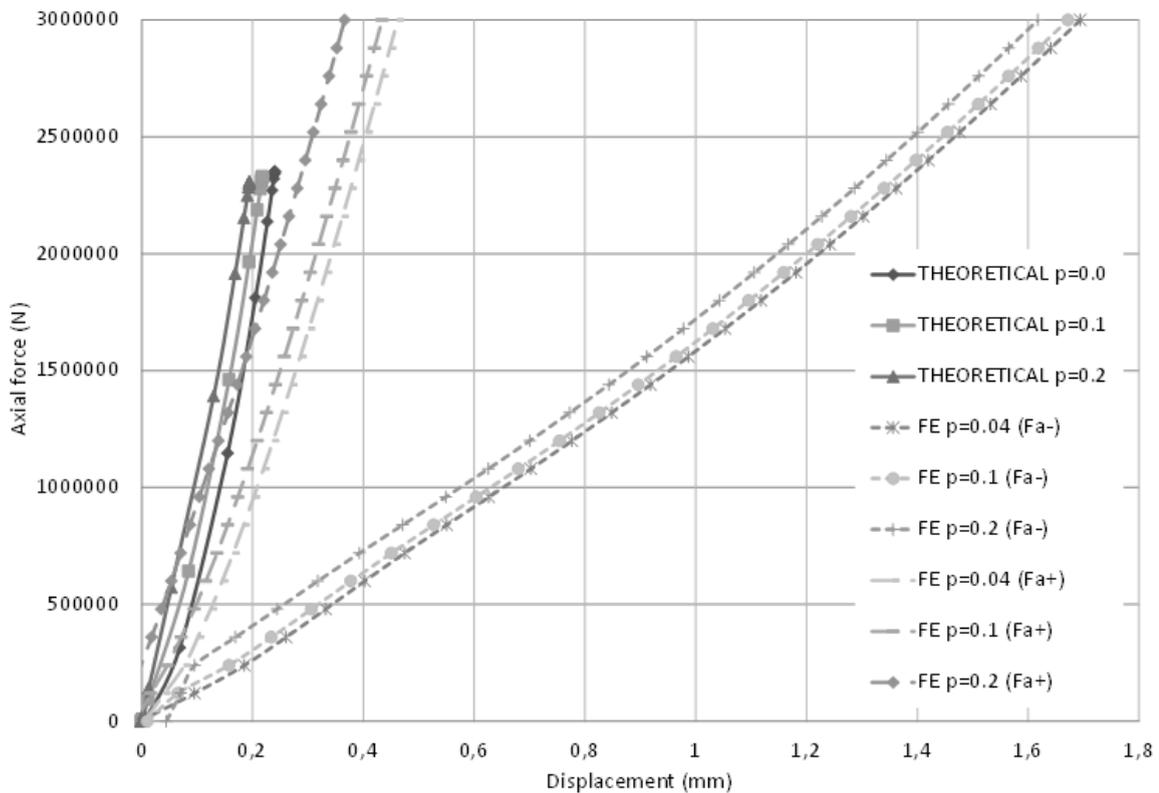
precarga  $p = 0.0$ ,  $p = 0.1$  y  $p = 0.2$ . La tendencia es la misma tanto para el modelo analítico como para el modelo de Elementos Finitos, no obstante se puede observar un desplazamiento considerablemente mayor en los resultados obtenidos mediante Elementos Finitos. Dado que el modelo analítico asume anillos rígidos, el desplazamiento que reporta este modelo proviene únicamente de la deformación del contacto bola-pista. Por otro lado, en el modelo de Elementos Finitos, existe además deformación debida a los anillos flexibles y la configuración de las condiciones de contorno presentan una importante influencia. Como muestra se puede ver en la Figura 4.9 la sección transversal deformada para el rodamiento de tamaño grande al que se le ha aplicado una fuerza axial  $F_A = -3000$  kN (un poco mayor que su propia capacidad). Se aprecia que la deformación de los anillos mediante los que está modelizada la bola es una pequeña fracción del desplazamiento vertical total del anillo libre. Es importante señalar que el aumento de las restricciones en el modelo de Elementos Finitos llevará a un desplazamiento menor. En este sentido, si se aumenta el módulo elástico 100 veces (como idea de anillos infinitamente rígidos) los resultados se acercan enormemente a las predicciones del modelo analítico (ver Figura 4.7 a)).

Se apreciará en las Figuras 4.6 a 4.8 que no aparece el valor de precarga  $p = 0.0$  en los resultados obtenidos mediante el modelo de Elementos Finitos. En su lugar se muestran los valores para  $p = 0.07$  en los rodamientos de pequeño tamaño y  $p = 0.04$  en los de gran diámetro. Tal y como ha sido explicado previamente, la pretensión de los tornillos origina una precarga inicial no nula. Y este es precisamente el caso, donde una pretensión del 70% de la tensión de fluencia en los tornillos de la unión atornillada generan estos dos niveles de precarga  $p = 0.07$  y  $p = 0.04$  para los rodamientos de pequeño y gran tamaño respectivamente.

Los resultados del modelo de Elementos Finitos muestran que la capacidad de un rodamiento de cuatro puntos de contacto permanece constante (incrementándose levemente en algunos puntos) para precargas entre el 0% y el 50% tomadas como la relación entre la deflexión de la bola más cargada y la máxima deflexión admisible. Con una gran ventaja en lo que a coste computacional se refiere, el modelo analítico muestra ese mismo

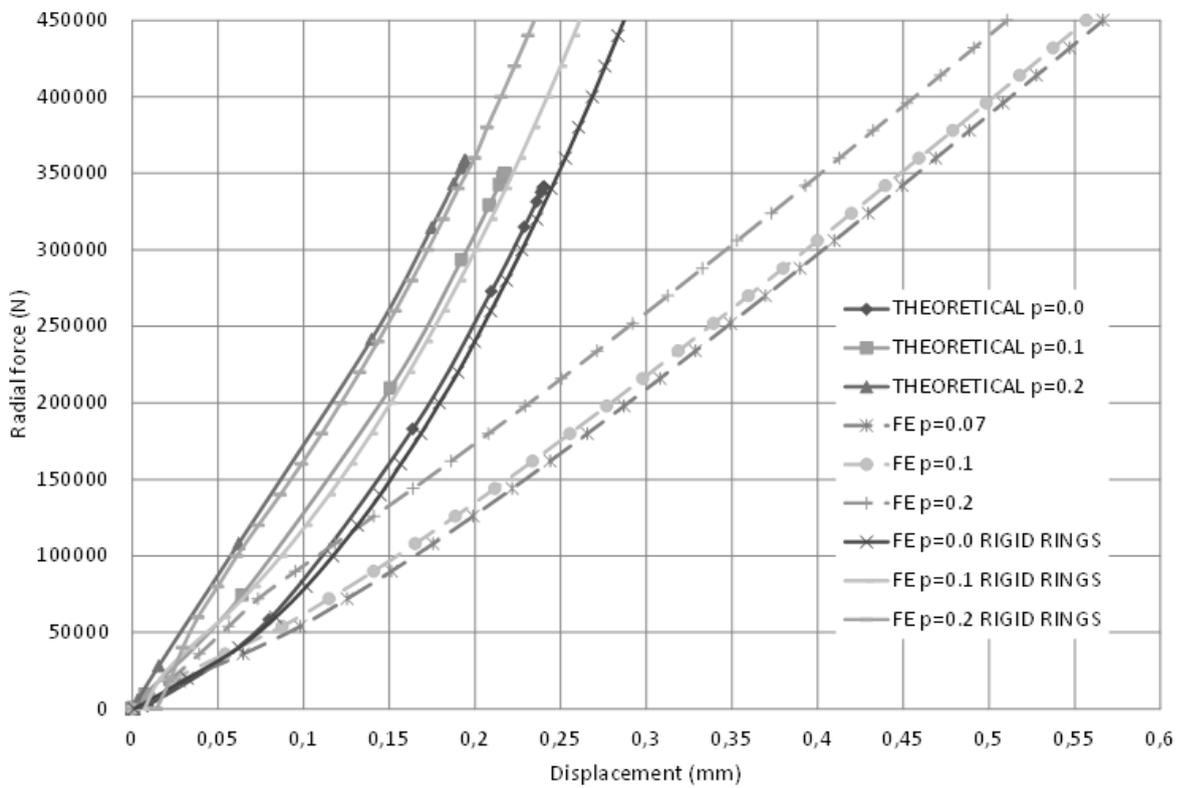


a) Rodamiento de pequeño tamaño

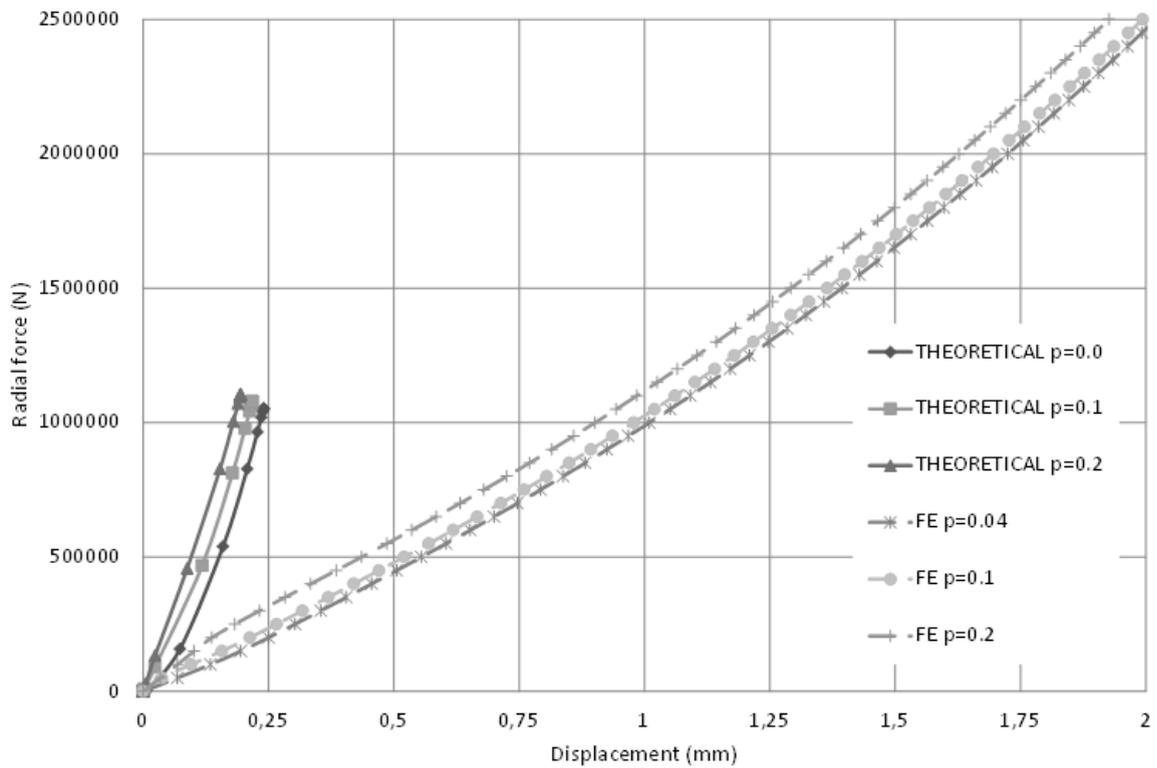


b) Rodamiento de gran tamaño

Figura 4.6: Desplazamiento axial para diferentes niveles de fuerza axial a tres grados de precargas [Aguirrebeitia et al., 2013]

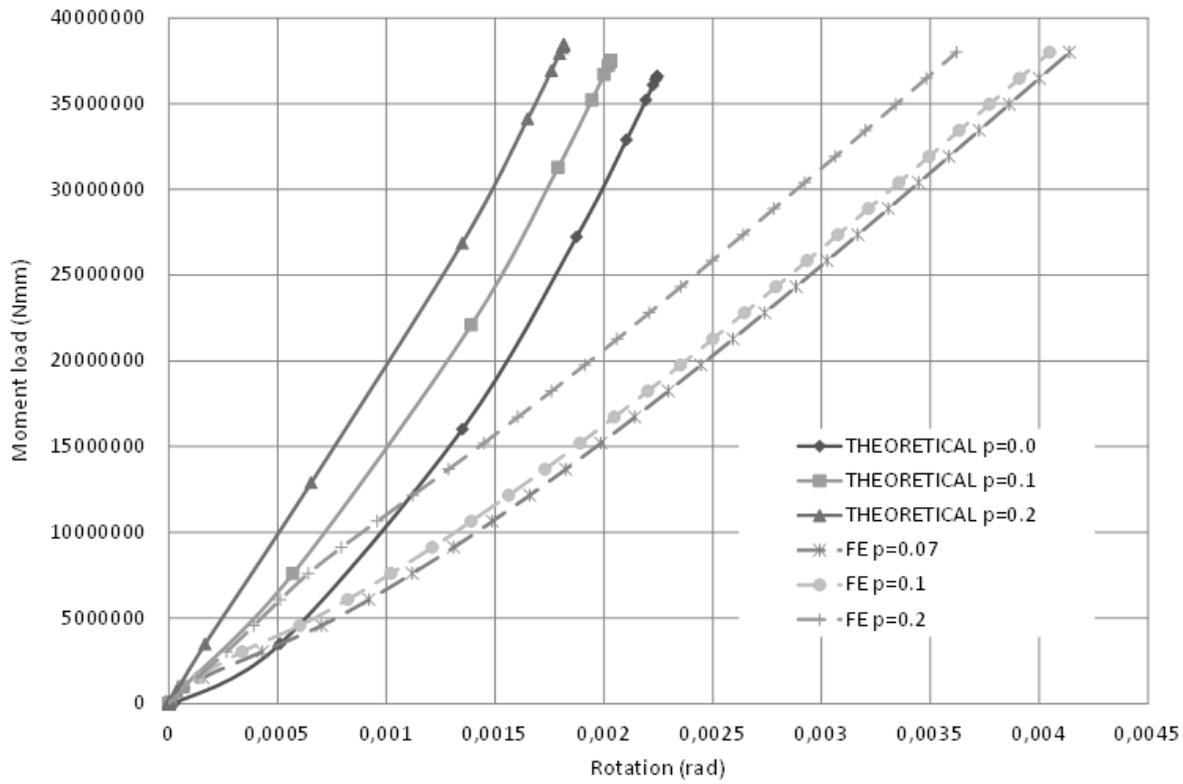


a) Rodamiento de pequeño tamaño

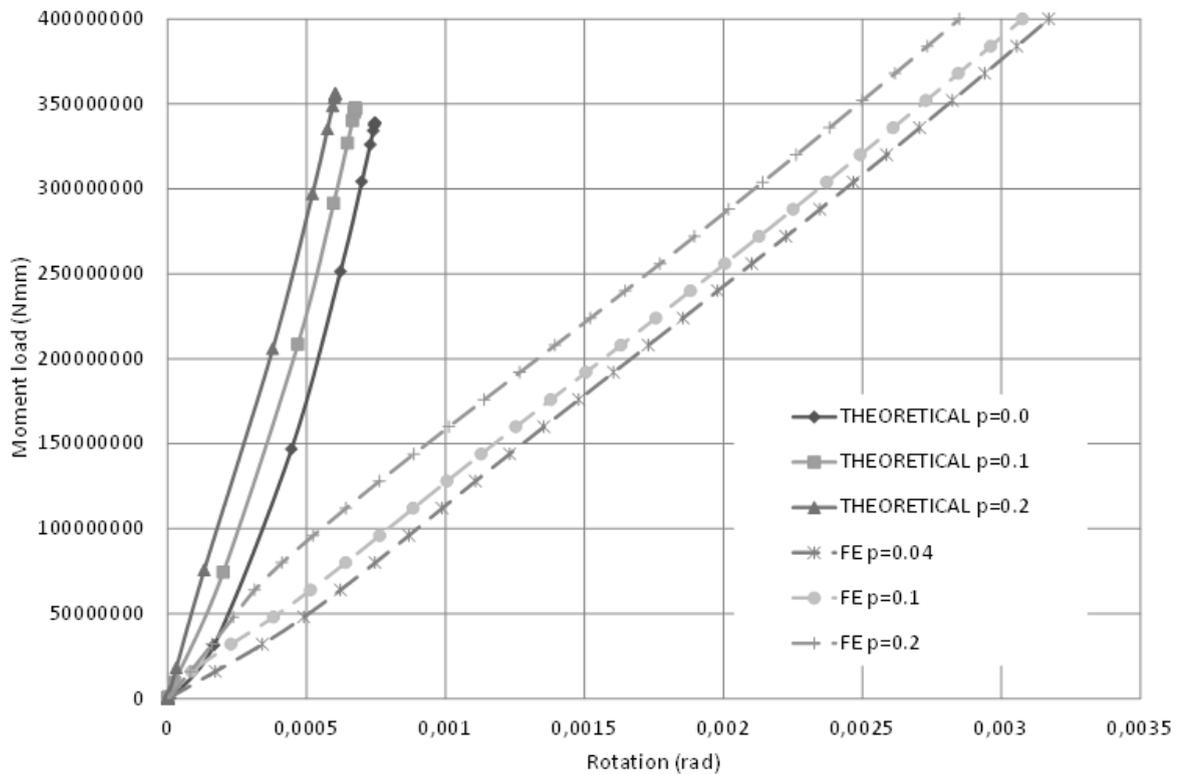


b) Rodamiento de gran tamaño

Figura 4.7: Desplazamiento radial para diferentes niveles de fuerza radial a tres grados de precargas [Aguirrebeitia et al., 2013]



a) Rodamiento de pequeño tamaño



b) Rodamiento de gran tamaño

Figura 4.8: Desplazamiento angular para diferentes niveles de momento de vuelco a tres grados de precargas [Aguirrebeitia et al., 2013]

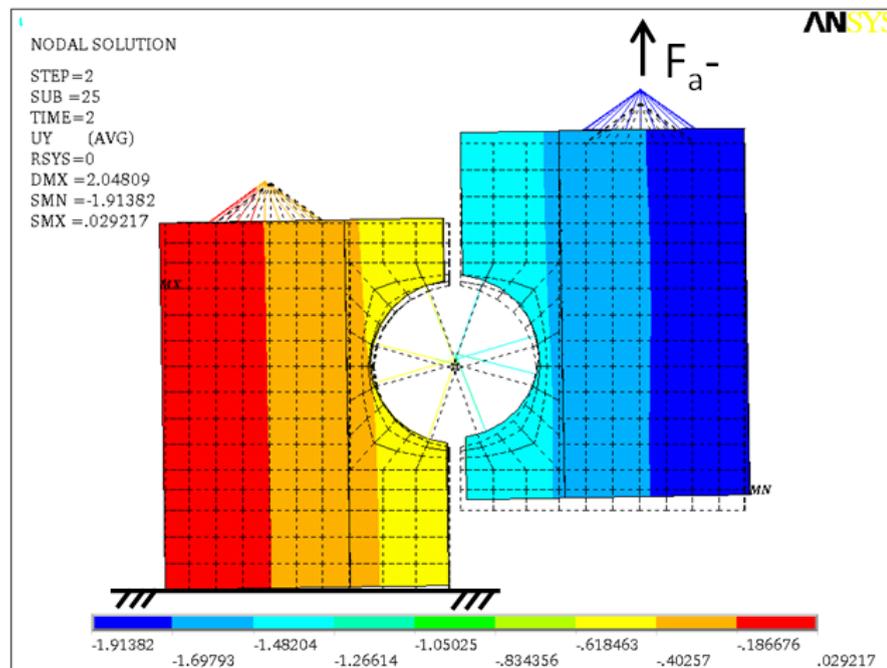


Figura 4.9: Capacidad de carga radial para diferentes precargas. Comparativa modelo analítico y modelo de Elementos Finitos [Aguirrebeitia et al., 2013]

comportamiento a pesar de que para determinadas combinaciones de esfuerzos, como por ejemplo para un esfuerzo radial puro, el modelo analítico sobrestima la capacidad de carga obtenida mediante el modelo de Elementos Finitos. La razón de esta desviación proviene de la consideración de anillos rígidos por parte del modelo analítico, con lo que los resultados del modelo de Elementos Finitos se acercan más a lo que realmente sucede en el rodamiento. Se insiste en el hecho de que tanto con el modelo de Elementos Finitos como con el modelo analítico, ambos incluyendo la precarga, no sólo es posible calcular las capacidades de carga del rodamiento para esfuerzos axiales, radiales y de momento de vuelco puros, sino que también es posible obtener la capacidad del rodamiento para una combinación cualquiera de esfuerzos obteniendo por tanto la superficie de aceptación como en anteriores modelos pero contemplando además el efecto de la precarga de las bolas.

Teniendo en cuenta que los valores típicos de precarga en rodamientos de vuelco para una gran parte de aplicaciones se mueven en el rango del 7 al 10% de la máxima deflexión admisible, se puede concluir que la precarga no tiene una influencia significativa

en la capacidad de carga del rodamiento. En cambio, desde el punto de vista de la rigidez del rodamiento se aprecia tanto mediante el modelo analítico como mediante el modelo de Elementos Finitos, que la rigidez del rodamiento es apreciablemente mayor a medida que se aumenta el nivel de precarga. Como es de esperar, el desplazamiento que predice el modelo analítico es menor al considerar únicamente la deformación del contacto bola pista y no de los anillos. Es decir, se hace patente la importancia de la rigidez de los anillos y teniendo en cuenta que el modelo de Elementos Finitos se ha realizado considerando como rígidas las estructuras adyacentes fijando completamente el anillo interior como condición de contorno impuesta al rodamiento; se ve la necesidad de simular adecuadamente las estructuras de soporte del rodamiento. Ésto presenta una complejidad y coste computacional que hacen que la simulación del conjunto rodamiento más estructuras adyacentes sea algo que se realice en muy contadas ocasiones ya que industrialmente no resulta rentable diseñar iterativamente mediante el uso de estos modelos completos.

Como respuesta a la necesidad de simular adecuadamente las estructuras del soporte con un coste computacional y complejidad comedidos, se ha desarrollado en esta Tesis Doctoral un modelo basado en Superelementos. Éste es el modelo más fiable para calcular la rigidez y también para la capacidad estática y el reparto de cargas, puesto que pueden tenerse en cuenta aspectos que antes no se consideraban como refuerzos en los soportes, zonas con menor material o discontinuidades como los agujeros de llenado de bolas, ... En la siguiente Sección 4.2 se describe la metodología desarrollada para la elaboración de un modelo de Superelementos que permita resolver esta problemática.

## 4.2. Modelo de Elementos Finitos mediante la técnica de super-elementos

Desafortunadamente, el efecto de la flexibilidad de los anillos y de las estructuras unidas a los mismos es complicado de implementar en un modelo analítico; además de la geometría de los anillos y de las estructuras adyacentes, el diámetro y número de tornillos

que unen los anillos a las estructuras e incluso la localización de las bolas respecto al ángulo azimutal (ver Figura 2.21) juegan un papel importante. Todos estos factores son difíciles de implementar en un modelo analítico. Por tanto, a pesar de que un modelo analítico pueda dar buenos resultados en las primeras fases de diseño y cálculo, si se buscan soluciones de mayor precisión es necesario acudir a modelos de Elementos Finitos complejos como el mencionado en la sección 4.1. Es por ello que a la hora de obtener resultados detallados que determinen el diseño final de los mecanismos de orientación, los fabricantes realicen costosos análisis mediante Elementos Finitos que tengan representadas partes de las estructuras unidas al rodamiento con el fin de analizar rigurosamente no sólo la distribución de cargas en el rodamiento sino también las deformaciones en el conjunto del sistema de orientación del que forma parte el rodamiento. Este elevado número de grados de libertad necesario para representar el conjunto y el comportamiento no lineal del mismo, originan un coste computacional enorme. Con el objetivo de reducir este coste computacional se presenta una metodología alternativa de modelización por Elementos Finitos haciendo uso de la técnica de Superelementos [Qu, 2004].

A continuación se va a resumir brevemente en qué consiste la técnica de Superelementos y posteriormente se describirá la metodología seguida para desarrollar un modelo de Elementos Finitos mediante esta técnica de Superelementos en un sistema de orientación completo, apoyándose en una aplicación concreta como es la del sistema de orientación de pala de un aerogenerador.

### 4.2.1. Fundamentos de la técnica de Superelementos

La técnica de superelementos consiste en condensar un grupo de elementos finitos en un único elemento al que se le denomina Superelemento (ver Zu-Qing Qu [Qu, 2004]), aunque también nos podemos encontrar en la bibliografía las siguientes denominaciones: macroelemento, subestructura, subdominio y macromodelo. La Figura 4.10 muestra un clásico ejemplo donde los elementos del ala de un avión (Figura 4.10 izquierda) han sido

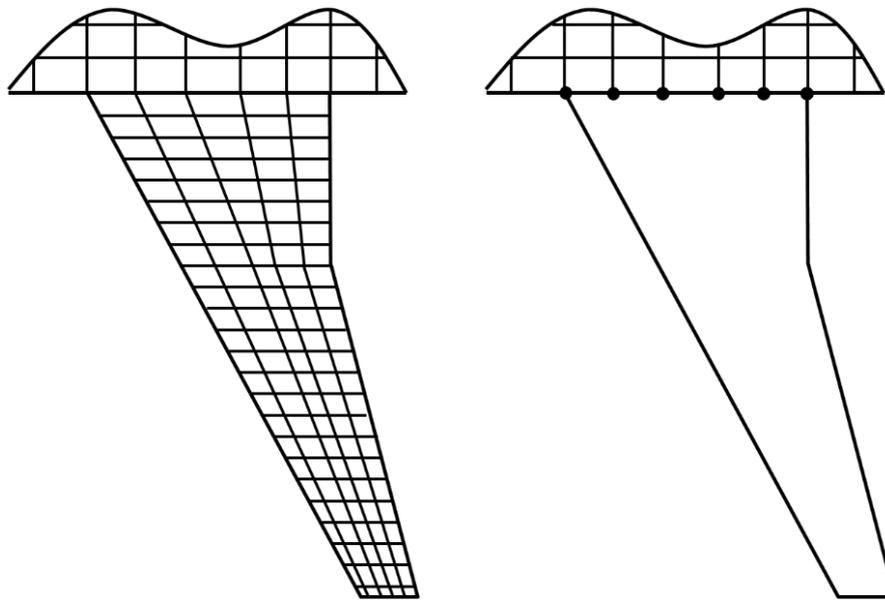


Figura 4.10: Izquierda, modelo de Elementos Finitos de un ala de avión original; derecha modelo de Elementos Finitos de ese ala mediante Super elemento [Plaza et al., 2015]

sustituidos por un super elemento (Figura 4.10 derecha). Los nodos de este super elemento se conocen como nodos principales (*master nodes*), y son los nodos que conectan este super elemento con el resto del modelo y donde se aplican tanto las cargas externas como las condiciones de contorno. En realidad, este super elemento puede tener una forma final, tamaño y propiedades de material arbitrarios, siempre y cuando cumpla una serie de condiciones físicas y matemáticas. Físicamente, el grupo de Elementos Finitos que constituyan inicialmente el super elemento deben formar un componente estructural en sí mismo; y matemáticamente, estos elementos ensamblados deben tener suficiencia de rango (la matriz de rigidez de los elementos no debe poseer ningún modo cinemático de cero energía más que los propios de sólido rígido).

La técnica de modelizado mediante super elementos se ha utilizado frecuentemente en modelos de Elementos Finitos para sistemas estructurales complejos. De esta manera, el tamaño del modelo de Elementos Finitos puede reducirse para convertirse en un modelo más manejable desde el punto de vista computacional. Tomando como punto de partida la matriz de rigidez del modelo original, el número total de grados de libertad se divide entre los nodos principales del super elemento  $m$  y el resto de nodos  $n$  (también

denominados nodos esclavos). Los nodos principales deben incluir todos los grados de libertad de la interfaz de las otras subestructuras a las que se unen y todos los grados de libertad en aquellos nodos donde se apliquen los esfuerzos. La matriz de rigidez del superelemento  $[K_{se}]$  se calcula de la siguiente manera:

$$[K_{se}] = [K_{mm}] - [K_{mn}][K_{nn}]^{-1}[K_{nm}] \quad (4.1)$$

donde la matriz de rigidez del modelo original  $[K]$  es:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{mn}] \\ [K_{nm}] & [K_{nn}] \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

De la expresión 4.1, es necesario calcular la matriz inversa  $[K_{nn}]^{-1}$  para obtener la matriz de rigidez del superelemento  $[K_{se}]$ . Debido a que en general la matriz  $[K_{nn}]$  será de dimensión elevada, esta operación puede conllevar un coste computacional alto. De todas maneras, una vez calculada  $[K_{se}]$ , dado que su tamaño es mucho menor que el tamaño de la matriz de rigidez del modelo original  $[K]$ , el coste computacional del análisis del modelo será mucho menor.

El coste de un análisis haciendo uso de superelementos (sin tener en cuenta el coste de calcular  $[K_{nn}]^{-1}$ ) no siempre es menor. Esto es debido a que la matriz de rigidez del superelemento es tratada de forma habitual como densa. Esto puede tener un impacto significativo en el coste computacional ya que, como es sabido, el coste no sólo depende de la dimensión de la matriz sino también del grado de dispersión de la misma y de su topología (ver Komzsik [Komzsik, 2009]). Para ilustrar esto se analizará el ejemplo mostrado en la Figura 4.11.

Por un lado, el modelo  $a_1$  es un cubo modelizado mediante  $50 \times 50 \times 50$  nodos es decir, 125.000 nodos y 375.000 grados de libertad el cual tiene su cara inferior empotrada y se le ha aplicado un desplazamiento en su cara superior; este análisis ha llevado 80.2s. El modelo  $b_1$  en cambio, tiene una forma de anillo y ha sido modelizado con el mismo

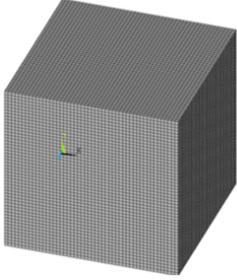
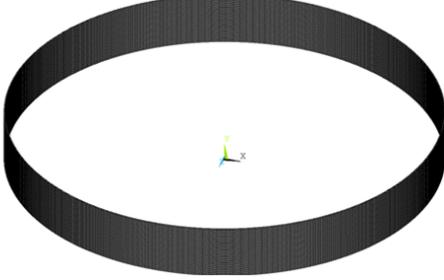
	
Modelo $a_1$ (sin superelemento): 375.000 GDL, 80.2 segundos	Modelo $b_1$ (sin superelemento): 375.000 GDL, 9.7 segundos
Modelo $a_2$ (superelemento): 15.000 GDL, 26 segundos	Modelo $b_2$ (superelemento): 15.000 GDL, 27.9 segundos

Figura 4.11: Ejemplo para comparar el coste computacional de dos modelos de Elementos Finitos completos frente a la modelización por superelementos [Plaza et al., 2015]

número de grados de libertad, es decir, 375.000. En este modelo  $b_1$  el análisis (mismas condiciones de contorno con su base empotrada y un desplazamiento impuesto en la cara superior) finalizó en 9.7 s. Esta diferencia de coste computacional es debida a que, a pesar de ser las matrices de la misma dimensión, el modelo  $a_1$  posee una matriz más diseminada que el  $b_1$  (la Figura 4.12 muestra respectivamente los elementos no nulos de la matriz de rigidez de los modelos  $a_1$  y  $b_1$  antes de ser reordenados).

Por otro lado los modelos  $a_2$  y  $b_2$  son los superelementos que se corresponden con los modelos  $a_1$  y  $b_1$ , ambos con  $50 \times 50 \times 2$  nodos *master* (los nodos en la cara superior e inferior), es decir, 5.000 nodos y 15.000 grados de libertad. Las matrices de rigidez de ambos modelos son almacenadas como densas. Llevando a cabo el mismo análisis que para los modelos  $a_1$  y  $b_1$  (la cara inferior empotrada y un desplazamiento impuesto en la cara superior), el coste es de 26 s para el modelo  $a_2$  y de 27.9 s para el modelo  $b_2$ . El coste de ambos modelos es similar dado que ambas matrices de rigidez tienen la misma dimensión y el mismo número de elementos no nulos. Por tanto, mientras que el superelemento  $a_2$  presenta un ahorro computacional respecto al  $a_1$ , el superelemento  $b_2$  no si se le compara con su original  $b_1$ . La causa de este hecho es que la matriz  $b_1$  es tan dispersa que incluso siendo la matriz del modelo  $b_2$  menor, el tiempo necesario para resolver el equilibrio estático mediante la ecuación matricial es mayor.

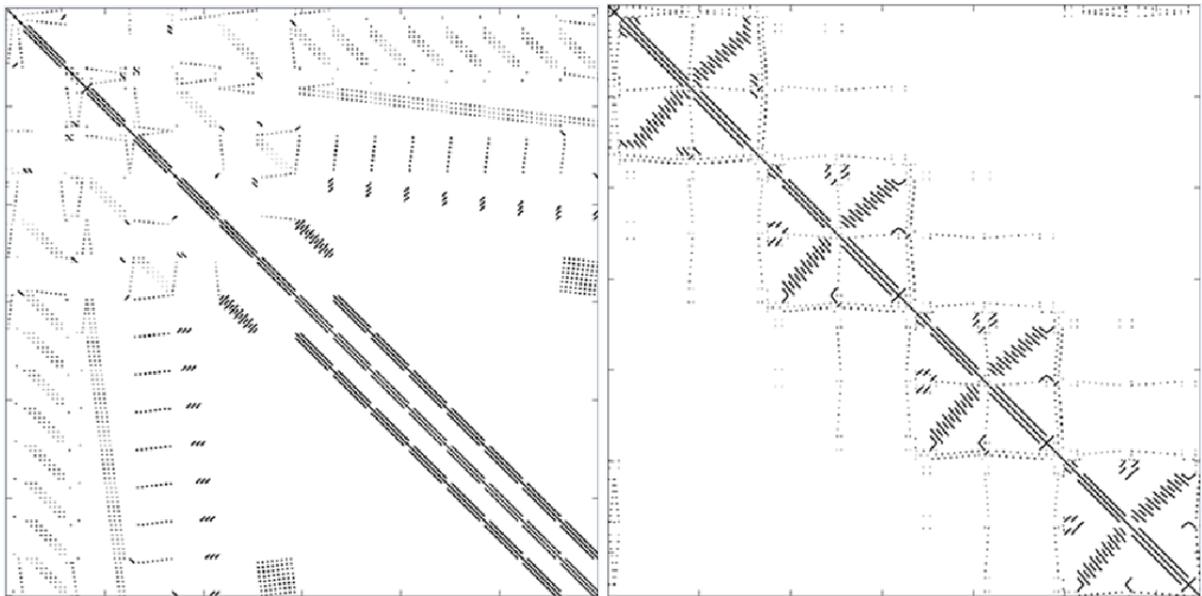
a) Matriz de rigidez del modelo  $a_1$  de la Figura 4.11b) Matriz de rigidez del modelo  $b_1$  de la Figura 4.11

Figura 4.12: Elementos no nulos en la matriz de rigidez de los modelos de la Figura 4.11 [Plaza et al., 2015]

Una vez descrita la metodología de superelementos, ésta va a ser empleada en una aplicación concreta de un mecanismo de orientación de pala de aerogenerador, analizando las diferentes alternativas existentes a la hora de modelizar mediante esta técnica.

#### 4.2.2. Modelo de Elementos Finitos de un aerogenerador usando la técnica de Superelementos

No se debe perder de vista el carácter general del método que se va a presentar en esta sección a pesar de aplicarse a un sistema en concreto (el de orientación de pala de aerogenerador), que ha sido tomado a modo de aplicación práctica por ser un ejemplo en el que las rigideces de las diferentes estructuras que lo forman afectan de manera notable al estar constituido el mismo por elementos relativamente esbeltos o tipo cáscara como son las palas o el buje del aerogenerador respectivamente. Como se ha mencionado, para la obtención de resultados precisos de deformación y de distribución de cargas en el conjunto de un sistema de orientación sólo se puede obtener haciendo uso de modelos de Elementos Finitos complejos en los que se incluyan todos los componentes que forman

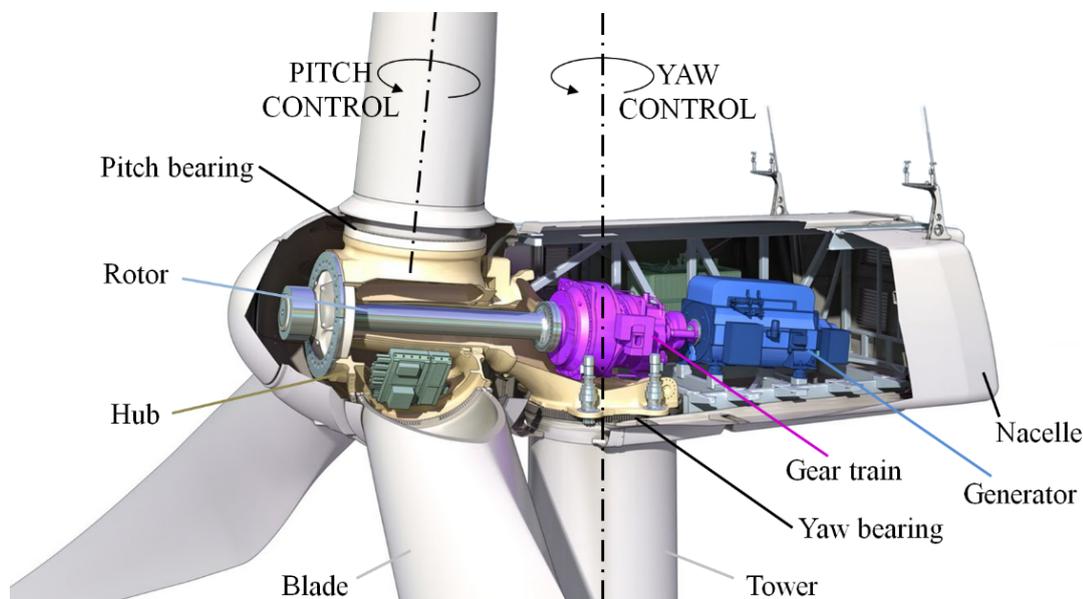


Figura 4.13: Componentes de un aerogenerador, sistema de orientación de pala (*pitch*) y de góndola (*yaw*) del aerogenerador ECO80 de ALSTOM

parte del mismo. Tomando como ejemplo para desarrollar la metodología de modelización mediante Super elementos un sistema de orientación de pala en un aerogenerador como el de la Figura 4.13, para poder simular adecuadamente la deformación y distribución de cargas en el mismo el modelo debe incluir al menos parte de la pala, el rodamiento y el buje [Chen and Wen, 2012].

Bajo este principio se ha generado el modelo de Elementos Finitos que se muestra en la Figura 4.14 y que se corresponde con un aerogenerador de 1.67 MW de capacidad de generación de potencia, el cual ha sido modelizado mediante elementos hexaedro lineales y elementos tetraedro de segundo orden. En la Figura 4.15 se muestra una sección de detalle de este modelo. Solamente ha sido modelizado un tercio del buje ya que se pueden establecer dos planos de simetría debido a la regularidad de esta estructura, y una longitud de 2.5 m de la pala. La modelización de tan sólo 2.5 m de longitud en la pala viene por dos aspectos: primeramente para evitar efectos locales de aplicación de la carga se ha comprobado que esta longitud es suficiente para establecer el punto de aplicación de los esfuerzos a esa distancia; y un segundo aspecto está relacionado con la forma en la que se construye la pala, dado que la estructura de la misma presenta en

su base un tramo de acero de esta longitud, que sirve de soporte para la capa externa de fibra y por tanto se considera representativo de la rigidez de la pala representar únicamente ese tramo de acero de mucha mayor rigidez que la fibra. El anillo interior del rodamiento está unido mediante tornillos a la pala y el anillo exterior al buje. Los tornillos han sido modelizado mediante elementos unidimensionales precargados al 70% de su tensión de fluencia. Se ha definido un contacto que no permita el deslizamiento (*rough contact*) entre las superficies de contacto entre el anillo interior y la pala, y entre las superficies de contacto entre el anillo exterior y el buje. El contacto entre bola y pista se ha modelizado basándose en la propuesta de Daidie [Daidié et al., 2008] mediante muelles no lineales que trabajan exclusivamente a tracción y cuya rigidez simula la de las bolas tal y como se hizo en la sección 4.1 y se puede ver en la Figura 2.39; la elipse de contacto se ha modelizado mediante una serie de elementos placa rígidos formando un rectángulo en el que la elipse queda inscrita; y finalmente para unir los muelles con los elementos placa rígidos se han utilizado elementos viga rígidos. Como se indicó al detallar esta modelización, esta configuración permite representar el cambio en el ángulo de contacto y la posible precarga de las bolas (ver Figuras 4.1 y 4.2), de manera que la distribución de carga en las bolas y la rigidez en el contacto bola-pista están adecuadamente estimadas. Tal y como se apuntó en la sección 4.1 este modelo no analiza en detalle el contacto (distribución de presiones, tensiones tangenciales, zonas de adhesión y deslizamiento) y consecuentemente no puede ser utilizado para analizar otros parámetros de diseño importantes como el par de rotación necesario para hacer girar el mecanismo. De todas manera, para los objetivos que se persiguen en la presente sección, se estima que este modelo responde adecuadamente a la hora de analizar la distribución de carga y flexibilidad del sistema de orientación.

En lo que respecta a las condiciones de contorno del conjunto que se muestran en la Figura 4.14, la cara que conecta el buje con la góndola ha sido empotrada y los movimientos han sido restringidos en sus planos de simetría. Desde el punto de vista de las hipótesis de simetría y regularidad consideradas, el buje no es una estructura completamente simétrica, las fuerzas actuantes sobre las tres palas no son las mismas y

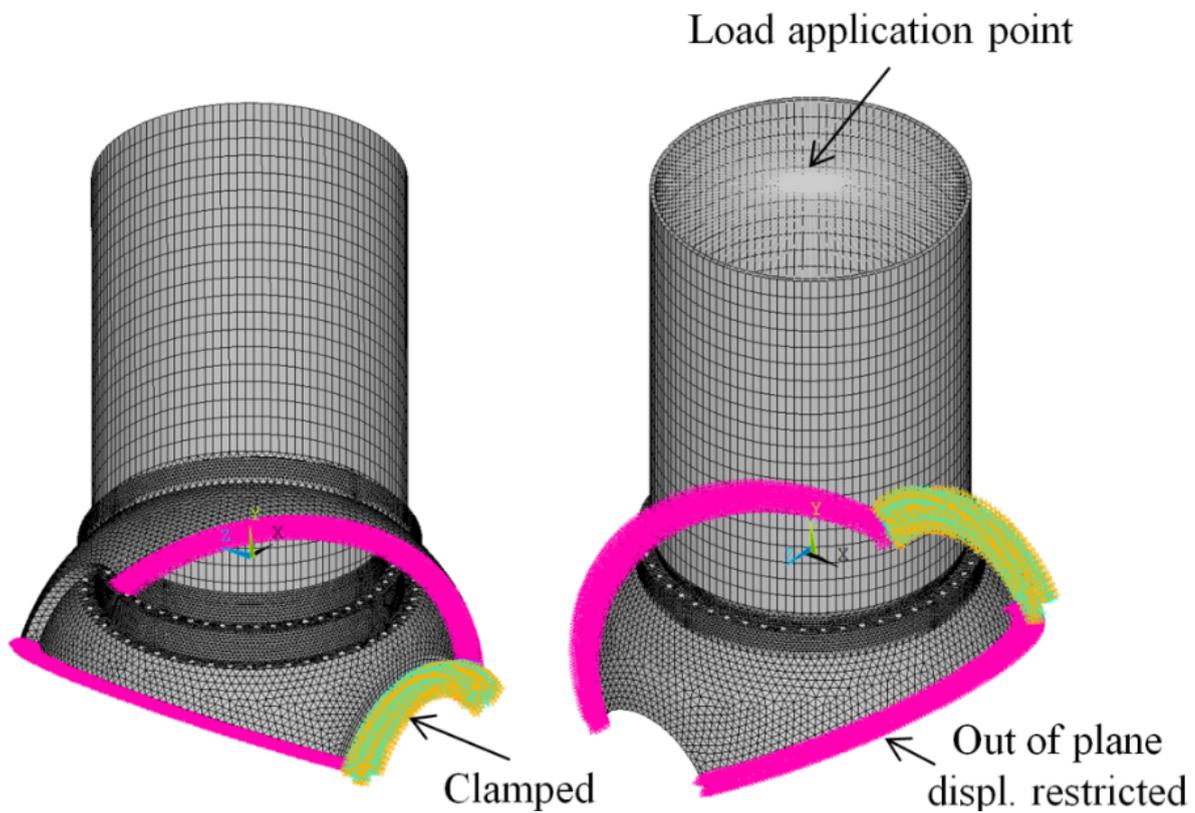


Figura 4.14: Modelo de Elementos Finitos de conjunto pala-rodamiento-buje [Plaza et al., 2015]

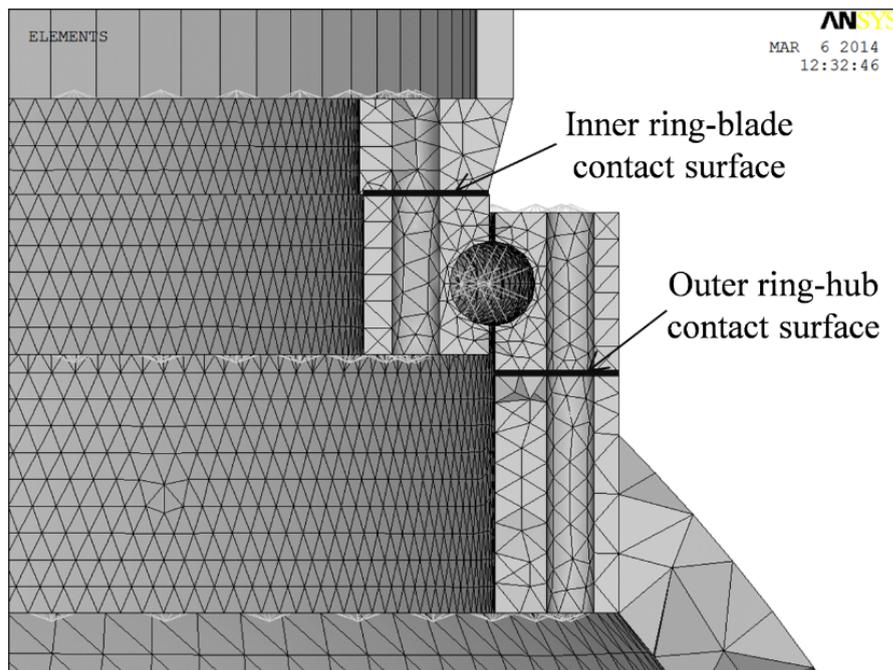


Figura 4.15: Sección de detalle del modelo de Elementos Finitos de la Figura 4.14, extraída de [Plaza et al., 2015]

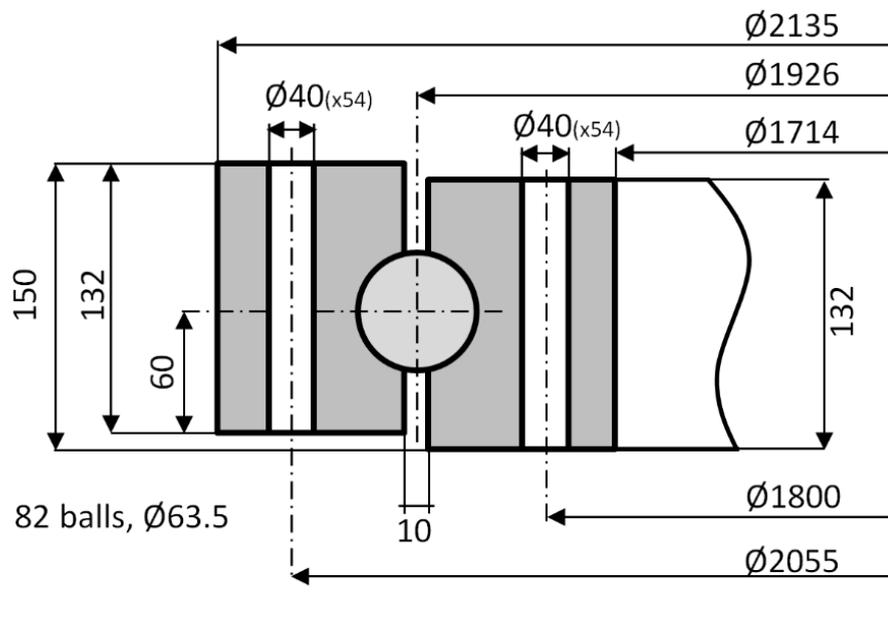


Figura 4.16: Parámetros geométricos del rodamiento de vuelco de cuatro puntos de contacto en el modelo 4.14 [Plaza et al., 2015]

el rodamiento tiene discontinuidades como por ejemplo los agujeros de llenado de bolas. A pesar de ser estas simplificaciones una fuente de error tal y como se indica en Kania [Kania and Krynke, 2013] y en Potočník [Potočník et al., 2013], la validez y naturaleza generalista de este modelo no queda comprometida y es completamente aplicable para el objetivo que se persigue en esta sección de generar un modelo de Elementos Finitos mediante superelementos para conseguir un ahorro computacional óptimo. Y finalmente, en lo relativo a los esfuerzos actuantes (axial, radial y momento de vuelco) se han aplicado en un nodo central de la cara libre del tramo de pala modelizado, el cual se ha unido mediante una restricción multipunto (*Multi-Point Constraint*) con los nodos de la cara superior de la pala. Los parámetros geométricos del rodamiento que forma parte del modelo se muestran en la Figura 4.16.

Como ha sido apuntado previamente, el gran número de grados de libertad y su comportamiento no lineal debido a los contactos y a la interacción bola-pista en el modelo, hace que el cálculo del modelo representado en la Figura 4.14 tenga un coste computacional muy elevado. Partiendo de este modelo completo se procederá a la realización de diferentes alternativas haciendo uso de la técnica de superelementos, y se desarrollará

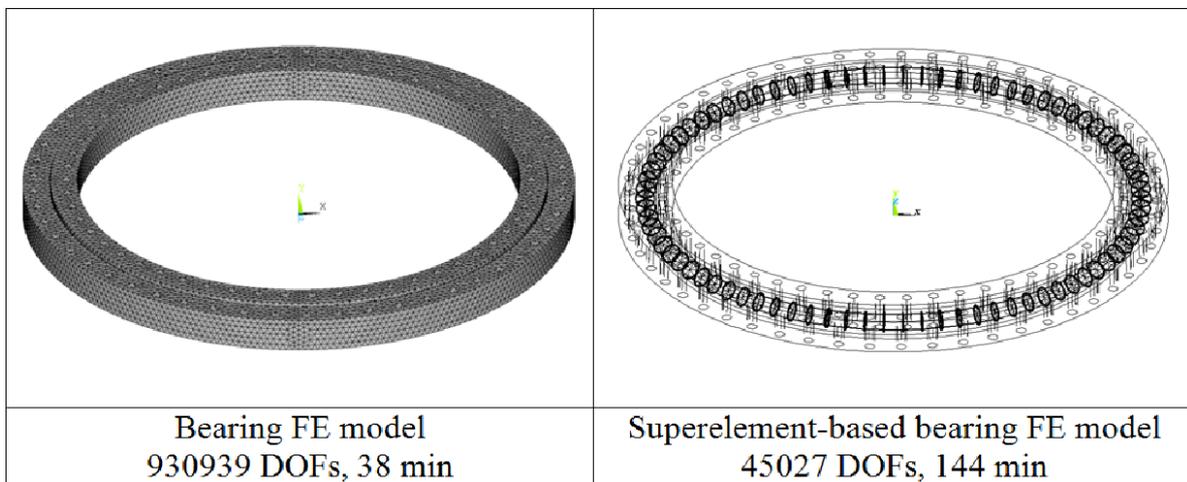
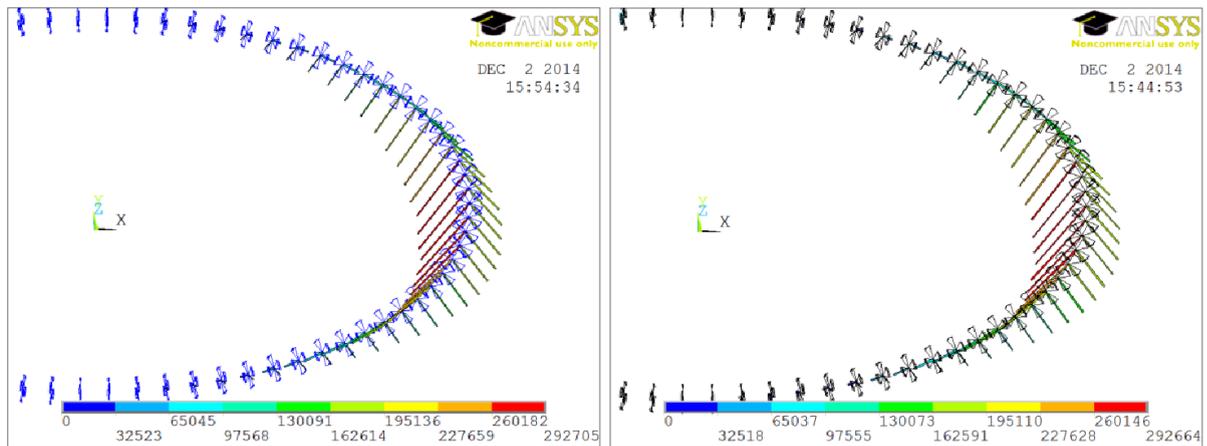


Figura 4.17: Modelo de Elementos Finitos del rodamiento de la Figura 4.16: izquierda modelo completo; derecha modelo con superelementos [Plaza et al., 2015]

finalmente un modelo que se considera óptimo para esta aplicación que se ha desarrollado a modo de ejemplo pero igualmente válida para otras aplicaciones de similar naturaleza. Una primera alternativa para reducir el coste computacional es modelizar los anillos interior y exterior del rodamiento como superelementos, excluyendo el modelo bola-pista de la Figura 2.39. Los nodos *master* de los superelementos serán los nodos que conectan los anillos con el modelo de contacto bola-pista, es decir los nodos de los elementos placa rígidos en la Figura 2.39; adicionalmente, los nodos de la cara inferior del anillo exterior (los nodos de la intercara rodamiento-buje) y los nodos de la cara superior del anillo interior (los nodos en la intercara rodamiento-pala) se seleccionarán también como nodos *master*. La Figura 4.17 muestran la modelización del rodamiento de la Figura 4.16 completa (izquierda) y mediante superelementos (derecha).

Para el análisis, la cara inferior del anillo exterior se ha anclado y se le ha aplicado un desplazamiento radial de 1 mm a la cara superior del anillo interior. Debido a la forma anular de la geometría del rodamiento, este análisis necesita 144 min para concluir por medio del método de Superelementos y 38 min utilizando el modelo completo, de manera similar a lo que ocurría con los modelos  $b_1$  y  $b_2$  de la Figura 4.11 de la sección 4.2.1. La Figura 4.18 muestra que los resultados de reparto de cargas de ambos modelos son



a) Modelo de la izquierda en la Figura 4.17 b) Modelo de la derecha en la Figura 4.17

Figura 4.18: Distribución de carga obtenida en el modelo de Elementos Finitos de la Figura 4.17 [Plaza et al., 2015]

prácticamente idénticos.

Denominando  $y_i$  y  $y'_i$  a la carga en el muelle  $i$  en los modelos de la Figura 4.17 sin superelementos y con superelementos respectivamente, el error medio en la carga de las  $z$  bolas del rodamiento (teniendo en cuenta que al haber dos muelles por cada bola el sumatorio se extiende en  $i = 1, 2, \dots, 2z$ ) es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2z} |y_i - y'_i|}{\sum_{i=1}^{2z} y_i} \cdot 100 = 0.016\% \quad (4.3)$$

Y el error en la carga de la bola que sufre mayor sollicitación es:

$$\frac{|(y_i)_{max} - (y'_i)_{max}|}{(y_i)_{max}} \cdot 100 = 0.014\% \quad (4.4)$$

Evidentemente, el coste del modelo de superelementos de la Figura 4.17 puede ser significativamente reducido si se utilizan menos nodos *master*, ya que esto origina una reducción de la dimensión de la matriz de rigidez. En otras palabras, si solamente alguno de los nodos de la superficie superior e inferior de las caras de los anillos del rodamiento se eligen como nodos *master* en lugar de todos ellos, el coste del modelo con superelementos

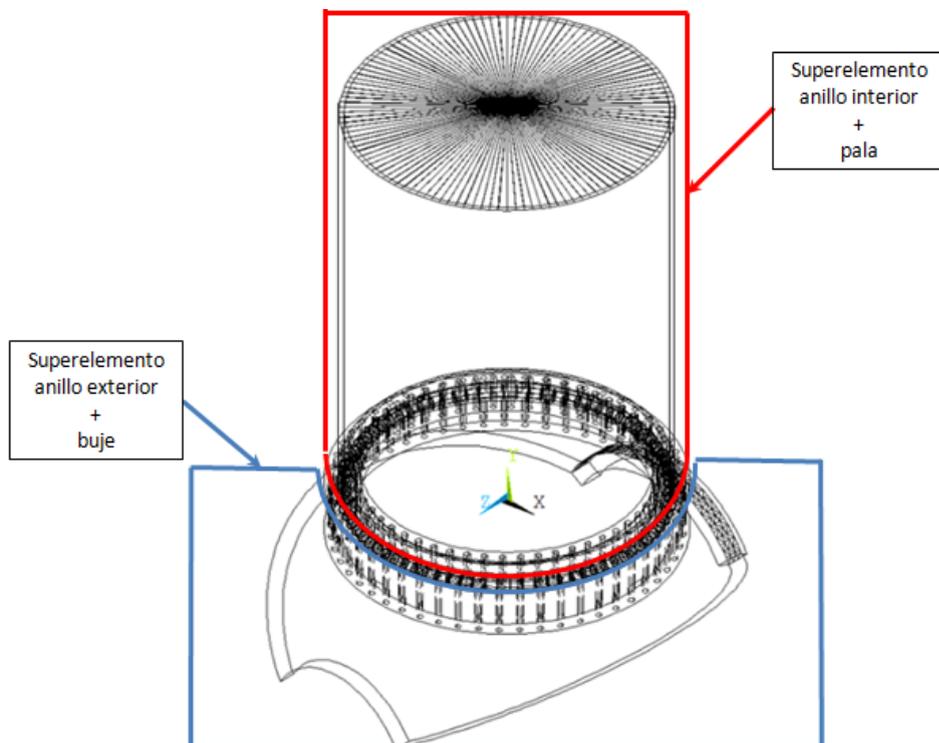


Figura 4.19: Modelo de Elementos Finitos basado en superelementos para el conjunto pala-rodamiento-buje [Plaza et al., 2015]

puede ser menor que el del modelo completo. De todas maneras, se debe tener presente que en el conjunto orientación de pala, la cara inferior del anillo exterior es la cara de contacto con el buje y el contacto no será detectado en aquellos nodos que no sean definidos como *master*, con la consiguiente pérdida de precisión.

Entre las otras posibles alternativas, aquella que mejor se comporta es la modelización del anillo interior y la pala como un superelemento y el anillo exterior unido al buje como un segundo superelemento. En la Figura 4.19 se muestra el modelo de Elementos Finitos de estos superelementos.

Por un lado, los nodos que conectan con la parte superior de la pala con el nodo de referencia para la restricción multipunto serán los nodos *master* del superelemento anillo interior-pala; y por el otro lado, los nodos en el plano de simetría y la interfaz empotrada del buje serán los nodos *master* del superelemento anillo exterior-buje. Además, de igual manera que en el modelo de superelementos de la Figura 4.17, los nodos que conectan

ambos anillos con el modelo de contacto bola-pista (los nodos de los elementos placa rígidos de la Figura 2.39) serán también nodos *master*. En contraste con el modelo de la Figura 4.14, este modelo no tiene en cuenta el efecto de la precarga de los tornillos dado que no han sido definidos; por otro lado, como los contactos entre la pala y el anillo interior, y el buje y el anillo exterior no han sido modelizados tampoco, no es posible verificar el estado del contacto. De hecho, el modelo basado en superelementos de la Figura 4.19 asume que el anillo interior junto con la pala se comportan como un único cuerpo; de la misma manera sucede con el anillo exterior y el buje. No obstante, si tenemos en cuenta que el criterio de diseño para determinar la precarga de los tornillos es que esta precarga debe ser suficiente como para asegurar que no se producirá separación entre los elementos en contacto, esa simplificación no debería introducir un error importante y de hecho no lo introduce como se verá a continuación en la comparativa de los resultados.

Se ha llevado a cabo el mismo análisis para ambos modelos con el objetivo de comparar sus resultados en términos de precisión y coste computacional. Las cargas aplicadas en la parte superior de la pala a través de la restricción multipunto son  $F_A = 573$  kN,  $F_R = 445$  kN y  $M = 7905$  kNm, siendo éstas una combinación de cargas representativa de la forma habitual de trabajo de este tipo de aerogeneradores; no obstante, el propósito de este trabajo no es evaluar la respuesta del sistema bajo un estado de carga concreto sino comparar la eficiencia de un modelo convencional de Elementos Finitos y un modelo de Elementos Finitos basado en superelementos, por lo tanto la magnitud de las cargas utilizadas para el análisis es un aspecto de menor importancia. La fuerza radial  $F_R$  tiene una dirección de  $20^\circ$  respecto al eje del rotor (eje longitudinal de la góndola, en la dirección del eje  $z$  del sistema de referencia global del modelo de Elementos Finitos), obviamente el momento de vuelco es perpendicular al esfuerzo radial y la fuerza axial tira de la pala hacia afuera. El material del buje es de fundición de acero ( $E = 170$  GPa), mientras que el material del rodamiento es de acero ( $E = 210$  GPa). A pesar de ser bien de fibra de vidrio o de carbono el material de la pala, es común que su base tenga un primer tramo de acero (al que se le conoce como raíz de pala), y es este tramo el que se ha modelizado en este caso. Las Figuras 4.21 a) y b) muestran, respectivamente, la

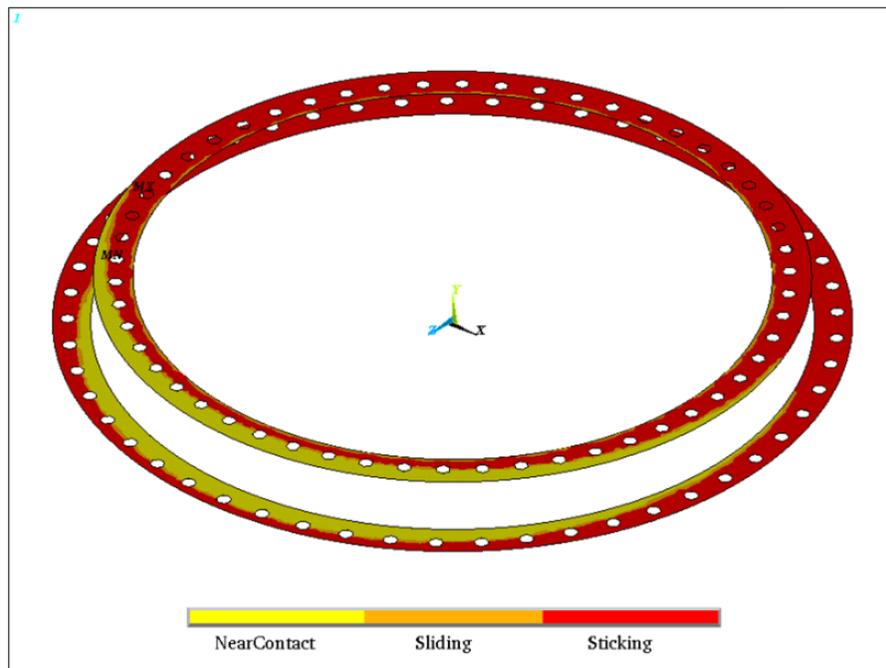
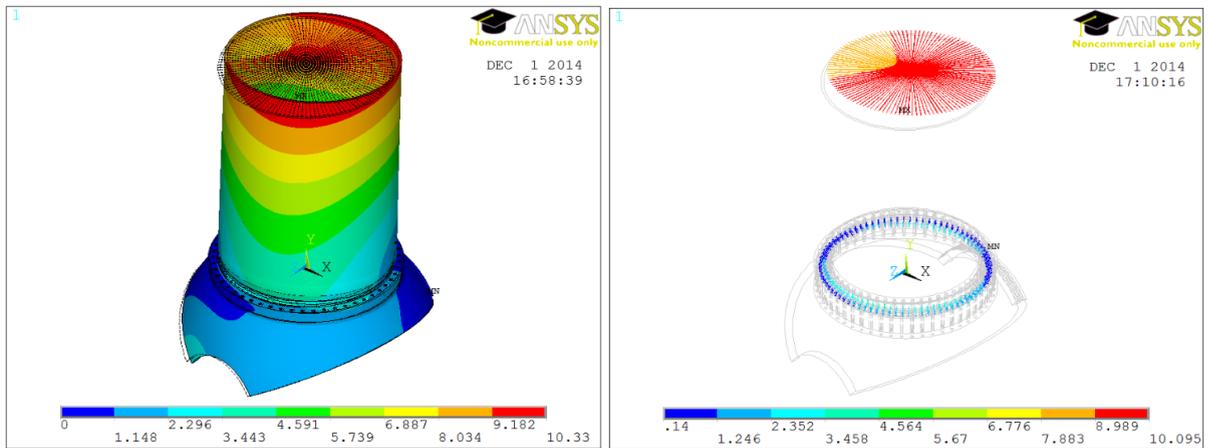


Figura 4.20: Análisis de los contactos del anillo interior-pala y del anillo exterior-buje [Plaza et al., 2015]

deformada del modelo completo 4.14 y el modelo basado en superelementos de la Figura 4.19; en este sentido, la Tabla 4.3 muestra los desplazamientos del punto de aplicación de las cargas. Las Figuras 4.22 a) y b) se corresponden con la distribución de carga en las bolas; este mismo resultado se representa en un diagrama polar en la Figura 4.23. En general, los resultados son muy similares: el error medio en la carga de las bolas es de un 2.75% y el error en la carga de la bola más solicitada es de 0.34%, de acuerdo a las expresiones 4.3 y 4.4. La fuente de este pequeño error es que existe una pérdida local de contacto entre los anillos y las estructuras portantes (tal y como se muestra en la Figura 4.20) que el modelo basado en superelementos no es capaz de detectar; sin embargo, desde el punto de vista únicamente de comparación de resultados, se puede concluir que el modelo basado en superelementos proporciona resultados muy precisos.



a) Modelo completo de la Figura 4.14

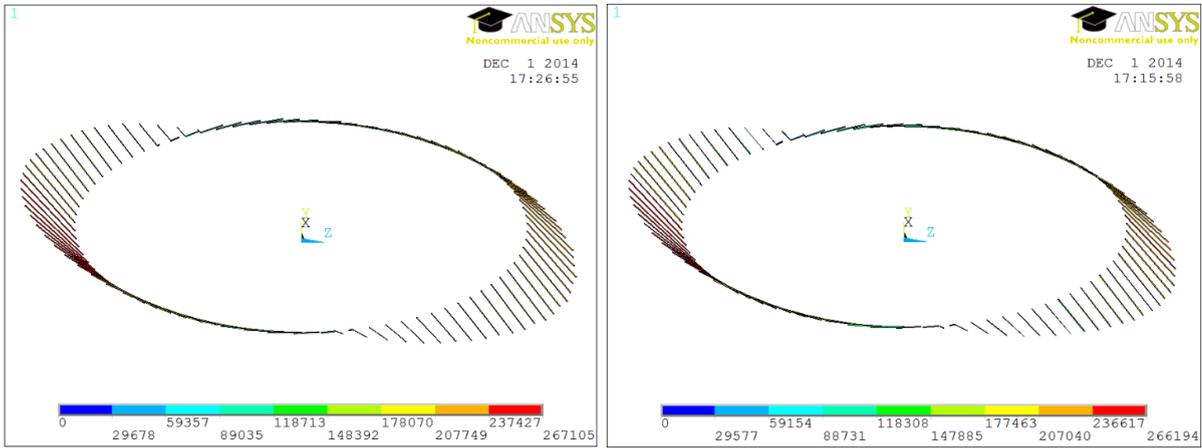
b) Modelo de superelementos de la Figura 4.19

Figura 4.21: Deformada de las modelizaciones del conjunto pala-rodamiento-buje [Plaza et al., 2015]

	$U_x$	$U_y$	$U_z$	$U_{total}$
Modelo EF original	-3.325	0.665	-8.740	9.375
Modelo EF basado en superelementos	-3.296	0.686	-8.494	9.137
ERROR (%)	0.872	3.102	2.820	2.543

Tabla 4.3: Desplazamientos en las 3 direcciones y total del punto de aplicación de carga para el modelo de la Figura 4.21

En relación al coste computacional, el modelo original necesita 128 min (en dos etapas de cálculo, una para la precarga de los tornillos y otra para la aplicación de las cargas externas), mientras que el modelo basado en superelementos requiere únicamente 16 min (además de los 2 min para crear los superelementos, es decir, para calcular sus matrices de rigidez, operación que sólo es necesario realizar una primera vez). El coste puede ser incluso menor si se utilizan un menor número de nodos *master* en la pala (como puntos de aplicación de carga) y/o en el buje (como puntos donde se establecen las condiciones de contorno). De todas maneras, estos resultados demuestran la superior eficiencia del modelo de superelementos propuesto.



a) Modelo completo de la Figura 4.19      b) Modelo de superelementos de la Figura 4.19

Figura 4.22: Distribución de carga en las bolas [Plaza et al., 2015]

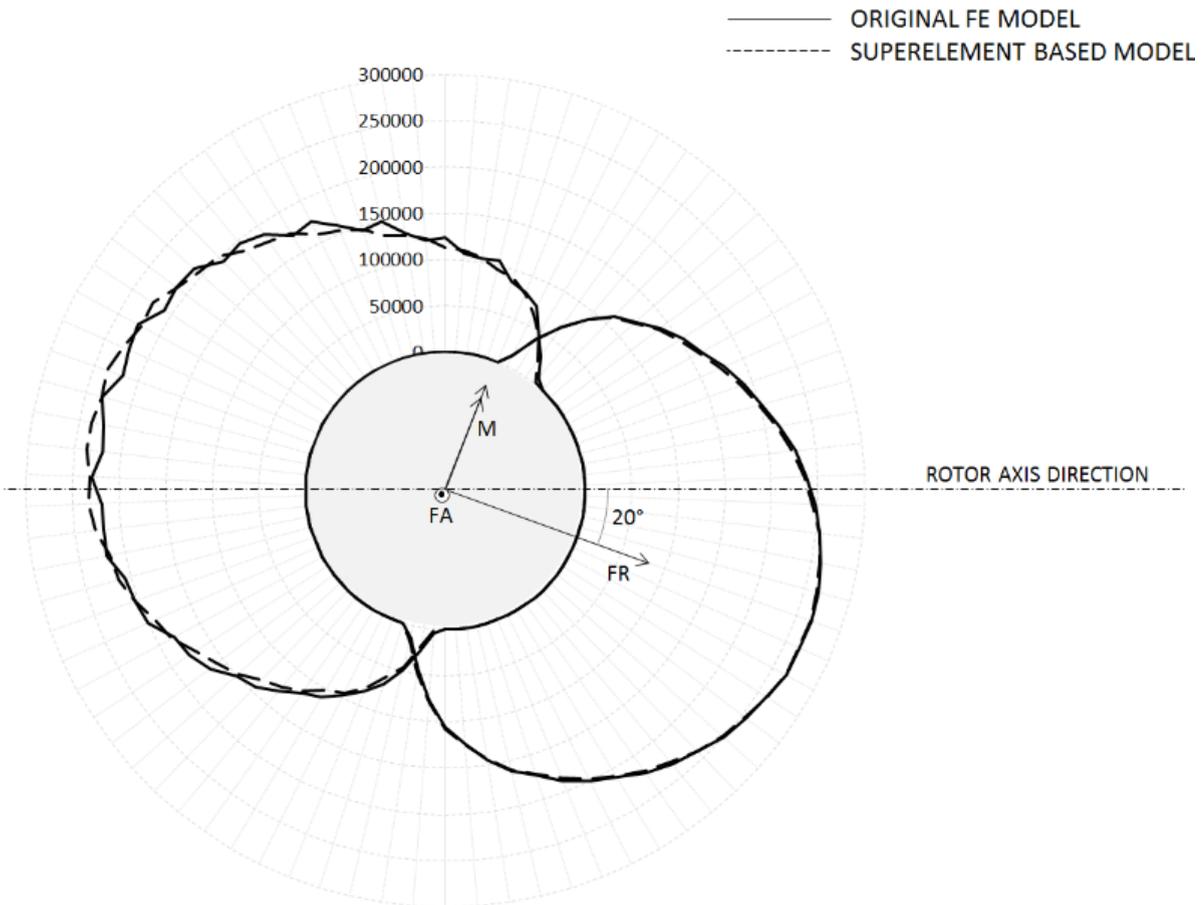


Figura 4.23: Representación en diagrama polar de la distribución de carga en las bolas para los resultados de las Figuras 4.22 [Plaza et al., 2015]

Finalmente y a modo de resumen, es necesario señalar que en los últimos años se han propuesto diferentes métodos analíticos para calcular la distribución de carga en las bolas y la rigidez del conjunto al que pertenece el rodamiento de vuelco, dado que estos son dos aspectos básicos en los pasos iniciales del diseño del mismo. No obstante, estos modelos analíticos consideran los anillos y estructuras como elementos rígidos, dando lugar a resultados imprecisos como se ha demostrado en secciones previas. Por tanto, las empresas encargadas de diseñar los sistemas de orientación llevan a cabo análisis por Elementos Finitos de modelos detallados con un elevado grado de complejidad. El alto número de grados de libertad y comportamiento no lineal conlleva un gran coste computacional. Mediante la técnica de superelementos propuesta en esta Tesis Doctoral se reduce este coste sin afectar a la precisión: en particular, la mayor eficiencia se obtiene modelizando en anillo interior y la pala como un superelemento, y el anillo exterior y el buje como otro superelemento. A pesar de que este modelo no simula correctamente los contactos entre el rodamiento, la pala y el rotor, estima con gran precisión la distribución de carga en las bolas y la deformación del sistema, y con un coste computacional considerablemente más bajo.



# 5

## Modelos preliminares para la estimación del momento de fricción

En el Capítulo 2 se presentaron varios modelos analíticos para el cálculo de la fricción en rodamientos de bolas de cuatro puntos de contacto, uno de los cuales (el de Joshi [Joshi et al., 2015]) ha servido como punto de partida del estudio preliminar del par de rozamiento que se ha llevado a cabo en esta Tesis Doctoral. En este Capítulo se presenta una formulación del par de fricción que pueda ser útil para un desarrollo y comprobación posteriores.

El enfoque de Joshi desacoplaba el problema de fricción resolviendo de manera separada el reparto de carga, para después hacer uso de este reparto en la resolución del equilibrio cinemático que da lugar a la estimación del par de rozamiento. Este planteamiento encaja perfectamente con los desarrollos llevados a cabo en esta Tesis Doctoral ya que se puede partir de los modelos de reparto de carga expuestos en los Capítulos 3 y 4, y llevar a cabo finalmente el cálculo del par de rozamiento necesario para hacer girar al rodamiento. A modo de recordatorio, es necesario subrayar que el enfoque de Joshi propone un modelo de fricción en el que se produce deslizamiento en todo el área de contacto. Esta hipótesis

se toma como base para su desarrollo pero su modelo no evalúa la eventual existencia de zonas de stick-slip en las áreas de contacto. Cuando se dan velocidades medias-altas, es común el considerar que se produce únicamente deslizamiento entre los elementos rodantes y las pistas. De esta manera se puede calcular la fricción directamente de las fuerzas normales del contacto hertziano, multiplicadas por un factor, el coeficiente de fricción dinámica. Las direcciones de estas fuerzas de fricción serán las dadas por la cinemática que resulta de resolver el desplazamiento relativo de los elementos rodantes respecto a las pistas mediante las ecuaciones no lineales del movimiento. El caso de los rodamientos de vuelco es diferente en tanto en cuanto están habitualmente soportando altas cargas y además giran a velocidades normalmente bajas. Es precisamente esta posibilidad de analizar posibles zonas de stick-slip las que de forma preliminar se han desarrollado en esta Tesis Doctoral.

Por su eficiencia y por ser un algoritmo ampliamente reconocido en la resolución de contactos en elementos rodantes, se ha pensado que se pueda incluir el algoritmo de cálculo FASTSIM desarrollado por Kalker [[Kalker, 1982](#)], que resuelve el problema tangencial en el cálculo de contactos hallando las zonas de adhesión y deslizamiento en el área de contacto, para tener en cuenta la presencia de zonas de stick. Por tanto, en una primera parte se va a introducir el algoritmo FASTSIM. Este algoritmo se incorporará a las ecuaciones de Joshi que determinan los esfuerzos transmitidos en el área de contacto y los parámetros del movimiento del elemento rodante.

Por otra parte, y para correlar los resultados del modelo basado en el desarrollo de Kalker, se ha desarrollado un modelo de Elementos Finitos. Por ello, en una segunda parte se describirá el modelo paramétrico de Elementos Finitos planteado para validar el modelo analítico que se propone para el cálculo del momento de fricción y del movimiento de la bola.

Resulta necesario incidir en el hecho de que en este Capítulo tan sólo se hace una recopilación del trabajo realizado en torno al momento de fricción y que el desarrollo del mismo continúa en proceso. No se presenta por tanto una solución final que resuelva el problema sino una línea de desarrollo a seguir para representar más fielmente los efectos

que se dan en rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto angular, debido a sus singularidades en lo que a movimiento, velocidades y carga se refiere.

## 5.1. Planteamiento de las ecuaciones de gobierno del elemento rodante

A la hora de calcular la fuerza total en un contacto donde se produce una rodadura, es necesario calcular las fuerzas y momentos que se transmiten a través de las tensiones que surgen en el área de contacto, que son función de las tensiones normales y tangenciales generadas en dicho área. Partiendo de la base de la teoría clásica de contactos y representando la tensión normal de compresión por  $p$  y las tensiones tangenciales por  $q$ , las ecuaciones de equilibrio establecen una relación entre la distribución de las tensiones y las resultantes de fuerza y momento transmitidas a través de contacto. El eje  $z$  suele representar la dirección normal del contacto y las ecuaciones se describen en un semi-espacio infinito, que se define matemáticamente como la región del espacio  $z \leq 0$ . Es decir, siendo la cota  $z = 0$  la intercara de contacto entre los dos cuerpos, se analiza la distribución de tensiones únicamente en una mitad de la dirección del contacto. De esta manera se consigue evitar en el cálculo de la solución del contacto cualquier efecto de borde por razones geométricas, lo que simplifica el problema. En contactos no conformes (área de contacto pequeña comparada con las dimensiones de los cuerpos), el área de contacto se sitúa aproximadamente en el plano  $x - y$  y se desprecia el posible alabeo de la zona de contacto. Por tanto:

$$P = \int_S p dS \quad (5.1)$$

$$Q_x = \int_S q_x dS \quad (5.2)$$

$$Q_y = \int_S q_y dS \quad (5.3)$$

$$M_x = \int_S p \cdot y dS \quad (5.4)$$

$$M_y = \int_S p \cdot x dS \quad (5.5)$$

$$M_z = - \int_S (q_y x - q_x y) dS \quad (5.6)$$

El problema del contacto bola-pista no cumple las condiciones de contacto hertziano de que las superficies sean no conformes estrictamente. No obstante, por ser una de las dimensiones muy poco conformes (la que corresponde al diámetro medio del rodamiento) los resultados del área de contacto se aproximan muy fielmente a las soluciones predichas por el modelo de Hertz [Li et al., 2012, Sun and Hao, 2012]. Tampoco cumple la condición de Hertz de que el contacto se produzca sin fricción asegurándose que sólo se transmita fuerza normal. De hecho es precisamente esa fricción lo que se pretende calcular, es decir, se busca resolver la distribución de tensiones tangenciales en el área de contacto y calcular de esta manera los esfuerzos tangenciales transmitidos. En el área de contacto, la tracción y el deslizamiento están relacionados con la Ley de Coulomb definiéndose mediante la función  $s(x, y)$  que representa el deslizamiento relativo de un punto  $(x, y)$ . Habrá adhesión en un punto  $(x, y)$  del área de contacto si las velocidades relativas entre los cuerpos en contacto son nulas ( $s(x, y) = 0$ ), siendo en ese caso la tensión tangencial menor o igual que la presión normal multiplicada por el coeficiente de rozamiento; y habrá deslizamiento en un punto  $(x, y)$  si existe una velocidad relativa entre las superficies de los cuerpos en contacto ( $s(x, y) \neq 0$ ), en cuyo caso la tensión tangencial es máxima. Las siguientes ecuaciones 5.7 y 5.8 dan forma a estas condiciones:

$$\vec{s}(x, y) = 0 \Rightarrow |\vec{\tau}(x, y)| < \mu \cdot p(x, y) \quad (5.7)$$

$$\vec{s}(x, y) \neq 0 \Rightarrow \vec{\tau}(x, y) = -\mu \cdot p(x, y) \cdot \frac{\vec{s}(x, y)}{|\vec{s}(x, y)|} \quad (5.8)$$

Siendo  $\tau$  la tensión tangencial,  $\mu$  el coeficiente de rozamiento y  $p$  la presión normal en el contacto.

La suma de las tensiones tangenciales a lo largo de toda la zona de contacto dará lugar a la fuerza tangencial resultante (expresión 5.9) y la suma de los momentos producidos por dichas tensiones tangenciales respecto al centro del área de contacto dará lugar al momento de espín (expresión 5.10).

$$\vec{F}_t = \int \int_A \vec{\tau}(x,y) dx dy \quad (5.9)$$

$$\vec{M}_s = \int \int_A (\vec{r}' \times \vec{\tau}(x,y)) dx dy \quad (5.10)$$

La resolución del problema tangencial consiste por tanto en determinar la distribución de tensiones tangenciales (la cual permite calcular los esfuerzos tangenciales transmitidos en el contacto según las 2 últimas ecuaciones) de tal manera que se cumpla la ley de Coulomb. Hablando en términos de contacto con rodadura, la tensión tangencial en el área de contacto, se determina por la velocidad relativa de los puntos  $P(x,y)$  de ese área representado esquemáticamente en la Figura 5.1. Esta velocidad se utilizará a continuación para definir los diferentes términos que forman parte de las ecuaciones de velocidad relativa entre los puntos de cada uno de los cuerpos en contacto. Dicha velocidad relativa es función de las velocidades como sólidos rígidos que presentan los cuerpos en contacto más el movimiento relativo de los puntos de cada una de las superficies debidas a las deformaciones elásticas. Se definen  $V_{x_1}$  y  $V_{x_2}$  como las velocidades en la dirección  $x$  (que se toma como la dirección de avance del movimiento de rodadura) de los cuerpos 1 y 2 respectivamente. De igual manera en la dirección perpendicular  $y$  al avance de la rodadura se tienen las velocidades  $V_{y_1}$  y  $V_{y_2}$ . Así mismo, en lo relativo a las velocidades angulares como sólido rígido de cada uno de los cuerpos, se denominarán  $W_{z_i}$  a cada una de las velocidades angulares correspondientes a los cuerpos  $i = 1, 2$ . Para las velocidades resultantes de las deformaciones elásticas se define a su vez  $u(x,y)$  como la diferencia

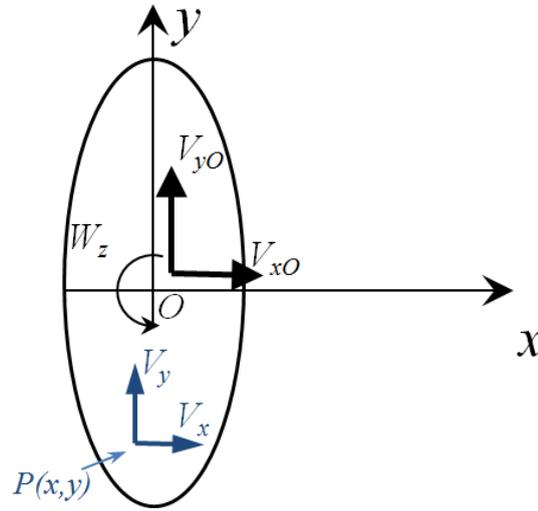


Figura 5.1: Sistema de referencia para las velocidades relativas en el área de contacto de acuerdo a la teoría clásica de contactos

de desplazamientos debidos a esa deformación elástica.

De esta manera, las ecuaciones de velocidad relativa de un punto  $P(x, y)$  quedan descritas en función de los términos indicados en el párrafo anterior como se puede ver en la expresión 5.11:

$$\begin{aligned} V_{x_1}(x, y) - V_{x_2}(x, y) &= (V_{x_{O1}} - V_{x_{O2}}) - (W_{z_1} - W_{z_2}) \cdot y + \left( \frac{du_{x_1}(x, y)}{dt} - \frac{du_{x_2}(x, y)}{dt} \right) \\ V_{y_1}(x, y) - V_{y_2}(x, y) &= (V_{y_{O1}} - V_{y_{O2}}) - (W_{z_1} - W_{z_2}) \cdot x + \left( \frac{du_{y_1}(x, y)}{dt} - \frac{du_{y_2}(x, y)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Al estar en un sistema de referencia móvil, la derivada de la diferencia de deformaciones respecto al tiempo se calcula como queda indicado en la expresión 5.12:

$$\frac{du(x, y)}{dt} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial t} \quad (5.12)$$

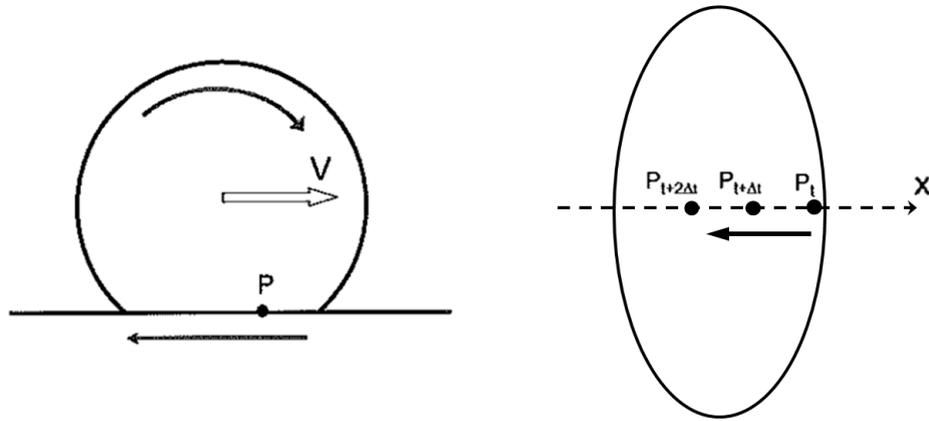


Figura 5.2: Progresión relativa de un punto en la dirección de avance del movimiento

En la Figura 5.2 se muestra esquemáticamente el avance relativo de un punto en la dirección del movimiento. Por tanto las derivadas parciales quedan:

$$\begin{cases} x(t) = X_0 - V \cdot t \\ y = Y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -V \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

De tal forma que los deslizamientos de la expresión 5.11, asumiendo que las condiciones de contacto se encuentran en un régimen cuasiestático y por tanto el campo de deformaciones no varía a lo largo del tiempo y denominando  $V$  a la velocidad relativa, se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} V_x(x, y) &= (V_{x_{O1}} - V_{x_{O2}}) - (W_{z1} - W_{z2}) \cdot y - V \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} \\ V_y(x, y) &= (V_{y_{O1}} - V_{y_{O2}}) - (W_{z1} - W_{z2}) \cdot x - V \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Es habitual a la hora de trabajar con estas velocidades relativas el dividir todos los términos entre la velocidad nominal  $V$  del cuerpo que rueda, de forma que las expresiones para los deslizamientos quedan de forma abreviada como se puede ver en las ecuaciones 5.15, donde se han utilizado los términos que se definen a continuación:

$$s_x(x, y) = \frac{V_x(x, y)}{V}$$

**Deslizamiento relativo** de un punto P(x,y) en dirección **longitudinal** al movimiento nominal del cuerpo que rueda

$$s_y(x, y) = \frac{V_y(x, y)}{V}$$

**Deslizamiento relativo** de un punto P(x,y) en dirección **transversal** al movimiento nominal del cuerpo que rueda

$$v_x = \frac{V_{xO1} - V_{xO2}}{V}$$

**Pseudodeslizamiento longitudinal.** Se calcula como la diferencia de velocidades longitudinales en el centro del contacto, calculadas suponiendo los dos cuerpos como sólidos rígidos, dividida entre la velocidad nominal del vehículo

$$v_y = \frac{V_{yO1} - V_{yO2}}{V}$$

**Pseudodeslizamiento lateral.** Se calcula como la diferencia de velocidades transversales en el centro del contacto, calculadas suponiendo los dos cuerpos como sólidos rígidos, dividida entre la velocidad nominal del vehículo

$$\phi = \frac{W_{z1} - W_{z2}}{V}$$

**Espín.** Se calcula como la diferencia de las velocidades angulares de pivotamiento (componentes normales al contacto), dividida entre la velocidad nominal del vehículo

$$\begin{aligned} s_x(x, y) &= v_x - \phi \cdot y - \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} \\ s_y(x, y) &= v_y + \phi \cdot x - \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.15)$$

En forma vectorial:

$$\vec{s}(x, y) = \vec{w}(x, y) - \frac{\partial \vec{u}(x, y)}{\partial x} \quad (5.16)$$

Uno de los algoritmos más utilizados y que es ampliamente reconocido por la comunidad investigadora es el algoritmo FASTSIM de Kalker [Kalker, 1982]. Esta subrutina introducía ciertas simplificaciones al problema tangencial del contacto, permitiendo así que pudiera ser utilizada por los programas de simulación dinámica con un coste computacional asumible. Concretamente, la simplificación que se introduce en este algoritmo

es considerar unas relaciones sencillas (lineales) entre desplazamientos y tensiones tangenciales en los puntos del contacto como las que se muestran en la expresión 5.17 donde a la constante  $L$  se le denomina *parámetro de flexibilidad* por ser una especie de coeficiente de rigidez (siendo función de las dimensiones de la elipse de contacto y de los parámetros del material  $E$  y  $\nu$ ).

$$\vec{u}(x, y) = L \cdot \vec{\tau}(x, y) \quad (5.17)$$

Es decir, comparando la ecuación completa del problema tangencial 5.16 con la simplificación 5.17 propuesta por Kalker se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \vec{s}(x, y) &= \vec{w}(x, y) - L \frac{\partial \vec{\tau}(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{\tau}(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{L} \vec{w}(x, y) - \frac{1}{L} \vec{s}(x, y) \\ \vec{\tau}(x + dx, y) - \vec{\tau}(x, y) &= \frac{dx}{L} \vec{w}(x, y) - \frac{dx}{L} \vec{s}(x, y) \end{aligned} \quad (5.18)$$

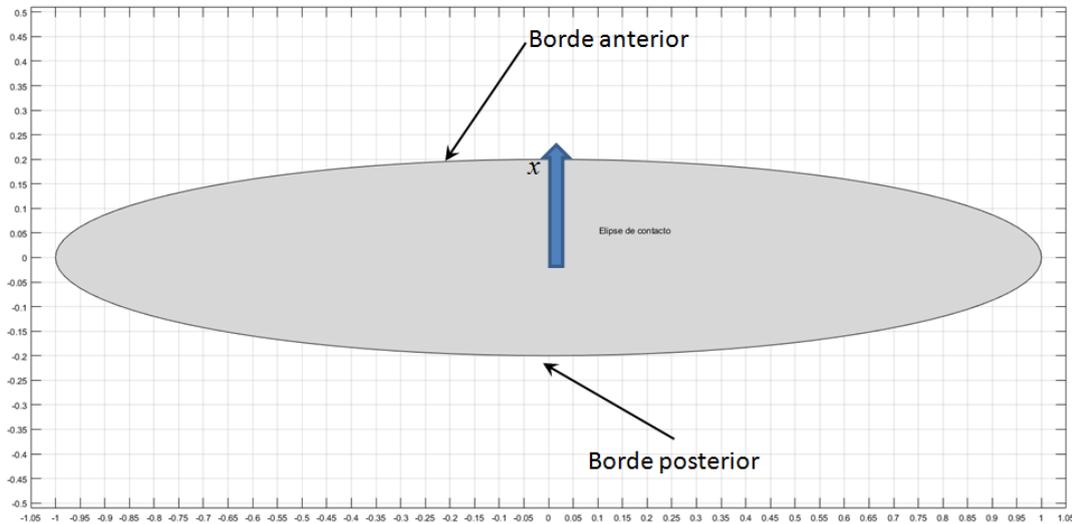
Si  $|\vec{\tau}(x, y)| < \mu p(x, y)$

$$\Rightarrow P(x, y) \in \text{Zona de adhesión} \Rightarrow \vec{s}(x, y) = \vec{0}.$$

Si  $|\vec{\tau}(x, y)| = \mu p(x, y)$

$$\Rightarrow P(x, y) \in \text{Zona de deslizamiento} \Rightarrow \vec{\tau}(x, y) = -\mu p(x, y) \frac{\vec{s}(x, y)}{|\vec{s}(x, y)|}.$$

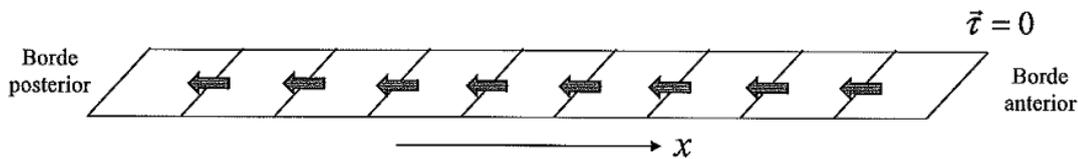
El primer paso de este algoritmo es la discretización de la elipse de contacto. Aún siendo este algoritmo suficientemente rápido, con el objetivo de no ralentizar el progreso debida a una discretización excesiva, se recomiendan discretizaciones de tamaño  $15 \times 15$  o  $25 \times 25$  que presentan una buena relación entre precisión y coste. Para cada franja longitudinal, las tensiones se comienzan a calcular desde el borde anterior de la elipse, por donde entran los puntos en contacto. Como la posible zona de adhesión está situada en esta parte, se asume inicialmente que el primer punto se encuentra en dicha zona y no existe deslizamiento. Además se toma como tensión inicial la correspondiente al borde de la elipse, donde se sabe que es nula y la tensión se va calculando celda a celda



a) Discretización de la elipse de contacto

$$\tau_{zx}(x, y) = \tau_{zx}(x + dx, y) - \frac{dx}{L} (v_x - \phi \cdot y)$$

$$\tau_{zy}(x, y) = \tau_{zy}(x + dx, y) - \frac{dx}{L} (v_y + \phi \cdot x)$$



b) Integración de la tensión tangencial

Figura 5.3: Cálculo de la tensión en el algoritmo FASTSIM

de delante hacia atrás.

Cuando la tensión es mayor que el límite de Coulomb, se asigna el valor máximo  $\mu P$ .

Para determinar el parámetro  $L$  que relaciona los desplazamientos con las tensiones, se ajustan los resultados obtenidos con el algoritmo FASTSIM para pequeños pseudodeslizamientos, con los obtenidos con la teoría simplificada lineal. Se supone entonces que toda el área de contacto es zona de adhesión (el deslizamiento es cero para cualquier punto):

$$\frac{\partial \vec{\tau}(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{L} \vec{w}(x, y) \quad (5.19)$$

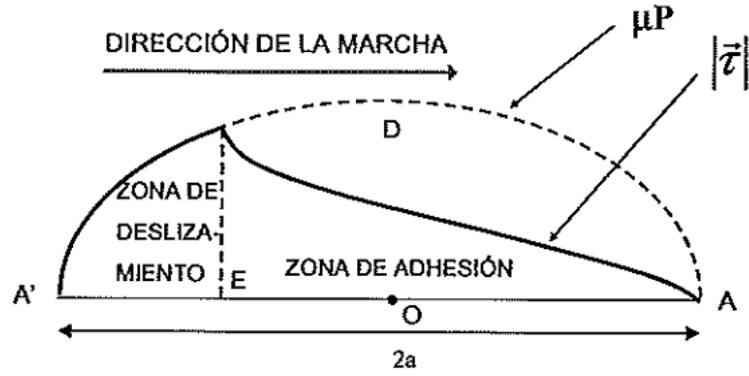


Figura 5.4: Zonas de adhesión y deslizamiento

Integrando en  $x$  se despeja la tensión:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}(x, y) - \vec{\tau}(x_0, y) &= \frac{1}{L} \int_{x_0}^x \vec{w}(x, y) \cdot dx \\ \tau_{zx}(x, y) &= \frac{1}{L} (v_x - \phi \cdot y) (x - x_0) \\ \tau_{zy}(x, y) &= \frac{1}{L} \left[ v_y (x - x_0) + \frac{1}{2} \phi (x^2 - x_0^2) \right]\end{aligned}\quad (5.20)$$

Una vez obtenidas las tensiones para cualquier punto del contacto, se pueden integrar sobre toda la zona de contacto para obtener las resultantes de la ecuación 5.21, donde los coeficientes de flexibilidad  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  con las expresiones mostradas en 5.22 se determinan de manera que la teoría exacta lineal de Kalker [Kalker, 1990] se satisfaga.

$$\begin{aligned}F_x^{FastSim} &= \frac{8a^2b}{3L_1} v_x \\ F_y^{FastSim} &= \frac{8a^2b}{3L_2} v_y + \frac{\pi a^2b}{4L_3} \phi\end{aligned}\quad (5.21)$$

Siendo los coeficientes de flexibilidad:

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{8a}{3C_{11}G} \\ L_2 &= \frac{8a}{3C_{22}G} \\ L_3 &= \frac{\pi\sqrt{a^3}}{4\sqrt{b}C_{23}G}\end{aligned}\quad (5.22)$$

e	C <sub>11</sub>			C <sub>22</sub>			C <sub>23</sub> = -C <sub>32</sub>			C <sub>33</sub>		
	v=0.25	v=0.25	v=0.5	v=0.25	v=0.25	v=0.5	v=0.25	v=0.25	v=0.5	v=0.25	v=0.25	v=0.5
a/b												
0.1	2.51	3.31	4.85	2.51	2.52	2.53	0.334	0.473	0.731	6.42	8.28	11.7
0.2	2.59	3.37	4.81	2.59	2.63	2.66	0.483	0.603	0.809	3.46	4.27	5.66
0.3	2.68	3.44	4.80	2.68	2.75	2.81	0.607	0.715	0.889	2.49	2.96	3.72
0.4	2.78	3.53	4.82	2.78	2.88	2.98	0.720	0.823	0.977	2.02	2.32	2.77
0.5	2.88	3.62	4.83	2.88	3.01	3.14	0.827	0.929	1.07	1.74	1.93	2.22
0.6	2.98	3.72	4.91	2.98	3.14	3.31	0.93	1.03	1.18	1.56	1.68	1.86
0.7	3.09	3.81	4.97	3.09	3.28	3.48	1.03	1.14	1.29	1.43	1.50	1.60
0.8	3.19	3.91	5.05	3.19	3.41	3.65	1.13	1.25	1.40	1.34	1.37	1.42
0.9	3.29	3.01	5.12	3.29	3.54	3.82	1.23	1.36	1.51	1.27	1.27	1.27
b/a												
1.0	3.40	4.12	5.20	3.40	3.67	3.98	1.33	1.47	1.63	1.21	1.19	1.16
0.9	3.51	4.22	5.30	3.51	3.81	4.16	1.44	1.59	1.77	1.16	1.11	1.06
0.8	3.65	4.36	5.42	3.65	3.99	4.39	1.58	1.75	1.94	1.10	1.04	0.954
0.7	3.82	4.54	5.58	3.82	4.21	4.67	1.76	1.95	2.18	1.05	0.965	0.852
0.6	4.06	4.78	5.80	4.06	4.50	5.04	2.01	2.23	2.50	1.01	0.892	0.751
0.5	4.37	5.10	6.11	4.37	4.90	5.56	2.35	2.62	2.96	0.958	0.819	0.650
0.4	4.84	5.57	6.57	4.84	5.48	6.31	2.88	3.24	3.70	0.912	0.747	0.549
0.3	5.57	6.34	7.34	5.57	6.40	7.51	3.79	4.32	5.01	0.868	0.674	0.446
0.2	6.96	7.78	8.82	6.96	8.14	9.79	5.72	6.63	7.89	0.828	0.601	0.341
0.1	10.7	11.7	12.9	10.7	12.8	16	12.2	14.6	18	0.795	0.526	0.228

Figura 5.5: Coeficientes de pseudodeslizamiento de Kalker [Kalker, 1982]

Donde los coeficientes  $C_{ij}$  de Kalker [Kalker, 1982] se encuentran representados en la Tabla 5.5 en función de la relación ( $a/b$ ) entre semiejes de la elipse de contacto y del coeficiente de Poisson del material  $\nu$ .

Quedando finalmente las ecuaciones del algoritmo FASTSIM que determinan las tensiones tangenciales a lo largo del área de contacto como se muestra en la expresión 5.23:

$$\begin{aligned} \tau_{zx}(x, y) &= \tau_{zx}(x + dx, y) - dx \left( \frac{\nu_x}{L_1} - \frac{\phi \cdot y}{L_3} \right) \\ \tau_{zy}(x, y) &= \tau_{zy}(x + dx, y) - dx \left( \frac{\nu_y}{L_2} + \frac{\phi \cdot x}{L_3} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

### 5.1.1. Pseudodeslizamientos

En la Figura 5.6 se muestra el proceso de cálculo propuesto para incorporar el algoritmo FASTSIM en la obtención del par de fricción. Las ecuaciones se ajustan al modelo presentado en la sección 2.5.4.4 pero es en las ecuaciones de la 2.136 a la 2.140 donde se

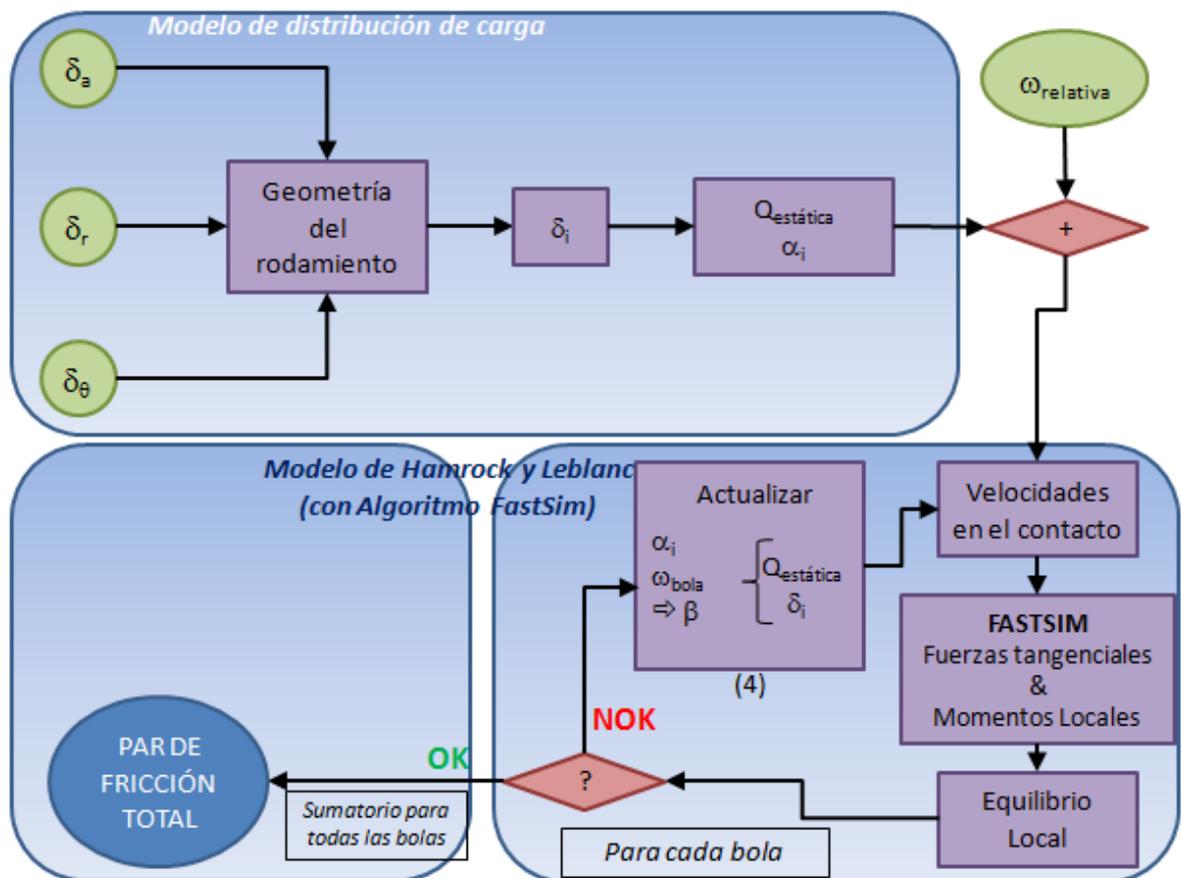


Figura 5.6: Diagrama para el proceso de cálculo del par de fricción incorporando el algoritmo de Kalker FASTSIM para resolver el contacto bola-pista en rodadura

debe introducir el cambio del modelo para calcular las tensiones tangenciales y la fricción resultante de forma adecuada. En las ecuaciones 2.136-2.140 se considera que coeficiente de fricción  $\mu$  es el de deslizamiento y únicamente pueden existir zonas adheridas (zonas de stick) en donde la cinemática dé como resultado un punto de velocidad nula, no por las fuerzas tangenciales. Para ello, como primer paso es necesario calcular las velocidades relativas de bola y pista en cada una de las elipses de contacto y ponerlas en forma de deslizamientos relativos y pseudodeslizamientos. A continuación se detallará el cálculo de estas velocidades en cada uno de los contactos

El sistema de referencia global del rodamiento se muestra en la Figura 5.7 situándose la bola en el ángulo azimutal  $\psi = 0$ , en la cual el eje  $Z$  sería el de giro. Se incluye también el convenio que se ha adoptado en el presente trabajo para denominar por cuadrantes

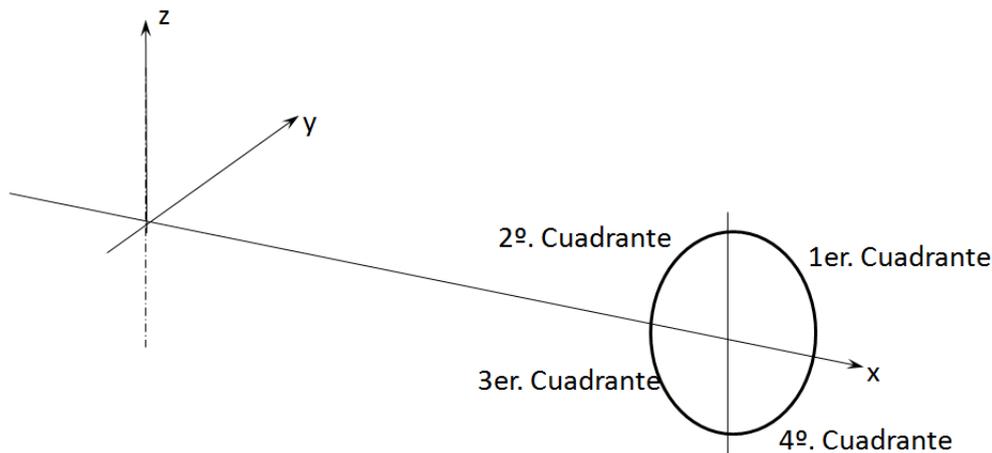


Figura 5.7: Sistema de referencia global del rodamiento y definición de los cuadrantes correspondientes a cada contacto

a los contactos bola-pista, que difiere del adoptado por Hamrock en [Hamrock et al., 1972] donde los contactos se denominaban según su posición (interior-derecha, interior-izquierda, exterior-derecha, exterior-izquierda).

Como se ha mencionado previamente, para poder analizar las fuerzas tangenciales existentes, es necesario analizar el movimiento relativo entre las superficies en contacto. Supongamos la pista interior fija ( $\omega_i = 0$ ) y la exterior con una velocidad angular  $\omega_o$ , como parámetros de entrada. Se definen además los siguientes parámetros, con valores desconocidos a priori:

$\omega_B$  la velocidad angular de pivotamiento de la bola

$\Omega_C$  la velocidad angular del centro de la bola alrededor del eje del rodamiento

$\beta$  el ángulo que posiciona el eje de pivotamiento.  $\beta'$  se considera nulo debido a que no existen fuerzas o momentos inerciales asociados a efectos giroscópicos o de fuerza centrífuga (ver Joshi [Joshi et al., 2015]).

De acuerdo a estos parámetros las componentes de la velocidad angular de la bola se pueden expresar como:

$$\begin{cases} \omega_X = \omega_B \sin \beta \\ \omega_Y = 0 \\ \omega_Z = \omega_B \cos \beta \end{cases} \quad (5.24)$$

### Velocidades Contacto 1

A continuación se describe el proceso de obtención de las velocidades de deslizamiento para el contacto 1, partiendo de la descomposición de velocidades mostrado en la Figura 5.8.

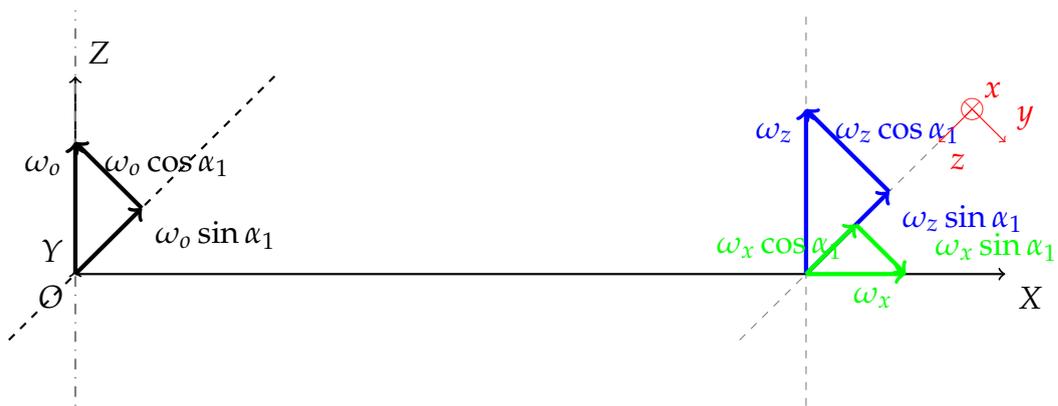


Figura 5.8: Descomposición de velocidades para el contacto 1

Siguiendo la nomenclatura indicada anteriormente al describir el problema tangencial de contacto, debido a la componente  $\omega_o$ , la velocidad en el centro de la elipse de contacto de la pista exterior (cuerpo 2) en el contacto 1 tendrá la velocidad lineal  $V_{x_{O2}}$

$$V_{x_{O2}} = \omega_O \left( \frac{d_{pw}}{2} + \frac{d_w}{2} \cos \alpha_1 \right) \quad (5.25)$$

Debido a las componentes  $\omega_X$  y  $\omega_Z$  de la expresión 5.24, la velocidad en el centro de la elipse de contacto en la bola (cuerpo 1), tiene la velocidad lineal  $V_{x_{O1}}$

$$V_{x_{O1}} = \frac{d_w}{2} (\omega_Z \cos \alpha_1 - \omega_X \sin \alpha_1) \quad (5.26)$$

Y la velocidad nominal de la bola es:

$$V_1 = (\Omega_C - \omega_o) \frac{d_{pw}}{2} \quad (5.27)$$

Para convertirlo en velocidad de pseudodeslizamiento, dividimos entre la velocidad relativa de la bola respecto a la pista, por tanto el pseudodeslizamiento longitudinal para el contacto 1 es:

$$\nu_{x_1} = \frac{V_{x_{O1}} - V_{x_{O2}}}{V_1} \quad (5.28)$$

Las velocidades transversales en el centro de la elipse de cada sólido:

$$\begin{aligned} V_{y_{O1}} &= \omega_y \frac{d_w}{2} \\ V_{y_{O2}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

El pseudodeslizamiento lateral para el contacto 1 es:

$$\nu_{y_1} = \frac{V_{y_{O1}} - V_{y_{O2}}}{V_1} \quad (5.30)$$

Y el pseudodeslizamiento de espín para el contacto 1:

$$\phi_1 = \frac{\Omega_{O1} - \Omega_{O2}}{V_1} \quad (5.31)$$

siendo las velocidades angulares de pivotamiento, con la misma nomenclatura de sub-índices ( $O1$  para el cuerpo 1 que se corresponde con la bola, y  $O2$  para la pista como segundo cuerpo):

$$\begin{aligned} \Omega_{O1} &= -\omega_X \cos \alpha_1 - \omega_Z \sin \alpha_1 \\ \Omega_{O2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

### Velocidades Contacto 2

Para el caso del contacto 2 la Figura 5.9 tiene representado la descomposición de velocidades para el mismo y el proceso de obtención de las velocidades de deslizamiento es el siguiente.

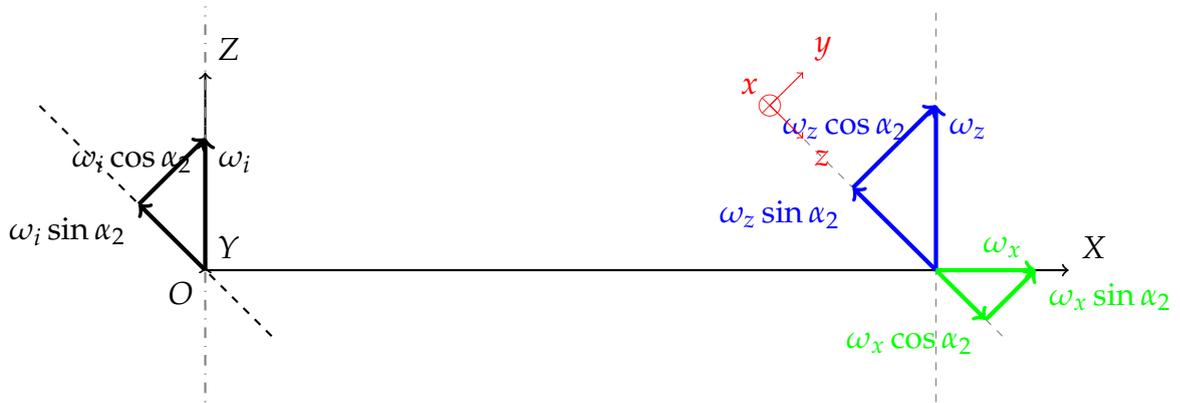


Figura 5.9: Descomposición de velocidades para el contacto 2

Las velocidades longitudinales en el centro de la elipse de cada sólido

$$\begin{aligned} V_{xO1} &= -\frac{d_w}{2} (\omega_Z \cos \alpha_2 + \omega_X \sin \alpha_2) \\ V_{xO2} &= \omega_i \left( \frac{d_{pw}}{2} - \frac{d_w}{2} \cos \alpha_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

y la velocidad nominal de la bola:

$$V_2 = (\Omega_C - \omega_i) \frac{d_{pw}}{2} \quad (5.34)$$

El pseudodeslizamiento longitudinal para el contacto 2 es:

$$\nu_{x2} = \frac{V_{xO1} - V_{xO2}}{V_2} \quad (5.35)$$

Las velocidades transversales en el centro de la elipse de cada sólido:

$$\begin{aligned} V_{yO1} &= \omega_y \frac{d_w}{2} \\ V_{yO2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

El pseudodeslizamiento lateral para el contacto 2 es:

$$v_{y2} = \frac{V_{yO1} - V_{yO2}}{V_2} \quad (5.37)$$

El pseudodeslizamiento de espín para el contacto 2 es:

$$\phi_2 = \frac{\Omega_{O1} - \Omega_{O2}}{V_2} \quad (5.38)$$

Siendo las velocidades angulares de pivotamiento:

$$\begin{aligned} \Omega_{O1} &= \omega_X \cos \alpha_2 - \omega_Z \sin \alpha_2 \\ \Omega_{O2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

### Velocidades Contacto 3

El proceso de obtención de las velocidades de deslizamiento para el contacto 3 se realiza de igual manera, partiendo de la descomposición de velocidades mostrada en la Figura 5.10. A continuación se detalla.

Las velocidades longitudinales en el centro de la elipse de cada sólido

$$\begin{aligned} V_{xO1} &= \frac{d_w}{2} (-\omega_Z \cos \alpha_3 + \omega_X \sin \alpha_3) \\ V_{xO2} &= \omega_i \left( \frac{d_{pw}}{2} - \frac{d_w}{2} \cos \alpha_3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

y la velocidad nominal de la bola:

$$V_3 = (\omega_C - \omega_i) \frac{d_{pw}}{2} \quad (5.41)$$

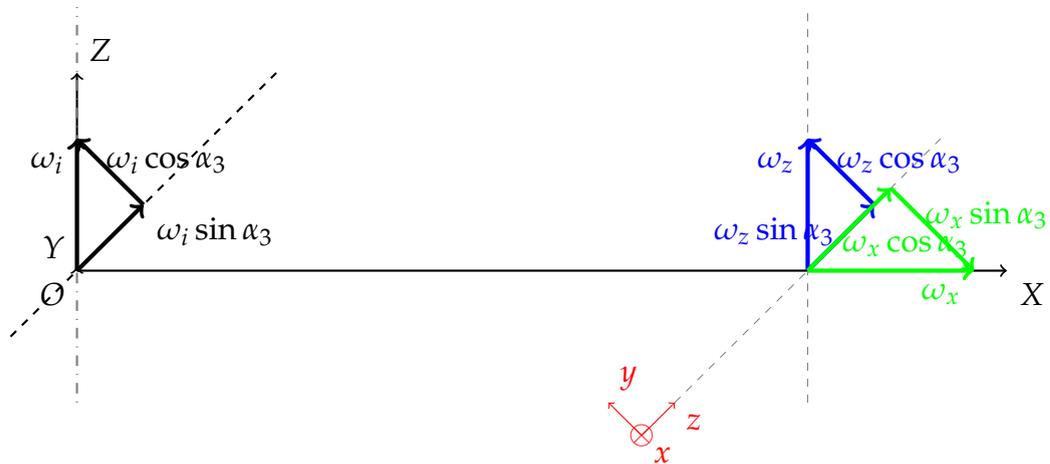


Figura 5.10: Descomposición de velocidades para el contacto 3

El pseudodeslizamiento longitudinal para el contacto 3 es:

$$v_{x3} = \frac{V_{xO1} - V_{xO2}}{V_3} \quad (5.42)$$

Las velocidades transversales en el centro de la elipse de cada sólido:

$$\begin{aligned} V_{yO1} &= \omega_Y \frac{d_w}{2} = 0 \\ V_{yO2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

El pseudodeslizamiento lateral para el contacto 3 es:

$$v_{y3} = \frac{V_{yO1} - V_{yO2}}{V_3} \quad (5.44)$$

El pseudodeslizamiento de espín para el contacto 3 es:

$$\phi_3 = \frac{\Omega_{O1} - \Omega_{O2}}{V_3} \quad (5.45)$$

siendo las velocidades angulares de pivotamiento:

$$\Omega_{O1} = -\omega_X \cos \alpha_3 - \omega_Z \sin \alpha_3 \quad (5.46)$$

$$\Omega_{O2} = 0$$

### Velocidades Contacto 4

Finalmente las velocidades de deslizamiento para el contacto 4 con la descomposición de velocidades de la Figura 5.11.

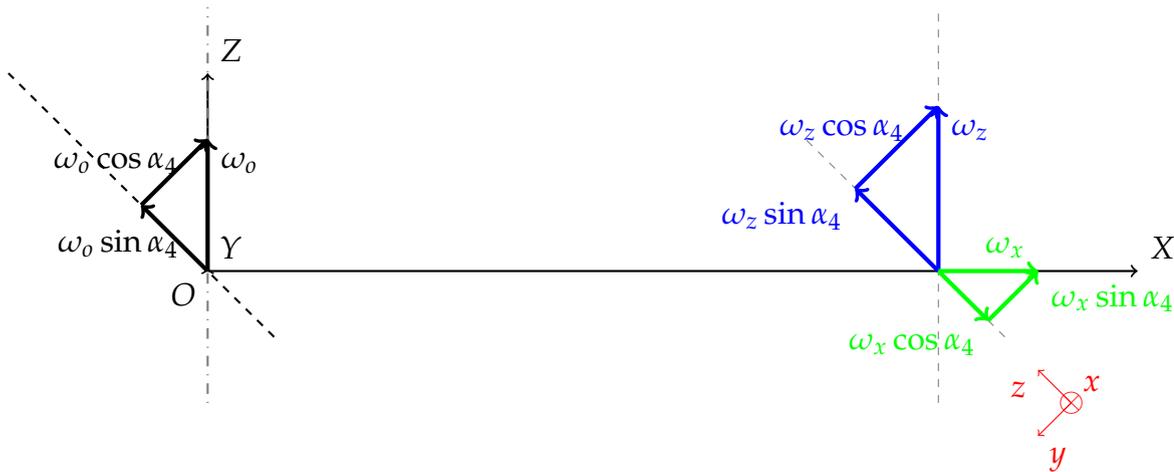


Figura 5.11: Descomposición de velocidades para el contacto 4

Las velocidades longitudinales en el centro de la elipse de cada sólido

$$V_{xO1} = \frac{d_w}{2} (\omega_Z \cos \alpha_4 + \omega_X \sin \alpha_4) \quad (5.47)$$

$$V_{xO2} = \omega_o \left( \frac{d_{pw}}{2} + \frac{d_w}{2} \cos \alpha_4 \right)$$

y la velocidad nominal de la bola:

$$V_4 = (\Omega_C - \omega_o) \frac{d_{pw}}{2} \quad (5.48)$$

El pseudodeslizamiento longitudinal para el contacto 4 es:

$$v_{x4} = \frac{V_{xO1} - V_{xO2}}{V_4} \quad (5.49)$$

Las velocidades transversales en el centro de la elipse de cada sólido:

$$\begin{aligned} V_{yO1} &= \omega_Y \frac{d_w}{2} = 0 \\ V_{yO2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

El pseudodeslizamiento lateral para el contacto 4 es:

$$v_{y4} = \frac{V_{yO1} - V_{yO2}}{V_4} \quad (5.51)$$

El pseudodeslizamiento de espín para el contacto 4 es:

$$\phi_4 = \frac{\Omega_{O1} - \Omega_{O2}}{V_4} \quad (5.52)$$

siendo las velocidades angulares de pivotamiento:

$$\begin{aligned} \Omega_{O1} &= -\omega_X \cos \alpha_4 + \omega_Z \sin \alpha_4 \\ \Omega_{O2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

### 5.1.2. Fuerzas Locales

Una vez obtenidos los pseudodeslizamientos en cada uno de los contactos, tal y como se indica en la Figura 5.6, el siguiente paso es obtener las fuerzas tangenciales y momentos. Para las fuerzas se hará mediante las ecuaciones 5.21, y para los momentos de pivotamiento y de rodadura se utilizan las integrales a lo largo del área de contacto A, 5.54 y 5.55 respectivamente.

$$M_S = \int (\tau_x \cdot y + \tau_y \cdot x) \, dA \quad (5.54)$$

$$M_R = \int \left( \tau_x \cdot \frac{d_w}{2} \right) \, dA \quad (5.55)$$

Introduciendo estas fuerzas tangenciales y momentos de pivotamiento y rodadura en los equilibrios de fuerzas y momentos 2.141, 2.142 y 2.143, se llegará finalmente a un movimiento de la bola compatible con este equilibrio. Y por tanto se tendrá detallada la fuerza tangencial en cada celda de discretización del área de contacto, describiendo de esta manera las zonas de adhesión y deslizamiento en cada uno de los cuatro contactos bola-pista.

A modo de resumen, ya se ha mostrado la necesidad de establecer adecuadamente las condiciones de adhesión y deslizamiento en los contactos bola-pista para no sólo calcular el momento de fricción necesario para hacer girar el rodamiento sino como base para otra clase de modelos que aborden problemáticas en el ámbito de la fatiga y el desgaste. Señalar que no existe en la actualidad un método analítico que proporcione la misma exactitud para cualquier combinación de pseudodeslizamientos, con un coste computacional inferior. Cuando los pseudodeslizamientos son pequeños, la precisión de todos los métodos es buena pero se ha comprobado cómo todos los métodos alternativos al método FASTSIM pierden precisión y cometen errores importantes para algunas combinaciones concretas de pseudodeslizamientos. Aunque en principio la teoría lineal sólo sería válida para situaciones en las que se produjeran pequeños pseudodeslizamientos, en la práctica se demuestra que los resultados pueden ser también muy buenos en el caso de curvaturas más cerradas (incluso niveles de curvatura considerablemente altos [Alonso and Giménez, 2007]). La razón es que cuando el contacto se encuentra saturado, la fuerza de rozamiento obtenida con esta teoría es muy parecida a la real.

Finalmente hacer hincapié en el hecho de que en esta sección no se pretende presentar resultados definitivos sino que el objetivo es demostrar que la hipótesis planteada al modificar las actuales metodologías de resolución del momento de fricción incorporando el algoritmo FASTSIM, proporcionará mejores estimaciones en rodamientos de vuelco de 4 puntos de contacto. Por tanto, orientado a líneas futuras que amplíen este estudio y con vistas a correlar los eventuales resultados que se obtengan en esta sección, se presenta a continuación un modelo de Elementos Finitos correspondiente igualmente a un sólo elemento rodante.

## 5.2. Modelo de Elementos Finitos para el cálculo del momento de fricción

En esta sección se van a detallar los primeros trabajos relativos al desarrollo de un modelo de Elementos Finitos orientado a obtener el momento de fricción en un rodamiento de vuelco de cuatro puntos de contacto. Este modelo servirá así mismo, como validación del modelo analítico que se ha propuesto en la sección anterior, el cual mejoraba el modelo de Joshi [Joshi et al., 2015] detallando las zonas de adherencia y deslizamiento en cada área de contacto. Por otro lado, los modelos analíticos para el cálculo de la fricción no contemplan la posibilidad de que exista truncamiento de la elipse de contacto en casos de carga extremos. En cambio, este truncamiento de la elipse sí puede ser identificado mediante el modelo de Elementos Finitos que se presenta a continuación.

El modelo de Elementos Finitos desarrollado está compuesto por un modelo multiparamétrico de una única bola, que contiene los parámetros geométricos necesarios para definir el contacto bola-pista. Es claro que el momento de fricción del rodamiento depende de la geometría del rodamiento y de las cargas externas aplicadas. Tal y como se indicó en la sección 2.5 y se puede ver en la Figura 2.21, la situación más desfavorable se produce cuando el momento de vuelco  $M$  es normal al plano definido por las fuerzas externas axial y radial  $F_A - F_R$ . Por simplicidad y dado que sólo se ha modelizado una bola, se considerará que esta bola se sitúa en ese plano definido por las fuerzas axial y radial, y que el momento de vuelco es normal a dicho plano. Es decir, se desarrollará un modelo paramétrico por Elementos Finitos de una sección del rodamiento que contenga un único elemento rodante y permita obtener el momento de fricción como función de todos esos parámetros y sirva de validación para el modelo analítico propuesto en la sección anterior.

Parámetro	Símbolo
Díámetro de la bola	$D_w$ [mm]
Díámetro medio del rodamiento	$D_{pw}$ [mm]
Ratio de osculación	$s$
Ángulo de contacto inicial	$\alpha_0$ [°]

Tabla 5.1: Parámetros básicos para la definición geométrica del modelo de Elementos Finitos de una bola

### 5.2.1. Modelo Geométrico de una bola

Los parámetros geométricos del modelo están representados esquemáticamente en la Figura 5.12. Este modelo geométrico consta de unos parámetros principales que se muestran en la Tabla 5.1 y unos parámetros derivados de éstos primeros cuya denominación y modo de obtención se muestran en la Tabla 5.2. La razón para haber fijado los parámetros derivados viene dada en un intento de normalizar la geometría con vistas a que esta metodología sea implementada por los fabricantes de rodamientos. Para cada fabricante por tanto, deberán ajustarse estos parámetros en función de las dimensiones que describan sus series de productos. Es necesario detenerse en el parámetro  $\Psi$ , para aclarar la razón por la cual se ha determinado su valor mediante esa expresión mostrada en la Tabla 5.2. Como se puede deducir, el ángulo barrido por el sector determina el número total de grados de libertad del modelo de Elementos Finitos. Por tanto, se debe seleccionar el mínimo ángulo posible que considere las áreas de contacto así como los efectos de borde. En este sentido, se ha probado que el valor mostrado en la tabla resulta ser el más eficiente desde el punto de vista computacional teniendo en cuenta las consideraciones mencionadas.

### 5.2.2. Modelo de Elementos Finitos de una bola

En lo que respecta a la parametrización de la malla para el modelo de Elementos Finitos, se han establecido dos zonas de mallado de forma que en una primera zona alejada del contacto en la que no se necesita excesivo detalle, los elementos tienen un mayor tamaño respecto a una segunda zona en la que se busca una mayor discretización para

Parámetro	Símbolo	Expresión
Diámetro interior	$D_I$ [mm]	$D_{pw} - D_w$
Diámetro exterior	$D_O$ [mm]	$D_{pw} + D_w$
Espacio libre entre anillos	$e$ [mm]	$0.1 \cdot D_w$
Radio de la pista	$R_c$ [mm]	$(D_w/2)$
Altura del anillo	$H$ [mm]	$1.5 \cdot D_w$
Ángulo barrido por el sector	$\Psi$ [°]	$(180/\pi) \cdot (D_w/D_{pw})$

Tabla 5.2: Parámetros derivados para la definición geométrica del modelo de Elementos Finitos de una bola

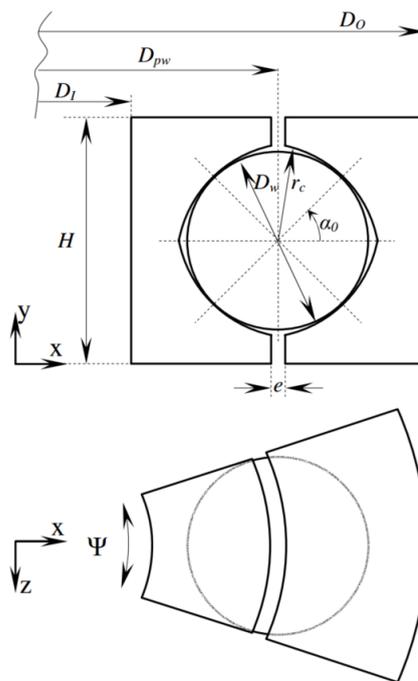


Figura 5.12: Parámetros geométricos de las Tablas 5.1 y 5.2, de manera esquemática [Aguirrebeitia et al., 2015]

estudiar de forma precisa el potencial contacto entre bola-pista. La Tabla 5.3 muestra los tamaños adoptados en las dos diferentes zonas del modelo. De esta manera el número de nodos ha sido optimizado para representar de forma precisa las presiones superficiales y tracciones, en tanto en cuanto el resto del modelo está adecuadamente representado con una malla más gruesa.

Por lo que respecta a las cargas, las interferencias axiales  $\delta_a$  y radiales  $\delta_r$  originadas por las cargas externas aplicadas (ver Figura 3.1) se calculan mediante los métodos

Zona	Tamaño de elemento
1	$0.25 \cdot D_w [\text{mm}]$
2	$0.0125 \cdot D_w [\text{mm}]$

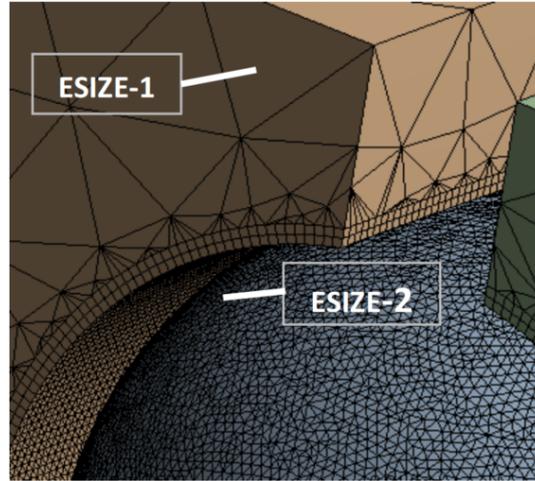


Tabla 5.3: Tamaño de elementos para las diferentes zonas de mallado [Aguirrebeitia et al., 2015]

presentados en los Capítulos 3 y 4. Es decir, para este modelo de una única bola, las interferencias axiales y radiales representan un estado de carga concreto que puede ser obtenido mediante los métodos de los Capítulos 3 y 4, y son precisamente estos desplazamientos axial y radial los que se le impongan al anillo interior para en un paso posterior aplicar un desplazamiento angular al anillo interior cuyo centro de rotación será el eje de giro del rodamiento. Este desplazamiento angular se ha definido para que se pueda cubrir una distancia de 2.5 veces el semieje menor de la elipse de contacto. Este valor se ha comprobado que es el necesario para estabilizar el valor del momento de fricción durante el análisis ( $RotY[^\circ] = \frac{5 \cdot b}{(D_{pw}/2)} \cdot \frac{180}{\pi}$ , con  $b = \max \{b_i\}$ ). En este sentido, con el objetivo de capturar completamente la actual situación de adhesión y deslizamiento correspondiente, se necesita un desplazamiento de al menos dos veces el semieje menor de la elipse como se muestra en la Figura 5.13. En referencia al resto de parámetros, la resolución de los ángulos de contacto finales ( $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ), las fuerzas en el contacto ( $Q_1$  y  $Q_2$ ), las dimensiones de las elipses de contacto ( $a_i$  y  $b_i$ ) y la máxima presión de contacto ( $P_{max_i}$ ) se realizan mediante las expresiones 3.5, 3.6, 2.93, 2.91 y 2.92 respectivamente, donde para este modelo de una sola bola la interferencia axial  $\delta_a$  engloba la interferencia resultante  $\delta_a + \delta_\theta$  de la Figura 3.1.

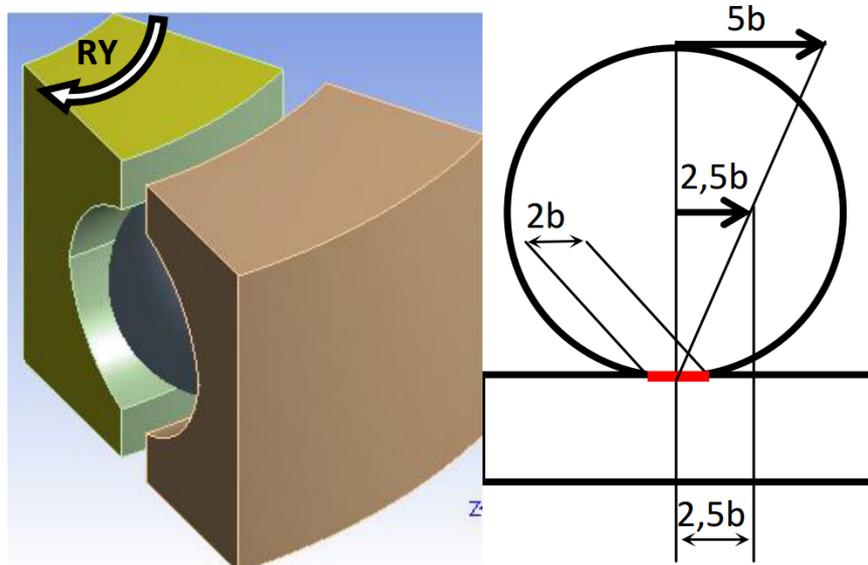


Figura 5.13: Desplazamiento angular del anillo interior [Aguirrebeitia et al., 2015]

### 5.2.3. Resultados preliminares del modelo de fricción de Elementos Finitos

El modelo de Elementos Finitos que se acaba de describir tiene un carácter paramétrico, por tanto es posible realizar el cálculo del momento de fricción para diferentes combinaciones de parámetros geométricos y desplazamientos axiales y radiales simultáneamente. Con las condiciones de contorno de la sección anterior y los desplazamientos impuestos, se presentan a continuación dos ejemplos a modo de demostrador de los resultados que pueden obtenerse de cara a poder compararlos con el desarrollo de la sección 5.1. En la tabla 5.4 se recogen los parámetros utilizados para el modelo de fricción de Elementos Finitos de dos casos extremos. Al primero de ellos se le impone una condición tal que únicamente se produce contacto en dos de los cuatro puntos de contacto bola-pista (interferencias  $\delta_1 = 25\%$  y  $\delta_2 = 0\%$  de la capacidad estática del rodamiento); al segundo caso se le impone una interferencia alta y de igual magnitud en todos los contacto ( $\delta_{1,2} = 75\%$  de la capacidad estática). Los resultados generales originados por estos parámetros y condiciones impuestas se recogen en la tabla 5.5, mostrando si se produce o no contacto, y en caso de producirse si existe de manera general rodadura o pivotamiento en el área de contacto.

$d_{pw}$ [mm]	$d_w$ [mm]	$\alpha_{final}$ [°]	$s$ [-]	$\mu$ [-]	$\delta_1$ [%]	$\delta_2$ [%]
1000	30	45	0.95	0.10	25%	0%
1000	30	45	0.96	0.09	75%	75%

Tabla 5.4: Parámetros para la definición geométrica del modelo de Elementos Finitos de una bola para el cálculo del momento de fricción

Diagonal de contacto 1 [-]	Diagonal de contacto 2 [-]	$M_f$ [N · m]
Rodadura	No contacto	2.0
Pivotamiento	Pivotamiento	1228.9

Tabla 5.5: Resultados globales de los casos de la tabla 5.4

Como puede apreciarse en la Figura 5.15, las deformaciones impuestas hacen que únicamente exista contacto en la diagonal de contacto que une los cuadrantes 1 y 3 (de acuerdo al sistema de referencia de la Figura 5.7). En dicha Figura, a la izquierda se representa el mapa de presiones de contacto y a la derecha las tensiones tangenciales. Bajo estas condiciones de carga el modelo de Elementos Finitos muestra claramente que tal y como postulaba, existe adhesión en las áreas de contacto. En la Figura 5.14 se muestran los cuadrantes 1 y 3 en los que se aprecia que mayoritariamente existe adhesión frente a una mínima zona de deslizamiento que coincide con la frontera de ambos áreas de contacto. Por tanto el movimiento de la bola será de rodadura tal y como se indicaba en la Tabla 5.5. Dado que esta rodadura no se da en un punto sino en una superficie (elíptica en este caso), habrá regiones del área de contacto en la bola cuya velocidad relativa respecto de la pista tengan el mismo sentido que el avance del centro de la misma y otras que se desplacen en sentido contrario, existiendo una banda de velocidad nula entre ambas regiones; este hecho es conocido como el deslizamiento de Heathcote [Bhushan, 2013]. Este efecto se aprecia perfectamente en la Figura 5.16 donde se representan los vectores de las tensiones tangenciales en los áreas de contacto. El segundo de los casos indicados en las Tablas 5.4 y 5.5 tiene una condiciones impuestas tales que se produce contacto en los cuatro cuadrantes. La Figura 5.17b) muestra el reparto de presiones en los contactos y en a) se puede ver la distribución de tensiones

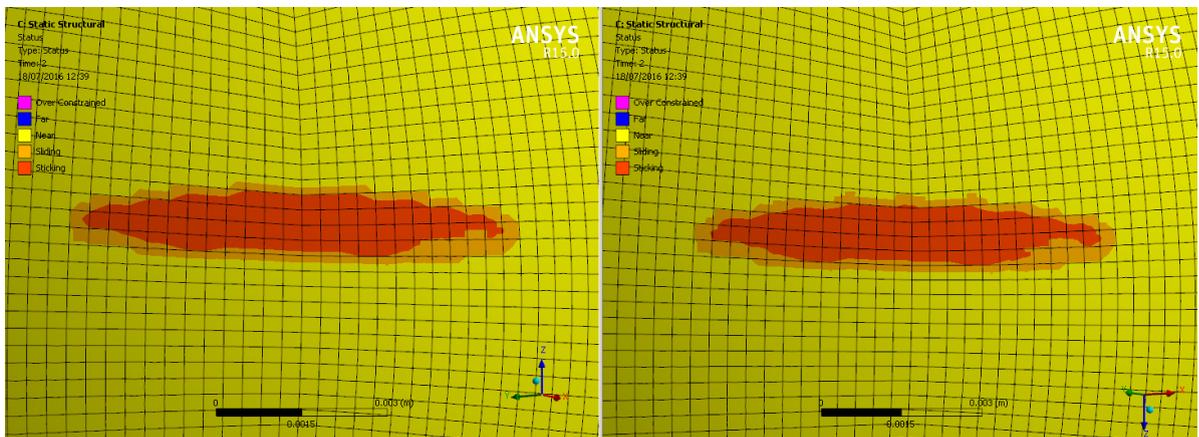
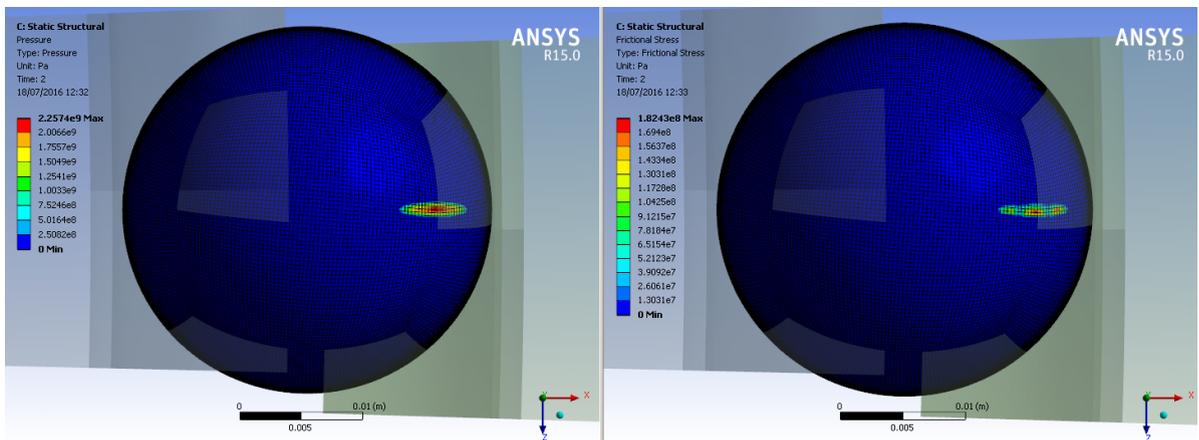
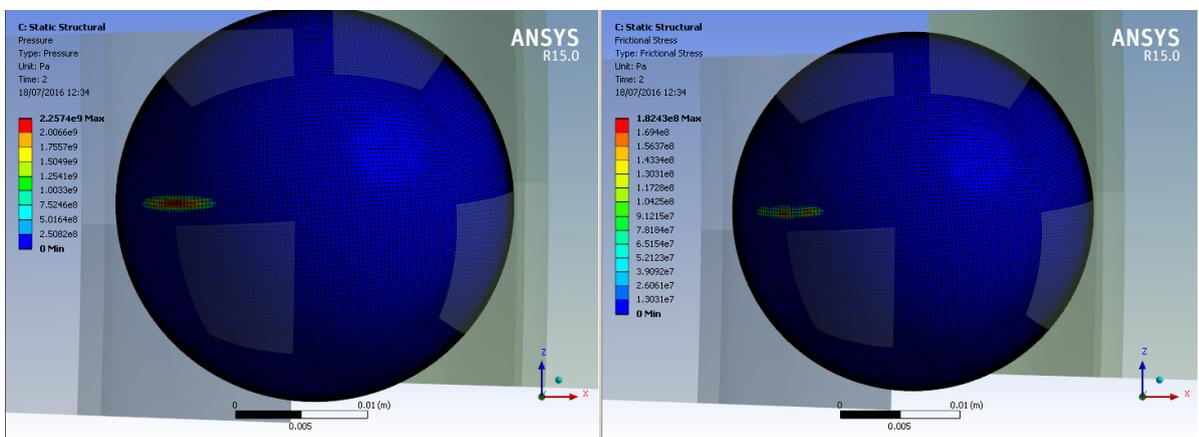


Figura 5.14: Zonas de adhesión para el cuadrante 1 (izquierda) y el cuadrante 3 (derecha) para el primer caso de la Tabla 5.4

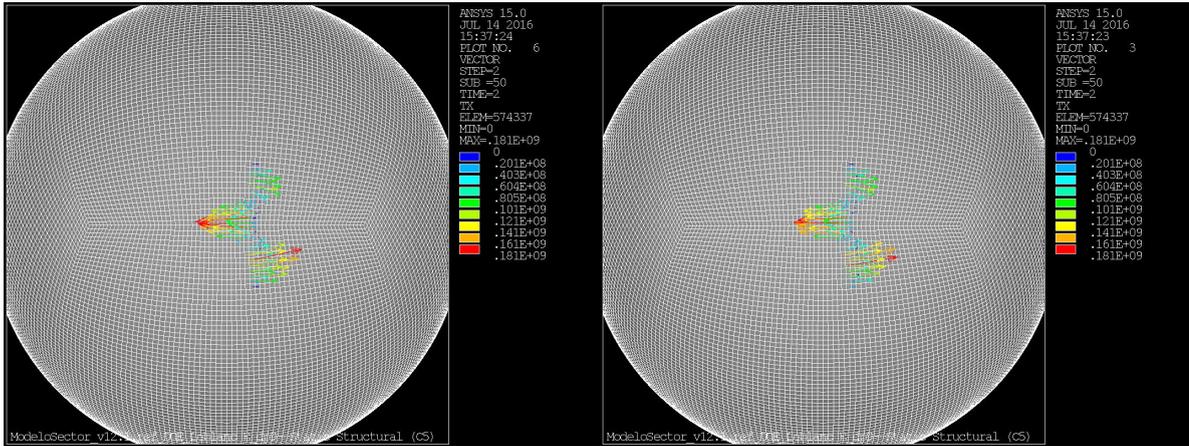


a) Primer cuadrante (de acuerdo al sistema de referencia de la Figura 5.7). Izquierda reparto de presión de contacto. Derecha tensiones tangenciales.



b) Tercer cuadrante (de acuerdo al sistema de referencia de la Figura 5.7). Izquierda reparto de presión de contacto. Derecha tensiones tangenciales

Figura 5.15: Distribución de presiones y tensiones tangenciales para el primer caso de la Tabla 5.4

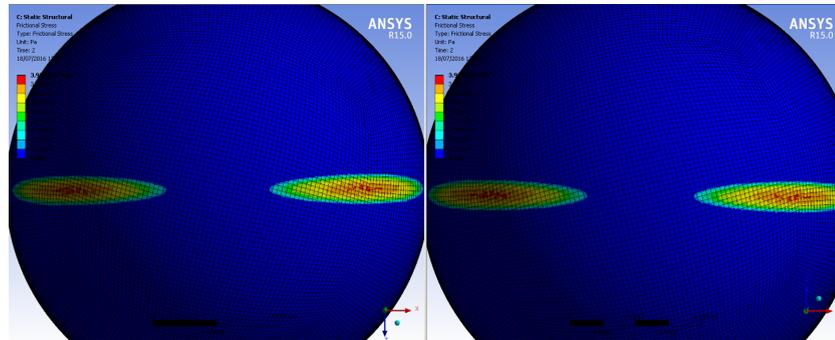


b) Direcciones y sentidos de los vectores de tensiones tangenciales en el cuadrante 3      a) Direcciones y sentidos de los vectores de tensiones tangenciales en el cuadrante 1

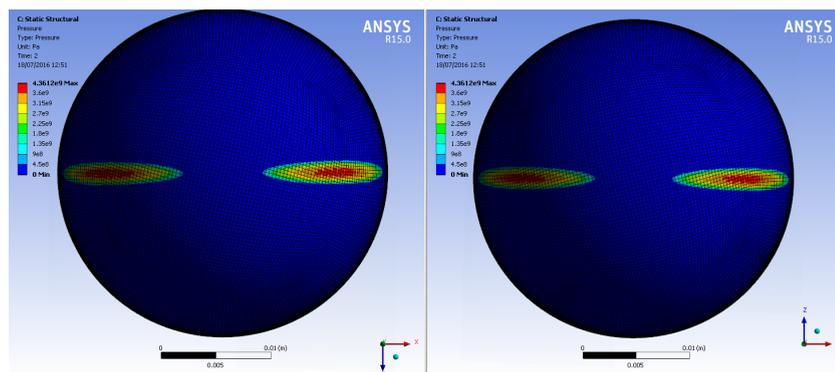
Figura 5.16: Direcciones y sentidos de las tensiones tangenciales en los contactos activos para el primer caso de la Tabla 5.4

tangenciales en esos mismos contactos. Al igual que en el caso previo, el análisis busca confirmar que existe adhesión en los contactos para corroborar las hipótesis planteadas por el modelo analítico de la sección 5.1 anterior. Esta vez, debido al movimiento de la bola no puede existir una zona de adhesión tan amplia como para el caso anterior pero la Figura 5.18 revela la existencia de una pequeña zona de adhesión en cada uno de los contactos apoyando el supuesto descrito previamente. Del mismo modo que para el caso precedente, si se dibujan los vectores de las tensiones tangenciales en cada uno de las áreas de contacto se comprueba que la dirección de estos vectores gira a lo largo del área de contacto, confluyendo en cada punto de adhesión describiendo de forma clara el pivotamiento que se ha adelantado en los resultados de la Tabla 5.5.

Por último, si se dibuja la evolución del momento de fricción a lo largo del giro desarrollado en el modelo de Elementos finitos para ambos casos, resultan las gráficas mostradas en la Figura 5.20. Para tener una expresión que pueda ser utilizada a la hora de realizar cálculos de estimación del momento de fricción, se ha realizado un ajuste por mínimos cuadrados y mediante este ajuste se ha obtenido una función aproximante que tiene la siguiente expresión, donde  $RY$  representa la rotación relativa entre el anillo interior y exterior.



a) Tensiones tangenciales en los contactos.  
De izquierda a derecha: cuadrante 2, 1, 3 y 4.



b) Reparto de presión en los contactos.  
De izquierda a derecha: cuadrante 2, 1, 3 y 4.

Figura 5.17: Distribución de presiones y tensiones tangenciales en los contactos para el segundo caso de la Tabla 5.4

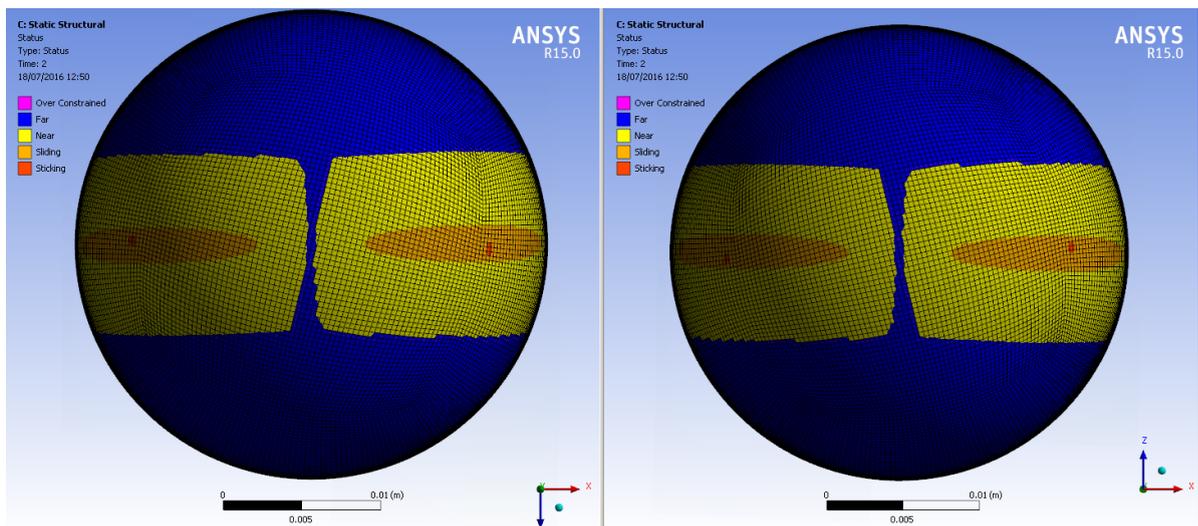
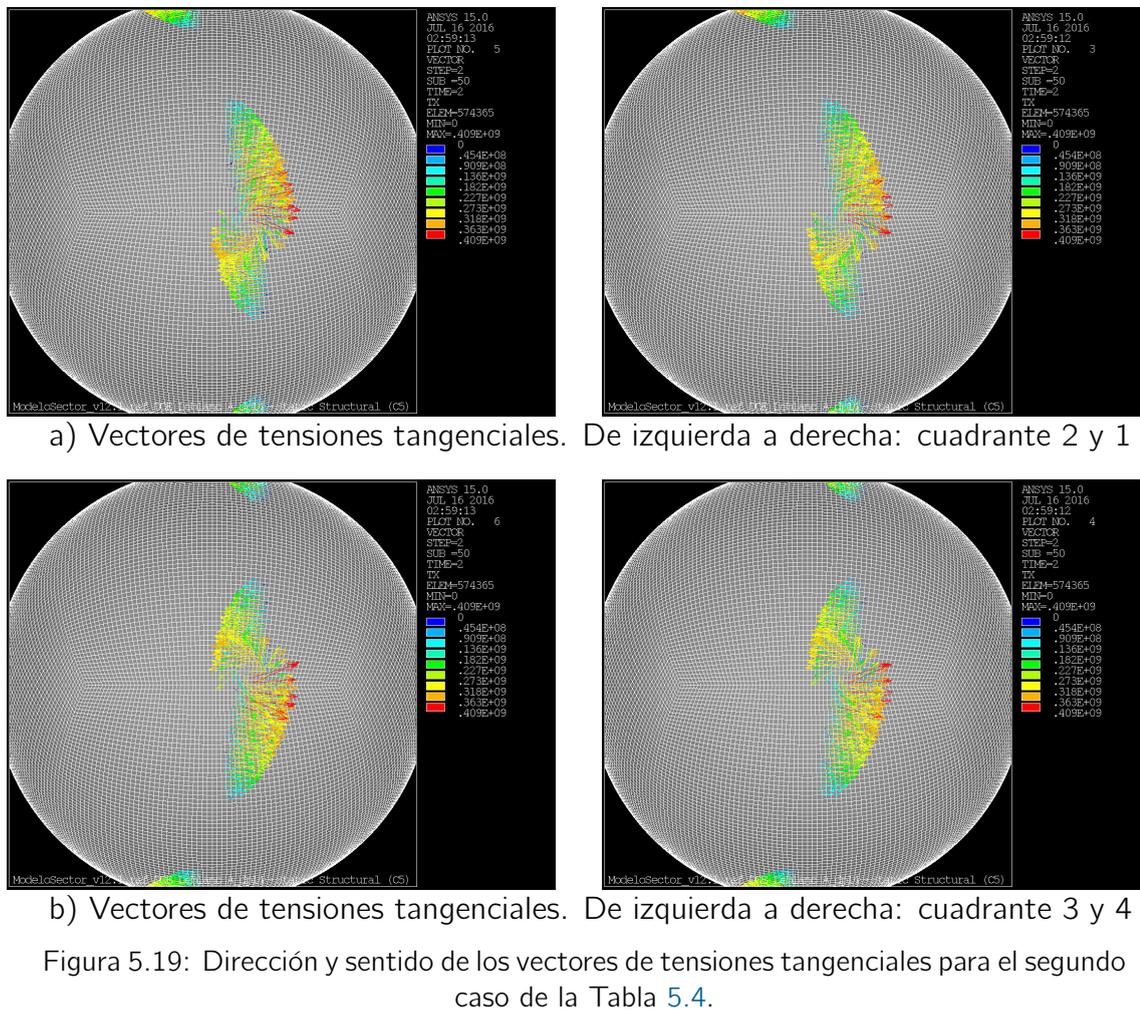


Figura 5.18: Zonas de adhesión y deslizamiento para el segundo caso de la Tabla 5.4.  
De izquierda a derecha: cuadrante 2, 1, 3 y 4.



$$M_{Fric} = \frac{M_0 (RY - 1)^\mu}{\beta + (RY - 1)^\mu} \quad (5.56)$$

De esta función aproximante se tomará  $M_0$  como el valor del momento de fricción efectivo, y es la manera en la que se han obtenido los valores de 2.0 Nm y 1228.9 Nm indicados en la Tabla 5.5. Esta diferencia tan acusada entre uno y otro resultado es coherente con la existencia para el primer caso únicamente de dos puntos de contacto, baja carga y rodadura pura, frente a los cuatro puntos de contacto, alta carga y deslizamientos relevantes del segundo caso.

Finalmente tras presentar estos dos ejemplos numéricos del modelo de Elementos Finitos desarrollado para el análisis del momento de fricción en rodamientos de vuelco de cuatro

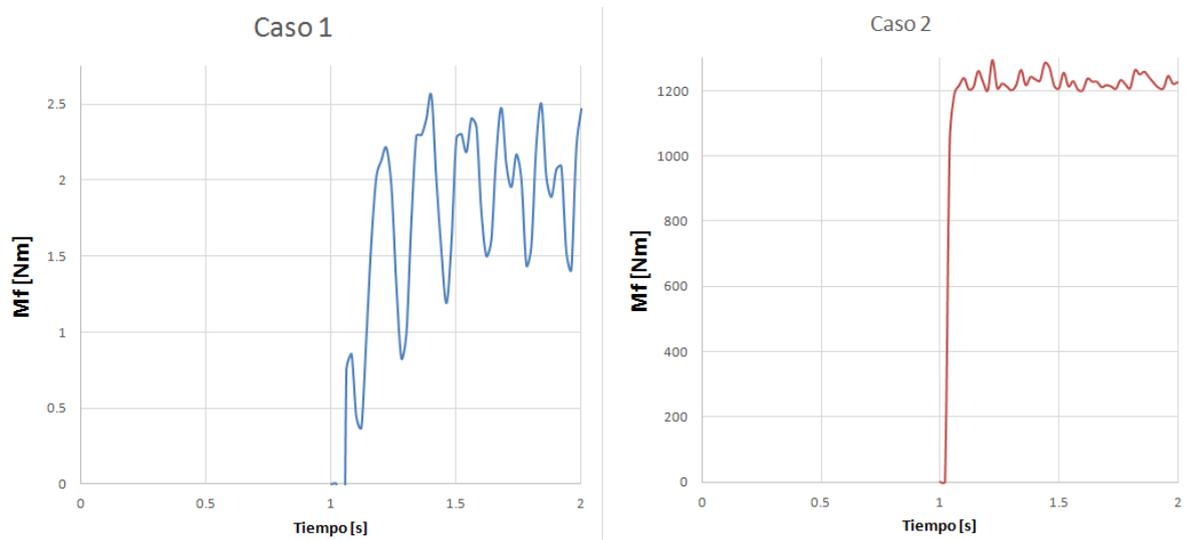


Figura 5.20: Evolución del momento de fricción para ambos casos de la Tabla 5.4 [Aguirrebeitia et al., 2015]

puntos de contacto, se puede concluir que este modelo paramétrico es suficientemente versátil como para validar cualquier procedimiento más simplificado que pudiera desarrollarse. Así mismo, a la vista de los resultados obtenidos para los dos casos extremos presentados queda confirmada la necesidad de desarrollar el modelo analítico del momento de fricción planteado, bajo la línea de investigación planteada que analiza la posible existencia de zonas de adhesión en el área de contacto en lugar de considerar únicamente deslizamiento.



# 6

## Conclusiones, líneas futuras y publicaciones derivadas de la Tesis

### 6.1. Conclusiones

Esta sección alberga las principales aportaciones y conclusiones obtenidas en el ámbito de esta Tesis Doctoral.

Se ha **desarrollado un modelo analítico para el cálculo de la capacidad estática generalizada** en rodamientos de vuelco de 4 puntos de contacto angular. El modelo se basa en los trabajos de Aguirrebeitia [Aguirrebeitia et al., 2010b] para que tenga en cuenta parámetros que en modelos tradicionales no se consideran, como el ángulo de contacto y la precarga de las bolas.

Se ha comprobado que **estos parámetros tienen una influencia** nada despreciable en el comportamiento del rodamiento frente al reparto de cargas debidas a los esfuerzos externos aplicados. Un **valor excesivo de precarga afectará negativamente** a la capacidad de carga, es decir, ésta se verá reducida. Por otro lado, **un valor de precarga**

**adecuado ayudará a que el reparto de cargas interno entre las bolas se produzca de forma más uniforme y la capacidad de carga se pueda ver incrementada.** Se considera que los parámetros de partida son iguales en todas las bolas, es decir, queda fuera del alcance de esta Tesis Doctoral la variación estadística de la capacidad de carga en función de tolerancias dimensionales.

Mediante un **modelo de Elementos Finitos** se ha validado el modelo analítico y se ha introducido de esta manera la posibilidad de evaluar la influencia de la rigidez de los anillos y estructuras unidas a los mismos, comprobándose que esta **mayor flexibilidad** del conjunto frente a la consideración de rigidez infinita **afecta de forma notable en el reparto de esfuerzos en las bolas.**

El modelo analítico se ha **resuelto mediante metodología inversa** lo que resulta muy **eficiente desde el punto de vista computacional a la hora de estimar la capacidad estática.** Esta eficiencia ha permitido obtener de manera rápida una superficie que define la combinación de cargas admisible para evitar el fallo estático del rodamiento. Con esta superficie proyectada en forma de curvas de nivel, se ha desarrollado de un **método gráfico** que resulta de gran ayuda a modo de **herramienta de selección de rodamientos de vuelco para los diseñadores** que deban incluirlos en sus mecanismos.

La metodología desarrollada y el modelo analítico es aplicable no sólo al cálculo de la capacidad estática del rodamiento, sino que también es útil como modelo para la estimación del reparto de cargas en las bolas. Así mismo, la metodología desarrollada resulta útil para valorar qué influencia pueden tener los parámetros de diseño (diámetro de las bolas, conformidad, ángulo de contacto, precarga, ...) en la distribución de los esfuerzos externos en el conjunto de las bolas.

Por otro lado, bajo la hipótesis de anillos rígidos, también es posible hacer uso del modelo analítico desarrollado en esta Tesis Doctoral para verificar las deformaciones que se dan debidas a la deflexión en los contactos bola-pista. Si bien es cierto que la hipótesis de anillos rígidos hace que se obtengan unos resultados de deformaciones mucho menores a las que realmente existen, para unas primeras estimaciones y para ver la influencia

en la rigidez de parámetros de diseño como la conformidad, el ángulo de contacto o la precarga, resultan de gran utilidad.

No obstante, la rigidez del conjunto puede ser un parámetro restrictivo. Precisamente para este propósito de **evaluar adecuadamente las deformaciones globales** que se dan en el rodamiento actuando conjuntamente con las estructuras adyacentes a las que se une, se ha desarrollado una **metodología basada en la técnica de superelementos**. Esta metodología permite evaluar la rigidez del sistema rodamiento más estructuras entre las que se permite giro relativo, **de manera muy eficiente desde el punto de vista computacional**.

Finalmente, los modelos actuales para el momento de fricción no evalúan la eventual existencia de zonas de adhesión y deslizamiento sino que consideran que todo el área de contacto se encuentra deslizando. La forma de trabajo de este tipo de rodamientos soportando altas cargas y realizando oscilaciones a bajas velocidades angulares hace que puedan darse ambos fenómenos en cada área de contacto. En esta Tesis Doctoral se han sentado las bases de manera preliminar, de cómo incluir algoritmos de resolución de la dinámica del contacto para obtener las zonas de adhesión y deslizamiento junto con las tensiones tangenciales en los diferentes puntos del área de contacto.

## 6.2. Líneas futuras de la Investigación

A raíz de los trabajos desarrollados en la presente Tesis Doctoral, se identifican las siguientes líneas futuras de investigación:

- Validación experimental sobre rodamientos reales de los modelos para el reparto de esfuerzos en los elementos rodantes, la rigidez global del rodamiento y del modelo preliminar para el momento de fricción, desarrollados en esta Tesis Doctoral
- Ampliación del modelo analítico para que éste incorpore la capacidad de considerar los anillos como elementos flexibles

- Cualquier variación dimensional en parámetros geométricos del contacto bola-pista como son el diámetro de la bola, radio de la pista o la relación entre ambos, provoca una gran variación de la carga en el contacto. En este sentido, se plantea el analizar de forma estadística las variaciones de la distribución de la carga en función de las discrepancias geométricas para los parámetros citados
- Planteamiento analítico del par de fricción en función de la precarga y del sistema externo de cargas, que se ajuste a la forma de trabajo de los rodamientos de vuelco y que tengan en cuenta el fenómeno de contacto en rodadura con altas presiones, en base a los estudios preliminares llevados a cabo en esta Tesis Doctoral

### 6.3. Publicaciones derivadas de la Tesis Doctoral

#### 6.3.1. Publicaciones JCR

Los trabajos desarrollados en esta Tesis Doctoral han sido publicados en distintos artículos, enumerados a continuación:

- Aguirrebeitia, J., Plaza, J., Abasolo, M., Vallejo, J., General static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generator actuation systems. *Wind Energy Journal*. Vol.16. Issue 5, pages 759-774. 2013.
- Aguirrebeitia, J., Plaza, J., Abasolo, M., Vallejo, J., Effect of the preload in the general static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generators: theoretical model and finite element calculations. *Wind Energy Journal*. Vol. 17. Issue 10, pages 1605-1621. 2014.
- Abasolo, M., Coria, I., Plaza, J., Aguirrebeitia, J., New selection curves for four contact point slewing bearings. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2015.
- Plaza, J., Abasolo, M., Coria, I., Aguirrebeitia, J., Fernández de Bustos, I., A new finite element approach for the analysis of slewing bearings in wind turbine

generators using superelement techniques. *Meccanica Journal*. Vol 50. Issue 6, pages 1623-1633. 2015.

### 6.3.2. Congresos

También han sido expuestos trabajos en varios congresos:

- Plaza González, J., Echarte Casquero, F.J., Vázquez Mato, J., González-Posada, M.A., (2009) Proc. of the 2008 STLE/ASME Int. Joint Tribology Conf., Miami, FL, 20–22 October 2008, Blade bearing friction and fatigue mathematical model (American Society of Mechanical Engineers, New York, NY), pages 427–431.
- Aguirrebeitia Celaya, J., Plaza González, J., Abasolo Bilbao, M., Vallejo Matilla, J., Capacidad de carga estática generalizada en rodamientos de vuelco de contacto angular de 4 puntos. Influencia de la precarga. XIX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. 2012.
- Aguirrebeitia, J., Plaza, J., Heras, I., FEM Model for Friction Moment Calculations in Ball-Raceway Contacts for Applications in Four Contact Point Slewing Bearings. Proceedings of the 14th IFToMM World Congress. pages 642–647. 2015.



## RESEARCH ARTICLE

# General static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generator actuation systems

Josu Aguirrebeitia<sup>1</sup>, Jon Plaza<sup>2</sup>, Mikel Abasolo<sup>1</sup> and Javier Vallejo<sup>1</sup><sup>1</sup> Department of Mechanical Engineering, University of the Basque Country, Bilbao, Vizcaya, Spain<sup>2</sup> Technology Department, GAMESA Innovation and Technology, Zamudio, Spain

## ABSTRACT

Four-contact-point slewing bearings are widely used in wind turbine generators (WTGs) to adjust the orientation of the blades and the nacelle to fully exploit wind resources. These bearings must withstand static and fatigue loads; however, at the first stages of the design process, the bearings are commonly selected by considering only static loads. This paper presents a further step of a previous theoretical work published by the authors in the field of the static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings under axial, radial and tilting-moment loads. In that work, a generalization of the works by Sjövall and Rumbarger was presented, providing an acceptance surface of the bearing in the load space. The contact angle of the balls was assumed to be load independent. The present work improves that development by considering the influence of the variability of the contact angle with the applied load, and as a result, the acceptance surface has been redefined. By comparing the results with those of the finite element model published by the authors, it is proven that the new model presented in this work is more realistic than the previous one. Thus, it is believed that this methodology can be easily applied for the initial selection of blade and yaw bearings in WTGs. Copyright © 2012 John Wiley & Sons, Ltd.

## KEYWORDS

yaw bearing; blade bearing; static load-carrying capacity; acceptance surface

## Correspondence

Mikel Abasolo, Department of Mechanical Engineering, University of the Basque Country, Bilbao, Vizcaya, Spain.

E-mail: mikel.abasolo@ehu.es

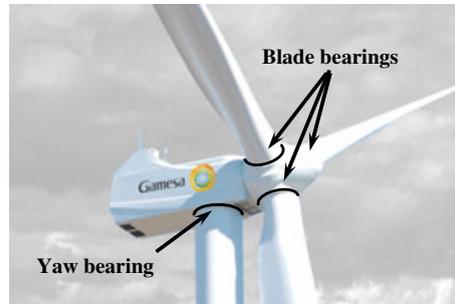
Received 17 November 2011; Revised 26 April 2012; Accepted 11 May 2012

## 1. INTRODUCTION

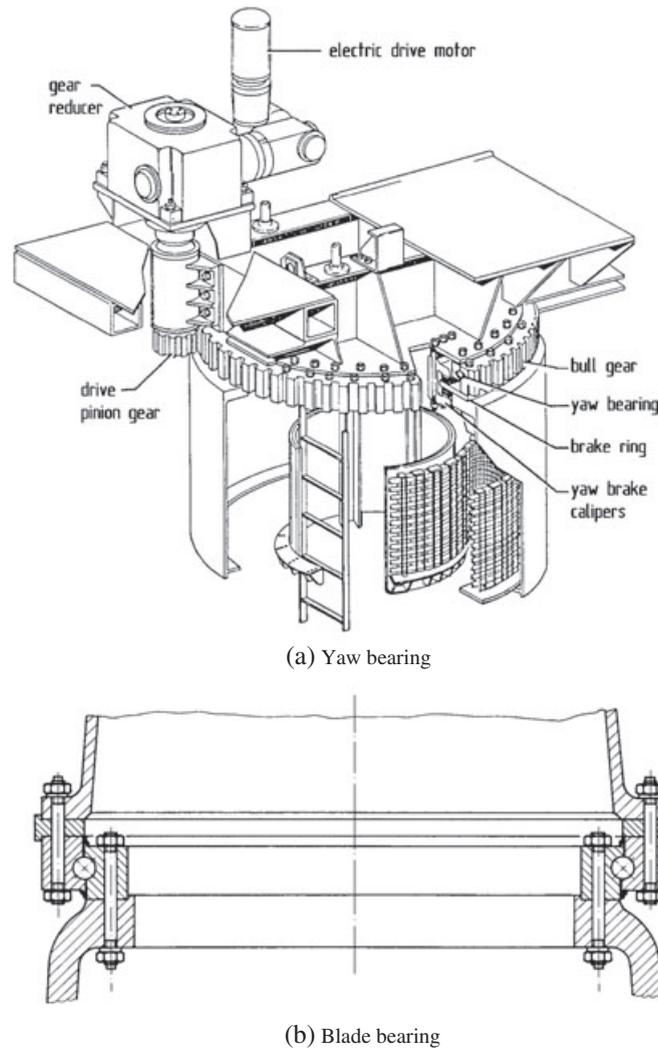
Slewing bearings are used in applications where large rotational functional elements are involved. In wind turbine generators (WTGs), slewing bearings are used for orientation purposes. On the one hand, the rotor must be oriented correctly to the wind direction in order to fully capture the wind's power—the yaw angle, i.e. the angle deviation between rotor axis and wind direction, causes a loss of power. For this purpose, a bearing is placed between the nacelle and the tower, which turns the nacelle with the help of a motorized drive (yaw control). On the other hand, mechanical adjustment of the rotor blade pitch angle is used to modify the aerodynamic angle of attack, thus allowing a sensitive and stable control of aerodynamic power capture and rotor speed. In this case, the blade is also turned by a bearing, located at the blade root, i.e. in the rotor hub (blade pitch control).<sup>1,2</sup> These bearings are illustrated in Figure 1.

Although small turning speed and range are required in both cases, it must be ensured that the bearings' friction moment remains as small as possible, in order to avoid unnecessarily large pitching or yawing forces; for this reason, ball bearings are generally used. Figure 2 shows angular four-contact-point bearings for yaw and pitch control. These bearings (yaw and blade bearings) are subjected to high static loads; moreover, continuous deformation of the bearing support is unavoidable.<sup>1</sup> Figure 3 shows the topology of this type of bearing, together with the usual load system acting on it: axial and radial forces, as well as a tilting moment; in the most unfavourable load case, the radial force is perpendicular to the tilting moment.

Bearings of WTGs must withstand both static (extreme) and fatigue loads; static loads can easily be estimated at early stages of the design process. Thus, a first selection of the bearings is commonly performed considering only the static load-carrying capacity; this initial selection is necessary in order to design other components of the WTG, such as the rotor.

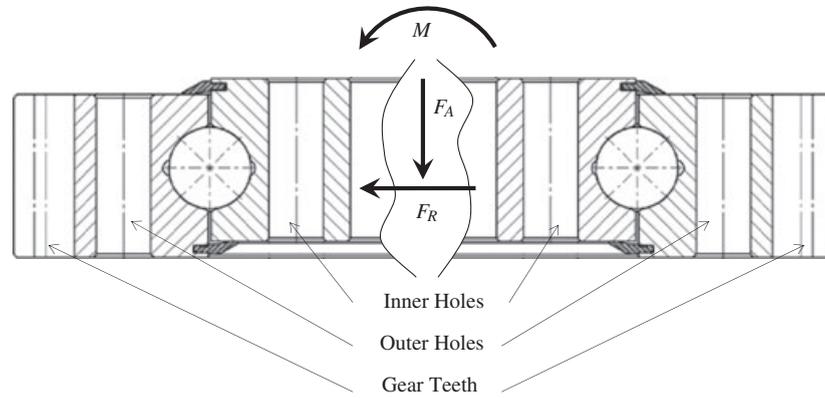


**Figure 1.** Bearings for yaw and pitch control.

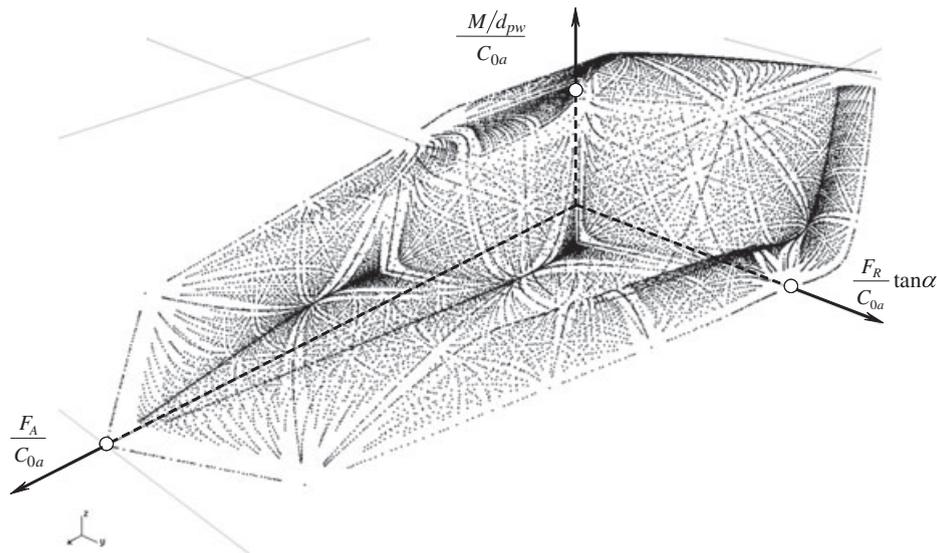


**Figure 2.** Four-contact-point slewing bearings in WTGs.<sup>1</sup>

Later on, once the fatigue loads that will act on the bearings have been calculated (which depends strongly on the control strategy adopted by the manufacturer), it is checked whether the formerly selected bearings are able to withstand fatigue loads; if not, some of the dimensions are adjusted (number and/or diameter of balls, mean diameter, etc.) to fulfil fatigue requirements. In conclusion, the calculation of static load-carrying capacity is generally used for the initial selection of the four-contact-point slewing bearings of WTGs (blade and yaw bearings). The effects of other factors, such as rolling



**Figure 3.** Setup and load system of a four-contact-point slewing bearing.

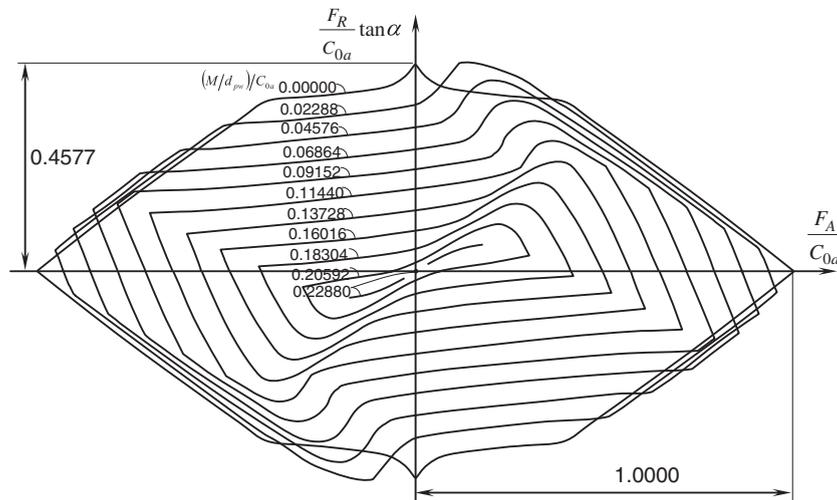


**Figure 4.** Acceptance surface in the normalized load space.<sup>3</sup>

element kinematics and dynamics, rolling friction and elastohydrodynamic lubrication, are not relevant for pitch and yaw bearing selection because of their limited velocities and rotation angle ranges.

The static loads acting on the yaw bearing are, on the one hand, the axial load caused by the weight of the nacelle and the rotor and, on the other hand, the radial load and the tilting moments caused by the wind load. In the blade bearing, the axial force is caused by the weight of the blade and its centrifugal force, whereas the wind load is responsible for the radial load and the tilting moment.<sup>1</sup>

In a previous work,<sup>3</sup> the authors derived a theoretical method to arrange the general static load capacity of four-contact-point slewing bearings. In contrast with other works<sup>4–6</sup> based on the direct approach introduced by Jones,<sup>7</sup> this method was based on the inverse approach developed by Sjöväll<sup>8</sup> (for combinations of axial and radial loads) and Rumbarger<sup>9</sup> (for combinations of axial and moment loads). Thus, in that previous work<sup>3</sup> a generalization of the methods presented in Sjöväll<sup>8</sup> and Rumbarger<sup>9</sup> was developed, which directly calculated the axial, radial and tilting moment load combinations that cause static damage in the most loaded rolling element (as defined in the ISO 76:2006<sup>10</sup>). Each of these load combinations was represented by a point in the load space shown in Figure 4, in such a way that all of the points formed a point cloud, which in turn defined the ‘acceptance surface’ of the bearing. The load space was normalized with respect to the axial load capacity  $C_{0a}$  (as defined in ISO 76:2006<sup>10</sup> with load-independent constant contact angle), the contact angle  $\alpha_0$  and the ball centre diameter  $d_{pw}$ . This normalization makes the acceptance surface valid for any four-contact-point slewing bearing. In Figure 5, some curve fits are presented in the normalized  $F_A$ – $F_R$  plane for several values of the normalized tilting moment.



**Figure 5.** Acceptance curves in the normalized  $F_A$ - $F_R$  plane for several values of the normalized tilting moment.<sup>3</sup>

The theoretical method presented in the previous work<sup>3</sup> was based on the classical geometrical interference model, which assumes rigid rings, in such a way that the interferences are directly considered as ball deformations. In practice, the rings are flexible, which entails that the load distribution and, therefore, the load-carrying capacity of the bearing are different from that predicted by the theoretical model. Moreover, not only the stiffness of the rings plays an important role in this issue but also the nature of the elements that are connected to the inner and outer rings of the bearing, because they have a direct influence on the overall stiffness of the system and on the way the loads are transmitted to the bearing. By assuming rigid rings, the theoretical model neglects these effects (which can only be estimated experimentally or via complex finite element (FE) models) and leads to conservative results; this aspect was verified by the authors in another work,<sup>11</sup> where the FE models of three commercial bearings were analysed and compared with the theoretical results.<sup>3</sup> Thus, that theoretical method proved to be an extremely useful and cost-effective tool for an initial selection of the bearing at the early stages of the WTG design process.

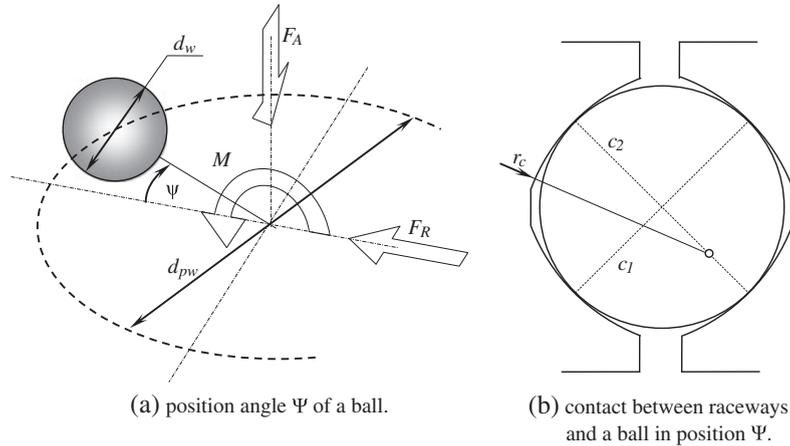
In the present work, a further step is considered over that theoretical model,<sup>3</sup> by including the effect of the load-dependent variability of the contact angle of the balls, which directly affects both the load distribution on the bearing and its load capacity. Thus, the acceptance surface has been refined, providing a more realistic approach. In this new development, the normalization of the acceptance curve is harder than in the previous work<sup>3</sup>; in fact, it will be proven that different point clouds are arranged for different combinations of the initial contact angle  $\alpha_0$  and the osculation ratio  $s$ .

## 2. METHOD

Next, the procedure to obtain the three-dimensional condition of acceptance for the bearing is explained. First, a model of geometrical interference is formulated, considering rigid rings and deformable balls as in the previous work;<sup>3</sup> therefore, the interferences are directly considered as ball deformations. Afterwards, several combinations of axial, radial and angular displacements for which the most loaded ball reaches the statically allowable interference or elastic deflection are arranged (as deduced from ISO 76:2006<sup>10</sup>); these interference combinations define the acceptance surface in the interference space. Finally, the force and moment equilibrium equations are applied, and as a result, the allowable axial, radial and moment load combinations are calculated from the aforementioned allowable interferences; these load combinations define the acceptance surface in the load space.

### 2.1. Geometrical interference model

Figure 6 shows the reference frame and the nomenclature to be used in the following analysis:  $\Psi$  is the azimuthal angle that indicates the position of a ball within the bearing;  $c_1$  is the contact direction between the upper raceway of the inner ring and the lower raceway of the outer ring;  $c_2$  is the contact direction between the lower raceway of the inner ring and the



**Figure 6.** Frame of reference and nomenclature.

upper raceway of the outer ring;  $d_w$  and  $d_{pw}$  are, respectively, the ball diameter and ball centre diameter;  $r_c$  is the raceway radius, identical for the four raceways. The osculation ratio  $s$  is defined as follows:

$$s = \frac{d_w}{2r_c} \tag{1}$$

Figure 7 shows the geometrical interference between the rings and a ball whose azimuthal angle is  $\Psi$ .  $\Delta_a$  is the axial distance between the centres of the upper and lower raceways of the inner and outer rings, whereas  $\Delta_r$  is the radial distance between the centres of the upper and lower raceways of the inner and outer rings. It is assumed that only the inner ring can be displaced (the loads are applied on this ring), while the outer ring remains fixed. When a certain  $\delta_a$ ,  $\delta_r$  and  $\delta_\theta$  combination of axial, radial and angular displacements is applied on the inner ring of the bearing, the actual contact angles  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  and the ball–raceway interference  $\delta_1$  and  $\delta_2$  for contact directions  $c_1$  and  $c_2$  in a ball with azimuthal angle  $\Psi$  and initial contact angle  $\alpha_0$  are arranged according to expressions (2)–(5).

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{\Delta_a + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi}{\Delta_r + \delta_r \cos \psi} \right] \tag{2}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{\Delta_a - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi}{\Delta_r + \delta_r \cos \psi} \right] \tag{3}$$

$$\delta_1 = \sqrt{(\Delta_a + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \tag{4}$$

$$\delta_2 = \sqrt{(\Delta_a - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \tag{5}$$

where

$$\Delta_a = (2r_c - d_w) \sin \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} \right) \sin \alpha_0 \tag{6}$$

$$\Delta_r = (2r_c - d_w) \cos \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} \right) \cos \alpha_0 \tag{7}$$

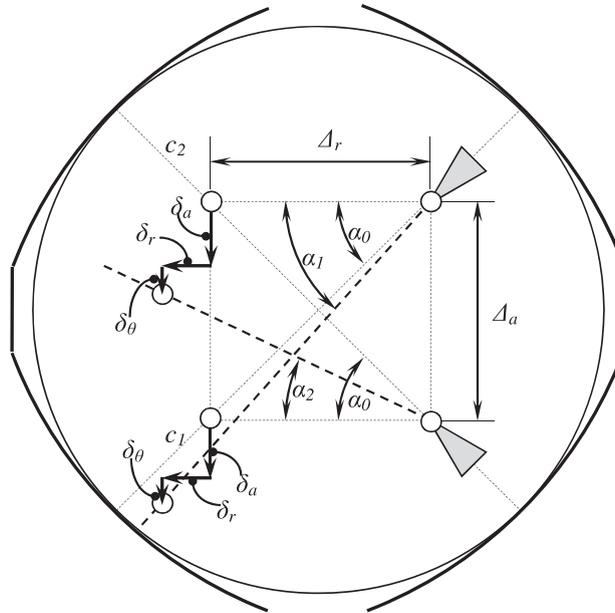


Figure 7. Geometrical interference model.

**2.2. The acceptance surface in the interference space**

The static failure of the bearing occurs when the most loaded ball reaches the allowable stress value that, according to ISO 76:2006,<sup>10</sup> corresponds to the elastically calculated value of 4200 MPa (although a greater stress could be considered if experimental tests reveal a margin in the performance of the bearing). Obviously, the most loaded ball is the one with the largest positive value of geometrical interference in one of the contact directions  $c_1$  or  $c_2$ ; negative interference values represent no ball–raceway contact. Thus, the first task to be carried out is to work out the derivatives of expressions (3) and (4) with respect to  $\Psi$ :

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial \psi} = - \frac{\sin \psi [\delta_\theta (\Delta_a + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi) + \delta_r (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)]}{\sqrt{(\Delta_a + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2}} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \delta_2}{\partial \psi} = \frac{\sin \psi [\delta_\theta (\Delta_a - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi) - \delta_r (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)]}{\sqrt{(\Delta_a - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r + \delta_r \cos \psi)^2}} \tag{9}$$

The extreme values for expression (8) are

$$\sin \psi = 0 \rightarrow \psi = \{0, \pi\} \tag{10}$$

$$\cos \psi = - \frac{\delta_\theta (\delta_a + \Delta_a) + \Delta_r \delta_r}{\delta_r^2 + \delta_\theta^2} \tag{11}$$

and for expression (9),

$$\sin \psi = 0 \rightarrow \psi = \{0, \pi\} \tag{12}$$

$$\cos \psi = - \frac{\delta_\theta (\delta_a - \Delta_a) + \Delta_r \delta_r}{\delta_r^2 + \delta_\theta^2} \tag{13}$$

Expressions (10)–(11) and (12)–(13) give, respectively, the possible values of the azimuthal angle  $\Psi$  for which the geometrical interferences  $\delta_1$  and  $\delta_2$  in contact directions  $c_1$  and  $c_2$  are maximum or minimum (in the previous work,<sup>3</sup> where

load-independent constant contact angle was considered, only conditions (10) and (12) were possible). Next, the interference value that causes the static failure of the ball must be arranged. Houpert<sup>12</sup> and Daidié *et al.*<sup>13</sup> derived the following expressions (based on Hertz formulae for elliptic contacts) for the maximum pressure and the corresponding ball deflection, where the material for the balls and the raceways is assumed to be steel:

$$\begin{cases} P_{\max} = 1.84 \times 10^3 (1-s)^{0.2117} \left(1 \pm \frac{d_w \cos \alpha}{d_{pw}}\right)^{-0.4550} \frac{Q^{1/3}}{d_w^{2/3}} \\ \delta = 8.97 \times 10^{-4} (1-s)^{0.1946} \frac{Q^{2/3}}{d_w^{1/3}} \end{cases} \quad (14)$$

where  $Q$  is the applied normal force. For an elastically calculated maximum pressure of  $P_{\max} = 4200$  MPa (as recommended in ISO 76:2006<sup>10</sup>) and taking into account that  $d_{pw} \gg d_w$  for slewing bearings, the deflection that makes the ball fail statically is found to be

$$\delta_{iim} = 4.6736 \times 10^{-3} (1-s)^{-0.2288} d_w \quad (15)$$

Finally, a spherical mapping for various radius vectors in the geometrical interference space is arranged, where the applied axial, radial and angular displacements are expressed as

$$\begin{cases} \delta_a = \varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi \\ \delta_r = \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi \\ \delta_\theta = \varepsilon d_w \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (16)$$

where  $\varepsilon$  is a scale factor. Substituting (16) in (4) and (5) and making them equal to (15), the following six expressions are obtained:

$$\begin{aligned} \delta_1(\psi = 0) &= 4.6736 \times 10^{-3} (1-s)^{-0.2288} d_w \\ &= \sqrt{(\Delta_a + \varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi + \varepsilon \cos \phi)^2 + (\Delta_r + \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta_1(\psi = \pi) &= 4.6736 \times 10^{-3} (1-s)^{-0.2288} d_w \\ &= \sqrt{(\Delta_a + \varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi - \varepsilon \cos \phi)^2 + (\Delta_r - \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \delta_1\left(\cos \psi = -\frac{\delta_\theta(\delta_a + \Delta_a) + \Delta_r \delta_r}{\delta_r^2 + \delta_\theta^2}\right) &= 4.6736 \times 10^{-3} (1-s)^{-0.2288} d_w \\ &= \sqrt{\left(\Delta_a + \varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi - \varepsilon d_w \cos \phi \left(\frac{\varepsilon d_w \cos \phi (\varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi + \Delta_a) + \Delta_r \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi}{(\varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi)^2 + (\varepsilon d_w \cos \phi)^2}\right)\right)^2} \\ &\quad + \left(\Delta_r - \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi \left(\frac{\varepsilon d_w \cos \phi (\varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi + \Delta_a) + \Delta_r \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi}{(\varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi)^2 + (\varepsilon d_w \cos \phi)^2}\right)\right)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta_2(\psi = 0) &= 4.6736 \times 10^{-3} (1-s)^{-0.2288} d_w \\ &= \sqrt{(\Delta_a - \varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi - \varepsilon \cos \phi)^2 + (\Delta_r + \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta_2(\psi = \pi) &= 4.6736 \times 10^{-3} (1-s)^{-0.2288} d_w \\ &= \sqrt{(\Delta_a - \varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi + \varepsilon \cos \phi)^2 + (\Delta_r - \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta_2\left(\cos \psi = -\frac{\delta_\theta(\delta_a - \Delta_a) + \Delta_r \delta_r}{\delta_r^2 + \delta_\theta^2}\right) &= 4.6736 \times 10^{-3} (1-s)^{-0.2288} d_w \\ &= \sqrt{\left(\Delta_a - \varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi + \varepsilon \cos \phi \left(\frac{\varepsilon d_w \cos \phi (\varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi - \Delta_a) + \Delta_r \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi}{(\varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi)^2 + (\varepsilon d_w \cos \phi)^2}\right)\right)^2} \\ &\quad + \left(\Delta_r - \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi \left(\frac{\varepsilon d_w \cos \phi (\varepsilon d_w \sin \phi \cos \varphi - \Delta_a) + \Delta_r \varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi}{(\varepsilon d_w \sin \phi \sin \varphi)^2 + (\varepsilon d_w \cos \phi)^2}\right)\right)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \end{aligned} \quad (22)$$

Note that introducing the osculation ratio in the definition of equations (6) and (7), the ball diameter  $d_w$  disappears from equations (17)–(22), and consequently, the values for  $\varepsilon$  do not depend on such parameter. This means that the contact angle in expressions (2)–(3) does not depend on ball diameter either.

The intervals  $0 \leq \phi \leq \pi$  and  $0 \leq \varphi < 2\pi$  indicated in (16) have been divided in such a way that  $n$  values have been considered for  $\varphi_i = i\pi/n$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) and  $2n$  values for  $\phi_j = j\pi/n$  ( $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 2n - 1$ ). The displacements in (16) have been mapped, and expressions (17) to (22) have been solved for each  $\varphi_i - \phi_j$  pair, obtaining thus six different values of  $\varepsilon$ ; amongst them, the smallest positive one is chosen, because it corresponds to the first case for which the failure deflection arise. Introducing this value of  $\varepsilon$  in (16), the  $\delta_a$ ,  $\delta_r$  and  $\theta$  interference combination that causes the static failure of the most loaded ball for that  $\varphi_i - \phi_j$  pair is obtained. This combination represents a point of the acceptance surface of the bearing, expressed in the  $\delta_a$ ,  $\delta_r$  and  $\theta$  interference space. Repeating this process with all of the  $2n(n + 1)$  existing  $\varphi_i - \phi_j$  pairs, the acceptance surface of the bearing (formed by  $2n(n + 1)$  points) is obtained in the interference space.

### 2.3. Force and moment equilibrium: the acceptance surface in the load space

Once all of the radial, axial and angular displacement combinations that cause the static failure of the most loaded ball have been calculated, the next step consists on assessing the corresponding axial, radial and moment load combinations. For this purpose, the force and moment equilibrium in the bearing is studied<sup>14,15</sup> for each point of the acceptance surface in the interference space:

$$\begin{cases} F_a = \sum_{i=1}^Z \left( K\delta_{1,i}^{3/2} \sin \alpha_{1,i} - K\delta_{2,i}^{3/2} \sin \alpha_{2,i} \right) \\ F_r = \sum_{i=1}^Z \left( K\delta_{1,i}^{3/2} \cos \alpha_{1,i} + K\delta_{2,i}^{3/2} \cos \alpha_{2,i} \right) \cos \psi_i \\ \frac{M}{d_{pw}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z \left( K\delta_{1,i}^{3/2} \sin \alpha_{1,i} - K\delta_{2,i}^{3/2} \sin \alpha_{2,i} \right) \cos \psi_i \end{cases} \quad (23)$$

with  $K$  being the Hertzian stiffness constant extracted from (14),

$$K = 37223d_w^{1/2} (1 - s)^{-0.2918} \quad (24)$$

The summations in (23) are carried out for all of the  $Z$  balls with positive interference; they can also be expressed in integral form as in the previous work,<sup>3</sup> in order to make them non-dependent on the actual reference azimuthal angle of the balls:

$$\begin{cases} \frac{F_a}{Z} = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} K\delta_{1,\psi}^{3/2} \sin \alpha_{1,\psi} d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} K\delta_{2,\psi}^{3/2} \sin \alpha_{2,\psi} d\psi \\ \frac{F_r}{Z} = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} K\delta_{1,\psi}^{3/2} \cos \alpha_{1,\psi} \cos \psi d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} K\delta_{2,\psi}^{3/2} \cos \alpha_{2,\psi} \cos \psi d\psi \\ \frac{M}{Zd_{pw}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\delta^+} K\delta_{1,\psi}^{3/2} \sin \alpha_{1,\psi} \cos \psi d\psi - \frac{1}{4\pi} \int_{\delta^+} K\delta_{2,\psi}^{3/2} \sin \alpha_{2,\psi} \cos \psi d\psi \end{cases} \quad (25)$$

In the previous work,<sup>3</sup> a normalization was carried out with respect to the axial load capacity of the bearing. If load-dependent contact angle is considered, this axial capacity can be expressed as follows:

$$C_{0a} = ZK\delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim} \quad (26)$$

with  $\alpha_{lim}$  being the contact angle for which the deflection in the ball is given by expression (15) when loaded axially. Expressions (25) can be rearranged considering the following normalization:

$$\begin{cases} \frac{F_a}{ZK\delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim}} = \frac{F_a}{C_{0a}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\sin \alpha_{1,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\sin \alpha_{2,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} d\psi \\ \frac{F_r \tan \alpha_0}{ZK\delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim}} = \frac{F_r \tan \alpha_0}{C_{0a}} = \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha_{lim}} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\cos \alpha_{1,\psi}}{\cos \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi + \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha_{lim}} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\cos \alpha_{2,\psi}}{\cos \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi \\ \frac{M}{ZK\delta_{lim}^{3/2} \sin \alpha_{lim} d_{pw}} = \frac{M}{d_{pw} C_{0a}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\sin \alpha_{1,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi - \frac{1}{4\pi} \int_{\delta^+} \left( \frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}} \right)^{3/2} \frac{\sin \alpha_{2,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi \end{cases} \quad (27)$$

Solving these integrals for all of the interference cases, the point cloud of the acceptance surface in the load space is obtained. It should be remarked that the terms on the right only depend on the osculation ratio  $s$  and the initial contact angle  $\alpha_0$ . This entails that the acceptance surfaces for bearings with different sizes (different values for  $d_w$  and  $d_{pw}$ ) but with the same osculation ratio and initial contact angle are identical. In fact, the terms  $\delta_{i,\psi}/\delta_{lim}$  depend only on  $s$  and  $\alpha_0$  as pointed out previously, and from Figure 8, the expression for  $\alpha_{lim}$  can be derived applying the sine rule:

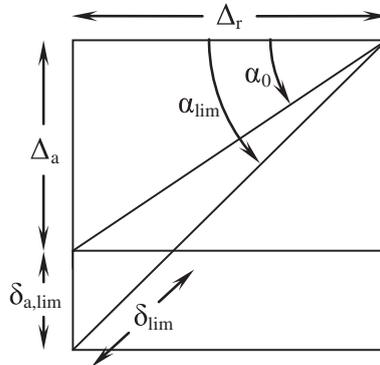
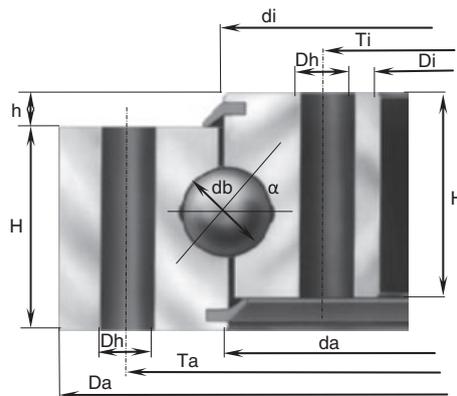


Figure 8. Graphical construction to obtain  $\alpha_{lim}$ .



Parameters	Bearing sizes		
	small	medium	large
da	215.5	415.5	645.5
Ta	260	460	690
Da	286	486	716
di	212.5	412.5	642.5
Ti	168	368	598
Di	142	342	572
h	10	10	10
H	46	46	46
Dh	14	14	14
Db	20	20	20
Bn	33	65	101
na	16	20	32
ni	20	24	36
$\alpha$	45	45	45
s	0.943	0.943	0.943

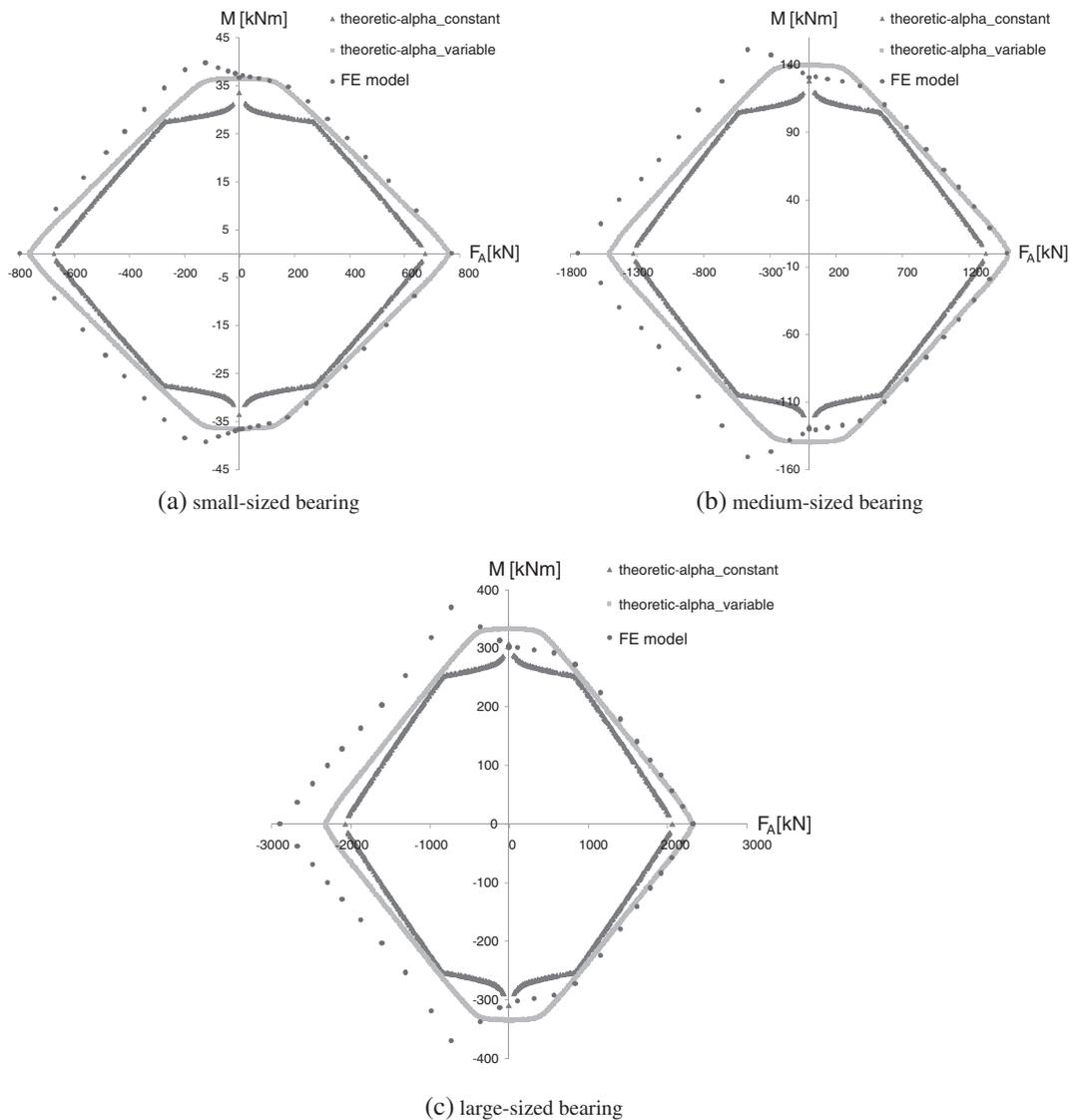
Figure 9. Geometrical parameters of the bearings.<sup>11</sup>

$$\frac{\delta_{lim} \sin \alpha_{lim}}{\sin (\alpha_{lim} - \alpha_0)} = \frac{\sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2}}{\sin (90 - \alpha_{lim})} \Rightarrow \frac{4.6736 \times 10^{-3} (1 - s)^{-0.2288}}{\sin (\alpha_{lim} - \alpha_0)} = \frac{\left(\frac{1-s}{s}\right)}{\sin (90 - \alpha_{lim})} \quad (28)$$

Equation (28) can be solved iteratively for  $\alpha_{lim}$  from values of  $\alpha_0$  and  $s$ .

**Table I.** Load-carrying capacities of the bearings: theoretical and FE model results.

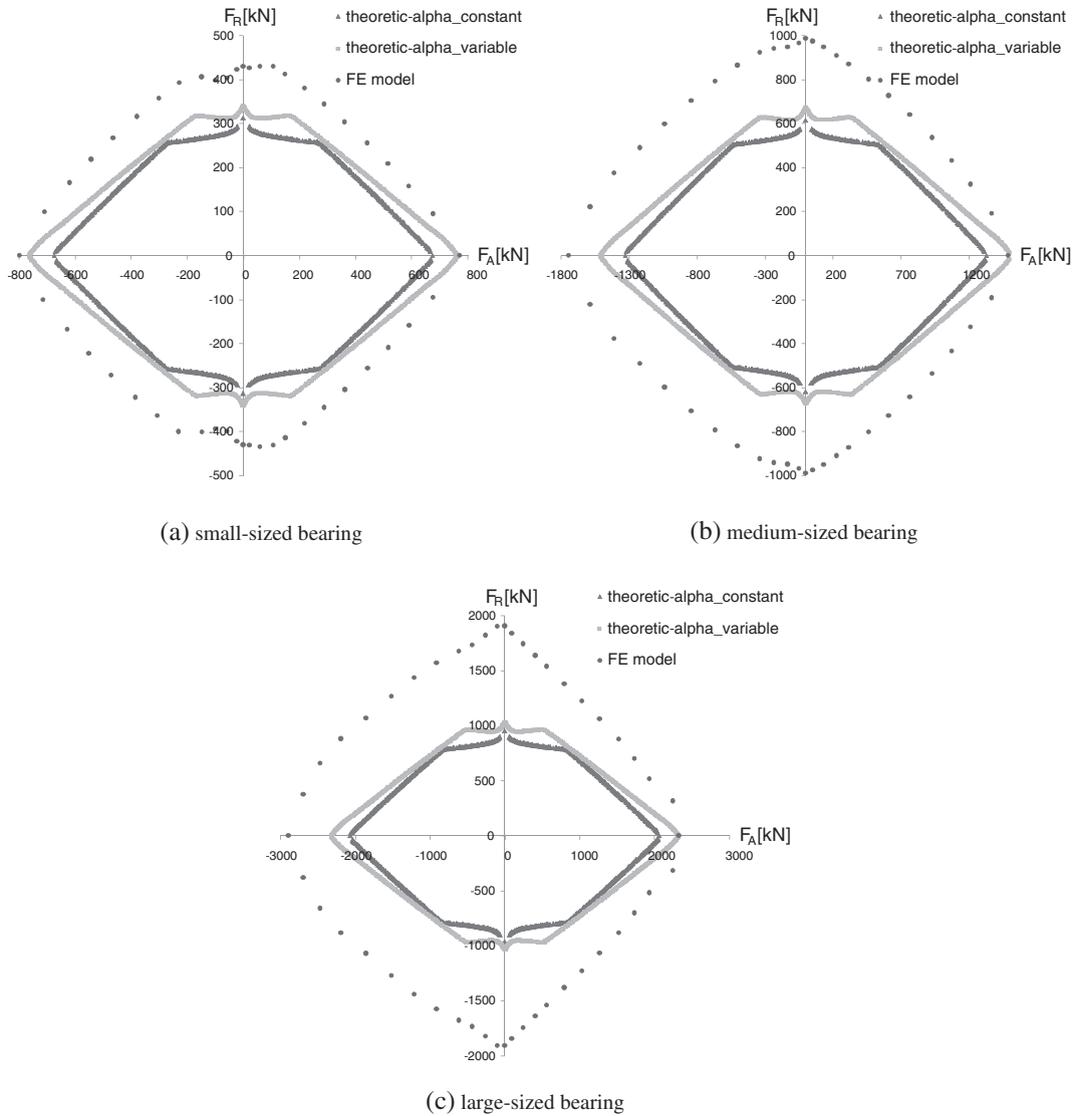
Capacities	Small-sized bearing			Medium-sized bearing			Large-sized bearing		
	Constant contact angle	Variable contact angle	FE model	Constant contact angle	Variable contact angle	FE model	Constant contact angle	Variable contact angle	FE model
$C_{0a}^+$ (kN)	684.7	764.0	772.2	1348.6	1511.0	1486.6	2095.6	2351.3	2323.2
$C_{0a}^-$ (kN)	684.7	764.0	797.4	1348.6	1511.0	1739.4	2095.6	2351.3	2886.4
$C_{0r}$ (kN)	313.4	341.3	429.8	617.2	675.7	988.3	959.1	1051.9	1907.2
$C_{0m}$ (kN m)	33.5	36.6	36.8	127.8	140.1	130.3	308.8	339.1	302.2



**Figure 10.** Result comparison among models.  $F_A$ - $M$  plane.

### 3. RESULTS AND DISCUSSION

As it has been mentioned, the authors analysed the FE models of three different-sized commercial bearings (small-sized, medium-sized and large-sized)<sup>11</sup>; the curves derived from these analyses were compared with those provided by the

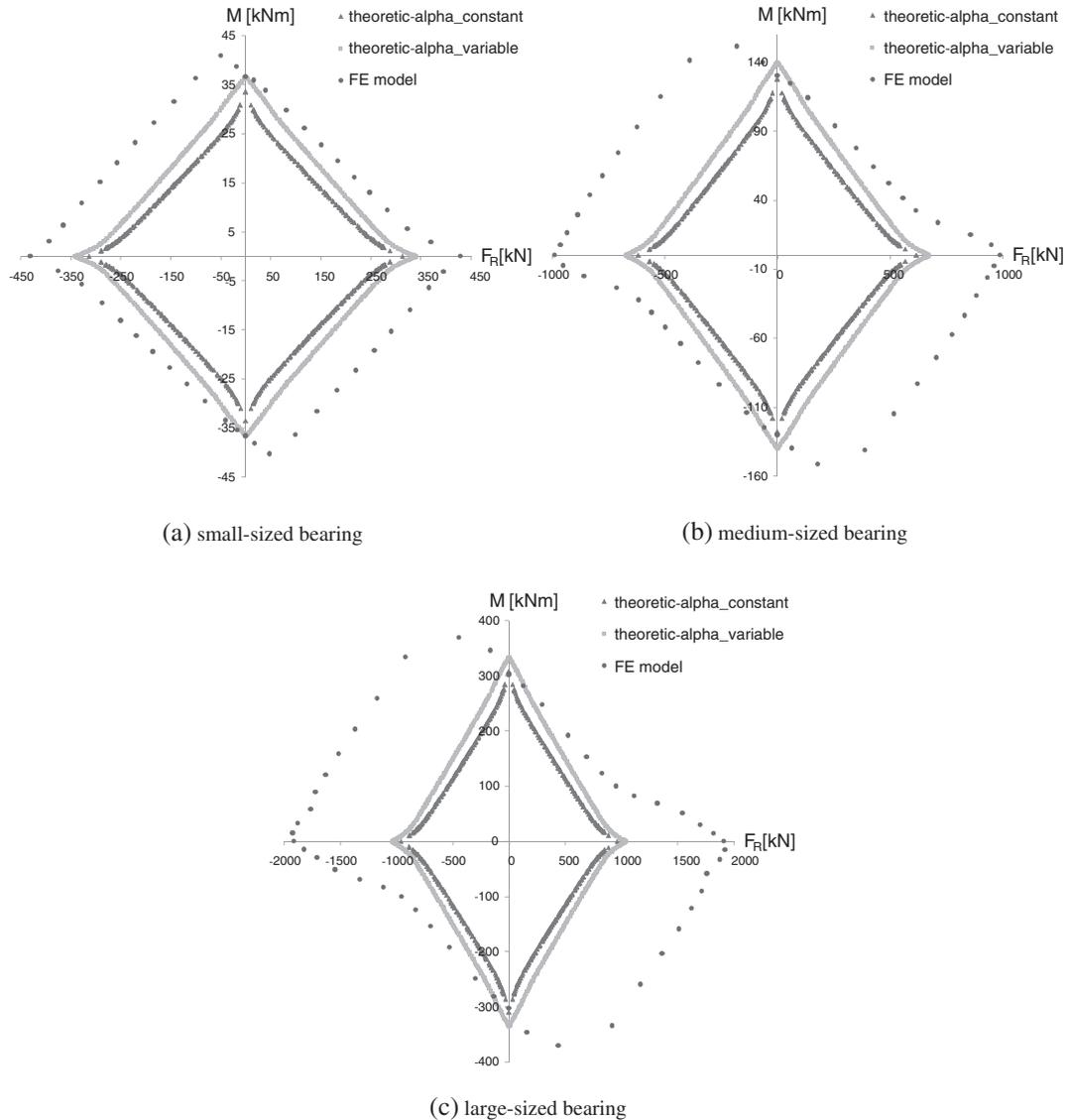


**Figure 11.** Result comparison among models.  $F_A$ - $F_R$  plane.

theoretical method previously presented.<sup>3</sup> In contrast with that method, the method developed in the present work considers the effect of the variability of the contact angle of the balls with the applied load, which leads to more accurate results. In order to prove this statement, the curves provided by the method presented in this work have been compared with FE results<sup>11</sup> and previous theoretical results.<sup>3</sup> The geometrical parameters of the three analysed commercial bearings are pointed out in Figure 9. Note that, even though the dimensions of the bearings are different, the conformity is  $s = 0.943$  and the initial contact angle is  $\alpha_0 = 45^\circ$  for all of them. Table I lists the axial, radial and moment load capacities for each of these three bearings, according to each of the three compared methods: the ‘constant contact angle’ method,<sup>3</sup> the ‘variable contact angle’ method developed in this work and the FE models.<sup>11</sup>

Figures 10–12 show, respectively, the corresponding curve fits in the  $F_A$ - $M$ ,  $F_A$ - $F_R$  and  $F_R$ - $M$  planes for each of the three analysed commercial bearings. It can be observed that the results provided by the ‘variable contact angle’ theoretical method developed in this work are closer to the results of the FE model than the ones corresponding to the previous ‘constant contact angle’ theoretical method, and thus, it provides a more realistic approach.

The reason for the mismatch between the theoretical and FE model results is that the rings are flexible in the FE model, whereas the theoretical method considers them to be rigid. As it has been mentioned previously, the stiffness of the rings plays an important role on the way the applied loads are distributed among the balls, and consequently, they have a direct influence on the load-carrying capacity of the bearing. In this sense, the larger the bearing, the more flexible the rings and, therefore, the more significant this effect; for this reason, the theoretical method is more realistic for the small-sized



**Figure 12.** Result comparison among models.  $F_R$ – $M$  plane.

bearing than for the large-sized one. It must also be remarked that the effect of the flexibility of the rings is more important for external radial loads than for axial or moment loads, and thus, the difference in the radial load capacity of the bearings is quite significant. However, by assuming rigid rings, the theoretical method is more conservative, as illustrated in Figures 10–12.

In the bearings analysed so far, the conformity is  $s = 0.943$ , and the initial contact angle is  $\alpha_0 = 45^\circ$ . According to the method developed in the present work, the point cloud representing the load-carrying capacity can be normalized in such a way that it only depends on the initial contact angle and the osculation ratio. This entails that the acceptance surface (and the curves obtained from it) vary for different values of  $s$  and  $\alpha_0$ . In this sense, several normalized curves for different combinations of the osculation ratio  $s$  and the initial contact angle  $\alpha_0$  are shown in the Appendix. For comparative purposes, the curves are shown together with the curves corresponding to the method developed in the previous work,<sup>3</sup> where no contact angle variation was considered.

#### 4. CONCLUSIONS

This work presents a theoretical method to arrange the general static load capacity of four contact-point slewing bearings, which takes into account the load-dependent contact angle variability in the ball–raceway contacts.

The method is a further step of previous work published by the authors, where the contact angle was assumed to be constant.<sup>3</sup>

The results of the present method (variable contact angle) and the ones of the previous method (constant contact angle) have been compared with the results provided by an FE model developed by the authors in another work,<sup>11</sup> and it has been proven that the new model presented in this work is more realistic. It is also pointed out that the stiffness of the rings plays an important role in the static load-carrying capacity of the bearings, but it has been verified that the method leads to conservative results. Besides, several normalized curves for different combinations of the osculation ratio  $s$  and the initial contact angle  $\alpha_0$  are also provided. The authors believe that the acceptance curves derived from this work can be used for the initial selection of yaw and blade bearings at the initial stage of the design of WTGs.

### ACKNOWLEDGEMENTS

This paper is a result of the close collaboration that the authors maintain with the companies Iraundi Bearings and LKS Engineering. The authors are grateful for the dedication and generosity with which Iraundi has provided its know-how for this work and for the professional support of LKS. We want also to acknowledge the financial support of the University of the Basque Country (UPV/EHU), grant number UFI 11/29.

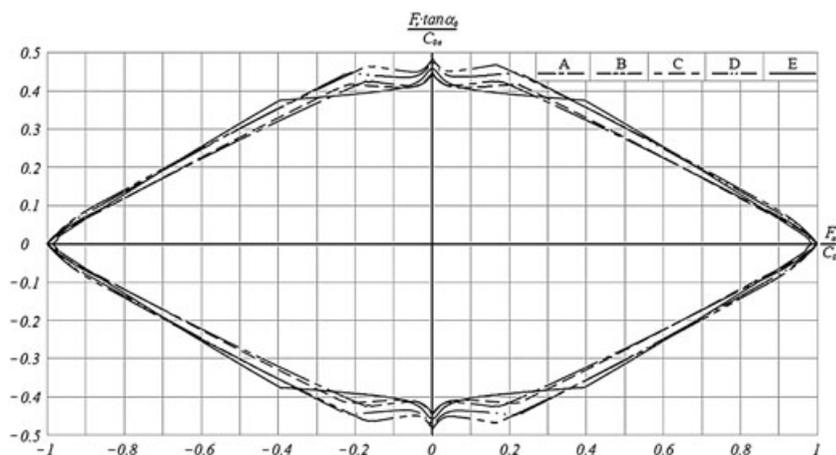
### APPENDIX

Next, several normalized curves for bearings with different  $s-\alpha_0$  combinations are shown, along with the curves obtained from the method developed in the previous work.<sup>3</sup> Table II lists the tested cases.

Expressions (27) point out that the point clouds are symmetric with respect to the coordinate axes. On the one hand, Figures 13–15 show the resulting curve fits in the normalized  $F_A-F_R$ ,  $F_A-M$  and  $F_R-M$  planes for bearings A, B, C, D and E, respectively; On the other hand, Figures 16–19 illustrate the resulting curve fits in the normalized  $F_R-M$  plane for several positive values of the normalized axial force for bearings A, B, C, D and E, respectively. This curves are obtained

**Table II.** Geometrical features of the bearings considered for study.

Case	$s$	$\alpha_0$ (degrees)
A	0.962	45
B	0.962	50
C	0.943	45
D	0.943	50
E	Results are in previous work <sup>3</sup>	



**Figure 13.** Normalized  $F_A-F_R$  curves for bearings A, B, C, D and E.

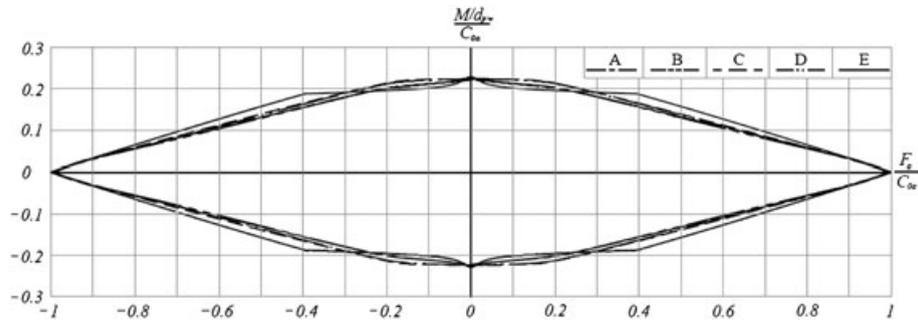


Figure 14. Normalized  $F_A$ - $M$  curves for bearings A, B, C, D and E.

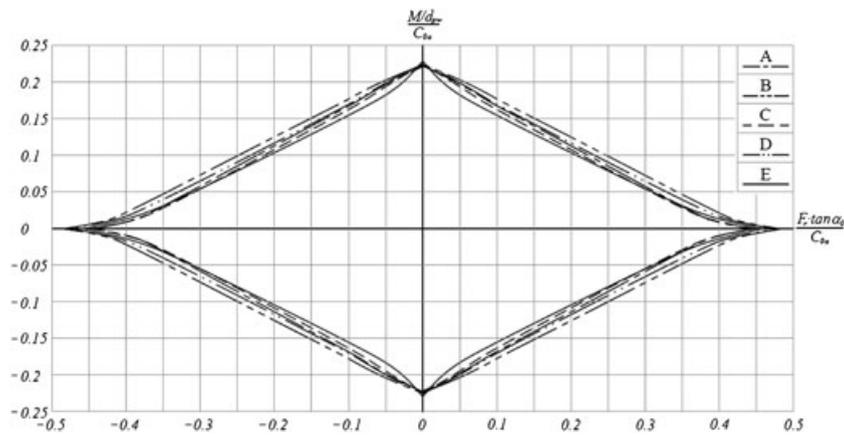


Figure 15. Normalized  $F_R$ - $M$  curves for bearings A, B, C, D and E.

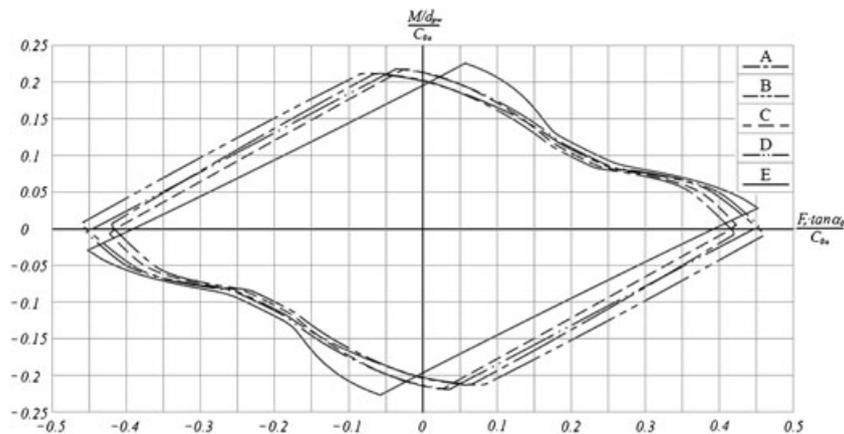
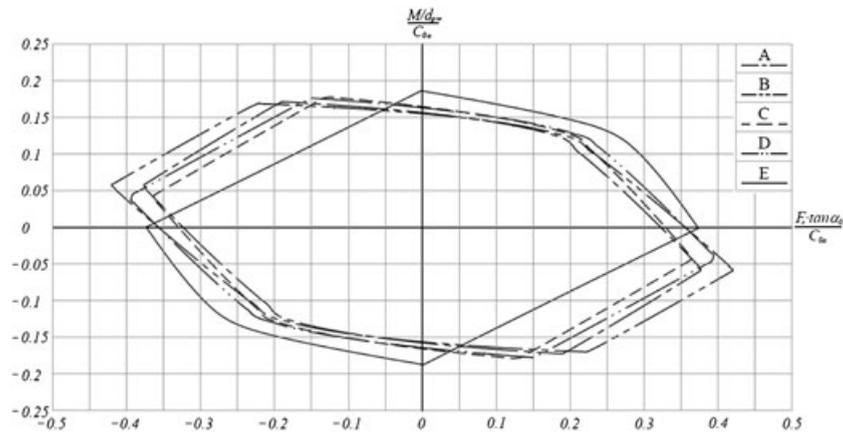
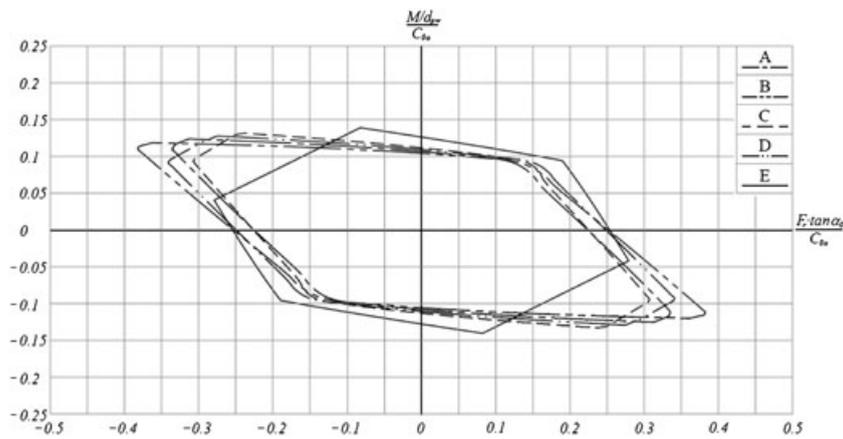


Figure 16. Normalized  $F_R$ - $M$  curves for  $F_A/C_{0a} = 0.2$  for bearings A, B, C, D and E.

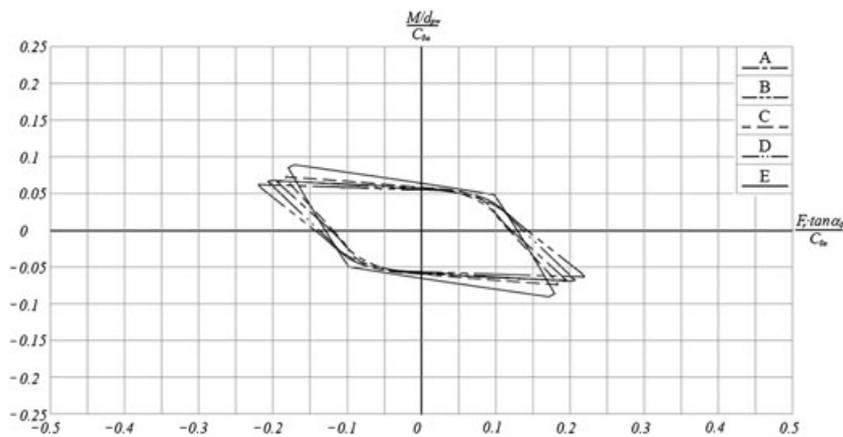
by slicing a STL surface of point clouds with resolution  $n = 400 (2 \cdot 400 \cdot (400 + 1) = 320,800$  points). For the sake of homogeneity, the axes of each acceptance surface have been normalized with respect to its own axial load capacity, as calculated by means of expressions (26) and (28), and whose resulting values are illustrated in Table I. As a result, all these surfaces present a common point in the normalized  $F_a/C_{0a}$  axis. Besides, it must be pointed out that for case E, the initial contact angle  $\alpha_0$  has to be used instead of the limit contact angle  $\alpha_{lim}$  in expression (26).



**Figure 17.** Normalized  $F_R$ - $M$  curves for  $F_A/C_{0a} = 0.4$  for bearings A, B, C, D and E.



**Figure 18.** Normalized  $F_R$ - $M$  curves for  $F_A/C_{0a} = 0.6$  for bearings A, B, C, D and E.



**Figure 19.** Normalized  $F_R$ - $M$  curves for  $F_A/C_{0a} = 0.8$  for bearings A, B, C, D and E.

**REFERENCES**

1. Hau E. *Wind Turbines: Fundamentals, Technologies, Application, Economics*, 2nd ed. Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2006. ISBN 3540570640.
2. Burton T, Sharpe D, Jenkins N, Bossanyi E. *Wind Energy Handbook*. Wiley & Sons: Chichester, UK, 2001. ISBN 0471489972.
3. Aguirrebeitia J, Avilés R, Fernandez de Bustos I, Abasolo M. Calculation of the general static load-carrying capacity for the design of four contact point slewing bearings. *Journal of Mechanical Design* 2010; **132**: 064501-1–064501-6.
4. Amasorrain JI, Sagartzazu X, Damián J. Load distribution in a four contact-point slewing bearing. *Mechanism and Machine Theory* 2003; **38**: 479–496.
5. Liao NT, Lin JF. A new method for the analysis of deformation and load in a ball bearing with variable contact angle. *Journal of Mechanical Design* 2001; **123**: 304–312.
6. Zupan S, Prebil I. Carrying angle and carrying capacity of a large single row ball bearing as a function of geometry parameters of the rolling contact and the supporting structure stiffness. *Mechanism and Machine Theory* 2001; **36**: 1087–1103.
7. Jones A, General Motors Corporation. New Departure Division. *Analysis of Stresses and Deflections*, New Departure Engineering Data. New Departure Division, General Motors Corporation: Bristol, CT, 1946.
8. Sjövall H. The load distribution within ball and roller bearings under given external radial and axial load, 1933. *Teknisk Tidskrift, Mek.*, h.9.
9. Rumbarger J. *Thrust Bearing with Eccentric Loads*, February, 1962. Mach Des.
10. International Organization for Standardization. Rolling bearings—static load ratings, 3rd ed. *ISO 76:2006*, 2006.
11. Aguirrebeitia J, Abasolo M, Avilés R, Fernández de Bustos I. General static load-carrying capacity for the design and selection of four contact point slewing bearings: finite element calculations and theoretical model validation. *Finite Elements in Analysis and Design* 2012; **55**: 23–30. DOI: 10.1016/j.finel.2012.02.002.
12. Houpert L. An engineering approach to Hertzian contact elasticity—part 1. *ASME Journal of Tribology* 2001; **123**: 582–588.
13. Daidié A, Chaib Z, Ghosn A. 3D simplified finite elements analysis of load and contact angle in a slewing ball bearing. *ASME Journal of Mechanical Design* 2008; **130**: 082601.
14. Harris TA, Kotzalas MN. *Rolling Bearing Analysis: Essential Concepts of Bearing Technology*. Taylor & Francis/CRC Press: Boca Raton, Florida, 2007.
15. Harris TA, Kotzalas MN. *Rolling Bearing Analysis: Advanced Concepts of Bearing Technology*. Taylor & Francis/CRC Press: Boca Raton, Florida, 2007.

## RESEARCH ARTICLE

# Effect of the preload in the general static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generators: theoretical model and finite element calculations

Josu Aguirrebeitia, Jon Plaza, Mikel Abasolo and Javier Vallejo

Mechanical Engineering, University of the Basque Country, Bilbao, Spain

## ABSTRACT

This paper presents a generalization of previous works developed by the authors in the field of the calculation and selection of slewing bearings, where a theoretical model for the estimation of the static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings was obtained. Those previous works assumed that there was no preload in the balls; in the present work, the model has been improved in order to consider the effect of the preload, in such a way that it provides more realistic results because this type of bearings are preloaded in several applications to increase the stiffness and therefore the accuracy of the system. In parallel, and for comparison purposes, the finite element model built by the authors in previous works has been also adapted to include the preload in the balls. Both models, theoretical and FE, assess in complete agreement the increase of the stiffness with the preload level; the results show that the static load-carrying capacity does not vary appreciably with the usual values adopted for the preload. Copyright © 2013 John Wiley & Sons, Ltd.

## KEYWORDS

yaw bearing; blade bearing; static load-carrying capacity; acceptance surface; bearing preload

## Correspondence

Josu Aguirrebeitia, Mechanical Engineering, University of the Basque Country, Bilbao, Spain.

E-mail: josu.aguirrebeitia@ehu.es

Received 1 August 2012; Revised 30 May 2013; Accepted 24 June 2013

## 1. INTRODUCTION

Slewing bearings are used for orientation purposes in large functional systems; in this sense, they have become a critical component in wind turbine generators because yaw and pitch bearings are used to guide the nacelle and the rotor blades in order to achieve the optimum aerodynamic power capture. Because of their large diameter (up to several meters in some cases) and comparatively small-sized section, slewing bearings are considerably more flexible than common bearings. Preload increases the stiffness of the bearing, and besides it reduces vibratory and runout phenomena in the assembly,<sup>1</sup> thus avoiding harmful phenomena that shorten the bearing life. Bearing preload refers to the elimination of the clearance between balls and raceways; in other words, it consists on assembling the balls with an interference fitting (negative clearance). As yaw and pitch bearings (four-contact-point bearings) must withstand axial loads in both directions, the preload is usually achieved by introducing oversized balls. The optimum value for the preload depends on the application. As mentioned, the preload should be large enough to increase the stiffness of the system and to minimize vibratory and runout phenomena. In contrast, excessive preload causes high frictional forces in the ball-raceway contact with two harmful effects: first, the torque needed to rotate the bearing increases, and therefore a more powerful actuation system is required; second, frictional forces lead to temperature rise and wear, with the consequent shortening of the bearing life. In practice, a preload corresponding to a 7–10% of the maximum admissible deflection of the balls is typically adopted for yaw and pitch bearings; as it will be explained later, this maximum admissible deflection refers to the value for which the ball suffers an irreversible static damage, as defined in the International Organization for Standardization.<sup>2</sup>

The authors have been gradually developing a theoretical method to assess the general static load-carrying capacity of four-contact-point slewing ball bearings and three-row roller bearings.<sup>3–5</sup> The method is based on the classical geometrical interference model, using the inverse approach developed by Sjöväll<sup>6</sup> and Rumbarger.<sup>7</sup> It calculates the axial, radial, and tilting moment load combinations that cause static damage in the most loaded ball.<sup>2</sup> In the most unfavorable load case, the tilting moment is normal to the plane formed by the radial force and the axial force.<sup>5</sup> By representing these load combinations in a three-dimensional load space ( $F_a$ - $F_r$ - $M$ ), an ‘acceptance surface’ is defined, normalized in such a way that it depends only on the values of the initial contact angle  $\alpha_0$  and the ball-raceway conformity  $s$ .<sup>5</sup> In this sense, a point outside the surface would be a failure load combination, and a point inside the surface would be a safe load combination. Considering that the initial selection of yaw and pitch bearings (at the early stages of the wind turbine generator design process) is commonly performed in terms of static load-carrying capacity, the acceptance surface demonstrated to be an extremely useful and cost-effective tool for such purpose. The method was validated by comparing the theoretical results with those obtained from the finite element (FE) model developed also by the authors<sup>8</sup>; the theoretical results in terms of load capacity were found to be conservative when compared with the FE results, mainly because the theoretical method assumed rigid rings.

Several works have analyzed the effects of positive clearance in load distribution<sup>9–11</sup> and the preload problem in unloaded bearings.<sup>12</sup> But there seems to be little public information about the effect of a negative clearance in loaded bearings. The present work introduces the effect of the preload (negative clearance) in the theoretical method developed in previous work.<sup>5</sup> The preload has a direct influence on the load distribution within the bearing,<sup>13</sup> and thus its static load-carrying capacity can also be influenced: to check this influence, new acceptance surfaces are obtained for different levels of the preload. For comparison purposes, the FE model developed by the authors<sup>8</sup> has also been adapted to consider the preload.

## 2. ANALYTICAL METHOD

The analytical method developed in this paper modifies the general approach<sup>5</sup> so as to include the preload. In this section, the procedure to obtain the three-dimensional condition of acceptance with this new constraint will be described. As in previous works,<sup>3–5,8</sup> the analytical model assumes rigid rings and only the ball-raceway local deformations are considered. From this assumption, the resulting boundary conditions are as follows: one of the rings (outer ring for example) remains fixed and the other ring (the inner one) has prescribed rigid-solid displacements involving a geometrical interference model between this ring and the balls.

First, the geometrical interference model is formulated where axial, radial, and angular displacements are imposed to one of the rings. Next, the interference combinations are assessed for which the statically allowable elastic deflection is reached in order to define the acceptance surface in the interference space. Finally, the force and moment equilibrium equations are derived to obtain the load combinations that define the acceptance surface in the load space.

### 2.1. Geometrical interference model

The basic nomenclature, illustrated in Figure 1, is as follows:  $\Psi$  is the azimuthal angle that indicates the position of a ball within the bearing;  $c_1$  is the contact direction between the upper raceway of the inner ring and the lower raceway of the

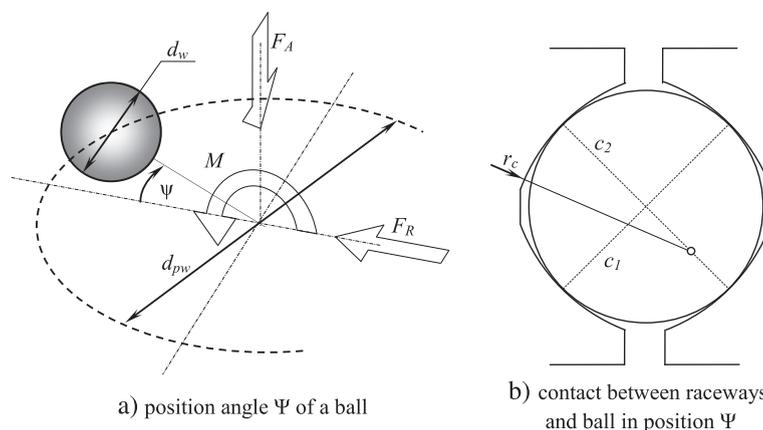


Figure 1. Frame of reference and nomenclature.

outer ring;  $c_2$  is the contact direction between the lower raceway of the inner ring and the upper raceway of the outer ring;  $d_w$  and  $d_{pw}$  are, respectively, the ball diameter and ball center diameter; and  $r_c$  is the raceway radius, identical for the four raceways.

The osculation ratio  $s$  is defined as follows:

$$s = \frac{d_w}{2r_c} \tag{1}$$

Figure 2 shows the geometrical interference between the rings and a ball whose azimuthal angle is  $\Psi$ , but in this case, preload term has been introduced. Then, preload and displacements that are plotted represent the relative displacement between the inner and outer rings.

When a given  $\delta_a$ ,  $\delta_r$ , and  $\delta_\theta$  combination of axial, radial, and angular displacements ( $\delta_\theta = \theta d_{pw}/2$ , where  $\theta$  is the tilt angle) is applied on the inner ring of the bearing, the actual contact angles  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  and the ball-raceway interferences  $\delta_1$  and  $\delta_2$  for contact directions  $c_1$  and  $c_2$ , are arranged according to expressions (2–5) for a ball with azimuthal angle  $\Psi$  and initial contact angle  $\alpha_0$ . The term  $\delta_p$ , which refers to the deflection due to the preload, acts symmetrically on both raceways.

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{\Delta_a^P + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi}{\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi} \right] \tag{2}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{\Delta_a^P - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi}{\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi} \right] \tag{3}$$

$$\delta_1 = \sqrt{(\Delta_a^P + \delta_a + \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \tag{4}$$

$$\delta_2 = \sqrt{(\Delta_a^P - \delta_a - \delta_\theta \cos \psi)^2 + (\Delta_r^P + \delta_r \cos \psi)^2} - \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} \tag{5}$$

where:

$$\Delta_a = [(2r_c - d_w)] \sin \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} \right) \sin \alpha_0 \tag{6}$$

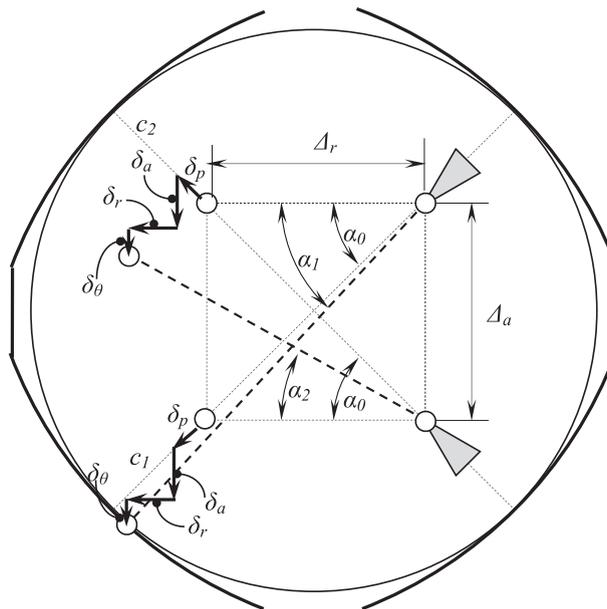


Figure 2. Geometrical interference model.

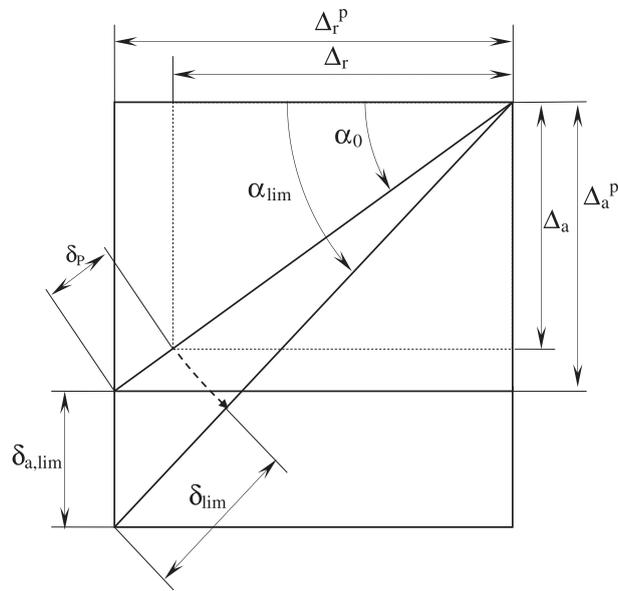


Figure 3. Graphical construction to obtain  $\alpha_{lim}$ .

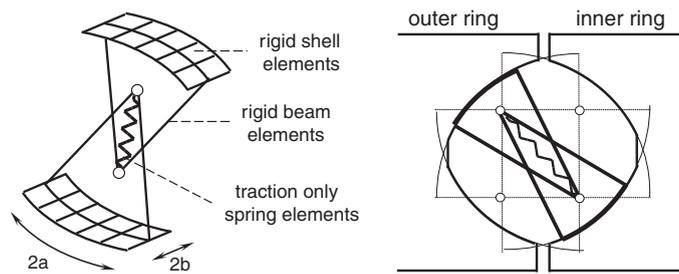


Figure 4. Schematic representation of the model for the ball and the ball-raceway contact.<sup>8,15</sup>

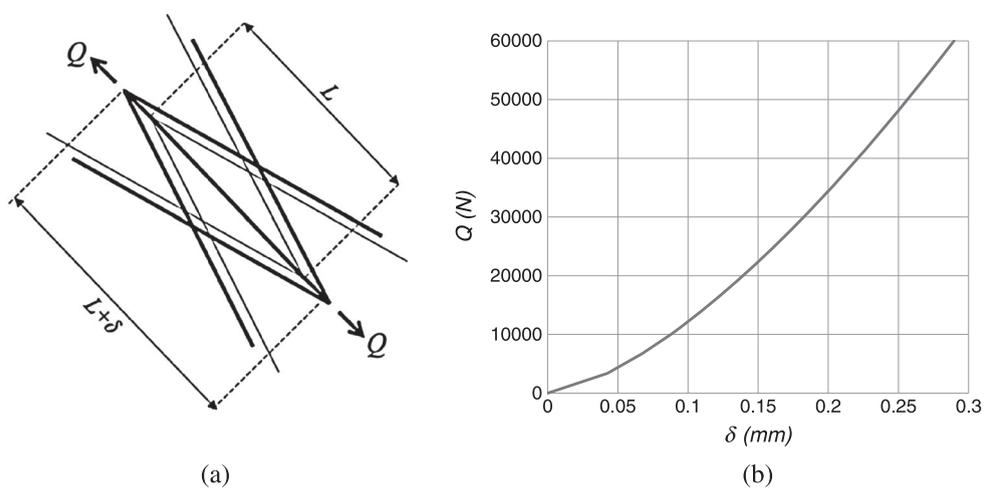


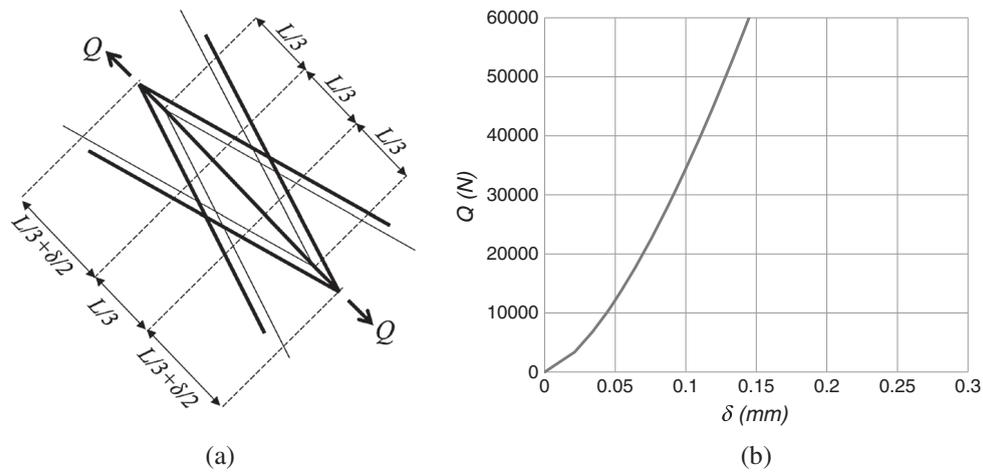
Figure 5. (a) Response of the model under a traction force  $Q$  (fine lines: undeformed; coarse lines: deformed). (b)  $Q$ - $\delta$  curve of the nonlinear spring.

$$\Delta_r = [(2r_c - d_w)] \cos \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} \right) \cos \alpha_0 \tag{7}$$

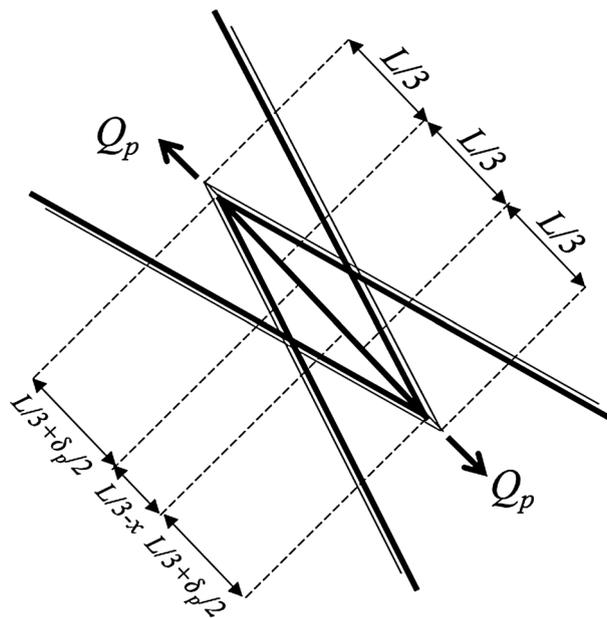
$$\Delta_a^P = [(2r_c - d_w) + \delta_P] \sin \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} + \frac{\delta_P}{d_w} \right) \sin \alpha_0 \tag{8}$$

$$\Delta_r^P = [(2r_c - d_w) + \delta_P] \cos \alpha_0 = d_w \left( \frac{1-s}{s} + \frac{\delta_P}{d_w} \right) \cos \alpha_0 \tag{9}$$

As well as interferences, the sign of  $\delta_P$  is considered positive because the ball is initially being compressed.



**Figure 6.** Response of the adapted model under a traction force  $Q$  (fine lines: undeformed; coarse lines: deformed). (b)  $Q$ - $\delta$  curve of the two nonlinear springs.



**Figure 7.** Preloaded configuration of the adapted model (fine lines: undeformed; coarse lines: deformed).

### 2.2. The acceptance surface in the interference space

According to the International Organization for Standardization,<sup>2</sup> the maximum allowable contact stress is 4200 MPa, as calculated via Hertzian contact analysis. When the most loaded ball reaches this stress value, the maximum static capacity of the bearing has been achieved. The first task to accomplish is to work out the derivatives of expressions (4) and (5) with respect to  $\Psi$  in order to know which is the ball with more deflection and therefore the most loaded one. As preload is not azimuthal angle dependent, the expressions of the derivatives are very similar to those obtained in previous work,<sup>5</sup> and as in that case, there are three values for  $\Psi$  that make the interference  $\delta_1$  extreme and another three for  $\delta_2$ , now preload dependent.

Houper<sup>14</sup> and Daidié<sup>15</sup> derived expressions for the maximum pressure and its corresponding ball deflection with steel as working material for balls and raceways, and in the study of Rumbarger,<sup>5</sup> the last one was simplified as a function of osculation ratio and ball diameter for an external load corresponding with a maximum pressure of 4200 MPa:

$$\delta_{lim} = 4.6736 \cdot 10^{-3} (1 - s)^{-0.2288} d_w \tag{10}$$

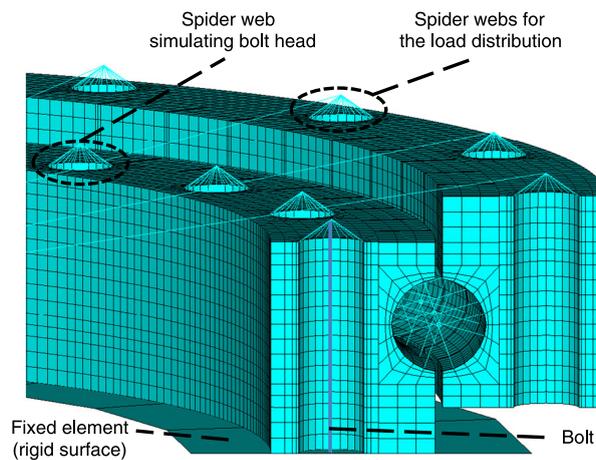


Figure 8. Detail and general view of the analyzed finite element model.<sup>8</sup>

Table I. Geometric parameters of the analyzed commercial bearings.<sup>8</sup>

Parameters	Bearing sizes	
	small	large
da	215.5	645.5
Ta	260	690
Da	286	716
di	212.5	642.5
Ti	168	598
Di	142	572
h	10	10
H	46	46
Dh	14	14
Db	20	20
Bn	33	101
na	16	32
ni	20	36
$\alpha$	45	45
s	0.943	0.943

The definition of this limit deflection enables to arrange the preload interference  $\delta_p$  as a function of the preload level  $p$ :

$$\begin{aligned} \delta_p &= p \cdot \delta_{lim} \\ p &= 0.0 \dots 1.0 \end{aligned} \tag{11}$$

Now, the same procedure in<sup>5</sup> is followed to calculate the acceptance surface in the interference space. In that work, different acceptance surfaces were obtained for each ( $s$  and  $\alpha_0$ ) combination. Now, different acceptance surfaces are obtained for each ( $s$ ,  $\alpha_0$ , and  $p$ ) combination.

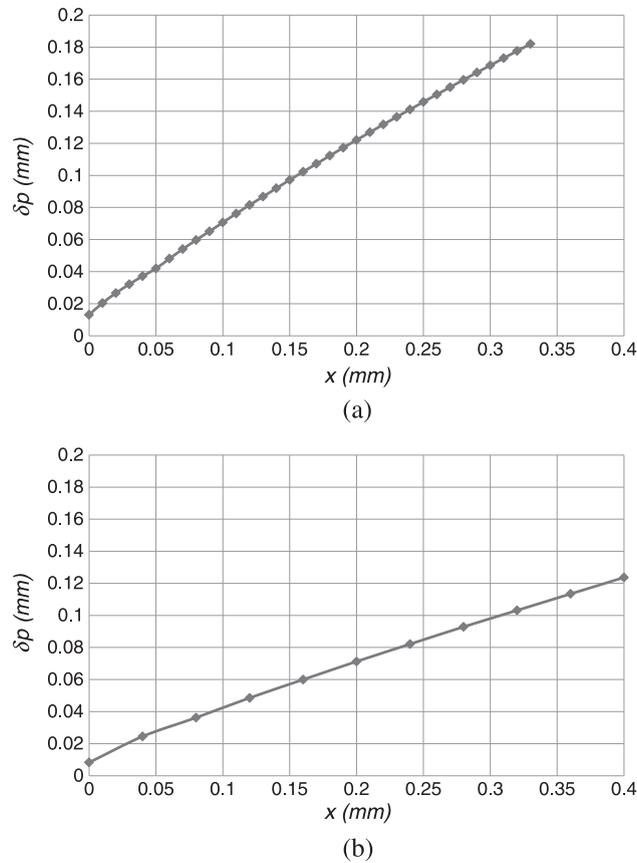


Figure 9.  $\delta_{p-x}$  relationship for finite element model (a) small-sized bearing and (b) large-sized bearing.

Table II. Load-carrying capacities of the bearings in Table I with no preload.<sup>8</sup>

Capacities	$p = 0.0$			
	Small-sized bearing		Large-sized bearing	
	Theoretical model	FE model	Theoretical model	FE model
$C_{0a+}$ [kN]	764.0	772.2	2351.3	2323.2
$C_{0a-}$ [kN]	764.0	797.4	2351.3	2886.4
$C_{0r}$ [kN]	341.3	429.8	1051.9	1907.2
$C_{0m}$ [kNm]	36.6	36.8	339.1	302.2

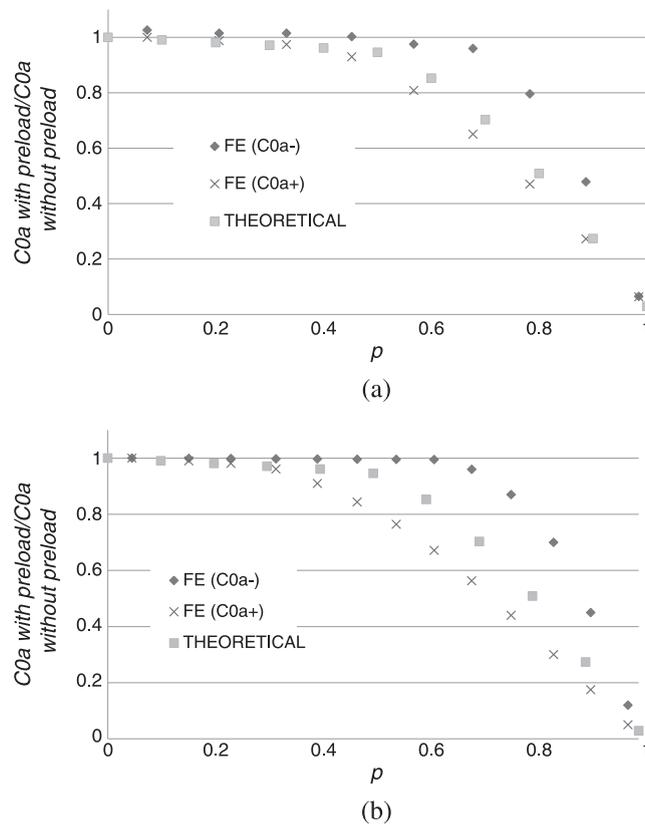
FE, finite element

**2.3. Force and moment equilibrium. The acceptance surface in the load space.**

Once all of the radial, axial, and angular displacement combinations that cause the static failure of the most loaded ball have been calculated, the next step consists on assessing the corresponding axial, radial, and moment load combinations. For this purpose, the force and moment equilibrium in the bearing is studied for each point of the acceptance surface in the interference space. This equilibrium can be expressed in integral form as follows:<sup>5</sup>

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{F_a}{C_{0a}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+}^{\left(\frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}}\right)^{3/2}} \frac{\sin \alpha_{1,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} d\psi & - & \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+}^{\left(\frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}}\right)^{3/2}} \frac{\sin \alpha_{2,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} d\psi \\ \frac{F_r \tan \alpha_0}{C_{0a}} &= \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha_{lim}} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+}^{\left(\frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}}\right)^{3/2}} \frac{\cos \alpha_{1,\psi}}{\cos \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi & + & \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha_{lim}} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta^+}^{\left(\frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}}\right)^{3/2}} \frac{\cos \alpha_{2,\psi}}{\cos \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi \\ \frac{M}{d_{pw} C_{0a}} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\delta^+}^{\left(\frac{\delta_{1,\psi}}{\delta_{lim}}\right)^{3/2}} \frac{\sin \alpha_{1,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi & - & \frac{1}{4\pi} \int_{\delta^+}^{\left(\frac{\delta_{2,\psi}}{\delta_{lim}}\right)^{3/2}} \frac{\sin \alpha_{2,\psi}}{\sin \alpha_{lim}} \cos \psi d\psi \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Where  $C_{0a}$  is the axial capacity of the bearing, and  $\alpha_{lim}$  is the contact angle for which the deflection in the ball is given by expression (10) when pure axial load is applied. Solving these integrals for all of the interference cases, the point cloud of the acceptance surface is obtained in the normalized load space (left terms in (12)). It should be remarked that the terms on the right only depend on the osculation ratio  $s$ , the initial contact angle  $\alpha_0$ , and the preload level  $p$ . This involves that the normalized acceptance surfaces for bearings with different sizes (different values for  $d_w$  and  $d_{pw}$ ) but with the same osculation ratio, initial contact angle, and preload level are identical. In fact, the



**Figure 10.** Axial load-carrying capacity for different preload levels, theoretical, and finite element results: (a) small-sized bearing and (b) large-sized bearing.

terms  $\delta_{i,v}/\delta_{lim}$  depend only on  $s$ ,  $\alpha_0$ , and  $p$  as pointed out previously and from Figure 3, the expression for  $\alpha_{lim}$  can be derived applying the sine rule:

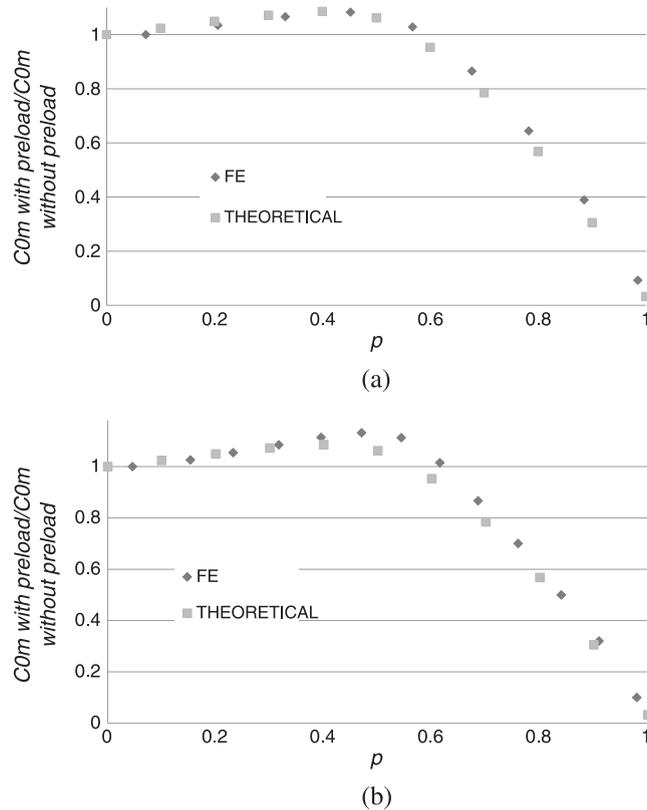
$$\frac{\left(\sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2} + \delta_{lim}\right) \sin \alpha_{lim} - \Delta_a - \delta_P \sin \alpha_0}{\sin(\alpha_{lim} - \alpha_0)} = \frac{\delta_P + \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_r^2}}{\sin(90 - \alpha_{lim})} \tag{13}$$

Introducing (6), (7), (10), and (11) in the previous expression and operating:

$$\alpha_{lim} = \arccos \left[ \cos \alpha_0 \frac{\left(\frac{1-s}{s}\right) + 4.6736 \cdot 10^{-3} p (1-s)^{-0.2288}}{\left(\frac{1-s}{s}\right) + 4.6736 \cdot 10^{-3} (1-s)^{-0.2288}} \right] \tag{14}$$

### 3. FINITE ELEMENT MODEL

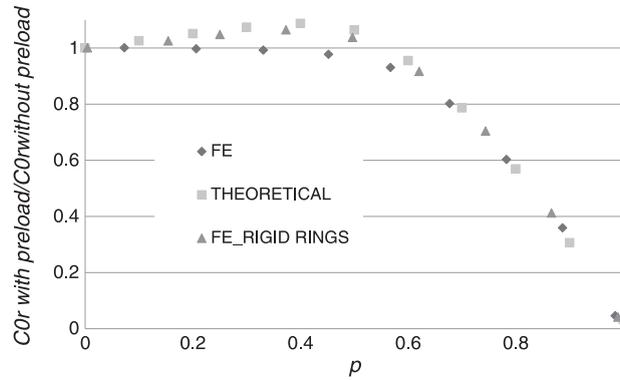
In previous work, the authors developed a multiparametric FE model of a four-contact-point slewing bearing,<sup>8</sup> which was later used to analyze several commercial bearings in order to validate the theoretical model.<sup>5</sup> The present work introduces the influence of the preload in the theoretical model; in parallel, the FE model has also been adapted so as to enable the introduction of the preload in the balls. In the FE model built in previous work,<sup>8</sup> the balls were simulated by a traction-only nonlinear springs, whereas the ball-raceway contacts were reproduced by rigid shells elements, in accordance with the model developed and validated by Daidić.<sup>15</sup> Two rigid beams were arranged in each contact zone, their confluence point (located in the curvature centers of the raceways) being the anchorage of the traction-only nonlinear spring; this geometrical feature enables to simulate appropriately the contact angle variation. Figure 4 shows the model for the contact between the ball and the outer ring-upper raceway and the inner ring-lower raceway (the other identical model for the outer ring-lower raceway and inner ring-upper



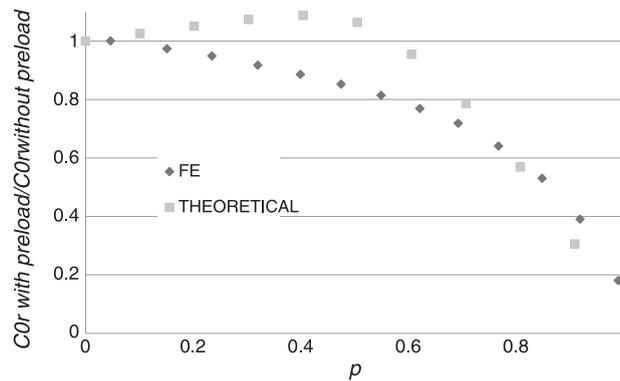
**Figure 11.** Moment load-carrying capacity for different preload levels, theoretical, and finite element results: (a) small-sized bearing and (b) large-sized bearing.

raceway contacts is not represented in the figure). The spring was modeled by a unique traction-only nonlinear spring element (COMBIN39 in ANSYS, ANSYS INC., Canonsburg, Pennsylvania, USA) with an initial length  $L$  equal to the raceway diameter minus the ball diameter. When a force  $Q$  acts on the spring (Figure 5a), its deformation  $\delta$  is obtained by means of the following:

$$\delta = 8.97 \cdot 10^{-4} (1 - s)^{0.1946} \frac{Q^{2/3}}{d_w^{1/3}} \tag{15}$$

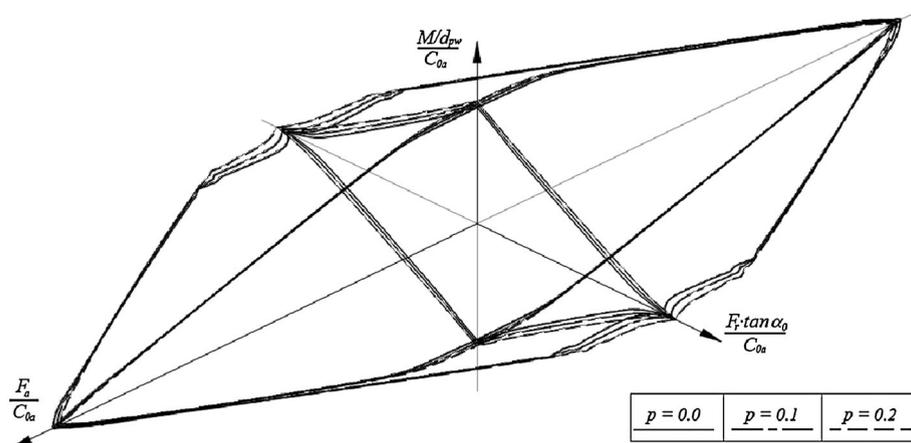


(a)



(b)

**Figure 12.** Radial load-carrying capacity for different preload levels, theoretical, and finite element results: (a) small-sized bearing and (b) large-sized bearing.



**Figure 13.** Acceptance surfaces for  $p=0.0$ ,  $p=0.1$ , and  $p=0.2$ .

The  $Q-\delta$  curve is the one represented in Figure 5b (for  $d_w=20$  mm and  $s=0.943$ ). In order to include the influence of the preload of the balls, in the present work, the spring has been divided into three elements, each of them with a length equal to a third of the raceway diameter minus the ball diameter ( $L/3$ ): two of the elements are the nonlinear spring elements (COMBIN39) and the third one is a linear spring element (COMBIN14) with infinite stiffness. Thus, when a force  $Q$  is acting

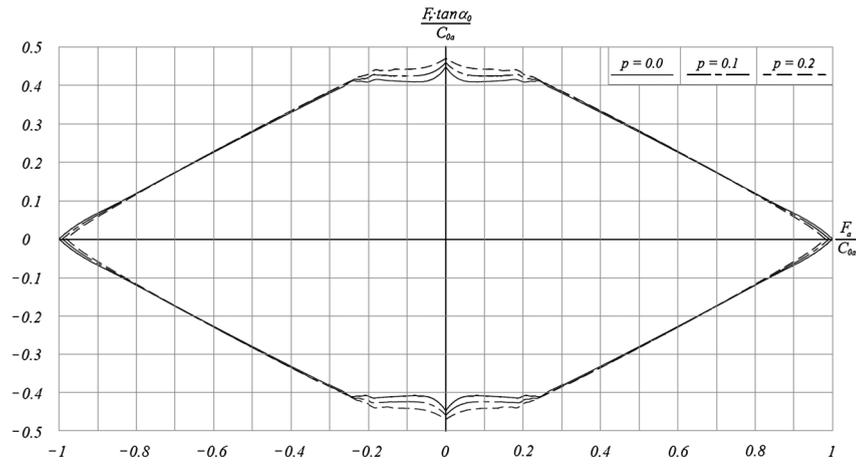


Figure 14. Normalized  $F_A-F_R$  curves for  $p=0.0$ ,  $p=0.1$ , and  $p=0.2$ .

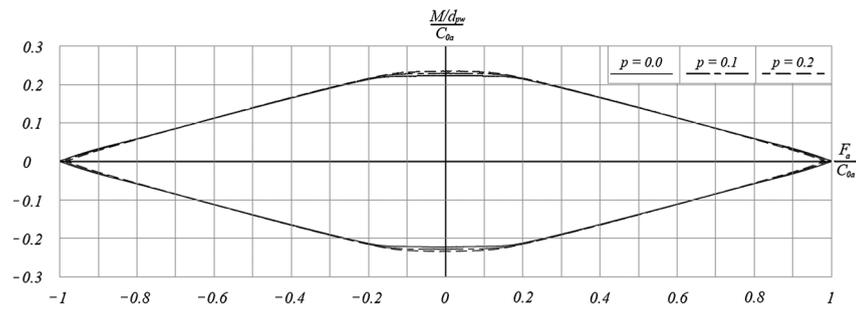


Figure 15. Normalized  $F_A-M$  curves for  $p=0.0$ ,  $p=0.1$ , and  $p=0.2$ .

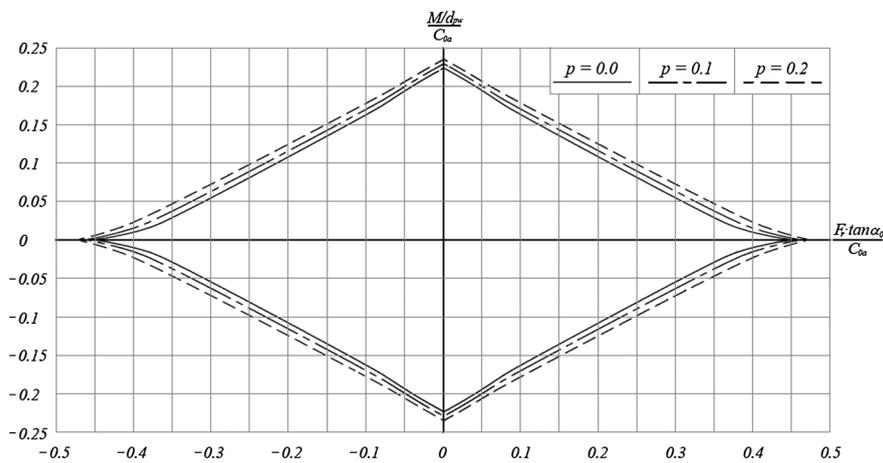


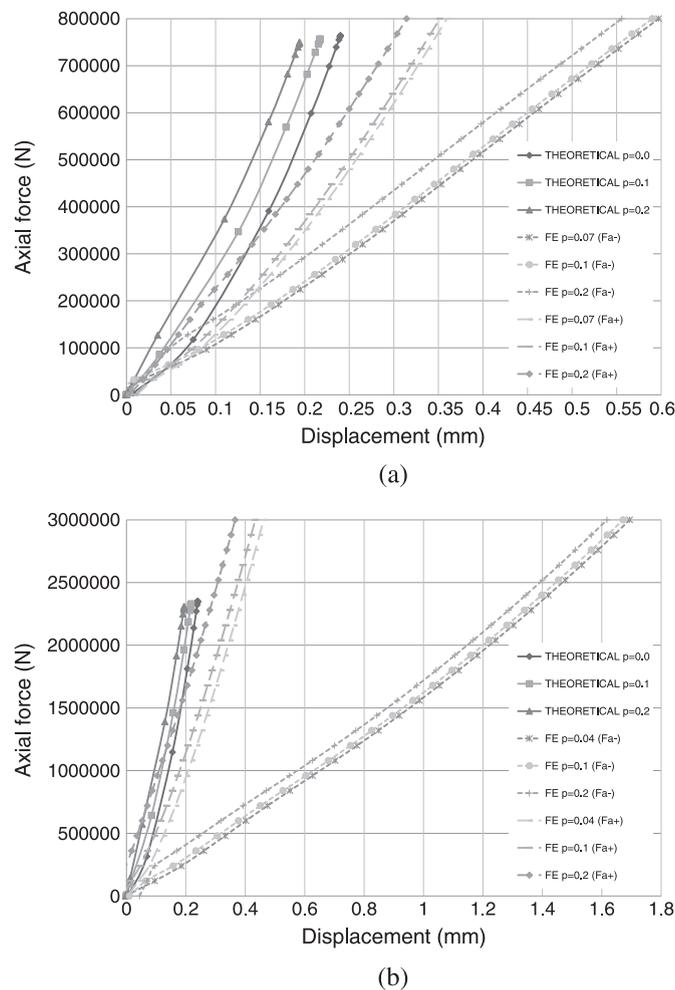
Figure 16. Normalized  $F_R-M$  curves for  $p=0.0$ ,  $p=0.1$ , and  $p=0.2$ .

on the spring, the linear spring remains undeformed (the element in the center in Figure 6a). The deformation of each of the two nonlinear spring elements is half the value predicted by (15), being their  $Q$ - $\delta$  curve, the one illustrated in Figure 6b (for  $d_w = 20$  mm and  $s = 0.943$ ).

The function of the COMBIN14 linear spring element is to simulate the preload of the ball by reducing its initial length  $L/3$  to a new value  $L/3 - x$ . This shortening causes an elongation in the COMBIN39 nonlinear spring elements, being their new length  $L/3 + \delta_p/2$ , where  $\delta_p < x$  because the rings get closer to each other; as a consequence, a preload ( $Q_p$ ) is developed in the ball, as pointed out in Figure 7.

The rest of the FE model is the same as the one presented in detail in previous work.<sup>8</sup> Figure 8 shows a detail, where the following features can be outlined (see<sup>8</sup> for a more extensive description): the inner ring is attached to the fixed element (simulated by a rigid surface) by pretensioned bolts (M12/10.9 preloaded to the 70% of their yield stress), and the external loads are applied in the center of the bearing and transmitted to the outer ring via MPC elements. The present work analyzes two commercial bearings with the geometric parameters shown in Table I.

The relationship between  $\delta_p$  and  $x$  for each of the bearings is obtained from the FE model; obviously, the curve is not the same for both models because the large-sized bearing (Figure 9b) is much more flexible than the small-sized one (Figure 9a). This means that for a certain value of  $x$ , the rings of the large-sized bearing do not approach each other as much as the rings of the small-sized bearing, and thus the resulting  $\delta_p$  and preload ( $Q_p$ ) is smaller. It must also be noted that there is a slight preload when  $x = 0$  in both models. This is caused by the bolts of the inner ring; when these bolts are preloaded, they cause a deformation in the ring, which in turn induces an elongation (and consequently a preload) in the springs.



**Figure 17.** Axial displacement for different axial forces, theoretical, and, finite element results: (a) small-sized bearing and (b) large-sized bearing.

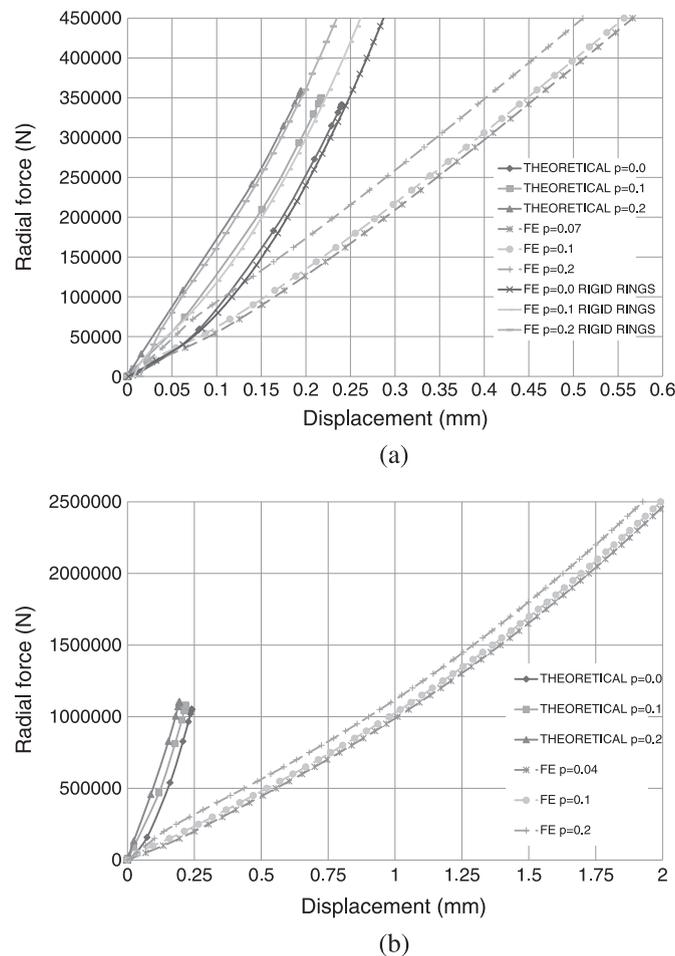
### 4. RESULTS AND DISCUSSION

In previous work,<sup>5</sup> a theoretical model for the assessment of the generalized load capacity of four-contact-point slewing bearings was presented. For the particular bearings described in Table I, the load capacities in Table II were obtained; for validation purposes, these values were compared with those provided by the FE model described in previous work.<sup>8</sup> In the small-sized bearing, the theoretical and FE results are highly coincident for the axial and moment capacities; however, the difference is sensitive for the radial capacity.

The reason is that the rings are flexible in the FE model, whereas the theoretical method assumes them to be rigid; the stiffness of the rings has a direct influence on the way the applied loads are distributed among the balls and therefore on the load-carrying capacity of the bearing. Although the influence of this effect in the axial and moment capacities is negligible, it is extremely important for the radial capacity (the bearing is really very flexible in the radial direction because its transversal section is much smaller than its mean diameter). A similar effect takes place in the large-sized bearing, and in this case, the mismatch between the theoretical and FE results is even larger because the bearing is much more flexible.<sup>5</sup> Note that for the axial load capacities calculated with the FE model, there are two values: one is for axial load in the positive direction and the other one is for axial load in the negative direction; they are different because of the axial asymmetry of the boundary conditions.<sup>8</sup>

#### 4.1. Influence of the preload in the load capacity

Considering that yaw and pitch bearings have a preload, the present work further develops that theoretical model to include the influence of the preload; in parallel, the FE model has also been adapted as described in the previous section in order to compare its results with the ones derived theoretically.

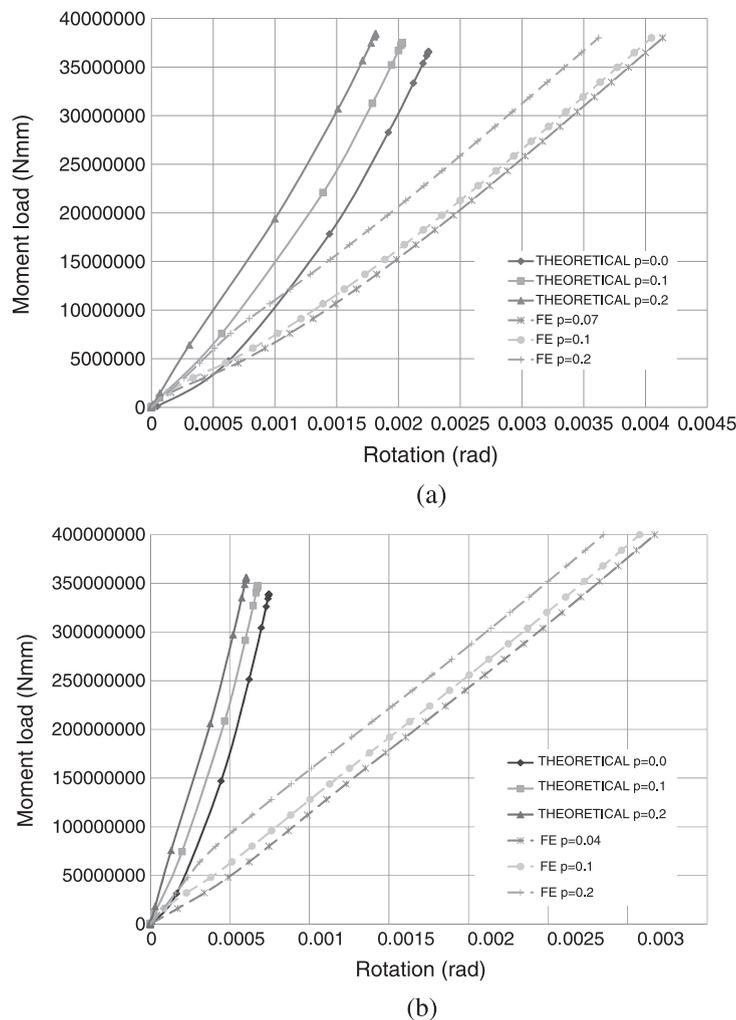


**Figure 18.** Radial displacement for different radial forces, theoretical, and finite element results: (a) small-sized bearing and (b) large-sized bearing.

Regarding to the axial load capacity of the bearing, as the preload (expressed as the ratio between the deflection of the balls  $\delta_p$  and the maximum admissible deflection  $\delta_{lim}$  calculated in (10)) increases, Figure 10 shows that the capacity decreases (two FE curves are represented because, as mentioned, the behavior of the FE model is not the same for the two possible axial directions<sup>8</sup>). In reference to the moment capacity, it increases for the low preload values and then decreases, as illustrated in Figure 11. It can be observed that the results of the theoretical and FE models are highly coincident for both the axial and moment capacities. In contrast, the radial capacities predicted by both models are significantly different while the theoretical model predicts an increase of the capacity for low preload levels; the FE results show a decreasing tendency (Figure 12). Once again, this mismatch is caused by the stiffness of the rings; in fact, if the elastic modulus of the rings of the FE model is multiplied by 100 (simulating rigid rings), then the results are found to be highly coincident (see 'FE\_RIGID RINGS' curve in Figure 12a).

Three conclusions may be drawn from Figures 10–12. One, the theoretical model predicts reasonably the load capacity of the bearing; two, the static load capacity does not vary significantly when values between  $p=0.0$  and  $p=0.2$  are adopted for the preload; and three, the overall load capacity of the bearings (axial, radial, and moment) remains almost constant from preloads ranging from  $p=0$  to  $p=0.5$  and then decreases almost linearly to zero.

With the theoretical model, not only pure axial, radial, and moment static load capacities can be estimated but also the load combinations that will lead to the static failure of the bearing. For such purpose, a 'three-dimensional acceptance surface' is defined, in such a way that the validity of any  $F_A$ - $F_R$ - $M$  load combination is assured by an inside-surface checking.<sup>3</sup> Figure 13 shows the acceptance surfaces for preload values of  $p=0$ ,  $p=0.1$ , and  $p=0.2$ . As pointed out in the introduction section, a preload of approximately 7–10% of the maximum admissible deflection of the balls is usually adopted for yaw and



**Figure 19.** Angular displacement for different moment loads, theoretical, and finite element results: (a) small-sized bearing and (b) large-sized bearing.

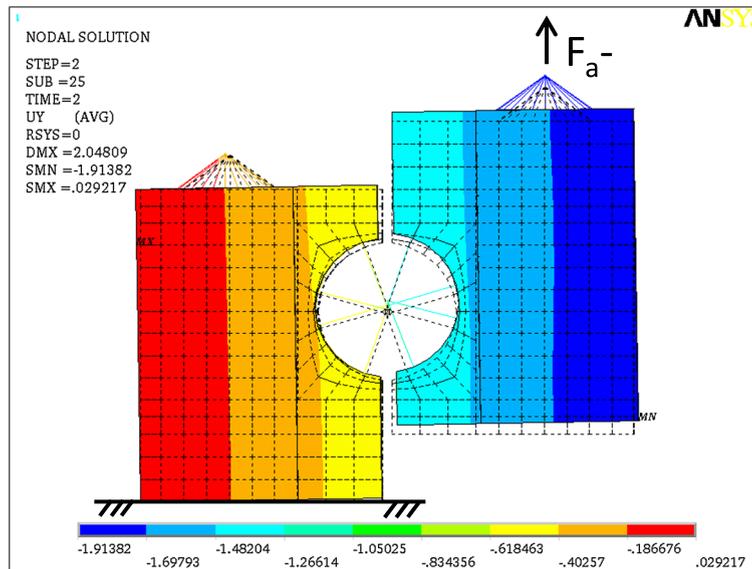


Figure 20. Deformed shape of a transversal section of the large-sized bearing,  $F_a = 3000$  kN.

pitch bearings ( $p=0.07$  and  $p=0.1$ ). Figures 14–16 show the corresponding curve fits in the  $F_A$ - $F_R$ ,  $F_A$ - $M$ , and  $F_R$ - $M$  coordinate planes. The surfaces and the resulting coordinate planes have been normalized with respect to the axial capacity of the bearing with no preload ( $p=0.0$ ).

#### 4.2. Influence of the preload in the stiffness of the bearing

In reference to the stiffness of the bearing, the preload increases its magnitude; Figures 17–19 show respectively the axial, radial, and angular (moment) load-displacement curves that prove this statement for preload levels of  $p=0.0$ ,  $p=0.1$ , and  $p=0.2$ . Even though the tendency is the same for both the theoretical and FE models, it can be observed that the magnitude of the displacements is much higher in the FE results. As the theoretical model assumes rigid rings, the displacement is caused only by the deformation of the springs that simulate the ball. On the contrary, in the FE model, apart from the deformation of the springs, the deformation of the flexible rings and the layout of the boundary conditions play a very important role. As an example, Figure 20 illustrates the deformed shape of a transversal section of the large-sized bearing when an axial load  $F_a = 3000$  kN (a bit larger than its capacity) is applied: as it can be seen, the deformation of the springs is a very little part of the total vertical displacement of the system. It must be pointed out that more restrictive boundary conditions in the FE model would lead to considerably smaller displacements. In this sense, if the elastic modulus of the rings of the FE model is multiplied by 100 (simulating rigid rings), then the results are found to be highly coincident (see 'FE\_RIGID RINGS' curve in Figure 18a).

It must be noted that in figures 17–19, the aforementioned  $p=0.0$  curve for the FE model does not appear. Instead it,  $p=0.07$ , appears for the small bearing and  $p=0.04$  for the large one. As it has been previously explained, this is due to the deformation caused by the preload of the bolts (which are tightened to the 70% of their yield stress).

## 5. CONCLUSIONS

In this work, the theoretical and FE models developed by the authors in previous works have been adapted to consider the effect of the preload on the generalized static load capacity and the overall stiffness for four-contact-point slewing bearings. The authors believe that the inclusion of the preload in the FE model is a remarkable advance because no contribution has been found in the literature for this specific problem. And regarding to the analytical model, the influence of the preload can be estimated with a much lower computational cost, once assumed the simplifying hypothesis, it is established upon. In fact, the analytical model assumes rigid rings and this involves that the results are not as accurate as the FE results.

Finite element results reveal that globally, the load capacity of four-contact-point slewing bearings remains almost the same (slightly increasing sometimes) from preloads ranging from 0% to 50%, measured as the rate between the deflection of the most loaded ball and the maximum allowable deflection. The theoretical model confirms this mechanical response

although for some load combinations, for example the pure radial load, this model overestimates the load capacity given by the FE model. This is because the theoretical model considers the rings to be rigid; in contrast, the rings in the FE model are flexible and consequently the load distribution and therefore the capacity of the bearing are more realistic. Considering that the typical values of preload for wind turbine generator bearings are in the range of 7–10% of the maximum admissible deflection of the balls, the major conclusion to be extracted from the results is that the preload does not have a significant influence on the static load-carrying capacity. It must be remarked that not only pure axial, radial, and moment static load capacities can be calculated with the theoretical model; it provides an acceptance surface where all of the admissible load combinations are represented.

In reference to the stiffness, the results (both theoretical and FE) point out that the stiffness of the bearing is larger as the preload level increases. Nevertheless, the displacements obtained from the analytical model are considerably smaller than the FE displacements; this makes sense because, while in the theoretical model, the displacement is only caused by the deformation of the springs modeling the balls (the rings are rigid). In the FE model, the deformation of the rings cause an additional (and very important) displacement. Besides, the boundary conditions in the theoretical model are much more restrictive than in the FE model. In this sense, further research would consist on adapting the theoretical model to include the flexibility of the rings as for example using a ring compliance matrix<sup>16</sup> and the different boundary conditions that can be imposed in a known application.

To conclude, in the following lines, a brief guideline on when to use the FE model or the analytical tool is discussed; in this sense, the FE model has been adopted as the ‘exact’ model whereas the analytical one has been proposed as an ‘approximate’ one. Because of its conservative nature, the analytical model can be used for the initial stage of the selection of slewing bearings; for the calculation of the stiffness of the bearing, the FE model would be the better choice because it is essential to consider ring compliance and to include the actual boundary conditions in order to obtain realistic results. Notwithstanding this, it must be pointed out that the influence of the preload in both the load capacity and the stiffness is well estimated by the analytical model.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This paper is a result of the close collaboration that the authors maintain with the company Iraundi Bearings. The authors are grateful for the dedication and generosity with which Iraundi has provided its know-how for this work. We want also to acknowledge the financial support of the University of the Basque Country (Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco (UPV/EHU)), grant number UFI 11/29.

## REFERENCES

1. Kang SH, Tesar D. An Analytical comparison between ball and crossed roller bearings for utilization in actuator modules for precision modular robots. ASME 2003, International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference DETC2003/DAC-48834 pp. 1221-1230.
2. International Organization for Standardization. Rolling bearings – static load ratings, ISO 76:2006, 3rd edn, 2006.
3. Aguirrebeitia J, Avilés R, Fernández de Bustos I, Abasolo M. Calculation of the general static load-carrying capacity for the design of four contact point slewing bearings. *Journal of Mechanical Design* 2010; **132**: 064501.
4. Aguirrebeitia J, Avilés R, Fernández de Bustos I, Abasolo M. Calculation of general static load-carrying capacity for the design and selection of three-row roller slewing bearings. *Mechanism and Machine Theory* 2012; **48**: 52–61.
5. Aguirrebeitia J, Plaza J, Abasolo M, Vallejo J. General static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generator actuation systems, *Wind Energy* (DOI: 10.1002/we.1530), 2012.
6. Sjöväll H. The load distribution within ball and roller bearings under given external radial and axial load. *Teknisk Tidskrift, Mek.*, h.9, 1933.
7. Rumbarger J. Thrust bearing with eccentric loads. *Mach. Des.*, February, 1962.
8. Aguirrebeitia J, Abasolo M, Avilés R, Fernández de Bustos I. General static load-carrying capacity for the design and selection of four contact point slewing bearings: finite element calculations and theoretical model validation. *Finite Elements in Analysis and Design* 2012; **55**: 23–30.
9. Amasorrain JI, Sagartzazu X, Damián J. Load distribution in a four contact-point slewing bearing. *Mechanism and Machine Theory* 2003; **38**: 479–496.
10. Leblanc A, Nelias D. Ball motion and sliding friction in a four-contact-point ball bearing. *Journal of Tribology* 2007; **129**(4): 801 (8 pages).

11. Li YF. Static load capacity of three-row roller slewing bearing considering clearances, *Applied Mechanics and Materials* 2011; **52-54**: 562–567.
12. Long C, Yaping Z, Xintao X. Contact stress and deformation of blade bearing in wind turbine. 2010 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. 833–836.
13. Harris TA, Kotzalas MN. *Rolling Bearing Analysis: Essential Concepts of Bearing Technology*. Taylor & Francis/CRC Press, 2007.
14. Houpert L. An engineering approach to Hertzian contact elasticity – part 1. *ASME Journal of Tribology* 2001; **123**: 582–588.
15. Daidié A, Chaib Z, Ghosn A. 3D simplified finite elements analysis of load and contact angle in a slewing ball bearing. *ASME Journal of Mechanical Design* 2008; **130**: 082601 (8 pages).
16. Hauswald T, Houpert L. Numerical and experimental simulations of performances of bearing system, shaft and housing; account for global and local deformations. *Presented at the SIA seminar Fiabilité expérimentale. Proceeding of the Conference*. Paris, 2000.



# New selection curves for four contact point slewing bearings

Mikel Abasolo, Ibai Coria, Jon Plaza and Josu Aguirrebeitia

Proc IMechE Part C:  
 J Mechanical Engineering Science  
 0(0) 1–11  
 © IMechE 2015  
 Reprints and permissions:  
 sagepub.co.uk/journalsPermissions.nav  
 DOI: 10.1177/0954406215583522  
 pic.sagepub.com



## Abstract

The selection of slewing bearings is based on the static load-carrying capacity. In this sense, manufacturers provide selection curves in their catalogues. However, little information is given about their origin. This work develops new and more versatile selection curves for four contact point slewing bearings, with a clear explanation of their background, scope and limitations. The new curves take into account the two possible static failure types, the ball-raceway contact failure and the bolted joint failure.

## Keywords

Slewing bearing, static load capacity, catalogue, selection curves, analytical model

Date received: 2 March 2015; accepted: 31 March 2015

## Introduction

Slewing bearings are large-sized elements that enable the rotation between the components of large structural systems. They are used for orientation purposes in wind turbine generators, solar trackers or cranes, to mention a few examples.<sup>1</sup> There are several types of slewing bearings; the selection of the correct type of bearing is made on the basis of its particular characteristics such as accuracy, operational speed, and rotation resistance, amongst others. In manufacturer catalogues, the slewing bearings are classified in different series for different bearing types, ring geometries, ball diameters, gears, and so on. As an illustrative example, Figure 1 shows POS214 series by manufacturer IRAUNDI S.A. (Bergara, SPAIN), which corresponds to four contact point slewing bearings with balls of Ø20 mm and external gear.<sup>2</sup>

The rings of the slewing bearing are bolted to the supporting structures; for example, in the case of a wind turbine generator blade bearing, one ring is bolted to the hub and the other one to the blade.<sup>3</sup> As the rings and the supporting structures must fit together, generally the first selection of the slewing bearing is carried out based on its mean diameter. In this sense, in manufacturer catalogues, each of the series is composed of several bearings with different diameters; for example, as pointed out in Figure 2, there are eight different bearings in POS214 series by manufacturer IRAUNDI, with mean diameters ranging from 314 mm to 1094 mm.

Having thus preselected the bearing based on its size, it must be verified that it can withstand the operational loads: the axial load  $F_a$ , the radial load  $F_r$  and the overturning moment  $M$  (see Figure 3). In the case of slewing bearings, as it can be deduced from its aforementioned applications, the rotation range and speed is small so the acting loads  $F_a$ – $F_r$ – $M$  can be considered to be static. Therefore, the validity of the preselected bearing is verified based on its static load-carrying capacity. For such purpose, manufacturer catalogues provide selection curves similar to the ones shown in Figure 4, which correspond to POS214 series by IRAUNDI (see Figure 1);<sup>2</sup> there are eight curves, one for each of the bearings of the series (see Figure 2). The input data for the curves in Figure 4 are the acting loads  $M$  and  $F_{a,eq}$ , where  $M$  is the overturning moment and  $F_{a,eq}$  is an equivalent axial load, calculated with a mathematical expression that combines the acting axial and radial loads  $F_a$  and  $F_r$ . These loads  $M$  and  $F_{a,eq}$  are generally multiplied by a magnification factor, whose value depends on the requirements (type and severity of operation, rigidity,

Department of Mechanical Engineering, University of the Basque Country (UPV/EHU), Bilbao, Spain

### Corresponding author:

Mikel Abasolo, Department of Mechanical Engineering, University of the Basque Country (UPV/EHU), Alameda Urquijo s/n, 48013 Bilbao, Spain.

Email: mikel.abasolo@ehu.es

running accuracy, and so on) of the application. The preselected bearing is valid if the  $F_{a,eq}$ - $M$  point lies below its corresponding selection curve; if not, a larger bearing must be selected.

Unfortunately, manufacturers give little information about the methodology used to obtain such

selection curves. Catalogues only mention that the curves are based on the static load-carrying capacity of the bearings, pointing out that the static failure can be caused by two effects: an excessive contact pressure in the rolling element-raceway contact area, or an excessive load (over the yield point) in the bolts of the bolted joint of the bearing. In this sense, the descending lines in the curves of Figure 4 correspond to the first type of failure, and the ascending ones to the second type of failure. In addition to this lack of information, it has been observed that different manufacturers provide very similar curves in their catalogues. Finally, in regard to the calculation of the equivalent axial load  $F_{a,eq}$ , manufacturers use different expressions without explaining their origin or background.

These facts lead to consider that there are many manufacturers that ignore the underlying theoretical fundamentals, as well as their scopes and limitations. In this sense, the present work develops new selection curves for four contact point slewing bearings. As mentioned, the static load-carrying capacity and therefore the selection curves must take into account the ball-raceway contact failure and the bolted joint failure. In reference to the ball-raceway contact failure, the new curves have been obtained from an

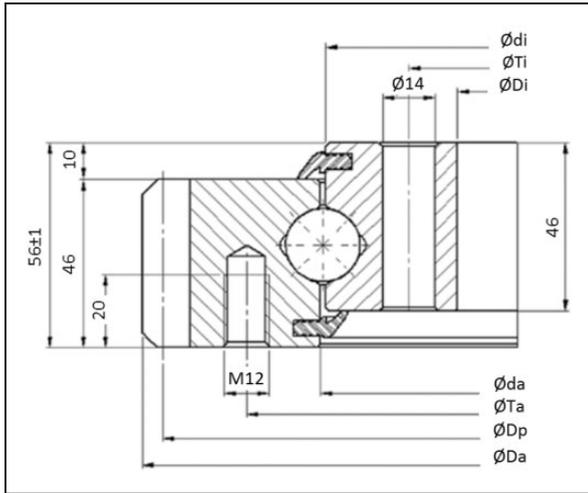


Figure 1. Geometry of POS214 series by manufacturer IRAUNDI.<sup>2</sup>

POS 214 dentado exterior / external gear			Bolas Ø 20 4 p.c / Balls Ø 20 4 c.p.												
TIPO TYPE	Pos.	Dm (mm)	DIMENSIONES DIMENSIONS				AGUJEROS FIJACIÓN FIXING HOLES				DENTADO GEAR TEETH			PESO WEIGHT	
			Da (mm)	Di (mm)	da (mm)	di (mm)	Ta (mm)	na (-)	Ti (mm)	ni (-)	Dp (mm)	M (mm)	Z (-)	W (Kg)	
20-0001	1	314	404	242	315,5	312,5	355	20	268	20	395	5	79	24	
20-0002	2	414	504	342	415,5	412,5	455	20	368	24	495	5	99	33	
20-0003	3	544	640,8	472	545,5	542,5	585	28	498	32	630	6	105	44	
20-0004	4	644	742,8	572	645,5	642,5	685	32	598	36	732	6	122	53	
20-0005	5	744	838,8	672	745,5	742,5	785	36	698	40	828	6	138	59	
20-0006	6	844	950,4	772	845,5	842,5	885	36	798	40	936	8	117	72	
20-0007	7	944	1046,4	872	945,5	942,5	985	40	898	44	1032	8	129	78	
20-0008	8	1094	1198,4	1022	1095,5	1092,5	1135	44	1048	48	1184	8	148	91	

Figure 2. Bearings in POS214 series by manufacturer IRAUNDI (see Figure 1).<sup>2</sup>

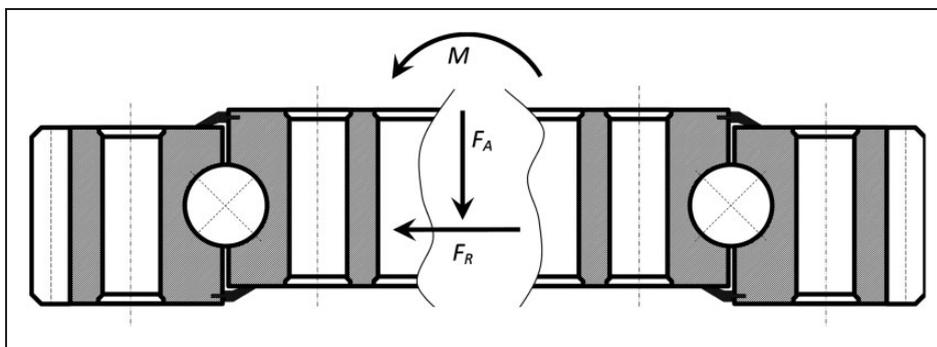
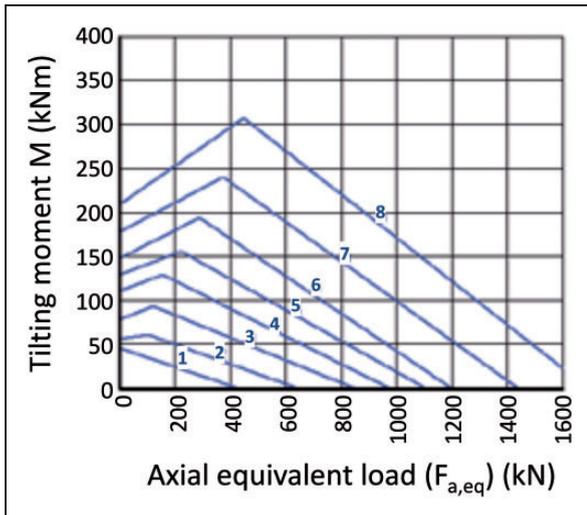


Figure 3. Loads acting on a slewing bearing: axial load  $F_a$ , radial load  $F_r$ , and overturning moment  $M$ .



**Figure 4.** Selection curves for bearings of POS214 series by manufacturer IRAUNDI (see Figures 1 and 2).<sup>2</sup>

analytical method published by the authors in several works;<sup>4–7</sup> this method, which is a generalization of previous works by Sjövall and Rumbarger<sup>8,9</sup> and assumes rigid rings and supports, has been validated via FEA.<sup>5–7</sup> Other methods take into account the flexibility of the bearing rings and supporting structures in the load distribution and therefore in the load capacity by means of finite element analyses;<sup>10–18</sup> these methods provide more realistic results, but they are only valid for the bearing-supports assembly under study (with its particular geometries, hard/soft points, materials, bolt number and diameters, and so on), and therefore their results cannot be generalized for other applications. The new selection curves are based on the analytical method developed by the authors, because of its generalist and conservative nature. Regarding the bolted joint failure, the new curves have been deduced from calculation methods that can be found elsewhere.<sup>19–21</sup>

On the whole, the new curves developed in this work have the following advantages: on the one hand, the theoretical background is clearly explained, having been published and validated in previous works; on the other hand, no equivalent axial load is used because the radial load capacity of the bearing is an integral part of the theoretical development, which results in more versatile selection curves. In the following sections, the methodology to obtain the new selection curves is explained, and a practical example is shown.

## Methodology to obtain the new selection curves

### Theoretical background

The static load-carrying capacity of the slewing bearing is limited by the ball-raceway contact failure and

the bolted joint failure. The methodology to obtain the new selection curves takes into account these two failure types.

*Study of the ball-raceway contact failure.* According to ISO 76,<sup>22,23</sup> the static failure occurs when the ball-raceway contact pressure is 4200 MPa for the most loaded ball in the bearing (elastically calculated by means of Hertz expressions for elliptic contacts). As it has been mentioned, in previous works the authors developed and validated via FEA an analytical method that studies the interference field caused by the acting loads and provides all of the  $F_a$ – $F_r$ – $M$  load combinations that cause that contact pressure value, and therefore the static failure of the bearing.<sup>4–7</sup> Figure 5 shows both the ball-raceway interference field of the analytical method, and the FE model.

The results of the analytical method can be represented in the three-dimensional “acceptance surface” shown in Figure 6, where all of the  $F_a$ – $F_r$ – $M$  load combinations that lead to the static failure of the slewing bearing are represented. The axes are normalized with respect to the axial capacity of the bearing  $C_{0a}$ , defined as the pure axial load  $F_a$  that causes the static failure. According to ISO 76

$$C_{0a} = f_0 \cdot z \cdot d_w^2 \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

where  $d_w$  is the ball diameter,  $z$  is the number of balls,  $\alpha$  is the initial ball-raceway contact angle, and  $f_0$  is a tabulated factor which can be approached by the following formula

$$f_0 = 61.6 - 80 \cdot d_w/d \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

where  $d$  is the mean diameter of the bearing. The authors want to remark that each manufacturer should provide its own experimentally correlated expression for the axial load capacity  $C_{0a}$ ; the methodology developed in this work is valid regardless of the expression of  $C_{0a}$ . Manufacturers usually use the value of  $C_{0a}$  from expression (1), divided by a safety factor (in addition to the aforementioned acting load magnification factor); for example, IRAUNDI uses a factor of 2 for POS214 series.

The overturning moment axis is also normalized with respect to the mean diameter of the bearing  $d$ , whereas the radial force axis is also normalized with respect to the tangent of the initial ball-raceway contact angle  $\alpha$ . As pointed out in Figure 6, the maximum values for the surface in the normalized axes are found to be  $F_a/C_{0a} = 1$ ,  $F_r/C_{0a} \cdot \tan \alpha = 0.4577$  and  $M/d/C_{0a} = 0.2288$ .<sup>1,4</sup>

Taking advantage of this normalization, the acceptance surface allows to calculate all of the admissible load combinations for four contact point slewing bearings taking as input data the mean diameter  $d$ , the axial load capacity  $C_{0a}$  and the initial contact angle  $\alpha$ ; in other words, the acceptance surface in Figure 6 is a

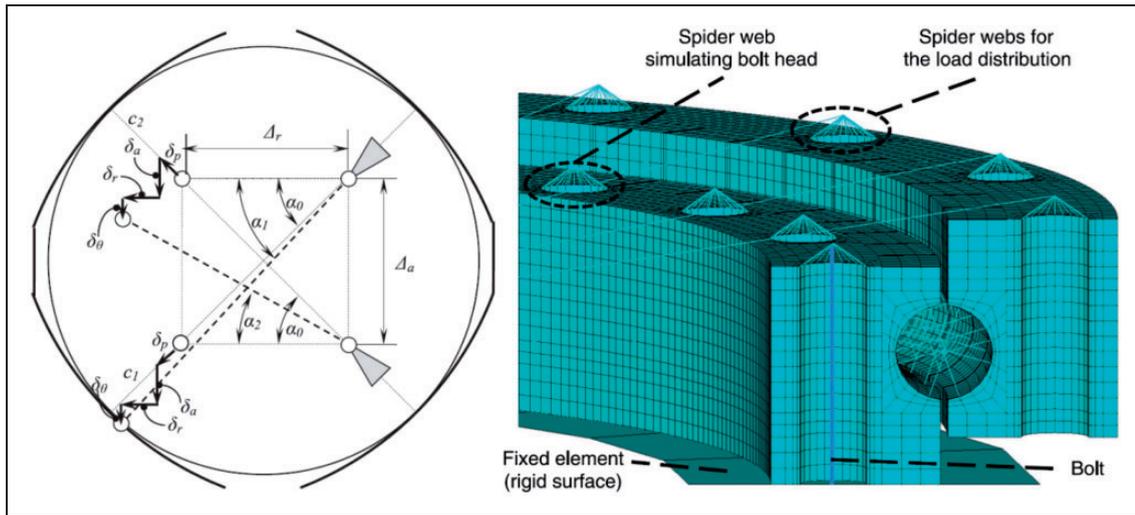


Figure 5. Analytical method and FE model.<sup>4-7</sup>

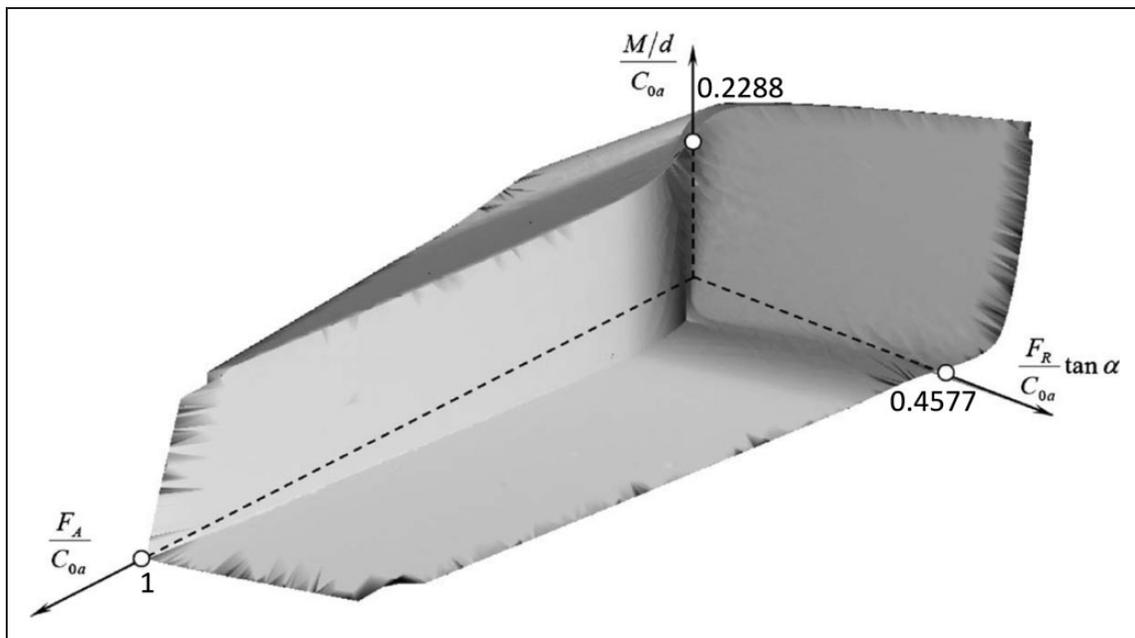


Figure 6. Normalized acceptance surface for four contact point slewing bearings ( $s = 0.943$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ).<sup>6</sup>

unified surface, valid for any four contact point slewing bearing. It must be noted that the form of the surface slightly varies with the conformity of the ball-raceway contact  $s$ , and the initial contact angle  $\alpha$  (in Figure 6,  $s = 0.943$  and  $\alpha = 45^\circ$ ).<sup>6</sup>

The three-dimensional acceptance surface in Figure 6 can be represented in a bidimensional graph with normalized axes  $F_a/C_{0\alpha}$  (abscissa axis) and  $M/d/C_{0\alpha}$  (ordinate axis), plotting  $F_r/C_{0\alpha} \tan \alpha$  as isolines (see Figure 7).

As can be observed in Figure 7, the direction of the acting loads affects the static load-carrying capacity of the bearing. In order to obtain conservative and generalist curves, valid for any load direction, a superposition of the curves of the four quadrants is used,

giving rise to the load capacity curves illustrated in Figure 8.

*Study of the bolted joint failure.* The curves in Figure 8 only consider the load capacity of the bearing in terms of ball-raceway contact failure. However, the load capacity can also be limited by the resistance of the bolts of the ring-support bolted joints. Although most manufacturers do not explain it explicitly, the following elementary and conservative procedure is used to obtain catalogue curves regarding the bolted joint failure.

According to slewing bearing manufacturer catalogues, bolts are typically preloaded to approximately 75% of their yield load  $F_{yp}$ . In this initial equilibrium

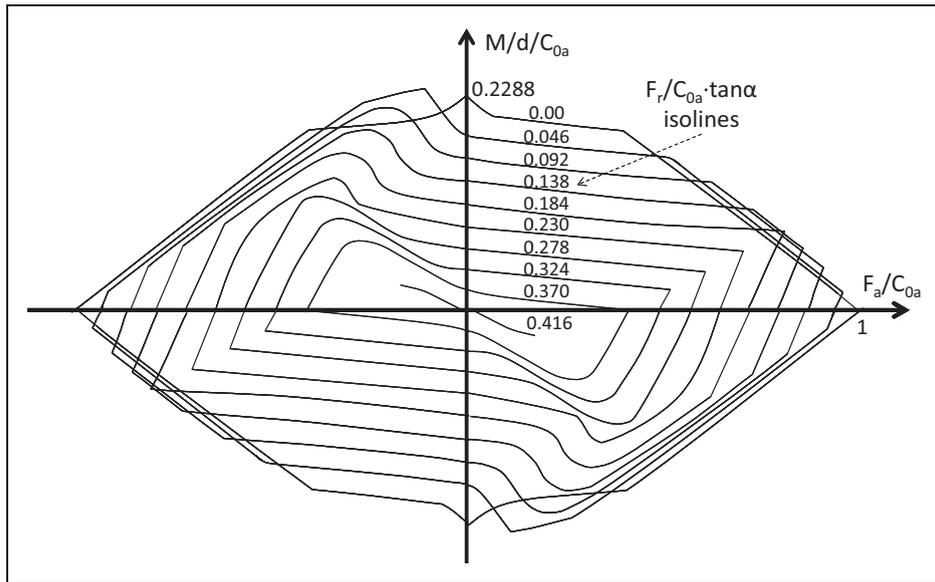


Figure 7. Isolines of the acceptance surface of Figure 6.

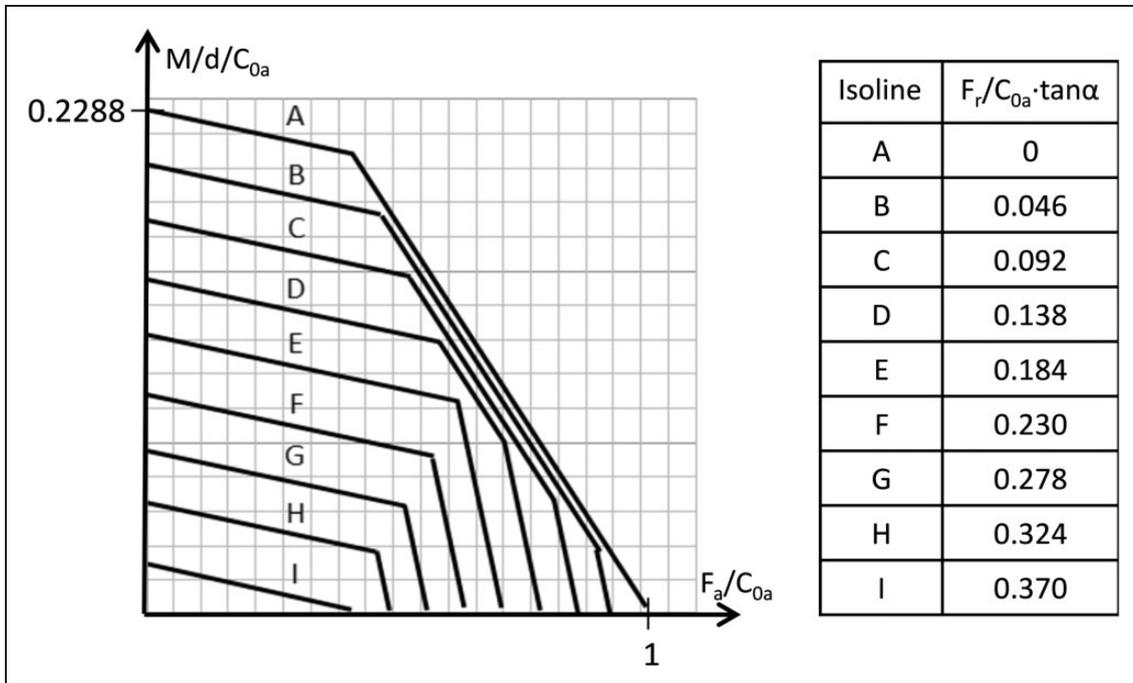


Figure 8. Load capacity curves for the ball-raceway contact failure in four contact point slewing bearings.

state, the bolts are tensioned while the joined elements (ring and supporting structure) are compressed, both with the same preload force  $F_p$

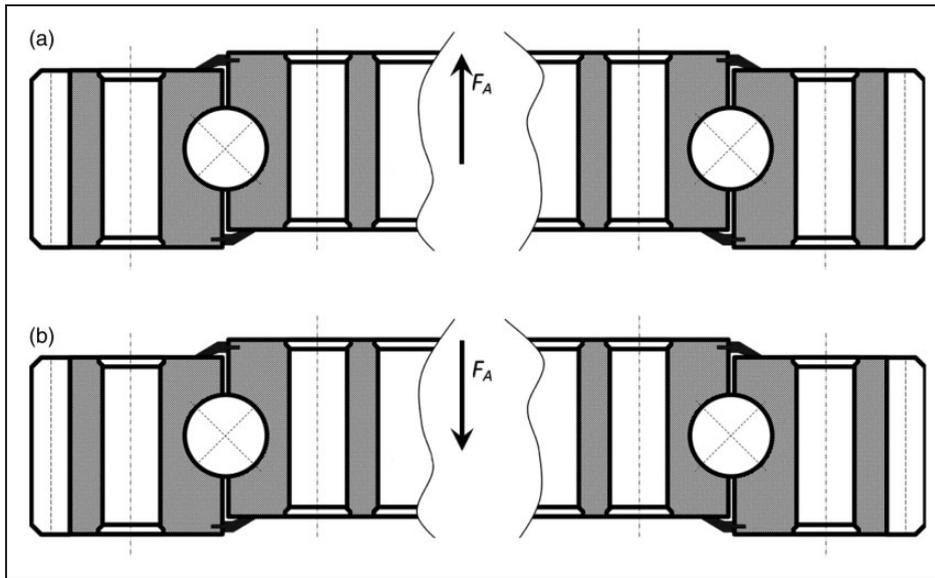
$$F_b = F_e = F_p = 0.75 \cdot F_{yp} \quad (3)$$

where  $F_b$  is the bolt load and  $F_e$  is the load in the joined elements. Additionally, axial, radial and overturning moment loads ( $F_a - F_r - M$ ) will be acting on the bearing. The bolted joint must withstand these loads, in such a way that the bolts could reach the yield load  $F_{yp}$ , causing the failure of the bolted joints and,

consequently, of the slewing bearing. Next, the effect of these acting loads on the bolted joint is explained.

The application of the axial load  $F_a$  leads to a new equilibrium state, in which the bolts and the joined elements share the acting load; as the bolts are more flexible than the joined elements, they only carry a small percentage of the load  $F_a$ . In this new equilibrium state<sup>19-21</sup>

$$F_b = F_p + C \cdot F_a/n \quad (4)$$



**Figure 9.** Acting axial load  $F_a$ : (a) tension axial load (b) compression axial load.

$$F_e = F_p - (1 - C) \cdot F_a/n \quad (5)$$

where  $n$  is the number of bolts in the bolted joint (the axial load is uniformly distributed between all of the bolts in the bolted joint) and  $C$  is the joint stiffness ratio, defined as

$$C = \frac{K_b}{K_b + K_e} \quad (6)$$

where  $K_b$  is the tension stiffness of the bolts and  $K_e$  the compression stiffness of the joined elements. As pointed out in expressions (4) and (5), the value of  $C$  determines the percentage of the axial load  $F_a$  carried by the bolts; the rest of it,  $1-C$ , is carried by the joined elements. If the axial load tends to separate the rings (tension axial load, see Figure 9a), the bolts increase their tension load and the joined elements decrease their compression load; if the axial load tends to compress the rings against each other (compression axial load, see Figure 9b), the effect is the opposite.

The bolt failure occurs under a tension axial load, when the bolt load reaches the yield point  $F_{yp}$

$$F_t = F_p + C \cdot F_a/n = F_{yp} \quad (7)$$

In a simplified and conservative calculation, it can be assumed that the bolts carry the total axial load  $F_a$  ( $C=1$  in expression (7)). Thus, combining equations (3) and (7), the pure axial load  $F_a$  that causes the static failure of the bolted joint is

$$F_a = 0.25 \cdot F_{yp} \cdot n \quad (8)$$

The analysis of the response of the system under overturning moment is similar to that explained for

axial load. The moment  $M$  causes the bolted joint to overturn as shown in Figure 10, tensioning half of the bolts and compressing the other half.

Once again, it can be assumed that the bolts carry the total load  $M$ . As illustrated in Figure 10, the bolt which is furthest from the neutral axis ( $r_i=R$ ) is the most loaded one ( $F_{b,max}$ ). For any bolt  $i$  located at a distance  $r_i$ , according to Figure 10

$$F_{b,i} = F_{b,max} \cdot \frac{r_i}{R} = F_{b,max} \cdot \cos \theta_i \quad (9)$$

Moreover

$$M = \sum_{i=1}^n (F_{b,i} \cdot r_i) \quad (10)$$

From equations (9) and (10)

$$M = \sum_{i=1}^n (F_{b,max} \cdot R \cdot \cos^2 \theta_i) F_{b,max} \cdot R \cdot n/2 \quad (11)$$

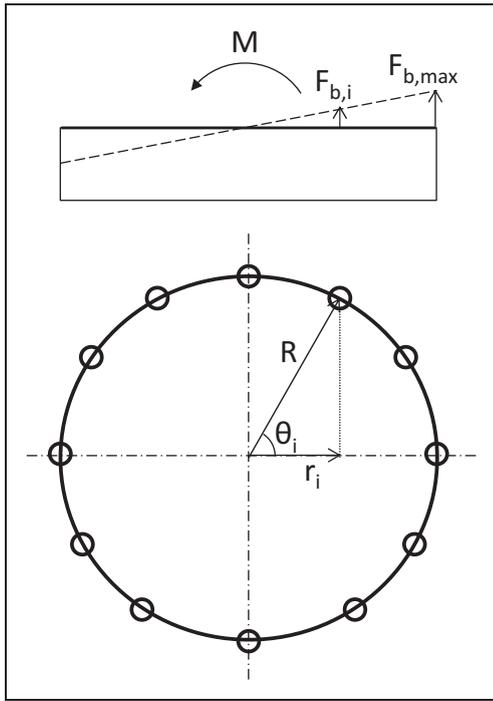
Considering that prior to the application of the overturning moment  $M$ , the bolts already have a pre-load  $F_p$ , the most loaded bolt has the following load  $F_b$  when  $M$  is applied

$$F_b = F_p + F_{b,max} = F_p + \frac{2 \cdot M}{R \cdot n} \quad (12)$$

Again, the bolt fails when its load is equal to the yield load  $F_{yp}$ . Thus, combining equations (3) and (12), the pure overturning moment  $M$  that causes the static failure of the bolted joint is

$$M = 0.25 \cdot F_{yp} \cdot R \cdot n/2 \quad (13)$$

The values of  $F_a$  and  $M$  from equations (8) and (13) can be represented in the graph of Figure 11.



**Figure 10.** Load distribution in the bolts under a pure overturning moment  $M$ .

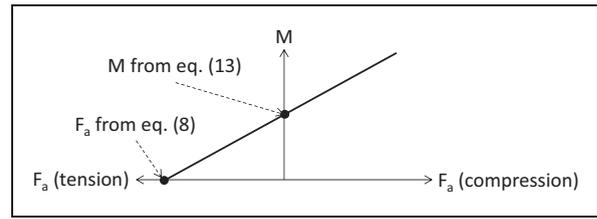
In this sense, it can be easily deduced that all of the  $F_a$ - $M$  load combinations that lie on (or above) the straight line that connects both points will involve the static failure of the bolted joint. Generally, slewing bearings are subjected to compression axial forces (Figure 9b), so only the left part of the graph will be used, in accordance to what bearing manufacturers do in their catalogues (see the ascending lines in Figure 4).

As the slewing bearing has two bolted joints, one for each ring, the most limiting one has been considered when drawing the load capacity curve for the bolted joint failure in Figure 11.

Note that the radial force  $F_r$  has not been taken into account in the study of the static failure of the bolted joint. The reason is that  $F_r$  does not affect the bolts because the radial load is totally absorbed by the friction between the rings of the bearing and the structural supports. This is true only if the normal force  $N$  in the ring-support contact generates a frictional force  $\mu \cdot N$  larger than the acting radial force  $F_r$ , thus ensuring that no sliding will occur in the ring-support contact surface. Therefore, the radial force  $F_r$  can only be neglected if the following condition is fulfilled

$$F_r < \mu \cdot N \tag{14}$$

Initially, without any applied load, the normal force  $N$  in the ring-support contact surface is equal to the sum of the tension load of all of the bolts. As it has been explained, bolts are loaded due to the preload  $F_p$  and the acting loads  $F_a$  and  $M$ . Compression



**Figure 11.** Load capacity curve for the bolted joint failure in four contact point slewing bearings.

axial forces (Figure 9b) increase the normal force  $N$ , while the moment  $M$  does not affect  $N$ ; thus, to be conservative it can be assumed that the normal force  $N$  is only caused by the preload of the  $n$  bolts, so that equation (14) becomes

$$F_r < \mu \cdot F_p \cdot n \tag{15}$$

It has been verified that equation (15) gives a very large radial force value, considerably larger than the actual radial forces in typical slewing bearing applications.

The static load-carrying capacity of the slewing bearing must consider the ball-raceway contact failure and the bolted joint failure, so the new selection curves must combine Figures 8 and 11.

### New selection curves

Figure 12 shows the new selection curves developed in this work which, as mentioned, are a combination of Figures 8 and 11. In particular, Figure 12 corresponds to the series POS214 by manufacturer IRAUNDI (see Figures 1 and 2). The left abscissa axis corresponds to the overturning moment  $M$ , whereas the lower ordinate axis corresponds to the axial force  $F_a$ . These will be the input axes, with the acting loads  $F_a$  and  $M$  that the bearing will have to withstand during operation.

The first quadrant contains the load capacity curves for the ball-raceway contact failure, previously shown in Figure 8. As it has been explained, the axes in this first quadrant are normalized, being  $F_a/C_{0a}$  the abscissa axis and  $M/d/C_{0a}$  the ordinate axis. As explained, the value for  $C_{0a}$  has been obtained from equation (1), divided by a safety factor of 2 as IRAUNDI does for POS214 series. Therefore, in order to enter the first quadrant, the acting axial load  $F_a$  must be divided by the axial load capacity of the bearing  $C_{0a}$  and, similarly, the acting overturning moment  $M$  must be divided by the axial load capacity  $C_{0a}$  and the mean diameter  $d$  of the bearing. The straight lines in quadrants 2 and 4 of Figure 12 are used to graphically perform those divisions; there is one line for each bearing of the series (8 in the POS214 series by manufacturer IRAUNDI, see Figure 2), because each bearing has its own axial load capacity  $C_{0a}$  and mean diameter  $d$ . Finally, the table in Figure 12 lists the maximum radial force  $F_{r,max}$

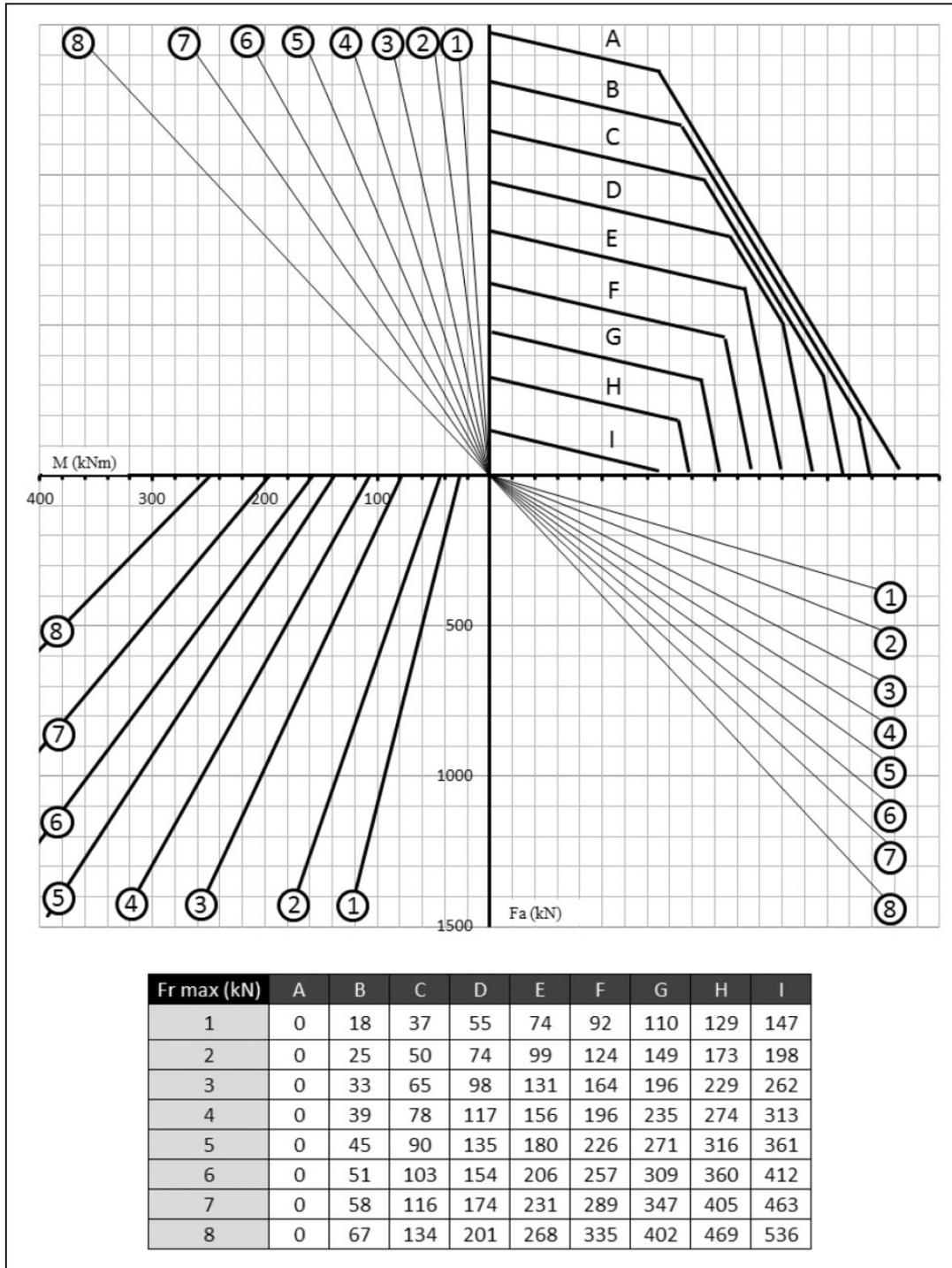


Figure 12. New selection curves for bearings of POS214 series by manufacturer IRAUNDI (see Figures 1 and 2).

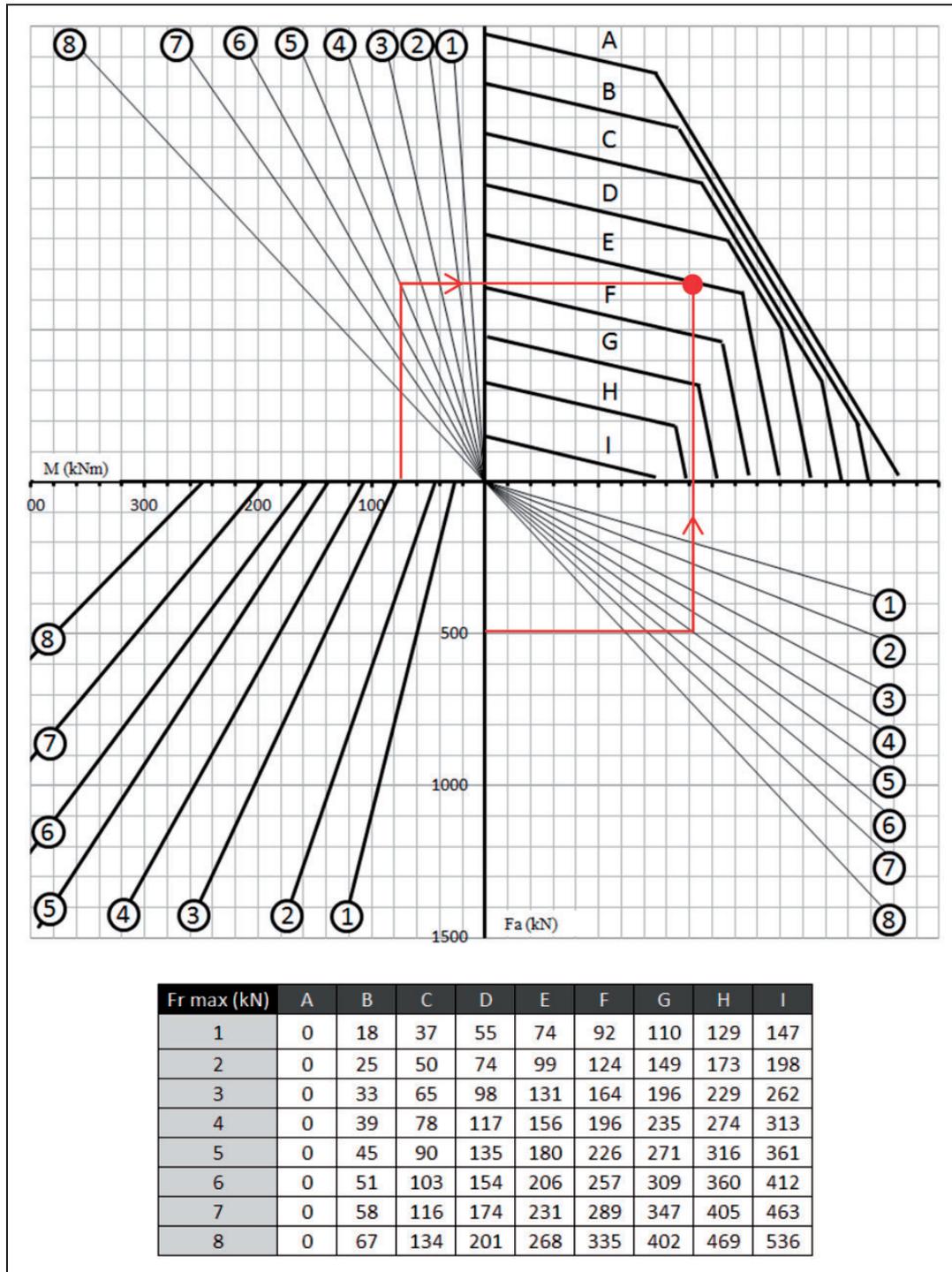
that the bearing can withstand in addition to the axial  $F_a$  and moment  $M$  loads: each value in the table corresponds to a different bearing and a different  $F_r/C_{0a} \cdot \tan \alpha$  isoline.

The load capacity curves for the bolted joint failure, previously shown in Figure 11, are in the third quadrant of Figure 12. Once again, there is one line for each bearing of the series (8 in the POS214 series by manufacturer IRAUNDI, see Figure 2), because each bearing has a different bolted joint, with different number of bolts and metric.

In conclusion, Figure 12 shows the new selection curves. Once the origin and the meaning of each of the four quadrants have been explained, the next section presents a practical example to describe the steps to be followed in the bearing selection process.

### Practical example

Suppose that a four-contact point slewing bearing of series POS 214 de IRAUNDI (see Figures 1 and 2) is to be selected. As mentioned in the Introduction



**Figure 13.** Verification of the validity of the preselected bearing number 5 considering ball-raceway contact failure, according to the new selection curves in Figure 12.

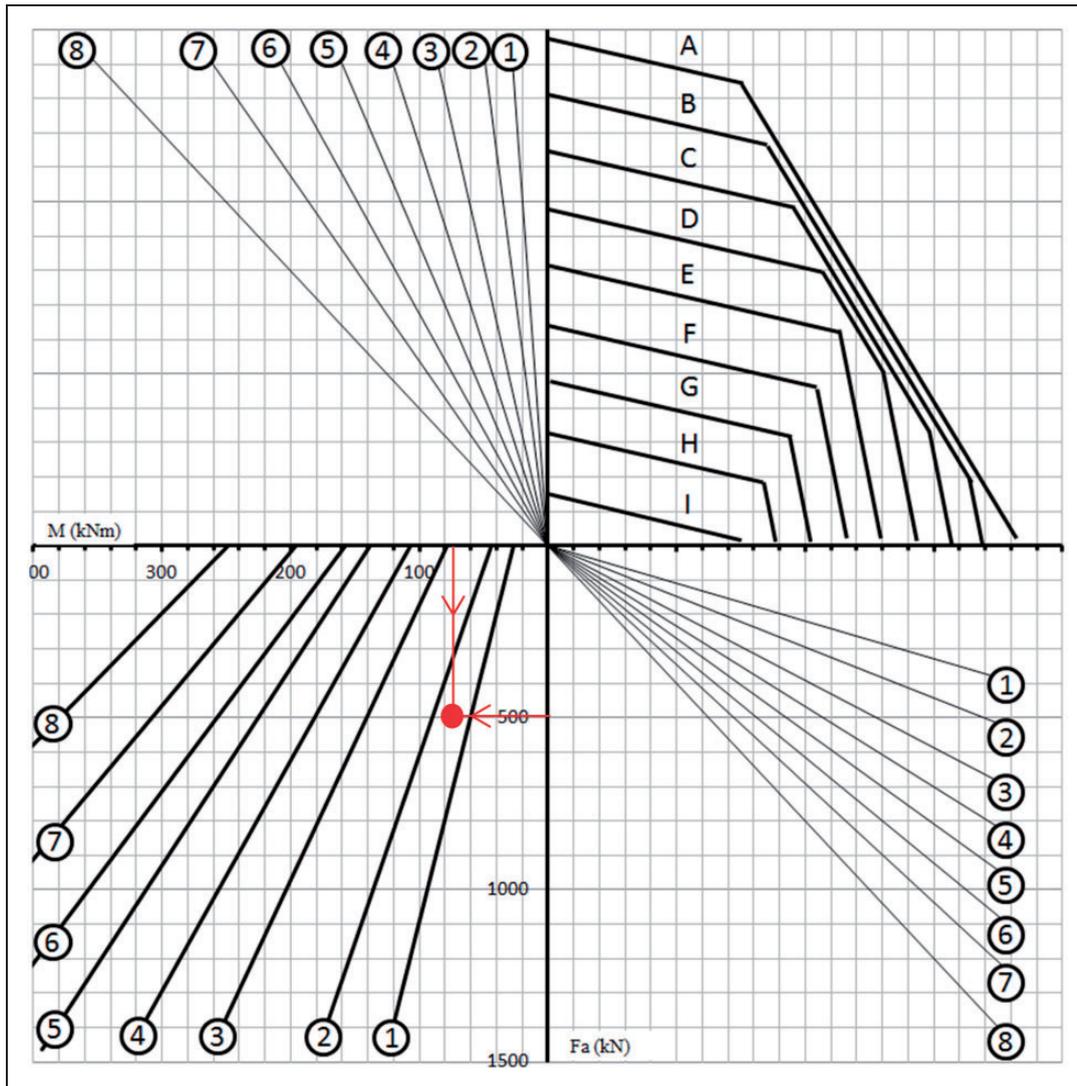
section, the first selection of the bearing is based on its mean diameter, because the rings and the supporting structures must have a similar size in order to fit together. Suppose that, in this sense, bearing type 20-0005 (bearing number 5 in Figure 2) is preselected.

The acting loads on the bearing, once multiplied by a magnification factor as mentioned in the Introduction section, will be  $F_a = 495$  kN,  $F_r = 36$  kN, and  $M = 75$  kNm. Thus, it must be

verified if the preselected bearing number 5 can withstand these loads; for such purpose, the new selection curves in Figure 12 will be used.

The steps to determine the validity of the preselected bearing number 5 considering ball-raceway contact failure are illustrated in Figure 13:

1. From  $F_a = 495$  kN (in the lower ordinate axis) a horizontal line is drawn. Then, a vertical line is



**Figure 14.** Verification of the validity of the preselected bearing number 5 considering bolted joint failure, according to the new selection curves in Figure 13.

drawn from the cut-off point of the horizontal line and the line marked with the number 5 (which corresponds to bearing number 5). As it has been previously explained, this operation normalizes the acting load  $F_a$  with respect to the axial load capacity  $C_{0a}$  of bearing number 5.

2. From  $M = 75$  kNm (in the left abscissa axis) a vertical line is drawn. Then, a horizontal line is drawn from the cut-off point of the vertical line and the line marked with the number 5 (which corresponds to bearing number 5). As it has been previously explained, this operation normalizes the acting load  $M$  with respect to the axial load capacity  $C_{0a}$  and the mean diameter  $d$  of bearing number 5.
3. The cut-off point of both lines (red point in Figure 13) lies on line E. In the attached table, it can be seen that for bearing number 5, line E indicates that the bearing can withstand a maximum radial load of  $F_{r,max} = 180$  kN (in addition to loads  $F_a$  and  $M$ ). In the case under study, the acting radial load is  $F_r = 36$  kN  $< 180$  kN; this means

that there will be no ball-raceway contact failure in bearing number 5.

The steps to determine the validity of the preselected bearing number 5 considering bolted joint failure are illustrated in Figure 14:

1. From  $F_a = 495$  kN (in the lower ordinate axis), a horizontal line is drawn.
2. From  $M = 75$  kNm (in the left abscissa axis), a vertical line is drawn.
3. The cut-off point of both lines (red point in Figure 14) lies on the right of the straight line of bearing number 5; this means that there will be no bolted joint failure in bearing number 5.

In conclusion, bearing type 20-0005 (bearing number 5 in Figure 2) is able to withstand the acting loads, because no static failure occurs neither in the ball-raceway contact nor in the bolted joint. If this was not the case, a larger bearing would have to

be selected, for example bearing type 20-0006 (bearing number 6 in Figure 2), repeating the validation process for this new bearing.

## Conclusion

The selection of slewing bearings is based on the static load-carrying capacity. In this sense, manufacturer catalogues provide selection curves for their particular products. The static failure of the bearing can be caused by an excessive pressure in the rolling element-raceway contact surface, or by an excessive bolt load in the bolted joint between the rings and the structural supports. Nevertheless, manufacturers do not provide clear information about the origin of their curves and the expressions they are based on. The similarity between the selection curves by different manufacturers seems to point out a lack of knowledge regarding the theoretical background of the curves. In this work, new selection curves for four contact point slewing bearings are presented, based on previous works published and validated by the authors. The theoretical background of the curves is deeply explained, with its assumptions and limitations, providing thus demonstrated and versatile curves.

## Conflict of interests

None declared.

## Funding

The authors wish to acknowledge the financial support of the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness (MINECO) through grant number DPI2013-41091-R and the University of the Basque Country (UPV/EHU) (grant numbers UFI11/29 and US14/09).

## References

- Harris TA and Kotzalas MN. *Rolling bearing analysis: essential concepts of bearing technology*. 5th ed. New York: Taylor & Francis/CRC Press, 2007.
- Iraundi special bearings, [www.iraundi.es](http://www.iraundi.es) (accessed September 2014).
- Burton T, Sharpe D, Jenkins N, et al. *Wind energy handbook*. 1st ed. Chichester: Wiley & Sons, 2001.
- Aguirrebeitia J, Avilés R, Fernandez de Bustos I, et al. Calculation of the general static load-carrying capacity for the design of four contact point slewing bearings. *J Mech Design* 2010; 132: 064501–064506.
- Aguirrebeitia J, Abasolo M, Avilés R, et al. General static load-carrying capacity for the design and selection of four contact point slewing bearings: Finite element calculations and theoretical model validation. *Finite Elem Anal Des* 2012; 55: 23–30.
- Aguirrebeitia J, Plaza J, Abasolo M, et al. General static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generator actuation systems. *Wind Energy* 2012; 16: 759–774.
- Aguirrebeitia J, Plaza J, Abasolo M, et al. Effect of the preload in the general static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generators: theoretical model and finite element calculations. *Wind Energy* 2013; 17: 1605–1621.
- Sjoväll H. The load distribution within ball and roller bearings under given external radial and axial load. *Teknisk Tidskrift, Mek.*, h.9, 1933.
- Rumbarger J. Thrust bearing with eccentric loads. *Mach Des*, February 15, 1962.
- Zupan S and Prebil I. Carrying angle and carrying capacity of a large single row ball bearing as a function of geometry parameters of the rolling contact and the supporting structure stiffness. *Mech Mach Theory* 2001; 36: 1087–1103.
- Smolnicki T and Rusinski E. Superelement-based modeling of load distribution in large-size slewing bearings. *J Mech Des* 2007; 129: 082601.
- Smolnicki T, Derlukiewicz D and Stańco M. Evaluation of load distribution in the superstructure rotation joint of single-bucket caterpillar excavators. *Automat Constr* 2008; 17: 218–223.
- Ludwik K, Krynke M and Mazanek E. A catalogue capacity of slewing bearings. *Mech Mach Theor* 2012; 58: 29–45.
- Krynke M, Selejdak J and Borkowski S. Determination of static limiting load curves for slewing bearing with application of the finite element methods. *Mater Eng* 2013; 20: 64–70.
- Daidié A, Chaib Z and Ghosn A. 3D Simplified finite elements analysis of load and contact angle in a slewing ball bearing. *J Mech Des* 2008; 130: 082601–082611.
- Chen G and Wen J. Load performance of large-scale rolling bearings with supporting structure in wind turbines. *J Tribol-T ASME* 2012; 134: 041105 (9 p.).
- Lacroix S, Nélias D and Leblanc A. Four-point contact ball bearing model with deformable rings. *J Tribol-T ASME* 2013; 135: 031402-1 (8 p.).
- Plaza J, Abasolo M, Coria I, et al. A new finite element approach for the analysis of slewing bearings in wind turbine generators using superelement techniques. *Meccanica* 2015; 50(6): 1623–1633. DOI: 10.1007/s11012-015-0110-7.
- Bickford JH. *An introduction to the design and behavior of bolted joints*. 3rd ed. New York: Taylor & Francis/CRC Press, 1995.
- Bickford JH and Nassar S. *Handbook of bolts and bolted joints*. 1st ed. New York: CRC Press, 1998.
- Tomotsugu S. *Bolted joint engineering: fundamentals and applications*. 1st ed. Berlin: Beuth, 2008.
- ISO 76:2006. Rolling Bearings – Static Load Ratings.
- ISO/TR 10657:1991. Explanatory Notes on ISO 76.



# A new finite element approach for the analysis of slewing bearings in wind turbine generators using superelement techniques

Jon Plaza · Mikel Abasolo · Ibai Coria ·  
Josu Aguirrebeitia · Igor Fernández de Bustos

Received: 19 June 2014 / Accepted: 16 January 2015  
© Springer Science+Business Media Dordrecht 2015

**Abstract** Several analytical models have been proposed to estimate the load distribution and the deformation of slewing bearing assemblies in wind turbine generators (WTGs). Even though they are a useful tool for designers as a first approach, most of them assume rigid rings and rigid supporting structures, leading to inaccurate results; even if compliance is considered in some models, only certain boundary conditions can be taken into account, and their complex and diverse nature make often these models inaccurate. For this reason, WTG manufacturers need costly FE analyses to obtain results adapted to the particular geometries and operational conditions of their yaw and pitch bearings assemblies. In this sense, this work presents a superelement-based FE model that significantly reduces the computational cost with a negligible accuracy loss.

**Keywords** Wind turbine generator · Slewing bearing · Finite element · Superelement · Load distribution · Stiffness

---

J. Plaza  
Simulation Tools Development Department, Cikatek  
S.Coop., Berriatua, Vizcaya, Spain

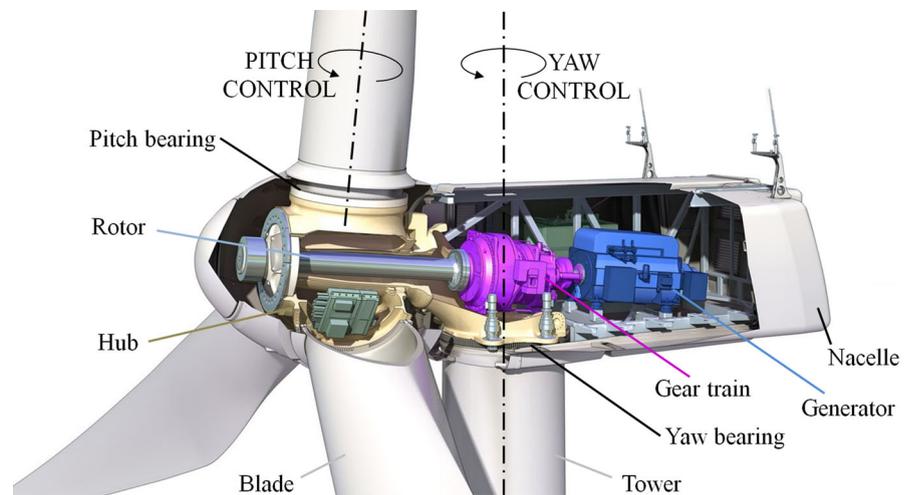
M. Abasolo (✉) · I. Coria · J. Aguirrebeitia ·  
I. F. de Bustos  
Department of Mechanical Engineering, ETSI, University  
of the Basque Country (UPV/EHU), Alameda Urquijo s/n,  
48013 Bilbao, Vizcaya, Spain  
e-mail: mikel.abasolo@ehu.es

## 1 Introduction

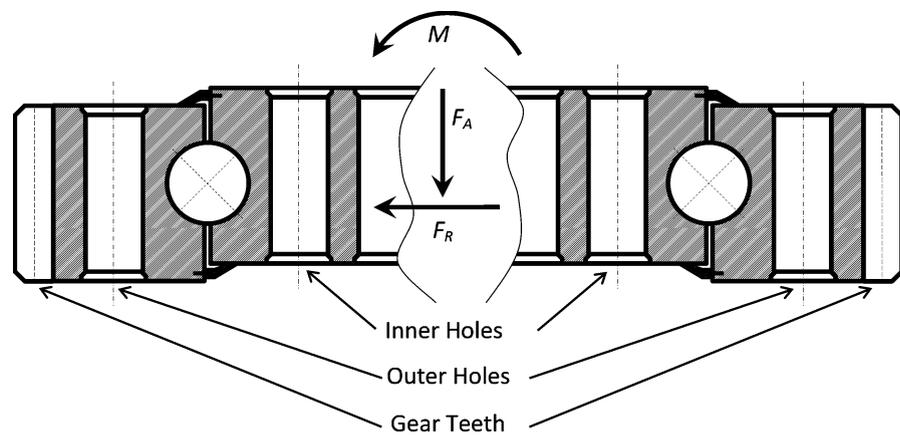
Wind turbine generators (WTGs) convert the kinetic energy contained in an air stream into mechanical work as the wind turns the propeller-like blades around a rotor; this rotor is connected to the main shaft, which spins a generator to create electricity. Horizontal axis rotors are the dominant design principle in wind energy technology today. In this type of generators blade pitch control, which consists on pitching the rotor blades around their longitudinal axis, is used to control rotor speed and power output and as a protection measure against overspeed and extreme wind conditions. Additionally, yaw control consists on rotating the moving platform or nacelle with respect to the tower, to orient the rotor towards the wind in order to fully capture the power from the wind [1]. Figure 1 shows both controls. Slewing bearings are generally used to allow both rotary motions; thus, there is one bearing between the tower and the nacelle (yaw bearing) and one bearing between each blade and the rotor hub (pitch bearings).

Due to the low rotational speed and angle, at the first stages of the design process these bearings are usually selected considering static loads. Thus, their static load carrying capacity and stiffness must be carefully calculated, to guarantee that the bearing can withstand the acting forces with no static failure and with an admissible deformation of the structural system. Figure 2 illustrates the actions on a four contact point slewing bearing: an axial force  $F_A$ , a

**Fig. 1** Components of a WTG, and pitch and yaw controls (ALSTOM ECO 80 machine [2])



**Fig. 2** Loads acting on the slewing bearing



radial force  $F_R$ , and a tilting moment  $M$  which, in the most unfavorable load case, is perpendicular to the radial force.

Aguirrebeitia et al. [3–7] developed an analytical procedure to assess the general load carrying capacity of slewing bearings, defined as the  $F_A$ – $F_R$ – $M$  load combinations for the static failure of several types of slewing bearings. According to ISO 76 Standard [8], this failure occurs when the most loaded ball presents an elastically calculated ball-raceway contact pressure of 4,200 MPa. This procedure assumed rigid rings and boundary conditions.

In order to validate the results of the analytical model, a multiparametric FE model of the bearing was also developed [5–7], with flexible rings and rigid supporting structures. The FE results demonstrated that the flexibility of the rings have an important role

on the load distribution, and therefore on the static load capacity of the bearing, and of course on its deformation. The error is even larger if the supports are modeled as flexible structures.

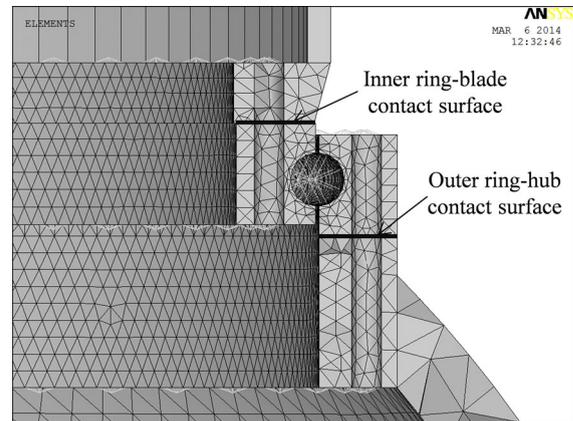
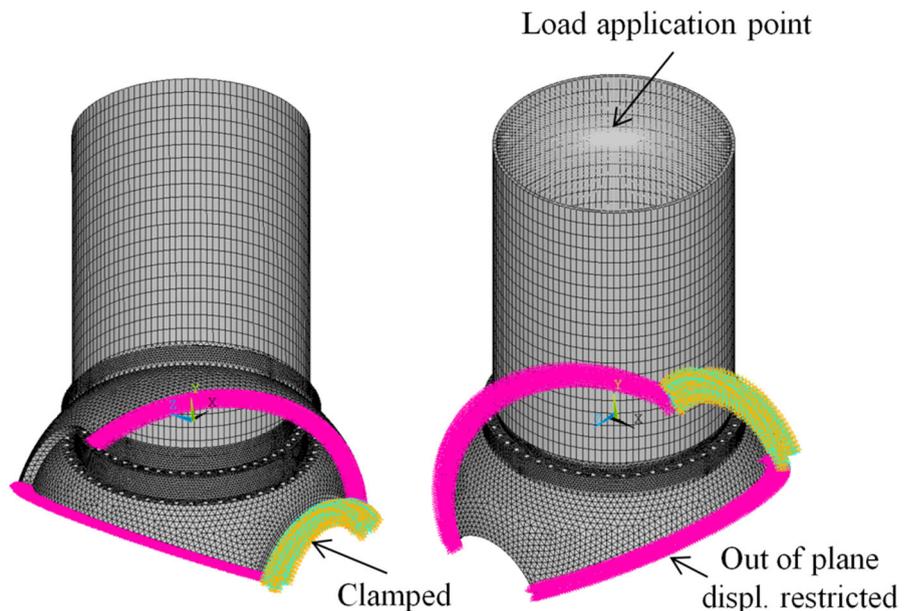
Unfortunately, the effect of the flexibility of the rings and supporting structures is extremely hard to implement in the analytical model; apart from the geometry of the rings and the supporting structures, the number and diameter of the bolts that fix the bearing rings to the supports, and even the angular position of the balls with respect to the bolts play an important role. All these factors can hardly be modeled analytically. Therefore, even though analytical models can provide a good first approach, accurate results can only be obtained by using FE models where the aforementioned features are carefully modeled [9–17].

For this reason, WTG manufacturers still perform complex and costly FE analyses as the only way to obtain concluding results of the load distribution and deformation of pitch or yaw bearing assemblies. Due to the large number of DOFs and nonlinear behavior, the computational cost of these FE analyses is large. In this sense, the present paper studies in depth different alternatives of FE modeling techniques, in order to obtain the most cost effective WTG bearing assembly model. In particular, the use of superelement technique is discussed, and an optimal model is achieved.

### 2 Fe model of the WTG slewing bearing

As mentioned, accurate results of the deformation and load distribution in pitch bearing assemblies (see Fig. 1) can only be obtained by using complex FE models that include part of the blade, the bearing and the rotor hub [15]. In this sense, Fig. 3 shows the FE model that corresponds to a 1.67 MW machine, modeled with lower order hexaedral and quadratic tetrahedral elements. Figure 4 shows a detailed section. Only one third of the rotor hub has been modeled. Besides, only the lower 2.5 meters of the blade have been considered. The inner ring of the bearing is bolted to the blade, whereas the outer ring is bolted to the rotor hub. The bolts have been modeled by one-

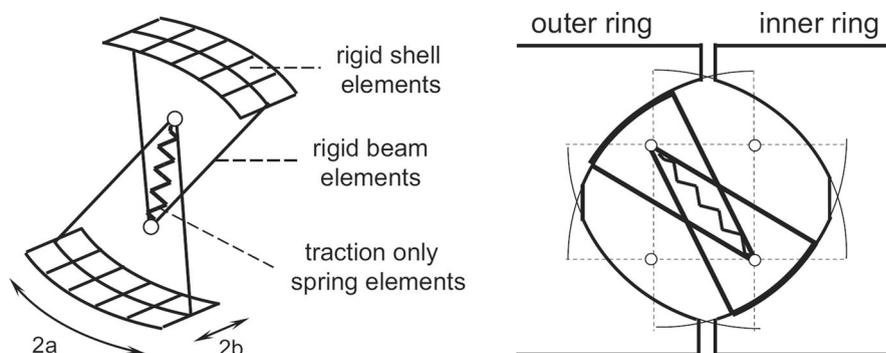
**Fig. 3** FE model of the blade-pitch bearing-rotor assembly



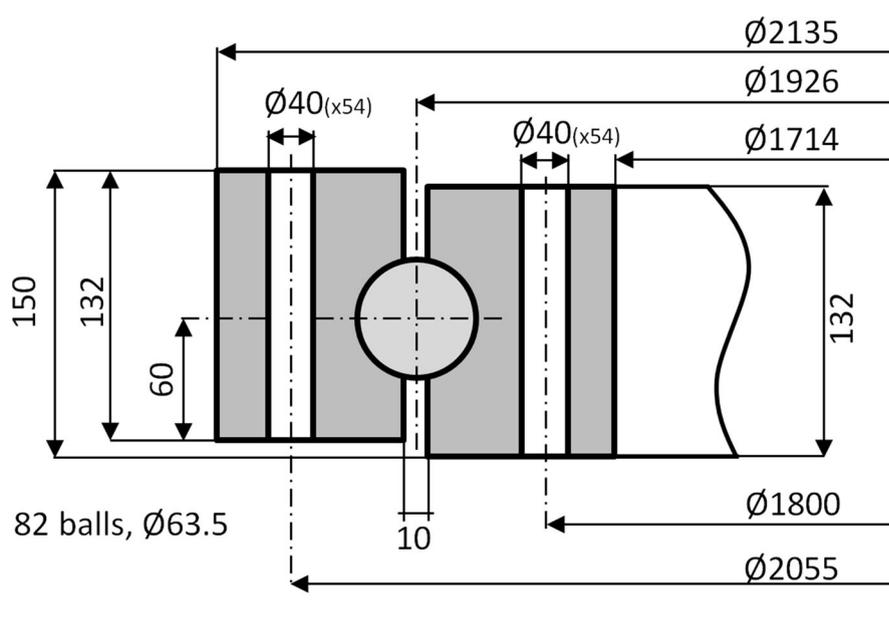
**Fig. 4** Detailed section of the FE model in Fig. 3

dimensional elements, preloaded to 70 % of their yield load. A rough-type contact (no slide) has been defined between the inner ring-blade and outer ring-hub mating surfaces. The ball-raceway contact zone is modeled by traction-only springs simulating the stiffness of the balls, as proposed by Daidié [14]; the ball-raceway contact ellipse is modeled by a series of rigid shells forming a rectangle in which the ellipse is inscribed; finally, rigid beams join the springs and the shell elements. The model takes into account the ball-raceway contact angle variations and even possible ball preloads, in such a way that the load distribution in the balls and the ball-raceway stiffness are well

**Fig. 5** Schematic representation of the ball-raceway model (only one of the two springs is illustrated) [6]



**Fig. 6** Geometrical parameters of the pitch bearing of FE model in Fig. 3



estimated; for further details on this model, illustrated in Fig. 5, see references [5–7]. It is obvious that this model does not analyze the ball-raceway contact status (pressure distribution, tangential stresses, stick and slip zones) and consequently, it cannot be used to calculate other important design parameters such as the rotational resistance torque of the bearing, needed to select the drive system. In this sense, another ball-raceway interaction model was recently published [17] based on previous works by the same authors [18, 19], accounting for the possibility of having 2, 3 or 4 contact points and change of conformity, and allowing also to calculate internal kinematics; however, the model would be more complex (an iterative loop has to be solved to feed the FE model with the analytical contact model results) and, considering that the effect

of these factors is not critical in the present work, the model by Daidié has been considered enough.

Regarding the boundary conditions of the assembly, the face connecting the rotor hub to the nacelle has been clamped, and out-of-plane movements have been restricted in its symmetry planes. Finally, the acting loads (axial and radial forces and tilting moment) have been applied to the top of the blade with MPC elements. The geometrical parameters of the four-contact-point pitch bearing of this assembly are shown in Fig. 6. Actually, a rotor hub is not a totally symmetric structure, and the loads acting on the three blades are not identical. Besides, most slewing bearings have ball-filling holes that have not been modeled either. Consequently, the assumption of symmetry and the absence of hard/soft points as in the model in

Fig. 3 is a source of error [20, 21]. However, these simplifying assumptions do not compromise the validity and generalist nature of the new finite element approach presented in this paper.

As mentioned in the previous section, the large number of DOFs and its nonlinear behavior due to the contacts and the ball-raceway interaction model, make the analysis of the model in Fig. 3 very costly, as it will be pointed out later in the results and discussion section. In the next section, the use of superelement technique is studied, as an alternative to reduce this computational cost without losing accuracy.

### 3 Fe model of the WTG slewing bearing using superelement techniques

First, a brief reminder of the theoretical principals of the widely used superelement technique is provided.

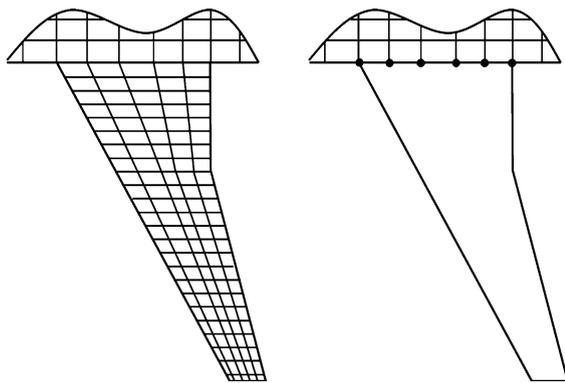
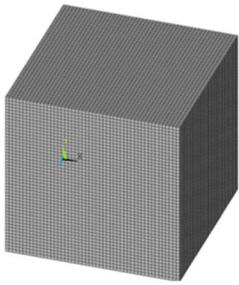
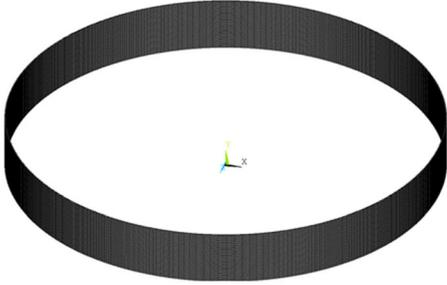


Fig. 7 FE model of an aircraft wing: **a** original model, **b** superelement

Fig. 8 Illustrative examples to compare the computational cost of different original and superelement FE analyses

	
Model $a_1$ (no superelement): 375000 DOFs, 80.2 sec	Model $b_1$ (no superelement): 375000 DOFs, 9.7 sec
Model $a_2$ (superelement): 15000 DOFs, 26 sec	Model $b_2$ (superelement): 15000 DOFs, 27.9 sec

After that, this technique will be applied to the FE model presented in the previous section (Fig. 3).

#### 3.1 Basics of superelement techniques

As it is well known, superelement technique consists on condensing a group of finite elements into one unique element, named superelement [22]. Figure 7 shows a classical example, where the elements of an aircraft wing (Fig. 7a) are substituted by a superelement (Fig. 7b). The nodes of this superelement, known as master nodes, are the nodes that connect the superelement with the rest of the model and the nodes where external loads and boundary conditions are applied.

Using the stiffness matrix of the original model as a starting point, the stiffness matrix of the superelement  $[K]_{se}$  is calculated in the following way:

$$[K]_{se} = [K_{mm}] - [K_{nm}][K_{nn}]^{-1}[K_{nm}] \tag{1}$$

where the stiffness matrix of the original model  $[K]$  is:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{mn}] \\ [K_{nm}] & [K_{nn}] \end{bmatrix} \tag{2}$$

In this matrix, index  $m$  refers to the DOFs of the original model that, at the same time, are the master nodes of the superelement, while index  $n$  refers to the rest of the DOFs. From the expression, it is necessary to calculate the inverse matrix  $[K_{nn}]^{-1}$  to obtain the stiffness matrix of the superelement  $[K]_{se}$ . Due to the generally large size of matrix  $[K_{nn}]$ , this operation might involve a large computational cost. However, once calculated  $[K]_{se}$ , as its size is much smaller than

the size of the stiffness matrix of the original model  $[K]$ , the computational cost will be much smaller too.

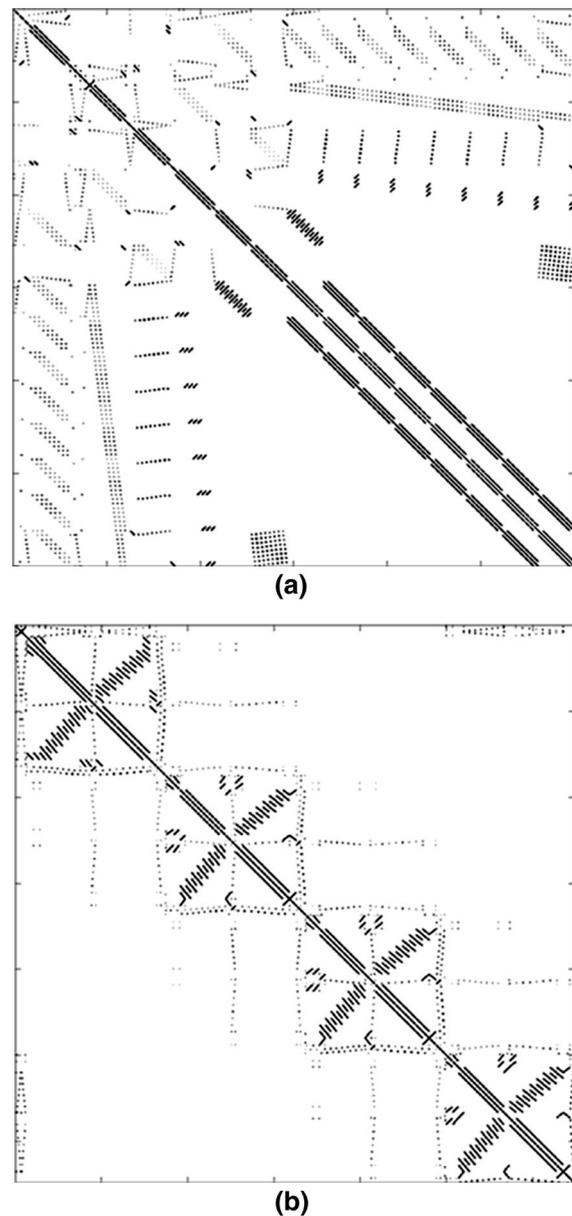
The cost of an analysis using superelements (ignoring the cost of calculating  $[K_{mm}]^{-1}$ ) is not always smaller. The reason is that the stiffness matrix of the superelement is usually treated as dense. This might have heavy impact in the computational cost because, as it is known, the cost depends not only on the size of the matrix, but also on how sparse the matrix is, and its topology [22]. As an illustrative example, the models in Fig. 8 are analyzed.

On the one hand, model  $a_1$  is a cube-shaped model with  $50 \times 50 \times 50$  nodes, i.e. 125,000 nodes and 375,000 DOFs; its lower face is clamped and a vertical displacement is applied on its upper face; the analysis takes 80.2 s. Model  $b_1$  is a ring-shaped model with the same number of DOFs, 375,000; the cost of the same analysis (the lower face clamped, a vertical displacement on the upper face) is 9.7 s. This difference in the computational cost is because, although the matrices of both models have the same dimensions, the matrix of model  $a_1$  is more sparse than the matrix of model  $b_1$ : Fig. 9a, b show, respectively, the non-zero elements in the matrices of models  $a_1$  and  $b_1$  (before reordering).

On the other hand, models  $a_2$  and  $b_2$  are the superelements that correspond to models  $a_1$  and  $b_1$ , both with  $50 \times 50 \times 2$  master nodes (the nodes in the upper and lower faces), i.e. 5,000 nodes and 15,000 DOFs. The stiffness matrices of both models are stored as dense. Performing the same analysis as for the models  $a_1$  and  $b_1$  (lower face clamped, vertical displacement in upper face), the cost is 26 s for model  $a_2$  and 27.9 s for model  $b_2$ . The cost of both analyses is similar because both stiffness matrices have the same dimensions and no non-zero elements. Thus, while superelement  $a_2$  saves computational cost with respect to model  $a_1$ , superelement  $b_2$  does not when compared with model  $b_1$ . The reason is that the stiffness matrix of model  $b_1$  is so sparse that even though the stiffness matrix of model  $b_2$  is smaller, the time needed to solve the static equilibrium matrix equation is larger.

### 3.2 Superelement-based FE model of the WTG slewing bearing

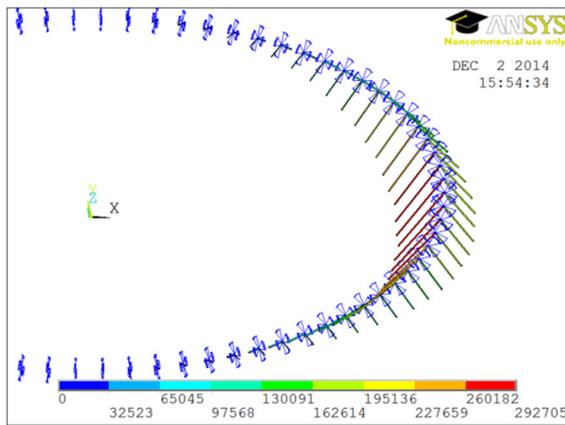
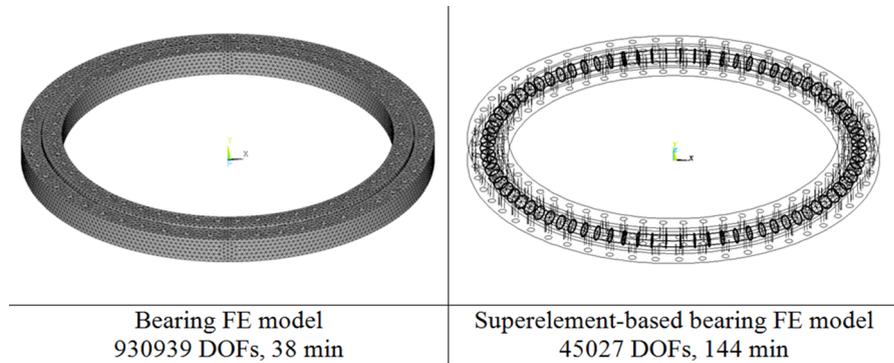
In the pitch bearing model of Fig. 3, a first alternative to reduce the computational cost is to model the inner and outer ring of the bearing as superelements,



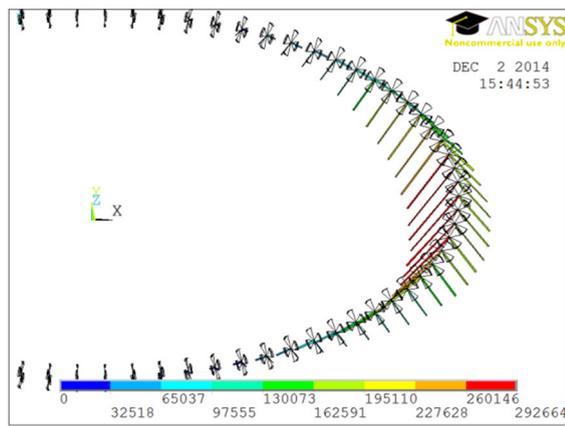
**Fig. 9** Non-zero elements in the stiffness matrices of models in Fig. 8: **a** model  $a_1$ , **b** model  $b_1$  (the stiffness matrix of the superelement is stored as dense)

excluding the ball-raceway model in Fig. 5. Consequently, the master nodes of the superelements will be the nodes that connect the rings with the ball-raceway contact model, i.e. the nodes of the rigid shell elements in Fig. 5; additionally, the nodes of the lower face of the outer ring (the nodes in the bearing–hub mating surface) and the nodes of the upper face of the inner

**Fig. 10** FE model of the bearing in Fig. 6: **a** without superelements, **b** with superelements



(a)



(b)

**Fig. 11** Load distribution obtained in the FE models: **a** model of Fig. 10a, **b** model of Fig. 10b

ring (the nodes in the bearing–blade mating surface) will also be chosen to be master nodes. Figure 10a, b show the bearing of Fig. 6 modeled without and with

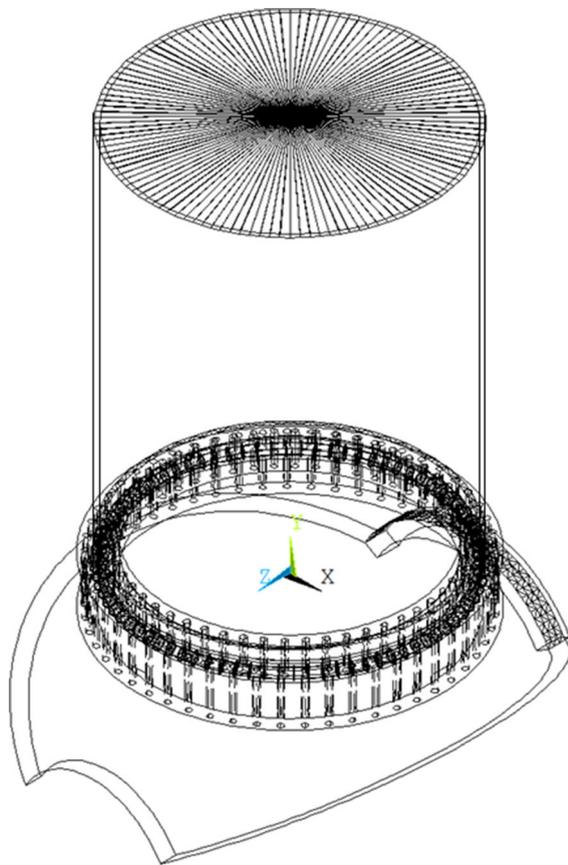
superelements, respectively. For the analysis, the lower face of the outer ring has been clamped and a radial displacement of 1 mm has been applied to the upper face of the inner ring. Due to the ring-shaped geometry of the bearing, it takes 144 min to analyze the model with superelements and 38 min to analyze the model without superelements, similarly to what happens with models  $b_1$  and  $b_2$  in Fig. 8. Figure 11 shows that the results of both models are almost identical; being  $y_i$  and  $y'_i$  the load of spring  $i$  in the models in Fig. 10a, b, respectively, the average error in the ball loads is (the summation is  $i = 1, 2, 3, \dots, 2z$  since each ball is modeled by two springs):

$$\frac{\sum_{i=1}^{2z} |y_i - y'_i|}{\sum_{i=1}^{2z} y_i} \cdot 100 = 0.016\% \quad (3)$$

And the error in the load of the most loaded ball:

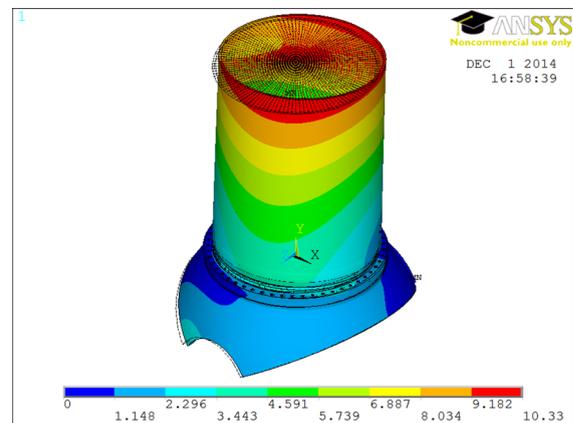
$$\frac{|(y_i)_{max} - (y'_i)_{max}|}{(y_i)_{max}} \cdot 100 = 0.014\% \quad (4)$$

Of course, the cost of the superelement-based model of Fig. 10b can be significantly reduced by using less master nodes, because this reduces the dimensions of its stiffness matrix. In other words, if only some of the nodes in the upper and lower faces of the rings were chosen to be master nodes instead of all of them, the cost of the model 10b can become smaller than the cost of model 10a. Nevertheless, it must be remembered that in the pitch bearing assembly, the lower face of the outer ring is the bearing–hub contact face, and the upper face of the inner ring is the bearing–blade contact face; therefore, no contact will be detected in the nodes that are not defined as master nodes, with the corresponding loss of accuracy.

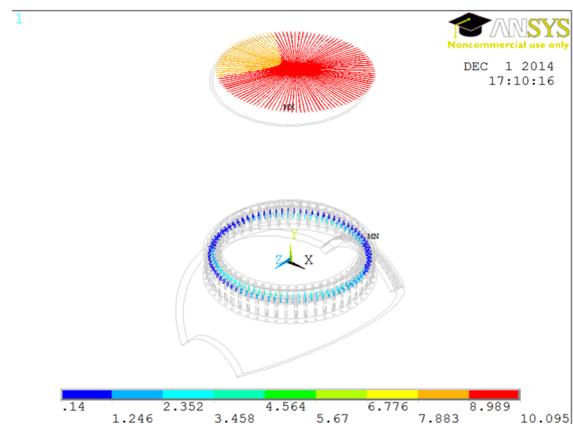


**Fig. 12** Superelement-based FE model of the blade-pitch bearing-rotor assembly

Among other possible alternatives, the best one is to model the inner ring and the blade as one superelement, and the outer ring and the rotor hub as another superelement, as illustrated in Fig. 12. On the one hand, the nodes that connect the top of the blade to the load application MPC elements will be the master nodes of the inner ring-blade superelement; on the other hand, the nodes in the symmetry planes and the clamped face of the hub will be the master nodes of the outer ring-hub superelement. In addition, as in the model in Fig. 10b, the nodes connecting both rings with the ball-raceway model (the nodes of the rigid shell elements of Fig. 5) will also be master nodes. In contrast to the original model in Fig. 3, this model does not consider the effect of the preload of the bolts since they are not defined; besides, as the contacts between blade and inner ring and between hub and outer ring are not modeled either, it is not possible to check the contacts status. In fact, the superelement-



(a)



(b)

**Fig. 13** Deformed shape: **a** original FE model in Fig. 3, **b** superelement-based FE model in Fig. 12

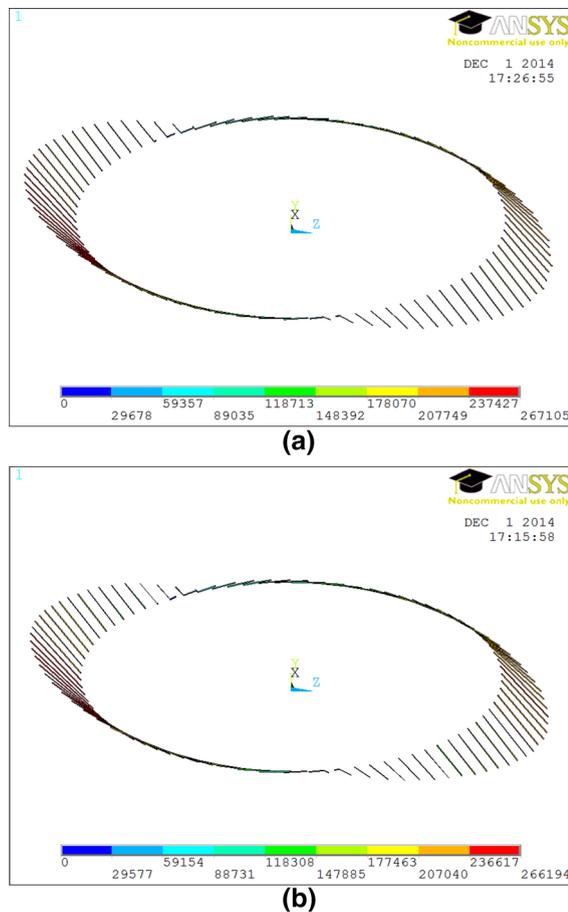
based model in Fig. 12 assumes that the inner ring and the blade are a unique body (as if a bonded-type contact had been defined between them), and so it does with the outer ring and the hub. Nevertheless, good engineering practice tells that, in fact, the preload of the bolts must be enough to ensure no separation between the joined elements, so this assumption should not, and actually does not, introduce an important error as it will be pointed out in the results and discussion section.

#### 4 Results and discussion

In previous sections, two different FE models of a WTG pitch bearing assembly have been presented. The first one, shown in Fig. 3, is a very detailed model

**Table 1** Directional and total displacements of load application point for models in Fig. 13

	$U_x$	$U_y$	$U_z$	$U_{total}$
Original FE model	-3.325	0.665	-8.740	9.375
Superelement-based FE model	-3.296	0.686	-8.494	9.137
ERROR (%)	0.872	3.102	2.820	2.543



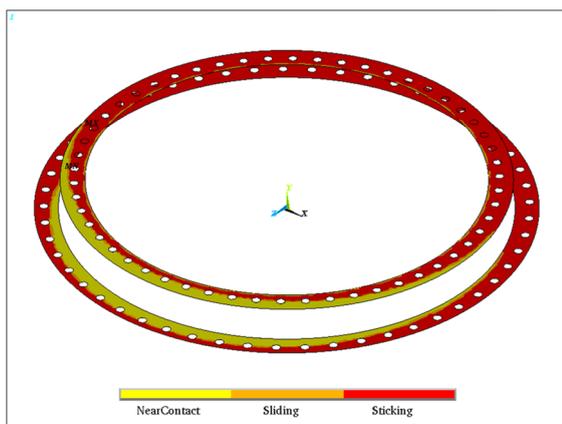
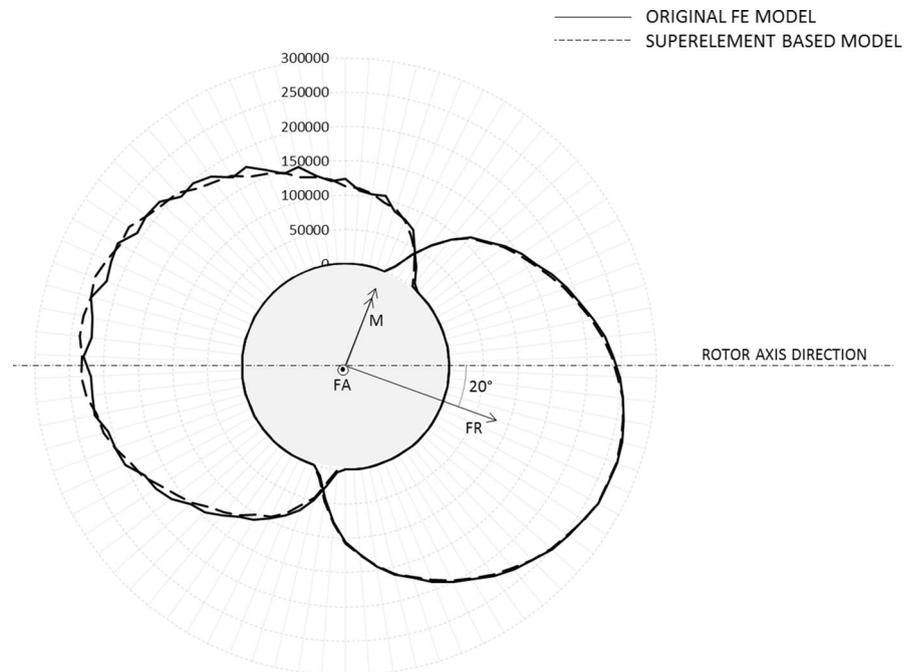
**Fig. 14** Load distribution in the balls: **a** original FE model in Fig. 3, **b** superelement-based FE model in Fig. 12

of the blade–bearing–rotor hub structural system, similar to the ones used by WTG manufacturers, where the blade-inner ring and hub-outer ring connections have been realistically modeled with pre-loaded bolts and rough-type contacts. The second model, shown in Fig. 12, is a superelement-based model, where the blade and the inner ring of the bearing are modeled as one superelement, and the hub and the outer ring constitute another superelement;

therefore, there are no bolts and the contact between the bearing and the blade and hub can be considered to be a bonded-type contact as the contacting bodies are defined as a unique body (superelement).

The same analysis has been carried out for both models in order to compare their results in terms of accuracy and computational cost. The loads applied on the top of the blade via MPC elements are  $F_A = 573$  - kN,  $F_R = 445$  kN and  $M = 7,905$  kNm, which are known to be typical load values for this type of WTGs; nevertheless, the purpose of the present work is not to evaluate the response of the system under a certain load case, but to compare the efficiency of a conventional FE model and a superelement-based FE model, so the magnitude of the loads used for the analyses is a minor aspect. The radial force  $F_R$  has a direction of  $20^\circ$  with respect to the rotor axis (towards the nacelle, in the global z direction of the FE models), obviously the tilting moment is perpendicular to the radial force and the axial force pulls outwards. The material of the rotor hub is cast iron ( $E = 170$  GPa), while the bearing is made of steel ( $E = 210$  GPa). Although the material of the blade of a WTG is fiber, usually its base is made of steel, and so it is considered here. Figure 13a, b show, respectively, the deformed shape of the original model of Fig. 3 and the superelement-based model of Fig. 12; in this sense, Table 1 presents the displacements of the load application point. Figure 14a, b correspond to the load distribution in the balls; the same results are shown in a polar plot in Fig. 15. In general, the results are highly coincident: the average error in the ball loads is 2.75 % and the error in the load of the most loaded ball is 0.34 %, according to expressions (3) and (4). The source of this small error is that there is a local loss of contact between the rings and the supporting structures (as illustrated in Fig. 16) that the superelement-based model is not able to detect; however, from the comparison of the results, it can be stated that the superelement-based model provides very accurate results.

**Fig. 15** Polar plot of the load distribution of Fig. 14



**Fig. 16** Inner ring-blade and outer ring-hub contacts status in the FE model of Fig. 3

Regarding the computational cost, the original model needs 128 min (in two steps, one to preload the bolts and another one to apply the external loads), while the superelement-based model only needs 16 min (plus 2 min to create the superelements, i.e. to calculate their stiffness matrices, an operation that only has to be done once). The cost would be even smaller if less master nodes had been used in the blade (as load application points) and/or in the rotor hub (as boundary conditions). Anyway, these results

demonstrate the superior efficiency of the proposed superelement-based model.

### 5 Conclusions

Slewing bearings are used in WTGs for orientation purposes (yaw and pitch bearings). In the last years, different analytical methods have been proposed to calculate the load distribution in the balls and the stiffness of the assemblies, since these are two basic aspects in the initial design steps. However, these analytical models consider rigid rings and supporting structures, leading to inaccurate results as several works have demonstrated in the last years. Thus, WTG manufacturers still perform FE analyses of complex models where the components of the assembly are modeled in detail. The large number of DOFs and the nonlinear behavior involve a large computational cost. The present paper proposes the use of superelement techniques to reduce this cost without losing accuracy: in particular, the best efficiency is obtained by modeling the inner ring and the blade as a superelement, and the outer ring and the hub as another superelement. Even though this model does not simulate correctly the contacts between the bearing, the blade and the rotor, it estimates with a great

accuracy the load distribution in the balls and the deformation of the system, and with a considerably lower computational cost. In consequence, the authors believe that, due to its simplicity and excellent results, the model in this work can be used by WTG manufacturers instead of the usual costly FE models.

**Acknowledgments** The authors wish to acknowledge the financial support of the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness (MINECO) through Grant Number DPI2013-41091-R and the University of the Basque Country (UPV/EHU), Grant Numbers UFI11/29 and US14/09.

## References

- Hau E (2006) Wind turbines: fundamentals, technologies, application, economics, 2nd edn. Springer, Berlin. ISBN 3540570640
- <http://multivu.prnewswire.com/mnr/alstom/43916/>
- Aguirrebeitia J, Avilés R, Fernández de Bustos I, Abasolo M (2010) Calculation of the general static load-carrying capacity for the design of four contact point slewing bearings. *ASME J Mech Des* 132:064501
- Aguirrebeitia J, Avilés R, Fernández de Bustos I, Abasolo M (2012) Calculation of general static load-carrying capacity for the design and selection of three-row roller slewing bearings. *Mech Mach Theory* 48:52–61
- Aguirrebeitia J, Plaza J, Abasolo M, Vallejo J (2012) General static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generator actuation systems. *Wind Energy*. doi:10.1002/we.1530
- Aguirrebeitia J, Abasolo M, Avilés R, Fernández de Bustos I (2012) General static load-carrying capacity for the design and selection of four contact point slewing bearings: finite element calculations and theoretical model validation. *Finite Elem Anal Des* 55:23–30
- Aguirrebeitia J, Plaza J, Abasolo M, Vallejo J (2013) Effect of the preload in the general static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generators: theoretical model and finite element calculations. *Wind Energy*. doi:10.1002/we.1656
- International Organization for Standardization, Rolling Bearings—Static Load Ratings, ISO 76:2006, 3rd edn
- Zupan S, Prebil I (2001) Carrying angle and carrying capacity of a large single row ball bearing as a function of geometry parameters of the rolling contact and the supporting structure stiffness. *Mech Mach Theory* 36:1087–1103
- Smolnicki T, Rusinski E (2007) Superelement-based modeling of load distribution in large-size slewing bearings. *ASME J Mech Des* 129:082601
- Smolnicki T, Derlukiewicz D, Stańco M (2008) Evaluation of load distribution in the superstructure rotation joint of single-bucket caterpillar excavators. *Autom Constr* 17: 218–223
- Ludwik K, Krynke M, Mazanek E (2012) A catalogue capacity of slewing bearings. *Mech Mach Theory* 58:29–45
- Krynke M, Selejdak J, Borkowski S (2013) Determination of static limiting load curves for slewing bearing with application of the finite element methods. *Mater Eng* 20:64–70
- Daidiá A, Chaib Z, Ghosn A (2008) 3D simplified finite elements analysis of load and contact angle in a slewing ball bearing. *J Mech Des* 130:082601-1
- Chen G, Wen J (2012) Load performance of large-scale rolling bearings with supporting structure in wind turbines. *J Tribol* 134(4):041105. doi:10.1115/1.4007349
- Olave M, Damian J, Serna A, Sagartzazu X (2010) Design of four contact-point slewing bearing with a new load distribution procedure to account for structural stiffness. *ASME J Mech Des* 132(2):021006. doi:10.1115/1.4000834
- Lacroix S, Nélias D, Leblanc A (2013) Four-point contact ball bearing model with deformable rings. *J Tribol* 135: 031402-1
- Leblanc A, Nelias D (2007) Ball motion and sliding friction in a four-contact-point ball bearing. *J Tribol* 129(4):801–808
- Leblanc A, Nelias D (2008) Analysis of ball bearings with 2, 3 or 4 contact points. *Tribol Trans* 51(3):372–380
- Kania L, Krynke M (2013) Computation of the general carrying capacity of slewing bearings. *Eng Comput* 30(7):1011–1028
- Potočník R, Göncz P, Glodež S (2013) Static capacity of a large double row slewing ball bearing with predefined irregular geometry. *Mech Mach Theory* 64:67–79
- Komzsik L (2009) What every engineer should know about computational techniques of finite element analysis, 2nd edn. CRC Press (Taylor & Francis Group). ISBN-10: 1439802947, ISBN-13: 978-1439802946



## Bibliografía

- [1281-1, 2008] 1281-1, I. (2008). Rolling bearings – explanatory notes on iso 281 – part 1: Basic dynamic load rating and basic rating life. ISO/TR 1281-1:2008(e). Technical report, International Organization for Standardization.
- [1281-2, 2008] 1281-2, I. (2008). Rolling bearings – explanatory notes on ISO 281 – part 2: Modified rating life calculation, based on a systems approach to fatigue stresses. ISO/TR 1281-2:2008(e). Technical report, International Organization for Standardization.
- [16281:2008, 2008] 16281:2008, I. (2008). Rolling bearings – methods for calculating the modified reference rating life for universally loaded bearings. ISO/TS 16281:2008. Technical report, International Organization for Standardization.
- [281, 2007] 281, I. (2007). Rolling bearings – dynamic load ratings and rating life. ISO 281:2007(e). Technical report, International Organization for Standardization.
- [3290-1, 2008] 3290-1, I. (2008). Rolling bearings – balls – part1: Steel balls. ISO 3290-1. Technical report, International Organization for Standardization.
- [Abasolo et al., 2015] Abasolo, M., Coria, I., Plaza, J., and Aguirrebeitia, J. (2015). New selection curves for four contact point slewing bearings. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*.
- [Aguirrebeitia et al., 2010a] Aguirrebeitia, J., Abasolo, M., Ansola, R., Vallejo, J., and de Bustos, I. F. (2010a). Modelo detallado para el análisis estático de conjuntos de rodamiento de vuelco. In *XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*.

- [Aguirrebeitia et al., 2011] Aguirrebeitia, J., Abasolo, M., Avilés, R., and Fernandez de Bustos, I. (2011). General static load capacity in slewing bearings. unified theoretical approach for crossed roller bearings and four contact point angular ball bearings. *13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México*.
- [Aguirrebeitia et al., 2012a] Aguirrebeitia, J., Abasolo, M., Avilés, R., and Fernandez de Bustos, I. (2012a). Theoretical calculation of general static load-carrying capacity for the design and selection of three row roller slewing bearings. *Mechanism and machine theory*, 48:52–61.
- [Aguirrebeitia et al., 2012b] Aguirrebeitia, J., Abasolo, M., Avilés, R., and Fernández de Bustos, I. (2012b). General static load-carrying capacity for the design and selection of four contact point slewing bearings: finite element calculations and theoretical model validation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 55:23–30.
- [Aguirrebeitia et al., 2010b] Aguirrebeitia, J., Avilés, R., Fernandez de Bustos, I., and Abasolo, M. (2010b). Calculation of the general static load-carrying capacity for the design of four contact point slewing bearings. *Journal of Mechanical Design*, 132(6).
- [Aguirrebeitia et al., 2012c] Aguirrebeitia, J., Plaza, J., Abasolo, M., and Vallejo, J. (2012c). General static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generator actuation systems. *Wind Energy*, pages 759–774.
- [Aguirrebeitia et al., 2013] Aguirrebeitia, J., Plaza, J., Abasolo, M., and Vallejo, J. (2013). Effect of the preload in the general static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generators: theoretical model and finite element calculations. *Wind Energy*, pages n/a – n/a.
- [Aguirrebeitia et al., 2015] Aguirrebeitia, J., Plaza, J., Heras, I., et al. (2015). Fem model for friction moment calculations in ball-raceway contacts for applications in four contact point slewing bearings. In *Proceedings of the 14th IFToMM World Congress*, pages 642–647.

- [Aguirrebeitia et al., 2010c] Aguirrebeitia, J., Vallejo, J., Abasolo, M., Avilés, R., and de Bustos, I. F. (2010c). Capacidad de carga estática generalizada en rodamientos de vuelco de contacto angular de 4 puntos. In *XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*.
- [Aguirrebeitia et al., 2010d] Aguirrebeitia, J., Vallejo, J., Abasolo, M., Avilés, R., and Fernández de Bustos, I. (2010d). Capacidad de carga estática generalizada en rodamientos de vuelco de contacto angular de 4 puntos. In *XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*.
- [Aguirrebeitia Celaya et al., 2012] Aguirrebeitia Celaya, J., Plaza Gonzalez, J., Abasolo Bilbao, M., and Vallejo Matilla, J. (2012). Capacidad de carga estática generalizada en rodamientos de vuelco de contacto angular de 4 puntos. influencia de la precarga. In *XIX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*.
- [Al-Bender and De Moerlooze, 2008] Al-Bender, F. and De Moerlooze, K. (2008). A model of the transient behaviour of tractive rolling contacts. *Advances in Tribology*, 2008:214894, 17 pages.
- [Alfredsson and Olsson, 2000] Alfredsson, B. and Olsson, M. (2000). Standing contact fatigue testing of a ductile material: Surface and subsurface cracks. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 23:229–240.
- [Alonso and Giménez, 2007] Alonso, A. and Giménez, J. (2007). Tangential problem solution for non-elliptical contact areas with fastsim algorithm. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 45(4):341–357.
- [Amasorrain et al., 2003] Amasorrain, J., Sagartzazu, X., and Damián, J. (2003). Load distribution in a four contact-point slewing bearing. *Mechanism and Machine Theory*, 38:479–496.
- [Antoine et al., 2006] Antoine, J. F., Abba, G., and Molinari, A. (2006). A new proposal for explicit angle calculation in angular contact ball bearing. *ASME Journal of Mechanical Design*, 128:468–478.

- [Bearings, ] Bearings, R. Slewing ring. product catalog.
- [Bhushan, 2013] Bhushan, B. (2013). *Principles and Applications of Tribology*. Tribology in Practice Series. Wiley.
- [Bickford, 1995] Bickford, J. (1995). *An Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints, Third Edition, Revised and Expanded*. Mechanical Engineering. Taylor & Francis.
- [Bickford, 1998] Bickford, J. (1998). *Handbook of Bolts and Bolted Joints*. Taylor & Francis.
- [Bourdon et al., 1999] Bourdon, A., Rigal, J., and Play, D. (1999). Static rolling bearing models in cad environment for the study of complex mechanisms, part ii – complete assembly model. *ASME Journal of Tribology*, 121(2):205–214.
- [Burton et al., 2001] Burton, T., Sharpe, D., Jenkins, N., and Bossanyi, E. (2001). *Wind Energy Handbook*. John Wiley & Sons.
- [Celaya et al., 2012] Celaya, J. A., Plaza Gonzalez, J., Abasolo Bilbao, M., and Vallejo Matilla, J. (2012). Capacidad de carga estática generalizada en rodamientos de vuelco de contacto angular de 4 puntos. influencia de la precarga.
- [Chaib et al., 2005] Chaib, Z., Daidie, A., Guillot, J., and Valdean, A. (2005). Study of a bolted and screwed joint of a slewing bearing. *CPI Conference, Casablanca, Marruecos*.
- [Chaib et al., 2007] Chaib, Z., Daidie, A., and Leray, D. (2007). Screw behavior in large diameter slewing bearing assemblies: numerical and experimental analyses. *International Journal of Interactive Design and Manufacturing*, 1:21–31.
- [Chen and Wen, 2012] Chen, G. and Wen, J. (2012). Load performance of large-scale rolling bearings with supporting structure in wind turbines. *Journal of Tribology*, 134(4):041105 (9).

- [Commission, 2001] Commission, I. E. (2001). lec-wt-01: lec system for conformity testing and certification of wind turbines. Technical report, International Electrotechnical Commission.
- [Commission, 2005] Commission, I. E. (2005). lec 61400-1 ed.3: Wind turbines, design requirements. Technical report, International Electrotechnical Commission.
- [Daidié et al., 2008] Daidié, A., Chaib, Z., and Ghosn, A. (2008). 3d simplified finite elements analysis of load and contact angle in a slewing ball bearing. *ASME Journal of Mechanical Design*, 130(8):082601–082601–8.
- [Glodež et al., 2012] Glodež, S., Potočnik, R., and Flaker, J. (2012). Computational model for calculation of static capacity and lifetime of large slewing bearing's raceway. *Mechanism and Machine Theory*, 47:16–30.
- [Göncz et al., 2012] Göncz, P., Drobne, M., and Glodež, S. (2012). Computational model for determination of dynamic load capacity of large three-row roller slewing bearings. *Engineering failure analysis*, 32:44–53.
- [Göncz and Glodež, 2015] Göncz, P. and Glodež, M. U. S. (2015). Computational assessment of the allowable static contact loading of a roller-slewing's case-hardened raceway. *International Journal of Mechanical Sciences*, 94-95:174–184.
- [Göncz et al., 2013] Göncz, P., Potočnik, R., and Glodež, S. (2013). Computational model for determination of static load capacity of three-row roller slewing bearings with arbitrary clearances and predefined raceway deformations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 73:82–92.
- [Halme and Andersson, 2010] Halme, J. and Andersson, P. (2010). Rolling contact fatigue and wear fundamentals for rolling bearing diagnostics – state of the art. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part J: Journal of Engineering Tribology*, volume 224, pages 377–393.
- [Hamrock et al., 1972] Hamrock, B., Anderson, W., Aeronautics, U. S.Ñ., Administration, S., and Center, L. R. (1972). *Arched-outer-race ball-bearing analysis considering*

*centrifugal forces*. NASA technical note. National Aeronautics and Space Administration.

[Harris and Broschard, 1964] Harris, T. and Broschard, J. (1964). Analysis of an improved planetary gear-transmission bearing. *ASME Paper N° 63-LUB-2*, pages 457–462.

[Harris and Kotzalas, 2007a] Harris, T. and Kotzalas, M. (2007a). *Rolling Bearing Analysis I: Essential Concepts of Bearing Technology*. Taylor & Francis/CRC Press.

[Harris and Kotzalas, 2007b] Harris, T. and Kotzalas, M. (2007b). *Rolling Bearing Analysis II: Advanced Concepts of Bearing Technology*. Taylor & Francis/CRC Press.

[Harris et al., 2009] Harris, T., Rumbarger, J., and Butterfield, C. (2009). *Wind Turbine Design Guideline DG03: Yaw and Pitch Rolling Bearing Life*. National Renewable Energy Laboratory, Colorado.

[Hau, 2006] Hau, E. (2006). *Wind Turbines: Fundamentals, Technologies, Application, Economics*. Springer.

[Hernot et al., 2000] Hernot, X., Sartor, M., and Guillot, J. (2000). Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach. *ASME Journal of Mechanical Design*, 122:83–90.

[Hertz, 1896] Hertz, H. (1896). On the contact of rigid elastic solids and on hardness. In Macmillan and LTD., C., editors, *Micellaneous Papers*, pages 163–183, London.

[Houpert, 1999] Houpert, L. (1999). Numerical and analytical calculations in ball bearings. *Proc. of 8th European Space Mechanism and Tribology Symp., Toulouse, France*, pages 1–15.

[Houpert, 2000] Houpert, L. (2000). An engineering approach to non-hertzian contact elasticity—Part II. *Journal of Tribology*, 123(3):589–594.

[Houpert, 2001] Houpert, L. (2001). An engineering approach to hertzian contact elasticity—Part I. *Journal of Tribology*, 123(3):582–588.

- [Houpert and Leenders, 1985] Houpert, L. and Leenders, P. (1985). A theoretical and experimental investigation into rolling bearing friction. *Proceeding of the Eurotrib Conference, Lyon, France*.
- [Imo, 2005] Imo (2005). Slewing ring. product catalog.
- [Ina, 2006] Ina (2006). Slewing rings. catalogue 404.
- [Inc., ] Inc., R. Large-diameter anti-friction slewing rings.
- [Iraundi, 2011] Iraundi (2011). Coronas rotativas y reductoras. catálogo.
- [ISO76, 2006] ISO76 (2006). Rolling bearings – static load ratings. ISO 76:2006, 3rd edition. Standard, International Organization for Standardization.
- [ISO/TR10657, 1991] ISO/TR10657 (1991). Explanatory notes on ISO 76. Technical report, International Organization for Standardization.
- [Jerman et al., 2004] Jerman, B., Podrzaj, P., and Kramar, J. (2004). An investigation of slewing-crane dynamics during slewing motion—development and verification of a mathematical model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46:729–750.
- [Johnson, 1987] Johnson, K. (1987). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press.
- [Jones, 1946] Jones, A. (1946). Analysis of stresses and deflections. *New Departure Engineering Data, Bristol, CT*.
- [Jones, 1959] Jones, A. (1959). Ball motion and sliding friction in ball bearings. *J. Basic Eng.*, 81(1):1–12.
- [Jones and Harris, 1962] Jones, A. and Harris, T. (1962). Analysis of a rolling-element idler gear bearing having a deformable outer-race structure. *ASME Journal of Basic Engineering*, pages 273–278.
- [Joshi et al., 2015] Joshi, A., Kachhia, B., Kikkari, H., Sridhar, M., and Nelias, D. (2015). Running torque of slow speed two-point and four-point contact bearings. *Lubricants*, 3(2):181–196.

- [Kalker, 1982] Kalker, J. (1982). A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle System Dynamics*, 11(1):1–13.
- [Kalker, 1990] Kalker, J. (1990). *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer.
- [Kang and Tesar, 2003] Kang, S. and Tesar, D. (2003). An analytical comparison between ball and crossed roller bearings for utilization in actuator modules for precision modular robots. *ASME 2003, International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information In Engineering Conference DETC2003/DAC-488834*, pages 1221–1230.
- [Kania, 2006] Kania, L. (2006). Modelling of rollers in calculation of slewing bearing with the use of finite elements. *Mechanism and Machine Theory*, 41:1359–1376.
- [Kania and Krynke, 2013] Kania, L. and Krynke, M. (2013). Computation of the general carrying capacity of slewing bearings. *Engineering Computations*, 30(7):1011–1028.
- [Kania et al., 2012] Kania, L., Krynke, M., and Mazanek, E. (2012). A catalogue capacity of slewing bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 58:29–45.
- [Komzsjik, 2009] Komzsjik, L. (2009). *What Every Engineer Should Know about Computational Techniques of Finite Element Analysis, Second Edition*. Mechanical, aerospace and electrical engineering. Taylor & Francis.
- [Krynke et al., 2013] Krynke, M., Selejdak, J., and Borkowski, S. (2013). Determination of static limiting load curves for slewing bearing with application of the finite element method. *Materials Engineering – Materialove inzinierstvo*, 20:64–70.
- [Kunc and Prebil, 2004] Kunc, R. and Prebil, I. (2004). Numerical determination of carrying capacity of large rolling bearings. *Journal of Materials Processing Technology*, 155-156:1696–1703.
- [Kunc et al., 2007] Kunc, R., Zerovnik, A., and Prebil, I. (2007). Verification of numerical determination of carrying capacity of large rolling bearings with hardened raceway. *International Journal of Fatigue*, 29:1913–1919.

- [Lai et al., 2009] Lai, J., Ovize, P., Kuijpers, H., Bacchetto, A., and Ioannides, S. (2009). Case depth and static capacity of surface induction-hardened rings. *Journal of ASTM International*, 6(10):1–16.
- [Leblanc and Nelias, 2007] Leblanc, A. and Nelias, D. (2007). Ball motion and sliding friction in a four-contact-point ball bearing. *J. Tribol.*, 129(4):801–808.
- [Li et al., 2012] Li, P., Wang, M., Qi, X., Feng, J., Liu, X., Tang, R., and Zhao, W. (2012). Analysis of the mechanical properties of slewing bearings using finite element method. *Applied Mechanics and Materials*, 224:286–294.
- [Liao and Lind, 2001] Liao, N. and Lind, J. (2001). A new method for the analysis of deformation and load in a ball bearing with variable contact angle. *ASME Journal of Mechanical Design*, 123:304–312.
- [Lloyd, 2010] Lloyd, G. (2010). *Guideline for the Certification of Wind Turbines*. Germanischer Lloyd, Hamburg, Germany, 2010 edition.
- [Mignot et al., 2010] Mignot, L., Bonnard, L., and Abousleiman, V. (2010). Analysis of load distribution in planet gear bearing. *AGMA Technical paper number 10FTM16*.
- [NREL, 2012] NREL (2012). Iea wind task 26: The past and future cost of wind energy (work package 2). Guide, NREL.
- [Pandiyarajan et al., 2012] Pandiyarajan, R., Starvin, M., and Ganesh, K. (2012). Contact stress distribution of large diameter ball bearing using hertzian elliptical contact theory. *Procedia Engineering*, 38:264–269.
- [Plaza et al., 2015] Plaza, J., Abasolo, M., Coria, I., Aguirrebeitia, J., and de Bustos, I. F. (2015). A new finite element approach for the analysis of slewing bearings in wind turbine generators using superelement techniques. *Meccanica*, 50(6):1623–1633.
- [Plaza et al., 2008] Plaza, J., Echarte, F. J., Vázquez, J., and González Posada, M. A. (2008). Blade bearing friction and fatigue mathematical model. *STLE/ASME International Joint Tribology Conference*, pages IJTC2008–71147–8.

- [Potočnik et al., 2009] Potočnik, P., Flasker, J., and Glodež, S. (2009). Numerical analysis of 3d subsurface crack propagation in large slewing bearing. *International Conference on "Crack Paths"(CP 2009) Vicenza, Italia*.
- [Potočnik et al., 2010] Potočnik, R., Göncz, P., Flasker, J., and Glodež, S. (2010). Fatigue life of double row slewing ball bearing with irregular geometry. *Procedia Engineering*, 2:1877–1886.
- [Potočnik et al., 2013] Potočnik, R., Göncz, P., and Glodež, S. (2013). Static capacity of a large double row slewing ball bearing with predefined irregular geometry. *Mechanism and machine theory*, 64:67 – 79.
- [Qu, 2004] Qu, Z.-Q. (2004). *Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis*. Springer-Verlag London, 1 edition.
- [Ricci, ] Ricci, M. C. Internal loading distribution in statically loaded ball bearings, subjected to a combined radial and thrust load, including the effects of temperature and fit.
- [Ricci, 2009a] Ricci, M. C. (2009a). Ball bearings subjected to a variable eccentric thrust load. In *Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications DINCON'09*, Bauru, Brazil.
- [Ricci, 2009b] Ricci, M. C. (2009b). Internal loading distribution in statically loaded ball bearings subjected to a combined radial and thrust load. In *ICCSM Proceedings of the 6th International Congress of Croatian Society of Mechanics*, Dubrovnik, Croatia.
- [Ricci, 2009c] Ricci, M. C. (2009c). Internal loading distribution in statically loaded ball bearings subjected to a combined radial and thrust load, including the effects of temperature and fit. In *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, volume 57, pages 290–298, Amsterdam.
- [Ricci, 2009d] Ricci, M. C. (2009d). Internal loading distribution in statically loaded ball bearings, subjected to a combined radial, thrust and moment load, including the

- effects of temperature and fit. In *Proceedings of PACAM XI*. 11th Pan-American Congress of Applied Mechanics.
- [Ricci, 2009e] Ricci, M. C. (2009e). Internal loading distribution in statically loaded ball bearings subjected to an eccentric thrust load. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009(471804):36.
- [Ricci, 2010a] Ricci, M. C. (2010a). Ball bearings under thrust load using an accurate method for curvature sum and difference. In *Accepted for presentation at the VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica CONEN 2010*, Campina Grande, Brasil.
- [Ricci, 2010b] Ricci, M. C. (2010b). Internal loading distribution in high-speed ball bearings, subjected to a combined radial, thrust, and moment load, including the effects of temperature and fit. Paris, France. ECCM, Accepted for presentation at the IV European Conference on Computational Mechanics.
- [Ricci, 2010c] Ricci, M. C. (2010c). Internal loading distribution in statically loaded ball bearings subjected to a centric thrust load: alternative approach. In *accepted for presentation at the International Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing, ICAMSC'10*, Tokyo, Japan.
- [Ricci, 2010d] Ricci, M. C. (2010d). Internal loading distribution in statically loaded ball bearings subjected to a centric thrust load: Numerical aspects. *International Scholarly and Scientific Research & Innovation*, 4(3):328–336.
- [Rollix, 2007] Rollix (2007). Slewing rings. special bearings.catalog.
- [Rothe-Erde, 2009] Rothe-Erde (2009). Rothe-erde ©slewing bearings. catalog.
- [Rumbarger, 1962] Rumbarger, J. (1962). Thrust bearing with eccentric loads. *Mach. Des.*
- [Rumbarger, 2003] Rumbarger, J. H. (2003). Simplification of dynamic capacity and fatigue life estimations for oscillating rolling bearings. *Journal of Tribology*, 125(4):868–870.

- [Rumbarger and Poplawski, 1994] Rumbarger, J. H. and Poplawski, J. V. (1994). "correlating computerized rolling bearing analysis techniques to the iso standards on load rating and life. *Tribology Transactions*, 37(4):793–801.
- [Sague and Rumbarger, 1977] Sague, J. and Rumbarger, J. (1977). Design criteria to prevent core crushing failure in large diameter, case hardened ball and roller bearings. In *An ASME Publication, Presentation at the Design Engineering Conference and Show*, Chicago, IL. ASME, Washington, DC.
- [Sakai, 2008] Sakai, T. (2008). *Bolted Joint Engineering: Fundamentals and Applications*. Beuth Training. Beuth Verlag GmbH.
- [Sawicki et al., 2008] Sawicki, J. T., Johansson, S. A., and Rumbarger, J. H. (2008). Fatigue life prediction for large-diameter elastically constrained ball bearings. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 130(2):022506–022506–8.
- [Sjoväll, 1933] Sjoväll, H. (1933). The load distribution within ball and roller bearings under given external radial and axial load. *Teknisk Tidskrift, Mek., h.9*.
- [SKF, 2009] SKF (2009). Slewing ring. product catalog.
- [Smolnicki et al., 2008] Smolnicki, T., Derlukiewicz, D., and Stanco, M. (2008). Evaluation of load distribution in the superstructure rotation joint of single-bucket caterpillar excavators. *Automation in Construction*, 17:218–223.
- [Smolnicki and Rusinski, 2007] Smolnicki, T. and Rusinski, E. (2007). Superelement-based modeling of load distribution in large-size slewing bearings. *Journal of Mechanical Design*, 129:459–463.
- [Stribeck, 1901] Stribeck, R. (1901). Kugellager für beliebige belastungen. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, pages 45(3):73–9 (pt I) & 45(4): 118–125 (pt II).
- [Stribeck, 1902] Stribeck, R. (1902). Die wesentlichen eigenschaften der gleit- un rollenlager. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, pages 46(37):1341–1348 (pt I) & 46(38): 1432–1438 (pt II) & 46(39) 1463–1470 (pt III).

- [Stribeck, 1907] Stribeck, R. (1907). Ball bearings for various loads. *Trans ASME*, 29:420–463.
- [Sun and Hao, 2012] Sun, Z. and Hao, C. (2012). Conformal contact problems of ball-socket and ball. *Physics Procedia*, 25:209 – 214.
- [Tabor, 1955] Tabor, D. (1955). Elastic work involved in rolling a sphere on another surface. *Br. J. Appl. Phys.*, 3(3):79.
- [Todd and Johnson, 1986] Todd, M. and Johnson, K. (1986). A model for coulomb torque hysteresis in ball bearings. *Int. J. Mech. Sci.*, 29(5):339–354.
- [Todd, 1983] Todd, M. J. (1983). Computational methods for ball bearings in spacecraft. *Proceeding of the First European Symposium on 'Space Mechanisms & Tribology', Neuchâtel, Switzerland*, pages 101–108.
- [Todd, 1987] Todd, M. J. (1987). Spin division and estimation of coulomb torque in angular contact ball bearings. In *In Proceedings of the IMechE Conference on Tribology-Fifty Years On*, page 933–944, London, UK.
- [Vallejo et al., 2010] Vallejo, J., Aguirrebeitia, J., Abasolo, M., Avilés, R., and Fernández de Bustos, I. (2010). Criterio de aceptación estática de rodamientos de vuelco de contacto angular de 4 puntos frente a cargas axiales, radiales y de momento. *XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*.
- [Vlcek et al., 2003] Vlcek, B. L., Hendricks, R. C., and Zaretsky, E. V. (2003). Determination of rolling-element fatigue life from computer generated bearing tests. *Tribology Transactions*, 46(4):479–493.
- [Wang and Yuan, 2014] Wang, Y. and Yuan, Q. (2014). Static load-carrying capacity and fatigue life of a double row pitch bearing with radial interference. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 228(2):307–316.

- [Yao et al., 2012] Yao, T., Chi, Y., and Huang, Y. (2012). Research on flexibility of bearing rings for multibody contact dynamics of rolling bearings. *Procedia Engineering* 31, pages 586–594.
- [Zienkiewicz et al., 2013] Zienkiewicz, O., Taylor, R., and Zhu, J. (2013). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Science.
- [Zupan and Prebil, 2001] Zupan, S. and Prebil, I. (2001). Carrying angle and carrying capacity of a large single row ball bearing as a function of geometry parameters of the rolling contact and the supporting structure stiffness. *Mechanism and Machine Theory*, 36:1087–1103.
- [Zwirlein and Wieland, 1983] Zwirlein, O. and Wieland, W. (1983). Case depth for induction hardened slewing bearing rings. In *SAE Technical Paper Series, International Off-Highway Meeting and Exposition*, Milwaukee, WI. ASME, Washington, DC.