

emeri ta zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA

SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

--

FDO.: FECHA:	FDO.: FECHA:
-----------------	-----------------



## **Documento 3: Anexos**

### Índice de los Cálculos

<b>3. CÁLCULOS</b> .....	1
<b>3.1. DATOS DE PARTIDA</b> .....	1
<b>3.2. UBICACIÓN DEL MOLINO</b> .....	1
<b>3.3. PARAMETROS DE ENTRADA DEL ROTOR</b> .....	2
<b>3.4. EJE BAJA VELOCIDAD</b> .....	2
3.4.1. Cargas sobre el eje .....	2
3.4.2. Cálculo del eje según las tensiones .....	22
3.4.3. Dimensionamiento según deflexiones .....	25
3.4.4. Diseño del eje en base a vibraciones .....	34
3.4.5. Rodamientos eje de baja velocidad .....	35
3.4.6. Anillos de retención .....	40
3.4.7. Diseño de las chavetas .....	40
<b>3.5. 1º EJE MULTIPLICADOR</b> .....	42
3.5.1. Cargas sobre el eje .....	43
3.5.2. Cálculo del eje según las tensiones .....	58
3.5.3. Dimensionamiento según deflexiones .....	61
3.5.4. Diseño del eje en base a vibraciones .....	73
3.5.5. Rodamientos 1º eje multiplicador .....	74
3.5.6. Anillos de retención .....	79
3.5.7. Diseño de las chavetas .....	79
<b>3.6. 2º EJE MULTIPLICADOR</b> .....	80
3.6.1. Cargas sobre el eje .....	81
3.6.2. Cálculo del eje según las tensiones .....	89
3.6.3. Dimensionamiento según deflexiones .....	92
3.6.4. Diseño del eje en base a vibraciones .....	101
3.6.5. Rodamientos 2º eje multiplicador .....	101
3.6.6. Anillos de retención .....	105

3.6.7.	Diseño de las chavetas .....	106
3.7.	EJE VERTICAL .....	107
3.7.1.	Cargas sobre el eje.....	108
3.7.2.	Cálculo del eje según las tensiones .....	111
3.7.3.	Dimensionamiento según deflexiones .....	114
3.7.4.	Diseño del eje en base a vibraciones .....	120
3.7.5.	Rodamientos eje vertical .....	121
3.7.6.	Anillos de retención .....	126
3.7.7.	Diseño de las chavetas .....	127
3.8.	SISTEMA DE ORIENTACION .....	128
3.8.1.	Fuerzas y momentos en el rodamiento .....	128
3.8.2.	Selección del rodamiento .....	130
3.9.	SISTEMA DE FRENADO.....	134
3.9.1.	Cálculo de la fuerza de frenado.....	135
3.9.2.	Selección del freno mecánico .....	136
3.9.3.	Cálculo de la chaveta del disco de freno.....	137

## **ANEXOS**

### **3. CÁLCULOS**

#### **3.1. DATOS DE PARTIDA**

Éstos son los datos de partida de los que disponemos para la realización de este proyecto:

- Potencia del molino: 4320 W / 5,87 CV.
- Velocidad del viento: la localización es la Sierra de los Molinos (Campo de Criptana), donde la velocidad media anual del viento oscila alrededor de los 5 m/s donde la media mínima es 2,3 m/s y la máxima 6,2 m/s. La velocidad máxima del viento permitida estaba entorno a los 7 m/s.
- Tipo de pala: se mantendrá el estilo original de superficie alabeada citado en el apartado anterior, con un radio de 8 metros.
- Velocidad de giro del rotor: 6 rpm.
- Altura del molino: 12 metros medidos desde el suelo hasta el rotor.
- Velocidad angular de la piedra volandera: 30 rpm.
- Caja multiplicadora: relación de 1:5.

Estos datos han sido obtenidos de la Tesis Doctoral “Estudio histórico-tecnológico y representación gráfica de los molinos de viento de La Mancha, en la España de los siglos XVI al XIX, mediante técnicas de dibujo asistido por ordenador (DAO)” de D. Enrique Pérez Martín, apartado 6 “Estudio Tecnológico”.

#### **3.2. UBICACIÓN DEL MOLINO**

El molino se halla en el municipio de Campo de Criptana, Provincia de Ciudad Real en la comunidad de Castilla-La Mancha. La velocidad media de la región es de 5 m/s tal y como vemos en la memoria en el apartado 2.3.5 por lo que usaremos este dato de partida a la hora de diseñar todos los elementos.

### 3.3. PARAMETROS DE ENTRADA DEL ROTOR

Los parámetros de entrada de nuestro molino son obtenidos de la tesis doctoral de D. Enrique Pérez Martín.

Partiendo de una potencia de 4320 W / 5,87 CV en el rotor que gira a 6 rpm con un par torsor de 9163,77 Nm obtendremos el resto de datos necesarios para el dimensionamiento del eje de baja velocidad, a partir de cual iremos diseñando elemento a elemento nuestra nueva máquina.

### 3.4. EJE BAJA VELOCIDAD

Una vez obtenidos los datos del rotor procedemos a calcular el primer elemento encargado de transmitir la energía cinética del viento al resto de componentes (figura 1).

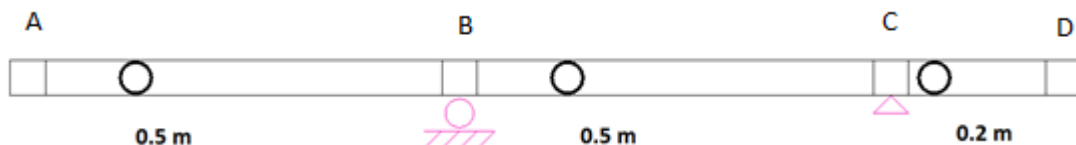


Figura 1. Eje baja velocidad

#### 3.4.1. Cargas sobre el eje

El eje de baja velocidad soportará las siguientes cargas que se dividen en los siguientes apartados:

A continuación se detallarán las fuerzas una a una:

##### Momento torsor

El momento torsor es el propio par generado por el rotor como observamos en la Figura 2, que se detalla en la Tesis.

$$M_{Torsor} = T = 9163,77 \text{ (Nm)}$$

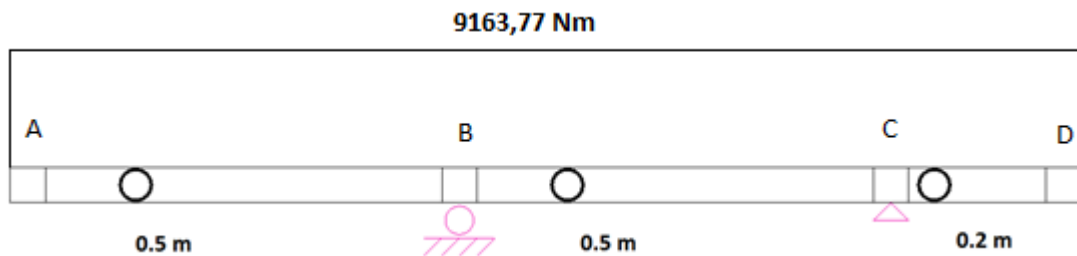


Figura 2. Momento torsor

### **Fuerza axial**

La fuerza axial producida por el viento en nuestras aspas originales se deduce de la fórmula de la carga de empuje (thrust loading) obtenida del IEC-61400-02:2006, "Aerogeneradores. Parte 2: Requisitos de diseño de pequeños aerogeneradores", pág. 71:

$$F_{Axial} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(\lambda_{diseño} \cdot Q_{Diseño})}{R}$$

Dónde:

- $\lambda_{diseño} \approx 1$
- $Q_{Diseño} = M_{Torsor} = 9163,77 \text{ (Nm)}$
- Radio de pala (R) = 8 m.

Esto nos da como resultado (figura 3):

$$F_{Axial} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1,0053 \cdot 9163,77}{8} = 1727,3295 \text{ (N)}$$

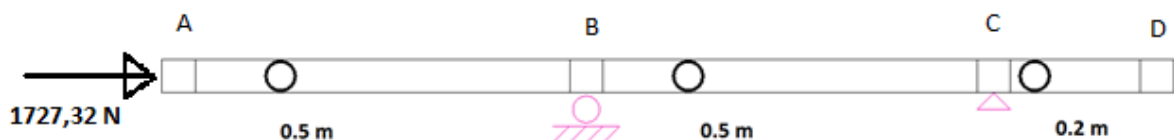


Figura 3. Fuerza axial.

**Fuerza vertical**

La fuerza vertical es generada por el peso propio del rotor. Las aspas tienen cada una peso de 160 kg aproximadamente sin tener en cuenta los machos y remachos. Este dato ha sido facilitado por el arquitecto técnico de Campo de Criptana. Los machos miden 11 m de largo y los remachos 7 m y al no disponer de datos, hemos considerado que ambos tienen unas dimensiones de 20 cm de ancho por 15 cm de profundidad. Sabiendo que están fabricados a partir de pino de Cuenca, el cual tiene una densidad de 0,502 g/cm<sup>3</sup> (tabla 1) nos da que tienen una masa de:

PARÁMETROS	Valor Mínimo	Valor medio	Valor máximo	Desv. Típica	Interpretación
Densidad normal (peso específico aparente) gr/cm <sup>3</sup>	0.432 (0.33)	0.502 (0.52)	0.571 (0.89)	0.042	semipesada (semipesada)
Dureza radial chalais-meudon(d).	1.75	1.88	2.01	0.184	blanda
Cota de dureza (D/μ <sup>2</sup> ).	6.27	6.30	6.33	0.042	
Dureza tangencial chalais-meudon	1.01	1.73	2.83	0.488	blanda
Cota de dureza (D/μ <sup>2</sup> ).	4.78	7.00	10.17	1.544	
Dureza brinell perpendicular		(1.9)			
Dureza brinell paralela		(4.0)			
Contracción volumétrica total (c <sub>v</sub> ).	10.5	12.75 (12.1)	14.6	1.137	media (media)
Contracción lineal tangencial	6.82	7.05 (7.7)	7.28	0.325	
Contracción lineal radial	3.85	3.855 (4.0)	3.86	0.007	
Contracción lineal axial		(0.4)			
Punto de saturación de la fibra.	29	36	40	3.383	elevado
Coefficiente de contracción volumétrica (c <sub>cv</sub> ).	0.27	0.36 (0.26)	0.43	0.046	algo nerviosa (poco nerviosa)
Coefficiente contracción tangencial	0.21	0.235	0.26	0.035	
Coefficiente contracción radial	0.12	0.13	0.14	0.014	
Relación c.c.tang./c.c. Radial	1.75	1.81	1.86	0.078	
Higroscopicidad	0.0020	0.0029	0.0035	0.00043	normal

Tabla 1. Características físicas del pino

Con las dimensiones y la densidad deducimos la masa de los machos y remachos:

$$M = \frac{l \cdot b \cdot a}{1000} \cdot \delta$$

Donde:

- M=masa
- l=longitud



- b=base
- a=anchura

$$M_{Macho} = \frac{l \cdot b \cdot a}{1000} \cdot \delta = \frac{1100 \cdot 20 \cdot 15}{1000} \cdot 0,502 \left( \frac{g}{cm^3} \right) = 165,66 (Kg)$$

$$M_{Remacho} = \frac{l \cdot b \cdot a}{1000} \cdot \delta = \frac{700 \cdot 20 \cdot 15}{1000} \cdot 0,502 \left( \frac{g}{cm^3} \right) = 105,42 (Kg)$$

Teniendo en cuenta los distintos componentes del rotor, el peso total es:

$$P_{Total} (M_{Aspa} + M_{Macho} + M_{Remacho}) \cdot 9,81 \left( \frac{s}{m^2} \right)$$

$$P_{Total} = (160 \cdot 4 + 165,66 + 105,42) = 911,08 (kg) \rightarrow 911,08 \cdot 9,81 = 8937,6948 (N)$$

En la Figura 4 observamos la fuerza del peso:

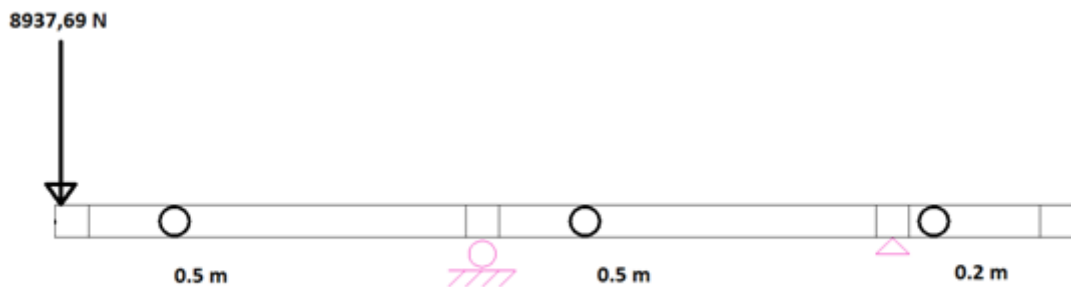


Figura 4. Fuerzas del rotor

### **Cálculo del primer conjunto de engranajes**

Antes de proseguir con el eje vamos a calcular el engranaje necesario para el aumento de velocidad y transmisión del par. La transmisión de potencia se expresa en la siguiente ecuación:

$$Pot = Pot_1 = Pot_2 \rightarrow T_1 \cdot w_1 = T_2 \cdot w_2 \rightarrow F_t \cdot R_1 \cdot w_1 = F_t \cdot R_2 \cdot w_2$$

También necesitamos conocer la relación de transmisión  $i$ , definida como:

$$i = \frac{w_2}{w_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Como vamos a hacer uso de dos etapas y nuestra  $i$  total es de 5, las relaciones que usaremos serán 2,5x en la primera etapa y 2 en la segunda:

$$i = 2,5 = \frac{w_2}{6} \rightarrow w_2 = 15 \text{ (rpm)}$$

Vamos a hacer uso de engranajes cilíndricos rectos como observamos en la Figura 5, por lo que vamos a proceder a sus cálculos para la obtención de las características necesarias:



Figura 5. Engranajes rectos

### **Calculo del módulo de los engranajes cilíndricos rectos por el criterio de la flexión: Fórmula de Lewis.**

La fórmula de Lewis se basa en el cálculo de la tensión en la base del diente del engranaje, analizando dicho diente como una viga empotrada sometida a la fuerza entre dientes  $F$ .

$$m \geq 267,62 \cdot \sqrt[2]{\frac{Pot \cdot (i + 1)}{w \cdot a \cdot \psi \cdot \sigma_{adm} \cdot Y}}$$

Primero vamos a hacer un cálculo previo para el diseño del módulo, número de dientes y distancia entre ejes. Tomando un módulo de 12 mm y distancia entre ejes de 200mm:

$$a = \frac{m}{2} \cdot (z_1 + z_2)$$

Sabiendo que:

$$z_2 = 2,5z_1$$

$$200 = \frac{12}{2} \cdot (3,5z_1) \rightarrow z_1 = 9,523$$

Nos da un número de dientes inferior a los de la tabla 3 de la página 133 del libro de diseño, por lo que pasamos a usar una distancia entre ejes de 340mm manteniendo el módulo de 12mm.

$$340 = \frac{12}{2} \cdot (3,5z_1) \rightarrow z_1 = 16,19$$

Redondeando el número de dientes a 16:

$$a = \frac{12}{2} \cdot (3,5 \cdot 16) = 336 \text{ (mm)}$$

Con estos datos previos vamos a calcular el módulo según la fórmula de Lewis:

$$m \geq 267,62 \cdot \sqrt[2]{\frac{Pot \cdot (i + 1)}{w \cdot a \cdot \psi \cdot \sigma_{adm} \cdot Y}}$$

Donde:

- Pot=5,87 CV
- i=2,5
- w=6 rpm
- a=33,6 cm
- $\psi=10$
- $\sigma_{adm}=172 \text{ (MPa)} \cdot (10^6 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2) (\text{m}^2 / 10000 \text{ cm}^2) = 1753,3129 \text{ Kg/cm}^2$
- Y=0,296

El factor de forma de Lewis Y y el factor de guiado  $\psi$  Los sacamos de las tablas 2 y 3:

Número de dientes	Y	Número de dientes	Y
12	0.245	28	0.353
13	0.261	30	0.359
14	0.277	34	0.371
15	0.290	38	0.384
16	0.296	43	0.397
17	0.303	50	0.409
18	0.309	60	0.422
19	0.314	75	0.435
20	0.322	100	0.447
21	0.328	150	0.460
22	0.331	300	0.472
24	0.337	400	0.480
26	0.346	Creballera	0.485

*Tabla 2. Factor de forma de Lewis*

FACTOR DE GUIADO $\Psi$	
Flancos en bruto, poca velocidad y montaje deficiente	5
Calidad y condiciones normales	10
Tallado muy exacto, montaje muy preciso y buen asiento de cojinetes y apoyo rígido de estos	15-20 (casos excepcionales hasta 30)

*Tabla 3. Factor de guiado*

Y el material escogido de la tabla 4:

MATERIAL	TRATAMIENTO TÉRMICO	DUREZA O RESISTENCIA MÍNIMA	TENSION ADMISIBLE $\sigma_{adm}$ (Mpa)	
			Recto, Helicoidal y Doble helicoidal	Cónico
<i>Acero</i>	Normalizado	140 BHN	130-172	76
	Temple y revenido	180 BHN	172-227	96
	Temple y revenido	300 BHN	248-323	131
	Temple y revenido	450 BHN	303-406	172
	Carburizado	55 Rc	375-447	189
	Carburizado	60 Rc	413-482	207
	Temple por inducción o a la llama. Patrón de dureza 1*	54 Rc	310-375	
	Patrón de dureza 1*	54 Rc en la superficie	151	93
	AISI 4140 Nitrurado	53Rc en la superficie y 300 BHN en el núcleo	254-289	138
<i>Fundición gris</i>				
AGMA Grado 20			34	19
AGMA Grado 30		175 BHN	58	32
AGMA Grado 40		200 BHN	89	48
<i>Fundición nodular</i>				
ASTM Grado 60- 40-18	Recocido		103	55
ASTM Grado 80- 55-06			137	76
ASTM Grado 100- 70-03	Normalizado		179	96
ASTM Grado 120- 90-02	Templado y revenido		206	127
<i>Bronce</i>				
AGMA 2e (10%- 12% Tin)		275.8 Mpa	39	21
<i>Aleación bronce - aluminio</i>				
ASTM B-148-52				
Alloy 9C-H.T.		620.1 Mpa	162	83

Tabla 4. Valores de tensión admisible

$$m \geq 267,62 \cdot \sqrt[2]{\frac{5,87 \cdot (2,5 + 1)}{6 \cdot 33,6 \cdot 10 \cdot 1753,3129 \cdot 0,296}} = 1,18 \text{ (cm)}$$

De manera que, redondeando el módulo a 12 mm (tabla 5), el número de dientes es (tabla2):

serie		
I	II	III
1	1.125	3.25
1.25	1.375	3.75
1.5	1.75	6.5
2	2.25	
2.5	2.75	
3	3.5	
4	4.5	
5	5.5	
6	7	
8	9	
10	11	
12	14	
16	18	
20	22	
25	28	
32	26	
40	45	
50		

Tabla 5. Valores normalizados del módulo

$$z_1 = \frac{2 \cdot a}{m \cdot (i + 1)} = \frac{2 \cdot 336}{12 \cdot 3,5} = 16 \text{ (dientes)}$$

**Calculo del módulo de los engranajes cilíndricos rectos a fallos superficiales:  
Ecuación de Hertz.**

Al cálculo del módulo a fallos superficiales se le denomina habitualmente cálculo a duración y desgaste.

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot T_1 \cdot (i + 1)}{k_{adm} \cdot \psi \cdot z_1^2 \cdot i \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}}$$

Donde:

- $T=9163,77\text{Nm}=93412,53 \text{ Kg}\cdot\text{cm}$
- $i=2,5$

- $\psi=10$
- $z=16$  dientes
- $\alpha=20^\circ$

Hay que tener en cuenta el número de vueltas que completa la rueda en la duración prevista:

$$t = \frac{w \cdot h \cdot 60}{10^6}$$

Siendo:

- $w=6$  rpm
- $h=3000$  horas (tabla 6)

APLICACIÓN	DURACION REQUERIDA (EN H)
Electrodomésticos	1000-2000
Motores de avión	1000-4000
Automóviles	1500-5000
Equipo agrícola	3000-6000
Elevadores, ventiladores industriales y transmisiones de usos múltiples	8000-15000
Motores eléctricos y maquinaria industrial en general	20000-30000
Bombas y compresores	40000-60000
Equipo crítico en funcionamiento continuo durante 24h/día	100000-200000

Tabla 6. Duración requerida

$$t = \frac{6 \cdot 3000 \cdot 60}{10^6} = 1,08 \text{ (millones de vueltas)}$$

Para obtener el valor de  $k_{adm}$ :

$$k_{adm} = 6800 \cdot \frac{HB^2}{t^{\frac{1}{3}} \cdot E}$$

Donde (tabla 7):

- $HB=260$
- $E=2100000 \text{ Kg/cm}^2$
- $t=1,08$  millones de vueltas

VALORES DE $K_{ADM}$ [Kg/cm <sup>2</sup> ] PARA UNA DURACIÓN DE SERVICIO DE 5000 HORAS													
Piñón o rueda de		Dureza Brinell DB (kg/mm <sup>2</sup> )	Revoluciones/minuto del piñón o rueda										K min
			10	25	50	100	250	500	750	1000	1500	2500	
Fundición	GG-18	170	32	24	19	15	11	8.8	7.7	-	-	-	3.5
	GG-26	220	60	44	35	28	21	16.5	14.4	13	11.5	-	7
Acero moldeado	GS o St 42	125	35	26	20	16	12	9.5	8.3	7.5	6.6	5.6	4.3
Acero al carbono	St 50	155	53	39	31	25	18	14	12.5	11.5	10	8.5	5.3
	St 60	180	73	53	42	34	25	20	17	16	14	11.0	6.7
	St 70	210	98	72	57	45	33	27	23	21	18.5	15.5	9.0
Acero aleado	Acero al Mn 80-95 kg/mm <sup>2</sup>	230	-	87	69	55	41	32	28	26	22	19	22
	Acero al Mn 90-105 kg/mm <sup>2</sup>	260	-	-	89	70	52	41	36	33	28	24	30
	Acero templado	450	-	-	-	210	155	120	105	95	83	70	60
	Acero cement. templado	600	-	-	-	370	270	215	190	170	150	125	80

Tabla 7. Valores de  $K_{adm}$

$$k_{adm} = 6800 \cdot \frac{260^2}{1,08^3 \cdot 2100000} = 213,351 \left( \frac{Kg}{cm^2} \right)$$

Sustituimos en la ecuación de Hertz:

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 93412,53 \cdot (2,5 + 1)}{213,351 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 2,5 \cdot \sin 20 \cdot \cos 20}} = 1,14 \text{ (cm)}$$

Por lo que el módulo de 12 mm es correcto.

Para acabar, sabiendo que:

$$a = R_1 + R_2$$

Y:

$$i = \frac{R_1}{R_2}$$



Los radios finales serán:

$$R_1 = 240 \text{ (mm)}$$

$$R_2 = 96 \text{ (mm)}$$

Conociendo estos radios, para calcular el peso del engranaje haremos uso del módulo y del factor de forma:

$$b = \Psi \cdot m$$

$$b = 10 \cdot 12 = 120 \text{ mm}$$

Procedemos a calcular el peso del engranaje conociendo sus especificaciones y dimensiones, sabiendo que:

- $b = 12 \text{ cm}$
- $R = 24 \text{ cm}$
- $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$

$$Masa = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \rho}{1000} = \frac{\pi \cdot 24^2 \cdot 12 \cdot 7,85}{1000} = 170,46 \text{ (kg)} \rightarrow 170,46 \cdot 9,81 = 1672,21 \text{ N}$$

Despreciaremos el peso de engranaje el cual emplearemos únicamente en el apartado 3.4.4 para el estudio del eje en base a vibraciones.

### **Fuerzas en el engranaje**

En este caso el dato principal es el momento torsor transmitido por el eje principal.

$$M_T = 9163,77 \text{ (Nm)}$$

La distancia entre ejes es de 336 mm. Teniendo una relación de  $i=2,5$  la rueda grande tiene un radio de 240 mm y la pequeña uno de 96 mm lo que genera una fuerza igual a:

$$F_n = \frac{M_T}{r} = \frac{9163,77}{0,240} = 38182,375 \text{ (N)}$$

Teniendo en cuenta la inclinación de  $20^\circ$  de los dientes de nuestros engranajes separamos esta fuerza total en sus componentes tangenciales y radiales como observamos en la Figura 6 obteniendo:

$$F_T = F_n * \cos \alpha = 38182,375 * \cos 20^\circ = 35879,69 \text{ (N)}$$

$$F_R = F_n * \sin \alpha = 38182,375 * \sin 20^\circ = 13059,14 \text{ (N)}$$

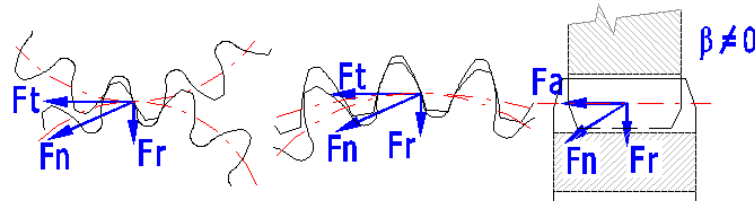


Figura 6. Fuerzas en engranajes

### **Reacciones en los apoyos y momentos flectores**

Tenemos tres reacciones con sus respectivos momentos flectores actuando en nuestro eje, el generado por la fuerza vertical debido al rotor y los generado por el engrane entre el eje de baja velocidad y  $1^\circ$  eje multiplicador en sentido tangencial y radial. Para calcular cual es la disposición idónea de los engranajes vamos a estudiar los 4 modos distintos y obtener los menores esfuerzos.

#### **1ª Opción: engranaje a la izquierda del eje**

Con esta disposición tenemos la fuerza radial en sentido positivo horizontal y la tangencial en sentido vertical en sentido negativo de Y pues el eje gira en sentido horario. Primero vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje:

#### **Plano XY**

$$\sum M_{By} = 0$$
$$-8937,69 * 0,5 + 35879,69 * 0,7 - F_{Cy} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cy} = 41293,87 \text{ (N)}$$

$$\sum F_Y = 0$$
$$8937,69 + 35879,69 - 41293,87 - F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = 3523,5 \text{ (N)}$$

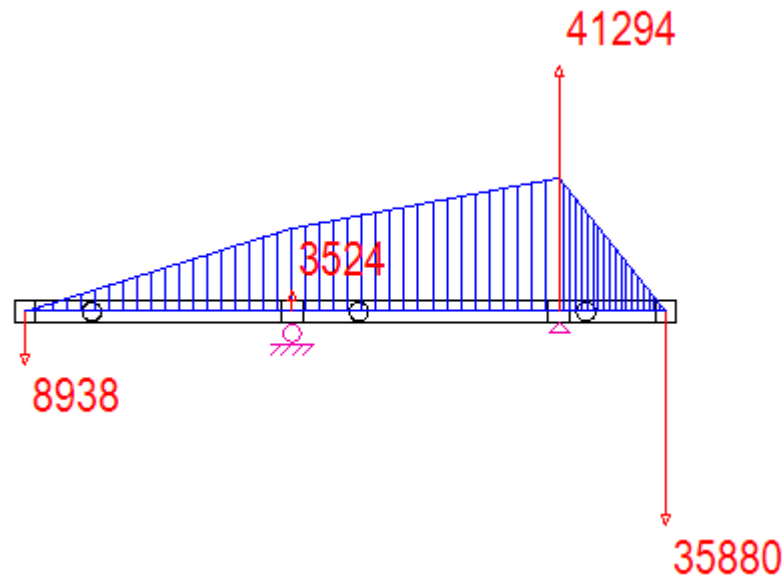


Figura 7. 2º opción XY

Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$

$$13059,14 * 0,7 - F_{Cz} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cz} = 18282,79 \text{ (N)}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{Bz} + 13059,14 - 18282,79 = 0 \rightarrow F_{Bz} = 5223,65 \text{ (N)}$$

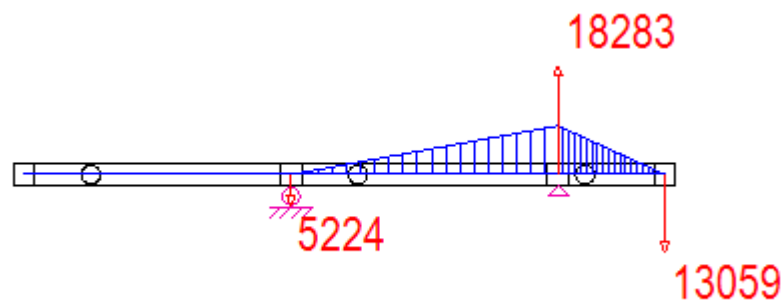


Figura 8. 2º opción XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 8937,69 * 0.5 = 4468,845 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cy} = 35879,69 * 0.2 = 7175,938 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cz} = 13059,14 * 0,2 = 2611,828 \text{ (Nm)}$$

En la tabla 8 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	3523,5 N	41293,87 N
Fz	5223,65 N	-18282,79 N
Ft	6300,9 N	45160,2 N
My	4468,84 Nm	7175,93 Nm
Mz	0	2611,82 Nm
Mt	4468,84 Nm	7636,47 Nm

Tabla 8. Reacciones y momentos Opción 1

## 2ª Opción: engranaje a la derecha del eje

Con esta disposición tenemos la fuerza radial en sentido horizontal negativa y la tangencial en sentido vertical en sentido positivo de Y pues el eje gira en sentido horario. Primero vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje:

### Plano XY

$$\sum M_{By} = 0$$
$$8937,69 * 0,5 + 35879,69 * 0,7 - F_{Cy} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cy} = -59169,25 \text{ (N)}$$

$$\sum F_Y = 0$$
$$8937,69 + 59169,25 - 35879,69 - F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = 32227,25 \text{ (N)}$$

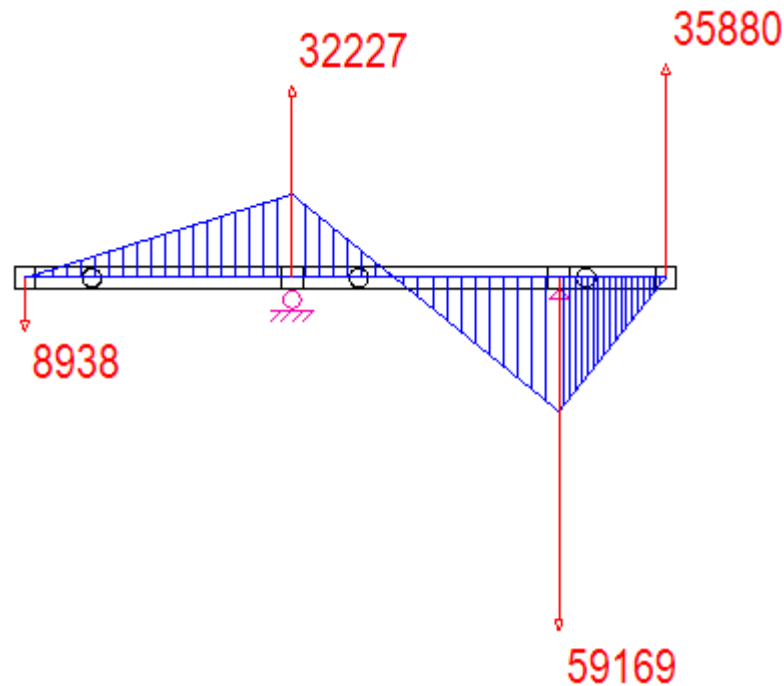


Figura 9. 2ª opción XY

Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$

$$13059,14 * 0,7 - F_{Cz} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cz} = 18282,79 \text{ (N)}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{Bz} + 13059,14 - 18282,79 = 0 \rightarrow F_{Bz} = 5223,65 \text{ (N)}$$

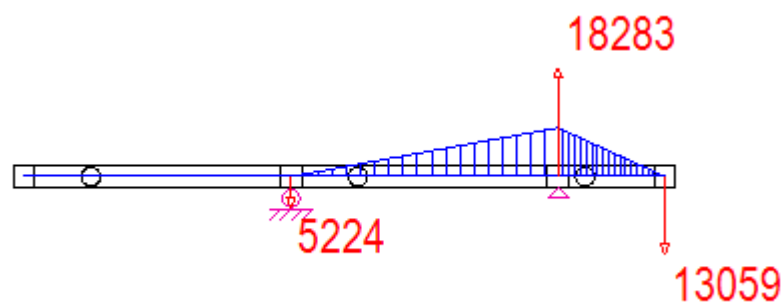


Figura 10. 2ª opción XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 8937,69 * 0.5 = 4468,845 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cy} = 35879,69 * 0.2 = 7175,938 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cz} = 13059,14 * 0,2 = 2611,828 \text{ (Nm)}$$

En la tabla 9 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	32227,25 N	-59169,25 N
Fz	5223,65 N	-18282,79 N
Ft	32647,85 N	61929,48 N
My	4468,84 Nm	7175,93 Nm
Mz	0	2611,82 Nm
Mt	4468,84 Nm	7636,47 Nm

Tabla 9. Reacciones y momentos Opción 2

### 3ª Opción: engranaje debajo del eje

Con esta disposición tenemos la fuerza tangencial en sentido horizontal y la radial en sentido vertical en sentido positivo de Y. Primero vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje:

#### Plano XY

$$\sum M_{By} = 0$$
$$8937,69 * 0.5 + 13059,14 * 0,7 - F_{Cy} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cy} = 27220,48 \text{ (N)}$$

$$\sum F_Y = 0$$
$$8937,69 + 27220,48 - 13059,14 - F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = 23099,03 \text{ (N)}$$

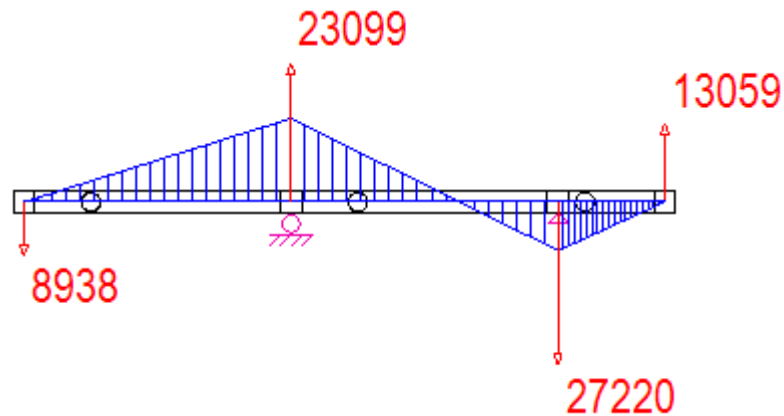


Figura 11. 3ª opción XY

Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$

$$35879,69 * 0,7 - F_{Cz} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cz} = 50231,56 \text{ (N)}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{Bz} - 50231,56 + 35879,69 = 0 \rightarrow F_{Bz} = 14351,87 \text{ (N)}$$

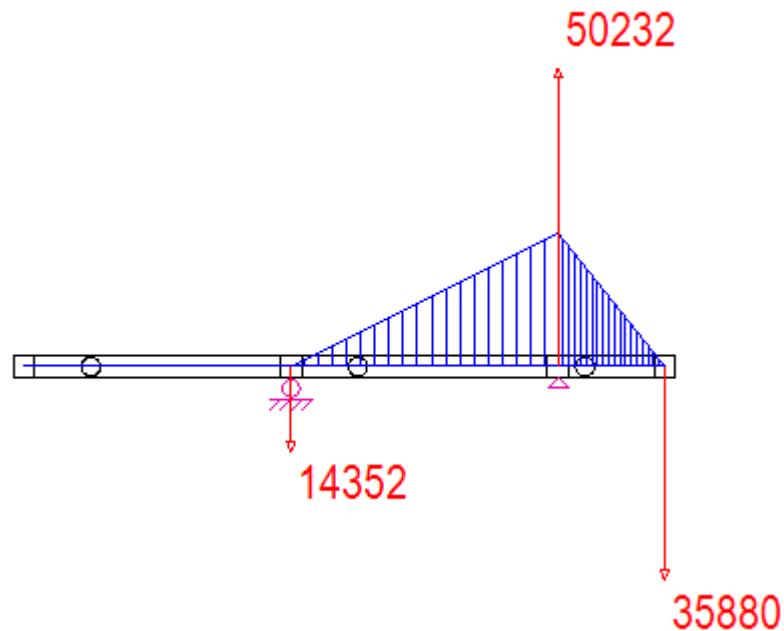


Figura 12. 3ª opción XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 8937,69 * 0.5 = 4468,845 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cy} = 13059,14 * 0,2 = 2611,828 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cz} = 35879,69 * 0.2 = 7175,938 \text{ (Nm)}$$

En la tabla 10 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	23099,03 N	-27220,48 N
Fz	14351,87N	-50231,56 N
Ft	27194,51 N	57132,86 N
My	4468,84 Nm	2611,82 Nm
Mz	0	7175,93 Nm
Mt	4468,84 Nm	7636,47 Nm

Tabla 10. Reacciones y momentos Opción 3

#### 4ª Opción: engranaje encima del eje

Con esta disposición tenemos la fuerza tangencial en sentido horizontal y la radial en sentido vertical en sentido negativo de Y. Primero vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje:

##### Plano XY

$$\sum M_{By} = 0$$

$$-8937,69 * 0,5 + 13059,14 * 0,7 - F_{Cy} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cy} = 9345,10 \text{ (N)}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-8937,69 + 9345,06 - 13059,14 + F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = 12651,72 \text{ (N)}$$

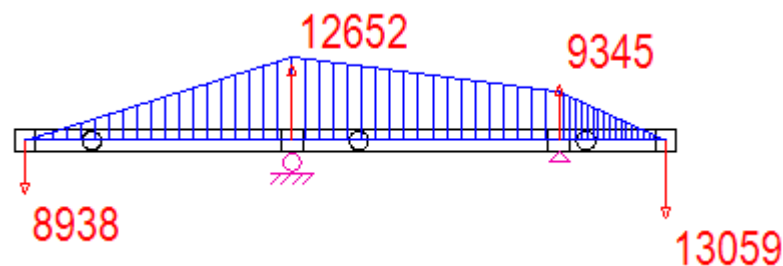


Figura 13. 4ª opción XY



Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$

$$35879,69 * 0,7 - F_{Cz} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cz} = 50231,56 (N)$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{Bz} - 50231,56 + 35879,69 = 0 \rightarrow F_{Bz} = 14351,87 (N)$$

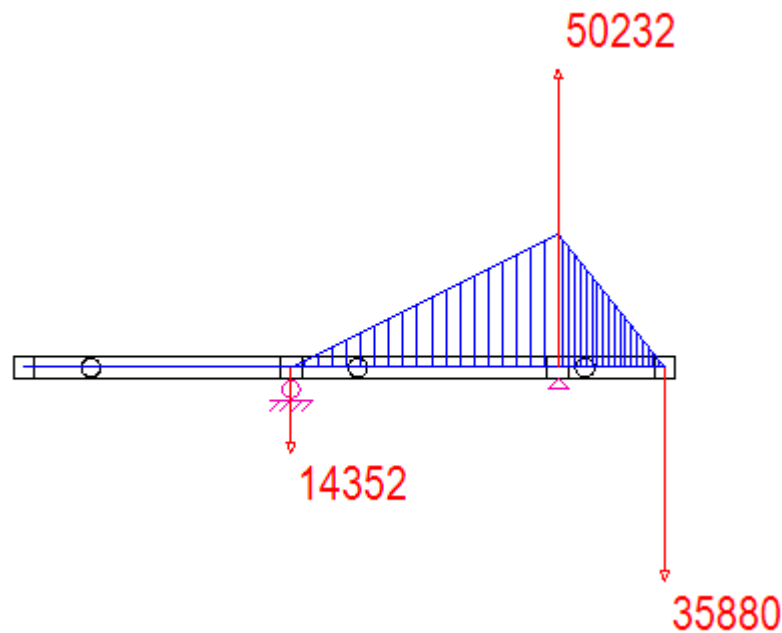


Figura 14. 4ª opción XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 8937,69 * 0,5 = 4468,845 (Nm)$$

$$M_{Cy} = 13059,14 * 0,2 = 2611,828 (Nm)$$

$$M_{Cz} = 35879,69 * 0,2 = 7175,938 (Nm)$$

En la tabla 11 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	12651,72 N	9345,10 N
Fz	14351,87N	-50231,56 N

Ft	19132,23 N	51093,45 N
My	4468,84 Nm	2611,82 Nm
Mz	0	7175,93 Nm
Mt	4468,84 Nm	7636,47 Nm

Tabla 11. Reacciones y momentos Opción 4

Tras los resultados elegimos la 1ª opción como la más favorable en la que el engranaje se sitúa a la izquierda del eje, pues las reacciones totales son las de menor magnitud puesto que en todas las posibles configuraciones los momentos flectores son idénticos.

A continuación adjunto el resumen de los datos más relevantes que observamos en la tabla 12:

	Apoyo B	Apoyo C
Ft	6300,9 N	45160,2 N
My	4468,84 Nm	7175,93 Nm
Mz	0	2611,82 Nm
Mt	4468,84 Nm	7636,47 Nm

Tabla 12. Fuerzas y momentos actuantes

### **3.4.2. Cálculo del eje según las tensiones**

El eje de entrada ha de ser capaz de soportar las cargas citadas anteriormente citadas, para lo cual haremos uso del cálculo de ejes mediante el código ASME.

#### **Cálculo de ejes mediante el código ASME**

La expresión del código ASME para el cálculo a fatiga es la siguiente:

$$\tau_{max} = \frac{r}{J} \sqrt{(C_m \cdot M)^2 + (C_t \cdot T)^2} < \tau_{yp}$$

El código ASME toma los valores de los momentos M y T y los mayorará mediante unos coeficientes  $C_m$  y  $C_t$  de la tabla 13:

	$C_m$	$C_t$
EJES FIJOS:		
Carga aplicada gradualmente (constante)	1.0	1.0
Carga aplicada repentinamente	1.5-2.2	1.5-2.2
EJES GIRATORIOS:		
Carga aplicada gradualmente (constante)	1.5	1.0
Carga aplicada repentinamente, sólo pequeños impactos	1.5-2.0	1.0-1.5
Carga aplicada repentinamente, grandes impactos	2.0-3.0	1.5-3.0

*Tabla 13. Coeficientes de mayoración ASME.*

En nuestro caso nos hallamos ante un caso en el que la carga es aplicada gradualmente sin impactos por lo que nuestros coeficientes de mayoración serán:

$$C_m = 1,5$$

$$C_t = 1,0$$

### **Material escogido**

Emplearemos un acero AISI / SAE 1045 (tabla 14) al tratarse de un acero de mediano contenido de carbono utilizado ampliamente en elementos estructurales que requieran mediana resistencia mecánica y tenacidad a bajo costo. Posee baja soldabilidad, buena maquinabilidad y excelente forjabilidad. Es utilizado para todo tipo de elementos que requieren dureza y tenacidad como ejes, manivelas, chavetas, pernos, tuercas, cadenas, engranajes de baja velocidad, espárragos, acoplamientos, bielas, pasadores, cigüeñales y piezas estampadas. Puede ser sometido a temple y revenido. Haremos uso del catálogo de Aceros Otero, pág. 134.

Composición Química				
% C	% Mn	% Si	% P	% S
0,43 - 0,50	0,60 - 0,90	0,15 - 0,35	≤ 0,04	≤ 0,05

Propiedades Mecánicas Acero Laminado (Valores típicos)			
Dureza (HB)	Esfuerzo Fluencia (min.) (Kg / mm <sup>2</sup> )	Esfuerzo Tracción (min.) (Kg / mm <sup>2</sup> )	Elongación (min.)%
170 - 190	40	63 - 73	15

Tabla 14. Características del material AISI 1045.

La característica mecánica que más nos ocupan es el esfuerzo a fluencia, que en este caso es:

$$\sigma_{yp} = 40 \left( \frac{kg}{mm^2} \right) = 392,4 \text{ (MPa)}$$

### Coeficiente de seguridad (CS)

El coeficiente de seguridad parcial para materiales se obtiene del código IEC-61400-02:2006 pág. 89. En dicho código (tabla 15) se obtienen los coeficientes según la resistencia a la fatiga o el límite de rotura conociendo la caracterización total con un valor de 1,25.

Table 6 – Partial safety factors for materials

Condition	Full characterisation	Minimal characterisation
Fatigue strength	1,25 <sup>a)</sup>	10,0 <sup>b)</sup>
Ultimate strength	1,1	3,0

<sup>a)</sup> Factor is applied to the stress ranges as shown in equation (48).  
<sup>b)</sup> Factor is applied to the measured ultimate strength of the material.

Tabla 15. Coeficiente de seguridad según normativa.

### Dimensionamiento a fatiga

Se hará uso del catálogo de Aceros Otero para elegir un perfil pues dispone de un rango amplio de medidas del cual elegiremos el tamaño adecuado según las necesidades de nuestro diseño.

Primero se aplica el coeficiente de seguridad a fatiga de la tabla 9 para poder calcular mediante el código ASME el diámetro mínimo necesario para soportar las cargas.

$$\sigma_{admisible} = \frac{\sigma_{yp}}{CS} = \frac{392,4}{1,25} = 313,92 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{admisible} = \frac{\frac{\sigma_{yp}}{2}}{CS} = \frac{\tau_{yp}}{2} = \frac{\frac{392,4}{2}}{1,25} = 156,96 \text{ (MPa)}$$

Mediante una tabla Excel se calcula el  $\emptyset$  mínimo mediante la expresión del código ASME para el cálculo a fatiga:

$$\tau_{max} = \frac{r}{J} \sqrt{(C_m \cdot M)^2 + (C_t \cdot T)^2} < \tau_{yp}$$

$$\tau_{max} = \frac{r}{\frac{\pi}{2} \cdot r^4} \cdot \sqrt{(1,5 \cdot 7636,47)^2 + (1 \cdot 9163,77)^2} < 156,96 \text{ (MPa)}$$

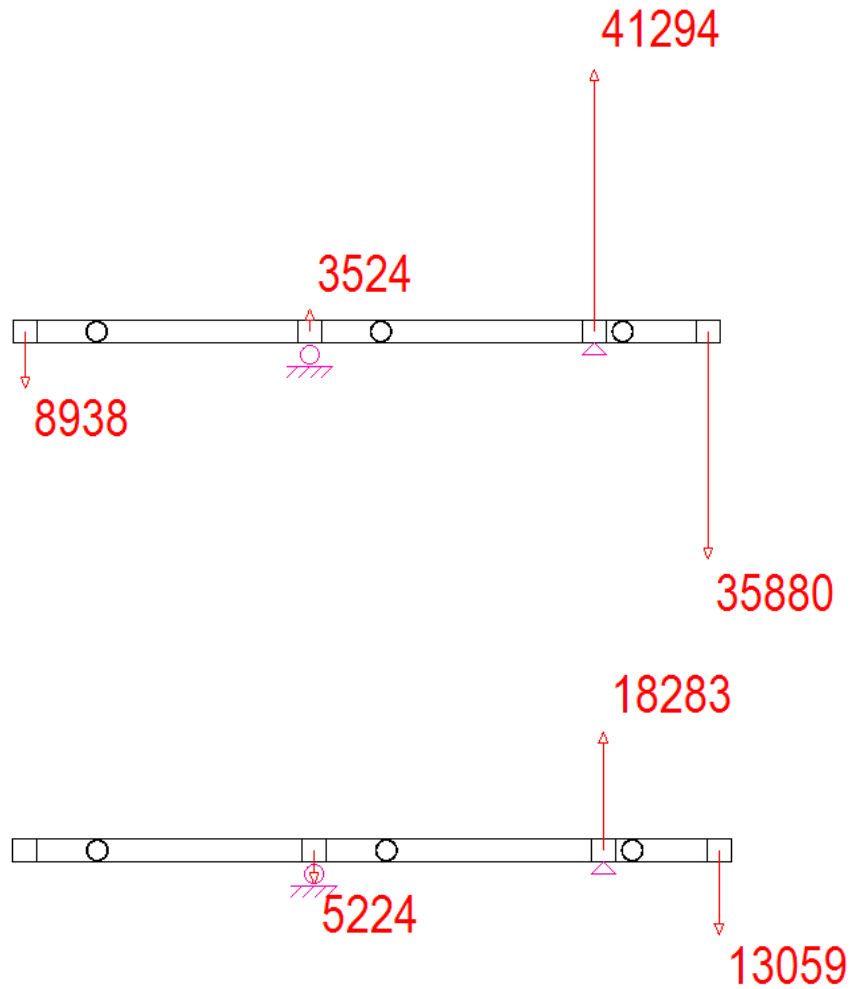
Con un  $\emptyset$  de 78,08 mm (radio de 39,04 mm) conseguimos el espesor mínimo que debe tener nuestro eje.

$$\tau_{max} = \frac{39,04}{\frac{\pi}{2} \cdot 39,04^4} \cdot \sqrt{(1,5 \cdot 7636,47)^2 + (1 \cdot 9163,77)^2} = 156,94 < 156,96 \text{ (MPa)}$$

Suponemos que el suministrador entregará materiales mínimo de mm en mm, siendo lo más normal moverse entre 5 o 10 mm de diferencia entre cada redondo, por lo que redondeando nos movemos en un eje de 80 mm.

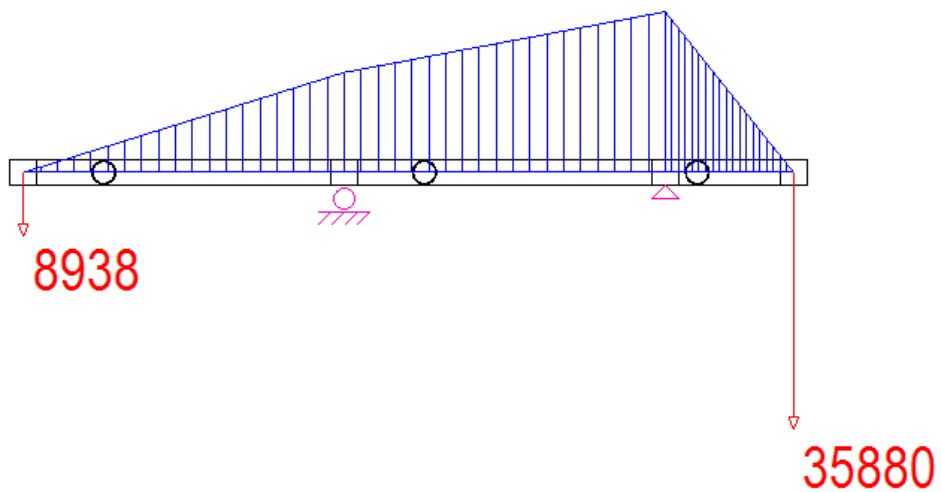
### **3.4.3. Dimensionamiento según deflexiones**

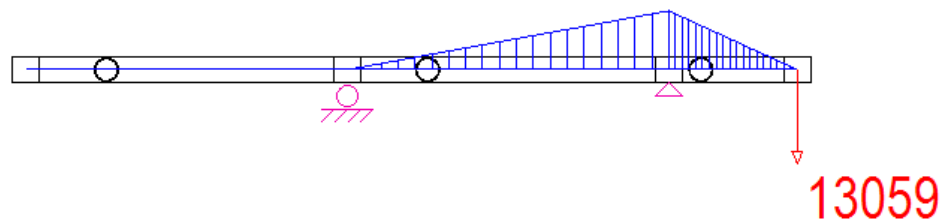
Las fuerzas que actúan en nuestro eje son el peso del rotor, la fuerza del viento y las reacciones del engranaje. Se pueden observar en las figuras 15.



Figuras 15. Fuerzas sobre el eje de baja velocidad

En las figuras 16 podremos ver el diagrama de los momentos flectores.





Figuras 16. Diagrama de momentos flectores

Como tenemos 3 cargas distintas vamos a hacer uso de la teoría de superposición aplicando el teorema de Mohr.

### 1ª deformación: peso del rotor

En primer lugar estudiaremos la deformada a causa del peso del rotor dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la Figura 17.



Figura 17. Deformada 1ª opción

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB}$$

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3$$

Primero calculamos la deformación en CB y el giro de B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 4468,845 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500(mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 500(mm) \right) \right] = \frac{3,724 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{3,724 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{7,448 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta BC y giro en C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 4468,845 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500(mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 500(mm) \right) \right] = \frac{1,862 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{1,862 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{3,724 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo A:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 4468,845 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500(mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 500(mm) \right) \right] = \frac{3,724 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{7,448 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 500 = \frac{3,724 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB} = \frac{3,724 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z} + \frac{3,724 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z} = \frac{7,448 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{3,724 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{7,448 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

## **2ª deformación: reacción tangencial del engranaje**

En segundo lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción tangencial del engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la Figura 18.



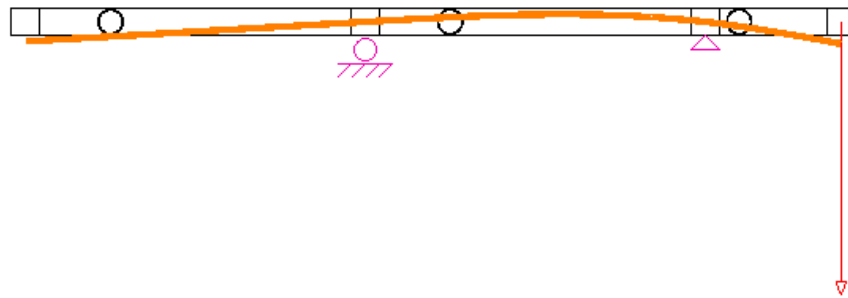


Figura 18. Deformada 2ª opción

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\delta_{D'D'} = \theta_C \cdot L_3$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D'D'} + \delta_{DC}$$

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1$$

Primero calculamos la deformación en BC y el giro de C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 7175,938 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 500 (mm) \right) \right] = \frac{5,9799 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{5,9799 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{1,1959 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

Delta CB y giro en B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 7175,938 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 500 (mm) \right) \right] = \frac{2,9899 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{2,9899 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{5,9799 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo D:

$$\delta_{DC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 7175,938 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 200(mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 200(mm) \right) \right] = \frac{9,5679 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{1,1959 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{2,3918 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC} = \frac{9,5679 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} + \frac{2,3918 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z} = \frac{3,3485 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en A:

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{5,9799 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 500 = \frac{2,9899 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

### 3ª deformación: Reacción radial del engranaje

En tercer lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción radial del engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la Figura 19.

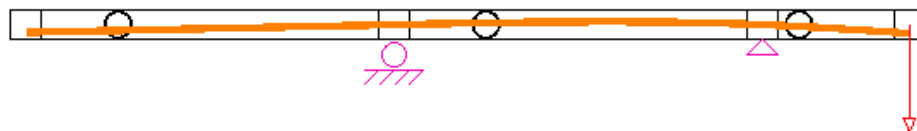


Figura 19. Deformada 3ª opción

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC}$$

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1$$

Primero calculamos la deformación en BC y el giro de C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2611,82 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 500 (mm) \right) \right] = \frac{2,176 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{2,176 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{4,353 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta CB y giro en B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2611,82 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 500 (mm) \right) \right] = \frac{1,088 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{1,088 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{2,176 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo D:

$$\delta_{DC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2611,82 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 200 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 200 (mm) \right) \right] = \frac{3,4824 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{4,353 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{8,706 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC} = \frac{8,706 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} + \frac{3,4824 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} = \frac{31,2188 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en A:

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{2,176 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 500 = \frac{1,088 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

#### **4ª deformación: peso del engranaje**

Por último estudiaremos la deformada a causa del peso del engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la Figura 20 para el diseño del eje en base a vibraciones en el apartado 3.4.4.



Figura 20. Deformada 4ª opción

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC}$$

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1$$

Primero calculamos la deformación en BC y el giro de C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 334,442 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 500 (mm) \right) \right] = \frac{2,8703 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{2,8703 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{5,7407 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z}$$

Delta CB y giro en B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 334,442 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 500 (mm) \right) \right] = \frac{1,4351 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{1,4351 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{2,8703 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo D:

$$\delta_{DC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 334,442 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 200(mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 200(mm) \right) \right] = \frac{4,5925 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{5,7407 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{1,148 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC} = \frac{1,148 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} + \frac{4,5925 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} = \frac{1,6073 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en A:

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{2,8703 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z} \cdot 500 = \frac{1,4351 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

Vamos a proceder a juntar el ángulo de giro de las primeras 2 deformaciones y hacer una suma vectorial con la reacción radial del engranaje:

$$\theta_B = \sqrt{\left( \frac{7,448 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} + \frac{5,9799 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \right)^2 + \frac{2,176 \cdot 10^{82}}{E \cdot I_Z}}$$

$$\theta_C = \sqrt{\left( \frac{3,724 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} + \frac{1,1959 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} \right)^2 + \left( \frac{4,353 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \right)^2}$$

Teniendo en cuenta que el módulo de Young:

$$E = 210 (GPa) = 210000 (MPa)$$

Y que el momento de inercia de una barra circular es:

$$I_Z = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 39,04^4 = 3,648 \cdot 10^6 (mm)$$

Los giros son:

$$\theta_B = \sqrt{\left( \frac{7,448 \cdot 10^8}{210000 \cdot 3,648 \cdot 10^6} + \frac{5,9799 \cdot 10^8}{210000 \cdot 3,648 \cdot 10^6} \right)^2 + \left( \frac{2,176 \cdot 10^8}{210000 \cdot 3,648 \cdot 10^6} \right)^2}$$

$$= 0,00117 (rad)$$

$$\theta_c = \sqrt{\left(\frac{3,724 \cdot 10^8}{210000 \cdot 3,648 \cdot 10^6} + \frac{1,1959 \cdot 10^9}{210000 \cdot 3,648 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{4,353 \cdot 10^8}{210000 \cdot 3,648 \cdot 10^6}\right)^2}$$

$$= 0,00211(\text{rad})$$

Como usaremos rodamientos de bolas de contacto angular son medidas aceptables (tabla 16):

	PENDIENTE MÁXIMA ADMISIBLE ( $\theta_{\max}$ )
Rodamiento de rodillos cónicos	0.0005-0.0012 rad
Rodamiento de rodillos cilíndricos	0.0008-0.0012 rad
Rodamiento de bolas de ranura profunda	0.001-0.003 rad
Rodamiento de bolas de contacto angular	0.026-0.052 rad
Engranaje cilíndrico recto	0.026-0.052 rad

Tabla 16. Pendiente máxima admisible

### 3.4.4. Diseño del eje en base a vibraciones

Además de las deflexiones estáticas del apartado anterior, también hay que comprobar que las vibraciones del eje no sean excesivas. El eje diseñado debe cumplir la siguiente expresión:

$$w_{\text{eje}} \ll w_{\text{crítica}} = \sqrt{\frac{g \cdot \sum(w_i \cdot y_i)}{\sum(w_i \cdot y_i^2)}}$$

En nuestro eje tenemos dos masas, el rotor (911,08 kg) y el engranaje (170,46 kg). Del apartado anterior 3.4.3 obtenemos las deformaciones máximas:

Deformación en A:

$$\delta_{A'A} = \frac{7,448 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z} + \frac{1,4351 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_z} = \frac{7,5915 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z}$$

Deformación en D:

$$\delta_{D'D} = \frac{7.448 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_z} + \frac{1,6073 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_z} = \frac{9,0553 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_z}$$

Teniendo en cuenta que el módulo de Young:

$$E = 210 \text{ (GPa)} = 210000 \text{ (MPa)}$$

Y que el momento de inercia de una barra circular es:

$$I_z = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 78,08^4 = 8,8382 \cdot 10^7 \text{ (mm)}$$

Tenemos que la flecha en A es:

$$\delta_{A'A} = \frac{7,5915 \cdot 10^{11}}{210000 \cdot 8,8382 \cdot 10^7} = 0.04 \text{ (mm)}$$

Y la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \frac{9,0553 \cdot 10^{10}}{210000 \cdot 8,8382 \cdot 10^7} = 0.0048 \text{ (mm)}$$

Por lo que:

$$w_{eje} \ll w_{crítica} = \sqrt{\frac{9.81 \cdot ((0.04 \cdot 911,08) + (0.0048 \cdot 170,46))}{(0.04^2 \cdot 911,08) + (0.0048^2 \cdot 170,46)}} = 15,813 \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$w_{crítica} = 151,01 \text{ (rpm)} \gg w_{eje} = 6 \text{ (rpm)}$$

Siendo la velocidad crítica 25 veces superior no supone un problema, pues no alcanzará esa velocidad.

### **3.4.5. Rodamientos eje de baja velocidad**

Los rodamientos son los elementos necesarios para el apoyo del eje y que este pueda girar libremente con la menor fricción y pérdidas posibles. En este caso el diseño consta de dos apoyos (B y C) en los que emplearemos rodamientos

esféricos, en el cual el rodamiento del punto C absorberá las cargas axiales. En la Figura 21 se puede observar el diseño con sus apoyos.

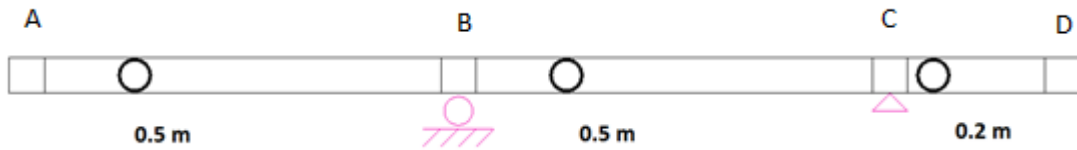


Figura 21. Rodamientos eje baja velocidad

Las reacciones en los apoyos las obtuvimos en el apartado 3.4.1 en el que elegimos la opción 2 como la más favorable más la acción del viento en el rotor.

En la tabla 17 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	3523,5 N	41293,87 N
Fz	5223,65 N	-18282,79 N
Ft	6300,9 N	45160,2 N
Fa	0 N	1727,33 N

Tabla 17. Reacciones y momentos Opción 2

En la Figura 22 podemos ver las reacciones en los apoyos de nuestro eje:

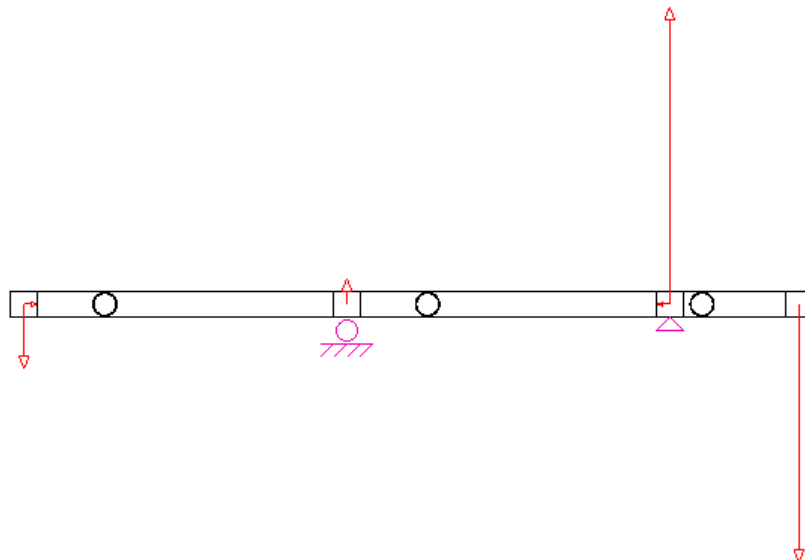


Figura 22. Reacciones en los rodamientos

Elegimos rodamientos de bolas para ambos apoyos por considerar que se adaptan a nuestras necesidades perfectamente, pues a un régimen bajo de revoluciones y



unas cargas aceptables cumplen sobradamente con su cometido como podemos observar en las tablas 18 y 19.

Characteristic	Tapered Roller Bearing	Thrust Tapered Roller Bearing	Cylindrical Roller Bearing	Thrust Cylindrical Roller Bearing	Spherical Roller Bearing	Thrust Spherical Roller Bearing	Ball Bearing	Thrust Ball Bearing	Needle Roller Bearing	Thrust Needle Roller Bearing
Pure Radial Load	Excellent	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Good	Poor	Excellent	Unsuitable
Pure Axial Load	Good	Excellent	Unsuitable	Good	Fair	Excellent	Fair	Excellent	Unsuitable	Excellent
Combined Load	Excellent	Fair	Fair	Unsuitable	Excellent	Fair	Good	Poor	Unsuitable	Unsuitable
Moment Load	Fair	Poor	Unsuitable	Unsuitable	Unsuitable	Unsuitable	Good	Poor	Fair	Unsuitable
High Stiffness	Excellent	Excellent	Good	Excellent	Good	Good	Fair	Good	Good	Excellent
Quiet Running	Fair	Fair	Good	Poor	Fair	Poor	Excellent	Good	Good	Fair
Low Friction	Fair	Fair	Good	Poor	Fair	Fair	Excellent	Excellent	Good	Good
Misalignment	Poor	Poor	Poor	Unsuitable	Excellent	Excellent	Good	Poor	Poor	Poor
Locating Position (Fixed)	Excellent	Good	Fair	Fair	Good	Good	Good	Excellent	Unsuitable	Excellent
Non-Locating Position (Floating)	Good	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Fair	Unsuitable	Good	Unsuitable	Good	Unsuitable
Speed	Good	Good	Good	Poor	Fair	Fair	Excellent	Excellent	Good	Poor

Tabla 18. Especificaciones de rodamientos

Characteristic	Ball Bearing
Pure Radial Load	Good
Pure Axial Load	Fair
Combined Load	Good
Moment Load	Good
High Stiffness	Fair
Quiet Running	Excellent
Low Friction	Excellent
Misalignment	Good
Locating Position (Fixed)	Good
Non-Locating Position (Floating)	Good
Speed	Excellent

Tabla 19. Rodamientos esféricos

Según el catálogo de rodamientos SKF:

**“Vida nominal requerida**

Cuando se determina el tamaño del rodamiento, compare la vida nominal SKF calculada con la vida especificada de la aplicación, si se encuentra disponible. Esto suele depender del tipo de máquina y de los requisitos respecto de la duración del servicio y la confiabilidad operativa. En el caso de falta de experiencia previa, se pueden utilizar los valores orientativos enumerados en la tabla 9 y la tabla 10.”

Como apreciamos en la tabla 20 escogemos una vida nominal media de  $L_{10}$  65.000 horas para maquinaria para energía eólica.

Para calcular la vida del rodamiento pasaremos las horas a las vueltas que dará a lo largo de su vida útil:

$$L_{10} = T \cdot w \cdot \frac{60 \text{ (min)}}{1 \text{ (h)}}$$

Donde:

- $L_{10}$ = Millones de revoluciones
- $T$ = 65000 horas
- $W$ = 6 rpm

$$L_{10} = 65000 \text{ (h)} \cdot 6 \text{ (rpm)} \cdot \frac{60 \text{ (min)}}{1 \text{ (h)}} = 23,4 \cdot 10^6 \text{ revoluciones}$$

**Tabla 9**

Valores orientativos de la vida útil especificada de los diferentes tipos de máquinas	
Tipo de máquina	Vida útil especificada Horas de funcionamiento
Electrodomésticos, máquinas agrícolas, instrumentos, equipos técnicos de uso médico	300 ... 3 000
Máquinas utilizadas intermitentemente o durante breves periodos: herramientas eléctricas portátiles, dispositivos de elevación en talleres, máquinas y equipos para la construcción	3 000 ... 8 000
Máquinas utilizadas intermitentemente o durante breves periodos donde se requiere una alta confiabilidad: ascensores (elevadores), grúas para productos embalados o eslingas para tambores, etc.	8 000 ... 12 000
Máquinas para 8 horas de trabajo diario, no siempre utilizadas al máximo: transmisiones por engranajes de uso general, motores eléctricos para uso industrial, trituradoras giratorias	10 000 ... 25 000
Máquinas para 8 horas de trabajo diario utilizando plenamente sus capacidades: herramientas mecánicas, máquinas para carpintería, máquinas para la industria de la ingeniería, grúas para materiales a granel, ventiladores, cintas transportadoras, equipos de impresión, separadores y centrifugadoras	20 000 ... 30 000
Máquinas para 24 horas de trabajo continuo: unidades de engranajes para laminadores, maquinaria eléctrica de tamaño medio, compresores, tornos de extracción para minas, bombas, maquinaria textil	40 000 ... 50 000
Maquinaria para energía eólica, incluidos los rodamientos del eje principal, de orientación, de la caja de engranajes de cambio de paso, del generador	<b>30 000 ... 100 000</b>
Maquinaria para abastecimiento de agua, hornos giratorios, máquinas de trenzado de cables, maquinaria de propulsión para buques de alta mar	60 000 ... 100 000
Máquinas eléctricas de gran tamaño, plantas de generación de energía, bombas para minas, ventiladores para minas, rodamientos para ejes en túnel para buques de alta mar	> 100 000

Tabla 20. Vida nominal

En el catálogo TIMKEN en la página A29 exponen que los rodamientos que estén bajo una carga axial y radial en la que la relación entre ellas sea menor a 0,11 o 0,17

(dependiendo del rodamiento seleccionado) se considerará la carga dinámica equivalente igual a la carga radial aplicada, despreciando la axial, tal y como podemos apreciar en la tabla 21.

If, in addition to the radial load, an axial load  $F_a$  acts on the bearing, this axial load is taken into consideration when calculating the life of a bearing (with  $F_a \leq F_{az}$ ;  $F_{az}$  is the allowable axial load).

Dimension Series	Load ratio	Equivalent Dynamic Load
10.. 2..E, 3..E	$F_a/F_r \leq 0.11$	$P = F_r$
	$F_a/F_r > 0.11$	$P = 0.93 \cdot F_r + 0.69 \cdot F_a$
22..E, 23..E	$F_a/F_r \leq 0.17$	$P = F_r$
	$F_a/F_r > 0.17$	$P = 0.93 \cdot F_r + 0.45 \cdot F_a$

Tabla 21. Carga dinámica equivalente.

En este caso el apoyo C soportará la carga axial, por lo que:

$$\frac{F_a}{f_r} \leq 0,11 \rightarrow \frac{1727,33}{45160,20} = 0.03 \ll 0,11$$

De este modo para el apoyo B y C las capacidades dinámicas que tienen que soportar son:

$$C = F \cdot (L_{10})^{\frac{1}{a}}$$

Como usamos rodamientos esféricos usaremos el valor de  $a=3$  (página 213 del libro de diseño) y un factor de mayoración para la carga de 1,2 (página 214 del libro de diseño) al tratarse de maquinaria sin impactos:

$$C_B = 1,2 \cdot 6300,9 \cdot 23,4^{\frac{1}{3}} = 21626,64 \text{ (N)}$$

$$C_C = 1,2 \cdot 45160,2 \cdot 23,4^{\frac{1}{3}} = 155003,81 \text{ (N)}$$

Del catálogo de Timken escogemos los siguientes rodamientos:

- Rodamiento B: 9316K de 80mm de  $\varnothing$  interno con una carga dinámica máxima de 28500 N.
- Rodamiento C: 316W de 80mm de  $\varnothing$  interno con una carga dinámica máxima de 195000N.

### 3.4.6. Anillos de retención

Los anillos de retención son elementos auxiliares que se emplean para fijar axialmente otros elementos tales como los rodamientos. Hay tres tipos principales de anillos de retención disponibles: la sección cónica, constante y en forma espiral. Vamos a emplear los de sección constante por tratarse de los más sencillos pues no requerimos de ninguna aplicación especial como observamos en la figura 23. Según su disposición, los anillos de retención pueden tener dos ensamblajes diferentes:

- Ensamblaje externo: Se instala en una ranura mecanizada en el eje y la parte que sobresale de la ranura sujeta el elemento axialmente.
- Ensamblaje interno: Similar al anterior expuesto, pero se sitúa en la interior del eje.



#### SH Anillos de Eje

#### Ensamblaje Externo

Una vez instalado en la ranura de un eje, la parte del anillo que sobresale de la ranura (también llamado un "hombro") sostiene un conjunto en su lugar.

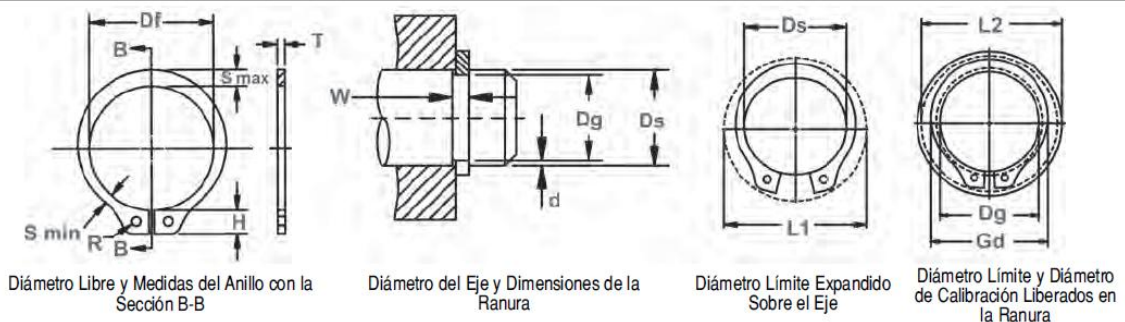


Figura 23. Anillos de retención

Estos elementos se eligen en función del diámetro del eje el cual en ese punto es definido por el diámetro del rodamiento. En este caso emplearemos rodamientos de  $\varnothing 80$  mm, por lo que nuestros anillos los escogeremos respecto a ese tamaño.

Según el catálogo de Rotor Clip emplearemos los anillos SH-315 de  $\varnothing 80,2$  mm pues no disponen de anillos de  $\varnothing 80$  mm los cuales son capaces de soportar unas cargas de 7350 libras, 34918,53N.

### 3.4.7. Diseño de las chavetas

Vamos a diseñar la chaveta (figura 24) encargada de transmitir el par del eje al engranaje. Vamos a hacer uso de las más comunes, las de sección transversal cuadradas o rectangulares cuyo ancho y alto están normalizados en función del diámetro del eje solo debemos calcular la longitud L que debe tener para poder transmitir el par T. Para el cálculo sobre la chaveta actúa una fuerza:

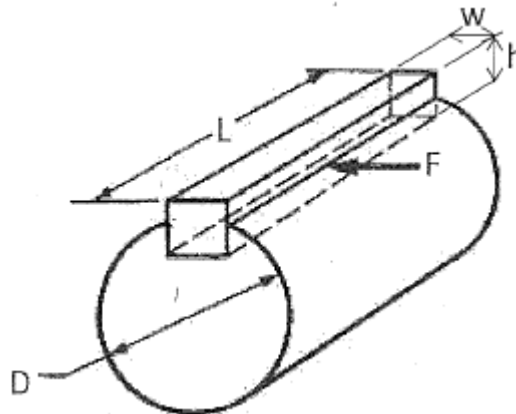


Figura 24. Chaveta

$$F = \frac{T}{R} = \frac{9163,77 \text{ (N} \cdot \text{m)}}{39 \text{ (mm)}} \cdot \frac{1000\text{mm}}{\text{m}} = 234968,46 \text{ (N)}$$

Estudiaremos el elemento tanto a su posible fallo a cortante (área de cortante= $w \cdot L$ ) como por aplastamiento (área de aplastamiento= $h \cdot L/2$ ). Para que no se dé el fallo en ninguno de los dos casos deben cumplir lo siguiente:

$$\tau = \frac{T}{wL} \leq \frac{\tau_{yp}}{CS} \text{ (A cortante)}$$

$$\sigma = \frac{T}{hL/2} \leq \frac{\sigma_{YP}}{CS} \text{ (A aplastamiento)}$$

Seguendo el catálogo Opac el material empleando será acero St 60 acero de 60 kg/mm<sup>2</sup> de resistencia a la tracción.

$$\tau = \frac{\sigma}{2} = \frac{60}{2} \left( \frac{\text{Kg}}{\text{mm}^2} \right) \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 294,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

El cs empleado será de CS=1,2 pues es un elemento de seguridad que evitará que otros elementos más críticos resulten dañados siendo éste el que sufra las deformaciones.

Según la tabla 22 usaremos unos valores b y h de 22mm y 14mm.

Sección de la lengüeta de ajuste (acero para chavetas DIN 6880)	Anchura b	22	
	Altura h	9	14
Para diámetro del eje d1 3)	más de	75	
	hasta	85	

Tabla 22. Sección de chaveta

Por lo que:

$$\tau = \frac{234968,46}{22 \cdot L} \leq \frac{294,3}{1,2} \rightarrow L = 43,54 \text{ (mm)}$$

$$\sigma = \frac{234968,46}{14 \cdot L/2} \leq \frac{294,3 \cdot 2}{1,2} \rightarrow 68,43 \text{ (mm)}$$

Al ser el fallo por aplastamiento más restrictivo usaremos una chaveta que cumpla ese mínimo valor admisible. Según el catálogo la longitud para nuestra chaveta será de 100mm, con lo que la denominación será 22x14x100 DIN 6885 A.

### **3.5. 1º EJE MULTIPLICADOR**

Vamos a proceder al estudio del primer eje multiplicador, situado entre el eje de baja velocidad y el segundo eje que transmitirá el giro al eje vertical. Como hemos explicado en el apartado 3.4.1 en el cálculo de engranajes este eje gira a 15 rpm, 2,5x la velocidad de entrada del rotor de 6 rpm.

Lo primero será definir el esquema del diseño, pues tendremos solamente los rodamientos en un eje bi-apoyado. Para este caso juntaremos lo máximo posible el engranaje a los apoyos, por lo que tomaremos el ancho de nuestros engranajes como dato principal de diseño. Seguiremos el mismo procedimiento empleado en el cálculo del eje de baja velocidad:

### 3.5.1. Cargas sobre el eje

El 1º eje multiplicador tendrá que soportar las siguientes cargas que se dividen en los siguientes apartados:

#### Momento torsor

Tal y como explicamos en el anterior cálculo de engranajes la transmisión de potencia se expresa en la siguiente ecuación:

$$Pot = Pot_1 = Pot_2 \rightarrow T_1 \cdot w_1 = T_2 \cdot w_2 \rightarrow F_t \cdot R_1 \cdot w_1 = F_t \cdot R_2 \cdot w_2$$

Por lo que si la potencia se mantiene, al aumentar 2,5x la velocidad, disminuirá el momento torsor a la misma magnitud:

$$T_1 \cdot w_1 = T_2 \cdot w_2 \rightarrow 9163,77 (N \cdot mm) \cdot 6 (rpm) = T_2 \cdot 15 (rpm) \rightarrow$$

$$M_{Torsor} = 3665,5 (N \cdot mm)$$

#### Cálculo del segundo conjunto de engranajes

Del piñón del primer conjunto multiplicador sabemos que tiene las siguientes características:

- b= 12 cm
- R= 9,6 cm
- $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$

$$Masa = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \rho}{1000} = \frac{\pi \cdot 9,6^2 \cdot 12 \cdot 7,85}{1000} = 27,27 (kg) \rightarrow 27,27 \cdot 9,81 = 267,554 N$$

En este caso el dato principal es el momento torsor transmitido por el eje principal.

$$M_T = 3665,5 (Nm)$$

La distancia entre ejes es de 336 mm. Teniendo una relación de  $i=2,5$  la rueda grande tiene un radio de 240 mm y la pequeña uno de 96 mm lo que genera una fuerza igual a:

$$F_n = \frac{M_T}{r} = \frac{3665,5 \text{ (Nm)}}{0,096 \text{ (mm)}} = 38182,375 \text{ (N)}$$

Teniendo en cuenta la inclinación de 20° de los dientes de nuestros engranajes separamos esta fuerza total en sus componentes tangenciales y radiales obteniendo:

$$F_T = F_n * \cos \alpha = 38182,375 * \cos 20^\circ = 35879,69 \text{ (N)}$$

$$F_R = F_n * \sin \alpha = 38182,375 * \sin 20^\circ = 13059,14 \text{ (N)}$$

También necesitamos conocer la relación de transmisión  $i$ , definida como:

$$i = \frac{w_2}{w_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Como hacemos uso de dos etapas y nuestra  $i$  total es de 5, las relaciones que usaremos serán 2,5x en la primera etapa y 2 en la segunda:

$$i = 2 = \frac{w_2}{15} \rightarrow w_2 = 30 \text{ (rpm)}$$

De esta manera logramos que en el 2° eje multiplicador tengamos un giro de 30 rpm. Vamos a hacer uso de engranajes cilíndricos rectos, por lo que vamos a proceder a sus cálculos para la obtención de las características necesarias:

### **Calculo del módulo de los engranajes cilíndricos rectos por el criterio de la flexión: Fórmula de Lewis.**

La fórmula de Lewis se basa en el cálculo de la tensión en la base del diente del engranaje, analizando dicho diente como una viga empotrada sometida a la fuerza entre dientes  $F$ .

$$m \geq 267,62 \cdot \sqrt[2]{\frac{Pot \cdot (i + 1)}{w \cdot a \cdot \psi \cdot \sigma_{adm} \cdot Y}}$$

Primero vamos a hacer un cálculo previo para el diseño del módulo, número de dientes y distancia entre ejes. Tomando un módulo de 10 mm y distancia entre ejes



de 300mm al tener un tursor más pequeño soportará las cargas con un módulo inferior:

$$a = \frac{m}{2} \cdot (z_1 + z_2)$$

Sabiendo que:

$$z_2 = 2z_1$$

$$300 = \frac{10}{2} \cdot (3z_1) \rightarrow z_1 = 20$$

Usando el número de dientes a 20:

$$a = \frac{10}{2} \cdot (3 \cdot 20) = 300 \text{ (mm)}$$

Recalculamos usando un módulo de 10 un número de dientes a 20

Con estos datos previos vamos a calcular el módulo según la fórmula de Lewis:

$$m \geq 267,62 \cdot \sqrt[2]{\frac{Pot \cdot (i + 1)}{w \cdot a \cdot \psi \cdot \sigma_{adm} \cdot Y}}$$

Donde:

- Pot=5,87 CV
- i=2
- w=15 rpm
- a=30 cm
- $\psi=5$
- $\sigma_{adm}=172 \text{ (MPa)} \cdot (10^6 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2) (\text{m}^2 / 10000 \text{ cm}^2) = 1753,3129 \text{ Kg/cm}^2$
- Y=0,322

$$m \geq 267,62 \cdot \sqrt[2]{\frac{5,87 \cdot (2 + 1)}{15 \cdot 30 \cdot 5 \cdot 1753,3129 \cdot 0,322}} = 0,99 \text{ (cm)}$$

De manera que, redondeando el módulo a 10 mm, el número de dientes es:

$$z_1 = \frac{2 \cdot a}{m \cdot (i + 1)} = \frac{2 \cdot 300}{10 \cdot 3} = 20 \text{ (dientes)}$$

### Calculo del módulo de los engranajes cilíndricos rectos a fallos superficiales: Ecuación de Hertz.

Al cálculo del módulo a fallos superficiales se le denomina habitualmente cálculo a duración y desgaste.

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot T_1 \cdot (i + 1)}{k_{adm} \cdot \psi \cdot z_1^2 \cdot i \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}}$$

Donde:

- $T=3365,5 \text{ Nm}=37364,93 \text{ Kg}\cdot\text{cm}$
- $i=2$
- $\psi=5$
- $z=20$  dientes
- $\alpha=20^\circ$

Hay que tener en cuenta el número de vueltas que completa la rueda en la duración prevista:

$$t = \frac{w \cdot h \cdot 60}{10^6}$$

Siendo:

- $w=15 \text{ rpm}$
- $h=3000$  horas

$$t = \frac{15 \cdot 3000 \cdot 60}{10^6} = 2,7 \text{ (millones de vueltas)}$$

Para obtener el valor de  $k_{adm}$ :

$$k_{adm} = 6800 \cdot \frac{HB^2}{t^{\frac{1}{3}} \cdot E}$$

Donde:

- HB=260
- E=2100000 Kg/cm<sup>2</sup>
- t=2.7 millones de vueltas

$$k_{adm} = 6800 \cdot \frac{260^2}{2,7^{\frac{1}{3}} \cdot 2100000} = 157,191 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)$$

Sustituimos en la ecuación de Hertz:

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 37364,93 \cdot (2 + 1)}{157,191 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 2 \cdot \sin 20 \cdot \cos 20}} = 1,035 \sim 1 \text{ (cm)}$$

Por lo que consideramos el módulo de 10mm correcto.

Para acabar, sabiendo que:

$$a = R_1 + R_2$$

Y:

$$i = \frac{R_1}{R_2}$$

Los radios finales serán:

$$R_1 = 200 \text{ (mm)}$$

$$R_2 = 100 \text{ (mm)}$$

Conociendo estos radios, para calcular el peso del engranaje haremos uso del módulo y del factor de forma:

$$b = \Psi \cdot m$$

$$b = 5 \cdot 20 = 100 \text{ mm}$$

Procedemos a calcular el peso del engranaje conociendo sus especificaciones y dimensiones, sabiendo que:

- $b = 10 \text{ cm}$
- $R = 20 \text{ cm}$
- $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$

$$Masa = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \rho}{1000} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 10 \cdot 7,85}{1000} = 98,64 \text{ (kg)} \rightarrow 98,64 \cdot 9,81 = 967,71 \text{ N}$$

Despreciaremos el peso de engranaje el cual emplearemos únicamente en el apartado 4.4.4 para el estudio del eje en base a vibraciones.

Con éstos datos usaremos un eje con las siguientes medidas como observamos en la figura 25:

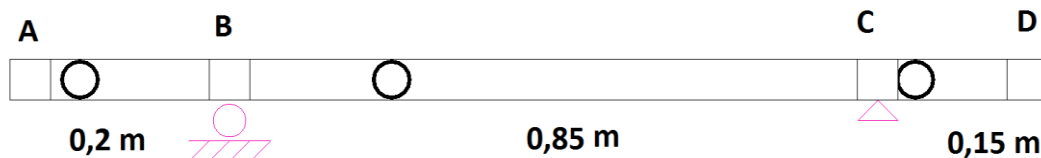


Figura 25. 1º eje multiplicador

### **Fuerzas en el engranaje**

En este segundo eje el momento torsor transmitido por el 1º conjunto de engranaje es:

$$M_T = 3665,5 \text{ (Nm)}$$

La distancia entre ejes es de 300 mm. Teniendo una relación de  $i=2$  la rueda grande tiene un radio de 200 mm y la pequeña uno de 100 mm lo que genera una fuerza igual a:

$$F_n = \frac{M_T}{r} = \frac{3665,5}{0,200} = 18327,54 \text{ (N)}$$

Teniendo en cuenta la inclinación de  $20^\circ$  de los dientes de nuestros engranajes separamos esta fuerza total en sus componentes tangenciales y radiales como observamos en la Figura 6 obteniendo:

$$F_T = F_n \cdot \cos \alpha = 18327,54 \cdot \cos 20^\circ = 17222,25 \text{ (N)}$$

$$F_R = F_n * \sin \alpha = 18327,54 * \sin 20^\circ = 6268,3878 \text{ (N)}$$

### **Reacciones en los apoyos y momentos flectores**

Tenemos cuatro reacciones con sus respectivos momentos flectores actuando en nuestro eje, los generados por reacciones radiales y tangenciales de la rueda pequeña del primer engranaje y los generados por el segundo engranaje entre el 1º eje multiplicador y el 2º eje multiplicador sentido tangencial y radial. Para calcular cual es la disposición idónea de los engranajes vamos a estudiar los 4 modos distintos y obtener los menores esfuerzos. Sabemos que las reacciones del primer engranaje son:

$$F_T = F_n * \cos \alpha = 38182,375 * \cos 20^\circ = 35879,69 \text{ (N)}$$

$$F_R = F_n * \sin \alpha = 38182,375 * \sin 20^\circ = 13059,14 \text{ (N)}$$

Estas fuerzas están orientadas la tangencial en sentido vertical positivo y la radial en sentido horizontal negativo. Y las del segundo engranaje:

$$F_T = F_n * \cos \alpha = 18327,54 * \cos 20^\circ = 17222,25 \text{ (N)}$$

$$F_R = F_n * \sin \alpha = 18327,54 * \sin 20^\circ = 6268,3878 \text{ (N)}$$

### **1ª Opción: engranaje a la izquierda del eje**

Con esta disposición tenemos la fuerza radial en sentido horizontal negativo y la tangencial en sentido vertical negativo pues el eje gira en sentido anti horario. Primero vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje.

#### **Plano XY**

$$\sum M_{By} = 0$$
$$35879,69 * 0,2 + 172522,25 * 1 - F_{Cy} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cy} = 28703,75 \text{ (N)}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$35879,69 + 28703,75 - 17222,25 - F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = -47361,19 (N)$$

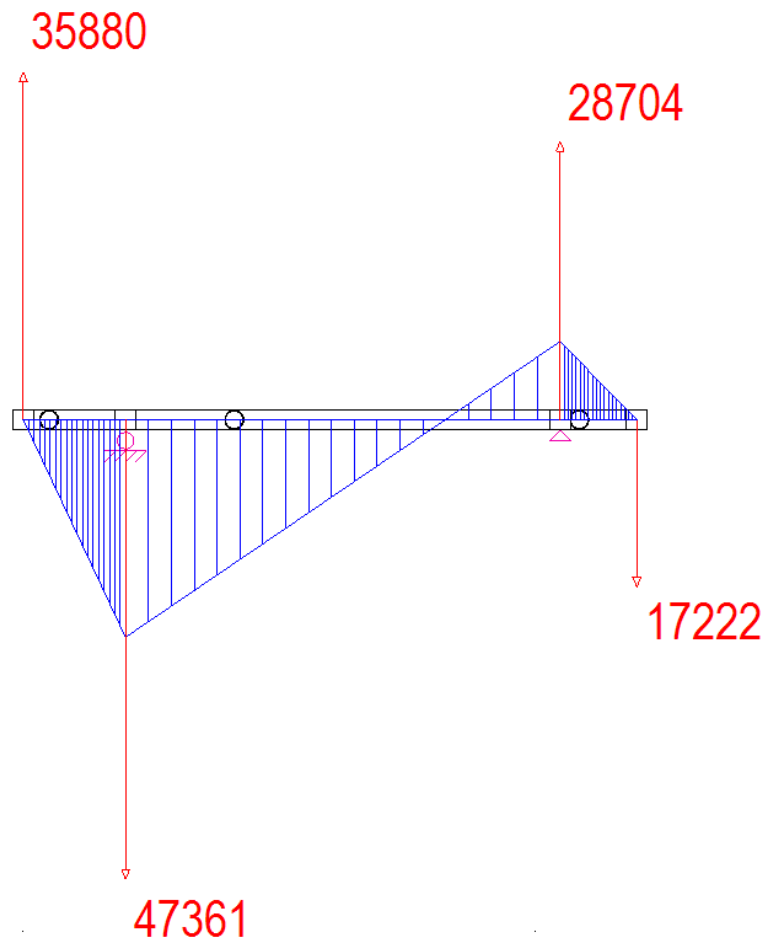


Figura 26. 1ª opción XY

Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$

$$13059,14 * 0,2 - 6268,38 * 1 + F_{Cz} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cz} = -4302,16 (N)$$

$$\sum F_z = 0$$

$$13059,14 + 6268,38 - 4302,16 + F_{Bz} = 0 \rightarrow F_{Bz} = -15025,36 (N)$$

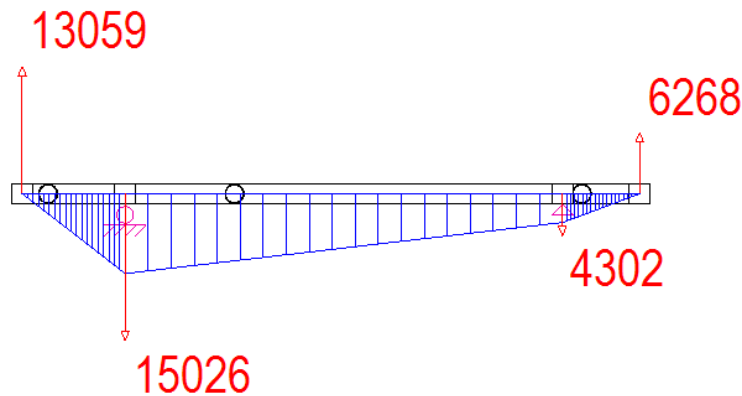


Figura 27. 1ª opción XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 35879,69 * 0,2 = 7175,93 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cy} = 17222,25 * 0,15 = 2583,33 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Bz} = 13059,14 * 0,2 = 2611,828 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cz} = 6268,38 * 0,15 = 940,257 \text{ (Nm)}$$

En la tabla 23 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	47361,19 N	28703,75 N
Fz	-15025,36 N	-4302,16 N
Ft	49687,46 N	29024,36 N
My	7175,93 Nm	2583,33 Nm
Mz	2611,82 Nm	940,25 Nm
Mt	7636,46 Nm	2749,12 Nm

Tabla 23. Reacciones y momentos Opción 1

## 2ª Opción: engranaje a la derecha del eje

Con esta disposición tenemos la fuerza radial en sentido horizontal positivo y la tangencial en sentido vertical positivo pues el eje gira en sentido anti horario.

Primero vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje.

Plano XY

$$\sum M_{By} = 0$$

$$35879,69 * 0,2 - 17222,25 * 1 - F_{Cy} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cy} = -11819,19 (N)$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$35879,69 - 11819,19 + 17222,25 - F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = -41282,75 (N)$$

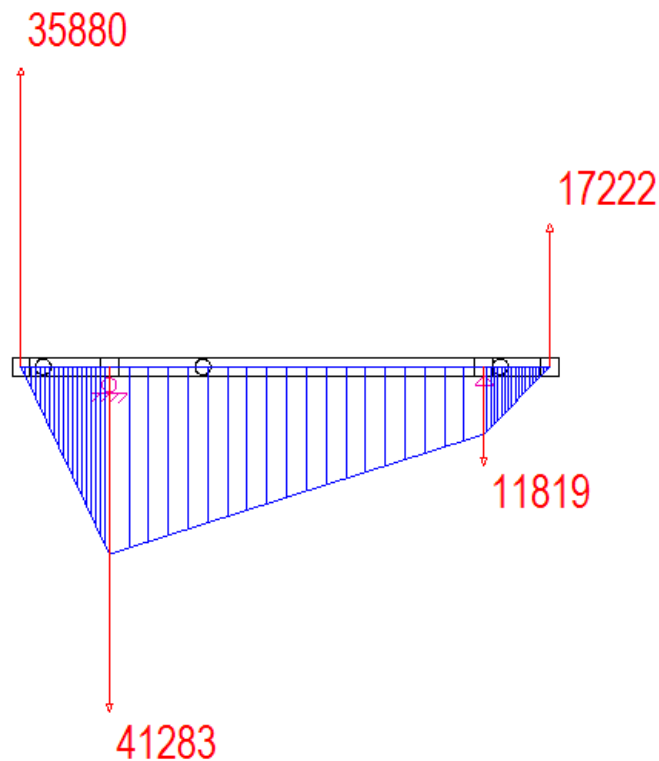


Figura 28. 2ª opción XY

Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$

$$13059,14 * 0,2 + 6268,38 * 1 - F_{Cz} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cz} = 10447,3 (N)$$

$$\sum F_Z = 0$$

$$13059,14 - 6268,38 + 10447,3 + F_{Bz} = 0 \rightarrow F_{Bz} = -17238,06 (N)$$



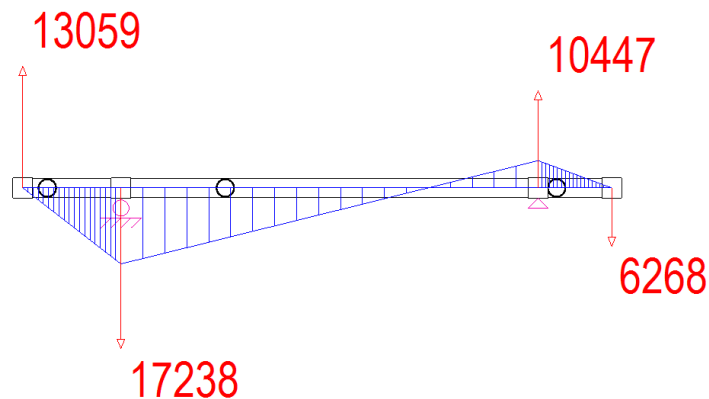


Figura 29. 2ª opción XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 35879,69 * 0,2 = 7175,93 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cy} = 17222,25 * 0,15 = 2583,33 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Bz} = 13059,14 * 0,2 = 2611,828 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cz} = 6268,38 * 0,15 = 940,257 \text{ (Nm)}$$

En la tabla 24 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	-41282,75 N	-11819,19 N
Fz	-17238,06 N	10447,3 N
Ft	44737,18 N	15774,44 N
My	7175,93 Nm	2583,33 Nm
Mz	2611,82 Nm	940,25 Nm
Mt	7636,46 Nm	2749,12 Nm

Tabla 24. Reacciones y momentos Opción 2

### 3ª Opción: engranaje debajo del eje

Con esta disposición tenemos la fuerza tangencial en sentido horizontal positivo y la radial en sentido vertical en sentido positivo de Y. Primero vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje:

Plano XY

$$\sum M_{By} = 0$$

$$35879,69 * 0,2 - 6268,38 * 1 - F_{Cy} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cy} = 1067,71 (N)$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$35879,69 + 6268,38 - 1067,71 - F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = -43215,8 (N)$$

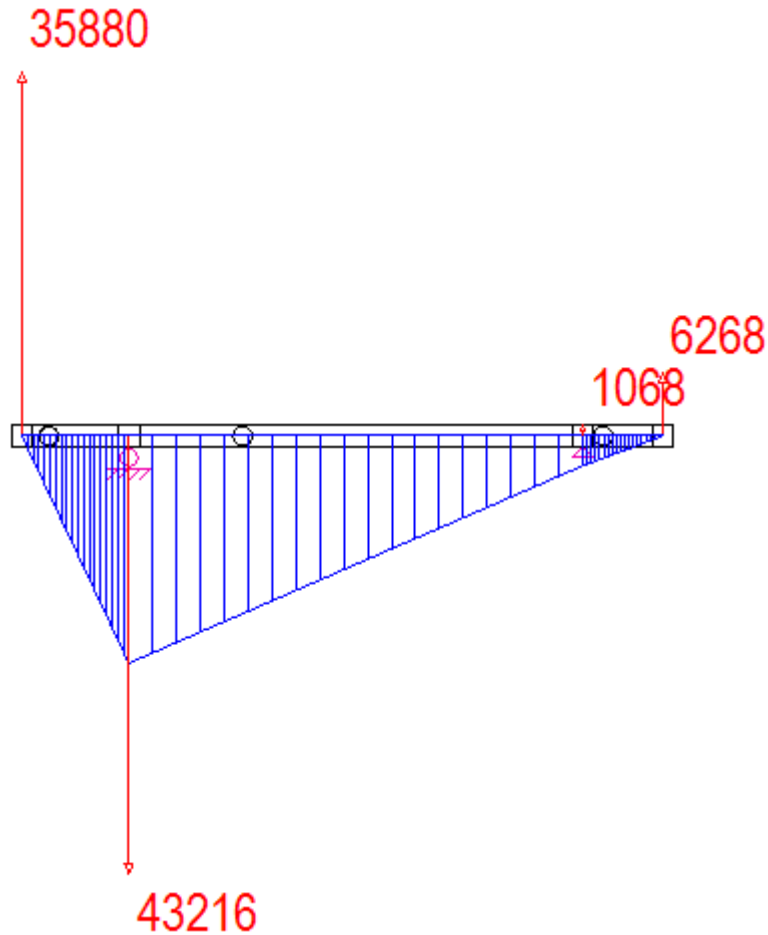


Figura 30. 3ª opción XY

Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$

$$13059,14 * 0,2 - 17222,25 * 1 + F_{Cz} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cz} = -17188,7 (N)$$

$$\sum F_Z = 0$$

$$13059,14 - 17188,7 + 17222,25 + F_{Bz} = 0 \rightarrow F_{Bz} = -13092,6 (N)$$

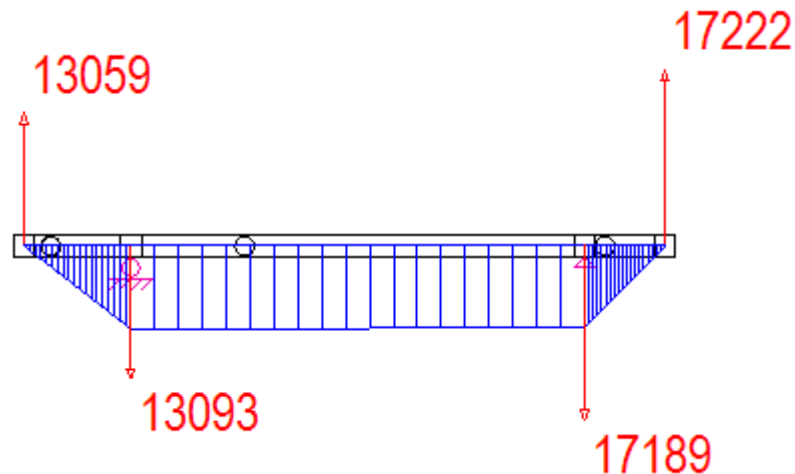


Figura 31. 3ª opción XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 35879,69 * 0,2 = 7175,93 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cy} = 6268,38 * 0,15 = 940,257 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Bz} = 13059,14 * 0,2 = 2611,828 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Cz} = 17222,25 * 0,15 = 2583,33 \text{ (Nm)}$$

En la tabla 25 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	-43215.8 N	1067.72 N
Fz	-13092.6 N	-17188.8 N
Ft	45155,52 N	17221,92 N
My	7175,93 Nm	940,25 Nm
Mz	2611,82 Nm	2583,33 Nm
Mt	7636,46 Nm	2749,12 Nm

Tabla 25. Reacciones y momentos Opción 3

#### 4ª Opción: engranaje encima del eje

Con esta disposición tenemos la fuerza tangencial en sentido horizontal y la radial en sentido vertical en sentido negativo de Y. Primero vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje:

Plano XY

$$\sum M_{By} = 0$$
$$35879,69 * 0,2 + 6268,38 * 1 - F_{Cy} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cy} = 15816,8 (N)$$

$$\sum F_Y = 0$$
$$35879,69 - 6268,38 + 15816,8 - F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = -45428,2 (N)$$

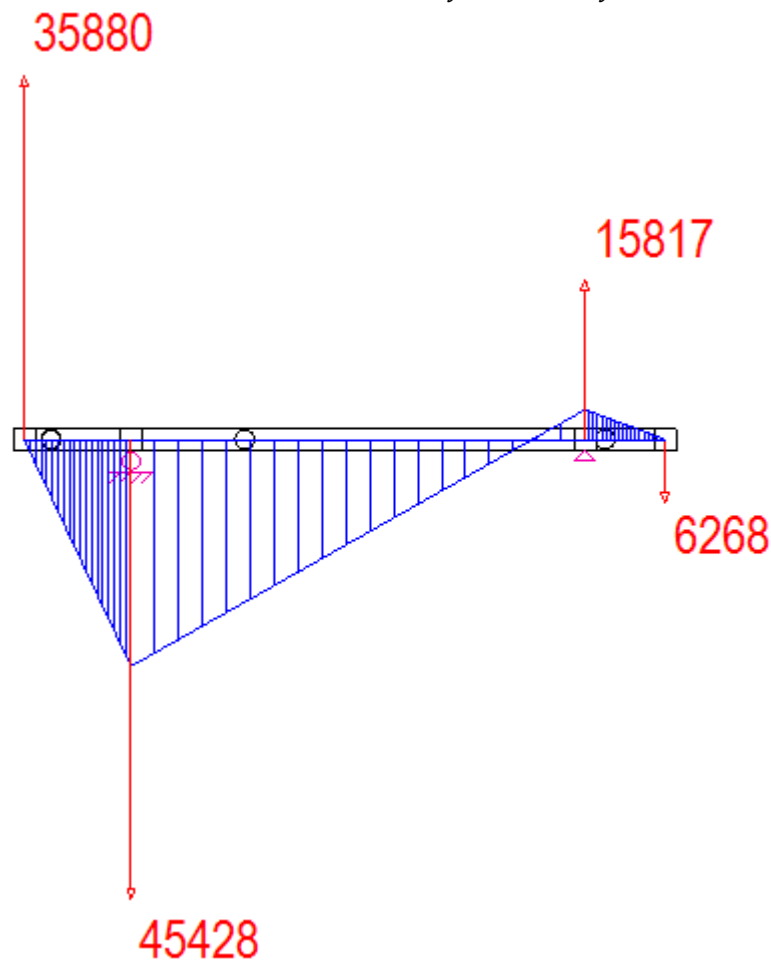


Figura 32. 4ª opción XY

Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$
$$13059,14 * 0,2 + 17222,25 * 1 + F_{Cz} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cz} = -23334,2 (N)$$

$$\sum F_Z = 0$$

$$13059,14 + 23334,2 - 17222,25 + F_{Bz} = 0 \rightarrow F_{Bz} = -19171,1(N)$$

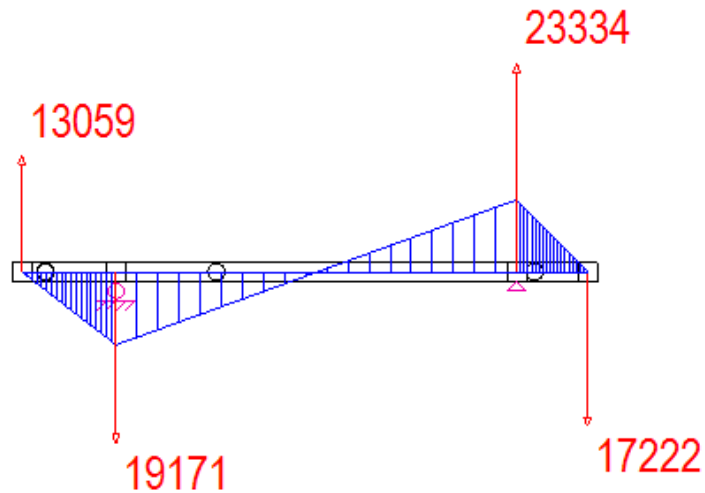


Figura 33. 4ª opción XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 35879,69 * 0,2 = 7175,93 (Nm)$$

$$M_{Cy} = 6268,38 * 0,15 = 940,257 (Nm)$$

$$M_{Bz} = 13059,14 * 0,2 = 2611,828 (Nm)$$

$$M_{Cz} = 17222,25 * 0,15 = 2583,33 (Nm)$$

En la tabla 26 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	-45428,2 N	15816,8 N
Fz	-19171,1 N	23334,2 N
Ft	49307,73 N	28189,64 N
My	7175,93 Nm	940,25 Nm
Mz	2611,82 Nm	2583,33 Nm
Mt	7636,46 Nm	2749,12 Nm

Tabla 26. Reacciones y momentos Opción 3

Tras los resultados elegimos la 2ª opción como la más favorable en la que el engranaje se sitúa a la derecha del eje, pues las reacciones totales son las de menor magnitud puesto que en todas las posibles configuraciones los momentos flectores son idénticos.

A continuación adjunto en una tabla el resumen de los datos más relevantes que observamos en la tabla 27:

	Apoyo B	Apoyo C
Ft	44737,18 N	15774,44 N
My	7175,93 Nm	2583,33 Nm
Mz	2611,82 Nm	940,25 Nm
Mt	7636,46 Nm	2749,12 Nm

Tabla 27. Fuerzas y momentos actuantes

### 3.5.2. Cálculo del eje según las tensiones

El 1º eje multiplicador ha de ser capaz de soportar las cargas citadas anteriormente citadas, para lo cual haremos uso del cálculo de ejes mediante el código ASME.

#### Cálculo de ejes mediante el código ASME

La expresión del código ASME para el cálculo a fatiga es la siguiente:

$$\tau_{max} = \frac{r}{J} \sqrt{(C_m \cdot M)^2 + (C_t \cdot T)^2} < \tau_{yp}$$

El código ASME toma los valores de los momentos M y T y los mayorará mediante unos coeficientes  $C_m$  y  $C_t$  de la tabla 28:

	$C_m$	$C_t$
EJES FIJOS:		
Carga aplicada gradualmente (constante)	1.0	1.0
Carga aplicada repentinamente	1.5-2.2	1.5-2.2
EJES GIRATORIOS:		
Carga aplicada gradualmente (constante)	1.5	1.0

Carga aplicada repentinamente, sólo pequeños impactos	1.5-2.0	1.0-1.5
Carga aplicada repentinamente, grandes impactos	2.0-3.0	1.5-3.0

Tabla 28. Coeficientes de mayoración ASME.

En nuestro caso nos hallamos ante un caso en el que la carga es aplicada gradualmente sin impactos por lo que nuestros coeficientes de mayoración serán:

$$C_m = 1,5$$

$$C_t = 1,0$$

### **Material escogido**

Emplearemos un acero AISI / SAE 1045 (tabla 29) al tratarse de un acero de mediano contenido de carbono utilizado ampliamente en elementos estructurales que requieran mediana resistencia mecánica y tenacidad a bajo costo. Posee baja soldabilidad, buena maquinabilidad y excelente forjabilidad. Es utilizado para todo tipo de elementos que requieren dureza y tenacidad como ejes, manivelas, chavetas, pernos, tuercas, cadenas, engranajes de baja velocidad, espárragos, acoplamientos, bielas, pasadores, cigüeñales y piezas estampadas. Puede ser sometido a temple y revenido. Haremos uso del catálogo de Aceros Otero, pág. 134.

<b>Composición Química</b>				
% C	% Mn	% Si	% P	% S
0,43 - 0,50	0,60 - 0,90	0,15 - 0,35	≤ 0,04	≤ 0,05

<b>Propiedades Mecánicas Acero Laminado (Valores típicos)</b>			
Dureza (HB)	Esfuerzo Fluencia (min.) (Kg / mm <sup>2</sup> )	Esfuerzo Tracción (min.) (Kg / mm <sup>2</sup> )	Elongación (min.)%
170 - 190	40	63 - 73	15

Tabla 29. Características del material AISI 1045.

La característica mecánica que más nos ocupan es el esfuerzo a fluencia, que en este caso es:

$$\sigma_{yp} = 40 \left( \frac{kg}{mm^2} \right) = 392,4 \text{ (MPa)}$$

**Coefficiente de seguridad (CS)**

El coeficiente de seguridad parcial para materiales se obtiene del código IEC-61400-02:2006 pág. 89. En dicho código (tabla 30) se obtienen los coeficientes según la resistencia a la fatiga o el límite de rotura conociendo la caracterización total con un valor de 1,25.

**Table 6 – Partial safety factors for materials**

Condition	Full characterisation	Minimal characterisation
Fatigue strength	1,25 <sup>a)</sup>	10,0 <sup>b)</sup>
Ultimate strength	1,1	3,0

<sup>a)</sup> Factor is applied to the stress ranges as shown in equation (48).  
<sup>b)</sup> Factor is applied to the measured ultimate strength of the material.

*Tabla 30. Coeficiente de seguridad según normativa.*

**Dimensionamiento a fatiga**

Se hará uso del catálogo de Aceros Otero para elegir un perfil pues dispone de un rango amplio de medidas del cual elegiremos el tamaño adecuado según las necesidades de nuestro diseño.

Primero se aplica el coeficiente de seguridad a fatiga de la tabla 26 para poder calcular mediante el código ASME el diámetro mínimo necesario para soportar las cargas.

$$\sigma_{admissible} = \frac{\sigma_{yp}}{CS} = \frac{392,4}{1,25} = 313,92 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{admissible} = \frac{\frac{\sigma_{yp}}{2}}{CS} = \frac{\tau_{yp}}{2} = \frac{\frac{392,4}{2}}{1,25} = 156,96 \text{ (MPa)}$$

Mediante una tabla Excel se calcula el Ø mínimo mediante la expresión del código ASME para el cálculo a fatiga:



$$\tau_{max} = \frac{r}{J} \sqrt{(C_m \cdot M)^2 + (C_t \cdot T)^2} < \tau_{yp}$$

$$\tau_{max} = \frac{r}{\frac{\pi}{2} \cdot r^4} \cdot \sqrt{(1,5 \cdot 7636,46)^2 + (1 \cdot 3665,5)^2} < 156,96 \text{ (MPa)}$$

Con un  $\varnothing$  de 73,08 mm (radio de 36,54 mm) conseguimos el espesor mínimo que debe tener nuestro eje.

$$\tau_{max} = \frac{36,54}{\frac{\pi}{2} \cdot 36,54^4} \cdot \sqrt{(1,5 \cdot 7636,47)^2 + (1 \cdot 9163,77)^2} = 156,93 < 156,96 \text{ (MPa)}$$

Suponemos que el suministrador entregará materiales mínimo de mm en mm, siendo lo más normal moverse entre 5 o 10 mm de diferencia entre cada redondo, por lo que redondeando nos movemos en un eje de 75 mm.

### **3.5.3. Dimensionamiento según deflexiones**

Las fuerzas y momentos que actúan en nuestro eje son las reacciones de ambos engranajes. Se pueden observar en las figuras 34.

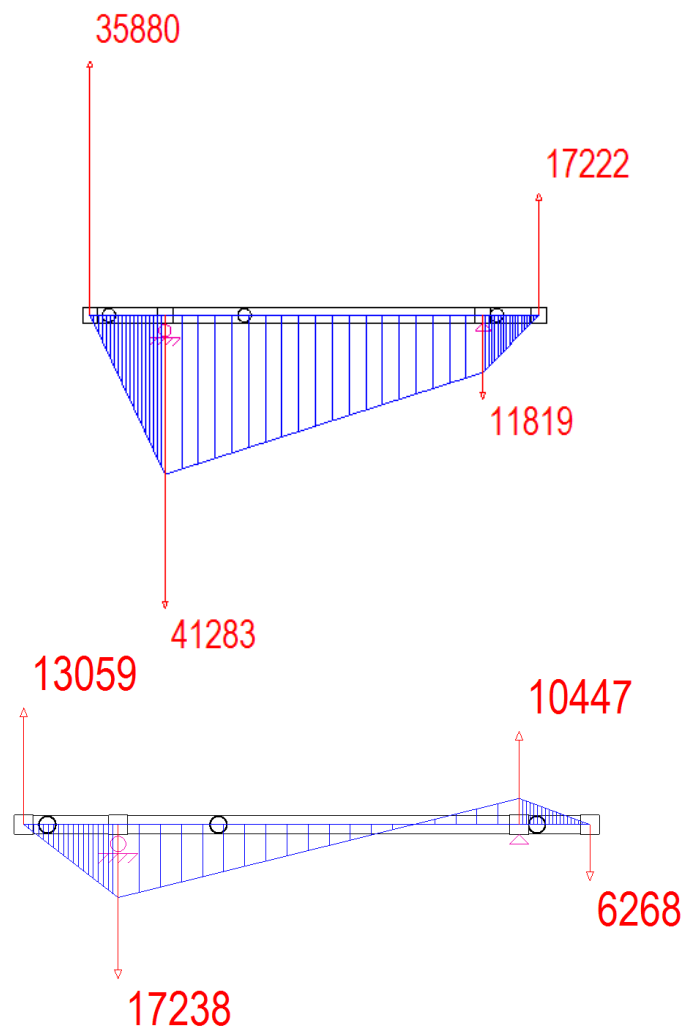


Figura 34. Fuerzas y momentos en el 1º eje multiplicador

Como tenemos 6 cargas distintas vamos a hacer uso de la teoría de superposición aplicando el teorema de Mohr.

### 1ª deformación: reacción tangencial 1º engranaje

En primer lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción tangencial del primer engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 35.

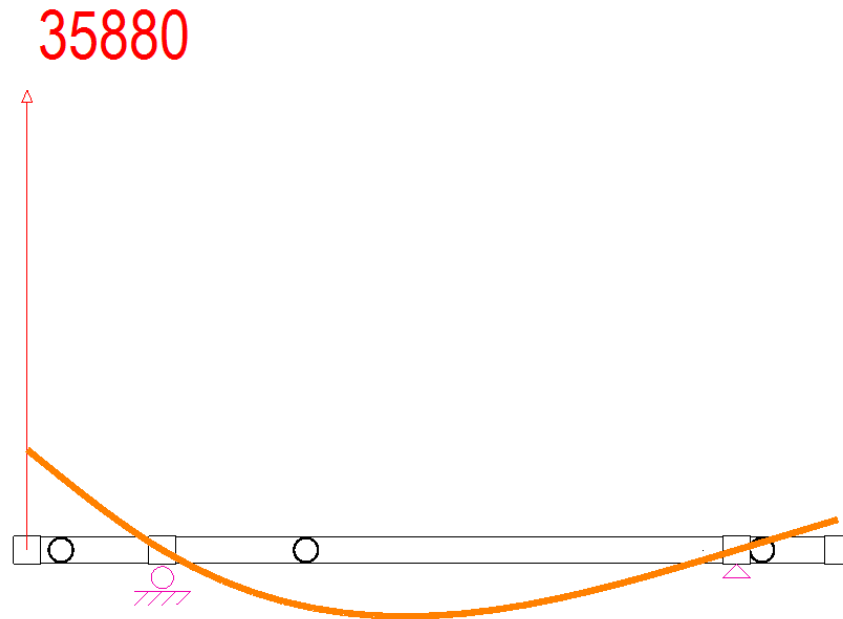


Figura 35. Deformada 1ª opción

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\delta_{A'A'} = \theta_B \cdot L_1$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A'A'} + \delta_{AB}$$

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3$$

Primero calculamos la deformación en CB y el giro de B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 7175,93 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{1,7282 \cdot 10^{12}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{3,724 \cdot 10^{12}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{2,033 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

Delta BC y giro en C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 7175,93 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{8,641 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{1,862 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{1,0165 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo A:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 7175,93 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 200 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 200 (mm) \right) \right] = \frac{9,567 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{2,033 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{4,066 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB} = \frac{4,066 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z} + \frac{9,567 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} = \frac{5,0227 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{1,0165 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{1,5247 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

## 2ª deformación: reacción radial 1º engranaje

En segundo lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción radial del primer engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 36.

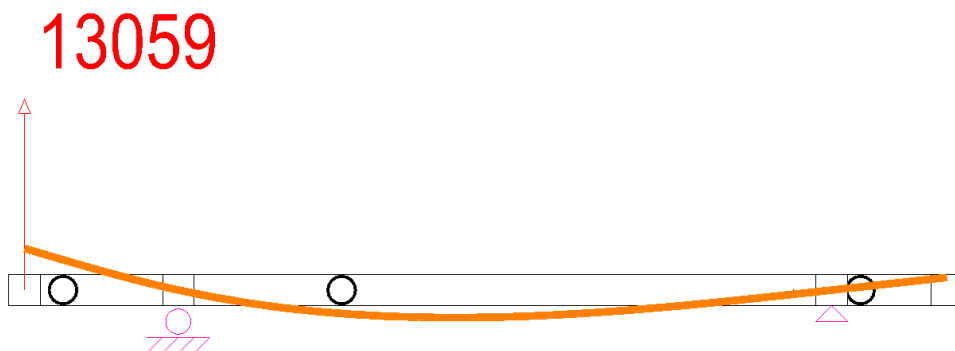


Figura 36. Deformada 2ª opción

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\delta_{A'A'} = \theta_B \cdot L_1$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A'A'} + \delta_{AB}$$

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3$$

Primero calculamos la deformación en CB y el giro de B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2611,8 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{6,29 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{6,29 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{7,4 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta BC y giro en C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2611,8 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{3,145 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{1,862 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{3,7 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo A:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2611,8 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 200 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 200 (mm) \right) \right] = \frac{3,4824 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A'} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{7,4 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{1,48 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB} = \frac{1,48 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z} + \frac{3,4824 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_z} = \frac{1,8282 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z}$$

Por último la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{3,7 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} \cdot 150 = \frac{5,55 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_z}$$

### 3ª deformación: reacción tangencial 2º engranaje

En tercer lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción tangencial del 2º engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 37.

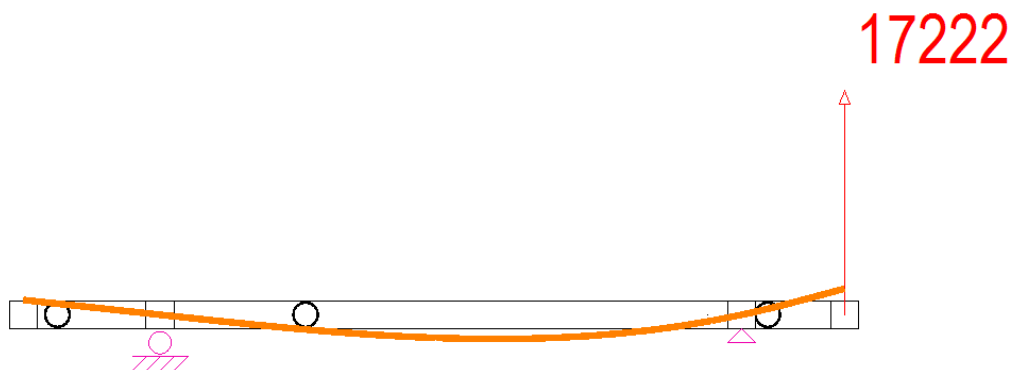


Figura 37. Deformada 3ª opción

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC}$$

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1$$

Primero calculamos la deformación en BC y el giro de C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2583,33 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{6,221 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{6,221 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{7,319 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta CB y giro en B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2583,33 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{3,11 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{3,11 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{3,659 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo D:

$$\delta_{DC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2583,33 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 150 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 150 (mm) \right) \right] = \frac{1,937 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{7,319 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{1,0978 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC} = \frac{1,0978 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z} + \frac{1,937 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} = \frac{1,291 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en A:

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{3,659 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{2,9899 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

#### 4ª deformación: reacción radial 2º engranaje

En cuarto lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción radial del 2º engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 38.



Figura 38. Deformada 4ª opción

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC}$$

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1$$

Primero calculamos la deformación en BC y el giro de C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 940,25 \cdot 10^3 (\text{N} \cdot \text{mm}) \cdot 850 (\text{mm}) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (\text{mm}) \right) \right] = \frac{2,264 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{2,264 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z}}{850} = \frac{2,664 \cdot 10^8}{E \cdot I_z}$$

Delta CB y giro en B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 940,25 \cdot 10^3 (\text{N} \cdot \text{mm}) \cdot 850 (\text{mm}) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (\text{mm}) \right) \right] = \frac{1,132 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{1,132 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z}}{850} = \frac{1,332 \cdot 10^8}{E \cdot I_z}$$

Flecha en el extremo D:

$$\delta_{DC} = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 940,25 \cdot 10^3 (\text{N} \cdot \text{mm}) \cdot 150 (\text{mm}) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 150 (\text{mm}) \right) \right] = \frac{7,051 \cdot 10^9}{E \cdot I_z}$$



$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{2,664 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{3,996 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC} = \frac{3,996 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} + \frac{7,051 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} = \frac{1,291 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en A:

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{1,332 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{2,664 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

Ahora vamos a calcular las deformaciones causadas por los pesos de ambos engranajes que usaremos únicamente en el diseño del eje en base a vibraciones.

### 5ª deformación: peso 1º engranaje

En quinto lugar estudiaremos la deformada a causa del peso del primer engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 39.



Figura 39. Deformada peso 1º engranaje

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB}$$

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3$$

Primero calculamos la deformación en CB y el giro de B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 53,51 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{1,288 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{1,288 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{1,516 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z}$$

Delta BC y giro en C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 53,51 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{6,443 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{6,443 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{7,58 \cdot 10^6}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo A:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 53,51 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 200 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 200 (mm) \right) \right] = \frac{7,134 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{1,516 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z} \cdot 200 = \frac{3,032 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB} = \frac{3,032 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} + \frac{7,134 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} = \frac{3,7454 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{7,58 \cdot 10^6}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{1,137 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

**6ª deformación: peso 2º engranaje**

Por último estudiaremos la deformada a causa del peso del segundo engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 40.



968

Figura 40. Deformada peso 2º engranaje

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC}$$

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1$$

Primero calculamos la deformación en BC y el giro de C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 145,15 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{3,495 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{3,495 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{4,112 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z}$$

Delta CB y giro en B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 145,15 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{1,747 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{1,747 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{2,056 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo D:

$$\delta_{DC} = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 145,15 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 150 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 150 (mm) \right) \right] = \frac{1,088 \cdot 10^9}{E \cdot I_z}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_c \cdot L_3 = \frac{4,112 \cdot 10^7}{E \cdot I_z} \cdot 150 = \frac{6,168 \cdot 10^9}{E \cdot I_z}$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC} = \frac{6,168 \cdot 10^9}{E \cdot I_z} + \frac{1,088 \cdot 10^9}{E \cdot I_z} = \frac{7,256 \cdot 10^9}{E \cdot I_z}$$

Por último la flecha en A:

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{2,056 \cdot 10^7}{E \cdot I_z} \cdot 200 = \frac{4,112 \cdot 10^9}{E \cdot I_z}$$

Vamos a proceder a juntar el ángulo de giro de las deformaciones tangenciales radiales y hacer una suma vectorial entre ellas:

$$\theta_B = \sqrt{\left( \frac{2,033 \cdot 10^9}{E \cdot I_z} + \frac{3,659 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} \right)^2 + \left( \frac{7,4 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} - \frac{1,332 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} \right)^2}$$

$$\theta_c = \sqrt{\left( \frac{1,0165 \cdot 10^9}{E \cdot I_z} + \frac{7,319 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} \right)^2 + \left( \frac{3,7 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} - \frac{2,664 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} \right)^2}$$

Teniendo en cuenta que el módulo de Young:

$$E = 210 (GPa) = 210000 (MPa)$$

Y que el momento de inercia de una barra circular es:

$$I_z = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 36,54^4 = 1,7826 \cdot 10^6 (mm)$$

Los giros son:

$$\theta_B = \sqrt{\left(\frac{2,033 \cdot 10^9}{210000 \cdot 1,7826 \cdot 10^6} + \frac{3,659 \cdot 10^8}{210000 \cdot 1,7826 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{7,4 \cdot 10^8}{210000 \cdot 1,7826 \cdot 10^6} - \frac{1,332 \cdot 10^8}{210000 \cdot 1,7826 \cdot 10^6}\right)^2} = 0,0066 \text{ (rad)}$$

$$\theta_c = \sqrt{\left(\frac{1,0165 \cdot 10^9}{210000 \cdot 1,7826 \cdot 10^6} + \frac{7,319 \cdot 10^8}{210000 \cdot 1,7826 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{3,7 \cdot 10^8}{210000 \cdot 1,7826 \cdot 10^6} - \frac{2,664 \cdot 10^8}{210000 \cdot 1,7826 \cdot 10^6}\right)^2} = 0,00332 \text{ (rad)}$$

Como usaremos rodamientos de bolas de contacto angular son medidas aceptables (tabla 31):

	PENDIENTE MÁXIMA ADMISIBLE ( $\theta_{max}$ )
Rodamiento de rodillos cónicos	0.0005-0.0012 rad
Rodamiento de rodillos cilíndricos	0.0008-0.0012 rad
Rodamiento de bolas de ranura profunda	0.001-0.003 rad
Rodamiento de bolas de contacto angular	0.026-0.052 rad
Engranaje cilíndrico recto	0.026-0.052 rad

Tabla 31. Pendiente máxima admisible

### 3.5.4. Diseño del eje en base a vibraciones

Además de las deflexiones estáticas del apartado anterior, también hay que comprobar que las vibraciones del eje no sean excesivas. El eje diseñado debe cumplir la siguiente expresión:

$$w_{eje} \ll w_{crítica} = \sqrt{\frac{g \cdot \sum(w_i \cdot y_i)}{\sum(w_i \cdot y_i^2)}}$$

En nuestro eje tenemos dos masas, el 1º engranaje (27,27 kg) y el 2º engranaje (98,64 kg). Del apartado anterior 3.5.3 obtenemos las deformaciones máximas:

Deformación en A:

$$\delta_{A'A} = \frac{3,7454 \cdot 10^9}{E \cdot I_z} + \frac{4,112 \cdot 10^9}{E \cdot I_z} = \frac{7,8574 \cdot 10^9}{E \cdot I_z}$$

Deformación en D:

$$\delta_{D'D} = \frac{1,137 \cdot 10^9}{E \cdot I_z} + \frac{7,256 \cdot 10^9}{E \cdot I_z} = \frac{8,393 \cdot 10^9}{E \cdot I_z}$$

Teniendo en cuenta que el módulo de Young:

$$E = 210 \text{ (GPa)} = 210000 \text{ (MPa)}$$

Y que el momento de inercia de una barra circular es:

$$I_z = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 73,08^4 = 4,48037 \cdot 10^7 \text{ (mm)}$$

Tenemos que la flecha en A es:

$$\delta_{A'A} = \frac{7,8574 \cdot 10^9}{210000 \cdot 4,48037 \cdot 10^7} = 0,000835 \text{ (mm)}$$

Y la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \frac{8,393 \cdot 10^9}{210000 \cdot 4,48037 \cdot 10^7} = 0,000892 \text{ (mm)}$$

Por lo que:

$$w_{eje} \ll w_{crítica} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot ((0,000835 \cdot 27,27) + (0,000892 \cdot 98,64))}{(0,000835^2 \cdot 27,27) + (0,000892^2 \cdot 98,64)}} = 105,56 \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

$$w_{crítica} = 1008,02 \text{ (rpm)} \gg w_{eje} = 15 \text{ (rpm)}$$

Siendo la velocidad crítica 67,2 veces superior no supone un problema, pues no alcanzará esa velocidad.

### 3.5.5. Rodamientos 1º eje multiplicador

Los rodamientos son los elementos necesarios para el apoyo del eje y que este pueda girar libremente con la menor fricción y pérdidas posibles. En este caso el diseño consta de dos apoyos (B y C) en los que emplearemos rodamientos esféricos, en el cual el rodamiento del punto C absorberá las cargas axiales que pudieran surgir. En la figura 41 se puede observar el diseño con sus apoyos.

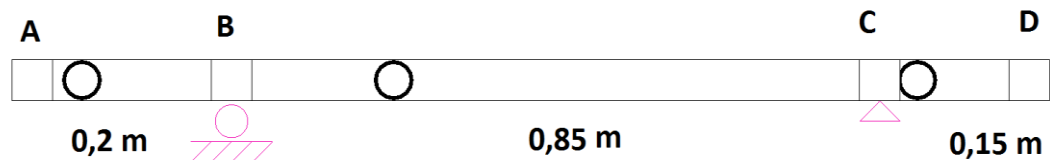


Figura 41. Rodamientos 1º eje multiplicador

Las reacciones en los apoyos las obtuvimos en el apartado 3.5.1 en el que elegimos la opción 2 como la más favorable.

En la tabla 32 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	-41282,75 N	-11819,19 N
Fz	-17238,06 N	10447,3 N
Ft	44737,18 N	15774,44 N

Tabla 32. Reacciones y momentos Opción 2

En la figura 42 podemos ver las reacciones en los apoyos de nuestro eje:

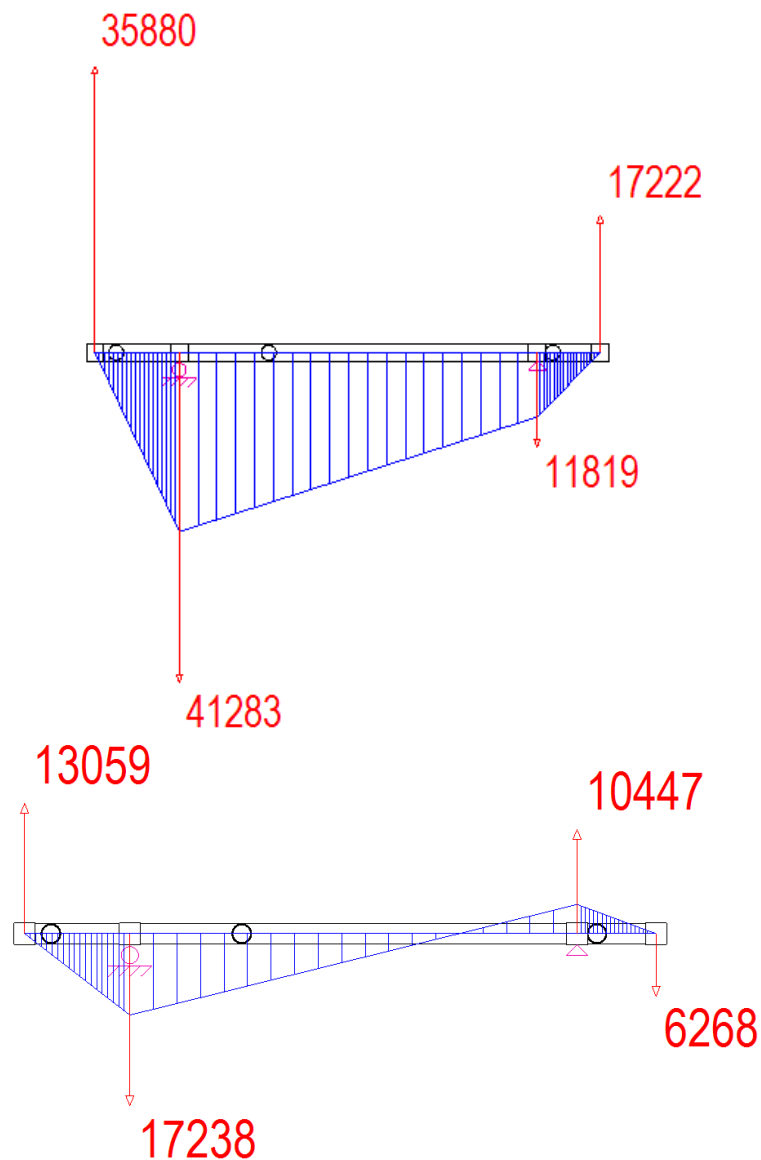


Figura 42. Reacciones en los rodamientos

Elegimos rodamientos de bolas para ambos apoyos por considerar que se adaptan a nuestras necesidades perfectamente, pues a un régimen bajo de revoluciones y unas cargas aceptables cumplen sobradamente con su cometido como podemos observar en las tablas 33 y 34.



Characteristic	Tapered Roller Bearing	Thrust Tapered Roller Bearing	Cylindrical Roller Bearing	Thrust Cylindrical Roller Bearing	Spherical Roller Bearing	Thrust Spherical Roller Bearing	Ball Bearing	Thrust Ball Bearing	Needle Roller Bearing	Thrust Needle Roller Bearing
Pure Radial Load	Excellent	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Good	Poor	Excellent	Unsuitable
Pure Axial Load	Good	Excellent	Unsuitable	Good	Fair	Excellent	Fair	Excellent	Unsuitable	Excellent
Combined Load	Excellent	Fair	Fair	Unsuitable	Excellent	Fair	Good	Poor	Unsuitable	Unsuitable
Moment Load	Fair	Poor	Unsuitable	Unsuitable	Unsuitable	Unsuitable	Good	Poor	Fair	Unsuitable
High Stiffness	Excellent	Excellent	Good	Excellent	Good	Good	Fair	Good	Good	Excellent
Quiet Running	Fair	Fair	Good	Poor	Fair	Poor	Excellent	Good	Good	Fair
Low Friction	Fair	Fair	Good	Poor	Fair	Fair	Excellent	Excellent	Good	Good
Misalignment	Poor	Poor	Poor	Unsuitable	Excellent	Excellent	Good	Poor	Poor	Poor
Locating Position (Fixed)	Excellent	Good	Fair	Fair	Good	Good	Good	Excellent	Unsuitable	Excellent
Non-Locating Position (Floating)	Good	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Fair	Unsuitable	Good	Unsuitable	Good	Unsuitable
Speed	Good	Good	Good	Poor	Fair	Fair	Excellent	Excellent	Good	Poor

Tabla 33. Especificaciones de rodamientos

Characteristic	Spherical Roller Bearing
Pure Radial Load	Excellent
Pure Axial Load	Fair
Combined Load	Excellent
Moment Load	Unsuitable
High Stiffness	Good
Quiet Running	Fair
Low Friction	Fair
Misalignment	Excellent
Locating Position (Fixed)	Good
Non-Locating Position (Floating)	Fair
Speed	Fair

Tabla 34. Rodamientos esféricos

Según el catálogo de rodamientos SKF:

**“Vida nominal requerida**

Cuando se determina el tamaño del rodamiento, compare la vida nominal SKF calculada con la vida especificada de la aplicación, si se encuentra disponible. Esto suele depender del tipo de máquina y de los requisitos respecto de la duración del servicio y la confiabilidad operativa. En el caso de falta de experiencia previa, se pueden utilizar los valores orientativos enumerados en la tabla 9 y la tabla 10.”

Como apreciamos en la tabla 35 escogemos una vida nominal media de  $L_{10}$  65.000 horas para maquinaria para energía eólica.

Para calcular la vida del rodamiento pasaremos las horas a las vueltas que dará a lo largo de su vida útil:

$$L_{10} = 65000 (h) \cdot 15 (rpm) \cdot \frac{60 (\text{min})}{1 (h)} = 58,5 \cdot 10^6 \text{ revoluciones}$$

Tabla 9

Valores orientativos de la vida útil especificada de los diferentes tipos de máquinas	
Tipo de máquina	Vida útil especificada Horas de funcionamiento
Electrodomésticos, máquinas agrícolas, instrumentos, equipos técnicos de uso médico	300 ... 3 000
Máquinas utilizadas intermitentemente o durante breves períodos: herramientas eléctricas portátiles, dispositivos de elevación en talleres, máquinas y equipos para la construcción	3 000 ... 8 000
Máquinas utilizadas intermitentemente o durante breves períodos donde se requiere una alta confiabilidad: ascensores (elevadores), grúas para productos embalados o eslingas para tambores, etc.	8 000 ... 12 000
Máquinas para 8 horas de trabajo diario, no siempre utilizadas al máximo: transmisiones por engranajes de uso general, motores eléctricos para uso industrial, trituradoras giratorias	10 000 ... 25 000
Máquinas para 8 horas de trabajo diario utilizando plenamente sus capacidades: herramientas mecánicas, máquinas para carpintería, máquinas para la industria de la ingeniería, grúas para materiales a granel, ventiladores, cintas transportadoras, equipos de impresión, separadores y centrifugadoras	20 000 ... 30 000
Máquinas para 24 horas de trabajo continuo: unidades de engranajes para laminadores, maquinaria eléctrica de tamaño medio, compresores, tornos de extracción para minas, bombas, maquinaria textil	40 000 ... 50 000
Maquinaria para energía eólica, incluidos los rodamientos del eje principal, de orientación, de la caja de engranajes de cambio de paso, del generador	<b>30 000 ... 100 000</b>
Maquinaria para abastecimiento de agua, hornos giratorios, máquinas de trenzado de cables, maquinaria de propulsión para buques de alta mar	60 000 ... 100 000
Máquinas eléctricas de gran tamaño, plantas de generación de energía, bombas para minas, ventiladores para minas, rodamientos para ejes en túnel para buques de alta mar	> 100 000

Tabla 35. Vida Nominal

De este modo para el apoyo B y C las capacidades dinámicas que tienen que soportar son:

$$C = F \cdot (L_{10})^{\frac{1}{a}}$$

Como usamos rodamientos esféricos usaremos el valor de  $a=3$  (página 213 del libro de diseño) y un factor de mayoración para la carga de 1,2 (página 214 del libro de diseño) al tratarse de maquinaria sin impactos:

$$C_B = 1,2 \cdot 44737,18 \cdot 58,5^{\frac{1}{3}} = 207806,526 (N)$$

$$C_C = 1,2 \cdot 15774,44 \cdot 58,5^{\frac{1}{3}} = 73273,09 (N)$$

Del catálogo de Timken escogemos los siguientes rodamientos:

- Rodamiento B: 5315W de 75 mm de Ø interno con una carga dinámica máxima de 266000 N.
- Rodamiento C: 7215WN de 75mm de Ø interno con una carga dinámica máxima de 78000 N.

### **3.5.6. Anillos de retención**

Vamos a emplear anillos de sección constante por tratarse de los más sencillos pues no requerimos de ninguna aplicación especial.

Estos elementos se eligen en función del diámetro del eje el cual en ese punto es definido por el diámetro del rodamiento. En este caso emplearemos rodamientos de Ø75 mm, por lo que nuestros anillos los escogeremos respecto a ese tamaño.

Según el catálogo de Rotor Clip emplearemos los anillos SH-293 de Ø74,6 mm pues no disponen de anillos de Ø75 mm los cuales son capaces de soportar unas cargas de 7350 libras, 34918,53N, las cuales no serán necesarias por falta de carga axial.

### **3.5.7. Diseño de las chavetas**

Vamos a diseñar la chaveta encargada de transmitir el par del eje al engranaje. Vamos a hacer uso de las más comunes, las de sección transversal cuadradas o rectangulares cuyo ancho y alto están normalizados en función del diámetro del eje solo debemos calcular la longitud L que debe tener para poder transmitir el par T. Para el cálculo sobre la chaveta actúa una fuerza:

$$F = \frac{T}{R} = \frac{3665,5 (N \cdot m)}{37,5 (mm)} \cdot \frac{1000mm}{m} = 97746,66 (N)$$

Estudiaremos el elemento tanto a su posible fallo a cortante (área de cortante=w·L) como por aplastamiento (área de aplastamiento=h·L/2). Para que no se dé el fallo en ninguno de los dos casos deben cumplir lo siguiente:

$$\tau = \frac{T}{wL} \leq \frac{\tau_{yp}}{CS} \text{ (A cortante)}$$

$$\sigma = \frac{\frac{T}{R}}{hL/2} \leq \frac{\sigma_{YP}}{CS} \quad (A \text{ aplastamiento})$$

Siguiendo el catálogo Opac el material empleando será acero St 60 acero de 60 kg/mm<sup>2</sup> de resistencia a la tracción.

$$\tau = \frac{\sigma}{2} = \frac{60}{2} \left( \frac{Kg}{mm^2} \right) \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 294,3 \frac{N}{mm^2}$$

El cs empleado será de CS=1,2 pues es un elemento de seguridad que evitará que otros elementos más críticos resulten dañados siendo éste el que sufra las deformaciones.

Según la tabla 36 usaremos unos valores b y h de 20mm y 8mm.

Sección de la lengüeta de ajuste (acero para chavetas DIN 6880)	Anchura b	20	
	Altura h	8	12
Para diámetro del eje d1 3)	más de	65	
	hasta	75	

Tabla 36. Sección de chaveta

Por lo que:

$$\tau = \frac{97746,66}{20 \cdot L} \leq \frac{294,3}{1,2} \rightarrow L = 19,92 \text{ (mm)}$$

$$\sigma = \frac{97746,66}{8 \cdot L/2} \leq \frac{294,3 \cdot 2}{1,2} \rightarrow 49,81 \text{ (mm)}$$

Al ser el fallo por aplastamiento más restrictivo usaremos una chaveta que cumpla ese mínimo valor admisible. Según el catálogo la longitud para nuestra chaveta será de 90mm, con lo que la denominación será 20x8x90 DIN 6885 A.

### **3.6. 2º EJE MULTIPLICADOR**

Vamos a proceder al estudio del 2º eje multiplicador, situado entre el 1º eje multiplicador y el eje vertical. Como hemos explicado en el apartado 3.5.1 en el

cálculo de engranajes este eje gira a 30 rpm, 5x la velocidad del entrada del rotor de 6 rpm o 2x veces la del primer eje multiplicador.

Lo primero será definir el esquema del diseño, pues tendremos solamente los rodamientos en un eje bi-apoyado. Para este caso juntaremos lo máximo posible el engranaje a los apoyos, por lo que tomaremos el ancho de nuestros engranajes como dato principal de diseño. Seguiremos el mismo procedimiento empleado en el cálculo del eje de baja velocidad:

### **3.6.1. Cargas sobre el eje**

El 2º eje multiplicador tendrá que soportas las siguientes cargas que se dividen en los siguientes apartados:

#### **Momento torsor**

Tal y como explicamos en el anterior cálculo de engranajes la transmisión de potencia se expresa en la siguiente ecuación:

$$Pot = Pot_1 = Pot_2 \rightarrow T_1 \cdot w_1 = T_2 \cdot w_2 \rightarrow F_t \cdot R_1 \cdot w_1 = F_t \cdot R_2 \cdot w_2$$

Por lo que si la potencia se mantiene, al aumentar 2x la velocidad, disminuirá el momento torsor a la misma magnitud:

$$T_1 \cdot w_1 = T_2 \cdot w_2 \rightarrow 3665,5 (N \cdot mm) \cdot 15 (rpm) = T_2 \cdot 30 (rpm) \rightarrow$$

$$M_{Torsor} = 1832,75 (N \cdot mm)$$

#### **Calculo del engranaje cónico**

Del piñón del segundo conjunto multiplicador sabemos que tiene las siguientes características:

- b= 10 cm
- R= 10 cm
- $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$

$$Masa = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \rho}{1000} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 7,85}{1000} = 24,66 \text{ (kg)} \rightarrow 24,66 \cdot 9,81 = 241,92 \text{ N}$$

En este caso el dato principal es el momento torsor transmitido por el eje principal.

$$M_T = 1832,75 \text{ (Nm)}$$

Vamos a hacer uso de un engranaje cónico que será el encargado de transmitir el giro al eje vertical. Los ejes se cortan formando un ángulo de 90° con los siguientes datos de partida:

- Relación  $i=1$
- Módulo= 12 mm
- Pot=5,87 CV
- $\omega=30$  rpm

La figura 43 siguiente muestra las dimensiones normalizadas en los engranajes cónicos.

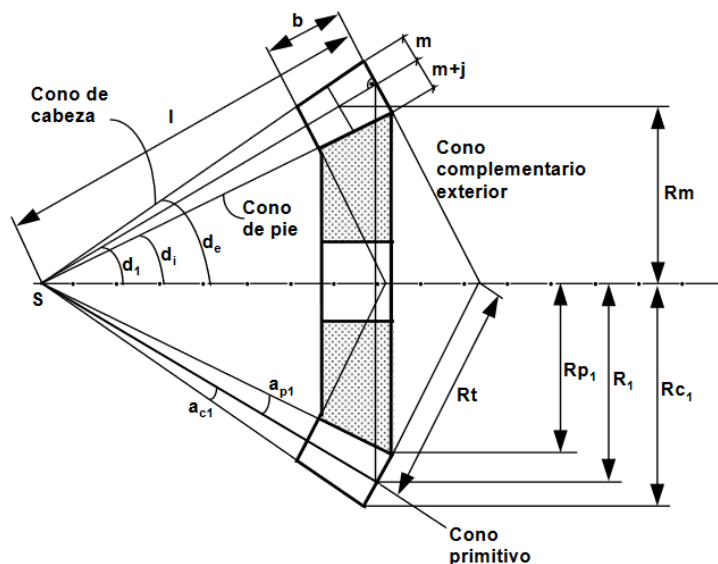


Figura 43. Engranajes cónicos

Donde:

- $R_1$  = Radio primitivo
- $R_{c1}$  = Radio de cabeza

- $R_{p1}$  = Radio de pie
- $R_{t1}$  = Radio del desarrollo en la construcción de treggold
- $R_{m1}$  = Radio medio
- $d_1$  = Ángulo primitivo
- $d_i$  = Ángulo interior
- $d_e$  = Ángulo exterior
- $a_{c1}$  = Ángulo de cabeza
- $a_{p1}$  = Ángulo de pie
- $\ell$  = Longitud de la generatriz de contacto

Tal y como hemos calculado en los anteriores engranajes se mantiene que:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = i = 1$$

Y como son cónicos con los ejes a 90°:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta = 90$$

$$\theta_1 = 45^\circ$$

$$\theta_2 = 45^\circ$$

El número límites de dientes teniendo en cuenta los números de dientes equivalentes:

$$\frac{Z_{\ell_1}}{\cos\theta_1} = 14 \quad Z_{\ell_1} = 14 \cdot \cos\theta_1 = 9,899 \text{ dientes}$$

$$\frac{Z_{\ell_2}}{\cos\theta_2} = 14 \quad Z_{\ell_2} = 14 \cdot \cos\theta_2 = 9,899 \text{ dientes}$$

Tomaremos el valor de 10 dientes redondeando el número dientes equivalentes.

$$R_1 = \frac{m \cdot Z_1}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60 \text{ (mm)}$$

$$R_2 = \frac{m \cdot Z_2}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60 \text{ (mm)}$$

Y la longitud de la generatriz de contacto y del ancho del engranaje:

$$\ell = \frac{R_1}{\text{sen}\theta_1} = \frac{R_2}{\text{sen}\theta_2} = \frac{60}{\text{sen}45^\circ} = 84,85 \text{ (mm)}$$

$$b = \frac{\ell}{3} = \frac{84,85}{3} = 28,28 \text{ (mm)}$$

Calculamos el resto de radios y ángulos para la completa definición del engranaje:

$$R_{C_1} = R_1 + m \cdot \cos\theta_1 = 60 + 16 \cdot \cos(45^\circ) = 71,31 \text{ (mm)}$$

$$R_{C_2} = R_2 + m \cdot \cos\theta_2 = 60 + 16 \cdot \cos(45^\circ) = 71,31 \text{ (mm)}$$

$$\text{tg } \alpha_c = \frac{m}{\ell} = \frac{16}{84,85} \rightarrow \alpha_c = 10,67^\circ$$

$$\text{tg } \alpha_p = \frac{m + j}{\ell} = \frac{16,8}{84,85} \rightarrow \alpha_p = 11,19^\circ$$

$$\theta_{C_1} = 45^\circ + 10,67^\circ = 55,67^\circ$$

$$\theta_{C_2} = 45^\circ + 11,19^\circ = 56,19^\circ$$

$$\theta_{p_1} = 45^\circ - 10,67^\circ = 34,33^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 45^\circ - 11,19^\circ = 33,81^\circ$$

Con esto sabemos ya las dimensiones de la pieza sobre la que tallaremos las ruedas, así como lo necesario para su talla.

Procedemos a calcular el peso del engranaje conociendo sus especificaciones y dimensiones, sabiendo que:

- $b = 28,85 \text{ mm}$
- $R = 6 \text{ cm}$
- $\Theta = 45^\circ$
- $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$

Considerando que es un cono a  $45^\circ$  calcularemos su volumen:



$$m = \frac{(\pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot R'^2 \cdot h') \cdot \rho}{3 \cdot 1000} = \frac{(\pi \cdot 6^2 \cdot 6 - \pi \cdot 3,99^2 \cdot 3,99) \cdot 7,85}{3 \cdot 1000} = 1,25 \text{ (kg)}$$

$$\rightarrow 1,25 \cdot 9,81 = 12,26 \text{ N}$$

Despreciaremos el peso de este engranaje en nuestros cálculos.

### **Fuerzas en el engranaje**

En la figura 44 obtenida del libro “Elementos de máquinas. ETSIB” pág. 171 se observan las fuerzas que aparecen en el contacto de dos ruedas cónicas de dientes rectos. Así la fuerza F se transmite en el plano perpendicular al plano tangente con componentes:

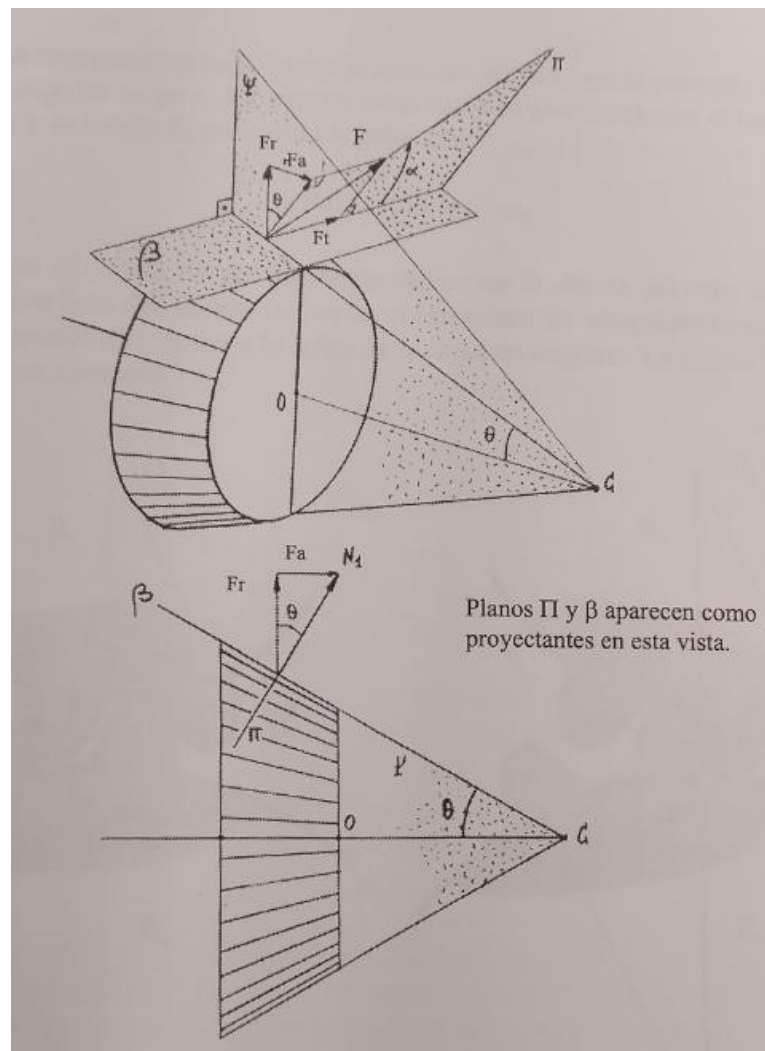


Figura 44. Fuerzas en engranajes cónicos

Según la teoría:

$$R_{m_1} = R_1 - \frac{b}{2} \operatorname{sen} \theta_1 = 60 - \frac{28,28}{2} \operatorname{sen}(45^\circ) = 50 \text{ mm}$$

$$F = \frac{M_1}{R_{m_1}} = \frac{1832,75 \text{ (Nm)}}{0,05 \text{ (m)}} = 36655 \text{ (N)}$$

$$F_t = F \cos \alpha = 36655 \cos 20^\circ = 34444,43 \text{ (N)}$$

$$N_1 = F \operatorname{sen} \alpha = 36655 \operatorname{sen} 20^\circ = 12536,74 \text{ (N)}$$

$$F_a = F \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta = 36655 \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = 8864,81 \text{ (N)}$$

$$F_r = F \operatorname{sen} \alpha \cos \theta = 36655 \operatorname{sen} 20^\circ \cos 45^\circ = 8864,81 \text{ (N)}$$

### **Reacciones en los apoyos y momentos flectores**

Nuestro 2º eje multiplicador tendrá el diseño de la figura 45:

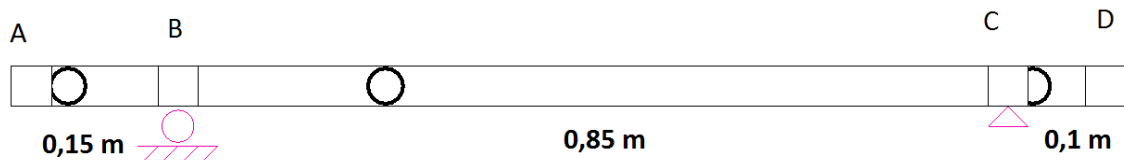


Figura 45. 2º eje multiplicador

Sabiendo que gira en sentido horario, tenemos la fuerza radial en sentido horizontal negativo y la tangencial en sentido vertical negativo del engranaje A y las reacciones axial en sentido X negativo, tangencial en sentido horizontal positivo y radial en sentido vertical negativo del engranaje cómico recto del punto D. En este caso el engranaje cónico del eje vertical se colocará debajo del 2º eje multiplicador.

Recordemos las reacciones del 2º engranaje del apartado 3.5.1:

$$F_T = F_n * \cos \alpha = 18327,54 * \cos 20^\circ = 17222,25 \text{ (N)}$$

$$F_R = F_n * \sin \alpha = 18327,54 * \sin 20^\circ = 6268,3878 \text{ (N)}$$

Vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje.

Plano XY

$$\sum M_{By} = 0$$
$$-17222,25 * 0,15 - 8864,81 * 0,95 - F_{Cy} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cy} = 12946,94 (N)$$

$$\sum F_Y = 0$$
$$-17222,25 - 12946,94 + 8864,81 + F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = 21304,4 (N)$$

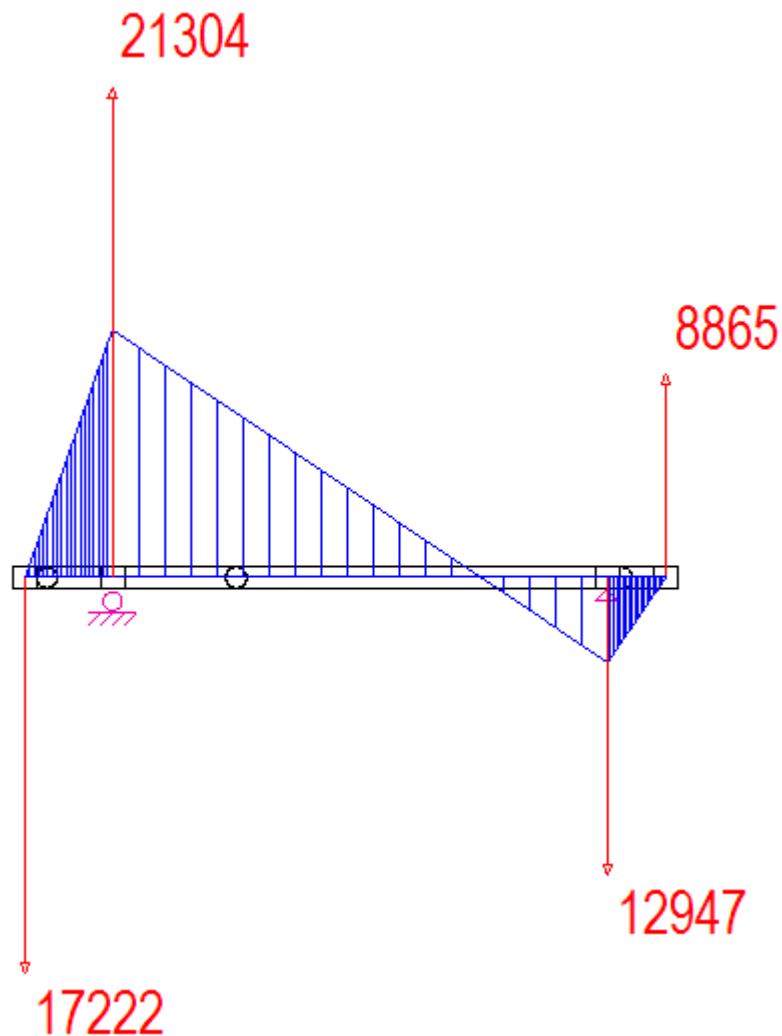


Figura 46. 2ª eje XY

Plano XZ

$$\sum M_{Bz} = 0$$
$$6268,38 * 0,15 + 34444,43 * 0,95 - F_{Cz} * 0,85 = 0 \rightarrow F_{Cz} = 39602,9 (N)$$

$$\sum F_Z = 0$$
$$6268,38 + 39602,9 - 34444,43 - F_{Bz} = 0 \rightarrow F_{Bz} = -11426,9 (N)$$

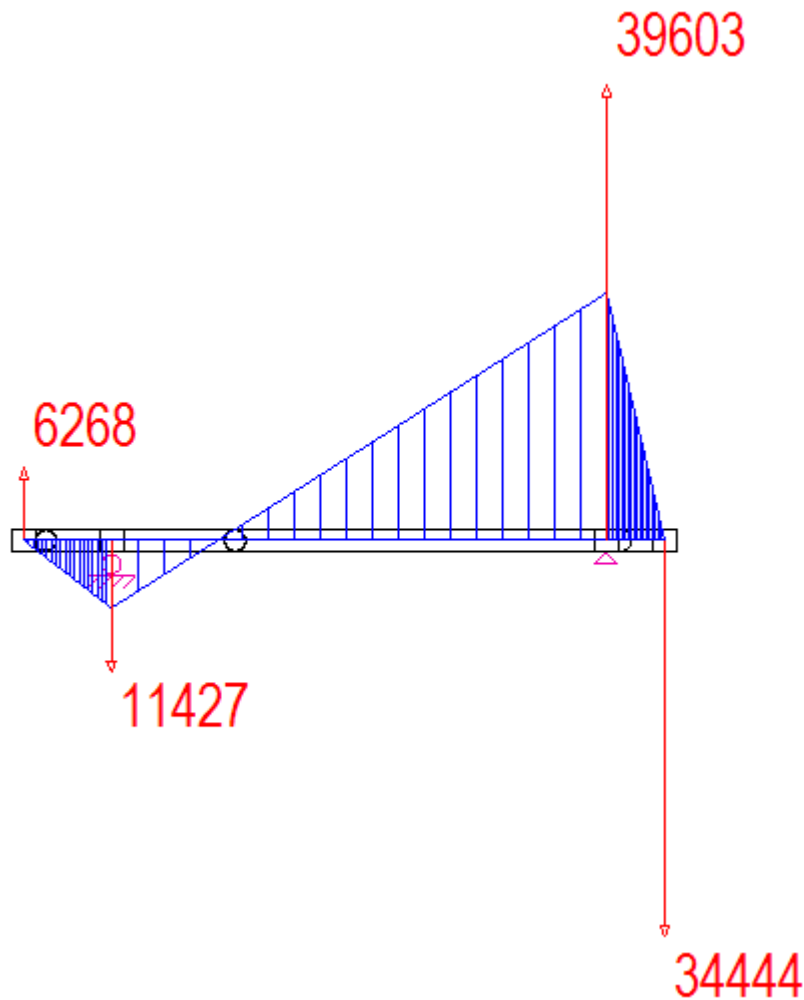


Figura 47. 2ª eje XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 17222,25 * 0,15 = 2583,33 (Nm)$$

$$M_{Bz} = 6268,38 * 0,15 = 940,257 (Nm)$$

$$M_{Cy} = 8864,81 * 0,1 = 886,481 (Nm)$$

$$M_{Cz} = 34444,43 * 0,1 = 3444,443 (Nm)$$

En la tabla 37 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	21304,4 N	12946,94 N
Fz	-11426,9 N	39602,9 N
Ft	24175,43 N	41665,48 N
My	2583,33 Nm	886,481 Nm
Mz	940,257 Nm	3444,443 Nm
Mt	2749,122 Nm	3556,68 Nm

Tabla 37. Reacciones y momentos 2º eje

### 3.6.2. Cálculo del eje según las tensiones

El 2º eje multiplicador ha de ser capaz de soportar las cargas anteriormente citadas, para lo cual haremos uso del cálculo de ejes mediante el código ASME.

#### Cálculo de ejes mediante el código ASME

La expresión del código ASME para el cálculo a fatiga es la siguiente:

$$\tau_{max} = \frac{r}{J} \sqrt{(C_m \cdot M)^2 + (C_t \cdot T)^2} < \tau_{yp}$$

El código ASME toma los valores de los momentos M y T y los mayorará mediante unos coeficientes  $C_m$  y  $C_t$  de la tabla 38

	$C_m$	$C_t$
<b>EJES FIJOS:</b>		
Carga aplicada gradualmente (constante)	1.0	1.0
Carga aplicada repentinamente	1.5-2.2	1.5-2.2
<b>EJES GIRATORIOS:</b>		
Carga aplicada gradualmente (constante)	1.5	1.0
Carga aplicada repentinamente, sólo pequeños impactos	1.5-2.0	1.0-1.5
Carga aplicada repentinamente, grandes impactos	2.0-3.0	1.5-3.0

Tabla 38. Coeficientes de mayoración ASME.

En nuestro caso nos hallamos ante un caso en el que la carga es aplicada gradualmente sin impactos por lo que nuestros coeficientes de mayoración serán:

$$C_m = 1,5$$

$$C_t = 1,0$$

### Material escogido

Emplearemos un acero AISI / SAE 1045 (tabla 39) al tratarse de un acero de mediano contenido de carbono utilizado ampliamente en elementos estructurales que requieran mediana resistencia mecánica y tenacidad a bajo costo. Posee baja soldabilidad, buena maquinabilidad y excelente forjabilidad. Es utilizado para todo tipo de elementos que requieren dureza y tenacidad como ejes, manivelas, chavetas, pernos, tuercas, cadenas, engranajes de baja velocidad, espárragos, acoplamientos, bielas, pasadores, cigüeñales y piezas estampadas. Puede ser sometido a temple y revenido. Haremos uso del catálogo de Aceros Otero, pág. 134.

Composición Química				
% C	% Mn	% Si	% P	% S
0,43 - 0,50	0,60 - 0,90	0,15 - 0,35	≤ 0,04	≤ 0,05

Propiedades Mecánicas Acero Laminado (Valores típicos)			
Dureza (HB)	Esfuerzo Fluencia (min.) (Kg / mm <sup>2</sup> )	Esfuerzo Tracción (min.) (Kg / mm <sup>2</sup> )	Elongación (min.)%
170 - 190	40	63 - 73	15

Tabla 39. Características del material AISI 1045.

La característica mecánica que más nos ocupan es el esfuerzo a fluencia, que en este caso es:

$$\sigma_{yp} = 40 \left( \frac{kg}{mm^2} \right) = 392,4 (MPa)$$

### Coeficiente de seguridad (CS)

El coeficiente de seguridad parcial para materiales se obtiene del código IEC-61400-02:2006 pág. 89. En dicho código (tabla 40) se obtienen los coeficientes según la resistencia a la fatiga o el límite de rotura conociendo la caracterización total con un valor de 1,25.

**Table 6 – Partial safety factors for materials**

Condition	Full characterisation	Minimal characterisation
Fatigue strength	1,25 <sup>a)</sup>	10,0 <sup>b)</sup>
Ultimate strength	1,1	3,0

<sup>a)</sup> Factor is applied to the stress ranges as shown in equation (48).  
<sup>b)</sup> Factor is applied to the measured ultimate strength of the material.

*Tabla 40. Coeficiente de seguridad según normativa.*

### Dimensionamiento a fatiga

Se hará uso del catálogo de Aceros Otero para elegir un perfil pues dispone de un rango amplio de medidas del cual elegiremos el tamaño adecuado según las necesidades de nuestro diseño.

Primero se aplica el coeficiente de seguridad a fatiga de la tabla 33 para poder calcular mediante el código ASME el diámetro mínimo necesario para soportar las cargas.

$$\sigma_{admissible} = \frac{\sigma_{yp}}{CS} = \frac{392,4}{1,25} = 313,92 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{admissible} = \frac{\frac{\sigma_{yp}}{2}}{CS} = \frac{\tau_{yp}}{2} = \frac{\frac{392,4}{2}}{1,25} = 156,96 \text{ (MPa)}$$

Mediante una tabla Excel se calcula el Ø mínimo mediante la expresión del código ASME para el cálculo a fatiga:

$$\tau_{max} = \frac{r}{J} \sqrt{(C_m \cdot M)^2 + (C_t \cdot T)^2} < \tau_{yp}$$

$$\tau_{max} = \frac{r}{\frac{\pi}{2} \cdot r^4} \cdot \sqrt{(1,5 \cdot 3556,68)^2 + (1 \cdot 1832,75)^2} < 156,96 \text{ (MPa)}$$

Con un  $\varnothing$  de 56,78 mm (radio de 28,39 mm) conseguimos el espesor mínimo que debe tener nuestro eje.

$$\tau_{max} = \frac{28,39}{\frac{\pi}{2} \cdot 28,39^4} \cdot \sqrt{(1,5 \cdot 3556,68)^2 \cdot (1 \cdot 1832,75)} = 156,94 < 156,96 \text{ (MPa)}$$

Suponemos que el suministrador entregará materiales mínimo de mm en mm, siendo lo más normal moverse entre 5 o 10 mm de diferencia entre cada redondo, por lo que redondeando nos movemos en un eje de 60 mm.

### 3.6.3. Dimensionamiento según deflexiones

Las fuerzas y momentos que actúan en nuestro eje son las reacciones de ambos engranajes. Se pueden observar en las figuras 48.

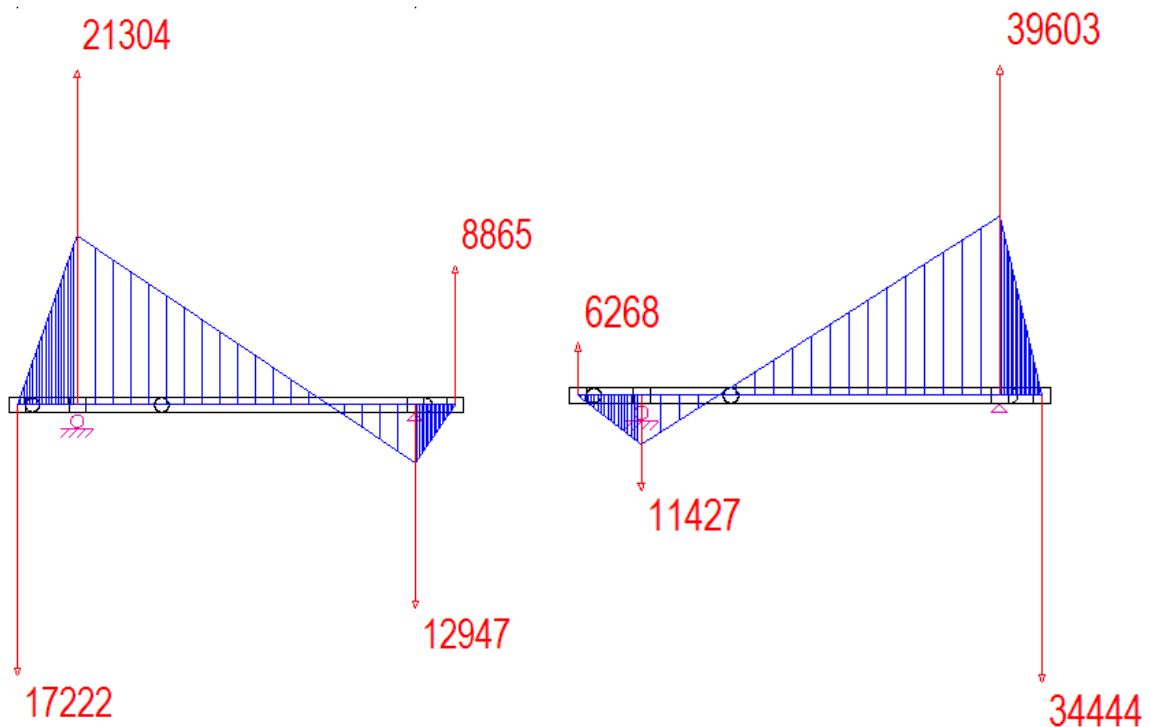


Figura 48. Fuerzas y momentos en el 2º eje multiplicador

Como tenemos 4 cargas distintas vamos a hacer uso de la teoría de superposición aplicando el teorema de Mohr.



1ª deformación: reacción tangencial 2º engranaje

En primer lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción tangencial del segundo engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 49.

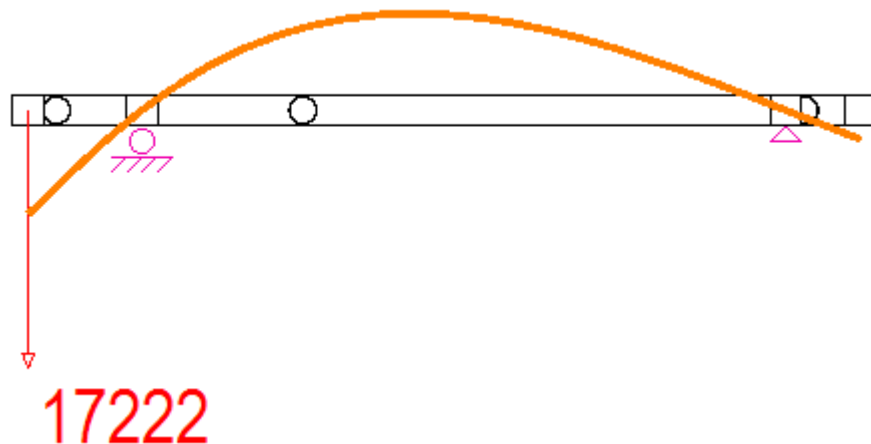


Figura 49. 1ª deformada

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\delta_{A'A'} = \theta_B \cdot L_1$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A'A'} + \delta_{AB}$$

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3$$

Primero calculamos la deformación en CB y el giro de B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2583,33 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{6,22 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{6,22 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{7,31 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta BC y giro en C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2583,33 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{3,11 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{3,11 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{3,65 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo A:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2583,33 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 150 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 150 (mm) \right) \right] = \frac{1,93 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{7,31 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{1,09 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB} = \frac{1,09 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z} + \frac{1,93 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} = \frac{1,28 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{3,65 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 100 = \frac{3,65 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

## 2ª deformación: reacción radial 2º engranaje

En segundo lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción radial del segundo engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 50.



Figura 50. 2ª deformada

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\delta_{A'A'} = \theta_B \cdot L_1$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A'A'} + \delta_{AB}$$

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3$$

Primero calculamos la deformación en CB y el giro de B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 940,257 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{2,26 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{2,26 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{2,66 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta BC y giro en C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 940,257 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{1,13 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{1,13 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{1,33 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo A:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 940,257 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 150 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 150 (mm) \right) \right] = \frac{7,05 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{2,66 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{3,99 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB} = \frac{3,99 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z} + \frac{7,05 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} = \frac{4,695 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{1,33 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 100 = \frac{1,33 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

### 3ª deformación: reacción tangencial engranaje cónico

En tercer lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción tangencial del engranaje cónico dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 51.

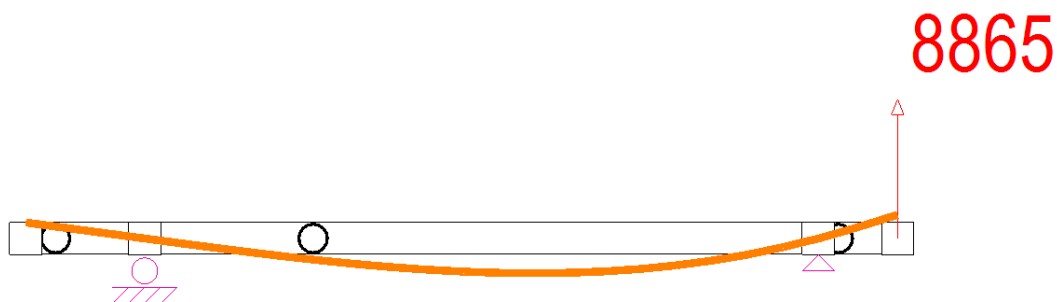


Figura 51. 3ª deformada

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\delta_{D'D'} = \theta_C \cdot L_3$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D'D'} + \delta_{DC}$$

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1$$

Primero calculamos la deformación en BC y el giro de C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 886,481 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{2,13 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{2,13 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{2,511 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta CB y giro en B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 886,481 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{1,067 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{1,067 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{1,25 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo D:

$$\delta_{DC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 886,481 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 100 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 100 (mm) \right) \right] = \frac{2,95 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D'D'} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{2,511 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 100 = \frac{2,511 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D'D'} + \delta_{DC} = \frac{2,511 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} + \frac{2,95 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} = \frac{2,806 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en A:

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{1,25 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} \cdot 150 = \frac{1,875 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_z}$$

#### 4ª deformación: reacción radial engranaje cónico

En cuarto lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción radial del engranaje cónico dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 52.

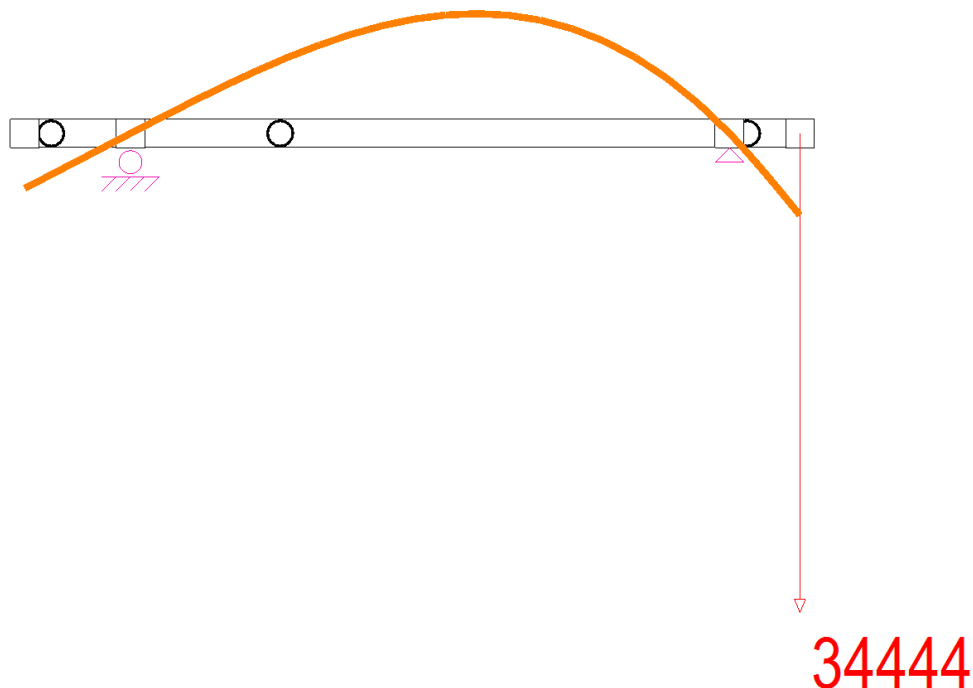


Figura 52. 4ª deformada

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\delta_{D'D'} = \theta_C \cdot L_3$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC}$$

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1$$

Primero calculamos la deformación en BC y el giro de C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 3444,443 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{8,295 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{8,295 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{9,75 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta CB y giro en B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 3444,443 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 850 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 850 (mm) \right) \right] = \frac{4,147 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{4,147 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{850} = \frac{4,87 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo D:

$$\delta_{DC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 3444,443 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 100 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 100 (mm) \right) \right] = \frac{1,148 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D''D'} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{9,75 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 100 = \frac{9,75 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{D'D} = \delta_{D''D'} + \delta_{DC} = \frac{9,75 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} + \frac{1,148 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} = \frac{1,09 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en A:

$$\delta_{A'A} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{4,87 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{7,305 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

Vamos a proceder a juntar el ángulo de giro de las deformaciones tangenciales y radiales y hacer una suma vectorial entre ellas:

$$\theta_B = \sqrt{\left(\frac{7,31 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} + \frac{1,25 \cdot 10^8}{E \cdot I_z}\right)^2 + \left(\frac{2,66 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} - \frac{4,87 \cdot 10^8}{E \cdot I_z}\right)^2}$$

$$\theta_c = \sqrt{\left(\frac{3,65 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} + \frac{2,511 \cdot 10^8}{E \cdot I_z}\right)^2 + \left(\frac{1,33 \cdot 10^8}{E \cdot I_z} - \frac{9,75 \cdot 10^8}{E \cdot I_z}\right)^2}$$

Teniendo en cuenta que el módulo de Young:

$$E = 210 \text{ (GPa)} = 210000 \text{ (MPa)}$$

Y que el momento de inercia de una barra circular es:

$$I_z = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 28,39^4 = 6,496 \cdot 10^6 \text{ (mm)}$$

Los giros son:

$$\theta_B = \sqrt{\left(\frac{7,31 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6} - \frac{1,25 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{2,66 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6} - \frac{4,87 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6}\right)^2} = 0,00301 \text{ (rad)}$$

$$\theta_c = \sqrt{\left(\frac{3,65 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6} - \frac{2,511 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{1,33 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6} - \frac{9,75 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6}\right)^2} = 0,0039 \text{ (rad)}$$

Como usaremos rodamientos de bolas de contacto angular y rodamientos de rodillos esféricos son medidas aceptables (tabla 41):



	PENDIENTE MÁXIMA ADMISIBLE ( $\theta_{max}$ )
Rodamiento de rodillos cónicos	0.0005-0.0012 rad
Rodamiento de rodillos cilíndricos	0.0008-0.0012 rad
Rodamiento de bolas de ranura profunda	0.001-0.003 rad
Rodamiento de bolas de contacto angular	0.026-0.052 rad
Engranaje cilíndrico recto	0.026-0.052 rad

Tabla 41. Pendiente máxima admisible

### 3.6.4. Diseño del eje en base a vibraciones

Además de las deflexiones estáticas del apartado anterior, también hay que comprobar que las vibraciones del eje no sean excesivas. El eje diseñado debe cumplir la siguiente expresión:

$$w_{eje} \ll w_{crítica} = \sqrt{\frac{g \cdot \sum(w_i \cdot y_i)}{\sum(w_i \cdot y_i^2)}}$$

En nuestro eje tenemos dos masas, 2º engranaje (24,66 kg) y el engranaje cónico (1,25 kg). Despreciaremos sus deformaciones al tratarse de pesos muy pequeños teniendo en cuenta que en los ejes anteriores los pesos eran mayores y no suponían ningún problema.

### 3.6.5. Rodamientos 2º eje multiplicador

Los rodamientos son los elementos necesarios para el apoyo del eje y que este pueda girar libremente con la menor fricción y pérdidas posibles. En este caso el diseño consta de dos apoyos (B y C) en los que emplearemos rodamientos esféricos, en el cual el rodamiento del punto C absorberá las cargas axiales. En la figura 53 se puede observar el diseño con sus apoyos.

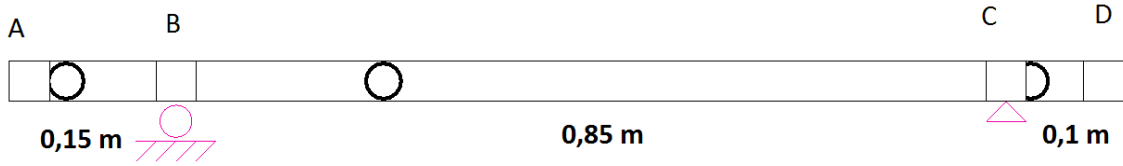


Figura 53. Rodamientos 2º eje multiplicador

Las reacciones en los apoyos las obtuvimos en el apartado 3.6.1.

En la tabla 42 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	21304,4 N	12946,94 N
Fz	-11426,9 N	39602,9 N
Ft	24175,43 N	41665,48 N
Fa	0	8864,81 N

Tabla 42. Reacciones en engranajes

En la figura 54 podemos ver las reacciones en los apoyos de nuestro eje:

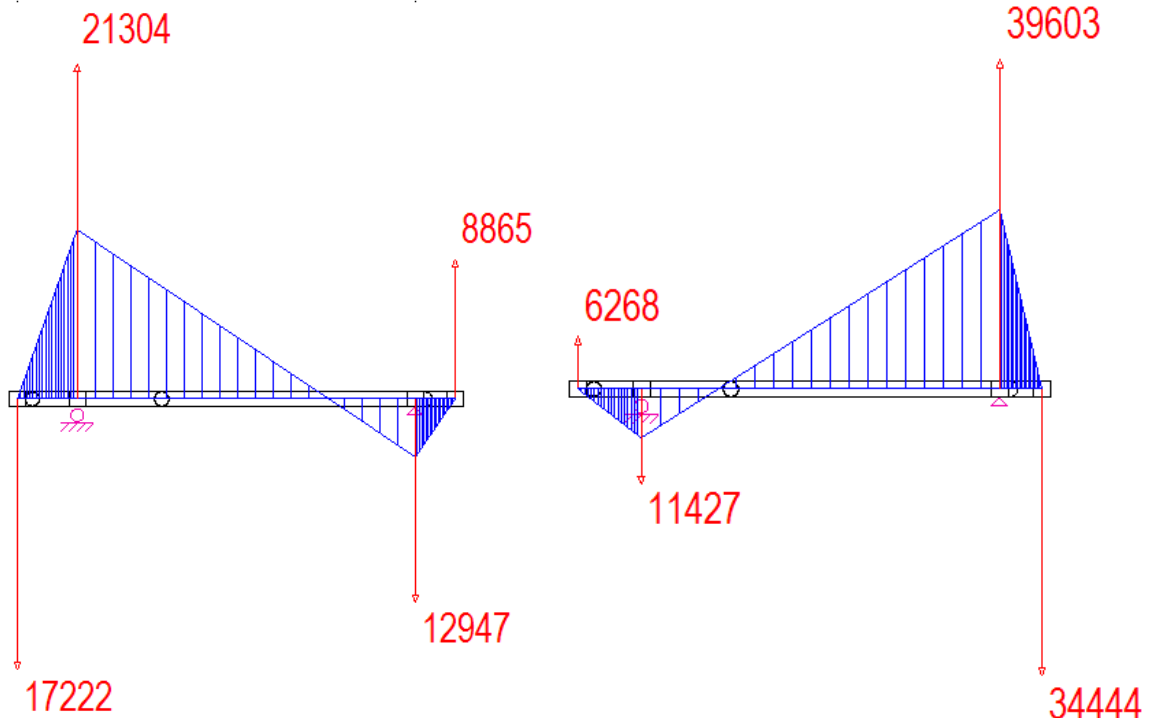


Figura 54. Reacciones en los rodamientos

Elegimos rodamientos de bolas para el primer apoyo y de rodillos esféricos para el segundo apoyo por considerar que se adaptan a nuestras necesidades perfectamente, pues a un régimen bajo de revoluciones y unas cargas aceptables cumplen sobradamente con su cometido como podemos observar en la tabla 43 y 44.

Characteristic	Tapered Roller Bearing	Thrust Tapered Roller Bearing	Cylindrical Roller Bearing	Thrust Cylindrical Roller Bearing	Spherical Roller Bearing	Thrust Spherical Roller Bearing	Ball Bearing	Thrust Ball Bearing	Needle Roller Bearing	Thrust Needle Roller Bearing
Pure Radial Load	Excellent	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Good	Poor	Excellent	Unsuitable
Pure Axial Load	Good	Excellent	Unsuitable	Good	Fair	Excellent	Fair	Excellent	Unsuitable	Excellent
Combined Load	Excellent	Fair	Fair	Unsuitable	Excellent	Fair	Good	Poor	Unsuitable	Unsuitable
Moment Load	Fair	Poor	Unsuitable	Unsuitable	Unsuitable	Unsuitable	Good	Poor	Fair	Unsuitable
High Stiffness	Excellent	Excellent	Good	Excellent	Good	Good	Fair	Good	Good	Excellent
Quiet Running	Fair	Fair	Good	Poor	Fair	Poor	Excellent	Good	Good	Fair
Low Friction	Fair	Fair	Good	Poor	Fair	Fair	Excellent	Excellent	Good	Good
Misalignment	Poor	Poor	Poor	Unsuitable	Excellent	Excellent	Good	Poor	Poor	Poor
Locating Position (Fixed)	Excellent	Good	Fair	Fair	Good	Good	Good	Excellent	Unsuitable	Excellent
Non-Locating Position (Floating)	Good	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Fair	Unsuitable	Good	Unsuitable	Good	Unsuitable
Speed	Good	Good	Good	Poor	Fair	Fair	Excellent	Excellent	Good	Poor

Tabla 43. Especificaciones de rodamientos

Characteristic	Spherical Roller Bearing	Thrust Spherical Roller Bearing	Ball Bearing
Pure Radial Load	Excellent	Unsuitable	Good
Pure Axial Load	Fair	Excellent	Fair
Combined Load	Excellent	Fair	Good
Moment Load	Unsuitable	Unsuitable	Good
High Stiffness	Good	Good	Fair
Quiet Running	Fair	Poor	Excellent
Low Friction	Fair	Fair	Excellent
Misalignment	Excellent	Excellent	Good
Locating Position (Fixed)	Good	Good	Good
Non-Locating Position (Floating)	Fair	Unsuitable	Good
Speed	Fair	Fair	Excellent

Tabla 44. Rodamientos esféricos y de rodillo esférico

Según el catálogo de rodamientos SKF:

**“Vida nominal requerida**

Cuando se determina el tamaño del rodamiento, compare la vida nominal SKF calculada con la vida especificada de la aplicación, si se encuentra disponible. Esto suele depender del tipo de máquina y de los requisitos respecto de la duración del

servicio y la confiabilidad operativa. En el caso de falta de experiencia previa, se pueden utilizar los valores orientativos enumerados en la tabla 9 y la tabla 10.”

Como apreciamos en la tabla 45 escogemos una vida nominal media de  $L_{10}$  65.000 horas para maquinaria para energía eólica.

Para calcular la vida del rodamiento pasaremos las horas a las vueltas que dará a lo largo de su vida útil:

$$L_{10} = 65000 (h) \cdot 30 (rpm) \cdot \frac{60 (\text{min})}{1 (h)} = 117 \cdot 10^6 \text{ revoluciones}$$

**Tabla 9**

Valores orientativos de la vida útil especificada de los diferentes tipos de máquinas	
Tipo de máquina	Vida útil especificada Horas de funcionamiento
Electrodomésticos, máquinas agrícolas, instrumentos, equipos técnicos de uso médico	300 ... 3 000
Máquinas utilizadas intermitentemente o durante breves periodos: herramientas eléctricas portátiles, dispositivos de elevación en talleres, máquinas y equipos para la construcción	3 000 ... 8 000
Máquinas utilizadas intermitentemente o durante breves periodos donde se requiere una alta confiabilidad: ascensores (elevadores), grúas para productos embalados o eslingas para tambores, etc.	8 000 ... 12 000
Máquinas para 8 horas de trabajo diario, no siempre utilizadas al máximo: transmisiones por engranajes de uso general, motores eléctricos para uso industrial, trituradoras giratorias	10 000 ... 25 000
Máquinas para 8 horas de trabajo diario utilizando plenamente sus capacidades: herramientas mecánicas, máquinas para carpintería, máquinas para la industria de la ingeniería, grúas para materiales a granel, ventiladores, cintas transportadoras, equipos de impresión, separadores y centrifugadoras	20 000 ... 30 000
Máquinas para 24 horas de trabajo continuo: unidades de engranajes para laminadores, maquinaria eléctrica de tamaño medio, compresores, tornos de extracción para minas, bombas, maquinaria textil	40 000 ... 50 000
Maquinaria para energía eólica, incluidos los rodamientos del eje principal, de orientación, de la caja de engranajes de cambio de paso, del generador	<b>30 000 ... 100 000</b>
Maquinaria para abastecimiento de agua, hornos giratorios, máquinas de trenzado de cables, maquinaria de propulsión para buques de alta mar	60 000 ... 100 000
Máquinas eléctricas de gran tamaño, plantas de generación de energía, bombas para minas, ventiladores para minas, rodamientos para ejes en túnel para buques de alta mar	> 100 000

Tabla 45. Vida Nominal

En este caso el apoyo C soportará la carga axial, por lo que (tabla 46):

$$\frac{F_a}{f_r} = \frac{8864,81}{41665,48} = 0.21$$

If, in addition to the radial load, an axial load  $F_a$  acts on the bearing, this axial load is taken into consideration when calculating the life of a bearing (with  $F_a \leq F_{az}$ ;  $F_{az}$  is the allowable axial load).

Dimension Series	Load ratio	Equivalent Dynamic Load
10.. 2..E, 3..E	$F_a/F_r \leq 0.11$	$P = F_r$
	$F_a/F_r > 0.11$	$P = 0.93 \cdot F_r + 0.69 \cdot F_a$
22..E, 23..E	$F_a/F_r \leq 0.17$	$P = F_r$
	$F_a/F_r > 0.17$	$P = 0.93 \cdot F_r + 0.45 \cdot F_a$

Tabla 46. Carga dinámica equivalente

La carga F en el punto C será:

$$P = 0,93 \cdot F_r + 0,45 \cdot F_a = 0,93 \cdot 41665,48 + 0,45 \cdot 8864,81 = 42738,06 \text{ (N)}$$

De este modo para el apoyo B y C las capacidades dinámicas que tienen que soportar son:

$$C = F \cdot (L_{10})^{\frac{1}{a}}$$

Como usamos rodamientos esféricos usaremos el valor de  $a=3$  (página 213 del libro de diseño) y para rodamientos de rodillos el valor de  $a=10/3$  y un factor de mayoración para la carga de 1,2 (página 214 del libro de diseño) al tratarse de maquinaria sin impactos:

$$C_B = 1,2 \cdot 24175,43 \cdot 117^{\frac{1}{3}} = 141889,65 \text{ (N)}$$

$$C_C = 1,2 \cdot 42738,06 \cdot 117^{\frac{3}{10}} = 214018,74 \text{ (N)}$$

Del catálogo de Timken escogemos los siguientes rodamientos:

- Rodamiento B: 5312W de 60 mm de  $\emptyset$  interno con una carga dinámica máxima de 151000 N.
- Rodamiento C: 22312CJ de 60 mm de  $\emptyset$  interno con una carga dinámica máxima de 269000 N.

### 3.6.6. Anillos de retención

Vamos a emplear los de sección constante por tratarse de los más sencillos pues no requerimos de ninguna aplicación especial.

Estos elementos se eligen en función del diámetro del eje el cual en ese punto es definido por el diámetro del rodamiento. En este caso emplearemos rodamientos de Ø60 mm, por lo que nuestros anillos los escogeremos respecto a ese tamaño.

Según el catálogo de Rotor Clip emplearemos los anillos SH-237 de Ø60,3mm pues no disponen de anillos de Ø60 mm los cuales son capaces de soportar unas cargas de 5000 libras, 23754,1 N.

### **3.6.7. Diseño de las chavetas**

Para el cálculo sobre la chaveta actúa una fuerza:

$$F = \frac{T}{R} = \frac{1832,75 (N \cdot m)}{28,39 (mm)} \cdot \frac{1000 (mm)}{(m)} = 64556,18 (N)$$

Estudiaremos el elemento tanto a su posible fallo a cortante (área de cortante= $w \cdot L$ ) como por aplastamiento (área de aplastamiento= $h \cdot L/2$ ). Para que no se dé el fallo en ninguno de los dos casos deben cumplir lo siguiente:

$$\tau = \frac{T}{wL} \leq \frac{\tau_{yp}}{CS} \text{ (A cortante)}$$

$$\sigma = \frac{T}{hL/2} \leq \frac{\sigma_{yp}}{CS} \text{ (A aplastamiento)}$$

Seguendo el catálogo Opac el material empleando será acero St 60 acero de 60 kg/mm<sup>2</sup> de resistencia a la tracción.

$$\tau = \frac{\sigma}{2} = \frac{60}{2} \left( \frac{Kg}{mm^2} \right) \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 294,3 \frac{N}{mm^2}$$

El cs empleado será de CS=1,2 pues es un elemento de seguridad que evitará que otros elementos más críticos resulten dañados siendo éste el que sufra las deformaciones.

Según la tabla 47 usaremos unos valores b y h de 16mm y 7mm.

Sección de la lengüeta de ajuste (acero para chavetas DIN 6880)	Anchura b	16	
	Altura h	7	10
Para diámetro del eje d1 3)	más de	50	
	hasta	58	

Tabla 47. Sección de chaveta

Por lo que:

$$\tau = \frac{64556,18}{16 \cdot L} \leq \frac{294,3}{1,2} \rightarrow L = 16,45 \text{ (mm)}$$

$$\sigma = \frac{64556,18}{7 \cdot L/2} \leq \frac{294,3 \cdot 2}{1,2} \rightarrow 37,6 \text{ (mm)}$$

$$\sigma = \frac{64556,18}{10 \cdot L/2} \leq \frac{294,3 \cdot 2}{1,2} \rightarrow 26,32 \text{ (mm)}$$

Al ser el fallo por aplastamiento más restrictivo usaremos una chaveta que cumpla ese mínimo valor admisible. Como nuestro engranaje cónico tiene 20,1mm de ancho usaremos dos chavetas 16x7x70 DIN 6885 A dispuestas a 180° y una 16x10x70 DIN 6885 A para el engranaje cilíndrico recto.

### **3.7. EJE VERTICAL**

Por último vamos a proceder al estudio del eje horizontal (figura 55), situado entre el 2º eje multiplicador y las piedras de moler. Como hemos explicado en el apartado 3.5.1 en el cálculo de engranajes este eje gira a 30 rpm, 5x la velocidad del entrada del rotor de 6 rpm o 2x veces la del primer eje multiplicador.

Vamos a mantener las piedras originales de molienda para mantener su valor histórico, por lo que este elemento quedará fuera de estudio. Nuestro último eje, el cual será bi-apoyado, tendrá que soportar únicamente las reacciones creadas por el engranaje cónico.

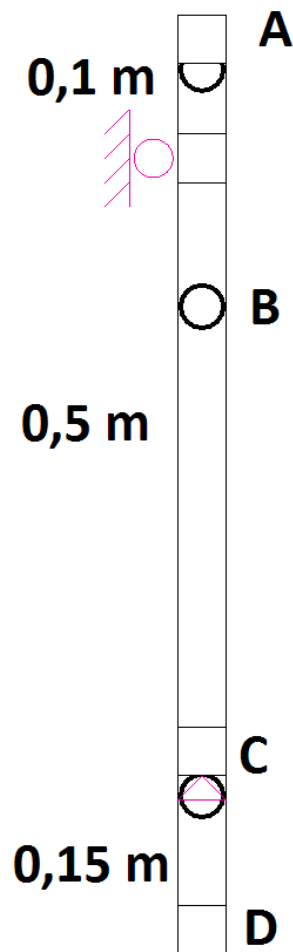


Figura 55. Eje vertical

### 3.7.1. Cargas sobre el eje

El eje vertical soportará las siguientes cargas que se dividen en los siguientes apartados:

A continuación se detallarán las fuerzas una a una:

#### Momento torsor

Se mantiene el mismo par del segundo eje multiplicador pues la relación de transmisión es  $i=1$  por lo que:



$$M_{Torsor} = 1832,75 (N \cdot mm)$$

### Reacciones en los apoyos y momentos flectores

Sabiendo que gira en sentido horario visto desde arriba, tenemos la reacción radial en sentido horizontal positivo, la tangencial en el eje z negativo y la axial en sentido vertical negativo del engranaje cónico.

Recordemos del capítulo 3.6.1 apartado "Fuerzas en el engranaje" obtenemos las reacciones del engranaje cónico:

$$R_{m_1} = R_1 - \frac{b}{2} \operatorname{sen} \theta_1 = 60 - \frac{28,28}{2} \operatorname{sen}(45^\circ) = 50 \text{ mm}$$

$$F = \frac{M_1}{R_{m_1}} = \frac{1832,75 (Nm)}{0,05 (m)} = 36655 (N)$$

$$F_t = F \cos \alpha = 36655 \cos 20^\circ = 34444,43 (N)$$

$$N_1 = F \operatorname{sen} \alpha = 36655 \operatorname{sen} 20^\circ = 12536,74 (N)$$

$$F_a = F \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta = 36655 \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = 8864,81 (N)$$

$$F_r = F \operatorname{sen} \alpha \cos \theta = 36655 \operatorname{sen} 20^\circ \cos 45^\circ = 8864,81 (N)$$

Vamos a proceder a calcular las reacciones en los apoyos en el sentido Y y Z para luego estudiar el gráfico de momentos flectores a lo largo de nuestro eje.

#### Plano XY

$$\begin{aligned} \sum M_{By} &= 0 \\ 8864,81 * 0,1 - F_{Cy} * 0,5 &= 0 \rightarrow F_{Cy} = 1772,96 (N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_Y &= 0 \\ 8864,81 + 1772,96 - F_{By} &= 0 \rightarrow F_{By} = -10637,77 (N) \end{aligned}$$

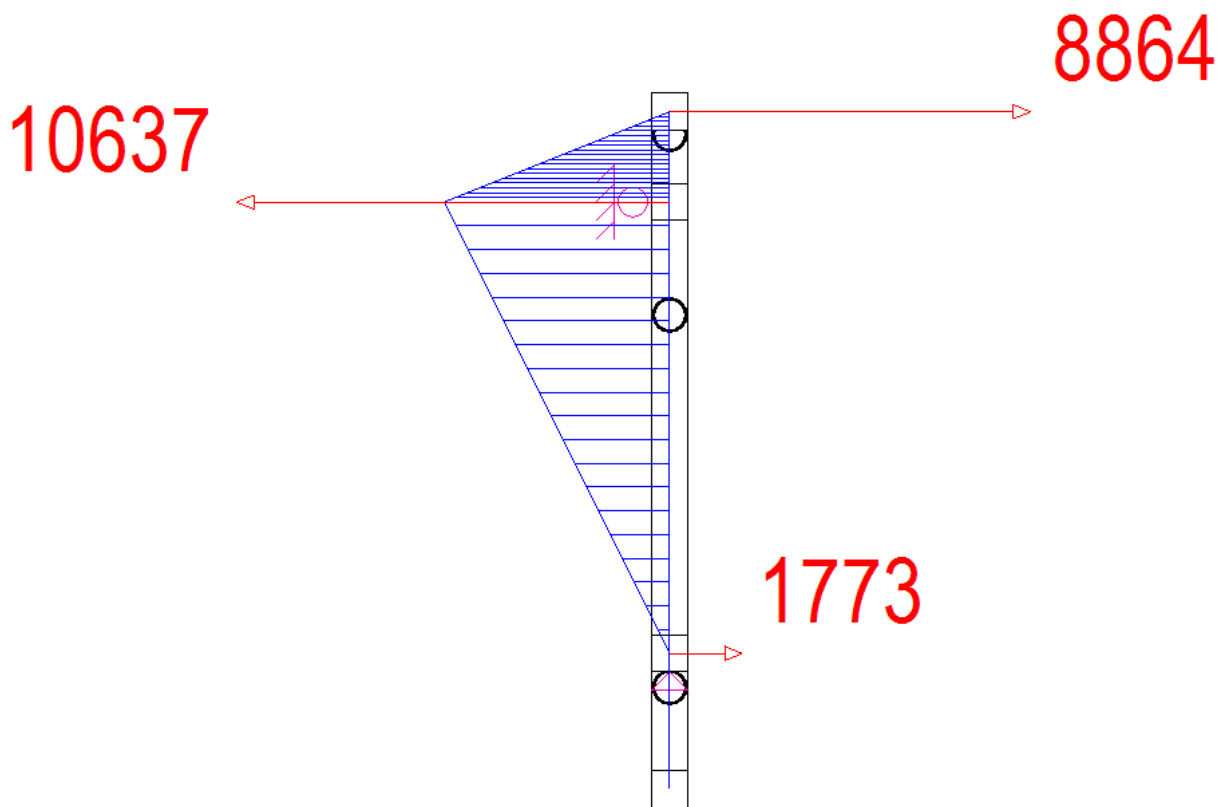


Figura 56. Eje vertical XY

Plano XZ

$$\sum M_{By} = 0$$

$$-34444,43 * 0,1 + F_{Cy} * 0,5 = 0 \rightarrow F_{Cy} = -6888,88 \text{ (N)}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-34444,43 - 6888,88 + F_{By} = 0 \rightarrow F_{By} = 41333,31 \text{ (N)}$$

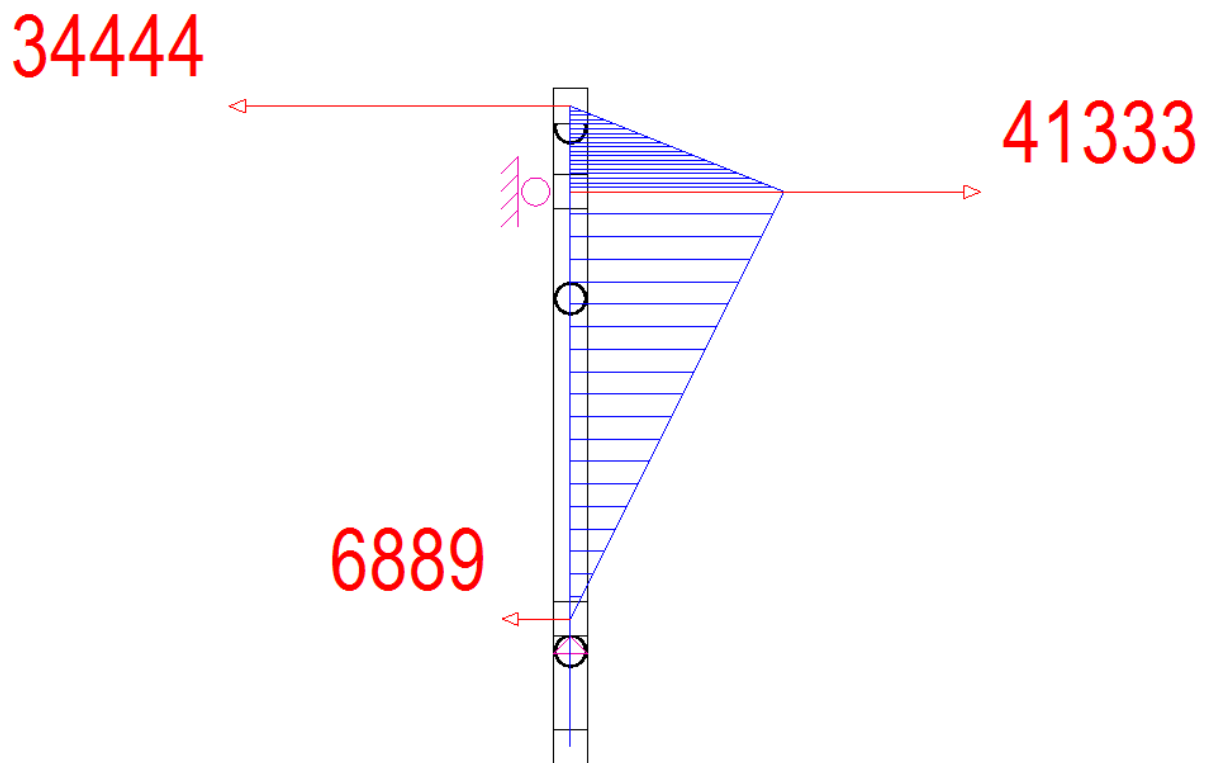


Figura 57. Eje vertical XZ

Calculamos ahora los momentos flectores:

$$M_{By} = 8864,81 * 0,1 = 886,481 \text{ (Nm)}$$

$$M_{Bz} = 34444,43 * 0,1 = 3444,443 \text{ (Nm)}$$

En la tabla 48 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	-10637,77 N	1772,96 N
Fz	41333,31 N	-6888,88 N
Ft	42680,2 N	7113,37 N
My	886,481 Nm	0
Mz	3444,443 Nm	0
Mt	3556,68 Nm	0

Tabla 48. Reacciones y momentos eje vertical

### 3.7.2. Cálculo del eje según las tensiones

El eje vertical ha de ser capaz de soportar las cargas anteriormente citadas, para lo cual haremos uso del cálculo de ejes mediante el código ASME.

### **Cálculo de ejes mediante el código ASME**

La expresión del código ASME para el cálculo a fatiga es la siguiente:

$$\tau_{max} = \frac{r}{J} \sqrt{(C_m \cdot M)^2 + (C_t \cdot T)^2} < \tau_{yp}$$

El código ASME toma los valores de los momentos M y T y los mayorará mediante unos coeficientes  $C_m$  y  $C_t$  de la tabla 49:

	$C_m$	$C_t$
<b>EJES FIJOS:</b>		
Carga aplicada gradualmente (constante)	1.0	1.0
Carga aplicada repentinamente	1.5-2.2	1.5-2.2
<b>EJES GIRATORIOS:</b>		
Carga aplicada gradualmente (constante)	1.5	1.0
Carga aplicada repentinamente, sólo pequeños impactos	1.5-2.0	1.0-1.5
Carga aplicada repentinamente, grandes impactos	2.0-3.0	1.5-3.0

*Tabla 49. Coeficientes de mayoración ASME.*

En nuestro caso nos hallamos ante un caso en el que la carga es aplicada gradualmente sin impactos por lo que nuestros coeficientes de mayoración serán:

$$C_m = 1,5$$
$$C_t = 1,0$$

### **Material escogido**

Emplearemos un acero (tabla 50) AISI / SAE 1045 al tratarse de un acero de mediano contenido de carbono utilizado ampliamente en elementos estructurales que requieran mediana resistencia mecánica y tenacidad a bajo costo. Posee baja soldabilidad, buena maquinabilidad y excelente forjabilidad. Es utilizado para todo tipo de elementos que requieren dureza y tenacidad como ejes, manivelas, chavetas, pernos, tuercas, cadenas, engranajes de baja velocidad, espárragos,

acoplamientos, bielas, pasadores, cigüeñales y piezas estampadas. Puede ser sometido a temple y revenido. Haremos uso del catálogo de Aceros Otero, pág. 134.

<b>Composición Química</b>				
% C	% Mn	% Si	% P	% S
0,43 - 0,50	0,60 - 0,90	0,15 - 0,35	≤ 0,04	≤ 0,05

<b>Propiedades Mecánicas Acero Laminado (Valores típicos)</b>			
Dureza (HB)	Esfuerzo Fluencia (min.) (Kg / mm <sup>2</sup> )	Esfuerzo Tracción (min.) (Kg / mm <sup>2</sup> )	Elongación (min.)%
170 - 190	40	63 - 73	15

Tabla 50. Características del material AISI 1045.

La característica mecánica que más nos ocupa es el esfuerzo a fluencia, que en este caso es:

$$\sigma_{yp} = 40 \left( \frac{kg}{mm^2} \right) = 392,4 (MPa)$$

### **Coeficiente de seguridad (CS)**

El coeficiente de seguridad parcial para materiales se obtiene del código IEC-61400-02:2006 pág. 89. En dicho código (tabla 51) se obtienen los coeficientes según la resistencia a la fatiga o el límite de rotura conociendo la caracterización total con un valor de 1,25.

**Table 6 – Partial safety factors for materials**

Condition	Full characterisation	Minimal characterisation
Fatigue strength	1,25 <sup>a)</sup>	10,0 <sup>b)</sup>
Ultimate strength	1,1	3,0

<sup>a)</sup> Factor is applied to the stress ranges as shown in equation (48).  
<sup>b)</sup> Factor is applied to the measured ultimate strength of the material.

Tabla 51. Coeficiente de seguridad según normativa.

### **Dimensionamiento a fatiga**

Se hará uso del catálogo de Aceros Otero para elegir un perfil pues dispone de un rango amplio de medidas del cual elegiremos el tamaño adecuado según las necesidades de nuestro diseño.

Primero se aplica el coeficiente de seguridad a fatiga de la tabla 40 para poder calcular mediante el código ASME el diámetro mínimo necesario para soportar las cargas.

$$\sigma_{admisible} = \frac{\sigma_{yp}}{CS} = \frac{392,4}{1,25} = 313,92 \text{ (MPa)}$$
$$\tau_{admisible} = \frac{\frac{\sigma_{yp}}{2}}{CS} = \frac{\tau_{yp}}{2} = \frac{\frac{392,4}{2}}{1,25} = 156,96 \text{ (MPa)}$$

Mediante una tabla Excel se calcula el  $\emptyset$  mínimo mediante la expresión del código ASME para el cálculo a fatiga:

$$\tau_{max} = \frac{r}{J} \sqrt{(C_m \cdot M)^2 + (C_t \cdot T)^2} < \tau_{yp}$$
$$\tau_{max} = \frac{r}{\frac{\pi}{2} \cdot r^4} \cdot \sqrt{(1,5 \cdot 3556,68)^2 + (1 \cdot 1832,75)^2} < 156,96 \text{ (MPa)}$$

Con un  $\emptyset$  de 56,78 mm (radio de 28,39 mm) conseguimos el espesor mínimo que debe tener nuestro eje.

$$\tau_{max} = \frac{28,39}{\frac{\pi}{2} \cdot 28,39^4} \cdot \sqrt{(1,5 \cdot 3556,68)^2 + (1 \cdot 1832,75)^2} = 156,94 < 156,96 \text{ (MPa)}$$

Suponemos que el suministrador entregará materiales mínimo de mm en mm, siendo lo más normal moverse entre 5 o 10 mm de diferencia entre cada redondo, por lo que redondeando nos movemos en un eje de 60 mm.

### **3.7.3. Dimensionamiento según deflexiones**

Las fuerzas y momentos que actúan en nuestro eje son las reacciones de ambos engranajes. Se pueden observar en las figuras 58 .

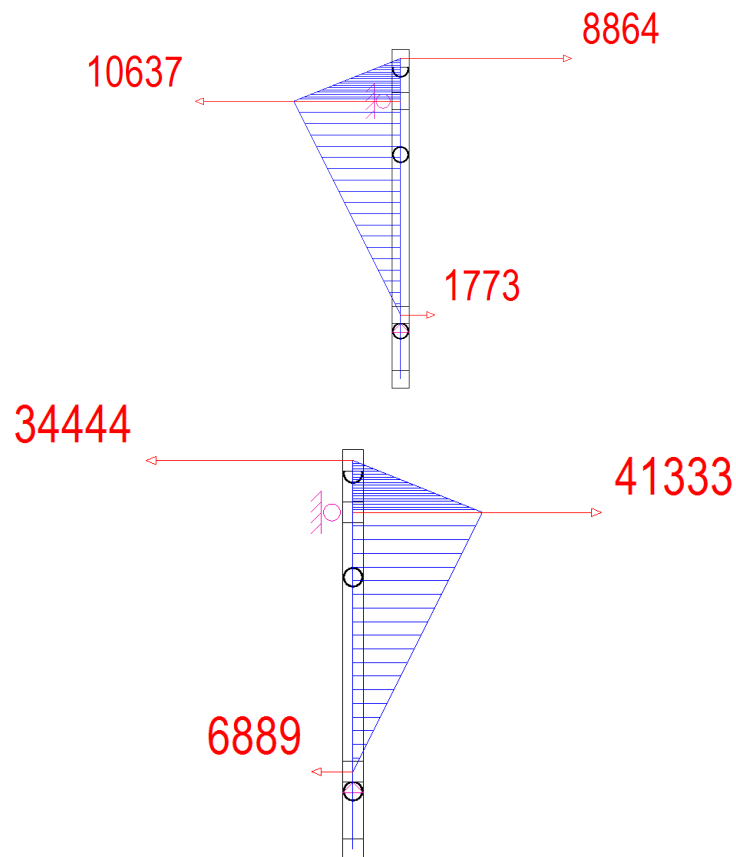


Figura 58. Fuerzas y momentos en el eje vertical

Como tenemos 2 cargas distintas vamos a hacer uso de la teoría de superposición aplicando el teorema de Mohr.

### 1ª deformación: reacción radial del engranaje

En primer lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción radial del engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 59.

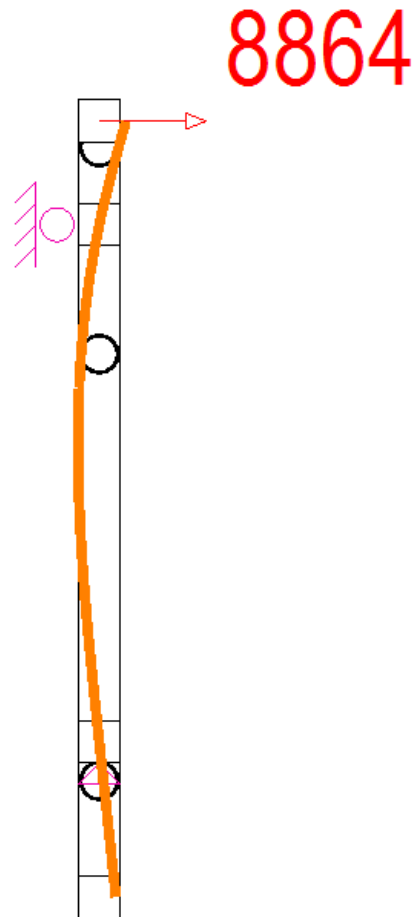


Figura 59. 1ª deformada

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB}$$

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3$$

Primero calculamos la deformación en CB y el giro de B:



$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 886,481 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500(mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 500(mm) \right) \right] = \frac{7,38 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{7,38 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{1,477 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta BC y giro en C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 886,481 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500(mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 500(mm) \right) \right] = \frac{3,69 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{3,69 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{7,38 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo A:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 886,481 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 100(mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 100(mm) \right) \right] = \frac{2,95 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{1,477 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 100 = \frac{1,477 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB} = \frac{1,477 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} + \frac{2,95 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} = \frac{1,772 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{7,38 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{1,107 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

## **2ª deformación: reacción tangencial del engranaje**

En segundo lugar estudiaremos la deformada a causa de la reacción tangencial del engranaje dibujando un aproximado de la deformada del eje y los giros de en los apoyos como se puede observar en la figura 60.

34444

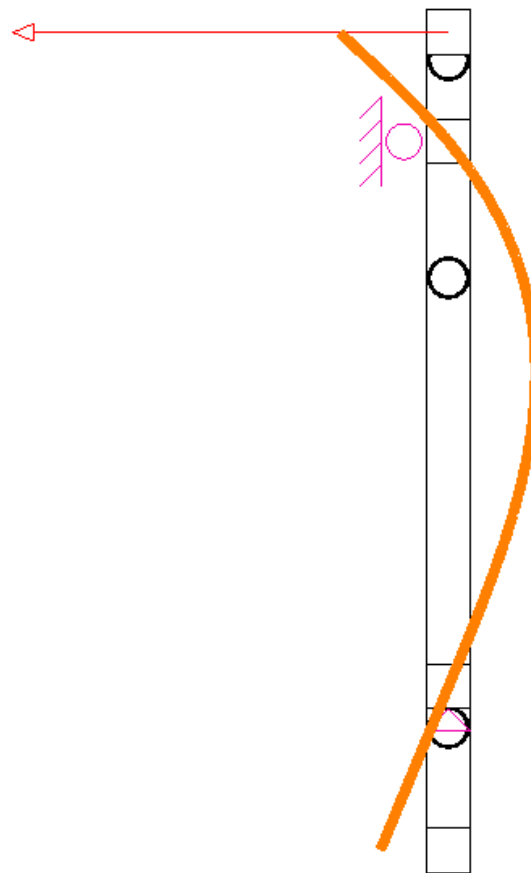


Figura 60. 2ª deformada

Los cálculos son los siguientes:

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2}$$

$$\delta_{A'A'} = \theta_B \cdot L_1$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A'A'} + \delta_{AB}$$

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3$$

Primero calculamos la deformación en CB y el giro de B:

$$\delta_{CB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 3444,443 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 500 (mm) \right) \right] = \frac{2,87 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{CB}}{L_2} = \frac{\frac{2,87 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{5,74 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z}$$

Delta BC y giro en C:

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 3444,443 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 500 (mm) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 500 (mm) \right) \right] = \frac{1,435 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

$$\theta_C = \frac{\delta_{BC}}{L_2} = \frac{\frac{1,435 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}}{500} = \frac{2,87 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z}$$

Flecha en el extremo A:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \cdot I_Z} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 3444,443 \cdot 10^3 (N \cdot mm) \cdot 100 (mm) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 100 (mm) \right) \right] = \frac{1,148 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A''A'} = \theta_B \cdot L_1 = \frac{5,74 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \cdot 100 = \frac{5,74 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z}$$

$$\delta_{A'A} = \delta_{A''A'} + \delta_{AB} = \frac{5,74 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} + \frac{1,148 \cdot 10^{10}}{E \cdot I_Z} = \frac{6,888 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Por último la flecha en D:

$$\delta_{D'D} = \theta_C \cdot L_3 = \frac{2,87 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} \cdot 150 = \frac{4,305 \cdot 10^{11}}{E \cdot I_Z}$$

Vamos a proceder a juntar el ángulo de giro de las deformaciones tangenciales y radiales y hacer una suma vectorial entre ellas:

$$\theta_B = \sqrt{\left( \frac{1,477 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \right)^2 + \left( \frac{5,74 \cdot 10^8}{E \cdot I_Z} \right)^2}$$

$$\theta_C = \sqrt{\left( \frac{7,38 \cdot 10^7}{E \cdot I_Z} \right)^2 + \left( \frac{2,87 \cdot 10^9}{E \cdot I_Z} \right)^2}$$

Teniendo en cuenta que el módulo de Young:

$$E = 210 \text{ (GPa)} = 210000 \text{ (MPa)}$$

Y que el momento de inercia de una barra circular es:

$$I_z = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 28,39^4 = 6,496 \cdot 10^6 \text{ (mm)}$$

Los giros son:

$$\theta_B = \sqrt{\left(\frac{1,477 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{5,74 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6}\right)^2} = 0,0027 \text{ (rad)}$$

$$\theta_c = \sqrt{\left(\frac{7,38 \cdot 10^7}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{2,87 \cdot 10^8}{210000 \cdot 6,496 \cdot 10^6}\right)^2} = 0,00138 \text{ (rad)}$$

Como usaremos rodamientos de bolas de contacto angular son medidas aceptables (tabla 52):

	PENDIENTE MAXIMA ADMISIBLE ( $\theta_{max}$ )
Rodamiento de rodillos cónicos	0.0005-0.0012 rad
Rodamiento de rodillos cilíndricos	0.0008-0.0012 rad
Rodamiento de bolas de ranura profunda	0.001-0.003 rad
Rodamiento de bolas de contacto angular	0.026-0.052 rad
Engranaje cilíndrico recto	0.026-0.052 rad

Tabla 52. Pendiente máxima admisible

### 3.7.4. Diseño del eje en base a vibraciones

Además de las deflexiones estáticas del apartado anterior, también hay que comprobar que las vibraciones del eje no sean excesivas. El eje diseñado debe cumplir la siguiente expresión:

$$w_{eje} \ll w_{crítica} = \sqrt{\frac{g \cdot \sum(w_i \cdot y_i)}{\sum(w_i \cdot y_i^2)}}$$

En nuestro eje tenemos una masas, el engranaje cónico (1,25 kg). Como tenemos el peso en el eje no genera ninguna deformación, aparte de tener un peso muy pequeño.

### 3.7.5. Rodamientos eje vertical

Los rodamientos son los elementos necesarios para el apoyo del eje y que este pueda girar libremente con la menor fricción y pérdidas posibles. En este caso el diseño consta de dos apoyos (B y C) en los que emplearemos rodamientos con rodamientos esféricos, en el cual el rodamiento del punto C absorberá las cargas axiales. En la figura 61 se puede observar el diseño con sus apoyos.

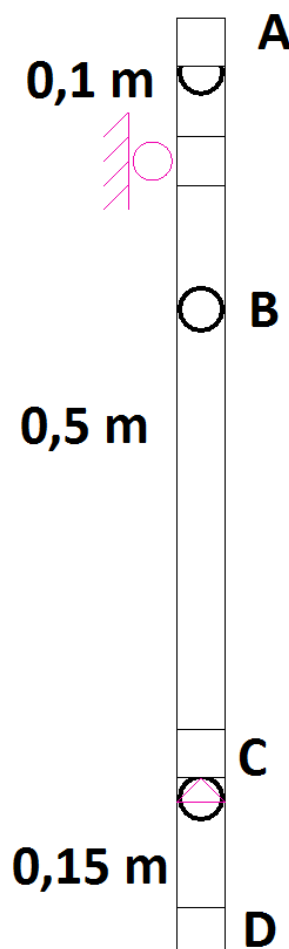


Figura 61. Rodamientos eje vertical

Las reacciones en los apoyos las obtuvimos en el apartado 3.7.1.

En la tabla 53 se resumen las fuerzas totales en cada apoyo:

	Apoyo B	Apoyo C
Fy	-10637,77 N	1772,96 N
Fz	41333,31 N	-6888,88 N
Ft	42680,2 N	7113,37 N
Fa	0	8864,81 N

*Tabla 53. Reacciones en engranajes*

En la figura 62 podemos ver las reacciones en los apoyos de nuestro eje:

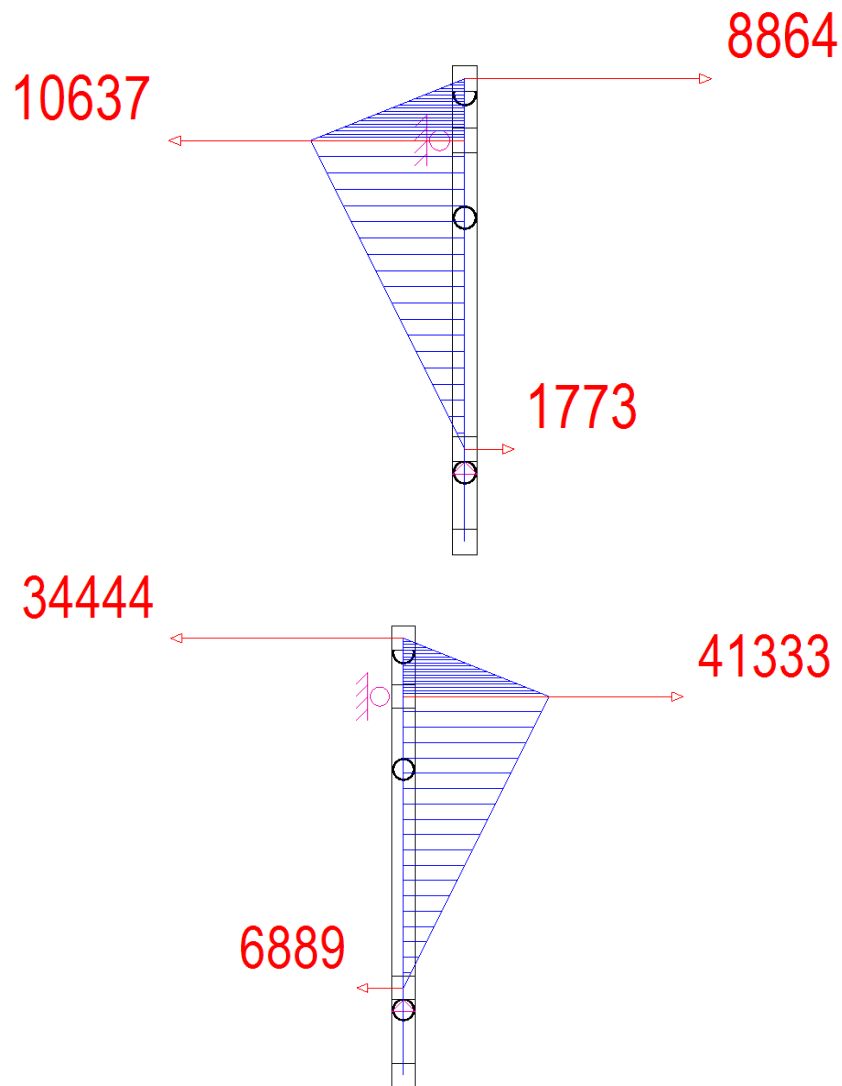


Figura 62. Reacciones en los rodamientos

Elegimos rodamientos de bolas para el primer apoyo y de rodamientos esféricos para el segundo apoyo por considerar que se adaptan a nuestras necesidades perfectamente, pues a un régimen bajo de revoluciones y unas cargas aceptables cumplen sobradamente con su cometido como podemos observar en las tablas 54 y 55.

Characteristic	Tapered Roller Bearing	Thrust Tapered Roller Bearing	Cylindrical Roller Bearing	Thrust Cylindrical Roller Bearing	Spherical Roller Bearing	Thrust Spherical Roller Bearing	Ball Bearing	Thrust Ball Bearing	Needle Roller Bearing	Thrust Needle Roller Bearing
Pure Radial Load	Excellent	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Good	Poor	Excellent	Unsuitable
Pure Axial Load	Good	Excellent	Unsuitable	Good	Fair	Excellent	Fair	Excellent	Unsuitable	Excellent
Combined Load	Excellent	Fair	Fair	Unsuitable	Excellent	Fair	Good	Poor	Unsuitable	Unsuitable
Moment Load	Fair	Poor	Unsuitable	Unsuitable	Unsuitable	Unsuitable	Good	Poor	Fair	Unsuitable
High Stiffness	Excellent	Excellent	Good	Excellent	Good	Good	Fair	Good	Good	Excellent
Quiet Running	Fair	Fair	Good	Poor	Fair	Poor	Excellent	Good	Good	Fair
Low Friction	Fair	Fair	Good	Poor	Fair	Fair	Excellent	Excellent	Good	Good
Misalignment	Poor	Poor	Poor	Unsuitable	Excellent	Excellent	Good	Poor	Poor	Poor
Locating Position (Fixed)	Excellent	Good	Fair	Fair	Good	Good	Good	Excellent	Unsuitable	Excellent
Non-Locating Position (Floating)	Good	Unsuitable	Excellent	Unsuitable	Fair	Unsuitable	Good	Unsuitable	Good	Unsuitable
Speed	Good	Good	Good	Poor	Fair	Fair	Excellent	Excellent	Good	Poor

Tabla 54. Especificaciones de rodamientos

Characteristic	Spherical Roller Bearing	Thrust Spherical Roller Bearing	Ball Bearing
Pure Radial Load	Excellent	Unsuitable	Good
Pure Axial Load	Fair	Excellent	Fair
Combined Load	Excellent	Fair	Good
Moment Load	Unsuitable	Unsuitable	Good
High Stiffness	Good	Good	Fair
Quiet Running	Fair	Poor	Excellent
Low Friction	Fair	Fair	Excellent
Misalignment	Excellent	Excellent	Good
Locating Position (Fixed)	Good	Good	Good
Non-Locating Position (Floating)	Fair	Unsuitable	Good
Speed	Fair	Fair	Excellent

Tabla 55. Rodamientos esféricos y de rodamiento esférico

Según el catálogo de rodamientos SKF:

**“Vida nominal requerida**

Cuando se determina el tamaño del rodamiento, compare la vida nominal SKF calculada con la vida especificada de la aplicación, si se encuentra disponible. Esto suele depender del tipo de máquina y de los requisitos respecto de la duración del servicio y la confiabilidad operativa. En el caso de falta de experiencia previa, se pueden utilizar los valores orientativos enumerados en la tabla 9 y la tabla 10.”

Como apreciamos en la tabla 56 escogemos una vida nominal media de  $L_{10}$  65.000 horas para maquinaria para energía eólica.



Para calcular la vida del rodamiento pasaremos las horas a las vueltas que dará a lo largo de su vida útil:

$$L_{10} = 65000 (h) \cdot 30 (rpm) \cdot \frac{60 (min)}{1 (h)} = 117 \cdot 10^6 \text{ revoluciones}$$

**Tabla 9**

<b>Valores orientativos de la vida útil especificada de los diferentes tipos de máquinas</b>	
<b>Tipo de máquina</b>	<b>Vida útil especificada Horas de funcionamiento</b>
Electrodomésticos, máquinas agrícolas, instrumentos, equipos técnicos de uso médico	300 ... 3 000
Máquinas utilizadas intermitentemente o durante breves períodos: herramientas eléctricas portátiles, dispositivos de elevación en talleres, máquinas y equipos para la construcción	3 000 ... 8 000
Máquinas utilizadas intermitentemente o durante breves períodos donde se requiere una alta confiabilidad: ascensores (elevadores), grúas para productos embalados o eslingas para tambores, etc.	8 000 ... 12 000
Máquinas para 8 horas de trabajo diario, no siempre utilizadas al máximo: transmisiones por engranajes de uso general, motores eléctricos para uso industrial, trituradoras giratorias	10 000 ... 25 000
Máquinas para 8 horas de trabajo diario utilizando plenamente sus capacidades: herramientas mecánicas, máquinas para carpintería, máquinas para la industria de la ingeniería, grúas para materiales a granel, ventiladores, cintas transportadoras, equipos de impresión, separadores y centrifugadoras	20 000 ... 30 000
Máquinas para 24 horas de trabajo continuo: unidades de engranajes para laminadores, maquinaria eléctrica de tamaño medio, compresores, tornos de extracción para minas, bombas, maquinaria textil	40 000 ... 50 000
Maquinaria para energía eólica, incluidos los rodamientos del eje principal, de orientación, de la caja de engranajes de cambio de paso, del generador	<b>30 000 ... 100 000</b>
Maquinaria para abastecimiento de agua, hornos giratorios, máquinas de trenzado de cables, maquinaria de propulsión para buques de alta mar	60 000 ... 100 000
Máquinas eléctricas de gran tamaño, plantas de generación de energía, bombas para minas, ventiladores para minas, rodamientos para ejes en túnel para buques de alta mar	> 100 000

Tabla 56. Vida Nominal

En este caso el apoyo B soportará la carga axial, por lo que:

$$\frac{F_a}{f_r} = \frac{8864,81}{7113,37} = 1,24$$

If, in addition to the radial load, an axial load  $F_a$  acts on the bearing, this axial load is taken into consideration when calculating the life of a bearing (with  $F_a \leq F_{az}$ ;  $F_{az}$  is the allowable axial load).

Dimension Series	Load ratio	Equivalent Dynamic Load
10.. 2..E, 3..E	$F_a/F_r \leq 0.11$	$P = F_r$
	$F_a/F_r > 0.11$	$P = 0.93 \cdot F_r + 0.69 \cdot F_a$
22..E, 23..E	$F_a/F_r \leq 0.17$	$P = F_r$
	$F_a/F_r > 0.17$	$P = 0.93 \cdot F_r + 0.45 \cdot F_a$

Tabla 57. Carga dinámica equivalente.

La carga F en el punto C será (tabla 57):

$$P = 0,93 \cdot F_r + 0,45 \cdot F_a = 0,93 \cdot 7113,37 + 0,45 \cdot 8864,81 = 10604,59 \text{ (N)}$$

De este modo para el apoyo B y C las capacidades dinámicas que tienen que soportar son:

$$C = F \cdot (L_{10})^{\frac{1}{a}}$$

Como usamos rodamientos esféricos usaremos el valor de  $a=3$  (página 213 del libro de diseño) y para rodamientos de rodillos el valor de  $a=10/3$  y un factor de mayoración para la carga de 1,2 (página 214 del libro de diseño) al tratarse de maquinaria sin impactos:

$$C_B = 1,2 \cdot 42680,2 \cdot 117^{\frac{3}{10}} = 213728,99 \text{ (N)}$$

$$C_C = 1,2 \cdot 10604,59 \cdot 117^{\frac{1}{3}} = 62240,11 \text{ (N)}$$

Del catálogo de Timken escogemos los siguientes rodamientos:

- Rodamiento B: 22312CJ de 60 mm de  $\varnothing$  interno con una carga dinámica máxima de 269000 N.
- Rodamiento C: 7212WN de 60 mm de  $\varnothing$  interno con una carga dinámica máxima de 63000 N.

### 3.7.6. Anillos de retención

Vamos a emplear los de sección constante por tratarse de los más sencillos pues no requerimos de ninguna aplicación especial.

Estos elementos se eligen en función del diámetro del eje el cual en ese punto es definido por el diámetro del rodamiento. En este caso emplearemos rodamientos de Ø60 mm, por lo que nuestros anillos los escogeremos respecto a ese tamaño.

Según el catálogo de Rotor Clip emplearemos los anillos SH-237 de Ø60,3mm pues no disponen de anillos de Ø60 mm los cuales son capaces de soportar unas cargas de 5000 libras, 23754,1 N.

### **3.7.7. Diseño de las chavetas**

Para el cálculo sobre la chaveta actúa una fuerza:

$$F = \frac{T}{R} = \frac{1832,75 (N \cdot m)}{28,39 (mm)} \cdot \frac{1000 (mm)}{(m)} = 64556,18 (N)$$

Estudiaremos el elemento tanto a su posible fallo a cortante (área de cortante= $w \cdot L$ ) como por aplastamiento (área de aplastamiento= $h \cdot L/2$ ). Para que no se dé el fallo en ninguno de los dos casos deben cumplir lo siguiente:

$$\tau = \frac{T}{wL} \leq \frac{\tau_{yp}}{CS} \text{ (A cortante)}$$

$$\sigma = \frac{T}{hL/2} \leq \frac{\sigma_{yp}}{CS} \text{ (A aplastamiento)}$$

Seguendo el catálogo Opac el material empleando será acero St 60 acero de 60 kg/mm<sup>2</sup> de resistencia a la tracción.

$$\tau = \frac{\sigma}{2} = \frac{60}{2} \left( \frac{Kg}{mm^2} \right) \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 294,3 \frac{N}{mm^2}$$

El cs empleado será de CS=1,2 pues es un elemento de seguridad que evitará que otros elementos más críticos resulten dañados siendo éste el que sufra las deformaciones.

Según la tabla 58 usaremos unos valores b y h de 16mm y 10mm.

Sección de la lengüeta de ajuste (acero para chavetas DIN 6880)	Anchura b	16	
	Altura h	7	10
Para diámetro del eje d1 3)	más de	50	
	hasta	58	

Tabla 58. Sección de chaveta

Por lo que:

$$\tau = \frac{64556,18}{16 \cdot L} \leq \frac{294,3}{1,2} \rightarrow L = 16,45 \text{ (mm)}$$

$$\sigma = \frac{64556,18}{7 \cdot L/2} \leq \frac{294,3 \cdot 2}{1,2} \rightarrow 37,6 \text{ (mm)}$$

Al ser el fallo por aplastamiento más restrictivo usaremos una chaveta que cumpla ese mínimo valor admisible. Como nuestro engranaje tiene 20,1mm de ancho usaremos dos chavetas dispuestas a 180º Según el catálogo la longitud para nuestra chaveta será de 70mm, con lo que la denominación será 16x7x70 DIN 6885 A.

### **3.8. SISTEMA DE ORIENTACION**

El sistema de orientación original era un *anillo* de álamo negro que se engrasaba con aceite malo o tocino rancio para que girara toda la estructura del tejado cuando se hace girar el palo de gobierno (el madero que se usa para girar la caperuza del molino). Se sabe que el molino tiene unos 6 metros de diámetro (pág. 23 “El molino de viento y su evolución tipológica en Consuegra”) y hemos diseñado los ejes para que las palas sobresalgan medio metro de la caperuza, por lo que tomaremos ese valor para el cálculo de nuestro rodamiento de vuelco.

Vamos a emplear el catálogo de rodamientos de Rothe Erde.

#### **3.8.1. Fuerzas y momentos en el rodamiento**

Los grandes rodamientos Rothe Erde son elementos de máquinas que forman por si mismos una unidad completa, previstos para la transmisión simultánea de esfuerzos axiales, radiales y de los pares de vuelco resultantes.

Según el catálogo hay que tener en cuenta las fuerzas actuantes de acuerdo a la figura 63. Estas son la carga axial, la carga radial y el par de vuelco generado por la fuerza axial.

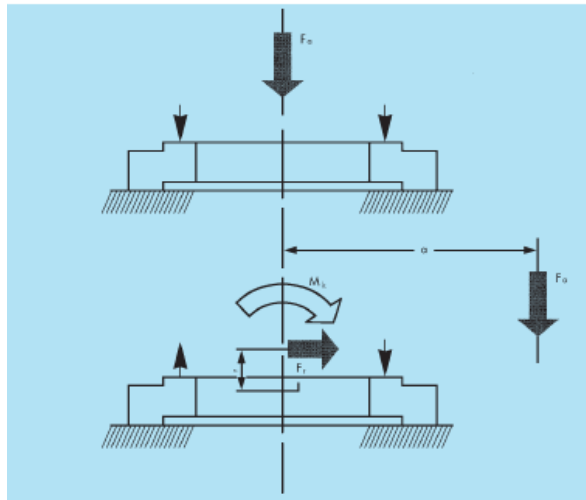


Figura 63. Fuerzas en el rodamiento

La masa aproximada de la caperuza es de unos 5000 Kg, según la tesis de D. Enrique Pérez Martín, y la de las aspas son de 911,08 Kg según nuestros cálculos. La fuerza radial del viento es de 1727,32 N. Calculamos el par de vuelco que soportará nuestro rodamiento sabiendo que la desalineación con el centro son de 3,5 m:

$$F_r = 1727,32 \text{ (N)}$$

$$F_a = 5000 + 911,08 = 5911,08 \text{ (kg)} \rightarrow 5911,08 \text{ (kg)} \cdot 9,81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 57987,69 \text{ (N)}$$

$$M_k = 911,08 \text{ (kg)} \cdot 9,81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 3,5 \text{ (m)} = 31281,93 \text{ (Nm)}$$

Donde:

- $F_r$ = Fuerza radial
- $F_a$ = Fuerza axial
- $M_k$ = Momento de vuelco

### 3.8.2. Selección del rodamiento

Para la determinación de la capacidad de carga necesaria del rodamiento se deberán multiplicar las cargas obtenidas con los factores de carga indicados en la tabla 59. Consideramos la aplicación como el mecanismo principal de giro de rotopalas.

Casos de aplicación	$f_{stat.}$	$f_L$	Vida útil, giros a plena carga
Grúa sobre vehículo (servicio de cuchara y en general aplicaciones con gran frecuencia de movimiento de cargas)	1,45**	1,7	150.000
Grúa giratoria (cuchara/imán)			
Transportador giratorio (cuchara/imán)			
Puente grúa (cuchara/imán)			
Grúa flotante (cuchara/imán)			
Mecanismo principal de giro de rotopalas			
Retro-cargadores		2,15	300.000
Apiladores			
Cintas transportadoras en voladizo			

Tabla 59. Casos de aplicación

#### Capacidad de carga estática

Procedemos al cálculo de la capacidad de carga estática haciendo uso del catálogo siguiendo las dos combinaciones de carga:

Combinación de carga I:

$$F'_a = (F_a + 5,046 \cdot F_r) \cdot f_{stat} = (57987,69 + 5,046 \cdot 1727,32) \cdot 1,45 = 96720,42 \text{ (N)}$$

$$M'_k = M_k \cdot f_{stat} = 31281,93 \cdot 1,45 = 45358,79 \text{ (Nm)}$$

Combinación de carga II:

$$F'_a = (1,225 \cdot F_a + 2,676 \cdot F_r) \cdot f_{stat} = 111805,035 \text{ (N)}$$

$$M'_k = 1,225 \cdot M_k \cdot f_{stat} = 55564,52 \text{ (Nm)}$$

El rodamiento es adecuado desde el punto de vista estático si una de las dos combinaciones de cargas (I ó II) queda situada por debajo de la curva límite de carga estática.

Vamos a proceder a entrar en las curvas del catálogo con la 2ª combinación de cargas pues ambas son más críticas. Usaremos la serie RD 700 más por la limitación del tamaño que por la limitación de las cargas.

En la tabla 60 vemos la curva de carga límite estática:

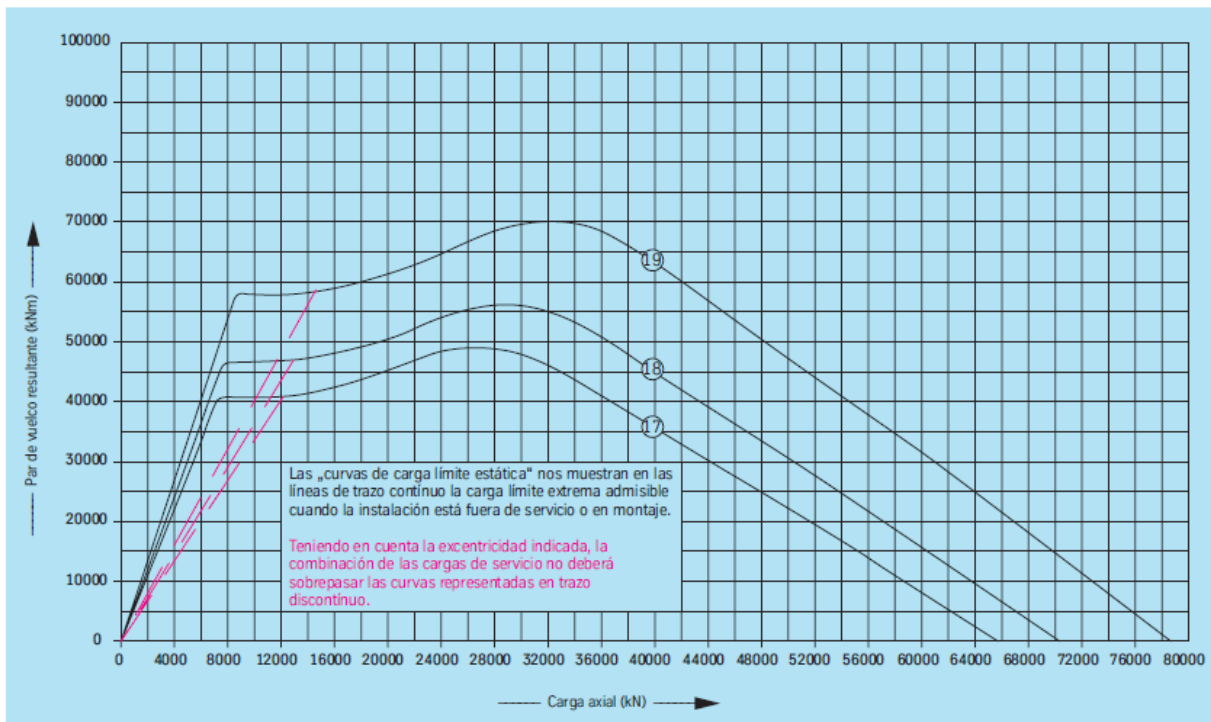


Tabla 60. Curva de carga límite estática

El rodamiento elegido es el 121.50.5600.990.41.1502 con las características mostradas en la tabla 61:

Número de plano	Peso	Diámetro exterior	Diámetro interior	Altura total	Diámetro de rolo tabajos exterior	Diámetro de rolo tabajos interior	Cantidad tabajos por círculo	Diámetro del tabajo	Medida del tornillo	Cantidad de engrasado- res por plano	Diámetro	Diámetro	Altura del aro	Altura del aro	Separación abajío aros exterior/interior	Separación arriba aros exterior/interior	Diámetro primitivo	Módulo	Cantidad de dientes	Comoción perfil, ángulo 40°IN 3500, Octubre 1976	Ajuste calaza de diente	Altura del diente	Fuerza tangencial admisible normal	Fuerza tangencial admisible máxima	Curvas
$D_1$ [mm]	[kg]	$D_e$ [mm]	$D_i$ [mm]	H [mm]	$L_e$ [mm]	$L_i$ [mm]	n	B [mm]	M [mm]	$n_1$	O [mm]	U [mm]	$H_1$ [mm]	$H_2$ [mm]	$H_{12}$ [mm]	$H_a$ [mm]	d [mm]	m [mm]	z	x · m [mm]	k · m [mm]	b [mm]	[kN]	[kN]	
121.50.5600.990.41.1502	6397	5923,2	5342	221	5730	5420	90	39	36	18	5668	5540	156	205	16	65	5856	24	244	+12	-2,4	156	325,5	651,0	17
121.50.6000.990.41.1502	6663	6307,2	5742	221	6114	5820	96	39	36	18	6068	5940	156	205	16	65	6240	24	260	+12	-2,4	156	325,5	651,0	18
121.50.6700.990.41.1502	7708	7027,2	6442	221	6834	6520	108	39	36	20	6768	6640	156	205	16	65	6960	24	290	+12	-2,4	156	325,5	651,0	19

Aros en material bonificado

Tabla 61. Rodamiento seleccionado

Como se puede comprobar las cargas son soportadas de manera holgada, ya que como se había mencionado el factor limitante era el tamaño.

### Vida útil del rodamiento

Para una vida útil de 300000 giros a plena carga se utiliza el factor  $f_L=2,15$ :

$$N' = (F_a + F_r) \cdot f_L = (57987,69 + 1727,32) \cdot 2,15 = 128387,27 (N)$$

$$M'_k = M_k \cdot f_L = 31281,93 \cdot 2,15 = 67256,14 (Nm)$$

Según la curva de la tabla 62:



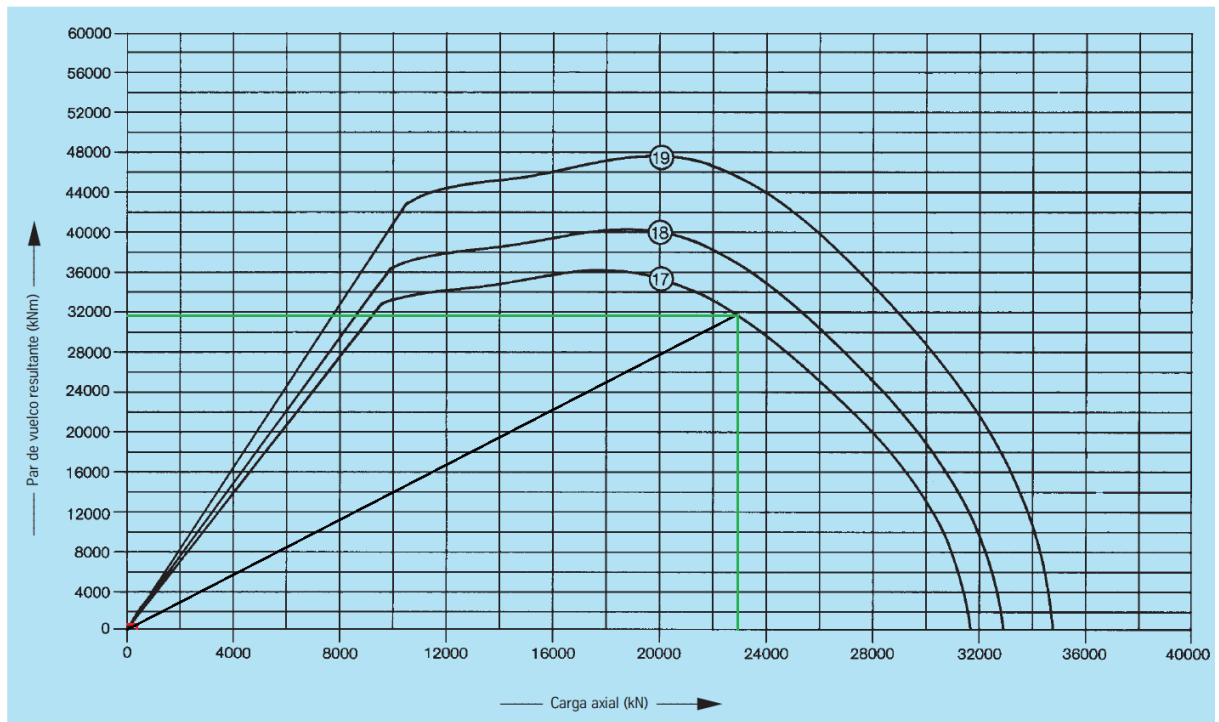


Tabla 62. Curva de vida útil - 30.00 giros

Las cargas siguen estando muy por debajo de los límites, tanto que los valores diferirán mucho. Vamos a proceder al cálculo aproximado de la vida útil del rodamiento, pues las tablas son para 30000 giros:

$$f_L = \frac{F_{ao}}{F_a} = \frac{23000000}{128387,27} = 1791,45$$

$$f_L = \frac{M_{ko}}{M_k} = \frac{32000000}{67256,14} = 4757,92$$

Se usa el factor  $p=10/3$  por tratarse de un rodamiento de rodillos como se ve en la figura 64:

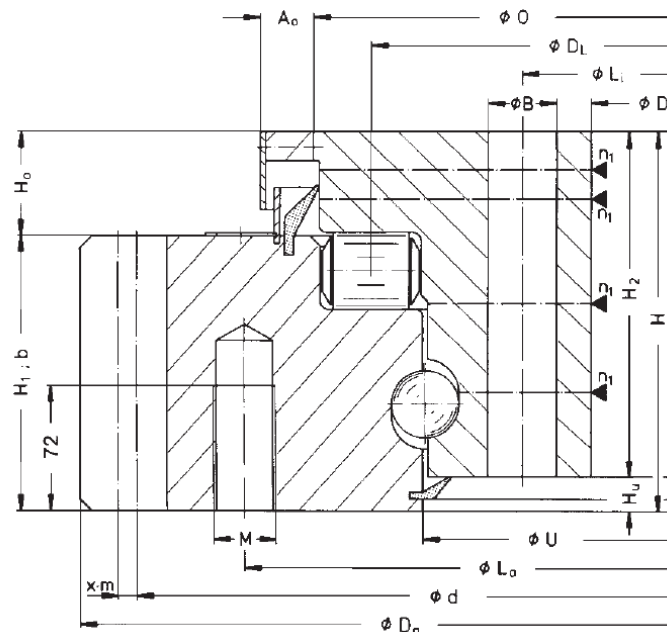


Figura 64. Rodamiento de rodillos

$$G = (f_L)^p \cdot 30000 = (1791,45)^{\frac{10}{3}} \cdot 30000 = 2,09 \cdot 10^{15} \text{ (giros)}$$

Tal y como habíamos comentado el factor limitante era el tamaño y no las cargas, por lo que no da unos valores exagerados.

### 3.9. SISTEMA DE FRENADO

El sistema de freno mecánico sirve como ayuda al freno aerodinámico o como freno de estacionamiento mientras se realizan las labores de mantenimiento o las condiciones meteorológicas no son óptimas para el trabajo.

El freno mecánico estará situado en el eje vertical por ser el eje que menor momento torsor soporta siendo necesario un freno de menor tamaño, aparte de ser de mejor alcance para el molinero durante sus labores.

El freno (figura 65) será suministrado por la empresa Svendborg Brakes, por lo que procedemos a la selección del freno que se adapta a nuestros requisitos de su catálogo.



Figura 65. Freno mecánico.

### 3.9.1. Cálculo de la fuerza de frenado

Para escoger el freno de disco se requiere calcular la fuerza de frenada necesaria y posteriormente se escoge del catalogo un freno capaz de soportar dicha fuerza. El disco de freno es proporcionado por la misma empresa.

Para el cálculo de frenada hacemos uso de la siguiente ecuación:

$$F_B = \frac{2 \cdot M_B}{a \cdot (D_0 - 0,13)}$$

La pastilla de freno genera una fuerza axial (figura 65) sobre el disco para frenarlo. Para conseguirlo debe generar un momento torsor mediante roce mayor que el momento torsor del eje.

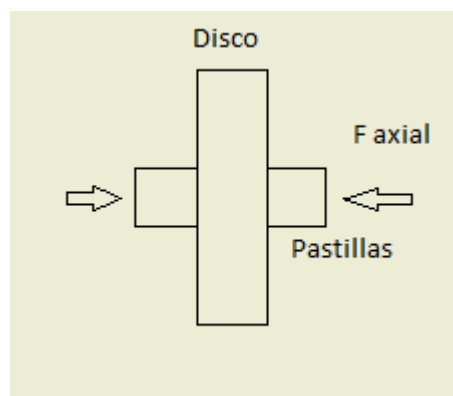


Figura 66. Fuerza axial sobre el disco.

Como se desconoce el valor del par resistente, se opta por una hipótesis conservadora duplicando el torsor del eje:

$$T_{Resistente} = 2 \cdot T_{Actuante}$$

$$T_{Resistente} = 2 \cdot 1832,75 (N \cdot m) = 3665,5 (N)$$

Se procede a realizar el cálculo del disco necesario seleccionando de la tabla 63 un disco proporcionado por la empresa:

- 300 x 20 mm
- 400 x 20 mm
- 400 x 30 mm
- 350 x 30 mm
- 440 x 30 mm
- 400 x 30 mm
- 580 x 30 mm
- 600 x 25 mm
- 630 x 30 mm
- 710 x 30 mm
- 800 x 30 mm
- 900 x 30 mm
- 1000 x 30 mm
- 1200 x 35 mm
- 1400 x 40 mm
- 1500 x 40 mm
- 1800 x 40 mm
- 2000 x 50 mm
- 2200 x 50 mm
- 2400 x 50 mm
- 2500 x 60 mm
- Customer specific

*Tabla 63. Discos del catálogo.*

Se realiza un cálculo con el disco más pequeño de  $D_0=300$  (mm) y de  $e=20$  (mm):

$$F_B = \frac{2 \cdot 3665,5}{1 \cdot (0,3 - 0,13)} = 43123,52 (N)$$

Se tomarán estos datos para entrar en las tablas para elegir el freno. A este disco se le procederá a mecanizar un chavetero, quedando el resto de tolerancias definidas por el suministrador.

### **3.9.2. Selección del freno mecánico**

Con el resultado de 43.123, 52 N se entra en la tabla 64 y se selecciona un freno que sea capaz de ofrecer una fuerza de frenado superior a la requerida para el disco y el momento torsor generado por el eje:

CALIPER TYPE	CLAMPING FORCE <sup>1)</sup> [N]		BRAKING FORCE <sup>2)</sup> [N]	LOSS OF FORCE PER 1MM [%]	OPERATING PRESSURE <sup>3)</sup> MPa	BALANCING PRESSURE <sup>1)</sup> MIN MPa	PAD SURFACE PRESSURE <sup>4)</sup> [N/mm <sup>2</sup> ]
	MIN	MAX					
BSFI 317	17,000	19,000	13,600	4.0	4.2	2.46	0.66 - 0.95
BSFI 318	18,000	19,500	14,400	4.0	4.2	2.61	0.67 - 0.98
BSFI 320	20,000	22,200	16,000	3.0	4.5	2.90	0.77 - 1.11
BSFI 322	22,000	24,500	17,600	3.0	5.0	3.19	0.84 - 1.23
BSFI 325	25,000	27,800	20,000	12.0	5.5	3.62	0.96 - 1.39
BSFI 330	30,000	33,100	24,000	10.0	7.0	4.35	1.14 - 1.66
BSFI 332	32,000	35,200	25,600	9.0	7.0	4.63	1.21 - 1.76
BSFI 335	35,000	38,300	28,000	8.0	7.5	5.07	1.32 - 1.92
BSFI 340	40,000	43,600	32,000	7.0	8.5	5.79	1.50 - 2.18
BSFI 345	45,000	48,800	36,000	6.0	9.5	6.52	1.68 - 2.44
BSFI 350	50,000	55,000	40,000	11.0	10.5	7.24	1.86 - 3.70
BSFI 355	55,000	59,300	44,000	10.0	12.0	7.69	2.04 - 2.97
BSFI 360	60,000	65,000	48,000	9.0	13.0	8.69	2.22 - 3.22

Tabla 64. Selección del freno.

El freno seleccionado es el BSFI 355 con una fuerza de frenado de 44.000 N. Se selecciona un freno de la serie 300 puesto que los de menor número no ofrecían la fuerza de frenado necesaria.

Se comprueba que la elección es idónea. Mediante las fórmulas de diseño de máquinas se hace una aproximación del par de rozamiento según la siguiente expresión:

$$T_{roz} = N^{\circ}_{pastillas} \cdot \mu \cdot F_{pastilla} \cdot d$$

$$T_{roz} = 2 \cdot 0,4 \cdot 43123,52 \cdot 0,3 = 10349,64 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$10349,64 \text{ (N} \cdot \text{m)} \gg 1832,75 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

Como se observa el par de rozamiento es mayor al del eje de alta velocidad debido a que hemos tomado una hipótesis muy conservadora y la fuerza actuante no se da en su totalidad en el exterior del diámetro del disco de freno. Aún así se asegura que en condiciones con un viento mayor al de la media anual el freno sea capaz de responder.

### 3.9.3. Cálculo de la chaveta del disco de freno

Para el cálculo sobre la chaveta actúa una fuerza:

$$F = \frac{T}{R} = \frac{1832,75 \text{ (N} \cdot \text{m)}}{32,5 \text{ (mm)}} \cdot \frac{1000 \text{ (mm)}}{\text{(m)}} = 56392,3 \text{ (N)}$$

Estudiaremos el elemento tanto a su posible fallo a cortante (área de cortante= $w \cdot L$ ) como por aplastamiento (área de aplastamiento= $h \cdot L/2$ ). Para que no se dé el fallo en ninguno de los dos casos deben cumplir lo siguiente:

$$\tau = \frac{T}{wL} \leq \frac{\tau_{yp}}{CS} \quad (A \text{ cortante})$$

$$\sigma = \frac{T}{hL/2} \leq \frac{\sigma_{yp}}{CS} \quad (A \text{ aplastamiento})$$

Siguiendo el catálogo Opac el material empleando será acero St 60 acero de 60 kg/mm<sup>2</sup> de resistencia a la tracción.

$$\tau = \frac{\sigma}{2} = \frac{60}{2} \left( \frac{Kg}{mm^2} \right) \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 294,3 \frac{N}{mm^2}$$

El cs empleado será de CS=1,2 pues es un elemento de seguridad que evitará que otros elementos más críticos resulten dañados siendo éste el que sufra las deformaciones.

Según la tabla 65 usaremos unos valores b y h de 20 mm y 12 mm.

Sección de la lengüeta de ajuste (acero para chavetas DIN 6880)	Anchura b	20	
	Altura h	8	12
Para diámetro del eje d1 3)	más de	65	
	hasta	75	

Tabla 65. Sección de chaveta

Por lo que:

$$\tau = \frac{56392,3}{20 \cdot L} \leq \frac{294,3}{1,2} \rightarrow L = 11,49 \text{ (mm)}$$

$$\sigma = \frac{56392,3}{12 \cdot L/2} \leq \frac{294,3 \cdot 2}{1,2} \rightarrow 19,16 \text{ (mm)}$$

Al ser el fallo por aplastamiento más restrictivo usaremos una chaveta que cumpla ese mínimo valor admisible. Según el catálogo la longitud para nuestra chaveta será de 90mm, con lo que la denominación será 20x12x90 DIN 6885 A.