



TESIS DOCTORAL

**DESARROLLO DE UN SISTEMA DE  
OPTIMIZACIÓN DE FORMA PARA PERFILES  
AERODINÁMICOS MEDIANTE ALGORITMOS  
GENÉTICOS**

*Presentada por:*

**D. David López Montaña**

*en el*

**Departamento de Ingeniería Mecánica**

*de la*

**Universidad del País Vasco – Euskal Herriko Unibertsitatea**

*Para la obtención del grado de*

**Doctor Ingeniero Industrial**

*Dirigida por:*

**Prof. Dr. Carlos Angulo Duque**

**Prof. Dr. Igor Fernández de Bustos**

Bilbao, mayo de 2017



A mi familia, especialmente a mi hija,  
y a mis amigos.





Quiero agradecer a los directores de tesis, a Carlos su dedicación constante, y a Igor su disposición en materia de optimización y preparación de herramientas de cálculo.



## ACRÓNIMOS Y DEFINICIONES

ARSM (Algebraic Reynolds Stress Models): modelos algebraicos de tensiones de Reynolds.

B-spline (Basis spline): curva polinómica suave básica.

CFD (Computational Fluid Dynamics): dinámica de fluidos computacional.

DNS (Direct Numerical Simulation): simulación numérica directa.

DPW (Drag Prediction Workshop): taller de predicción de la fuerza de arrastre.

EDP: Ecuaciones Diferenciales en derivadas Parciales.

EARSM (Explicit Algebraic Reynolds Stress Models): modelos explícitos algebraicos de tensiones de Reynolds.

EVM (Eddy Viscosity Models): modelos de viscosidad turbulenta.

GA (Genetic Algorithm): algoritmo genético.

Laminar bucket (caldero laminar): valle que aparece en la curva polar de un “perfil laminar” o en la curva del coeficiente de arrastre frente al ángulo de ataque, para pequeños ángulos de ataque de estos perfiles.

LES (Large Eddy Simulation): simulación de grandes remolinos.

NURBS (Non Uniform Rational B-Splines): curvas B-splines no uniformes racionales.

OMEGA (Oriented Mechanical Engineering Genetic Algorithm): programa de optimización desarrollado para aplicaciones de ingeniería mecánica, que utiliza algoritmos genéticos.

RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes): ecuaciones de Navier-Stokes promediadas según Reynolds.

RFB (Radial Basis Functions): funciones de base radial empleadas para componer los desplazamientos de los nodos en mallas de geometría cambiante.

RNG (Re-Normalisation Group): modelo de turbulencia que renormaliza las ecuaciones RANS para considerar los efectos de las pequeñas escalas de movimiento.

RSM (Reynolds Stress Models): modelos de turbulencia que usan una ecuación para modelizar cada término del tensor de tensiones de Reynolds.

SA (Spalart-Allmaras) : modelo de turbulencia RANS de una ecuación, desarrollado por los mencionados autores.

SST (Shear Stress Transport): modelo de turbulencia RANS, que mezcla el modelo k- $\epsilon$  y el modelo k- $\omega$  definiendo cuidadosamente el transporte de la tensión cortante de Reynolds.

TFI (Transfinite Interpolation): interpolación transfinita. Método que genera mallas estructuradas en un dominio mediante interpolación de la geometría de sus fronteras.

Upwinding: esquema de discretización con efecto estabilizador. Calcula el valor de una variable del flujo en una celda en función de valores de las celdas situadas a su alrededor, pero dando más peso a los valores de las celdas ubicadas aguas arriba.

y plus ( $y^+$ ): es la distancia a la pared adimensionalizada. Se obtiene multiplicando la distancia a la pared por la velocidad de fricción y dividiendo por la viscosidad cinemática, así que es un número de Reynolds.

## SÍMBOLOS

$\alpha$ , alfa: ángulo de ataque [grados]

$\delta$ : espesor de la capa límite [L]

$\delta^*$ : espesor de desplazamiento de la capa límite [L]

$\epsilon$ : tasa de disipación de energía cinética turbulenta [ $L^2/T^3$ ]

$\theta$ : espesor de momento de la capa límite [L]

$\kappa$ : número de onda [ $1/L$ ]

$\mu$ : viscosidad dinámica [ $FT/L^2$  ó  $M/(LT)$ ]

$\nu$ : viscosidad cinemática [ $L^2/T$ ]

$\rho$ : densidad [ $M/L^3$ ]

$\tau$ : tensión cortante [ $F/L^2$ ]

$\phi$ : potencial de velocidad [ $L^2/T$ ]

$\omega$ : tasa de disipación específica de la energía cinética de la turbulencia [ $1/T$ ]

b: envergadura [L]

c: cuerda del perfil [L]

$c_l$ : coeficiente de sustentación [adimensional]

$c_d$ : coeficiente de arrastre [adimensional]

$c_m$ : coeficiente de momento [adimensional]

$d_{ij}$ : tensor tasa de deformación por unidad de tiempo [1/T]

D (drag): fuerza de arrastre [F]

$D'$ : fuerza de arrastre por unidad de envergadura [F/L]

k: energía cinética de la turbulencia [ $L^2/T^2$ ]

L (lift): fuerza de sustentación [F]

$L'$ : fuerza de sustentación por unidad de envergadura [F/L]

M: esfuerzo de momento [FL]

$M'$ : esfuerzo de momento por unidad de envergadura [FL/L]

R: radio de curvatura [L]

Re: número de Reynolds [adimensional]

$y^+$ : distancia adimensionalizada “y plus” [adimensional]



## INTRODUCCIÓN

<b>1. RESUMEN</b> .....	I-3
<b>2. OBJETIVOS</b> .....	I-4
<b>3. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS</b> .....	I-5

## CAPÍTULO I. ESTADO DEL ARTE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	1-3
<b>1.1 DESCRIPCION GENERAL</b> .....	1-3
<b>1.2. Métodos de análisis de flujos más extendidos en aerodinámica</b> .....	1-4
1.2.1. Métodos CFD. Métodos de discretización.....	1-4
1.2.2. Métodos de paneles.....	1-6
<b>2. FÍSICA DEL FLUJO INCOMPRESIBLE Y MODELOS DE FLUJO</b> .....	1-6
<b>2.1. Hipótesis básicas y ecuaciones del movimiento del fluido</b> .....	1-6
<b>2.2. Flujos alrededor de perfiles</b> .....	1-8
2.2.1. Nomenclatura de un perfil.....	1-9
2.2.2. Esfuerzos sobre un perfil.....	1-10
2.2.3. Coeficientes aerodinámicos.....	1-12
<b>2.3. Zonas principales del flujo: flujo exterior y capa límite</b> .....	1-12
2.3.1. Flujo exterior.....	1-15
2.3.2. La capa límite.....	1-17
2.3.3. Características de los flujos cortantes turbulentos.....	1-36
<b>2.4. La turbulencia. Estructura del movimiento turbulento</b> .....	1-38
2.4.1. Origen de la turbulencia.....	1-38
2.4.2. La cascada de energía.....	1-39
<b>2.5. Ecuaciones del flujo turbulento</b> .....	1-43
2.5.1. Ecuaciones RANS del flujo medio.....	1-43
2.5.2. Ecuaciones de transporte de las tensiones de Reynolds.....	1-45
2.5.3. Ecuación de la energía cinética de la turbulencia.....	1-45
2.5.4. Producción, transferencia y anisotropía.....	1-46
<b>2.6. Métodos de modelización de la turbulencia</b> .....	1-47
2.6.1. Modelos de turbulencia RANS.....	1-48
2.6.2. Ecuaciones simplificadas de la capa límite para flujos turbulentos.....	1-59
2.6.3. Alternativas para el análisis de flujos turbulentos alrededor de perfiles.....	1-60

<b>3. MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLAS.</b>	1-61
<b>3.1. Mallas estructuradas y desestructuradas.</b>	1-62
<b>3.2. Evolución histórica de los métodos de generación de mallas.</b>	1-62
3.2.1. Técnicas de mallado.	1-63
3.2.2. Técnicas numéricas de mallado.	1-64
<b>3.3. Mallas estructuradas.</b>	1-65
3.3.1. Clasificación de los métodos de mallado estructurado.	1-65
3.3.2. Métodos algebraicos. Generación de mallas mediante Interpolación Transfinita.	1-65
3.3.3. Métodos que resuelven ecuaciones en derivadas parciales.	1-71
3.3.4. Métodos mejorados de interpolación transfinita.	1-73
<b>3.4. Mallas desestructuradas e híbridas.</b>	1-73
3.4.1. Mallas de triángulos o de tetraedros.	1-73
3.4.2. Mallas de cuadriláteros o hexaedros.	1-75
3.4.3. Mallado híbrido para capas viscosas.	1-75
<b>3.5. Mallado multibloque.</b>	1-75
3.5.1. Mallado multibloque automático.	1-77
3.5.2. Influencia del tipo de malla en la precisión.	1-77
<b>3.6. Generación de mallas en dominios de geometría variable.</b>	1-78
3.6.1. Método desarrollado de regeneración de malla para geometrías cambiantes.	1-79
<b>4. MÉTODOS PARA LA OPTIMIZACIÓN DE FORMA DE PERFILES AERODINAMICOS.</b>	1-81
<b>4.1. Algoritmos genéticos.</b>	1-84
4.1.1. El algoritmo genético simple.	1-84
4.1.2. Otros operadores.	1-88
4.1.3. Optimización con restricciones.	1-89
<b>4.2. Búsqueda aleatoria.</b>	1-92
<b>CAPÍTULO II. ANÁLISIS DE MODELOS DE TURBULENCIA</b>	
<b>1. INTRODUCCIÓN.</b>	2-3
<b>2. EVALUACIÓN DE MODELOS DE TURBULENCIA DE TIPO k-ε.</b>	2-7
<b>2.1. Modelos k-ε.</b>	2-7
2.1.1. Modelo k-ε estándar.	2-7



2.1.2. Modelo “extendido”	2-8
2.1.3. Modelo RNG	2-8
2.1.4. Modelo k- $\epsilon$ anisotrópico	2-9
2.2.5. Relaciones de viscosidad turbulenta	2-9
<b>2.2. Selección de perfiles</b>	2-10
<b>2.3. Discretización, mallas y procesado</b>	2-11
<b>2.4. Resultados</b>	2-13
2.4.1. Perfil naca0012	2-13
2.4.2. Perfil naca4412	2-17
2.4.3. Perfil naca 4424	2-18
2.4.4. Perfil naca66 <sub>1</sub> -212	2-19
2.4.5. Resumen de resultados	2-19
<b>3. OPTIMIZACION DE LOS COEFICIENTES DE CIERRE DE UN MODELO DE TURBULENCIA DE TIPO k-<math>\epsilon</math></b>	2-20
3.1 Motivación	2-20
3.2. Optimización de los coeficientes de cierre del modelo k- $\epsilon$ estándar	2-21
3.3. La función de evaluación	2-21
3.4. La función de comprobación	2-23
3.5. Optimización mediante búsqueda aleatoria	2-23
3.6. Ejemplo de validación	2-24
3.6.1. Prueba preliminar	2-24
3.6.2. Otras combinaciones de pesos	2-29
3.6.3. Resumen de los resultados obtenidos	2-33
<b>4. ANALISIS DE ERRORES EN LA MODELIZACION</b>	2-34
4.1. Conclusiones	2-37
<b>5. MODELO ELEGIDO DE TRANSICIÓN RANS</b>	2-38
5.1. Validación del modelo de transición k-kl- $\omega$	2-38

## **CAPÍTULO III. MÉTODO DE MALLADO PARA OPTIMIZACIÓN DE FORMA DE PERFILES AERODINÁMICOS**

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	3-3
<b>2. DESCRIPCIÓN GENERAL Y OBJETIVOS</b>	3-3
<b>3. PARAMETRIZACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS PERFILES</b>	3-5
<b>4. DESARROLLO DEL MÉTODO DE MALLADO AUTOMÁTICO</b>	3-7

<b>4.1 Mallado desestructurado e híbrido</b> .....	3-7
4.1.1 Elección del programa de mallado.....	3-8
4.1.2 Dominios con diferente número de bloques .....	3-10
<b>4.2 Mallado estructurado</b> .....	3-14
4.2.1 Topología multibloque en O.....	3-15
4.2.2 Topología multibloque en C.....	3-16
4.2.3 Topología multibloque en H.....	3-21
<b>5. PROCEDIMIENTO DE MALLADO PARA UN MODELO DE TRANSICIÓN</b> .....	3-32
<b>5.1 División de bloques de malla</b> .....	3-34
<b>5.2 Simplificación de los subdominios</b> .....	3-35
<b>5.3 Modificación de la topología de bloques de malla</b> .....	3-38
<b>5.4 Aumento de densidad de malla en la pared y contención del coste total</b> .....	3-39
5.4.1 Malla en los bloques adyacentes al perfil .....	3-39
5.4.2 Malla en los bloques lejanos .....	3-43
<b>5.5 Secuencia de mallado en optimización</b> .....	3-44

## CAPÍTULO IV. DESARROLLO DE UN SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN DE FORMA

<b>1. INTRODUCCIÓN.</b> .....	4-3
<b>2. DESARROLLO DEL SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN.</b> .....	4-4
<b>2.1 Método de optimización</b> .....	4-6
<b>2.2 Análisis CFD de cada perfil usando el programa Fidap.</b> .....	4-7
<b>2.3 Implementación de la función de evaluación usando Fidap.</b> .....	4-9
<b>3. PARAMETRIZACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS PERFILES Y CODIFICACIÓN DE LOS CROMOSOMAS.</b> .....	4-12
<b>3.1 Curvas de interpolación NURBS.</b> .....	4-13
<b>3.2 Curvas de Bézier simples.</b> .....	4-14
<b>3.3 Codificación para minimizar el número de perfiles que se cortan.</b> .....	4-16
<b>3.4 Curvas de Bezier compuestas.</b> .....	4-18
<b>3.5 Modificación de los rangos de las variables en curvas de Bézier simples.</b> ..	4-19
<b>4. OPTIMIZACIÓN DE PERFILES USANDO MODELO k-<math>\epsilon</math>.</b> .....	4-21
<b>4.1 Definición del problema.</b> .....	4-21

<b>4.2 Simulación</b> .....	4-22
<b>4.3 Optimización</b> .....	4-22
<b>4.4 Resultados</b> .....	4-23
4.4.1 Forma de la evolución en las búsquedas.....	4-24
4.4.2 Discusión de los resultados.....	4-28
4.4.3 Conclusiones.....	4-29
<b>5. SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN MEJORADO CON MODELO DE TRANSICIÓN EN FLUENT</b> .....	4-30
<b>5.1 Introducción</b> .....	4-30
<b>5.2 Modificaciones en el sistema de optimización</b> .....	4-31
5.2.1 Nuevo sistema de optimización.....	4-32
<b>6. EJEMPLOS DE APLICACIÓN USANDO MODELO DE TRANSICIÓN</b> .....	4-33
<b>6.1 Definición del problema</b> .....	4-34
<b>6.2 Parametrización</b> .....	4-34
<b>6.3 Ecuaciones de gobierno</b> .....	4-34
<b>6.4 Simulación</b> .....	4-35
<b>6.5 Resultados</b> .....	4-35
6.5.1 Optimización de $c_l/c_d$ con restricción en el espesor del perfil.....	4-36
6.5.2 Minimización del arrastre para un valor dado de sustentación y espesor mínimo.....	4-44
<b>6.6 Conclusiones</b> .....	4-47

## **CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN**

<b>1. CONCLUSIONES</b> .....	5-3
<b>2. LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN</b> .....	5-4

## **REFERENCIAS**



# **INTRODUCCIÓN**



## 1. RESUMEN

La optimización de forma en fluidodinámica consiste en encontrar diseños de elementos mecánicos que den flujos con características óptimas. Físicamente se tiene un flujo que interactúa con ciertos elementos mecánicos sólidos de manera que se ejercen esfuerzos mutuamente, que dependen de la forma de dichos elementos. El problema de optimización de forma en fluidodinámica consiste en encontrar formas-diseños de los elementos mecánicos que den esfuerzos óptimos según algún criterio. A este criterio se le llama *función objetivo*. Un criterio puede ser por ejemplo minimizar la fuerza de arrastre para un valor prefijado de la fuerza de sustentación.

La función objetivo se define sobre un *espacio de búsqueda* multidimensional, siendo estas dimensiones las variables que definen las formas posibles de los elementos, denominadas *variables de diseño*. Dada la complejidad de los flujos, no se suele disponer de una expresión analítica que permita obtener el valor de la función objetivo en función de las variables de diseño, sino que este valor se obtiene a partir de los resultados del flujo, que debe ser calculado para el diseño concreto. Al valor de la función objetivo se le llama *aptitud*.

Así, para optimizar la función objetivo es necesario emplear un *sistema de optimización*, que es una plataforma que integra una herramienta de optimización (encargada de encontrar los extremos de la función objetivo en el espacio de búsqueda), una herramienta de análisis fluidodinámico (que evalúa diferentes puntos del espacio de búsqueda), y otras funciones necesarias para realizar ambas tareas.

En esta Tesis se ha desarrollado un sistema de optimización de perfiles aerodinámicos, y para ello se han tenido que afrontar varias dificultades importantes que dependen del estado de desarrollo de las técnicas de optimización y de análisis, y de la potencia del hardware disponible, y se exponen a continuación, junto a las soluciones adoptadas ante ellas.

En primer lugar los paisajes de búsqueda tienen gran complejidad y suelen presentar múltiples extremos locales, porque los flujos varían de manera fuertemente no lineal con la geometría. Así para poder encontrar los extremos globales es necesario un método de optimización con gran capacidad de exploración, para que no quede atrapado en extremos locales. Por este motivo se empleó un algoritmo genético (GA), que emplea poblaciones con gran número de diseños. Pero esto conlleva el inconveniente de necesitar un gran número de evaluaciones de la función objetivo (análisis fluidodinámicos).

En segundo lugar están las dificultades en el análisis. El coste de cada análisis es habitualmente grande o inabordable, y depende del tipo de método empleado. Por otra parte, la precisión de los métodos económicos (en tiempo de cálculo) depende de su capacidad para recoger los efectos físicos principales del tipo de flujo en concreto. Además,

es necesario construir automáticamente mallas de calidad para las diferentes geometrías del espacio de búsqueda, lo que en sí mismo constituye todo un reto.

Para abordar estos problemas inicialmente se optó por el uso de un modelo de turbulencia muy popular de tipo  $k-\epsilon$ , junto con mallas muy económicas. Estas fueron construidas mediante un procedimiento de mallado para geometrías cambiantes que se tuvo que desarrollar, que divide el dominio de fluido en subdominios que varían con la forma del perfil, permitiendo que las mallas tengan suficiente calidad. El sistema de optimización así construido permitió realizar optimizaciones de manera eficiente. Pero se comprobó que los resultados carecían de la precisión suficiente para representar el flujo del fluido.

Por ello, se modificó el sistema adoptando un modelo de turbulencia más adecuado para este tipo de flujos, pero que necesitaba de mallas más costosas, y por ello se modificó y mejoró el método de mallado para adaptarlo a las nuevas necesidades. Debido al aumento del coste por evaluación, los cálculos de optimización tuvieron que ser realizados sobre poblaciones más pequeñas. Los perfiles obtenidos dieron aptitudes más altas y formas distintas, mostrando la capacidad del nuevo sistema de optimización.

## 2. OBJETIVOS

El **primer objetivo** de esta tesis es **desarrollar un sistema de optimización de forma** para perfiles aerodinámicos en flujo subsónico, que pueda ser adaptable a otros tipos de flujos con diferentes geometrías. El sistema tiene que ser validado sobre ejemplos de aplicación con varios criterios de optimización.

El **segundo objetivo** es hacer una extensa revisión del estado del arte en las diferentes disciplinas implicadas en la optimización de forma en fluidodinámica, considerando que esta es la **primera tesis del grupo de investigación en el campo de la dinámica de fluidos**. Se trata de recoger de forma resumida, previa exploración y selección, unas **bases de conocimiento necesarias** para desarrollar esta Tesis, y para facilitar investigaciones posteriores en el campo del análisis y/o la optimización en dinámica de fluidos.

Para ello es necesario investigar en las cuatro diferentes disciplinas implicadas, que son la física del flujo, los métodos de análisis y modelos de flujo, los métodos de generación de mallas y los métodos de optimización para espacios de búsqueda complejos. Las dos primeras tienen una importancia básica, ya que la optimización se apoya en el análisis. Por ello se han recogido aspectos del movimiento fluido comunes a la mayoría de flujos de interés en ingeniería mecánica, que también determinan en concreto la dinámica de los flujos alrededor de perfiles. A partir de ello se pueden comprender los diferentes planteamientos de modelos de flujo.



Para optimizar es necesario analizar automáticamente flujos cuyas fronteras cambian de forma, y el soporte que permite el análisis correcto de cada geometría es una malla de calidad. Por lo tanto, es imprescindible disponer de un **procedimiento que construya de manera automática mallas de calidad suficiente para las diferentes geometrías del espacio de búsqueda**, y su desarrollo es el **tercer objetivo** de esta tesis.

Dado que la aptitud de los perfiles obtenidos para un criterio aerodinámico concreto depende de la precisión en el análisis de los flujos, el **cuarto objetivo** ha sido **encontrar una herramienta válida para el análisis de flujos alrededor de perfiles**.

### 3. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Esta tesis se compone de cuatro capítulos principales (I a IV), que van desde lo más básico, la física del flujo y su análisis, hasta lo más elevado que se apoya en lo anterior: la optimización de forma. A continuación se recoge el contenido de los diferentes capítulos en el orden en que fue desarrollada la Tesis, fruto de las necesidades y dificultades encontradas, para facilitar el seguimiento de dicho desarrollo.

El **capítulo IV** describe la implementación del sistema de optimización de forma. Se describe su versión inicial (con modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$ ), se comentan las funciones que lo integran destinadas a realizar diferentes tareas, y se explica la elección de la parametrización geométrica empleada para los perfiles. A continuación se prueba dicho sistema sobre un ejemplo de aplicación sencillo y se comprueba su robustez, aunque se observa que presenta un nivel de error elevado en el análisis. Los obstáculos encontrados en el desarrollo de dicho sistema hacen necesarios los capítulos I a III, y los errores conducen a modificar el sistema de optimización hacia su versión final (con modelo de turbulencia de transición) que se describe a continuación, también en este capítulo IV. Finalmente se prueba este sistema mejorado sobre dos ejemplos de aplicación, cuyos resultados reflejan su validez.

Por su parte, el **capítulo I** recoge el estado del arte. En este capítulo, primero se han recopilado conceptos necesarios de mecánica de fluidos para poder comprender la física del flujo y en qué se basan los diferentes modelos de flujo. A continuación se resume la evolución y clasificación de los métodos de mallado prestando una atención más detallada a aquellos que tienen características útiles para el desarrollo del procedimiento de mallado que se necesita. Finalmente se describen las principales propiedades de las técnicas de optimización más adecuadas para paisajes de búsqueda complejos.

En el **capítulo II** se estudia la validez de varios tipos de modelos de flujo para encontrar una herramienta de análisis adecuada para flujos alrededor de perfiles. Se comienza por modelos de turbulencia  $k-\varepsilon$  de la familia del modelo usado en la primera versión del

sistema de optimización. Se observa una importante discrepancia entre los resultados arrojados y los correspondientes experimentos en túnel de viento. Entonces se decide optimizar las constantes de cierre de uno de estos modelos para reducir el nivel de error. A continuación se valora la capacidad de este tipo de modelos para modelizar las características físicas específicas del tipo de flujos en cuestión. Finalmente se opta por el uso de modelos más avanzados, los modelos de transición utilizados en códigos CFD. Estos son aptos para la predicción de flujos con capas límite transicionales, y se comprueba la validez de uno de ellos para el tipo de flujo de interés.

En el **capítulo III** se recoge de manera pormenorizada el desarrollo del procedimiento de mallado para geometrías cambiantes, primero para la versión inicial del sistema de optimización con modelo k- $\epsilon$ , y después para la versión final con modelo de transición. En el último caso las mallas deben de ser mucho más densas en las cercanías de la pared, y además se mejora también la calidad de las celdas en esa zona.

En el **capítulo V** se recogen las conclusiones principales de la Tesis, y las líneas futuras de investigación que pueden surgir a raíz de ésta.

## **CAPÍTULO I.**

### **ESTADO DEL ARTE**



# 1. INTRODUCCIÓN.

## 1.1 DESCRIPCIÓN GENERAL.

En esta tesis se ha desarrollado un sistema de optimización de forma para perfiles aerodinámicos en flujo subsónico, adaptable para otros tipos de flujos y geometrías, que emplea un algoritmo genético (GA) simple como método de optimización.

Este sistema se compone de herramientas u órganos con diferentes funciones, y para ser útil debe superar varias dificultades que vienen dadas por el estado del arte en varias materias y la velocidad del hardware actuales. Las dificultades principales encontradas son el elevado coste del análisis fluidodinámico y sus problemas de precisión, el problema del mallado de geometrías cambiantes, y el elevado número de evaluaciones que necesita el GA. Además el contexto de esta tesis viene caracterizado por ser ésta la primera tesis emprendida en el grupo de investigación en el área de la dinámica de fluidos.

Para buscar y/o desarrollar los diferentes órganos necesarios del sistema se han realizado labores que se circunscriben en tres tareas principales: a) conseguir una herramienta de análisis útil para los flujos implicados en la optimización, b) desarrollar un método de mallado automático robusto frente a las diferentes formas de los perfiles, c) integrar los diferentes órganos del sistema, y probarlo en aplicaciones de ejemplo para averiguar combinaciones de parámetros de la búsqueda que permitan hacerla eficiente.

Para ello ha sido necesario realizar sendas revisiones bibliográficas en las correspondientes áreas, cuyos resúmenes constituyen este primer capítulo llamado “estado del arte”, que se compone de tres apartados. Estos tratan respectivamente de la física del flujo y su modelización, los métodos de mallado, y los métodos de optimización.

La primera parte (apartado 2) es la más extensa porque esta materia es la más nueva para el grupo de investigación y tiene mucho concepto físico. En ella se han recogido elementos de teoría de mecánica de fluidos para describir los mecanismos físicos principales que intervienen en los flujos alrededor de perfiles y se han revisado los planteamientos de los principales modelos de flujo. Estos flujos tienen capas límite transicionales, con tramos en régimen laminar y turbulento. El movimiento turbulento en flujos con elevado número de Reynolds contiene remolinos de tamaño ínfimo que hacen inabordable el coste de la simulación del flujo mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo tanto el uso de modelos de flujo simplificados es inevitable. Así se ha estudiado la física del tipo de flujo concreto y los diferentes tipos de modelos de flujo disponibles, para poder elegir uno que capture sus efectos físicos más relevantes y en consecuencia dé buenos resultados.

Primero, mirando el flujo en su conjunto se distinguen dos zonas que tienen diferente comportamiento (apartado 2.3), el flujo exterior y la capa límite, y que por lo tanto pueden ser caracterizadas por sendos conjuntos de ecuaciones diferentes, que proceden de eliminar para cada caso diferentes términos de las ecuaciones de Navier-Stokes. A continuación se muestra cómo es el movimiento en cada zona, para ello estudiamos flujos simples donde es dominante un efecto físico en concreto, y también flujos más

complejos donde actúa una combinación de varios efectos. Valorando en cada zona la importancia relativa de las diferentes fuerzas que actúan sobre el fluido (que dependen de la geometría de la pared y de su velocidad) se llega para el flujo exterior a las ecuaciones de Laplace y de Bernouilli, y para la capa límite las ecuaciones de Prandtl. Ambos conjuntos de ecuaciones son de gran utilidad por su sencillez y precisión, y son la base de métodos de cálculo muy eficientes.

Después, se recoge el origen de la turbulencia en flujos como el de interés (apartado 2.3.2) y las características de la turbulencia desarrollada (apartado 2.4), que son en lo fundamental independientes del tipo de flujo. A continuación se expone una evolución de los modelos de flujo turbulento, y sus características, de cara a poder elegir uno que sea eficiente para los cálculos, en el contexto de una optimización que implica un número enorme de análisis.

En la segunda parte (apartado 3) se recoge la evolución y clasificación de los diferentes tipos de malla, y de los diferentes métodos de generación de mallas utilizados en CFD (dinámica de fluidos computacional). Se describen después los métodos de mallado multibloque y los que mallan dominios de forma variable, más estrechamente relacionados con la construcción de mallas de geometría fuertemente variable de manera automática. Las técnicas y características de mayor interés se exponen con mayor detenimiento porque son las mimbres con las que será desarrollado el método de mallado automático en el capítulo III.

En la tercera parte (apartado 4) se han descrito las características de los principales métodos de optimización, comparando sus viabilidades para el problema de optimización de forma de perfiles. A continuación se ha descrito en más detalle los fundamentos de los métodos de optimización adoptados.

## **1.2. MÉTODOS DE ANÁLISIS DE FLUJOS MÁS EXTENDIDOS EN AERODINÁMICA.**

Se adelanta aquí una descripción de los principales métodos de análisis de flujos empleados en aerodinámica y turbomaquinaria, ya que estos son la estructura necesaria para la simulación de la física del flujo, que viene recogida en modelos de flujo simplificados. Estas dos últimas materias son abordadas en el segundo apartado.

Dentro de los métodos de análisis existentes, los dos más utilizados son los llamados métodos CFD y los métodos de paneles, que se describen a continuación.

### **1.2.1. Métodos CFD. Métodos de discretización.**

El uso de estos métodos de análisis aumenta progresivamente. En estos métodos, para obtener una solución numérica aproximada del flujo, el conjunto que representa la física del flujo formado por el dominio de fluido, el sistema de ecuaciones de conservación en derivadas parciales y las condiciones iniciales y de contorno, es reemplazado por un sistema de ecuaciones discretizadas [Tho'98] usando un soporte matemático llamado

mallas (dominio discreto). Este sistema de ecuaciones algebraicas (sistema discreto) se resuelve usando un algoritmo numérico.

Los métodos CFD (Computational Fluid Dynamics) son los métodos de análisis de flujos que resuelven las ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes, habitualmente en su forma promediada según Reynolds e incluyendo modelos de turbulencia.

En CFD se usan principalmente tres métodos de discretización, denominados *diferencias finitas*, *volúmenes finitos* y *elementos finitos*, siendo actualmente los segundos los más empleados. Estos métodos usan ecuaciones discretizadas de dos tipos: diferencial (método de *diferencias finitas*) o integral (método de *volúmenes finitos* y método de *elementos finitos*), y son representadas respectivamente en los nudos o en las celdas de la malla.

El *método de diferencias finitas* supuestamente fue introducido por Euler en el siglo XVIII [Fer'96]. En el nudo se aproximan las derivadas parciales de las cantidades del flujo usando expresiones algebraicas, llamadas fórmulas de diferencias finitas. Con éstas se escriben las ecuaciones de conservación en forma diferencial en cada nudo de la malla, obteniendo para el dominio discreto un sistema algebraico de ecuaciones cuyo número de ecuaciones e incógnitas es el número de nudos multiplicado por el número de variables, que coincide con el número de ecuaciones de conservación.

Para los métodos de *elementos finitos* y *volúmenes finitos* se aplican las ecuaciones de conservación en forma integral sobre cada celda discreta de la malla.

El método de *volúmenes finitos* [Eim'00] impone las leyes de conservación considerando cada celda como un volumen de control, planteamiento que proporciona *conservación local* al flujo numérico. El balance de la cantidad que se conserva se formula escribiendo los valores que ésta toma en las fronteras y en el interior de la celda en términos de valores discretos en el centroide de ésta y de otras celdas circundantes (incógnitas). Así por cada celda y ecuación de conservación se tiene una ecuación algebraica, que implica a un pequeño conjunto de celdas vecinas denominado *célula*.

Los *elementos finitos* usan funciones de interpolación que aproximan las variables únicamente dentro de cada elemento. Las ecuaciones de conservación se integran en el dominio, en concreto, en el método de Galerkin esto se hace ponderando las contribuciones de los nudos, con las propias funciones de interpolación.

No existe un consenso acerca de cuál de los tres métodos de discretización es más preciso. Si se desea compararlos, lo más prudente es hacerlo para un mismo problema y sobre la misma malla.

Las diferentes *fórmulas de diferencias finitas*, *células de volúmenes finitos* y tipos de *elemento finito*, son *esquemas numéricos* que introducen una determinada cantidad de error de discretización. Este error se traduce en una *disipación numérica* que tiende a estabilizar el proceso de resolución iterativo. Para reducir el error en el flujo existen dos caminos, emplear esquemas numéricos de más alto orden, o reducir el tamaño de celda en las regiones críticas del flujo.

### 1.2.2. Métodos de paneles.

Los *métodos de paneles* calculan flujos potenciales, y a diferencia de los métodos CFD no necesitan mallar el interior del dominio fluido, sino únicamente superficies de frontera. Esto se debe a que la ecuación diferencial de Laplace, que gobierna el flujo potencial, es lineal y por ello se puede componer el flujo, como suma de una corriente y del efecto que las paredes causan sobre ésta, que puede construirse colocando un número discreto de singularidades (fuentes y vórtices, o solamente vórtices, dependiendo del método [Lew'05]) sobre una superficie, siendo sus intensidades las incógnitas. A continuación, imponiendo las condiciones de frontera que ha de cumplir el campo de velocidad sobre la superficie, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraico, y resolviéndolo numéricamente se obtienen las incógnitas, es decir, la solución aproximada del flujo.

Habitualmente se acoplan a este flujo potencial modelos de capa límite que suelen incluir además de los efectos viscosos también la transición a la turbulencia. Este tipo de métodos constituyen herramientas de análisis sencillas y precisas, y su coste operativo es mucho menor que el de los métodos CFD, porque solo se necesita mallar las fronteras, y porque debido a ello el número de incógnitas es muchísimo menor.

## 2. FÍSICA DEL FLUJO INCOMPRESIBLE Y MODELOS DE FLUJO.

### 2.1. HIPÓTESIS BÁSICAS Y ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DEL FLUIDO.

En este apartado se justifican las hipótesis básicas del tipo de flujos de interés en esta tesis y se muestran las ecuaciones de gobierno asociadas.

En un volumen cúbico de aire de  $10\mu\text{m}$  de longitud de lado en condiciones normales, caben unas  $3 \cdot 10^{10}$  moléculas. Dividiendo su masa por el volumen del cubo, y repitiendo este cálculo para cubos de longitud variable, la densidad obtenida no cambia en un intervalo suficientemente amplio de longitudes alrededor de aquella; en consecuencia, la densidad y también las diferentes variables del fluido son campos continuos (*hipótesis de continuidad* del material fluido). Por encima de dicho rango se dan variaciones en las variables que son debidas al flujo-movimiento del fluido. En flujos con densidad extremadamente baja u ondas de choque es más difícil de definir ese intervalo.

La hipótesis de *fluido Newtoniano*, es decir, la relación constitutiva lineal entre la tasa de deformación  $d_{ij}$  y las tensiones viscosas  $2\mu d_{ij}$ , siendo  $\mu$  la viscosidad dinámica, se cumple de manera exacta en el agua y en la mayoría de los gases en condiciones no demasiado extremas, como puede ser una onda de choque [Bat'67].

Para fluidos compresibles, para números de Mach inferiores a 0,3 (flujo subsónico) el cambio de volumen es inferior al 10%. Además, en las condiciones habituales, las diferencias de temperatura en el seno del fluido y entre la pared y el fluido son demasiado pequeñas como para producir cambios de volumen apreciables en el fluido. Por lo tanto, se considera que el *flujo es incompresible*, es decir su densidad es



constante, y se puede prescindir de la variable temperatura y de la ecuación de la energía, y considerar constante la viscosidad.

En cuanto al peso, si el flujo está apoyado, la reacción del apoyo sobre el fluido genera un campo estático de presiones cuya resultante, llamada *empuje*, equilibra exactamente el peso para cada partícula de continuo, al tener todas ellas la misma densidad. Entonces el movimiento de la partícula es independiente del peso, y esta fuerza de volumen es excluida de la ecuación del momento.

En lo sucesivo se abordarán únicamente flujos donde se cumplen las hipótesis mencionadas. Bajo estas condiciones en la referencia Euleriana del movimiento, es decir expresando el movimiento del fluido en un dominio espacial fijo, de modo que por el punto (x,y,z) fijo pasan sucesivamente diferentes partículas de fluido, la ecuación de continuidad se escribe

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (I.1)$$

en notación indicial, y la ecuación del momento

$$\underbrace{\frac{Du_i}{Dt}}_{\text{aceleración partícula}} \equiv \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\text{acel. local}} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{acel. convectiva}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \underbrace{\frac{-p}{\rho} \delta_{ij}}_{\text{presión}} + \underbrace{2\nu d_{ij}}_{\text{tensión viscosa}} \right) \quad (I.2)$$

En estas expresiones los índices repetidos en un término indican un sumatorio sobre los tres valores del índice. En la ecuación del momento (I.2)  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $\rho$  su densidad, y el miembro de la izquierda es la aceleración de la partícula que en el instante t se encuentra en el punto (x,y,z), que en la referencia Euleriana tiene dos componentes, la local y la convectiva. El miembro derecho contiene las fuerzas de presión y viscosa que actúan sobre la partícula por unidad de masa, y se obtienen tomando la divergencia del tensor de tensiones. Este tensor es suma de dos componentes, una esférica de presiones y otra anisotrópica viscosa.

Las expresiones (I.1) y (I.2) constituyen el denominado *sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible*. Este sistema no lineal -debido al término convectivo- contiene cuatro ecuaciones escalares con cuatro incógnitas (las tres componentes  $u_i$  de la velocidad y la presión  $p$ ) y por ello se dice que está *cerrado*. Los movimientos laminar y turbulento son sendas soluciones deterministas de este sistema, siendo el turbulento un movimiento caótico.

Para flujos bidimensionales las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden escribir en la forma,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (I.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (I.4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (I.5)$$

donde las ecuaciones del momento (I.4) y (I.5) se han obtenido a partir de la (I.2) multiplicado por la densidad  $\rho$ . En ellas, el miembro de la derecha recoge las fuerzas de presión y viscosa, ahora por unidad de volumen. Dada la forma que presenta el término de presión es común llamar *gradiente de presión* a la fuerza debida a la presión, ya que esta frase recoge su origen.

Eliminando de las ecuaciones de Navier-Stokes los efectos viscosos (los términos que contienen la viscosidad  $\nu$  ó  $\mu$ ) se tienen las ecuaciones de Euler.

Por motivos que se verán más adelante, para el estudio de los flujos turbulentos no se considerará el flujo instantáneo irregular y rápidamente variable regido por las ecuaciones de Navier-Stokes, sino el flujo medio obtenido tomando el promedio según Reynolds de dichas ecuaciones, que da lugar a las ecuaciones RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) que se obtienen en el correspondiente apartado.

## 2.2. FLUJOS ALREDEDOR DE PERFILES.

En esta Tesis se desarrolla un método de optimización de forma fluidodinámica. Este tipo de optimización se encuadra en la fase de diseño de elementos mecánicos cuya misión es recibir determinados esfuerzos de un flujo, o bien aplicarlos sobre él. El método se ha desarrollado para optimizar perfiles aerodinámicos, pero haciendo las modificaciones oportunas se puede aplicar también para otro tipo de elementos.

Un *perfil* puede definirse como la sección transversal de un elemento mecánico que se encuentra inmerso en un flujo y recibe de éste una fuerza de sustentación. Cuando el flujo es modificado por la presencia del elemento se produce una distribución de presiones y de tensiones cortantes sobre su superficie que, integrados sobre toda ella, dan unos esfuerzos que son las fuerzas de sustentación y arrastre, y un momento. Por el principio de acción y reacción, simultáneamente el elemento ejerce los mismos esfuerzos sobre el fluido, pero en sentido contrario. Al objeto de que la fuerza de arrastre sea pequeña los perfiles suelen tener formas fuseladas. Los elementos pueden ser alas de aeronave, palas de turbina eólica o rotores de helicóptero, álabes de turbina o compresor, alerones, etc. Dos ejemplos de sistemas mecánicos con este tipo de elementos aparecen en la figura I.1.

Los flujos alrededor de alas y palas de turbina son prácticamente bidimensionales, al ser el campo de velocidad del flujo prácticamente paralelo al plano del perfil, salvo en las cercanías de ambos extremos del elemento en la dirección de la envergadura. Por este motivo el perfil es el corazón aerodinámico en sus respectivos sistemas: de su forma depende el comportamiento aerodinámico del sistema completo, y su diseño tiene una importancia fundamental.

Para conocer el rendimiento aerodinámico de un perfil se realizan análisis de flujo bidimensional a su alrededor. El análisis teórico sustituye a los costosísimos ensayos en túnel de viento. La herramienta de análisis empleada debe dar una precisión razonable en un tiempo asumible. Estas herramientas emplean modelos de flujo (sistemas de ecuaciones diferenciales) cuyo significado físico es necesario conocer, para valorar si pueden recoger adecuadamente la física del tipo de flujo bajo estudio. Se dedica el

primer tercio de este capítulo (apartado 2) a la física del flujo y a los modelos de flujo, al ser ambos básicos para elegir un modelo de flujo que permita realizar un buen análisis y por tanto un buen diseño.

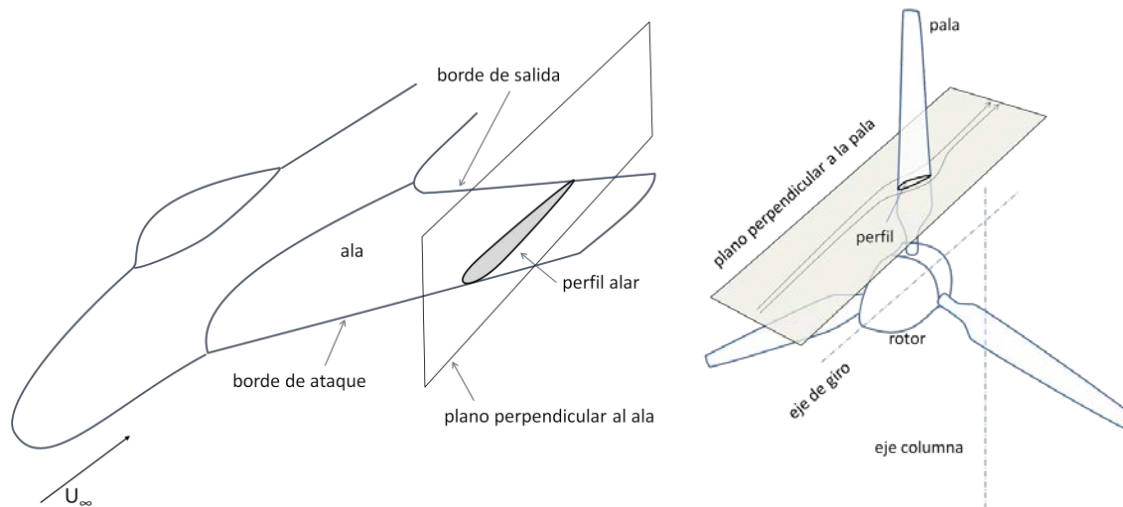


Figura I.1: (izquierda) Esquema de un ala y perfil alar, (derecha) esquema de una turbina eólica, pala y perfil.

En el análisis de flujo bidimensional de los perfiles se considera que el perfil es infinitamente rígido, al no ser suficientes las magnitudes de la tensión cortante y las diferencias de presión sobre la superficie como para producir deformaciones apreciables en la sección del perfil. Sin embargo, con independencia de ello, son habituales grandes flechas en elementos esbeltos sometidos a elevados momentos flectores.

Para validar los métodos de análisis teórico se suelen analizar perfiles ensayados previamente en túnel de viento, para así poder medir el error cometido en el análisis. Estos experimentos en túnel de viento se realizan sobre modelos de geometría proyectada cuya sección recta es el correspondiente perfil. Existen amplios catálogos de perfiles que contienen sus características aerodinámicas obtenidas en túnel de viento (ver por ejemplo las referencias [Abb'59; Sel'www]). Por otra parte, los catálogos de perfiles pueden ayudar a encontrar un perfil adecuado para cumplir una función determinada, pero también es muy habitual no encontrar en ellos un perfil suficientemente apropiado para dicha función. Es aquí, en el diseño de nuevos perfiles competitivos, donde la optimización de forma juega su papel.

### 2.2.1. Nomenclatura de un perfil.

Considérese el perfil aerodinámico de la figura I.2. La *línea media* es el lugar geométrico de los puntos situados a igual distancia del *extradós* y del *intradós*, medidas las distancias desde la propia línea media. Al punto más adelantado y al más atrasado del perfil se le denomina respectivamente *borde de entrada* (ó de ataque) y *borde de salida*, y a la línea recta que los une, *línea de cuerda*, cuya longitud se denomina *cuerda*,  $c$ , y es la máxima distancia entre el borde de salida y cualquier punto del perfil. Se llama *combadura* (*camber*) o *curvatura* del perfil, a la máxima distancia entre la línea media y la línea de cuerda medida perpendicularmente a ésta.

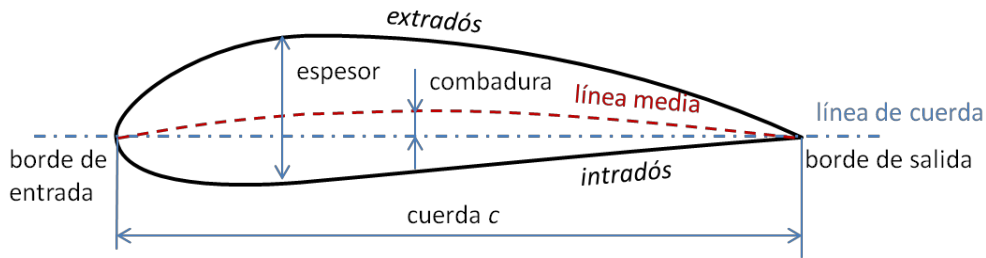


Figura I.2: Nomenclatura de un perfil.

### 2.2.2. Esfuerzos sobre un perfil.

En un flujo alrededor de un cuerpo sólido, el fluido en movimiento produce una distribución de presión y de tensión cortante en los puntos de la superficie del cuerpo. Este sistema de fuerzas diferenciales es equivalente a otro sistema, que consiste en la fuerza resultante  $R$  del sistema anterior aplicada en un punto que se denomina *centro de presiones*.

A su vez, estos dos sistemas de fuerzas son equivalentes a un tercero formado por la resultante y un momento  $M$  aplicados en un punto cualquiera  $P$  del cuerpo. En este caso  $M$  es el momento de la resultante (aplicada en el centro de presiones) respecto del punto  $P$  (ver la figura I.3, para el caso del flujo alrededor de un perfil, y el punto  $P$  en  $c/4$ ). Por convenio el signo del momento es positivo cuando tiende a hacer girar al perfil en sentido horario, levantando el perfil. La fuerza resultante tiene una componente de sustentación  $L$  (lift) perpendicular a la dirección del flujo, y una componente de arrastre  $D$  (drag) paralela al mismo.

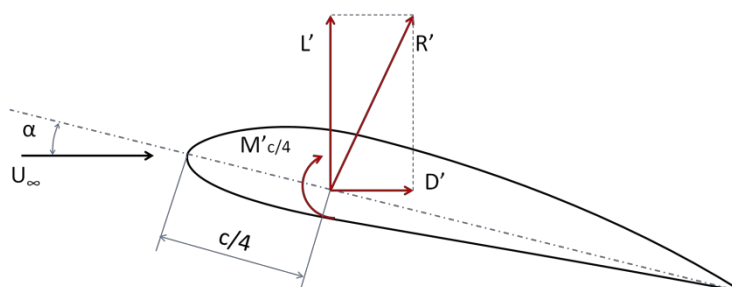


Figura I.3: Flujo alrededor de un perfil: sistema de fuerzas equivalente, resultante y momento en un punto del perfil.

Considérese un perfil aerodinámico tal y como muestra la figura I.3, en una corriente bidimensional que es uniforme aguas arriba lejos del perfil, donde tiene una velocidad  $U_{\infty}$ . Al ángulo que forma la cuerda del perfil con la dirección de dicho flujo lejano se le llama ángulo de ataque  $\alpha$ . Los esfuerzos de sustentación, arrastre y momento por unidad de longitud en dirección de la envergadura se denotan respectivamente por  $L'$ ,  $D'$  y  $M'$ .

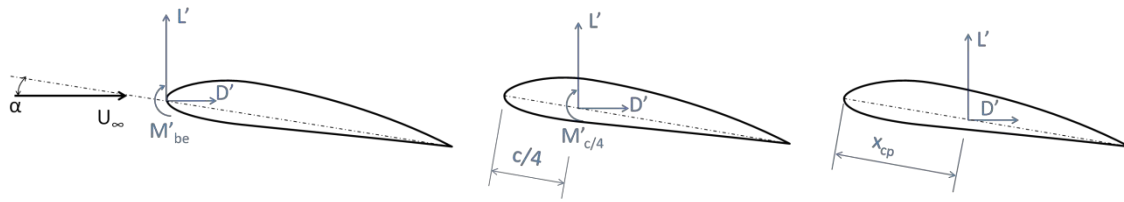


Figura I.4: Tres sistemas de fuerzas equivalentes en un perfil aerodinámico: Esfuerzos aplicados en el borde de entrada (izquierda), en c/4 (centro), y el centro de presiones (derecha).

En la figura I.4 se muestran tres sistemas de fuerzas equivalentes para el perfil, ubicados respectivamente en el borde de entrada (be), en el punto que dista  $c/4$  del mismo, y en el centro de presiones (cp). Obsérvese que, de acuerdo con la definición del centro de presiones, para el sistema de fuerzas en el centro de presiones no hay momento. Los valores del momento, para pequeños ángulos de ataque, se relacionan en la forma

$$M'_{be} = -\frac{c}{4} \cos \alpha L' + M'_{c/4} = -x_{cp} \cos \alpha L' . \quad (I.6)$$

Sucede que la posición del centro de presiones  $x_{cp}$  varía con el ángulo de ataque  $\alpha$ , de modo que este punto resulta desaconsejable para ubicar los esfuerzos aerodinámicos [And'91]. Así en su lugar suele tomarse un punto del perfil llamado centro aerodinámico (ca), que tiene la peculiaridad única de que el valor del momento tomado en este punto  $M'_{ca}$  no varía con el ángulo de ataque, para un amplio rango de ángulos de ataque (aquellos en que no se produce el despegue de la capa límite, que son los interesantes para el vuelo). Para perfiles en régimen subsónico, el centro aerodinámico se sitúa muy próximo a la posición  $c/4$  [And'00].

En la figura I.5 pueden verse los valores experimentales adimensionalizados de los momentos  $M'_{c/4}$  y  $M'_{ca}$  para el perfil naca 2412, estos son los coeficientes de momento  $C_{m, c/4}$  y  $C_{m, ca}$ , que serán definidos a continuación.

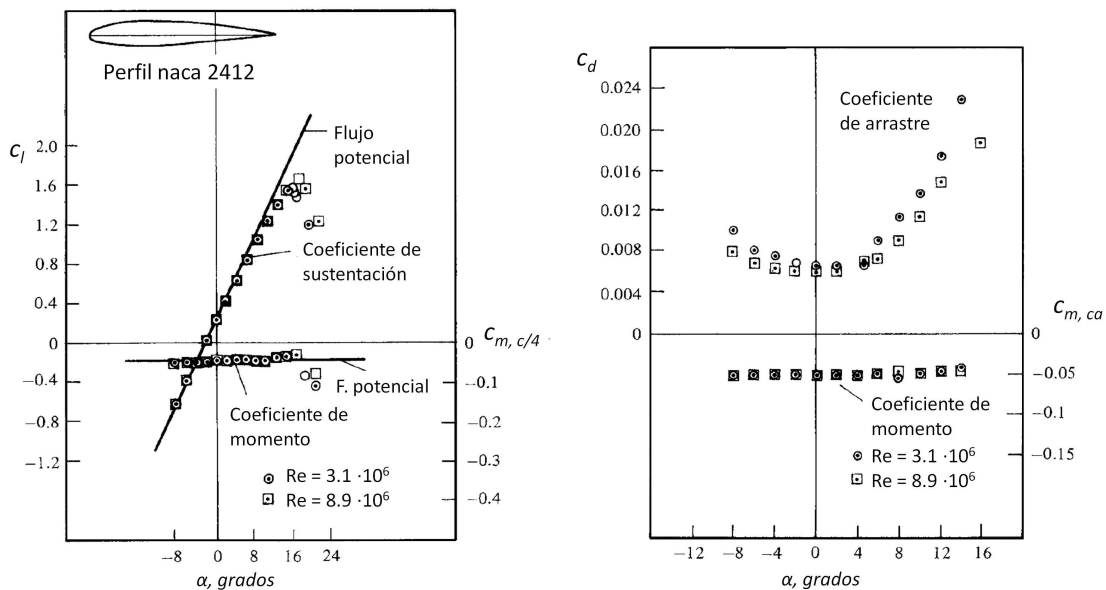


Figura I.5: Características del perfil naca 2412 (imágenes tomadas de la referencia [And'91] con datos del catálogo de experimentos en túnel de viento [Abb'59]).

### 2.2.3. Coeficientes aerodinámicos.

Los tres esfuerzos que actúan sobre el perfil por sencillez se manejan en forma adimensionalizada, usando respectivamente los coeficientes adimensionales de sustentación, arrastre y momento que se definen en la forma

$$c_l = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} = f(\text{forma}, \alpha, Re), \quad c_d = \frac{D'}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c}, \quad c_m = \frac{M'}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c^2} \quad (\text{I.7})$$

donde se han dividido los respectivos esfuerzos  $L'b$ ,  $D'b$  y  $M'b$  (tienen unidades de fuerza, siendo  $b$  la envergadura) por el producto de la presión dinámica  $\rho U_\infty^2/2$  y la superficie característica  $bc$ , y en el caso del momento además por la cuerda  $c$ . Así, la cantidad  $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 bc$  representa un valor de fuerza característico del flujo que depende de la velocidad del flujo y de la densidad del fluido. A estos tres coeficientes se les denomina coeficientes aerodinámicos o *características del perfil*, y varían con su forma, el ángulo de ataque y el número de Reynolds del flujo. Si se conocen estos tres valores para cada ángulo de ataque, se conoce el comportamiento del perfil.

Un aumento del número de Reynolds del flujo  $Re$  da un flujo menos viscoso, por lo que el arrastre tiende a disminuir (ver figura I.5). Por otra parte, en flujos potenciales (no viscosos,  $Re=\infty$ ) no se produce arrastre, y el centro aerodinámico se encuentra exactamente a  $c/4$  del borde de entrada.

Por su parte, los valores de la presión y la tensión cortante en cada punto de la superficie de un cuerpo tridimensional o de un perfil, suelen manejarse en forma adimensional dividiendo dichas cantidades por la presión dinámica para dar los *coeficientes de presión y de fricción*,

$$c_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad \text{y} \quad c_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (\text{I.8})$$

donde  $p_\infty$  es la presión en el flujo lejano o libre. En la figura I.17 se representan las distribuciones de los coeficientes  $c_p$  y de  $c_f$  obtenidas de una simulación para un perfil.

## 2.3. ZONAS PRINCIPALES DEL FLUJO: FLUJO EXTERIOR Y CAPA LÍMITE.

A continuación, se van a exponer los aspectos fluidodinámicos más importantes comunes en flujos incompresibles en dominios con paredes, aunque se particulariza para el caso de perfiles fuselados.

El esquema de la figura I.6 muestra una instantánea de las cercanías de un flujo estacionario alrededor de un perfil. El flujo es una corriente uniforme horizontal a cierta distancia aguas arriba del perfil y tiene un número de Reynolds elevado. El perfil tiene un ángulo de ataque moderado, tal que no hay despegue de la capa límite. La capa límite es muy delgada, aunque en el esquema se ha exagerado su espesor.

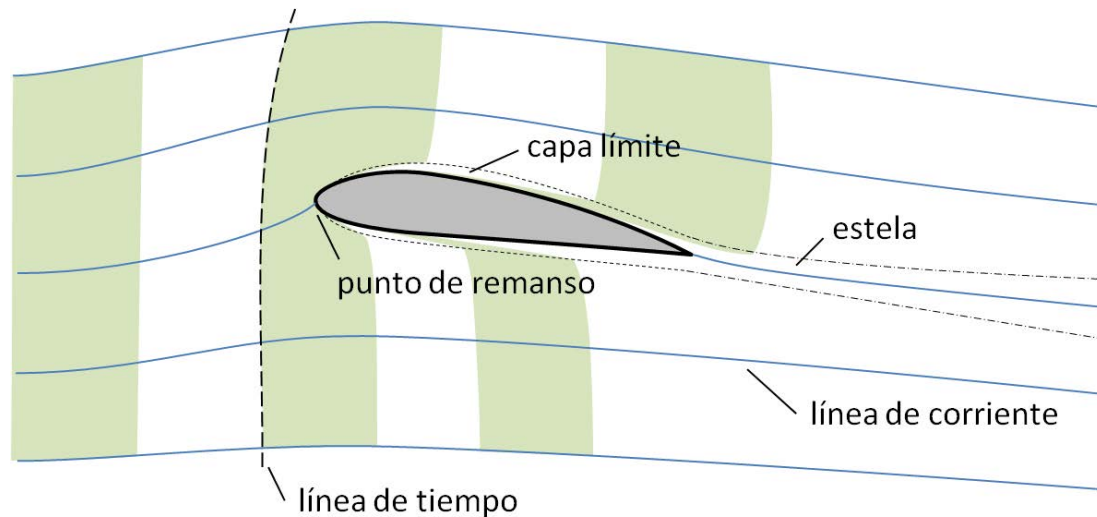


Figura I.6: Líneas de corriente y líneas de tiempo en el flujo alrededor de un perfil.

Se han marcado en color tres bandas entre seis *líneas de tiempo*. Las líneas de tiempo son líneas materiales que marcan las partículas que han pasado en el mismo instante de tiempo por una línea vertical sita en la entrada del dominio de estudio, y las bandas marcadas son las masas de fluido que han pasado por la entrada durante tres intervalos de tiempo iguales. Las bandas y las líneas de tiempo permiten visualizar la deformación del fluido y dan una idea de las diferencias de velocidad en su seno. Asimismo, se han marcado en azul todas las partículas que pasan por varios puntos situados a la entrada; estas líneas azules son trazas que coinciden con líneas de corriente y revelan la dirección de la velocidad del fluido. En el dibujo se ha omitido el efecto de posibles movimientos turbulentos en la capa límite.

En un flujo no viscoso no hay capa límite. Sin embargo, en un flujo real por efecto de la viscosidad el fluido no desliza en la pared y aparece la capa límite. Los flujos viscosos con pared se dividen en dos zonas con comportamientos muy diferentes: la capa límite y el flujo exterior a ella. Si el número de Reynolds es elevado, la capa límite tiene un espesor muy pequeño.

En la **capa límite**, debido a que el fluido experimenta distorsiones muy grandes las tensiones viscosas son importantes. Además, estas distorsiones generadas por la condición de no deslizamiento en la pared implican rotación, por lo que el flujo aquí es fuertemente rotacional. El efecto principal de la **capa límite** en un flujo como éste es producir tensiones viscosas cortantes en la pared que dan fuerza de arrastre (arrastre de fricción).

Sin embargo, como se verá más adelante (ver figura I.13), la aparición de la capa límite apenas afecta a la imagen de líneas de corriente, únicamente las desplaza muy levemente alejándolas del perfil, y en consecuencia apenas modifica el campo de presiones.

En el **flujo exterior** sin embargo, las distorsiones, que dependen de la forma de la pared (ver figuras I.6 y I.13), son mucho menores que las producidas en la capa límite, y además son distorsiones sin rotación. Así, únicamente existe rotacional en la capa límite

y en la estela, mientras que en el flujo exterior a ellas las tensiones viscosas son despreciables y por lo tanto se rigen por las ecuaciones del momento de Euler. Integrando estas ecuaciones a lo largo de una línea de corriente, se obtiene la conocida ecuación de Bernouilli, y como el flujo exterior es irrotacional, ésta se cumple para todos los puntos del flujo exterior y no solo para cada línea de corriente.

De observar las bandas coloreadas y las líneas de corriente, que están más juntas por encima del perfil que debajo de éste se extrae que el fluido en la zona superior al perfil tiene mayor velocidad que en la zona inferior, y usando la ecuación de Bernouilli se puede deducir que la presión en el extradós es menor que en el intradós. El origen de este efecto, que produce la fuerza de sustentación se verá más adelante con ayuda de las ecuaciones de Euler.

Por otra parte, en el flujo exterior el campo de velocidad es irrotacional,  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$ , por tanto este campo se puede obtener como gradiente de una función potencial de velocidad  $\Phi$  en la forma  $\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi$ , y se dice es un **campo de velocidad potencial**. Como además el flujo es incompresible satisface la **ecuación de continuidad**  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  y entonces el potencial de velocidad  $\Phi$  cumple la ecuación de Laplace,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \underbrace{\nabla^2\Phi = 0}_{\text{ec. Laplace}} \quad (I.9)$$

que es una ecuación diferencial lineal. Esta ventajosa propiedad permite componer campos de velocidad relativamente complejos de interés aerodinámico mediante superposición lineal de otros más sencillos.

Resumiendo, el flujo exterior se puede considerar en muy buena aproximación un flujo potencial. Para calcular su campo de velocidad se resuelve la ecuación lineal de Laplace, y para calcular el campo de presión la ecuación de Bernouilli. En los flujos potenciales, al no haber tensiones viscosas, no hay arrastre, únicamente sustentación y momento.

La capa límite sin embargo es una zona de flujo rotacional donde hay grandes distorsiones, en la que además de la presión actúa la tensión viscosa. Se rige por tanto por las ecuaciones de Navier-Stokes que para este tipo de flujo son imposibles de resolver analíticamente. Sin embargo, como se verá más adelante, para flujos con alto número de Reynolds en las zonas de la capa límite en que el radio de curvatura de la pared es mayor que el espesor de la capa límite, debido a las particularidades geométricas de este flujo, se pueden tomar ciertas hipótesis simplificativas que conducen a las ecuaciones de Prandtl para la capa límite que son mucho más sencillas (ver apartado 2.3.2).

La capa límite es más fina cuanto mayor sea el número de Reynolds del flujo, y su espesor aumenta a lo largo de la pared del perfil, porque la tensión cortante en la pared va frenando progresivamente el fluido.



### 2.3.1. Flujo exterior.

#### Fuerza de sustentación.

*Ecuaciones de Euler en coordenadas intrínsecas.*

Las ecuaciones del momento de Navier-Stokes en ausencia de tensiones viscosas se denominan ecuaciones de Euler. Éstas establecen que los cambios –gradientes- de presión son proporcionales a la aceleración de la partícula. Para flujos estacionarios en un sistema de referencia alineado con la línea de corriente, éstas se escriben, respectivamente para la dirección de la velocidad y la dirección de la normal, en la forma

$$\rho \underbrace{U \frac{\partial U}{\partial s}}_{\text{acel.tang}} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial s}}_{\text{grad. pres tangencial}} \quad (\text{I.10})$$

$$\rho \underbrace{\frac{U^2}{R}}_{\text{acel. centrípeta}} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial n}}_{\text{grad. pres normal}} \quad (\text{I.11})$$

donde el eje  $s$  apunta en la dirección y sentido de la velocidad y el eje  $n$  en la dirección normal hacia el centro de curvatura, siendo  $R$  el radio de curvatura de la línea de corriente, y  $U$  el módulo de la velocidad. La ecuación (I.10) indica que la partícula se acelera en la dirección de la trayectoria si le empuja un gradiente de presión  $-\partial p/\partial s$  en dicha dirección. Integrando esta ecuación en ausencia de rotacional se obtiene la ecuación de Bernouilli,

$$\rho U^2/2 + p = cte \quad (\text{I.12})$$

Por su parte la ecuación (I.11) describe la dinámica lateral de la partícula. La partícula de fluido describe una trayectoria curva porque hay un gradiente de presión en dirección normal  $-\partial p/\partial n$  que produce la aceleración centrípeta  $U^2/R$  que la desvía lateralmente. Visto de otro modo, el esfuerzo centrífugo  $\rho U^2/R$  es compensado por el esfuerzo de presión en sentido centrípeta  $-\partial p/\partial n$ .

Si se toma la imagen de líneas de corriente del flujo (ver por ejemplo la figura I.6 anterior), donde las líneas de corriente se juntan o se separan el gradiente de presión tiene una componente paralela al flujo (cambia el módulo de la velocidad), y allí donde se curvan tiene una componente normal (cambia la dirección de la velocidad).

Para describir el campo de presiones en flujos no viscosos (por ejemplo de manera cualitativa), y con ello los esfuerzos sobre las paredes, si las líneas de corriente son rectas (convergentes o divergentes) es suficiente con considerar la ecuación del momento longitudinal (I.10) o la de Bernouilli (I.12), pero donde las líneas de corriente son curvas, es necesario además considerar la dinámica lateral de la partícula mediante la ecuación (I.11).

*La sustentación como efecto de la curvatura.*

Considérese el flujo alrededor del perfil de la figura I.7 izquierda, que tiene espesor nulo y forma de arco de circunferencia con radio de curvatura  $R$ , y ángulo de ataque nulo. Lejos del perfil la presión es la atmosférica  $p_\infty$ .

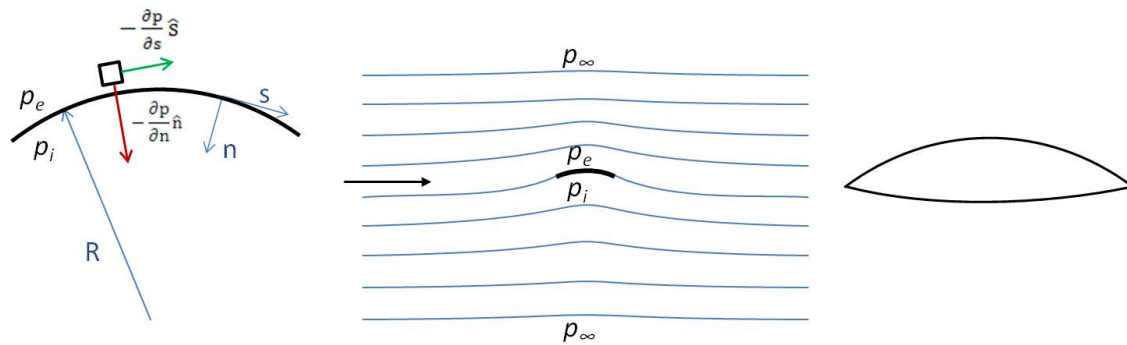


Figura I.7: (izquierda) Perfil aerodinámico de espesor nulo cuya línea media es un arco de radio  $R$ , presión en el extradós y en el intradós [Dar'05], e imagen de líneas de corriente [Bab'03] (centro). (derecha) Perfil cuya curvatura es mayor en el extradós que en el intradós, tiene sustentación [Hom'08].

Se considera el flujo no viscoso de Euler alrededor del perfil; en dicho flujo cada pared del perfil es una línea de corriente. La ecuación del momento en dirección transversal al movimiento (I.11) indica que la presión aumenta al alejarse del centro de curvatura de la línea de corriente. Entonces al moverse desde el extradós hacia arriba la presión aumenta desde  $p_e$  hasta  $p_\infty$ , cumpliéndose que  $p_e < p_\infty$ . Y desde el intradós hacia abajo la presión se reduce tal que  $p_i > p_\infty$ . Las presiones a cada lado de la pared son diferentes, y se obtiene que  $p_e < p_\infty < p_i$ , y como la presión en el extradós es menor que en el intradós, el perfil recibe una fuerza de sustentación.

Como se verá más adelante, el campo de presiones en la pared del perfil ejercido por el flujo viscoso no varía sustancialmente respecto del que ejerce el flujo no viscoso.

Resumiendo, por efecto del perfil se curvan las líneas de corriente, y la ecuación del momento entonces exige que sean equilibradas por un gradiente de presión transversal que da origen a la sustentación. En el caso del perfil con espesor de la figura I.7 derecha, como la desviación del flujo es mayor (tiene menor radio de curvatura) en el extradós que en el intradós, el descenso de presión respecto de  $p_\infty$  es mayor en el extradós que en el intradós y se produce sustentación. Si el perfil fuera simétrico respecto de la cuerda no habría sustentación.

Por lo tanto, si un perfil cambia la dirección del flujo, curva las líneas de corriente y entonces recibe una fuerza de sustentación. Esta desviación del flujo se puede conseguir de tres maneras. La primera es usar un perfil con curvatura: tanto una placa curva sin espesor, como un perfil con curvatura en la línea media, ambos sin ángulo de ataque, experimentan sustentación (ver figura I.7). La segunda es darle un ángulo de ataque, así una placa plana de espesor nulo o un perfil simétrico con ángulo de ataque producen sustentación. Y la tercera consiste en combinar ambas, la curvatura y el ángulo de ataque: en un perfil asimétrico (con curvatura de la línea media) con o sin espesor y ángulo de ataque, se consigue una mayor fuerza de sustentación debido a la suma de los efectos de la curvatura de la línea media y del ángulo de ataque.

Como se verá, el valor máximo de la sustentación que puede dar un perfil está limitado por la condición de que la capa límite esté adherida a su pared.

Por otra parte, el espesor del perfil apenas influye en la magnitud de la fuerza de sustentación. En efecto, cuando se aumenta la distribución de espesor en un perfil sin modificar la línea media, se está reduciendo el radio de curvatura del extradós y aumentando el del intradós. Entonces de acuerdo con la ecuación (I.11) la magnitud del gradiente de presión aumenta en el extradós (disminuye  $p_e$ ) y disminuye en el intradós (disminuye  $p_i$ ). El efecto neto producido por ambos cambios es que la sustentación suele modificarse escasamente. Esto puede comprobarse comparando la sustentación para dos perfiles con la misma distribución de espesor, pero con espesores máximos del 8% y del 24% (naca 2408 y naca 2424), donde un engrosamiento del perfil del 300% apenas produjo cambios en la sustentación, situado en torno a 0,2 para varios números de Reynolds para ángulo de ataque nulo (ver tabla IV.2 obtenida de la referencia [Abb'59]).

### 2.3.2. La capa límite.

A continuación se estudian varios flujos incompresibles sencillos con capa límite alrededor de una pared plana con ángulo de ataque nulo en régimen laminar, para mostrar los términos-esfuerzos de las ecuaciones de Navier-Stokes que son relevantes en la capa límite, y obtener a partir de estos interesantes relaciones que describen el movimiento. Después se obtendrán las ecuaciones simplificadas de Prandtl para la capa límite, válidas para flujos con alto número de Reynolds en régimen laminar alrededor de paredes con radios de curvatura mayores que el espesor de la capa límite, mientras no haya despegue de la capa límite. Finalmente se analizará el comportamiento de la capa límite turbulenta, que se basa en los mismos conceptos y tiene un esfuerzo-término añadido debido a las fluctuaciones de velocidad.

### Movimiento impulsivo de una placa infinita.

El flujo producido por el movimiento impulsivo de una placa infinita (ver figura I.8), conocido como *problema de Rayleigh*, se parece al flujo alrededor de una placa plana semiinfinita, pero es más sencillo aún porque el perfil de velocidad  $u(y)$  no varía en toda  $x$ , es decir la capa límite no varía en  $x$ .

Para un observador que permanece solidario con el fluido en reposo, como la cámara de la figura I.8, el flujo es *no estacionario*. En el instante inicial la placa plana comienza a moverse con velocidad  $U_0 \hat{i}$ , entonces la superficie de fluido sin espesor en contacto con la pared – que actúa como frontera del dominio fluido- comienza a moverse adherida a ella como se aprecia en las fotografías de la figura I.8. Esta adherencia se debe a que el fluido tiene viscosidad, y se denomina *condición de no deslizamiento*. Entonces el movimiento de la frontera fluida impone una rápida deformación de cortadura al fluido de sus proximidades, que antes estaba en reposo.

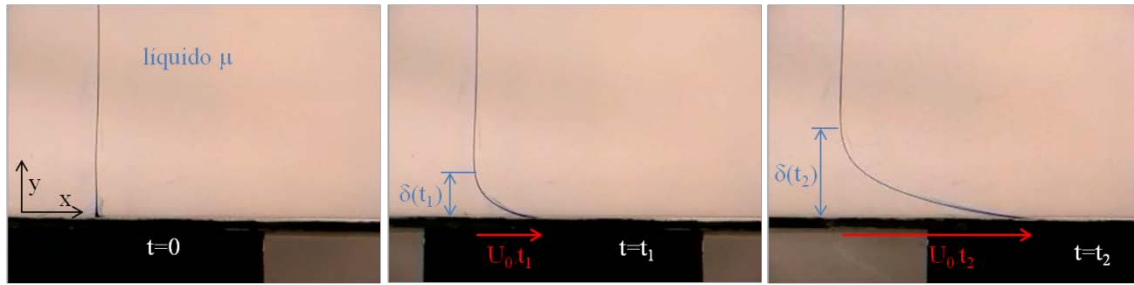


Figura I.8: Fotografías del flujo producido por el movimiento impulsivo de una placa plana infinita, para el instante en que se inicia el movimiento, y para dos instantes posteriores [Hom'08]. La placa se mueve hacia la derecha a una velocidad  $U_0$ .

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo bidimensional (I.3) a (I.5), considerando que para este flujo en todo el dominio fluido la velocidad es horizontal ( $v=0$ ) y la presión es uniforme (las líneas de corriente son horizontales), quedan reducidas respectivamente a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.14})$$

$$0 = 0$$

Siendo las condiciones de frontera  $u=U_0$  y  $v=0$  en  $y=0$ , y  $u=v=0$  en  $y=\infty$ .

Así, como indica la ecuación de continuidad (I.13) el campo de velocidad es horizontal y no varía en  $x$ , es decir  $u=u(y,t)$ .

En la pared la tensión viscosa es  $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$ , por lo que ésta ejerce sobre el fluido una fuerza horizontal  $b \int_{-\infty}^{\infty} \tau_w dx$  siendo  $b$  la envergadura de la placa. Por el principio de acción y reacción la placa recibe una fuerza de arrastre del fluido igual y de sentido contrario (arrastre).

En este flujo cortante simple, como muestra la figura I.9 para una capa de fluido de espesor  $dy$  situado en  $y$  el fluido es empujado hacia la derecha por una tensión viscosa cortante horizontal  $\mu(\partial u/\partial y)_y$  y hacia la izquierda con  $\mu(\partial u/\partial y)_{y+dy}$  siendo su resultante  $\mu(\partial^2 u/\partial y^2)_y dy$ , que es la cantidad de momento horizontal que le es añadido por unidad de tiempo (y de superficie paralela a la pared).

Así, por acción de la viscosidad, según la placa avanza hacia la derecha, como muestra la figura I.8, el momento en dirección horizontal  $x$  se va transmitiendo en dirección  $y$  y de capa en capa. A esto se denomina *difusión viscosa* del momento. A la distancia de la pared hasta donde llega el movimiento se denomina espesor  $\delta$  de la *capa límite* ó *capa de fricción*. A distancias de la pared donde no ha llegado el movimiento no hay esfuerzo viscoso.

tensiones viscosas ó de fricción  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

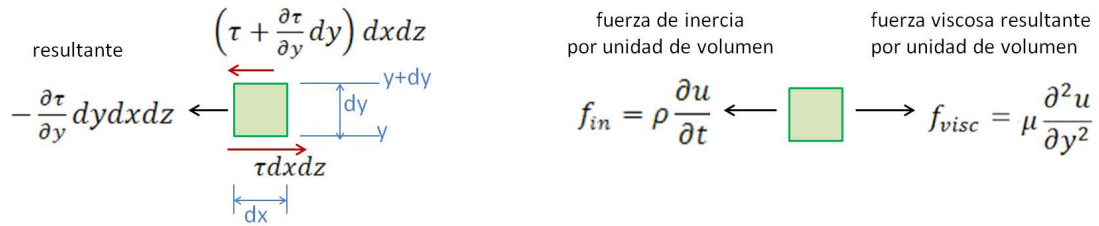


Figura I.9: (izquierda) Obtención de la fuerza viscosa sobre un elemento volumétrico diferencial de fluido, y (derecha) términos de la ecuación del momento para el flujo de Rayleigh, en unidades de [F/vol].

*Estimación del espesor de la capa límite.*

La ecuación diferencial (I.14) establece que un elemento de fluido es acelerado por efecto del esfuerzo viscoso (ver figura I.9b). Sin necesidad de resolverla, a continuación estimando las magnitudes de ambos términos se obtendrá información valiosa, como la estimación del espesor de la capa límite.

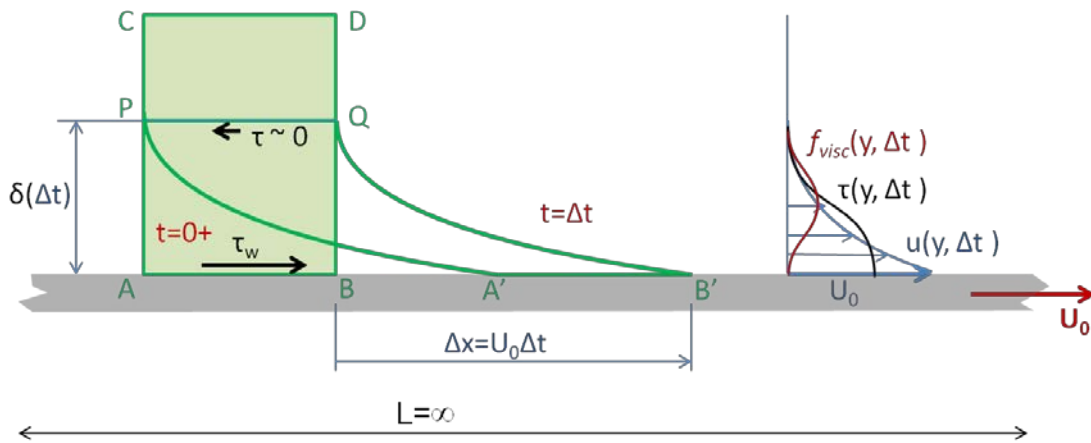


Figura I.10: (izquierda) Deformación del elemento fluido ABCD acaecida durante el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t]$ . (derecha) Perfiles de velocidad, tensión cortante, y esfuerzo viscoso para  $t=\Delta t$ . Durante este intervalo de tiempo el espesor de la capa límite ha crecido hasta  $\delta(\Delta t)$ .

En la zona del flujo donde actúa la viscosidad (capa límite), en un incremento de tiempo  $\delta t$  de orden  $t$  (similar a  $t$ ), los cambios de velocidad  $\partial u$  del fluido son comparables a  $U_0$ , de manera que

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} \sim \rho \frac{U_0}{t} \tag{I.15}$$

En esta expresión el símbolo  $\sim$  indica que ambos términos tienen una magnitud similar. Dichos cambios de velocidad se dan en distancias verticales comparables al espesor  $\delta$ , así

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U_0}{\delta} . \quad (\text{I.16})$$

El gradiente de velocidad  $\partial u / \partial y$  en dirección  $y$  en una distancia  $\delta$  pasa de tener en la pared un valor similar a  $U_0 / \delta$  a un valor nulo justo afuera de la capa límite. Así la magnitud del esfuerzo viscoso (por unidad de volumen), es del orden

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim \mu \frac{1}{\delta} \left( 0 - \frac{U_0}{\delta} \right) \sim \mu \frac{U_0}{\delta^2} . \quad (\text{I.17})$$

Imponiendo la ecuación del movimiento (I.14) se tiene

$$\rho \frac{U_0}{t} \sim \mu \frac{U_0}{\delta^2} , \quad (\text{I.18})$$

y se despeja el espesor de la capa límite

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu} t} = \sqrt{\nu t} , \quad (\text{I.19})$$

que aumenta con la raíz del tiempo, y con la raíz de la viscosidad.

Observando en detalle el campo de desplazamientos de la figura I.8 en diferentes instantes de tiempo se extrae que los perfiles de velocidad  $u(y)$  se repiten a lo largo del tiempo si se considera la coordenada  $y$  dividida por el espesor de la capa límite  $\sqrt{\nu t}$ . Se dice entonces que  $u(y/\sqrt{\nu t})$  es una *solución similar*, siendo  $y/\sqrt{\nu t}$  la *variable de similitud*.

### Flujo alrededor de una placa plana semiinfinita.

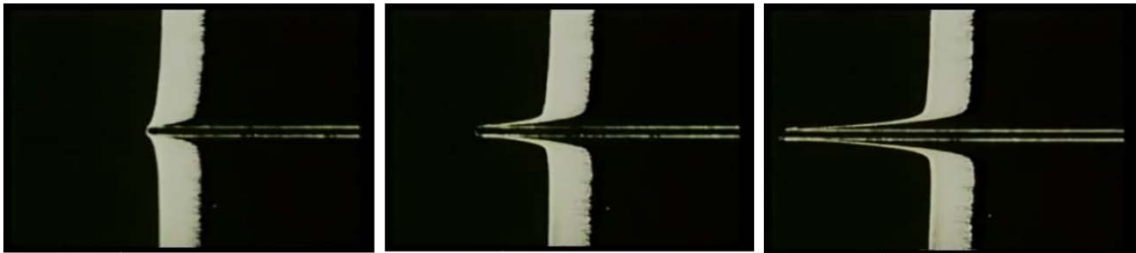


Figura I.11: Flujo alrededor de placa plana, cámara en reposo con el fluido [Sha'61]. La placa se mueve hacia la izquierda a velocidad constante. Desplazamientos en el fluido para tres instantes de tiempo, obsérvese el aumento de espesor de la capa límite.

Para un **observador solidario al fluido en reposo**, el flujo es el que aparece en las fotografías de la figura I.11 y salvo en las cercanías del borde de la placa tiene gran similitud con el flujo de Rayleigh. El momento se difunde en  $y$  según pasa el tiempo, aumentando así el espesor de la capa con movimiento (capa límite).

El sentido de la velocidad de la placa móvil ahora es hacia la izquierda, y como en este caso la placa es semiinfinita, la capa límite no tiene el mismo espesor en todo  $x$ . Se puede comprobar que en una abscisa  $x$  este espesor  $\delta$  crece con  $\sqrt{\nu t}$  siendo  $t$  el tiempo

desde que el borde de la placa pasó por dicha abscisa, es decir el tiempo que la placa lleva friccionando en  $(x,0)$ . Se trata de un flujo no estacionario donde la velocidad en la posición  $(x,y)$  aumenta con el tiempo hasta un máximo de  $U_0$  (valor de la velocidad de la placa) para  $t$  tendiendo a infinito.

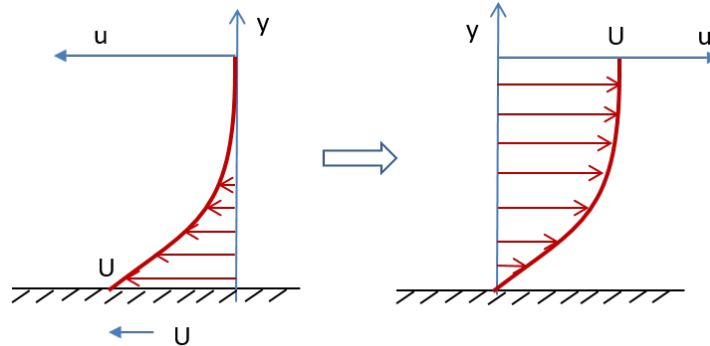


Figura I.12: Perfiles de velocidad de la capa límite con la misma forma:(izquierda) flujo donde la pared se mueve respecto del fluido en reposo con velocidad  $U$  hacia la izquierda, (derecha) en flujo con velocidad  $U$  hacia la derecha que se encuentra con placa en reposo.

El mismo movimiento, para un **observador en reposo respecto de la placa**, aparece como el flujo estacionario fotografiado en las figuras I.13 y I.14, cuyo perfil de velocidad es el resultante de restarle a la corriente uniforme de velocidad  $U_0$  el perfil de velocidad de la capa límite anterior, como muestra la figura I.12.

Excepto en las cercanías del borde de la placa, las ecuaciones para la zona de la capa límite para este flujo son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{I.20}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{I.21}$$

Las condiciones de contorno son velocidad horizontal  $U_\infty$  lejos de la pared y velocidad nula en la pared.

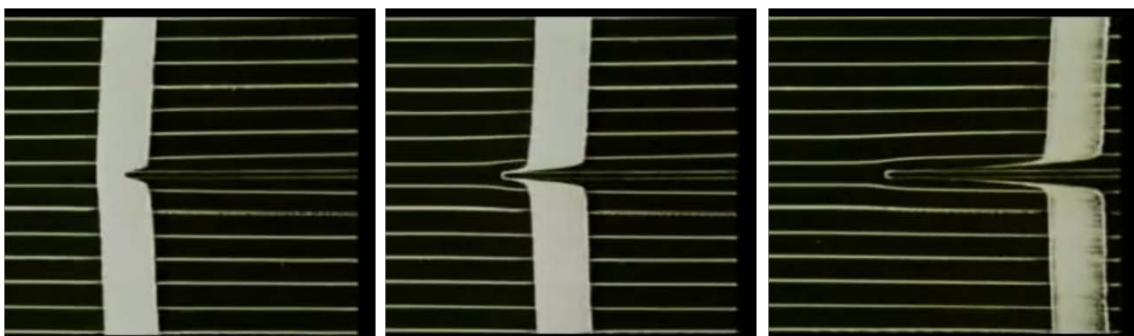


Figura I.13: Flujo estacionario alrededor de placa plana, líneas de corriente y *líneas de tiempo*, para observador ligado a la placa. Fotografías en tres instantes de tiempo [Sha'61].

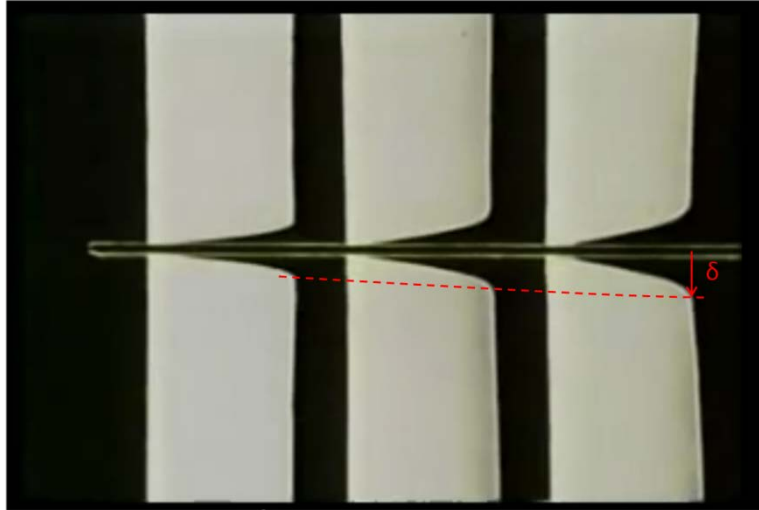


Figura I.14: Fotografía de un flujo alrededor de una placa plana tomada por una cámara solidaria a la placa. Visualización del flujo mediante burbujas de hidrógeno generadas por electrolisis en tres finos alambres colocados verticalmente en los que hay corriente eléctrica durante un intervalo de tiempo. Se aprecia el crecimiento de la capa límite con  $x$ , y la condición de no deslizamiento [Sha'61].

Estas ecuaciones se han obtenido de las ecuaciones de Navier-Stokes (I.3)-(I.5) despreciando el primer término viscoso y omitiendo la ecuación del momento en dirección transversal y que indica que la presión no varía en esta dirección. Además para este flujo se ha tenido en cuenta que la presión del flujo exterior es constante (las líneas de corriente mantienen su separación constante).

Aproximando los términos de la ecuación de continuidad, considerando que la longitud horizontal característica es  $x$  (no hay una longitud característica de la placa) y la vertical es  $\delta$ , se obtiene que

$$\frac{U_{\infty}}{x} + \frac{v}{\delta} \sim 0 \Rightarrow v \sim \frac{\delta}{x} U_{\infty}, \quad (\text{I.22})$$

esto indica que en la capa límite hay una pequeña componente de velocidad vertical.

*Espesor de desplazamiento  $\delta^*$  y espesor de momento  $\theta$ .*

En efecto, las fotografías de la figura I.13 muestran un pequeño desplazamiento de las líneas de corriente hacia afuera de la placa, no debido al espesor de la placa, al encontrarse el fluido con ésta. El fluido ralentizado por efecto del esfuerzo viscoso ocupa un mayor espesor para que se conserve el caudal entre la pared y la línea de corriente, y ésta se aleja de la pared adquiriendo una leve inclinación debida a una pequeña componente  $v$  de velocidad vertical. A este alejamiento de la pared de la línea de corriente se denomina *espesor de desplazamiento  $\delta^*$* .

Así, en la zona del flujo exterior las líneas de corriente son desviadas alejándose ligeramente del perfil, pero mantienen la distancia entre sí, al no haber fricción ni gradientes de presión que frenen al fluido.



El espesor de desplazamiento  $\delta^*$  puede definirse como la distancia que hay que desplazar la pared en un flujo uniforme de velocidad  $U_\infty$  para dar el mismo déficit de caudal que la capa límite. Este déficit es

$$U_\infty b \delta^* = b \int_0^\infty (U_\infty - u) dy \cong b \int_0^\delta (U_\infty - u) dy \quad (\text{I.23})$$

Y despejando se tiene la fórmula

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy. \quad (\text{I.24})$$

Para el flujo laminar alrededor de una placa plana se cumple que  $\delta^*(x) = 0,34\delta(x)$ .

Como se ha visto, una forma de calcular el arrastre es integrar la tensión viscosa en la pared  $\tau_w$  a lo largo de ella. Pero el arrastre es también la cantidad de momento por unidad de tiempo que la “fricción con la pared” le sustrae al flujo. Como esta sustracción se localiza en la capa límite, el arrastre es el defecto de momento por unidad de tiempo que tiene la capa límite en comparación con el flujo libre.

En la posición  $x$ , la capa de espesor  $dy$  situada en  $y$  lleva una porción de caudal másico  $u(y)\rho b dy$ , y ha perdido la cantidad de momento  $(U_\infty - u)u\rho b dy$ . Entonces sumando las pérdidas de momento de todas las porciones de caudal másico se tiene el arrastre de la placa hasta la posición  $x$ :

$$D = \rho b \int_0^\infty u (U_\infty - u) dy \cong \rho b \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy \quad (\text{I.25})$$

Al espesor de la capa que transporta un momento por unidad de tiempo igual al déficit que hay en la capa límite se le llama *espesor de momento*  $\theta$ . Siendo  $U_\infty b \theta$  el caudal de dicha capa, su momento por unidad de tiempo es  $\rho U_\infty^2 b \theta$ , y se tiene que

$$D = \rho U_\infty^2 b \theta = \rho b \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy \quad (\text{I.26})$$

Por lo tanto, para conocer el arrastre total de una placa de longitud  $l$ , es suficiente con conocer el espesor de momento de la capa límite en el extremo de la placa  $\theta(x=l)$ .

Despejando en (I.26) se tiene la siguiente fórmula para el espesor de momento, a partir del perfil de velocidad de la capa límite  $u(y)$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (\text{I.27})$$

Este valor para la capa límite laminar en una placa plana es  $\theta(x) = 0,13\delta(x)$ .

El espesor de momento puede definirse también como la distancia que la pared debe desplazarse hacia afuera en un flujo no viscoso para producir un déficit de momento igual al que hay en la capa límite.

El espesor de desplazamiento  $\delta^*$  y el espesor de momento  $\theta$  son cantidades muy usadas para caracterizar el estado de la capa límite. Al cociente entre ambos

$$H(x) = \frac{\delta^*(x)}{\theta(x)} \quad (\text{I.28})$$

se denomina *factor de forma* de la capa límite. Cuanto menor es el valor de  $H$  más plano es el perfil de velocidad y mayor es el gradiente en la superficie. Como se verá más adelante (ver figura I.22), para una placa plana con capa límite laminar  $H \approx 2.6$  y cuando ya se ha vuelto turbulenta pasa a  $H \approx 1.4$ . De esta manera  $\delta^*$ ,  $\theta$  y  $H$  son cantidades cruciales para predecir la transición de flujo laminar a turbulento.

*Estimación del espesor de la capa límite.*

Aproximando los términos de la ecuación del momento (I.21) se tiene

$$\underbrace{\frac{U_\infty^2}{x}}_{\sim \frac{U_\infty^2}{x}} + \underbrace{U_\infty \frac{\delta}{x} \frac{U_\infty}{\delta}}_{\sim v \frac{U_\infty}{\delta^2}} \sim v \frac{U_\infty}{\delta^2} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} \quad (\text{I.29})$$

Es decir, el espesor de la capa límite laminar crece con la raíz de  $x$  a medida que avanza a lo largo de la pared. Este resultado puede obtenerse igualmente sustituyendo  $t = x/U_\infty$  (que es el tiempo que necesita el flujo exterior para desplazarse una distancia  $x$ ) en la expresión (I.19) del espesor de la capa límite del flujo no estacionario de Rayleigh.

*Comparación entre estimaciones, solución y experimentos.*

Blasius en 1908 buscó para las ecuaciones (I.20) y (I.21) una solución autosimilar, esto es, un perfil de velocidad tal que si se divide la coordenada  $y$  por el espesor de la capa límite se repite en  $x$ . Es decir, buscó el perfil  $u=u(\eta)$  siendo

$$\eta = \frac{y}{\delta} = y / \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} \quad (\text{I.30})$$

la *variable de similitud*, y su solución aproxima muy bien los resultados experimentales [Sch'00], como muestra la figura I.15 izquierda.

A continuación, se comparan las estimaciones para la velocidad vertical y para el arrastre de la placa con los que arroja la solución de Blasius.

Para la componente vertical de la velocidad, la estimación y la solución de Blasius son respectivamente

$$v \sim \frac{\delta(x)}{x} U_\infty \sim \frac{U_\infty}{\sqrt{\text{Re}_x}} \ll U_\infty \rightarrow v_\infty = \underbrace{0.8604 \frac{U_\infty}{\sqrt{\text{Re}_x}}}_{\text{solución de Blasius}} \quad (\text{I.31})$$

donde se ha empleado el número de Reynolds formado con la distancia  $x$ ,  $\text{Re}_x = \rho U_\infty x / \mu$ .

Para el valor del arrastre se usa la siguiente estimación de la tensión cortante en la pared

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta(x)} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{\mu x}} = \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}} \quad (I.32)$$

donde el subíndice w indica que es el valor en la pared. Esta tensión cortante se reduce con  $\sqrt{x}$ , con el aumento del espesor de la capa límite, al reducirse el gradiente de velocidad en la pared en esta misma proporción. Así el coeficiente de arrastre de la placa da

$$c_d = \frac{D'}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 l} = \frac{\int_0^l \tau_w(x) dx}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 l} \sim \frac{4}{\sqrt{Re_l}} \rightarrow \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} \quad (I.33)$$

*solución Blasius*

que está muy cerca de la solución de Blasius, que aproxima bastante bien los valores experimentales del  $c_d$  para flujos con  $Re_l > 10^4$  como muestra la figura I.15 derecha. En la expresión anterior  $Re_l = \rho U_\infty l / \mu$  es el número de Reynolds del flujo formado con la longitud de la placa l.

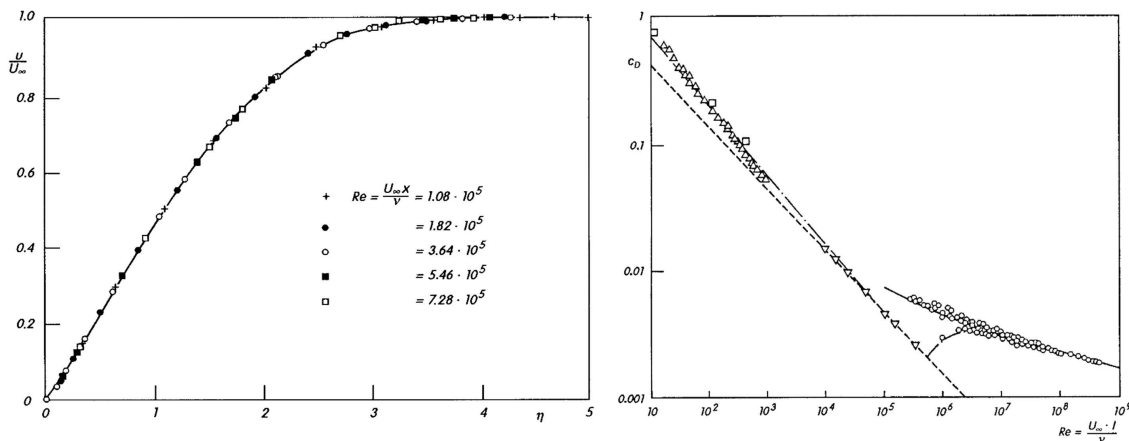


Figura I.15: (izquierda) Perfil de velocidad en la capa límite laminar en una placa plana para cero grados de ángulo de ataque, expresado como velocidad adimensionalizada frente a variable de semejanza. Comparación entre el perfil de Blasius y mediciones experimentales para flujos a varios números de Reynolds. (derecha) Coeficiente de arrastre que predice la solución de Blasius ( \_ . \_ ) y experimentos para capa límite laminar (triángulos) y turbulenta (círculos) [Sch'00].

### Ecuaciones simplificadas de la capa límite.

En flujos con pared más complejos que el de la placa plana paralela al flujo, sea porque la pared tiene inclinación o porque es curva, el flujo exterior a la capa límite deja de ser constante, y entonces los valores de velocidad y presión en el borde exterior de la capa límite varían al moverse a lo largo de la pared. Así, entra en juego el gradiente de presión, aunque como se verá solo interviene la componente paralela a la pared, que modifica el espesor de la capa límite y su perfil de velocidad. Más adelante se verá que el valor de éste gradiente de presión determina si la capa límite sigue o no adherida a la pared, e influye en la transición de flujo laminar a turbulento.

Prandtl en 1904 dedujo las ecuaciones simplificadas para la capa límite para flujos con número de Reynolds muy elevado partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes (I.3)-(I.5).

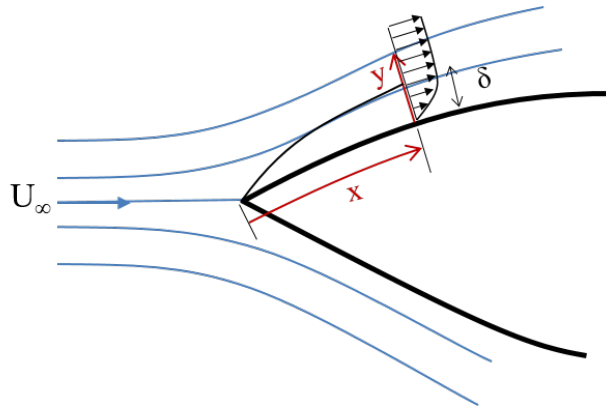


Figura I.16: Coordenadas para las ecuaciones simplificadas para la capa límite.

Este planteamiento es válido en los tramos de la pared con radio de curvatura  $R$  grande frente a su espesor  $\delta$ . En las zonas donde el radio de curvatura es pequeño, es necesario usar términos adicionales para recoger el cambio de presión en dirección normal por efecto de la curvatura de las líneas de corriente. Como muestra la figura I.16 las coordenadas son tales que  $x$  es la longitud recorrida sobre la pared del perfil, e  $y$  se mide normal a la pared en cada posición  $x$ .

Las velocidades salvo en la inmediata proximidad de la pared, son del orden de magnitud de la velocidad del flujo libre  $U_\infty$ . Se asumirá que el número de Reynolds  $Re = \rho U_\infty L / \mu$  (siendo  $L$  la longitud característica del cuerpo) es muy grande, para aplicaciones aeronáuticas habitualmente se encuentra entre  $10^4$  y  $10^8$ . En los experimentos se observa que  $\delta \ll L$ . Los cambios sustanciales en  $x$  ocurren para distancias comparables a la longitud característica del cuerpo  $L$ , así  $\partial / \partial x \sim 1/L$ , y los cambios en  $y$  ocurren en distancias del tamaño de  $\delta$ , de manera que  $\partial / \partial y \sim 1/\delta$ . La magnitud de los cambios de velocidad es comparable a  $U_\infty$ .

Se van a escribir de forma adimensional las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos estacionarios, para ver más claramente las magnitudes relativas de sus términos. Para ello se multiplica la ecuación de continuidad por  $L/U_\infty$  y las ecuaciones del momento en las direcciones  $x$  e  $y$  por el factor  $L/\rho U_\infty^2$  donde  $\rho U_\infty^2$  es un valor característico de presión.

Para la ecuación de continuidad el primer término es de orden de magnitud de la unidad.

$$\underbrace{\frac{L}{U_\infty} \frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{L}{U_\infty} \frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim 1} = 0 \quad (\text{I.34})$$

Como la suma de ambos términos es nula, el segundo es también de orden 1, y entonces

$$v \sim \frac{\delta}{L} U_\infty . \quad (\text{I.35})$$

La ecuación del momento en  $x$  en forma adimensional junto con el orden de magnitud resultante para sus términos se escribe, basándose en las consideraciones anteriores

$$\underbrace{\frac{L}{\rho U_\infty^2} \rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{L}{\rho U_\infty^2} \rho v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\sim 1} = - \frac{L}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\frac{L}{\rho U_\infty^2} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\sim \frac{1}{Re}} + \underbrace{\frac{L}{\rho U_\infty^2} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\sim 1} \quad (I.36)$$

El quinto término es igual al cuarto término multiplicado por  $L^2/\delta^2$ , pero para introducir de manera sustancial el esfuerzo viscoso en la capa límite debe ser comparable a los términos de inercia, por lo tanto

$$\frac{L^2}{\delta^2} \frac{1}{Re} \sim 1, \quad (I.37)$$

de manera que

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad \text{ó} \quad \delta \sim \frac{1}{\sqrt{U_\infty/(Lv)}} = \sqrt{\frac{L}{U_\infty}} \quad (I.38)$$

Es decir, el espesor de la capa límite decrece con la raíz del número de Reynolds, o de manera equivalente, crece con la raíz de la viscosidad. Es decir multiplicando por 100 el número de Reynolds, el espesor de la capa límite se reduce a la décima parte.

Considerando el peso relativo de los términos, se puede despreciar el primer término de esfuerzo viscoso.

La ecuación de conservación del momento en  $y$  en términos adimensionales es

$$\underbrace{\frac{L}{\rho U_\infty^2} \rho u \frac{\partial v}{\partial x}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{Re}}} + \underbrace{\frac{L}{\rho U_\infty^2} \rho v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{Re}}} = - \frac{L}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\frac{L}{\rho U_\infty^2} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\sim \frac{1}{Re^{3/2}}} + \underbrace{\frac{L}{\rho U_\infty^2} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{Re}}} \quad (I.39)$$

El primer término viscoso es despreciable frente a los demás. El término de presión es del orden de los términos dominantes  $1/\sqrt{Re}$ , es decir que comparándolo con el de la ecuación anterior

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{Re}} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta}{L} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x} \quad (I.40)$$

de manera que en la capa límite la presión varía mucho más lentamente en la dirección normal que en la longitudinal. Entonces se puede considerar que la presión en dirección normal a la pared a través de la capa límite no varía. Habiendo aplicado las simplificaciones comentadas, las ecuaciones de Navier-Stokes para la capa límite se han convertido en

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (I.41)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (I.42)$$

Las condiciones de contorno son velocidades  $u$  y  $v$  nulas en la pared, y componente paralela de la velocidad  $U(x)$ , que es dato (conocerlo implica resolver el flujo potencial alrededor del perfil), en el borde exterior de la capa límite.

La ecuación del momento en dirección  $y$ ,  $\partial p / \partial y = 0$ , está incorporada al sistema anterior sabiendo que  $p$  no varía en  $y$ . A partir de la velocidad  $U(x)$  se obtiene la distribución de presiones del flujo exterior potencial aplicando la ecuación de Bernoulli  $P + \rho U^2 / 2 = cte$ , ó la siguiente ecuación que se obtiene al derivarla:

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (I.43)$$

que coincide con la ecuación de Euler para flujo paralelo. Usando esta ecuación se puede eliminar el gradiente de presión en la ecuación del momento (I.42).

Matemáticamente, debido a la eliminación del primer término viscoso en la ecuación del momento en  $x$ , el sistema de ecuaciones de la capa límite es parabólico, a diferencia de las ecuaciones de Navier-Stokes que son elípticas. Esto implica que el valor  $U(x)$  afecta en la capa límite únicamente aguas abajo de  $x$ , y así la capa límite puede ser calculada numéricamente usando un *procedimiento de marcha*, calculando el perfil de velocidad  $u(y)$  en cada posición  $x$  avanzando paso a paso.

En cuanto a las soluciones, para paredes rectilíneas con diferentes inclinaciones, se pueden calcular soluciones autosimilares del perfil de velocidad de la capa límite  $u(y)$ , introduciendo éste en las ecuaciones simplificadas de Prandtl (I.41) a (I.43). Esto da lugar a la ecuación de Falkner-Skan, cuyas soluciones son los perfiles de velocidad de Hartree [Sch'00].

Para paredes curvas las soluciones no son autosimilares, y se usan diferentes tipos de métodos, como los procedimientos de marcha. También existen métodos para obtener soluciones aproximadas que definen el perfil de velocidad como una familia de curvas caracterizada por algún parámetro, que se basan en la *ecuación integral del momento*. Esta ecuación se obtiene de las de Prandtl integrando al espesor de la capa límite la ecuación resultante de eliminar el gradiente de presión en la ecuación simplificada del momento en  $x$  (I.42) usando la ecuación (I.43). Es válida tanto para flujo laminar como turbulento y tiene la forma

$$\frac{d}{dx} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} . \quad (I.44)$$

Estos métodos calculan el comportamiento del flujo en la capa límite de manera muy eficiente, y suelen utilizarse acoplados a herramientas que calculen el flujo exterior potencial (entre ellas es habitual el método de paneles), pudiendo resultar dificultosa su aplicación en geometrías complejas. La principal alternativa a estos métodos son los códigos CFD, mucho más costosos.

### Acoplamiento entre capa límite y flujo exterior.

Ambas regiones del flujo se influyen mutuamente. La geometría del perfil determina el flujo exterior, y con ello la distribución de presión y de velocidad en el borde exterior de la capa límite. En flujos con número de Reynolds elevado y paredes cuya curvatura no es muy grande el cambio de presión a través de la capa límite en dirección normal a la pared es despreciable. Es decir el flujo imprime la presión en la capa límite, de modo que la distribución de presión a lo largo de la pared, y el gradiente  $dp/ds$ , están determinados por la geometría del cuerpo.

Dependiendo del valor del gradiente de presión longitudinal  $dp/ds$  a lo largo de la pared, son modificados el perfil de velocidad de la capa límite y su espesor. Si este gradiente es adverso ( $dp/ds > 0$ ), el espesor de la capa límite aumenta más rápido, y el fluido de ésta que ya era frenado por el esfuerzo viscoso, será adicionalmente ralentizado por el esfuerzo de presión. Y si  $dp/ds$  alcanza cierta magnitud el fluido de la capa límite termina por detenerse y la capa límite se despega. Detrás del punto de despegue se forma una zona de recirculación (ver figuras I.18, I.19 izquierda, I.20), la presión no aumenta más y en consecuencia se da un fuerte incremento del arrastre, llamado *arrastre de presión*. En la capa de cortadura separada de la pared se origina muy fácilmente la turbulencia mediante ondas de Kelvin-Helmholtz.

Paralelamente, los gradientes de presión adversos vuelven inestable la forma del perfil de velocidad de la capa límite (aparece un punto de inflexión) frente a las perturbaciones, facilitando el crecimiento de ondas de Tollmien-Schlichting que producirá la transición de flujo laminar a flujo turbulento. Las capas límite turbulentas tienen el inconveniente de aumentar la tensión cortante en la pared, pero también la ventaja de ser más resistentes frente al despegue, al ser necesarios valores del gradiente de presión adverso de mayor magnitud para que éste se produzca.

Por el contrario si el gradiente de presión es favorable ( $dp/ds < 0$ ) la capa límite adelgaza y es más estable frente a las perturbaciones, y no hay posibilidad de despegue.

Lo anterior muestra la importancia crítica para el análisis de modelizar bien la capa límite. Y dentro de ella son claves el punto de *transición* de capa límite laminar a turbulenta (que en realidad se produce en un tramo corto), y el punto de *separación* ó despegue.

### *Ejemplo.*

Un flujo representativo del tipo de flujos que concierne a esta tesis es la simulación razonablemente realista de la figura I.17, del flujo con alto número de Reynolds alrededor de un perfil, para ángulo de ataque nulo. Las curvas de  $c_p$  y  $c_f$  de la figura I.17 dan información detallada del flujo simulado.

La distribución de presión (figura I.17 izquierda), muestra que no hay despegue de la capa límite, porque la presión se recupera con normalidad a lo largo de la pared. Esta gráfica da información del flujo exterior, que se comporta como un flujo potencial, e imprime su presión sobre la pared, ya que ésta no varía a través del espesor de la capa límite. El perfil tiene una sustentación positiva al ser la presión en el intradós mayor que en el extradós. Al llegar el fluido al punto de remanso situado en el borde de ataque, se

detiene y la presión alcanza su valor máximo posible, la presión dinámica. A partir de ahí se acelera el flujo y se reduce la presión hasta alcanzar un mínimo. A continuación la presión se va recuperando, hasta llegar a un pequeño valor positivo en el borde de salida. El valor de la presión en el borde de salida depende de la velocidad afuera de la capa límite en esta zona. Para perfiles de espesor nulo  $c_p$  vale cero en el borde de salida, y es algo mayor que cero en perfiles de cierto espesor porque esta velocidad es algo menor que la del flujo libre.

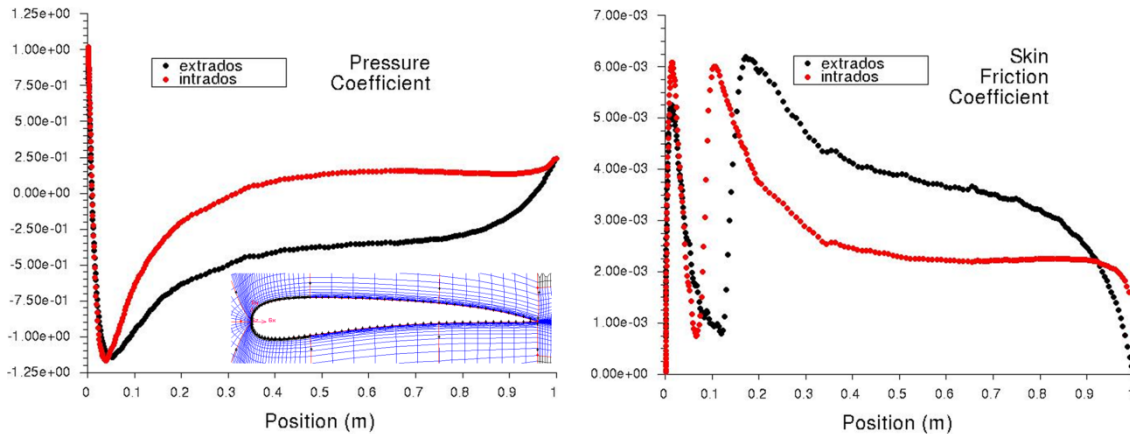


Figura I.17: Coeficientes de presión (izquierda) y de fricción (derecha) de un perfil. (resultados del análisis de un perfil en una de nuestras ejecuciones de optimización –ver capítulo IV- obtenidos usando un modelo de transición RANS sobre la malla de la figura para  $Re = 6 \cdot 10^6$ ).

A lo largo de la zona de recuperación de presión hay un gradiente de presión adverso, cuyo valor depende de la forma del perfil. En este caso la pendiente de las paredes no es muy elevada, y el gradiente de presión no es suficiente para producir el despegue de la capa límite. De haberse despegado, se habría producido una zona de recirculación donde no se recupera la presión sino que se mantiene constante, y donde  $c_f$  es casi nulo o ligeramente negativo.

Por su parte, la distribución de tensión cortante en la pared recogida en la curva de  $c_f$  da información del estado de la capa límite. La tensión cortante se eleva fuertemente al inicio cerca del borde de entrada, porque se está iniciando la capa límite, apenas tiene espesor y el gradiente de velocidad en dirección normal a la pared es muy grande. Su valor disminuye a continuación al ir aumentando el espesor de la capa límite laminar. Después, hay un salto brusco en  $\tau_w$  debido a la transición a capa límite turbulenta, que se produce a poca distancia de que empiece a actuar el gradiente de presiones adverso, y de nuevo vuelve a disminuir según aumenta el espesor de la capa límite turbulenta.

### Efectos críticos en la capa límite: despegue y transición a flujo turbulento.

#### *Separación y arrastre de presión.*

La separación de la capa límite es producto de la acción combinada en la capa límite de dos esfuerzos que se oponen al avance del fluido en sentido paralelo a la pared: el viscoso y el gradiente de presión adverso que imprime el flujo exterior. Es la



responsable del arrastre de presión. Para explicar la separación se estudia aquí el flujo alrededor de un cilindro [Sch'00].

En el flujo no viscoso (flujo potencial) alrededor de un cilindro, después del punto de estancamiento inicial donde la presión es máxima, el fluido es acelerado. Después del punto de mínima presión el flujo decelera para detenerse completamente en el punto de estancamiento trasero, donde de nuevo hay máxima presión. La energía cinética se ha transformado en energía de presión. La fuerza ejercida por la presión en la parte delantera del cilindro es compensada por la ejercida en la parte trasera y no hay arrastre (a esto se llama paradoja de D'Alembert), al no haber tampoco tensiones cortantes por la ausencia de viscosidad.

En el flujo viscoso, al iniciarse éste, el espesor de la capa límite es nulo y en los instantes siguientes aumenta progresivamente. Mientras la capa límite es muy delgada, el campo de presiones a lo largo de la pared coincide con el del flujo potencial, la tensión viscosa solo frena una capa muy fina de fluido, que no se despega. Pero según esta capa límite aumenta su espesor, más cantidad de fluido de las cercanías de la pared es frenada por efecto de la viscosidad y al encontrarse éste con el gradiente adverso de presión, es frenado progresivamente hasta detenerse en las cercanías del punto más posterior del cilindro, donde se produce el despegue de la capa límite.

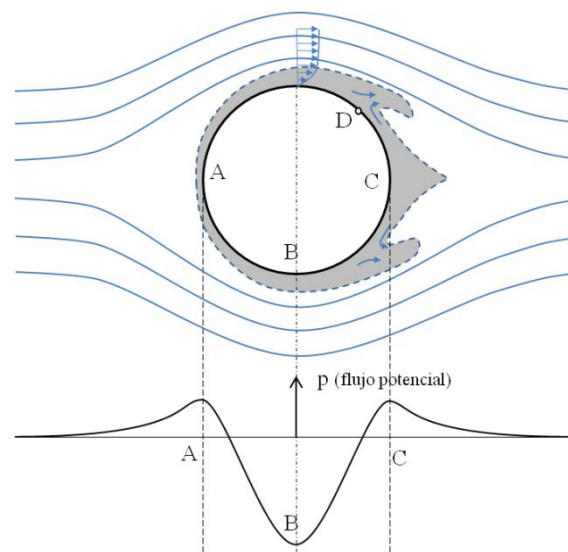


Figura I.18: Distribución inicial de presión para el flujo alrededor de un cilindro circular, y consiguiente separación de la capa límite. El fluido afectado por la viscosidad se ha dibujado en gris.

Mientras sigue aumentando el espesor de la capa límite, el efecto de frenado viscoso hace más mella en la velocidad del fluido próximo a la pared, y el punto de despegue se va moviendo aguas arriba. De este modo, una vez superado el punto de mínima presión, en poca distancia se produce el despegue. En la capa límite la energía cinética se ha disipado parcialmente y no ha podido transformarse totalmente en energía de presión. El flujo ha sido modificado, y con él el campo de presiones, que ya no se parece al del flujo potencial: la presión en la parte trasera del cilindro no se ha recuperado hasta los valores de la parte simétrica delantera. Se produce entonces una ancha estela de baja presión (zona de aguas muertas), de tal manera que la fuerza debida a la presión de la parte delantera del cilindro –que empuja hacia la derecha– no es compensada por la

producida en la superficie trasera –que empuja hacia la izquierda-, y el arrastre aumenta en gran cuantía. A esta componente del arrastre, debida a este campo de presiones modificado por el despegue de la capa límite, se denomina *arrastre de presión*.

*Influencia del ángulo de ataque y de la geometría del perfil.*

En el caso de perfiles aerodinámicos para pequeño ángulo de ataque, no hay separación, y la presión se recupera en buena parte a medida que el fluido avanza por extradós e intradós hasta el borde de salida. La presión en el borde de salida depende de la geometría del perfil en sus cercanías; ésta fija la velocidad del flujo exterior a la capa límite (potencial) en esta zona. Los perfiles gruesos en el borde de salida dan presiones algo más elevadas que los delgados, ya que estos últimos dan velocidades más próximas a la del flujo libre.

La variación de la sustentación frente al ángulo de ataque es muy similar a la del flujo no viscoso (potencial), como muestran por ejemplo los experimentos sobre el perfil naca 2412 (ver la figura I.5). La ligera discrepancia, que se acrecienta con el ángulo de ataque, se debe a los efectos viscosos (a la capa límite) como el desplazamiento de las líneas de corriente y despegues en las cercanías del borde de salida. Como esta diferencia depende de la viscosidad, decrece con el número de Reynolds.

Sin embargo, para valores grandes del ángulo de ataque, aumenta la diferencia de presión entre el extradós y el intradós, aumentando la sustentación, y aparece un punto de separación cerca del borde de salida, que se mueve aguas arriba al aumentar alfa que produce un aumento del arrastre. Para un ángulo de ataque crítico que suele situarse entre los 15° y los 20° la capa límite se separa completamente del extradós. La presión a lo largo de la pared varía completamente, produciéndose una fuerte caída en la sustentación (*stall*), y debido a la diferencia de presiones entre la superficie anterior y posterior, se incrementa de manera agudizada el arrastre de presión (ver figura I.5).

Si el radio de curvatura en el borde de entrada es pequeño, tal y como ocurre para la placa sin apenas espesor de la figura I.19 izquierda, el gradiente de presión centrífugo es muy grande, y esto arroja un pico de presión negativa de gran magnitud. Entonces el fluido de la incipiente capa límite que avanza a lo largo de la pared, al sobrepasar esta pequeña zona de baja presión, se encuentra con un gradiente de presión adverso de magnitud muy elevada, y como ha perdido energía cinética debido a la tensión viscosa, el fluido no tiene suficiente velocidad para enfrentarlo y se produce la separación. Esto modifica el campo de presión a lo largo la pared reduciendo la sustentación y aumentando el arrastre.

El perfil de la figura I.19 derecha tiene un borde de entrada redondeado fruto de añadir a la misma línea media, una determinada distribución de espesor. Así se ha reducido la magnitud del pico de presión negativa, esto disminuye el gradiente de presión adverso y evita el despegue de la capa límite.

Por otra parte, los espesores grandes (por encima del 18%, bastante mayores que el de la figura I.19 derecha), dan mayores magnitudes de presión mínima, y también valores de presión en el borde de salida ligeramente mayores. Entonces conviene alargar la zona de recuperación de presión para que no tenga un gradiente de presión adverso demasiado pronunciado, por ello interesa adelantar el punto de presión mínima.

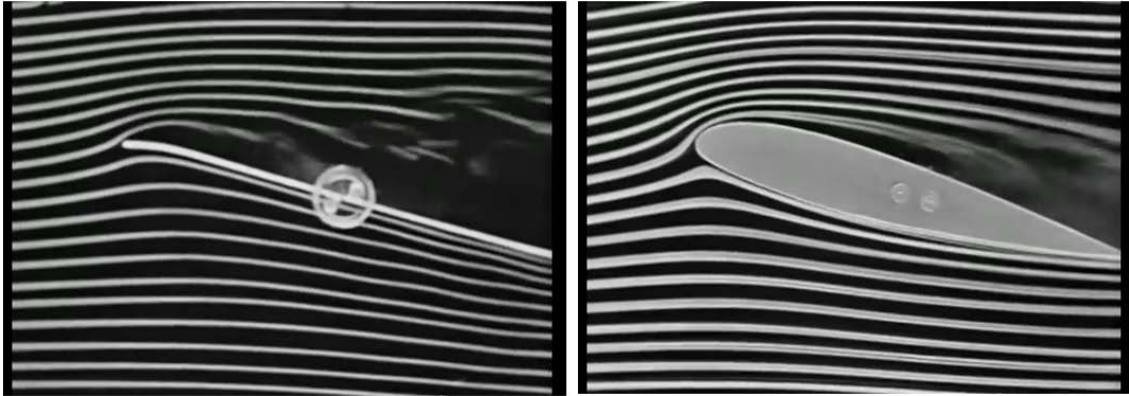


Figura I.19: (izquierda) Placa sin espesor y ligera curvatura en la parte delantera. (derecha) Perfil con la misma línea media que la placa. Para este ángulo de ataque el flujo alrededor de la placa se produce la separación de la capa límite, pero no para el perfil. [NAC' www].

*Despegue en capas límite turbulentas.*

Una capa límite laminar tolera solamente un gradiente de presión adverso muy pequeño antes de despegarse. Esto implica que aún para perfiles muy esbeltos se produce el despegue. Sin embargo, cuando la capa límite es turbulenta el punto de separación se mueve aguas abajo, como muestra la figura I.20 en el flujo alrededor de una esfera, porque debido al movimiento de mezcla turbulento, el flujo exterior introduce más momento (acción energizante) sobre la capa límite que en el caso laminar.

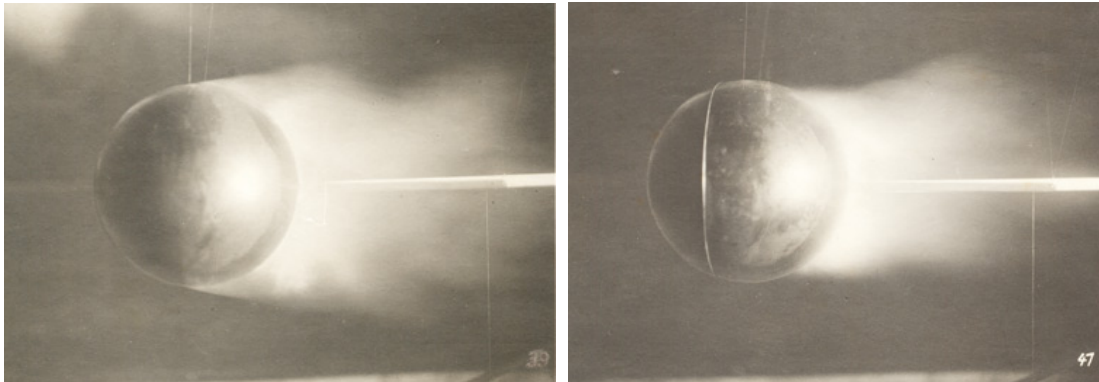


Figura I.20: Flujo alrededor de una esfera. (izquierda) Línea de separación y estela para capa límite laminar. (derecha) Idem para capa límite turbulenta. La turbulencia en la capa límite ha sido provocada colocando un alambre [Dav' 11].

Al moverse aguas abajo el punto de despegue se reduce drásticamente el arrastre de presión y con ello el arrastre total. El hecho de que la capa límite turbulenta sea más estable frente a la separación, juega un papel importante en los flujos alrededor de perfiles fuselados, así la aparición de la turbulencia posibilita valores razonables del arrastre y de la sustentación.

### Transición de flujo laminar a flujo turbulento.

#### Mecanismos de transición.

En los flujos con pared, a medida que la capa límite se desarrolla se ve sometida a numerosas perturbaciones debidas a la rugosidad de la superficie, turbulencia en el flujo exterior, etc. Si estas perturbaciones se amortiguan el flujo sigue siendo laminar, pero si se amplifican la capa límite se vuelve turbulenta. El gradiente de presión adverso inestabiliza el perfil de velocidad de la capa límite promoviendo la transición de capa límite laminar a capa límite de turbulenta. Por el contrario, los gradientes de presión favorables retardan la transición. A continuación se recogen los mecanismos de transición más habituales, que tienen lugar en situaciones diferentes.

La *transición natural* suele producirse para intensidades de turbulencia del flujo libre inferiores al 1%, que son los valores habituales en aplicaciones aerodinámicas. A partir de un cierto valor del número de Reynolds  $Re_x = \rho U_\infty x / \mu$  siendo  $x$  la distancia recorrida por el flujo a lo largo de la pared, y  $U_\infty$  la velocidad del flujo libre, aparecen pequeñas fluctuaciones bidimensionales llamadas ondas de Tollmien-Schlichting (para flujo incompresible alrededor de una placa plana ronda  $Re_x$  ronda 500.000). Como muestra la figura I.21, estas ondas inestables se van amplificando (en amarillo) y se vuelven tridimensionales formando vórtices con forma de horquilla (en rojo) que al romper dan lugar a brotes turbulentos (en blanco) que se expanden lateralmente aguas abajo, y que evolucionan en turbulencia desarrollada (en verde).

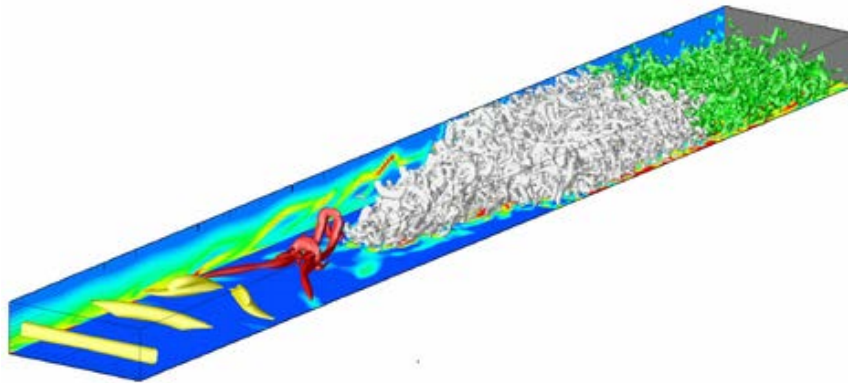


Figura I.21: Simulación de grandes remolinos (LES) de la *transición natural* en la pared de un flujo en canal. Imagen tomada de la referencia [Sch'05].

En las alas, donde el flujo tiene una componente tridimensional la transición también se produce a partir de la denominada inestabilidad de *flujo cruzado* [Bip'99].

Por su parte, el mecanismo llamado *transición bypass* se produce debido a la turbulencia del flujo exterior, cuando ésta tiene intensidades por encima de 1%. Es el mecanismo habitual en turbomaquinaria, donde la intensidad de la turbulencia del flujo exterior pueden alcanzar valores del 20% y mayores [Ste'96]. La elevada cortadura de la capa límite actúa como un filtro, de tal manera que de las perturbaciones del flujo exterior, solamente las de baja frecuencia consiguen penetrar en la capa límite laminar, generando los denominados surcos de Klebanoff, que sobrepasan a las ondas de Tollmien-Schlichting. Estos surcos son chorros longitudinales fluctuantes que van creciendo aguas abajo, y entonces cuando una perturbación de alta frecuencia del flujo

exterior entra por el borde superior de la capa límite, rompen y se desencadena la transición [Zak'05].

Otros mecanismos son la *transición inducida por separación*, donde ante un gradiente de presión adverso la turbulencia se desarrolla dentro de la capa de cortadura separada, vuelva o no la capa límite a adherirse a la pared. En la capa de cortadura separada (estas capas son muy inestables) tienden a aparecer rápidamente ondas de Kelvin-Helmholtz, que pueden interactuar también con ondas de Tollmien-Schlichting si éstas han sido generadas previamente en la pared [Mal'96; Hat'99].

Por último, en la *relaminarización*, por efecto de un fuerte gradiente de presión favorable la capa límite turbulenta adelgaza y vuelve a ser laminar [May'91].

#### *Predicción de la transición, alternativas.*

Una manera de predecir el punto de transición en paredes de forma variable es el empleo de la *teoría de estabilidad lineal*. El planteamiento de esta teoría se basa en introducir en el flujo bidimensional de Navier-Stokes caracterizado por un perfil de velocidad que solo varía en  $y$  (dirección normal a la pared), una perturbación bidimensional del campo de velocidad que varía sinusoidalmente en  $x$  (dirección paralela a la pared) y en  $t$ . Se ha comprobado que las perturbaciones más peligrosas son bidimensionales, y no tridimensionales. Sustituyendo esta forma de perturbación en la ecuación del momento del flujo anterior, se obtiene la ecuación de Orr-Sommerfeld (1908), que es un problema de valores propios. Resolviéndola se han obtenido diagramas que indican, para diferentes gradientes de presión, las frecuencias de perturbación que se amplifican para diferentes posiciones en  $x$  [Sch'00].

El promediado RANS (ecuaciones de Navier-Stokes promediadas en el tiempo para el cálculo de flujos turbulentos, que se verán más adelante) elimina los efectos de crecimiento de las perturbaciones lineales, por ello es difícil aplicarlo a la transición.

El método  $e^N$  [Ing'08], cuya primera versión data de 1956, es un sencillo método que usa los diagramas de la teoría de estabilidad lineal para calcular el crecimiento de las perturbaciones a lo largo de  $x$ , prediciendo la transición en aquella posición  $x$  de la pared en que la perturbación más peligrosa ha llegado a amplificarse en  $e^N$  veces. El parámetro  $N$  está relacionado con la intensidad de la turbulencia del flujo libre, y puede ser calibrado comparando con ensayos experimentales. Este método se acopla frecuentemente en los códigos de paneles, pero no en los métodos CFD porque necesita realizar operaciones no locales (como calcular el espesor de desplazamiento de la capa límite), en las cuales es necesario integrar hasta el borde de la capa límite, y éste es difícil de determinar [Men'06].

En los últimos años se han desarrollado diferentes tipos de métodos para predecir la transición, algunos formulados en términos locales, compatibles con los códigos CFD (ver apartado 2.6.1).

### 2.3.3. Características de los flujos cortantes turbulentos.

Los flujos laminares tienen muy poco intercambio de partículas en dirección perpendicular al flujo. Los flujos turbulentos sin embargo presentan fluctuaciones de velocidad irregulares y aleatorias en dirección longitudinal y transversal, debido a la existencia de remolinos de tamaño macroscópico que agitan a sus partículas produciendo una fuerte mezcla del fluido. Así, en flujos cortantes se produce una fuerte transmisión de momento en dirección transversal al flujo. En concreto, en los flujos con pared, una vez se produce la transición en la capa límite de flujo laminar a turbulento, la turbulencia queda confinada en la capa límite y la estela.

Como muestra el esquema de la figura I.22 para el flujo alrededor de una placa plana, la transición de flujo laminar a turbulento produce un cambio de forma en el perfil de velocidad de la capa límite. El perfil de velocidad de la capa límite turbulenta (promediado en el tiempo) está “más lleno” que el perfil laminar, tiene mayor gradiente de velocidad en la pared (aumenta el arrastre de fricción), dando una mayor transferencia de momento entre capas en dirección normal a la pared.

A una misma distancia de la pared la velocidad media en la capa límite turbulenta es mayor que en la capa límite laminar, porque las zonas exteriores de la capa límite transmiten más cantidad de momento a las interiores. El fluido de la capa límite se frena menos, y la capa límite turbulenta es más estable frente a la separación, necesitando mayores valores de gradiente de presión adverso para que ésta se produzca (ver figura I.20).

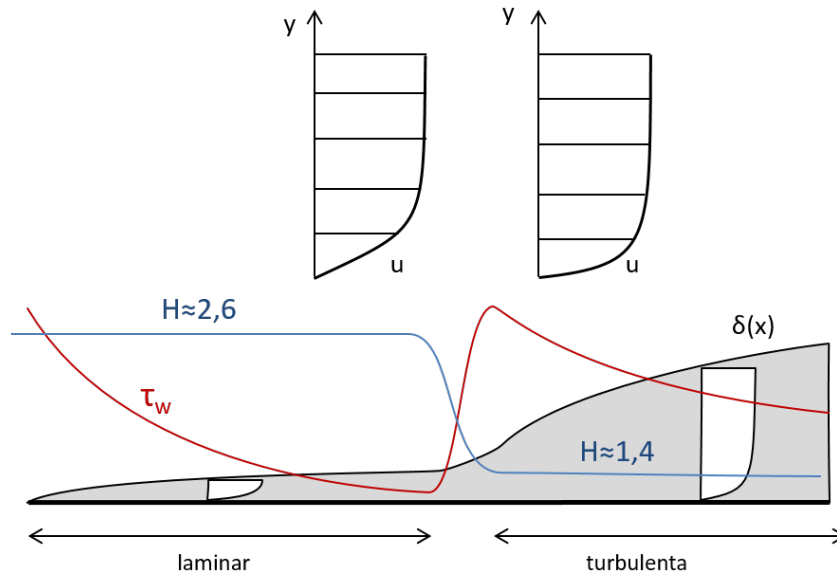


Figura I.22: Transición de capa límite laminar a turbulenta para el flujo alrededor de una placa plana. Perfiles de velocidad (promediado en el caso turbulento), tensión cortante en la pared  $\tau_w$  y factor de forma  $H$ .

Por otra parte, debido a la mayor capacidad de mezcla del flujo turbulento, la acción de frenado debida a la condición de no deslizamiento en la pared se extiende a más distancia de ésta. De hecho, los experimentos muestran que para el flujo alrededor de una placa plana, que el espesor de la capa límite turbulenta crece según  $x^{4/5}$  mientras que, como se ha visto, en el caso laminar lo hace con  $x^{1/2}$ . Por supuesto, en ambos

tramos laminar y turbulento con el aumento de espesor de la capa límite a lo largo de  $x$ , se reduce el gradiente de velocidad  $du/dy$  en la pared y con él la tensión cortante en la pared  $\tau_w$ , (ver figuras I.22 y I.17).

**Diseños para retrasar la transición.**

A la hora de diseñar un perfil es interesante retrasar el punto de transición porque se reduce el arrastre de fricción, ya que como se ha visto, la capa límite turbulenta produce mayor tensión cortante en la pared que la capa límite laminar.

Con el aumento del número de Reynolds el punto de transición en la pared se desplaza aguas arriba, aunque para valores de  $Re$  entre 1 y 10 millones los experimentos muestran [Schl] que la transición se produce cerca del punto de mínima presión del perfil.

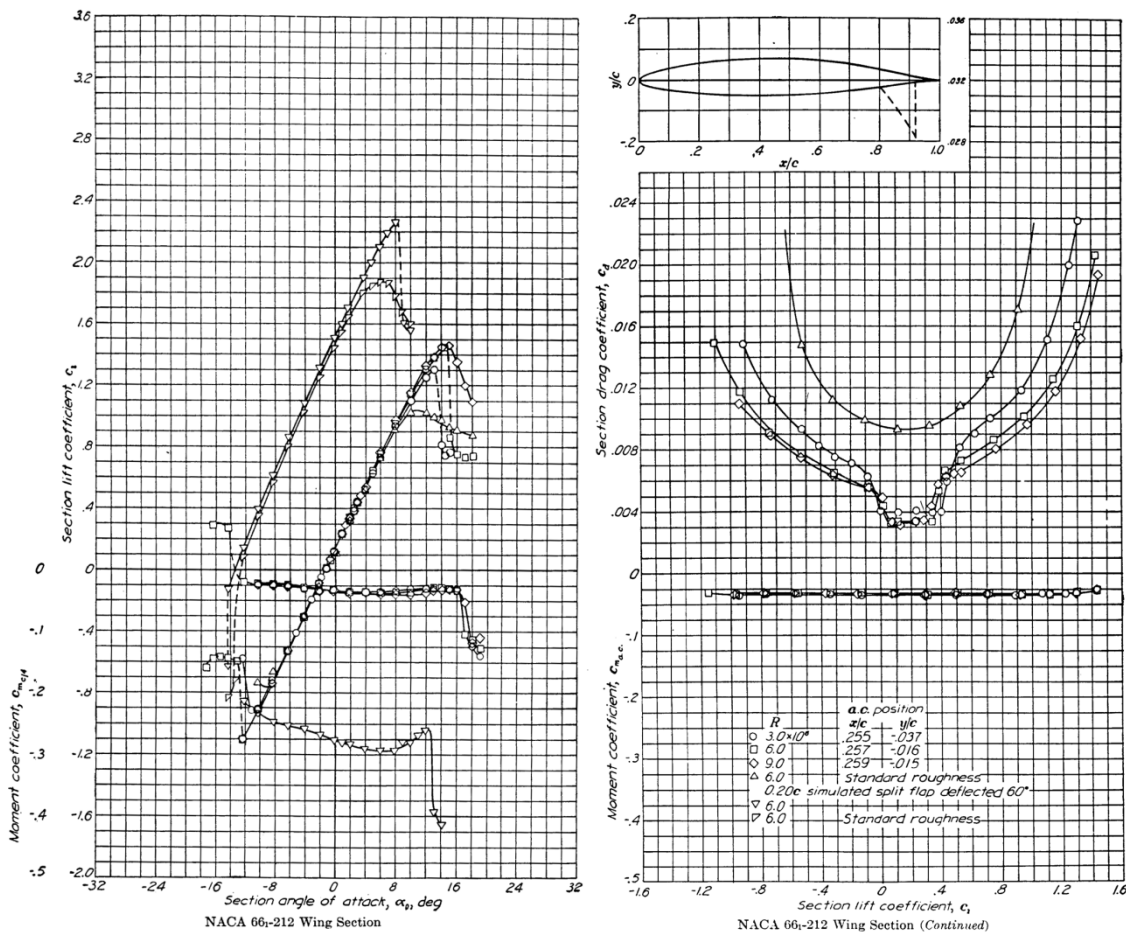


Figura I.23: Características del perfil naca 66-212, (izquierda) coeficientes de sustentación y de momento vs alfa (ángulo de ataque), y (derecha) coeficiente de arrastre vs coeficiente de sustentación, para tres valores del número de Reynolds en superficie no rugosa y en superficie rugosa [Abb' 59].

Así, los denominados perfiles laminares desplazan aguas abajo el espesor máximo del perfil para retrasar el punto de presión mínima, consiguiendo una considerable reducción del arrastre para un pequeño rango del ángulo de ataque llamado *laminar*



*bucket* en la literatura en inglés (donde bucket significa caldero), como muestra la figura I.23 que contiene las características del perfil naca 66<sub>1</sub>-212.

Sin embargo, este tipo de geometrías no son muy usadas en la práctica, porque la posición atrasada del punto de transición depende fuertemente de factores como que la superficie del ala esté limpia, y exenta de rugosidad.

### **Efecto de la rugosidad en la pared del perfil.**

La presencia de rugosidad en la superficie genera fluctuaciones en el movimiento del fluido en sus proximidades, que reducen el número de Reynolds crítico ( $Re_{x,crit}$ , que toma como valor de longitud la distancia recorrida sobre la pared) en que se inicia la transición [Sch'00]. Así, con rugosidad el punto de transición se mueve hacia la nariz del perfil. Esto provoca el engrosamiento de la capa límite, y el aumento de la fuerza de arrastre (ver la curva de arrastre para superficie rugosa de la figura I.23), y una disminución de la combadura efectiva [Tim'04]. En efecto, con el engrosamiento de la capa límite aumenta el espesor de desplazamiento (explicado en el apartado 2.3.2), entonces las líneas de corriente del flujo medio reducen ligeramente su curvatura, produciendo una leve disminución de la sustentación.

## **2.4. LA TURBULENCIA. ESTRUCTURA DEL MOVIMIENTO TURBULENTO.**

A continuación se expone cómo es la estructura del movimiento turbulento, y conceptos físicos necesarios para comprender este movimiento y los planteamientos de los modelos de turbulencia, que serán descritos en apartados posteriores. Con todo ello, y conociendo el comportamiento del tipo de flujos en estudio, se pueden elegir modelos de turbulencia adecuados para analizar estos flujos.

### **2.4.1. Origen de la turbulencia.**

La turbulencia es un movimiento desordenado presente en flujos con número de Reynolds elevado, esto es, en la inmensa mayoría de los flujos en aplicaciones ingenieriles, que multiplica la difusión de las diferentes propiedades del flujo, como por ejemplo el momento y el calor. En aplicaciones aerodinámicas la difusión turbulenta de momento tiene doble filo, por un lado presenta el efecto perjudicial de aumentar la fricción en la pared y con ella la fuerza de arrastre ejercida sobre el perfil, y por otro tiene el efecto beneficioso de dificultar la separación de la capa límite y evitar así que los perfiles entren en pérdida.

Para que la turbulencia se mantenga en un flujo son necesarias dos condiciones, la inestabilidad y la anisotropía. La turbulencia comienza en un flujo laminar si el número de Reynolds del flujo supera un determinado valor tal que las inevitables perturbaciones en el campo de velocidad dan esfuerzos de inercia que ya no puede ser amortiguados



por los esfuerzos viscosos: el flujo es inestable. Entonces estas perturbaciones se amplían y generan movimientos inestables tridimensionales o *brotos turbulentos*, que si se multiplican y se mezclan dan la turbulencia desarrollada. Al cambio de régimen laminar a turbulento se le llama *transición*. Para que la turbulencia desarrollada se mantenga, hace falta un “mecanismo” que produzca-inyecte movimiento turbulento de manera continuada. Esta *producción* se da en las regiones del flujo medio donde el campo de velocidad es anisótropo, es decir donde hay distorsión (sinónimo de deformación y de cortante), y esto ocurre por ejemplo en las *capas de cortadura* (capas de mezcla, capas límite, chorros y estelas). Si no hay *producción* la turbulencia se atenúa progresivamente y el flujo vuelve a ser laminar.

#### 2.4.2. La cascada de energía.

Se llama *remolino* a un movimiento turbulento moderadamente coherente en una región de fluido de tamaño  $l$  [Pop'00]. En un remolino las velocidades relativas entre partículas son semejantes a una cierta velocidad  $u_l$ , denominada velocidad característica del remolino. Entonces las tasas de deformación y de vorticidad en esta región fluida son  $O(u_l/l)$  [ $1/T$ ], esta simbología denota que son de magnitud similar a  $u_l/l$  y que sus unidades son el inverso del tiempo. Así, la escala de tiempo que caracteriza sus cambios es  $\tau_l=l/u_l$ .

La turbulencia desarrollada en flujos con número de Reynolds superior a varios cientos o miles, contiene remolinos en un amplio rango continuo de escalas de tamaño y de tiempo. Los remolinos más grandes son de tamaño  $l_o$  similar a la anchura de la capa de cortadura del flujo (por ejemplo el espesor de una capa límite o el radio de un tubo) y tienen además las mayores velocidades de la turbulencia  $u_o$ , y son responsables de la mayor parte del transporte-mezcla de momento. Mientras, el tamaño de los remolinos más pequeños disminuye con el aumento del número de Reynolds del flujo, y estos remolinos son responsables de la disipación viscosa.

Este espectro continuo de escalas de movimiento está recorrido por un conjunto de procesos mecánicos no lineales poco conocido -debidos al término convectivo no lineal de la ecuación del momento de Navier-Stokes (I.2)- llamado *cascada de energía* que transfiere la energía cinética desde las mayores escalas a las medianas y éstas hasta las más pequeñas, y que tiene algún parecido con la rotura no lineal de la figura I.24 izquierda.

Richardson en 1922 describió en este verso la cascada de energía:

“los grandes remolinos tienen pequeños remolinos que se alimentan de su velocidad, y los pequeños remolinos tienen otros más pequeños, y así hasta la viscosidad”.

Ahora bien, cuanto menores son los remolinos más rápidamente se extinguen, como puede observarse en la figura I.24 derecha, que muestra la turbulencia producida tras romper una ola del mar. Los remolinos medianos y pequeños que dan aspecto rugoso a la superficie desaparecen rápidamente, mientras al fondo, por donde pasó la ola rota hace más tiempo, aún pueden distinguirse remolinos grandes, limitados por restos de espuma.



Figura I.24: (izquierda) Evolución de la rotura de una gota de tinta detrás de otra en un vaso de agua, y (derecha) rastro turbulento de una ola en una playa.

El mecanismo básico en la cascada de energía es el *estiramiento de vórtice* [Ten'72; Bra'96]: en un volumen de fluido turbulento dos partículas tienden a separarse, los remolinos individuales se estiran, por continuidad se estrechan, y por conservación del momento angular aumentan su vorticidad y su energía cinética de rotación. El resultado neto, por conservación de la energía, es que los movimientos-remolinos de mayor escala han realizado un trabajo sobre los de menor escala, transfiriendo a éstos una cantidad de energía cinética que se redistribuye entre las diferentes componentes de la velocidad. Finalmente, en los remolinos más pequeños (con mayores tasas de deformación) la difusión viscosa (disipación) evita la formación de líneas de vorticidad infinitesimales.

### Escalas según Kolmogorov. Disipación de la energía cinética.

La teoría de Kolmogorov [Pop'00] usa el análisis dimensional para explicar la dinámica de la turbulencia en flujos totalmente turbulentos con número de Reynolds  $Re_L = UL/\nu$  muy elevados, siendo  $U$  y  $L$  la velocidad y la longitud característica del flujo.

Las grandes estructuras (remolinos) de la turbulencia, de tamaño  $l_0$ , son las que contienen una mayor cantidad de energía cinética por unidad de masa  $O(u_0^2)$ , y siendo su velocidad angular  $O(u_0/l_0)$ , si en una vuelta pierden una parte significativa de su energía, entonces desaparecerán en un tiempo  $\tau_{l_0} = O(l_0/u_0)$ ; por lo tanto por unidad de tiempo pierden una cantidad de energía cinética  $O(u_0^3/l_0)$ . Como su número de Reynolds  $u_0 l_0/\nu$  es muy elevado, no sufren disipación viscosa y entonces toda esta cantidad de energía es transferida a escalas menores. Para una cierta escala  $l$ , el cociente entre la *tasa de transferencia*  $T_l$  y la tasa disipada  $\varepsilon_l$

$$\frac{T_l}{\varepsilon_l} \sim \frac{u_l^3 l^{-1}}{\nu u_l^2 l^{-2}} = \frac{u_l l}{\nu} \equiv Re_l \quad (I.45)$$

da justamente el número de Reynolds de esa escala  $Re_l$ . Según disminuye la escala  $l$ , se reducen la velocidad y el número de Reynolds  $Re_l$ , y la disipación se vuelve apreciable cuando éste vale del orden de decenas. Finalmente el movimiento se detiene para valores cercanos a la unidad; a la menor escala de longitud de la turbulencia se le denomina *escala  $\eta$  de Kolmogorov*.

Al ser transferida toda la energía cinética de los remolinos grandes a los más pequeños donde se disipa, el promedio espacial de la tasa de disipación  $\varepsilon$  vale  $O(u_o^3/l)$ , y depende solamente de los remolinos grandes, que controlan la tasa de estiramiento de los remolinos más pequeños. Así los grandes remolinos apenas son afectados por los más pequeños (lo que simplifica notablemente los cálculos), es decir, son independientes del número de Reynolds del flujo.[Bra'97].

Kolmogorov separa la cascada de energía en tres rangos de tamaño con comportamientos muy diferentes, recogidos en la figura I.25.

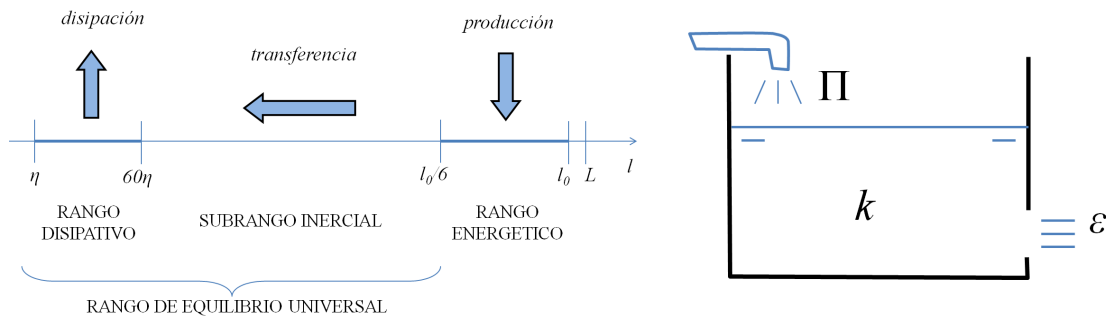


Figura I.25: (izquierda) Esquema de la cascada de energía para número de Reynolds muy elevado, y (derecha) analogía hidráulica,  $k$  es la energía cinética de la turbulencia, y  $\Pi$  la tasa de producción.

El **rango energético** ( $l > l_0/6$ ) contiene los mayores remolinos, de aspecto y estadísticas **anisótropas** que dependen de la geometría del flujo y de las condiciones de contorno. Su energía cinética se vierte de manera continuada hacia las escalas más pequeñas a una tasa de transferencia  $\varepsilon$ .

Al rango  $l_0/6 > l$  se le llama rango de equilibrio universal, porque los movimientos son independientes de la geometría del flujo medio y de las condiciones de contorno [Ten'72]; esto se debe a que sus escalas de tiempo  $\tau_l = l/u_l$  son mucho más rápidas (pequeñas) que las del flujo medio, adaptándose rápidamente a los cambios o anisotropías que imponen los grandes remolinos. Por este motivo presentan estadísticas y aspecto isotrópicos, cualidad que se denomina *isotropía local*. Según decrece la escala, las deformaciones son más rápidas y la turbulencia está más revuelta, de manera que en las escalas pequeñas se ha perdido cualquier sentido permanente de dirección. El rango de equilibrio universal se divide en los *subrangos inercial* y *disipativo*.

En el **subrango inercial** ( $l_0/6 > l > 60\eta$ ) gobiernan los efectos de inercia, porque los valores de  $Re_l$  en estas escalas son aún elevados. Así, no influyen ni la viscosidad ni la geometría del flujo, y el comportamiento dinámico viene determinado únicamente por la tasa de transferencia  $\varepsilon$  (con unidades  $[L^2/T^3]$ ), que es vertida en su totalidad hacia las escalas más pequeñas. En consecuencia dada la tasa de disipación  $\varepsilon$ , los remolinos de un tamaño  $l$  tienen una la velocidad y un tiempo característicos

$$u_l = (\varepsilon l)^{1/3} [(L^2 T^{-3} L)^{1/3}] \sim u_0 (l/l_0)^{1/3} \quad y \quad \tau_l = (l^2/\varepsilon)^{1/3} \sim \tau_0 (l/l_0)^{2/3} . \quad (I.46)$$

Entonces, en el subrango inercial la energía cinética contenida en cada escala  $u_l^2$  disminuye con la escala según  $(\varepsilon l)^{2/3}$ . Este hecho observado en los experimentos se conoce como *ley 2/3* de Kolmogorov, y en el espectro  $E(\kappa)$  de densidad de energía cinética en el dominio del número de onda  $\kappa$  aparece como *ley -5/3* (ver figura I.26),

siendo  $\kappa=2\pi/\lambda$  [1/L], y  $\lambda$  la longitud de onda similar al tamaño de los remolinos, donde la energía cinética de las fluctuaciones de velocidad o *energía cinética turbulenta*  $k = \frac{1}{2} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}$  es

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa \tag{I.47}$$

Disminuyendo la viscosidad del fluido, o de manera equivalente aumentando el número de Reynolds del flujo, el espectro de energía se extiende hasta mayores números de onda, es decir remolinos más pequeños.

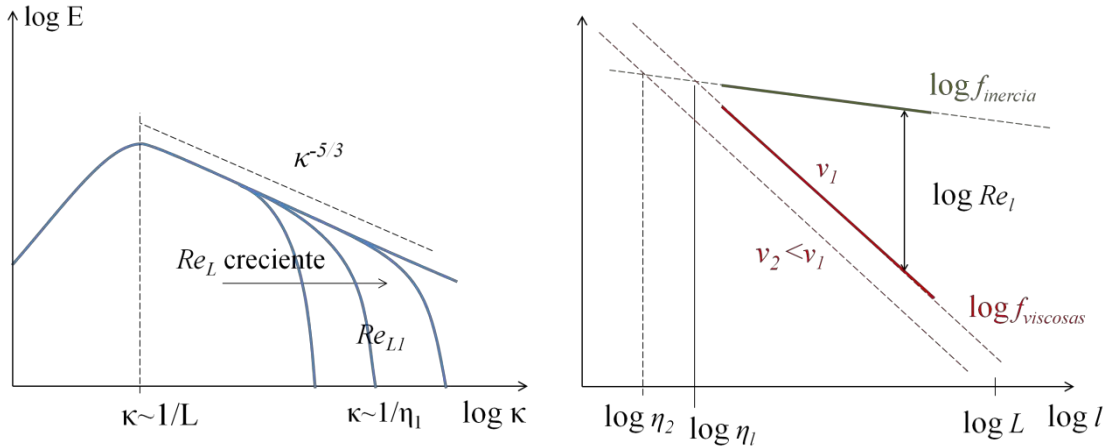


Figura I.26: (izquierda) Espectro de energía cinética de la turbulencia (basado en datos experimentales) para diferentes valores del número de Reynolds del flujo. (derecha) Magnitudes de las fuerzas de inercia y viscosas para cada tamaño de remolino, para dos valores de viscosidad fijada  $\epsilon$ . Escala  $\eta$  de Kolmogorov para ambos valores de la viscosidad.

En el **rango disipativo** ( $60\eta > l > \eta$ ) las fuerzas viscosas ya son significativas y se disipa toda la tasa de energía transferida  $\epsilon$ . El movimiento está determinado por los dos parámetros  $\epsilon$  y  $\nu$ . Para una escala  $l$ , las fuerzas de inercia del movimiento son  $u_j \partial u_i / \partial x_j \sim u_l^2 / l$  y dependen de  $\epsilon$  (e indirectamente también de  $\nu$ , al reducirse por efecto de ella la velocidad), mientras que las fuerzas viscosas  $\partial(2\nu d_{ij}) / \partial x_j \sim \nu u_l / l^2$  dependen de la viscosidad  $\nu$ . A medida que se reduce la escala, ambos esfuerzos antagónicos llegan a tener magnitudes similares y entonces el movimiento se detiene en la escala  $\eta$  de Kolmogorov. Así, fijada la tasa de transferencia  $\epsilon$ , la viscosidad determina la menor escala  $\eta$ ; y cuanto menor es la viscosidad, menor es esta escala.

En el esquema de la figura I.26 derecha se han dibujado los esfuerzos de inercia y viscosos en el rango universal, que para el subrango inercial son las rectas  $f_{inercia} \sim \epsilon^{2/3} l^{-1/3}$  y  $f_{visc} \sim \nu \epsilon^{1/3} l^{-5/3}$ . Por otra parte, dados  $\epsilon$  [ $L^2/T^3$ ] y  $\nu$  [ $L^2/T$ ], se pueden formar las siguientes escalas únicas de longitud, tiempo y velocidad

$$\eta[L] = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} [(L^2 T^{-1})^3 T^3 L^{-2}]^{1/4}, \tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}, u_\eta = (\epsilon \nu)^{1/4} \tag{I.48}$$

llamadas *escalas de Kolmogorov*. Se comprueba que en efecto las escalas de Kolmogorov  $\eta$ ,  $\tau_\eta$  y  $u_\eta$  caracterizan consistentemente los remolinos de las escalas disipativas viendo que el número de Reynolds y la tasa de disipación obtenidos a partir de las expresiones anteriores valen

$$Re_\eta = \eta u_\eta / \nu = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4} \varepsilon^{1/4} \nu^{1/4} \nu^{-1} = 1, \text{ y } \nu (u_\eta / \eta)^2 = \nu / \tau_\eta^2 = \nu \varepsilon / \nu = \varepsilon. \quad (\text{I.49})$$

Por otra parte, aplicando la semejanza  $\varepsilon \sim u_0^3 / l_0$  es inmediato extraer las relaciones siguientes entre las mayores y las menores escalas de la turbulencia,

$$l_0 / \eta \sim Re^{3/4}, u_0 / u_\eta \sim Re^{1/4}, \tau_0 / \tau_\eta \sim Re^{1/2}. \quad (\text{I.50})$$

De estas importante relaciones se deduce que una simulación tridimensional usando las ecuaciones de Navier-Stokes (DNS) necesita del orden de  $(l_0 / \eta)^3 \sim Re^{9/4}$  nudos de malla y de  $\sim Re^{1/2}$  pasos de tiempo, dando un coste  $\sim Re^{11/4}$ , que para un  $Re_L = 10^8$  -típico en aeronaves- arroja  $10^{22}$ . Por este motivo es necesario el uso de modelos de turbulencia. Pronósticos basados en el progreso del hardware [Pop'99; Pop'00], afirman que probablemente en varias décadas no será aún posible obtener una solución exacta para alto número de Reynolds, augurando larga vida a los modelos de turbulencia.

## 2.5. ECUACIONES DEL FLUJO TURBULENTO.

### 2.5.1. Ecuaciones RANS del flujo medio.

La formulación más usada en el análisis de flujos turbulentos son las ecuaciones *RANS* (Reynolds Averaged Navier Stokes) que se obtienen promediando según Reynolds [Rey'1895] las ecuaciones de Navier-Stokes (I.1) y (I.2) en un solo punto. Para ello se descomponen la velocidad y la presión en el punto en dos componentes, media y fluctuación, en la forma

$$u_i = U_i + \tilde{u}_i, \quad p = P + \tilde{p}, \quad (\text{I.51})$$

donde los caracteres en minúscula son los valores instantáneos, y los que llevan tilde son las fluctuaciones respecto de los valores medios, en mayúsculas.

Se interpreta  $U_i$  como un promedio en el tiempo, definido en la forma

$$U_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i dt, \quad (\text{I.52})$$

y análogamente para la presión media  $P$ . Para denotar los promedios temporales de las fluctuaciones y de sus derivadas, productos y otras combinaciones se superpondrá una barra. Por definición el valor medio de una fluctuación es nulo,

$$\overline{\tilde{u}_i} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u_i - U_i) dt = 0 \quad (\text{I.53})$$

El valor medio de una derivada espacial es la derivada espacial del valor medio. Así se tienen los siguientes promedios

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\tilde{u}_i} = 0, \quad \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{-p}{\rho} \delta_{ij} + 2\nu d_{ij} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{-P}{\rho} \delta_{ij} + 2\nu D_{ij} \right) \quad (\text{I.54})$$

El flujo turbulento varía en el tiempo, pero se dice que es *estacionario*, si tomando promedios en un intervalo de tiempo  $T$  suficientemente grande, los términos de las ecuaciones del flujo medio no varían en el tiempo. En este caso  $\overline{\partial u_i / \partial t} = 0$  y no hay aceleración local para el flujo medio. Para aplicaciones ingenieriles, habitualmente el nivel de detalle requerido en las estimaciones de flujos turbulentos solamente necesita de análisis de flujos turbulentos estacionarios, para obtener los valores medios de los esfuerzos ejercidos sobre cuerpos sólidos.

Pero en algunas ocasiones existen flujos turbulentos que experimentan lentas variaciones (caracterizadas por escalas de tiempo  $T_2$  muy grandes en relación con las mayores escalas de tiempo turbulentas  $T_1$ ) que no son de naturaleza turbulenta, por ejemplo un flujo en un tubo al que se aplican un gradiente de presión que varía lentamente, o el movimiento de la pala de un helicóptero. Entonces de una manera más general, el intervalo de tiempo  $T$  usado para hacer el promedio en la forma (I.52) no se toma infinito, sino tal que  $T_1 \ll T \ll T_2$  [Wil'93], y entonces se tiene que el promedio de la aceleración local no es nulo en general:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} = \frac{\partial U_i}{\partial t}. \quad (\text{I.55})$$

En caso de que  $T_2$  fuera una escala de tiempo similar a  $T_1$ , el planteamiento RANS no es adecuado, y deberían usarse simulación de grandes remolinos, LES.

Por otra parte, el valor medio de un producto es

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(U_i + \tilde{u}_i)(U_j + \tilde{u}_j)} = U_i U_j + \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \overline{U_i \tilde{u}_j} + \overline{U_j \tilde{u}_i} = U_i U_j + \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \quad (\text{I.56})$$

Así, al promediar el término convectivo no lineal de la ecuación (I.2) aparece un término de convección de las fluctuaciones

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \underbrace{\overline{\tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}}}_{0, \text{incomp.}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}; \quad (\text{I.57})$$

Con todo ello, las ecuaciones RANS del flujo medio se escriben

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{I.58})$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{-P}{\rho} \delta_{ij} + 2\nu D_{ij} - \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \right). \quad (\text{I.59})$$

Las cuatro ecuaciones escalares (I.58) y (1.59) constituyen el denominado sistema de ecuaciones RANS del flujo medio, que sin embargo tiene 10 incógnitas: las tres  $U_i$ ,  $P$  y las 6 componentes del tensor simétrico  $-\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}$ , que se denomina tensor de *tensiones de Reynolds*. A esto se denomina *problema de cierre*, de manera que para resolver el flujo medio es necesario añadir ecuaciones-modelo para aproximar este tensor.

En la ecuación del momento (I.59) la convección turbulenta está recogida en el miembro derecho en las *tensiones de Reynolds*, que es el esfuerzo de inercia medio que

ejercen los remolinos de la turbulencia sobre el flujo medio; se trata de un flujo de momento, con unidades de tensión por unidad de masa [ $L^2/T^2=FL^{-2}/(ML^{-3})$ ]. El tensor de Reynolds es la variable central en el estudio de la turbulencia, de cuya modelización depende en buena medida la precisión del análisis CFD; su componente isotrópica es la *energía cinética turbulenta*  $k = \frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_i}$ , y su *anisotropía* se denota por  $a_{ij}$  tal que

$$\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + a_{ij}. \quad (I.60)$$

En turbulencia desarrollada se cumple que

$$\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j} \gg 2\nu D_{ij}; \quad (I.61)$$

por este motivo el flujo turbulento se comporta como un “fluido” que transmite tensiones mucho mayores que el flujo laminar, o dicho de otra manera, tiene una capacidad aumentada de difusión de momento y calor, y de mezcla. La excepción donde la expresión (I.61) no se cumple es en la fina capa contigua a la pared, en la parte interior de una capa límite turbulenta, donde los esfuerzos viscosos no son despreciables, sino comparables a los de inercia, y el número de Reynolds local es pequeño.

### 2.5.2. Ecuaciones de transporte de las tensiones de Reynolds.

Multiplicando la componente  $j$  de la ecuación del momento de Navier-Stokes (I.2) por la componente fluctuante  $u_i$  y sumándole el producto de  $u_j$  por la ecuación de la componente  $i$ , y promediando según Reynolds se obtiene la ecuación de transporte del tensor de Reynolds

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}}{\partial t}}_{\text{convección}} + \underbrace{U_l \frac{\partial \overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}}{\partial x_l}}_{\text{flujo medio}} = \underbrace{-\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} - \overline{\tilde{u}_j\tilde{u}_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_l}}_{\text{generación}} + \underbrace{\frac{\bar{p}}{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{presión deformación}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j\tilde{u}_l}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\bar{p}/\rho)\tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\bar{p}/\rho)\tilde{u}_j}{\partial x_i}}_{\text{difusión turbulenta}} + \underbrace{\nu \left( \tilde{u}_i \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_l^2} + \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l^2} \right)}_{\text{destrucción y dif.viscosa}} \quad (I.62)$$

Esta expresión contiene 6 nuevas ecuaciones escalares a añadir al sistema de ecuaciones RANS, sin embargo añade unas cuantas nuevas incógnitas más: el problema de cierre es inevitable.

### 2.5.3. Ecuación de la energía cinética de la turbulencia.

Tomando  $i=j$  en la ecuación (I.62) y dividiendo por dos, se tiene la ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta  $k$ , que una vez separado el término viscoso se escribe

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{U_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{convección flujo medio}} = \underbrace{-\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\Pi, \text{producción}} - \underbrace{2\nu \overline{\tilde{d}_{ij} \tilde{d}_{ij}}}_{\varepsilon, \text{disipación}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{2} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \frac{1}{\rho} \overline{\tilde{p} \tilde{u}_j} + 2\nu \overline{\tilde{u}_i \tilde{d}_{ij}} \right)}_{\text{difusión}}. \quad (\text{I.63})$$

Esta conocida ecuación muestra cómo la tasa de cambio de energía cinética de la turbulencia  $k$  en el punto se debe a la producción y la disipación, que son trabajos de deformación, y a varios términos menos importantes de difusión del campo fluctuante [Ten'72]. La disipación -siempre positiva- constituye un sumidero que transforma energía cinética en calor. La producción es la tasa de transferencia de energía cinética desde el flujo medio a la turbulencia, generalmente tiene valor positivo, y como muestra la siguiente expresión

$$\Pi \equiv -\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} D_{ij} - \underbrace{\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} W_{ij}}_{\text{simet} \cdot \text{antisimet} = 0} = -\underbrace{\left( \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right)}_{a_{ij}} D_{ij} + \underbrace{\frac{2}{3} k \delta_{ij} D_{ij}}_{\text{Tr}(D)=0} = -a_{ij} D_{ij} \quad (\text{I.64})$$

En ella solamente contribuyen las componentes anisotrópicas del gradiente de velocidad del flujo medio y del tensor de Reynolds.

#### 2.5.4. Producción, transferencia y anisotropía.

En el **flujo cortante uniforme** de la figura I.27 izquierda el campo de velocidad del flujo medio es anisótropo (varía en dirección  $y$ ) y debido a esto según avanza el flujo en dirección  $x$  las estadísticas de la turbulencia como las tensiones de Reynolds son anisótropas y aumentan progresivamente su valor, como muestran las curvas experimentales de la misma figura. Esto significa que la producción de energía cinética turbulenta crece con  $x$ , y que es mayor que la tasa de disipación  $\varepsilon$ .

Otro ejemplo diferente es el flujo uniforme que ha atravesado **una malla de alambre** (figura I.27 derecha). En este caso el flujo medio y las estadísticas son isotrópicas [Pop'00], es decir las varianzas de las fluctuaciones de velocidad son iguales siendo esférico el tensor de Reynolds, y se dice que la turbulencia es isotrópica. Este tipo de turbulencia es además *homogénea* en las direcciones  $y$  y  $z$  porque sus estadísticas no varían en estas direcciones. La producción es nula, y la turbulencia se disipa lentamente mientras el flujo avanza en dirección  $x$ .

En flujos turbulentos la deformación del flujo medio deforma los grandes remolinos de la turbulencia, hace trabajo en contra de las tensiones de Reynolds. Así transfiere una cantidad de energía cinética a la turbulencia  $k$  que es la tasa de producción, producto de las anisotropías del flujo medio y de las tensiones de Reynolds. Los remolinos tienden a igualar las varianzas  $u^2$ ,  $v^2$  y  $w^2$  en un intervalo de tiempo denominado *tiempo de retorno a la isotropía*, similar a la escala de tiempo del remolino que en el rango inercial es  $\sim l/u_l \propto l^{2/3}$ . Así los **remolinos menores retornan a la isotropía más rápidamente que los mayores**; son anisótropos temporalmente (de ser isotrópicos no habría transferencia de energía) y se produce la transferencia mientras lo son, cuando su vorticidad está alineada con el estiramiento. Los remolinos mayores generan anisotropía en los menores si su escala de tiempo de deformación no es mucho más lenta que el tiempo de retorno a la isotropía de los pequeños, así los remolinos de un tamaño dado



son estirados principalmente por remolinos algo más grandes, cuya tasa de deformación cambia constantemente de magnitud y dirección.

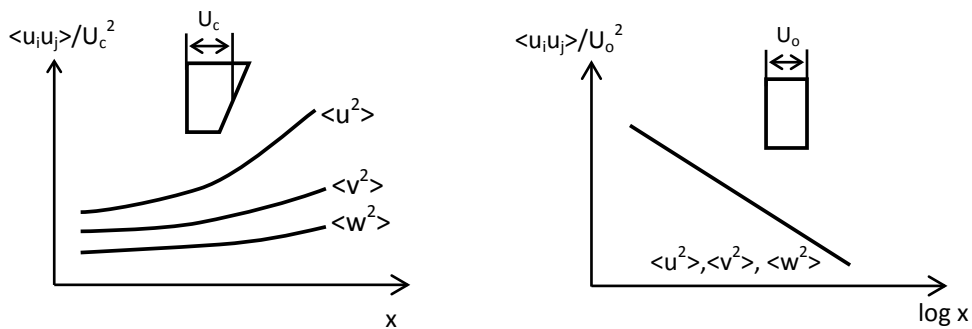


Figura I.27: Datos experimentales de la evolución de las componentes normalizadas del tensor de Reynolds con la distancia  $x$ , (izquierda) en flujo cortante uniforme, y (derecha) para turbulencia de rejilla [Pop'00]. Los símbolos  $\langle \rangle$  indican valor promediado según Reynolds.

## 2.6. MÉTODOS DE MODELIZACIÓN DE LA TURBULENCIA.

Desde hace un siglo se han sucedido numerosas propuestas de modelos de turbulencia [Wil'93], pero ninguna de ellas ha resultado suficientemente eficaz ni universal, siendo la falta de precisión en el análisis de flujos turbulentos un problema de primera magnitud en la comunidad de análisis fluidodinámico.

La figura I.28 muestra el rango de escalas del movimiento modelizado respectivamente por los tres principales métodos de cálculo de flujos turbulentos, que se describen más abajo, son por orden de uso: RANS, LES y DNS. La capacidad de predicción de los cálculos mejora con la resolución, pero a cambio el coste se dispara.

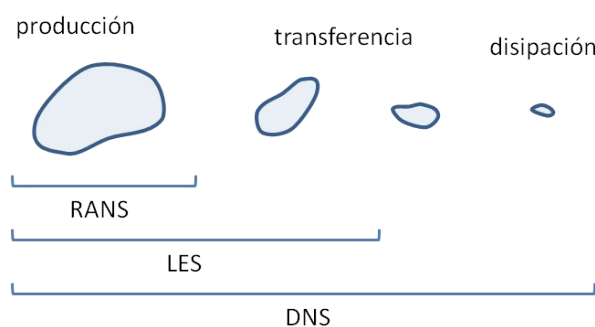


Figura I.28: Métodos de cálculo y sus respectivos rangos de escalas resueltas. El rango no cubierto es modelizado (aproximado). Los remolinos más grandes tienen longitudes características del flujo medio como el espesor de la capa límite, la anchura de la estela o el radio del tubo, los remolinos más pequeños son los disipativos.

Cabe señalar que, además de los mencionados, a nivel de investigación principalmente para el estudio de la turbulencia homogénea, también se han usado otros métodos [Mat'00]. Así, en un nivel de modelización superior al de los modelos de tensiones de Reynolds (que son modelos RANS) existen métodos de cierre de dos puntos, que

resultan demasiado complicados para turbulencia no homogénea. También existen otros métodos de un punto como los *métodos espectrales*, que solamente están desarrollados para turbulencia homogénea.

La *simulación numérica directa* (Direct Numerical Simulation, DNS) consiste en resolver directamente las ecuaciones no estacionarias de Navier-Stokes, recogiendo toda la amplitud de escalas del movimiento turbulento; por ello todavía solamente son posibles los cálculos para números de Reynolds moderados. A este respecto, recientemente a modo de referencia se han alcanzado valores de  $Re$  de  $10^5$ - $10^6$  en una malla de  $4028^3=6,5 \cdot 10^{10}$  nudos para turbulencia homogénea [Dur'11], y en un flujo alrededor de un ala de geometría proyectada para  $Re=400.000$  [Hos'16], en un dominio de 7 cuerdas de longitud, sobre una malla optimizada con  $3,2 \cdot 10^9$  nudos incluyendo una fuerza variable para desencadenar la transición en  $c/10$ . Actualmente la simulación numérica directa es una herramienta de investigación que proporciona resultados al menos tan fiables como los experimentos, y con mayor detalle. De esta manera se pueden identificar los mecanismos físicos del movimiento, lo que permite progresar en el estudio de la turbulencia y sirve de referencia con que comparar modelos de turbulencia económicos para avanzar en su desarrollo.

La *simulación de grandes remolinos* (Large Eddy Simulation, LES) calcula directamente los remolinos grandes no estacionarios tridimensionales, mientras que los movimientos de menor escala son modelizados. Con costes varios órdenes de magnitud más elevados que los métodos RANS, necesitan de computación de alto rendimiento, especialmente en aplicaciones industriales, pero permiten simular flujos con número de Reynolds prohibitivo para la simulación numérica directa. Según predicciones [Pop'99] los métodos RANS no van a desaparecer porque son solicitados para cálculos cada vez más masivos.

### **2.6.1. Modelos de turbulencia RANS.**

Los modelos de turbulencia más usados en ingeniería se basan en las ecuaciones RANS acompañadas de *ecuaciones modelo* que cierran el sistema de ecuaciones aproximando la turbulencia. Existe una gran variedad de modelos de turbulencia en la literatura y en el mercado, contruidos con ecuaciones que a veces parecen haber salido de la nada; para elegir un modelo de turbulencia adecuado para mejorar los resultados de los análisis CFD, es necesario comprender los planteamientos de los modelos, distinguiendo entre las cuestiones fundamentales y las peculiaridades, y conocer qué constantes proceden de aplicar principios universales y cuáles son empíricas.

### **Evolución y clasificación.**

La búsqueda de mejores modelos de turbulencia puede darse buscando cierres de más alto orden, o desarrollando modelos más precisos en el mismo nivel de modelización. En el último cuarto del siglo XX, en los modelos ingenieriles (RANS) el progreso se ha realizado fundamentalmente en el mismo nivel [Pop'99], y en la primera década del

sXXI se ha estancado algo, en parte debido a un desplazamiento de la investigación hacia la simulación LES y hacia métodos híbridos RANS-LES.

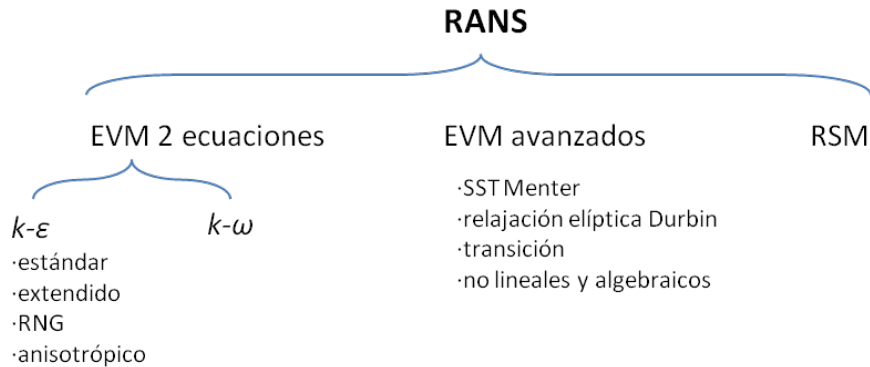


Figura I.29: Clasificación por niveles de modelos de turbulencia ingenieriles.

En el nivel de los *modelos de viscosidad turbulenta* (Eddie Viscosity Models, EVM) de dos ecuaciones, la turbulencia (acoplada a la ecuación del momento del flujo medio) se aproxima resolviendo dos campos para sendas variables turbulentas directamente relacionados con sus escalas de longitud y de tiempo. Los modelos más usados de este tipo surgen en la década de los años setenta [Jon'72], son los modelos  $k-\varepsilon$ , que emplean una ecuación de transporte para  $k$ , cuadrado de la escala de velocidad  $k^{1/2}$  y otra para  $\varepsilon$ , siendo  $k/\varepsilon$  una escala de tiempo de la turbulencia. La ecuación constitutiva de Boussinesq (I.82) fija una relación lineal entre la anisotropía de la turbulencia  $a_{ij}$  y la del flujo medio  $D_{ij}$ , así se impone que las deformaciones (anisotropías) que experimenta el flujo medio se traducen instantáneamente en anisotropías del tensor de Reynolds proporcionales, como si la anisotropía de la turbulencia estuviera en equilibrio con el flujo medio. Este “gazapo” impide describir efectos de fuerzas de volumen debidos a la curvatura del flujo o a la rotación del sistema, así como capturar flujos secundarios en conductos no circulares. Estos son efectos de gran importancia en turbomaquinaria.

Frente a este inconveniente, en un nivel de aproximación más elevado, se hicieron populares durante la década de los años 70 los *modelos de tensiones de Reynolds* (Reynolds Stress Models, RSM) [Nao'73; Lau'75], también denominados cierres de segundo orden. Los RSM modelizan cada componente del tensor de Reynolds empleando una ecuación de transporte, considerando así la historia de dichas componentes y ciertos efectos no locales, capacitándoles para aproximar mejor el flujo donde éste varía rápidamente. Sin embargo, presentan limitaciones en flujos complejos como las rotaciones, suelen dar problemas numéricos y aumentan fuertemente el coste; inconvenientes que impiden su aplicación en un amplio rango de flujos industriales.

Esto ha conducido dentro del nivel de aproximación de los modelos EVM de dos ecuaciones, a mejorar el modelo  $k-\varepsilon$  usando ecuaciones constitutivas no lineales, obtenidas mediante diferentes técnicas, que fijan la anisotropía del tensor de Reynolds como función no lineal de los gradientes de velocidad del flujo medio. De este tipo son los denominados *EVM anisotrópicos* y los llamados *modelos algebraicos de tensiones de Reynolds* (ARSM y EARSM) [Gat'93; Wall'00].

También en el nivel de aproximación de los modelos EVM, se han desarrollado modelos especializados en tipos concretos de flujos, motivados por la no existencia de modelos de turbulencia universalmente válidos para flujos arbitrarios y por el hecho de haber identificado fuentes de error claves en los modelos, ubicadas en regiones críticas del flujo (por ejemplo dentro de la capa límite, en la zona de pared, y en los puntos de transición y de separación). Entre otros, son reseñables los modelos especializados en flujos aeronáuticos [Spa'92; Men'94], o en regiones críticas como la pared [Dur'93; Han'05] o la transición de flujo laminar a turbulento [Men'06; Wal'08]. Estos modelos dan buena precisión a un coste “ingenieril”, y suelen basarse en modelos de turbulencia desarrollada (como  $k-\varepsilon$  ó  $k-\omega$ ) sobre los que añaden efectos físicos concretos recogidos en nuevas variables, que son gobernadas por ecuaciones de transporte que se acoplan al modelo básico.

### Modelos de viscosidad turbulenta EVM.

Estos modelos aproximan la anisotropía del tensor de Reynolds  $a_{ij}$  -ver ecuación (I.60)- usando una “viscosidad turbulenta”. Considerando que el flujo turbulento transmite mayores esfuerzos internos que el laminar, la turbulencia puede verse como una *viscosidad turbulenta* “añadida al fluido”, definida como un cociente entre las tensiones de Reynolds y la tasa de deformación del flujo medio. En una *capa de cortadura* la viscosidad turbulenta es

$$\nu_t = \frac{-\overline{u\tilde{v}}}{\partial U/\partial y} \quad (\text{I.65})$$

En rigor la viscosidad turbulenta es un cociente entre tensores y no una cantidad escalar isotropa igual para todas las tensiones de Reynolds. Por ejemplo, en capas límite de flujos tridimensionales, el cociente  $-\overline{\tilde{v}\tilde{w}}/(\partial W/\partial y)$  suele ser la mitad de  $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}}/(\partial U/\partial y)$ , porque al añadir al flujo medio una deformación en la dirección de la envergadura  $\partial W/\partial y$ , los remolinos necesitan un tiempo para que las tensiones de Reynolds ( $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}}, -\overline{\tilde{v}\tilde{w}}$ ) se alineen con la deformación total ( $\partial U/\partial y, \partial W/\partial y$ ).

La viscosidad turbulenta tiene unidades  $[L^2/T]$  y es común plantearla como producto de una escala de longitud característica de los grandes remolinos de la turbulencia por la velocidad característica de los mismos, que equivale a dividir el cuadrado de una longitud característica por una escala de tiempo característica, tal y como se hace a continuación.

*Modelos de cero ecuaciones, algebraicos ó de longitud de mezcla.*

El más sencillo y conocido es el *modelo de longitud de mezcla* de Prandtl de 1925, usado en flujos cortantes trazando una analogía con la cinética de moléculas de gas (movimiento de otra naturaleza, con una única escala de longitud) que fija la componente de cortadura de las tensiones de Reynolds en la forma

$$-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = l_m^2 \frac{\partial U}{\partial y} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{I.66})$$

siendo la viscosidad turbulenta

$$\nu_t = l_m^2 \cdot \partial U / \partial y, \tag{I.67}$$

y  $l_m$  la longitud de mezcla obtenida previamente de manera empírica a partir de observar la geometría del flujo medio.

*Modelos empíricos de pared.*

En la región de la capa límite próxima a la pared, es razonable suponer no afectan propiedades de la zona exterior de la capa límite exterior [Bra'96], como su espesor  $\delta$ . Los grandes remolinos que son responsables de la mayor parte de las tensiones de Reynolds, son de tamaño similar a la distancia a la pared  $y$ , siendo una escala de velocidad plausible  $u_\tau \equiv (\tau_w / \rho)^{1/2}$ , obtenida de la tensión cortante en la pared  $\tau_w$ . El número de Reynolds local  $y^+ \equiv u_\tau y / \nu$  indica en cada punto la relevancia de los efectos viscosos frente a las tensiones de Reynolds. Así, en esta zona el movimiento turbulento está controlado por pocos parámetros.

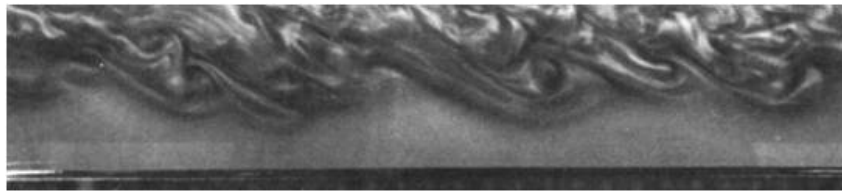


Figura I.30: Fotografía de la región de pared de la capa límite [Dyk'82]. En una fina capa inmediata a la pared se cancelan las fluctuaciones. Al rango de  $y$  (distancia a la pared) donde no hay turbulencia se denomina subcapa viscosa, y a aquel donde se alternan turbulencia y flujo laminar se le llama capa buffer.

Entonces aplicando el análisis dimensional sin más consideraciones que las anteriores, la velocidad media tendrá unidades de velocidad (como  $u_\tau$ ) y solamente variará con  $y^+$

$$U = u_\tau \cdot f_1(y^+) \tag{I.68}$$

y su gradiente en dirección normal tendrá las mismas unidades que el cociente de las magnitudes características  $u_\tau / y$ , y también variará únicamente con  $y^+$ , en la forma

$$\partial U / \partial y = (u_\tau / y) \cdot f_2(y^+), \tag{I.69}$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son desconocidas. Donde  $y^+$  es grande los efectos viscosos (recogidos mediante  $y^+$ ) no influirán en la relación entre flujo medio y los mayores remolinos, con lo cual  $f_2$  será constante en (I.69) tal que

$$\partial U / \partial y = u_\tau / (\kappa y). \tag{I.70}$$

Experimentalmente se ha encontrado el valor para la constante  $\kappa = 0,41$ , llamada constante de Von-Karman. Integrando la última expresión se tiene

$$U / u_\tau = (1/\kappa) \ln(y^+) + C \tag{I.71}$$

siendo  $C=5,2$ . En superficies con flujos que cambian suavemente sobre paredes no rugosas esta relación es válida en la región  $30\nu/u_\tau < y < 0,2\delta$ , siendo  $\delta$  la altura de la capa límite, por ello a dicha región se le llama **capa logarítmica**. En paredes rugosas es válida para  $y > 3k$ , siendo  $k$  la altura de la rugosidad.

Se denomina *zona interior* de la capa límite a la banda  $y < 0,2\delta$ , y dentro de ella **región de pared**  $y^+ < 30$  a la banda entre la pared y la capa logarítmica, compuesta por la *subcapa viscosa*  $y^+ < 3$  cuyo campo de velocidad es laminar, y por la denominada *capa buffer*  $3 < y^+ < 30$ .

En la zona interior afecta la viscosidad y la tensión cortante de Reynolds es constante y vale

$$-\overline{u'v'} = \tau_w / \rho \equiv u_\tau^2, \quad (I.72)$$

y entonces a partir de (1.65), (1.70) y (1.72) la viscosidad turbulenta es

$$\nu_t \equiv \frac{-\overline{u'v'}}{\partial U / \partial y} = \kappa u_\tau y \quad (I.73)$$

y la longitud de mezcla es

$$l = \kappa y. \quad (I.74)$$

Para cancelar la turbulencia en la subcapa viscosa, Van Driest [Dri'56] introduce en la longitud de mezcla el factor de amortiguamiento empírico  $f_\mu$  que depende de  $y^+$ , atribuyendo la reducción de la turbulencia a la fricción viscosa en la forma

$$l = \kappa y f_\mu = \kappa y [1 - \exp(y^+ / A)] \quad (I.75)$$

donde  $A=26$  da una unión correcta entre las zonas de pared y logarítmica en el perfil de velocidad media. Existen numerosas propuestas similares de  $f_\mu$  en función de  $y^+$ , y de otros números de Reynolds locales como  $k^2 / (\nu \varepsilon)$  ó  $k^{1/2} y / \nu$ . Sin embargo, en la anulación de la turbulencia hay un efecto más importante denominado *bloqueo no viscoso*, que se comenta posteriormente en los modelos de pared. En la región exterior de la capa límite funciona mejor imponer una viscosidad turbulenta constante [Dur'11] en la forma

$$\nu_t = 0,2 \kappa u_\tau \delta, \quad y > 0,2\delta. \quad (I.76)$$

En flujo cortante paralelo, la distorsión  $D$  y la rotación  $W$  del flujo medio son iguales y el modelo de longitud mezcla puede generalizarse en las formas  $\nu_t = l_m^2 |D|$  [Ceb'74] ó  $\nu_t = l_m^2 |W|$  [Bal'78]. Este último planteamiento lo usa el modelo de Baldwin-Lomax, y resulta ventajoso en flujos alrededor de perfiles alares porque habiendo un extenso dominio de flujo libre que es irrotacional, el uso de  $W$  cancela allí la viscosidad turbulenta. El modelo de longitud de mezcla no es válido en flujos separados ni en geometrías complejas, donde más eficaz que usar relaciones empíricas es introducir ecuaciones de transporte para las escalas de la turbulencia.

Es común dividir los modelos de turbulencia en modelos para alto y para bajo número de Reynolds, donde este número de Reynolds es el  $y^+$ , y no el asociado al conjunto del

flujo  $U_\infty c/v$ . Los *modelos de alto número de Reynolds* modelizan la zona exterior de la capa límite, mientras que copian leyes empíricas para la zona de pared, con el consiguiente ahorro de coste de malla en esta zona. Por su parte, los *modelos de bajo número de Reynolds* resuelven la zona de pared, usando aquí mallas muy densas, lo que aumenta considerablemente el coste de análisis.

*Modelos de una ecuación.*

El modelo de Johnson-King [Joh'85] usa una ecuación para la máxima componente de cortadura. Baldwin-Barth [Bal'90] y Spalart-Allmaras [Spa'92] emplean una ecuación de transporte de viscosidad turbulenta, ambos han sido calibrados para flujos externos en aeronáutica, sin embargo no son adecuados para geometrías complejas como las que se dan en algunos flujos internos, donde es complicado definir una longitud característica de la turbulencia.

*Modelos de dos ecuaciones.*

Para definir la viscosidad turbulenta, la ecuación para  $k$  proporciona la escala de velocidad, mientras que la escala de tiempo la proporciona otra ecuación de transporte, habitualmente para la disipación  $\varepsilon$  ó la disipación específica  $\omega = \varepsilon/k$ . En los modelos  $k-\varepsilon$  la escala de longitud es  $l = k^{3/2}/\varepsilon$  (de la relación de Taylor  $\varepsilon = O(u_o^3/l_o)$ ) y la escala de tiempo es  $\tau = k/\varepsilon$ , y a partir de ambas la viscosidad turbulenta es  $\nu_t = C_\mu k^2/\varepsilon$  [ $L^2/T$ ], donde el coeficiente  $C_\mu$  adopta diferentes formas para cada modelo.

*Modelo  $k-\varepsilon$  estándar.*

El modelo  $k-\varepsilon$  estándar de Jones y Launder [Jon'72] se usa para la zona del flujo con alto número de Reynolds (no en la zona de pared de la capa límite), y fue desarrollado a partir de consideraciones en flujos bidimensionales cortantes simples [Lau'05].

En las regiones donde los términos de transporte (la convección y la difusión) son despreciables, se dice que la *turbulencia está en equilibrio* y la ecuación (I.63) de transporte de la energía cinética turbulenta es  $\varepsilon = -\overline{\tilde{u}\tilde{v}} \partial U / \partial y$ , y multiplicándola por  $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}}k^2/(k^2\varepsilon)$  se escribe

$$-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = \frac{(-\overline{\tilde{u}\tilde{v}})^2 k^2}{\underbrace{k^2}_{\nu_t} \varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{I.77}$$

Los experimentos muestran que  $(-\overline{\tilde{u}\tilde{v}})^2/k^2$  tiene un valor cercano a 0,09 salvo en la región inmediatamente próxima a la pared [Pop'00], y entonces se toma

$$\nu_T = c_\mu k^2/\varepsilon \tag{I.78}$$

con  $c_\mu=0,09$ . Donde la producción es importante, la difusión de  $k$  no suele serlo y el flujo difusivo se toma proporcional a su gradiente donde  $\sigma_k$  es una constante empírica que se toma de valor unidad. Generalizando a tres dimensiones la ecuación modelo de la energía cinética turbulenta  $k$  queda

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{U_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{convección}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{difusión}} + \underbrace{\Pi}_{\text{producción}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{disipación}}, \quad (\text{I.79})$$

y aplicando la relación constitutiva lineal de Boussinesq

$$-a_{ij} = 2\nu_t D_{ij} \quad (\text{I.80})$$

y usando la expresión (I.64) la producción es

$$\Pi \equiv -a_{ij} D_{ij} = 2\nu_t D_{ij} D_{ij} > 0, \quad (\text{I.81})$$

que para este modelo es siempre positiva. La ecuación modelo de transporte para  $\varepsilon$  se diseña con la misma estructura de (I.63):

$$\underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}_{\text{tasacambio local } \varepsilon} + \underbrace{U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_{\text{convección } \varepsilon} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_{\text{difusión } \varepsilon} + \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\Pi \varepsilon}{k}}_{\text{producción } \varepsilon} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{destrucción } \varepsilon} \quad (\text{I.82})$$

y las constantes empíricas son [Lau'74],

$$C_\mu = 0,09, C_{\varepsilon 1} = 1,44, C_{\varepsilon 2} = 1,92, \sigma_k = 1,0, \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad (\text{I.83})$$

y dependen algo del método usado para evaluarlas. El valor del coeficiente  $C_{\varepsilon 2}$  del término de destrucción de  $\varepsilon$  se puede fijar comparando la tasa experimental de decaimiento de turbulencia isotrópica homogénea, este es un flujo carente de producción, convección, y difusión de  $k$  y de  $\varepsilon$ . Comparando con experimentos de flujo cortante homogéneo (ver figura I.27 izquierda) se puede determinar la diferencia  $C_{\varepsilon 2}-C_{\varepsilon 1}$ , que viene a controlar la tasa de crecimiento de la anchura de capas de cortadura libres. El coeficiente  $\sigma_\varepsilon$  se puede obtener fijados los dos anteriores comparando con el flujo de la capa logarítmica de pared, donde la turbulencia está en equilibrio y  $k$  es aproximadamente constante.

Las múltiples variantes de este modelo  $k$ - $\varepsilon$  estándar, constituyen el tipo de modelo de turbulencia más usado desde la década de los setenta para turbulencia desarrollada en flujos con alto número de Reynolds; algunas de ellas se describirán en el capítulo II.

*Modificación del modelo estándar para bajo número de Reynolds.*

Esta modificación incluida en el mismo artículo [Jon'72] ha dado mejores resultados en flujo transicional que la mayoría de las variantes posteriores. Elimina la turbulencia en la zona de pared introduciendo en la viscosidad turbulenta el factor de amortiguamiento viscoso  $f_\mu = \exp[-2,5/(1 + R_t/50)]$  siendo  $R_t = k^2/(v\varepsilon)$  un número de Reynolds local, e incluye los términos en  $v$  de difusión viscosa en las ecuaciones de momento,  $k$  y  $\varepsilon$ ,



añadiendo además a esta última el término  $2\nu\nu_t \partial^2 u_i / (\partial x_m \partial x_n)^2$  procedente de la ecuación exacta para  $\varepsilon$ . El hecho de que la turbulencia se atenúa cada vez más lentamente mientras se extingue (y decrece su número de Reynolds), se incluye mediante el factor  $f_2 = 1 - 0,3e^{-R_t}$  en el coeficiente  $C_{\varepsilon 2}$ .

*Modelo k- $\omega$ .*

El modelo  $k-\omega$  de Wilcox [Wil'93] mejora el rendimiento del  $k-\varepsilon$  para la zona de bajo número de Reynolds en la subcapa viscosa en capas límite y ante gradientes favorables de presión sin usar amortiguamiento artificial; sin embargo la condición de contorno  $\omega=0$  en la frontera entre la turbulencia y el flujo libre no turbulento da un flujo muy sensible a las perturbaciones exteriores. La ecuación modelo estándar para  $\omega \equiv \varepsilon/k$  es

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + C_{\omega 1} \frac{\Pi \omega}{k} - C_{\omega 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{I.84}$$

*Función de pared.*

Los modelos para alto número de Reynolds como el modelo  $k-\varepsilon$  no son aplicables en regiones del flujo con pequeño número de Reynolds  $y^+$ , como la zona de pared dentro de la capa límite. La alternativa más usada es evitar la integración del flujo en esta zona aplicando a la primera celda de la malla una función empírica que impone un perfil logarítmico de velocidad media. Como indica la figura I.31 derecha, dada la rápida variación de la velocidad media en dirección normal en esta zona, el uso de funciones de pared reduce considerablemente el coste total en grados de libertad.

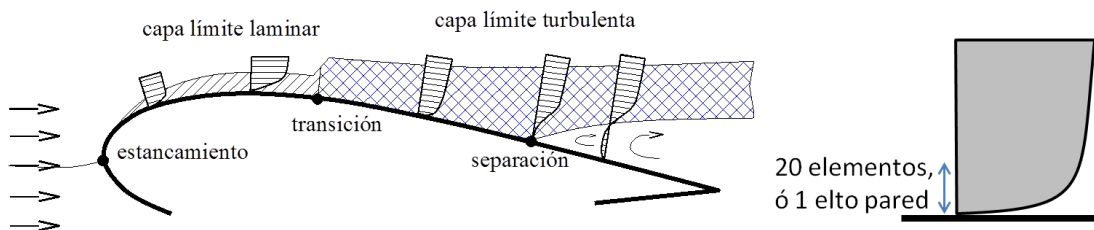


Figura I.31: (izquierda) regiones de la capa límite en un flujo con alto número de Reynolds, y (derecha) perfil de velocidad media de la capa límite turbulenta.

La ley de Reychardt es una función de pared que aproxima bastante los perfiles experimentales de la capa límite completa, donde el flujo es paralelo a la pared y la aceleración y la difusión longitudinales son despreciables, tal que  $\Pi=\varepsilon$ , en ausencia de gradientes de presión adversos, y se escribe

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7,8 \left( 1 - e^{y^+/11} - \frac{y^+}{11} e^{-0,33y^+} \right) \tag{I.85}$$

Siendo  $U^+ = U/(\tau_w/\rho)^{1/2}$ . Sin embargo, este perfil deja de ser válido en las cercanías de puntos de estancamiento, o de separación ó readhesión de la capa límite, donde existen aceleraciones en la dirección del flujo.

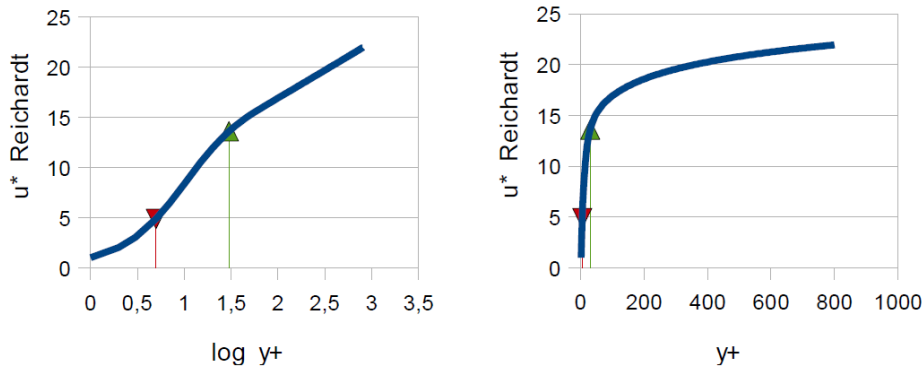


Figura I.32: Perfil de velocidad de Reichardt de la capa límite turbulenta, el eje de ordenadas representa los valores de  $U^+$ . Las regiones viscosa, buffer y logarítmica, aparecen separadas por las líneas roja y verde.

Para implementar la ley de Reichardt en los elementos tipo *pared*, la función de interpolación de los nudos exteriores varía como ella en la dirección normal  $n$  a la pared y de manera lineal en la dirección paralela  $t$ , como muestra la figura I.32. La función de interpolación para el nudo 1 es

$$N^1(t, n) = \frac{1}{2}(1 + t) \cdot \frac{U^+(n)}{U^+(n=1)} \quad (\text{I.86})$$

donde

$$U^+(n) = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ 1 + \frac{\kappa}{2} \Delta^+(1+n) \right] + 7,8 \left[ 1 - e^{-\Delta^+(1+n)/22} - \frac{\Delta^+}{11} (1+n) e^{-0,165\Delta^+(1+n)/22} \right] \quad (\text{I.87})$$

que se ha obtenido sustituyendo en la función (I.85)  $y^+$  por  $\frac{1}{2}(1+n)\Delta^+$ , en términos de la coordenada natural del elemento en dirección normal  $n \in [-1,1]$ , siendo

$$\Delta^+ = \Delta c_\mu^{1/4} \sqrt{k_a}/\nu \quad (\text{I.88})$$

un número de Reynolds local definido por la escala de velocidad  $c_\mu^{1/4} k_a^{1/2}$  en lugar de la anterior  $(\tau_w/\rho)^{1/2}$ . Aquí  $\Delta$  y  $k_a$  son la altura media del elemento y la energía cinética turbulenta en su lado superior. Este lado constituye la frontera con el modelo  $k-\varepsilon$ , y en él se aplican las condiciones de frontera  $\partial k / \partial n = 0$  y  $\varepsilon = (c_\mu^{1/2} k)^{1,5} / (k\delta)$ . Para discretizar correctamente el flujo en la zona de pared,  $\Delta^+$  debe ser predominantemente mayor de 30 en los elementos *pared*, pues en caso contrario el modelo  $k-\varepsilon$  entra en la región interior de la capa límite. Esto se puede evitar aumentando en la malla el espesor de la capa de elementos *pared*. Al mismo tiempo se recomienda que dicho valor no sea mucho mayor de 100 para que haya un número suficiente de elementos en el espesor la capa límite.

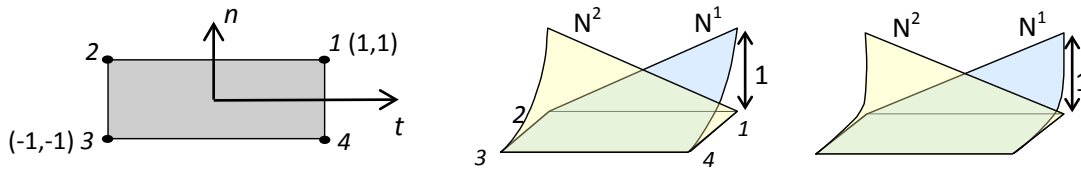


Figura I.33: (izquierda) Elemento cuadrilátero de cuatro nudos tipo *wall*, y funciones de interpolación de los nudos 1 y 2, (centro) para  $\Delta^+$  pequeño, (derecha) para  $\Delta^+$  grande.

La viscosidad turbulenta se modeliza en los elementos pared usando una relación algebraica, por ejemplo [Fid'98]

$$v_t = l_m^2 \cdot 2D_{ij} \partial U_i / \partial x_j \quad , \quad (I.89)$$

donde la longitud de mezcla  $l_m$  incluye amortiguamiento viscoso de Van Driest en la forma de (I.74), pero ahora en función del número de Reynolds local  $\Delta^+$  que depende de  $k_a$ .

*Modelos EVM avanzados.*

*Modelo SST de Menter.*

El modelo SST  $k-\omega$  de Menter [Men'94] es una mezcla progresiva del modelo  $k-\omega$  estándar y del modelo  $k-\varepsilon$ . Escrito en términos de  $k-\omega$ , en la zona de pared es un  $k-\omega$  puro, y ya en el borde exterior de la capa límite es el modelo  $k-\varepsilon$ . De esta manera, las virtudes de cada modelo cubren los puntos débiles del otro. Emplea una ecuación constitutiva lineal cuya viscosidad turbulenta es una modificación de la utilizada por el  $k-\omega$ , y arroja buenos resultados en flujos de tipo aeronáutico [Men'03].

*Modelos de relajación elíptica.*

La *región de pared* situada debajo de la capa logarítmica de la capa límite, es una región crítica porque además de presentar elevadas producción y cortadura, determina la fricción en la pared. Como se ha visto anteriormente, los modelos de pared convencionales eliminan la turbulencia en la zona de pared usando un factor de amortiguamiento viscoso en la viscosidad turbulenta que depende de un número de Reynolds local. El modelo de Durbin [Dur'93] no utiliza amortiguamiento empírico de pared, sino que define la viscosidad turbulenta a partir de la siguiente ecuación de transporte truncada de la tensión cortante de Reynolds,

$$\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = - \underbrace{Ck \frac{\overline{\tilde{v}^2}}{\varepsilon}}_{v_t} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (I.90)$$

en la forma  $v_t = -C_v \overline{\tilde{v}^2} k / \varepsilon$ . Por otra parte, es conocido [Dur'91; Han'76] que el efecto principal de la desaparición de la turbulencia en la proximidad de la pared es el llamado *bloqueo no viscoso* de pared que consiste en la anulación de la componente turbulenta normal a la pared, porque ésta es impermeable. Se trata de un efecto cinemático no local

de presión, que es recogido en términos de un punto por el modelo  $\overline{v^2} - f$  de Durbin usando la denominada relajación elíptica. Ésta consiste en modelizar en la ecuación de la tensión de Reynolds  $\overline{v^2}$  el conjunto de los términos de presión-deformación y de disipación anisotrópica como el producto de  $k$  por la variable de relajación  $f$ , gobernada por una ecuación elíptica. Este modelo añade al modelo  $k-\varepsilon$ , una ecuación para el transporte de  $\overline{v^2}$  y otra elíptica para la variable  $f$ , y supuso un salto cualitativo en la modelización de la región de pared. En los procesadores segregados presenta cierta inestabilidad numérica y dependencia de la primera celda de la malla debido a la variación con  $y^4$  de la variable  $f$ ; para paliar este problema la variante  $k-\xi-f$  de Hanjalic [Han'05] usa una ecuación de transporte para  $\xi = \overline{v^2} / k$ , en lugar de  $\overline{v^2}$ .

#### *Modelos de transición.*

La correcta ubicación del punto de transición de flujo laminar a turbulento en una capa límite es una cuestión crítica en aerodinámica y turbomaquinaria, porque determina la fricción en la pared y el tamaño de la región turbulenta, y en consecuencia los esfuerzos del flujo sobre el cuerpo sólido. Como se ha visto previamente (apartado 2.3.2) para intensidades de turbulencia del flujo libre inferiores al 1%, suele darse el mecanismo de *transición natural*, típico de flujos aerodinámicos. Sin embargo, a partir de intensidades de turbulencia del 1%, típicas en turbomaquinaria, el mecanismo habitual es la *transición bypass*.

Los primeros modelos para bajo número de Reynolds [Jon'72; Rod'85] usan amortiguamiento de pared y capturan algunos efectos de la transición bypass. Otros modelos posteriores [Lan'02; Wil'94; Wal'08] han sido calibrados específicamente para la transición usando diferentes variables para indicar el estado de la capa límite y con diferentes resultados.

En la mayoría de los criterios certeros usados para desencadenar la transición intervienen operaciones no locales (como el cálculo del espesor de momento de la capa límite, que implica identificar el espesor de la capa límite e integrar en él), pero los modelos de transición deben estar formulados en términos de un solo punto para poder ser implementados de manera sencilla en un código CFD. Recientemente se han desarrollado modelos de un punto, como los dos que se describen a continuación, que dan resultados de calidad.

El modelo empírico de Menter y otros [Men'06] considera que la transición se inicia en la capa límite en función del número de Reynolds local definido a partir de la vorticidad  $Re_V$  y de efectos no locales como los gradientes de presión adversos y la turbulencia del flujo libre, que cambia a lo largo del flujo. Estos efectos son introducidos de manera local acoplando al modelo SST [Men'94] dos ecuaciones de un solo punto basadas en correlaciones empíricas no locales obtenidas de flujos sencillos.

El modelo fenomenológico (es decir, basado en la física)  $k-k_L-\omega$  de Walters y Cokljat [Wal'08] introduce a través de una definición pormenorizada de la viscosidad turbulenta los efectos relevantes de la velocidad fluctuante y la física de la transición. Las fluctuaciones de velocidad previas a la transición se recogen en la variable  $k_L$  cuyo

transporte se modeliza mediante una ecuación adicional, y la transición es representada por un trasvase de energía cinética laminar  $k_L$  a energía cinética turbulenta  $k_T$ .

#### *Modelos EVM no lineales.*

Las relaciones constitutivas no lineales entre el flujo medio y la turbulencia (en contraposición a la relación lineal de Boussinesq (I.80)) se basaron inicialmente en las similitudes existente entre el flujo laminar de un fluido no Newtoniano y el flujo medio turbulento de un fluido Newtoniano [Hin'75]. Posteriormente, los denominados modelos *EVM anisótrpos* o no lineales [Yos'84, Spe'87, Yak'92] añaden al término lineal de Boussinesq una serie de términos de orden superior en los gradientes de velocidad, cuyos coeficientes se obtienen de comparar con flujos canónicos.

En los *modelos algebraicos* (Algebraic Reynolds Stress Models, ARSM) la relación constitutiva no lineal es implícita y se obtiene despreciando los términos de transporte de la ecuación de las tensiones de Reynolds en modelos RSM [Rod'76]. Por este motivo heredan el comportamiento básico de los modelos RSM, aunque con carencias en los efectos del transporte. La anisotropía del tensor de Reynolds se obtiene de la ecuación implícita resolviendo un complejo sistema de ecuaciones que presenta rigidez numérica, debido en parte a la ausencia de amortiguamiento artificial de pared.

Posteriormente, se han desarrollado los *modelos algebraicos explícitos* (Explicit Algebraic Reynolds Stress Models, EARSM) que a partir de aquella ecuación implícita obtienen explícitamente la anisotropía del tensor de Reynolds como suma de diez términos (función de los tensores tasa de deformación y rotación del flujo medio) usando un método sistemático basado en álgebra [Pop'75], y la dificultad reside ahora en la determinación de estos coeficientes [Gat'93; Gir'96; Wal'00]. Los modelos EARSM son aproximaciones menos empíricas que los EVM anisótrpos y se considera que tienen mayor potencial de predicción [Fra'10]; de hecho recogen de manera natural ciertos comportamientos asintóticos universales de los flujos [Wal'00].

### **2.6.2. Ecuaciones simplificadas de la capa límite para flujos turbulentos.**

En presencia de paredes los flujos turbulentos, como los laminares, también tienen capa límite, y entonces tal y como se hizo para la capa límite laminar en el apartado 2.3.2, tomando ejes alineados con la pared (ver figura I.16), se pueden simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes, en este caso las promediadas RANS (I.58) y (I.59), eliminando algunos términos [Sch'00]. Asumiendo flujo medio estacionario bidimensional y las mismas hipótesis, en este caso para el flujo medio, ( $Re \rightarrow \infty$ ,  $V \ll U_\infty$ ,  $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$ ) donde  $V$  es la componente de la velocidad media normal a la pared, a partir de la ecuación del momento para la dirección  $y$ , se tiene

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \rho \bar{v}^2}{\partial y}, \quad (\text{I.91})$$

e integrando al espesor de la capa límite se tiene

$$P + \rho \overline{\tilde{v}^2} = P_w = p_e, \quad (\text{I.92})$$

suponiendo que el flujo exterior está libre de turbulencia. Aquí  $p_e$  es la presión en el borde exterior de la capa límite. Es decir, a través del espesor de la capa límite la suma  $P + \rho \overline{\tilde{v}^2}$  permanece constante, y como las fluctuaciones se anulan en la pared y en el borde exterior de la capa límite, se tiene que la presión media en la pared es igual a la presión del flujo exterior. Así las ecuaciones simplificadas para la capa límite turbulenta son

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.93})$$

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p_e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u\tilde{v}}) \quad (\text{I.94})$$

El último término de la ecuación (I.94) es incógnita y será relacionado con el campo de velocidad del flujo medio mediante un modelo de turbulencia. Como ocurría con las ecuaciones simplificadas para capas límites laminares, en el caso turbulento también es dato la presión del flujo exterior  $p_e$ , que se ha obtenido de resolver previamente dicho flujo potencial.

### 2.6.3. Alternativas para el análisis de flujos turbulentos alrededor de perfiles.

Para realizar el análisis en las optimizaciones sobre flujos turbulentos alrededor de perfiles (ver capítulo IV), se ha elegido un código CFD. Este tipo de códigos cada día se usan más, y no presentan limitaciones en el manejo de geometrías complejas en cálculos ingenieriles del día a día, utilizan las ecuaciones RANS con un modelo de turbulencia de manera monolítica en todo el dominio fluido. Los métodos CFD al mallar todo el dominio de fluido, emplean un gran número de grados de libertad, y por ello su coste es elevado.

Como se ha visto, existen diversas familias de modelos de turbulencia RANS. En el capítulo II se prueban y se discuten algunos de estos modelos, y se muestra la necesidad de adoptar un modelo de transición válido para el tipo de flujos de interés. Como los modelos de transición tradicionales no son compatibles con los códigos CFD, se ha recurrido a un modelo de transición de última generación, porque estos sí son ya utilizables en códigos CFD.

De manera alternativa existen códigos de paneles que emplean conjuntos de ecuaciones matemáticamente más sencillas que las de Navier-Stokes buscando ajustarse a la física del flujo de manera zonal. En concreto, estos programas calculan el flujo exterior como flujo potencial y resuelven la capa límite basándose en las ecuaciones simplificadas de Prandtl, o en la ecuación integral del momento para la capa límite, que se deriva de las anteriores (ver apartado 2.3.2). También suelen incluir la predicción de la transición de capa límite laminar a turbulenta, por medio de correlaciones empíricas o métodos basados en la teoría de estabilidad lineal, entre los que destaca el método  $e^N$  por su precisión y sencillez. A diferencia de los métodos CFD que admiten dominios de cualquier geometría, la técnica de paneles presenta el inconveniente de necesitar como dato la posición de la estela, aunque existen códigos que la calculan de manera iterativa.

La posición de la estela es importante en flujos con varias superficies, como las configuraciones multielemento de alta sustentación, porque afecta al flujo que recibe la geometría aguas abajo [Eri'90].

Dentro de los métodos de paneles, hay dos variantes principales [Lew'05]: una usa fuentes y vórtices para construir el flujo potencial, y la otra solamente vórtices. La variante de solamente vórtices presenta la ventaja de tener un significado físico que no tiene la variante combinada de vórtices y fuentes, ya que las fuentes carecen de significado físico. En efecto, los vórtices colocados sobre la pared sumados a la corriente construyen un flujo que coincide con un flujo viscoso con número de Reynolds de valor infinito: el perfil de velocidad en las proximidades de la pared es escalonado, la velocidad es nula en la pared, e inmediatamente pasa a valer la velocidad del flujo exterior. Esto facilita la construcción de las capas límites viscosas.

Entre los códigos de paneles es muy usado el programa Xfoil [Dre'89] de análisis y diseño de perfiles bidimensionales. Este programa, resuelve el flujo potencial definiendo una malla de fuentes y vórtices, colocados sobre la pared y la estela, cuyos valores son calculados imponiendo condiciones de contorno a la velocidad en la pared. A continuación, la presión y la velocidad obtenidas para el flujo potencial en el borde exterior de la capa límite son introducidas como condiciones de contorno de las ecuaciones de la capa límite, que incluyen un modelo de turbulencia y el criterio de transición  $e^N$ . Estas ecuaciones son resueltas de manera conjunta. El coste por análisis usando Xfoil viene a ser unos dos órdenes de magnitud inferior al de un programa CFD, puesto que al mallar solamente la pared y la estela, el número de grados de libertad no es grande. Un inconveniente de este programa es que arroja cierto error para la sustentación máxima, para perfiles con elevado ángulo de ataque, debido a limitaciones en la predicción de la separación de la capa límite. Aun así, en conjunto Xfoil produce resultados aceptables respecto a otros códigos CFD para el cálculo de flujos alrededor de perfiles con alto número de Reynolds [Fer'09], y con bajo números de Reynolds [Mor'16].

Teniendo en cuenta lo anterior, los códigos de paneles reúnen características positivas para ser empleados en optimización de forma, y serán tenidos en cuenta en líneas futuras de investigación.

### **3. MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLAS.**

En análisis aerodinámico, el progresivo avance del hardware ha permitido realizar cálculos cada vez más complejos-masivos permitiendo el desarrollo de modelos de flujo cada vez más precisos. En los años setenta los códigos explotaban el modelo de flujo potencial, y en los años ochenta la ecuación de Euler para flujo transónico no viscoso. En la actualidad el uso de modelos RANS (ver apartado 2.6.1) sigue aumentando en la industria aeronáutica mientras los métodos LES no son aún utilizables en tiempos realistas [Bak'05]. Esta evolución ha ido necesariamente acompañada del avance de los métodos de generación de mallas, para posibilitar la construcción eficiente de mallas de complejidad geométrica y densidad crecientes.

### 3.1. MALLAS ESTRUCTURADAS Y DESESTRUCTURADAS.

En mallas bidimensionales, las *mallas estructuradas* aparecen como superposición de dos haces - o *familias* - de *líneas de malla*. Las líneas de malla de cada familia no se cortan entre sí. Por su parte, las *mallas desestructuradas* presentan el aspecto de un mosaico. Por este motivo, ambos tipos de malla [Tho'98] difieren en la estructura de datos que describe la malla. Para las mallas estructuradas el conjunto de coordenadas de los nudos de manera natural se escribe ordenado en una matriz rectangular; esta disposición por sí misma refleja los nudos que forman cada celda. Sin embargo en las mallas desestructuradas, en cada nudo varía la conexión con los nudos vecinos, y esta información se recoge en un *vector de nudos de celdas* de la malla.

En principio ambos tipos de malla, estructuradas y desestructuradas, pueden utilizarse con diferencias finitas, volúmenes finitos ó elementos finitos [Fer'96]. Sin embargo, en la práctica las diferencias finitas necesitan mallas estructuradas [Ceb'05], dada la dificultad que entraña el desarrollo de esquemas de diferencias finitas para mallas desestructuradas. Los volúmenes finitos sin embargo son fácilmente formulados para mallas desestructuradas. Por su parte los elementos finitos son válidos para cualquier tipo de malla porque el esquema de construcción de las ecuaciones discretas no depende del tipo de malla, ya que las funciones de interpolación están definidas solamente dentro del elemento, y cada elemento contribuye por separado en aquellas [Tho'98].

### 3.2. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LOS MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLAS.

Se recogen a continuación, basándose en la revisión de [Bak'05], los hitos y algunos de los conceptos más importantes de las cinco últimas décadas en materia de generación de mallas. Bebiendo de campos como las matemáticas y la informática, la generación de mallas progresivamente se ha vuelto una disciplina por sí misma, con una identidad propia.

#### 3.2.1. Técnicas de mallado.

El método de elementos finitos se desarrolla entre finales de los años cincuenta y sesenta del siglo XX, sobre mallas desestructuradas construidas manualmente. En el gremio de los elementos finitos no se abordó el difícil problema del mallado automático porque no necesitaban de mallas regulares.

Los primeros desarrollos en métodos de mallado se dieron en la comunidad CFD, para mallas estructuradas sobre diferencias finitas. Aunque el método de diferencias finitas es ya utilizado por Richardson en meteorología en 1922, su aplicación numérica esperaría hasta el desarrollo de las computadoras electrónicas. Así en los años cincuenta aparecen los primeros métodos CFD, que calculan flujos bidimensionales de geometría sencilla con modelos de flujo simples.



A diferencia de los métodos de volúmenes finitos y elementos finitos, que pueden ser aplicados sobre mallas estructuradas y desestructuradas, el método de diferencias finitas necesita de una malla estructurada rectangular y uniforme para aplicar las *fórmulas de diferencias finitas* que aproximan las derivadas parciales en cada punto. Sin embargo, las geometrías reales casi nunca son susceptibles de ser así malladas, y entonces se usan **transformaciones de coordenadas** que mapean el *dominio físico*  $(x,y)$  a un *dominio computacional*  $(\xi,\eta)$  -como el rectángulo o el círculo- donde se genera una malla rectangular -cartesiana o cilíndrica-.

La figura I.34 recoge un ejemplo de mapeado plano. Las ecuaciones diferenciales parciales del flujo en el dominio físico se transforman al dominio computacional, y en éste se aplican las fórmulas de diferencias finitas y se construye el sistema de ecuaciones discretas. En el espacio físico las líneas de malla son obtenidas transformando las líneas coordenadas del espacio computacional mediante la transformación de coordenadas particular  $x=x(\xi,\eta)$  e  $y=y(\xi,\eta)$  empleada. Así, una buena malla en el espacio físico depende de la elección de un mapeado adecuado entre ambos espacios.

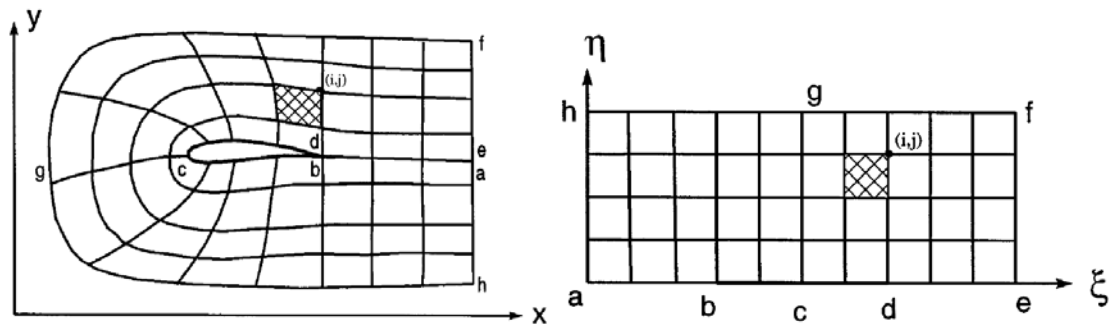


Figura I.34: Malla estructurada generada analíticamente: (izquierda) malla curvilínea en el plano físico (derecha) malla uniforme en el espacio computacional [Liu'98].

Inicialmente fueron populares los métodos de transformación conforme [Sel'69], que proporcionan transformaciones de coordenadas analíticas para mallar geometrías bidimensionales utilizando la variable compleja.

El progresivo avance del hardware permitió abordar el cálculo de flujos aerodinámicos más realistas en régimen transónico, y fueron desarrollados métodos que combinan transformaciones conformes, cortaduras y estiramientos para generar mallas en geometrías más complejas como configuraciones bidimensionales de perfiles multielemento [Ive'75] y combinaciones tridimensionales ala-cuerpo sin barquillas portamotores.

### 3.2.2. Técnicas numéricas de mallado.

En los años setenta, la exigencia de simulaciones aerodinámicas de elevada complejidad geométrica como una aeronave completa, motivó dos desarrollos importantes. Por un lado las *técnicas numéricas de generación de mallas* para diferencias finitas, desplazan a los mapeados analíticos. Éstas en combinación con la nueva estrategia de *mallado*

*multibloque*, hicieron posible el mallado de complejas configuraciones geométricas, como el ejemplo de la figura I.35 de un perfil alar bidimensional de cuatro elementos.

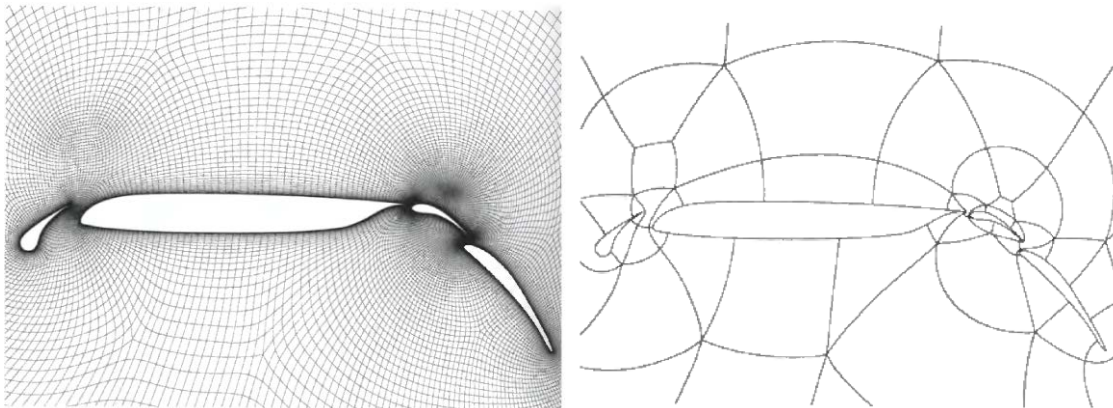


Figura I.35: (izquierda) Malla alrededor de un perfil de ala de cuatro elementos, y (derecha) estructura de bloques [Tho'98].

Existen dos clases de técnicas numéricas de mallado estructurado, las que resuelven ecuaciones en derivadas parciales, y las que usan interpolación algebraica. Por su parte, el procedimiento de mallado multibloque consiste en dividir el dominio real en un mapa o estructura topológica (que puede ser estructurada o desestructurada), formada por subdominios más pequeños y sencillos geométricamente, que a su vez pueden mallarse con mallas estructuradas o desestructuradas.

Por otra parte, desde los años ochenta, se han desarrollado métodos alternativos de generación automática de mallas desestructuradas, principalmente métodos de triangulación para mallas a base de triángulos/tetraedros, mallas pavimentadas de cuadriláteros/hexaedros, métodos octree y mallas híbridas, compuestas habitualmente de una malla estructurada para la región de capa límite y una desestructurada para el flujo exterior. En la figura I.36 aparece un resumen de la evolución de los principales métodos de mallado y su clasificación.

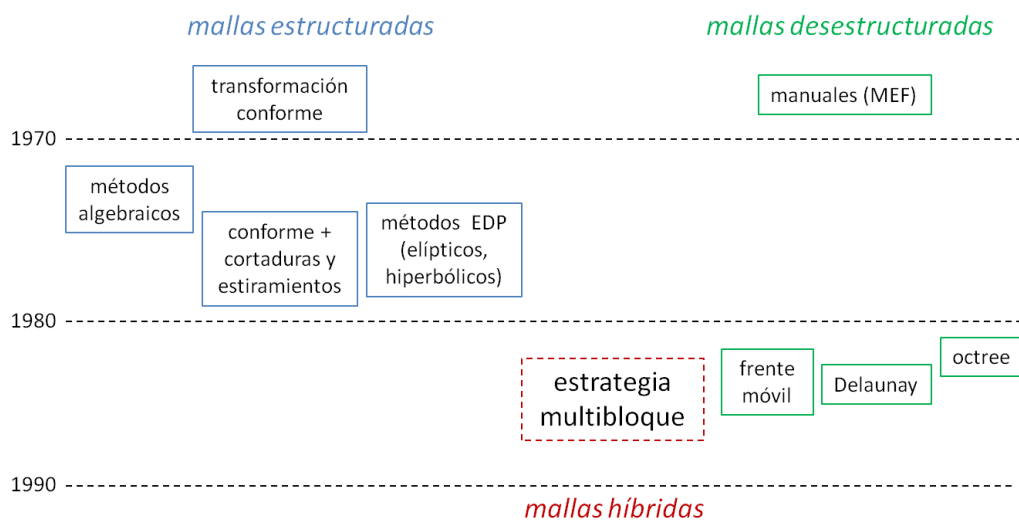


Figura I.36: Clasificación y cronología de métodos de mallado.

En la actualidad algunos temas de investigación activa en generación de mallas son las mallas móviles para métodos ALE (Arbitrarily Lagrangian Eulerian), problemas aeroelásticos y de optimización de forma; las mallas desestructuradas anisotrópicas, el suavizado de mallas o el mallado adaptativo.

### 3.3. MALLAS ESTRUCTURADAS.

#### 3.3.1. Clasificación de los métodos de mallado estructurado.

Las mallas estructuradas se generan mediante transformaciones de coordenadas entre el dominio físico en *coordenadas generales*  $(x,y)$  y un dominio computacional de geometría rectangular más simple asociado a las *coordenadas curvilíneas*  $(\xi,\eta)$ . Las familias de líneas de malla se obtienen respectivamente transformando las familias de líneas coordenadas  $\xi=cte$  y  $\eta=cte$  del espacio computacional al espacio físico.

Existen fundamentalmente tres clases de técnicas para generar mallas estructuradas, la transformación conforme, que es un mapeado analítico poco usado hoy en día, la interpolación algebraica, y los métodos que resuelven un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales [Ceb'05]. A continuación se exponen ideas básicas de las dos últimas clases, dedicando una mayor extensión a la *interpolación transfinita* porque es el método más usado debido a su eficiencia, y que se ha empleado en el método de mallado multibloque para geometrías cambiantes desarrollado en el capítulo III.

#### 3.3.2. Métodos algebraicos. Generación de mallas mediante Interpolación Transfinita.

Las técnicas más eficientes de generación de mallas son algebraicas y aplican fórmulas de interpolación. La interpolación transfinita (*TFI, transfinite interpolation*) [Gor'73] permite el control directo del espaciado de la malla especificadas sus fronteras, y es el método de generación de mallas estructuradas más empleado. A continuación se describe la generación de mallas bidimensionales mediante interpolación transfinita; en mallas tridimensionales se emplean estas mismas ideas generalizadas.

Las técnicas algebraicas de generación de malla transforman-mapean el dominio computacional cuadrado  $0 \leq \xi \leq 1$  y  $0 \leq \eta \leq 1$  a un cuadrilátero curvilíneo plano, dominio físico de fronteras irregulares. Esto consiste en definir una superficie  $\vec{X} = \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\}^T$  que rellena la región física, escrita en términos de los dos parámetros  $\xi$  y  $\eta$ , llamados coordenadas curvilíneas.

La TFI construye la superficie  $\vec{X}$  usando un procedimiento de *interpolación multivariante*, que suma *interpolaciones univariantes* aplicadas en una dirección coordenada. Estas interpolaciones univariantes pueden ser de cualquier tipo (lineales, cuadráticas, splines, NURBS, etc.). Al objeto de explicar este método de generación de mallas, primero se van a introducir algunos conceptos necesarios.

**Curvas de interpolación.**

Para construir curvas que pasen por puntos (o de interpolación) como la de la figura I.37, la manera más sencilla es construir un tramo recto mediante la interpolación lineal entre dos puntos

$$\vec{r}(\xi) = (1 - \xi)\vec{r}_1 + \xi\vec{r}_2 \tag{I.95}$$

Donde  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son los puntos extremos de la curva, en este caso una recta, estando el parámetro  $\xi$  definido entre 0 y 1.

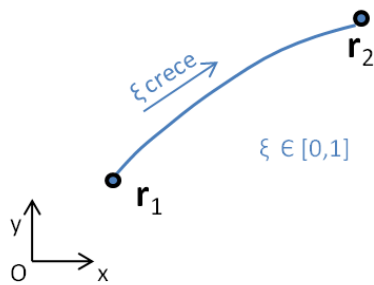


Figura I.37: Curva que interpola dos puntos.

La curva (I.95) se ha obtenido combinando linealmente las funciones de interpolación

$$\alpha_1^0(\xi) = 1 - \xi \quad \text{y} \quad \alpha_2^0(\xi) = \xi \tag{I.96}$$

llamadas *polinomios lineales de Lagrange*. Otros métodos de interpolación habituales son los de Hermite, Bézier, B-spline o NURBS. Por ejemplo, la interpolación cúbica de Hermite es combinación lineal de los polinomios

$$\alpha_1^0(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1; \quad \alpha_1^1(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi; \quad \alpha_2^0(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2; \quad \alpha_2^1(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \tag{I.97}$$

en la forma

$$\vec{r}(\xi) = \alpha_0^0(\xi)\vec{r}_1 + \alpha_0^1(\xi)\frac{\partial\vec{r}(\xi=0)}{\partial\xi} + \alpha_1^0(\xi)\vec{r}_2 + \alpha_1^1(\xi)\frac{\partial\vec{r}(\xi=1)}{\partial\xi} \tag{I.98}$$

tal que la curva satisface las posiciones y las derivadas primeras dadas en sus dos extremos. En las expresiones anteriores, el subíndice indica el orden de colocación del punto en la curva, y el superíndice el orden de la derivada proporcionada como dato en dicho punto, que es cero para el dato de la posición.

**Superficies de interpolación univariante lineales.**

A partir de dos curvas  $\vec{r}_{c1}$  y  $\vec{r}_{c2}$  de cualquier tipo (Lagrange, Hermite, Bézier, NURBS...) definidas para valores del parámetro  $\eta$  en  $[0,1]$ , se puede generar una

superficie interpolando en dirección  $\xi$  cada par de puntos correspondientes a un mismo valor de  $\eta$ , usando el mismo esquema lineal de la expresión (I.95), en la forma

$$\underbrace{\vec{r}(\xi, \eta)}_{\text{superficie}} = (1 - \xi) \underbrace{\vec{r}_{C1}(\eta)}_{\text{curva C1}} + \xi \underbrace{\vec{r}_{C2}(\eta)}_{\text{curva C2}}, \quad (\text{I.99})$$

tal y como muestra la figura I.38. Dichos pares de puntos han sido interpolados por una *recta*. Estando ambas curvas  $C1$  y  $C2$  contenidas en el plano  $xy$ , la expresión (I.99) representa una superficie plana en este mismo plano.

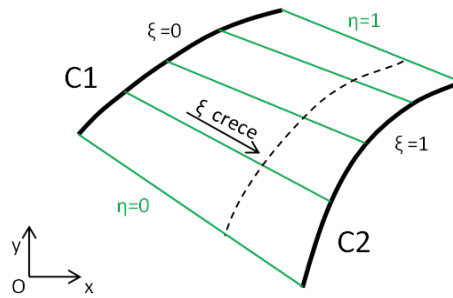


Figura I.38: Interpolación lineal de dos curvas.

**Interpolación transfinita.**

La interpolación transfinita en dos dimensiones consiste en obtener una superficie por composición de otras tres: se suman dos superficies de *interpolación unidireccional*  $U, V$  obtenidas respectivamente mediante proyección en la dirección de cada coordenada curvilínea, y se resta una tercera que es producto tensorial de ambas. A esta operación se denomina *suma booleana* [Tho'98] y se denota por

$$\vec{X}(\xi, \eta) = \vec{U} \oplus \vec{V} = \vec{U} + \vec{V} - \vec{U}\vec{V} . \quad (\text{I.100})$$

La interpolación transfinita tiene muchas variantes, en función del tipo de interpolación unidireccional empleada (Lagrange [Sam'90], Hermite, B-spline, NURBS...), a continuación se explica la variante más sencilla de ellas, el parche superficial de Coons [Coo'67], que es muy popular en métodos de mallado y fue desarrollado en la industria automovilística para modelizar superficies para chapas delgadas de metal.

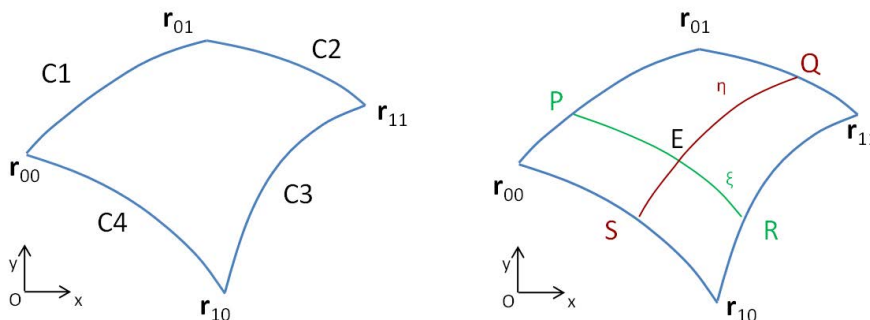


Figura I.39: (izquierda) Cuatro curvas frontera, y (derecha) superficie generada mediante interpolación bidireccional.

Se interpolan cuatro curvas  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  y  $C4$  que definen un cuadrilátero curvilíneo como el mostrado en la figura I.39 izquierda, usando una superficie que se obtiene sumando las superficies de interpolación unidireccional lineal

$$U \equiv (1 - \xi) \underbrace{\vec{r}_{C1}(\eta)}_{\text{curva } C1} + \xi \underbrace{\vec{r}_{C3}(\eta)}_{\text{curva } C3} \quad \text{y} \quad V \equiv (1 - \eta) \underbrace{\vec{r}_{C2}(\xi)}_{\text{curva } C2} + \eta \underbrace{\vec{r}_{C4}(\xi)}_{\text{curva } C4} \quad (\text{I.101})$$

menos el producto tensorial definido en la forma,

$$UV \equiv (1 - \xi)(1 - \eta) \underbrace{\vec{r}_{00}}_{\text{punto00}} + \xi(1 - \eta) \underbrace{\vec{r}_{10}}_{\text{punto10}} + \xi\eta \underbrace{\vec{r}_{11}}_{\text{punto11}} + (1 - \xi)\eta \underbrace{\vec{r}_{01}}_{\text{punto01}}, \quad (\text{I.102})$$

que es una superficie bilineal.

La superficie generada mediante este método interpolación transfinita se escribe

$$\vec{r}_E \equiv \vec{r}(\xi, \eta) = (1 - \xi)\vec{r}_P(\eta) + \xi\vec{r}_Q(\eta) + (1 - \xi)\vec{r}_R(\xi) + \xi\vec{r}_S(\xi) - [(1 - \xi)(1 - \eta)\vec{r}_{00} + (1 - \eta)\xi\vec{r}_{10} + \eta(1 - \xi)\vec{r}_{01} + \xi\eta\vec{r}_{11}] \quad (\text{I.103})$$

y aparece dibujada en la figura I.40.

Como muestra la figura I.39 derecha, aquí  $\vec{r}_E$  es el punto de la superficie, y los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son los *puntos carril* en las curvas frontera, de posiciones respectivas

$$\vec{r}_P = \vec{r}(0, \eta), \quad \vec{r}_Q = \vec{r}(\xi, 0), \quad \vec{r}_R = \vec{r}(1, \eta), \quad \vec{r}_S = \vec{r}(\xi, 1). \quad (\text{I.104})$$

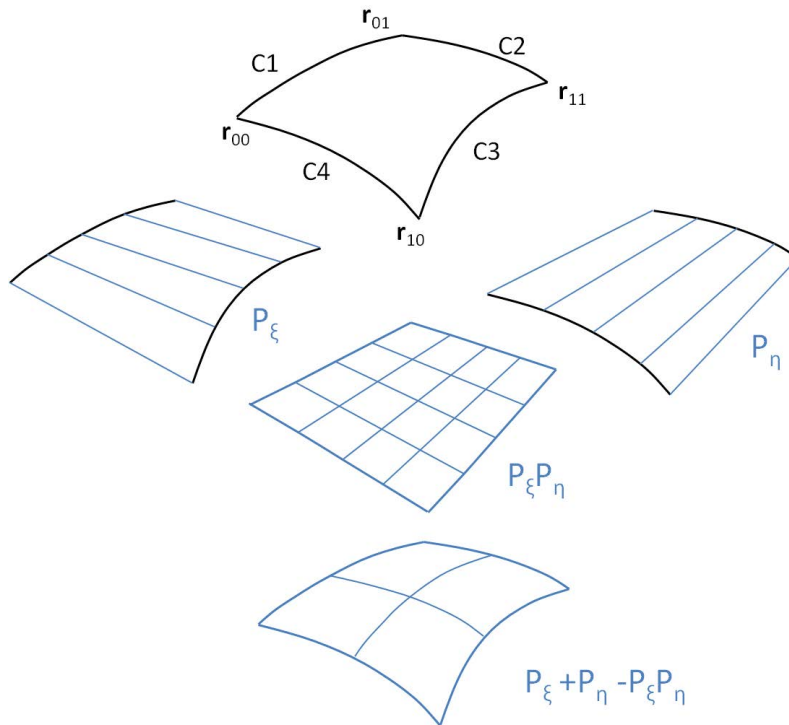


Figura I.40. Elemento superficial de Coons; proyectores unidireccionales  $P_\xi$  y  $P_\eta$  y producto tensorial  $P_\xi P_\eta$ .

*Generación de la malla mediante interpolación transfinita.*

Dada una distribución uniforme de nudos en las fronteras físicas, la malla es generada de manera inmediata usando el mapeado (I.103) entre el cuadrilátero curvilíneo físico  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  y  $C4$ , y el cuadrado computacional  $0 \leq \xi \leq 1$  y  $0 \leq \eta \leq 1$  (ver figura I.41). Las posiciones  $(x,y)$  de los nudos interiores de la malla en el espacio físico son obtenidas introduciendo en la expresión (I.103) las posiciones en el dominio físico de los cuatro nudos carril, que son los nudos extremos de las dos líneas de malla que cortan en el nudo interior.

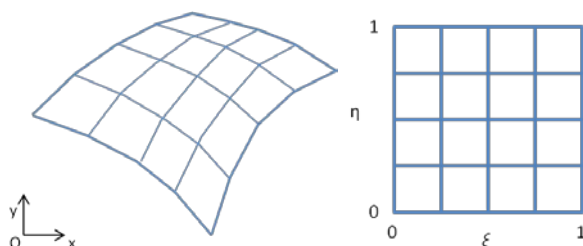


Figura I.41: (izquierda) Malla en el dominio real, y (derecha) en el espacio computacional.

*Control del espaciado de malla usando interpolación transfinita.*

Se puede controlar la variación de tamaño de elemento de la malla eligiendo una distribución no uniforme de nudos en la frontera, como muestra la figura I.42. En este caso, para obtener los nudos interiores de la malla suele emplearse un procedimiento que mapea los nudos de las fronteras a un espacio intermedio cuyas coordenadas son las longitudes de arco normalizadas  $(u,v)$ .

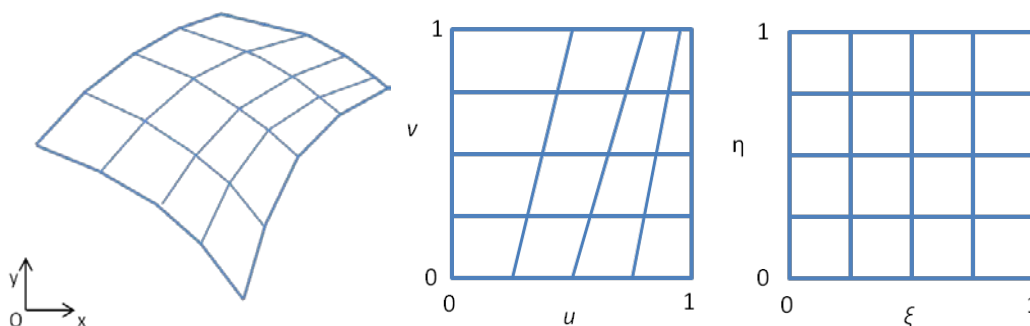


Figura I.42: Espacio físico, espacio de distribución intermedio y espacio computacional.

De esta manera, las posiciones de los nudos interiores  $(x,y)$ , se calculan usando el mapeado entre el espacio físico y dicho espacio intermedio  $(u,v)$ , representado por la expresión

$$\vec{r}_E \equiv \vec{r}(u, v) = (1 - u)\vec{r}_P(v_P) + u\vec{r}_Q(v_Q) + (1 - u)\vec{r}_R(u_R) + u\vec{r}_S(u_S) - [(1 - u)(1 - v)\vec{r}_{00} + (1 - v)u\vec{r}_{10} + v(1 - u)\vec{r}_{01} + uv\vec{r}_{11}] \quad (I.105)$$

análoga a la ley (I.103), pero viene dada en términos de las coordenadas intermedias  $(u,v)$  en lugar de las computacionales  $(\zeta,\eta)$ . En (I.105) las posiciones en el espacio intermedio de los cuatro *nudos carril* asociados a un nudo interior

$$\vec{r}_P = \vec{r}(0, v_P), \quad \vec{r}_Q = \vec{r}(u_Q, 0), \quad \vec{r}_R = \vec{r}(1, v_R), \quad \vec{r}_S = \vec{r}(u_S, 1) \quad (I.106)$$

se obtienen a partir de la distribución de nudos en las fronteras físicas, como cociente entre la longitud del tramo curvilíneo  $l$  (tomado entre el origen de la curva que lo contiene y el referido nudo carril), y la longitud total de dicha curva frontera  $L_{CF}$ . Por ejemplo, para el nudo carril  $P$  en la frontera  $CI$  su posición en el espacio de distribución es  $v_P = l_P/L_{CI}$ .

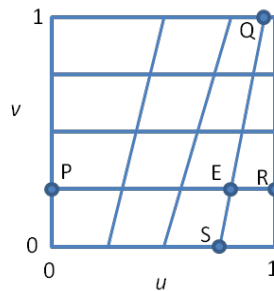


Figura I.43: Posición de un nudo interior  $E$  en el espacio intermedio de longitudes de arco.

Una vez conocidas las posiciones (I.106), tal y como puede verse en la figura I.40, la posición  $(u,v)$  del nudo interior de la malla  $E$  en el espacio intermedio satisface la ecuación de las dos rectas  $QS$  y  $PR$  mostradas en la figura I.43, que se escriben

$$\begin{aligned} u &= (1 - v)u_Q + v \cdot u_S \\ v &= (1 - u)v_P + u \cdot v_R \end{aligned} \quad (I.107)$$

Resolviendo este sistema (I.107) de dos ecuaciones se tiene la posición  $(u,v)$  del nudo interior en el espacio intermedio, que introduciendo en (I.105) junto con las posiciones (I.106) de los puntos carril, arroja la posición del nudo interior  $E(x,y)$  en el espacio físico.

Finalmente, se comenta que la generación de mallas mediante interpolación transfinita es un método de bajo coste, cuyo principal inconveniente consiste en que las singularidades (cambios bruscos de pendiente) en las fronteras se propagan al interior de la malla, como muestra la figura I.44. Esto es debido a que la malla del interior se obtiene por composición de las mallas de sus fronteras.

En el método de mallado desarrollado, que se describe en el capítulo III, para evitar zonas de mala calidad de malla en las proximidades de fronteras con cambios bruscos de pendiente, se divide el dominio en bloques de malla (que son también cuadriláteros curvilíneos), y se definen las fronteras que separan estos bloques buscando que la calidad de las celdas sea buena.



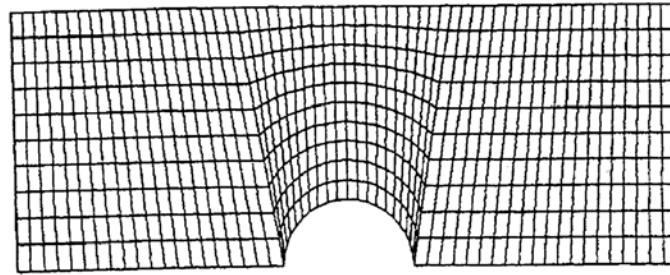


Figura I.44: Mallado mediante interpolación transfinita en un dominio con cambios de pendiente en una de sus fronteras [Tho'98].

### 3.3.3. Métodos que resuelven ecuaciones en derivadas parciales.

La idea de generar la malla resolviendo numéricamente una ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) surge del parecido visual entre las líneas de malla y las líneas de corriente e isolíneas de potencial de las soluciones del flujo potencial incompresible, regidas por la ecuación elíptica de Laplace [Tho'74]. Se han propuesto también métodos que resuelven otros conjuntos de ecuaciones, de tipo parabólico [Tho'85] e hiperbólico [Ste'80].

Los métodos de generación de malla mediante resolución de un conjunto de EDP buscan soluciones de la transformación de coordenadas biunívoca

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{I.108}$$

mapeado entre el espacio físico y el computacional que viene caracterizado por la matriz Jacobiana

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

y para imponer que sea biunívoco, se supone que su Jacobiano es no nulo, es decir  $|J| \neq 0$ .

### Métodos de mallado basados en resolver conjuntos de EDP elípticos.

El método elíptico básico para generación de mallas consiste en obtener la transformación de coordenadas (I.108) resolviendo las ecuaciones elípticas de Laplace del flujo incompresible

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= 0; + \text{condiciones de contorno} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= 0; + \text{condiciones de contorno} \end{aligned} \tag{I.109}$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  denotan las funciones potencial y de corriente. Invirtiendo este sistema (ver por ejemplo [Geo'08]), se tiene un sistema no lineal acoplado de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en términos de las derivadas segundas de  $x$  e  $y$  respecto de  $\xi$  y  $\eta$ . Una vez discretizado, por ejemplo mediante diferencias finitas, se tiene un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse mediante técnicas iterativas, partiendo de una solución inicial que satisfaga las condiciones de frontera.

Los valores  $(x,y)$  obtenidos en cada punto  $(\xi, \eta)$  de la malla computacional son los puntos de la malla en el espacio real.

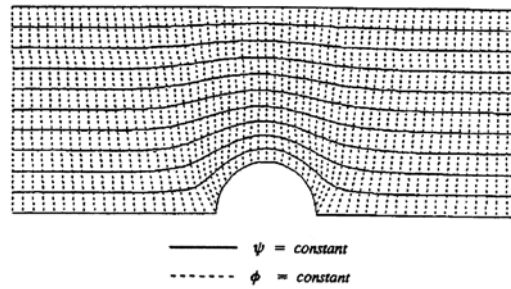


Figura I.45: Ejemplo de flujo potencial, con líneas de corriente e isolíneas de potencial.

Así las líneas de malla, son las *isolíneas* de  $\xi$  y de  $\eta$ , funciones potencial y de corriente, que según indica este mapeado son la imagen en el plano  $XY$  de las *líneas coordenadas*  $\xi$  y de  $\eta$  del plano computacional. En las figuras I.45 y I.46 se representa respectivamente un ejemplo de campo de flujo potencial, y la malla correspondiente mediante el procedimiento descrito.

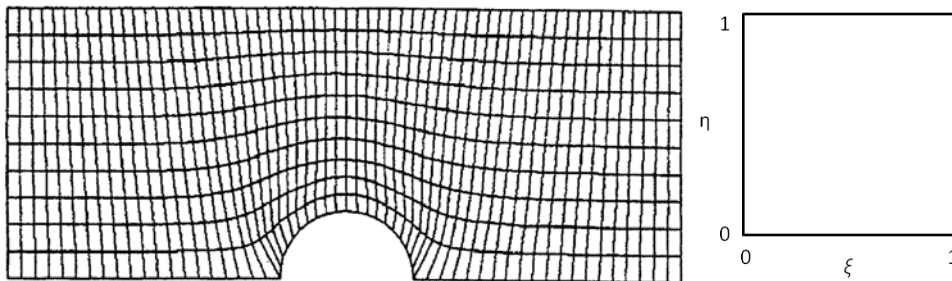


Figura I.46: (izquierda) Malla en el espacio físico, y (derecha) dominio computacional [Tho'98].

Para controlar la distribución de puntos/nudos en el interior de la malla del dominio físico suele emplearse la variante que resuelve las ecuaciones elípticas de Poisson

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= P(\xi, \eta); + \text{condiciones de contorno} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= Q(\xi, \eta); + \text{condiciones de contorno} \end{aligned} \quad (\text{I.110})$$

donde  $P$  y  $Q$  son funciones seleccionadas por el calculista llamadas *funciones de control*, que permiten controlar la distribución de puntos en el interior del dominio, y de cuya correcta elección depende la suavidad y ortogonalidad de la malla [Son'00]. Por ejemplo, los puntos de la malla son atraídos a derecha/izquierda si  $P$  es mayor/menor que cero, y hacia arriba/abajo si  $Q$  es mayor/menor que cero. Eligiendo estas funciones

adecuadamente las líneas coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  pueden concentrarse hacia una línea de malla en concreto, o hacia un punto [Ceb'05].

Este tipo de técnicas de generación de malla tienen el coste añadido de resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales. Su principal ventaja es que dan mallas suaves, y a diferencia de la técnica de interpolación transfinita, no propagan las singularidades (cambios bruscos de pendiente) desde las fronteras hacia el interior.

### 3.3.4. Métodos mejorados de interpolación transfinita.

Como se ha visto, los métodos algebraicos como la interpolación transfinita son muy rápidos pero no dan líneas de malla ortogonales a la pared. Para mejorar la ortogonalidad de las líneas de malla se pueden emplear soluciones de las ecuaciones hiperbólica o elíptica (ver figura I.47), pero esto añade un gran coste a la generación de la malla, y el control de la distribución de densidad de malla es más complejo.

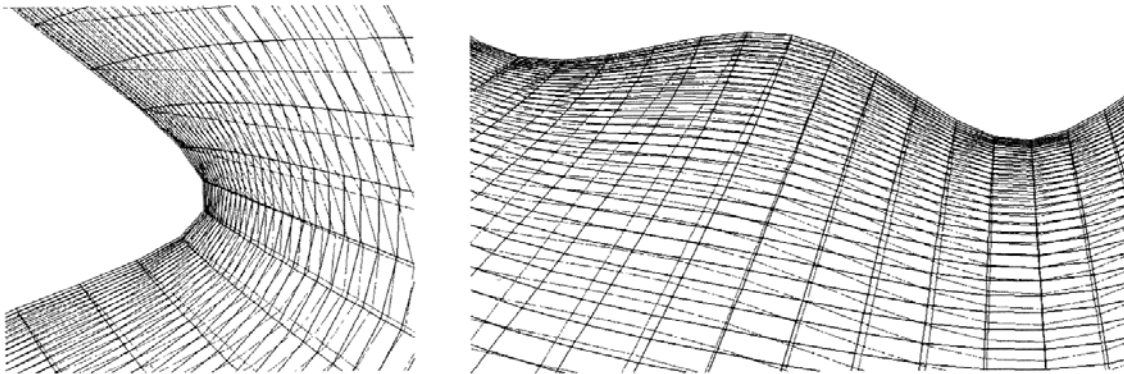


Figura I.47: Comparación entre malla algebraica y malla elíptica en pared con convexidades y concavidades [Son'00].

Para recoger lo mejor de ambos planteamientos, la sencillez de los algebraicos y la robustez de los que resuelven ecuaciones en derivadas parciales, Allen [All'08] ha mejorado la interpolación transfinita introduciendo funciones de interpolación que dan líneas de malla ortogonales a la pared.

## 3.4. MALLAS DESESTRUCTURADAS E HÍBRIDAS.

En la década de los años ochenta del sXX se desarrollaron métodos alternativos de mallado entre los que destacan los métodos desestructurados basados en triángulos en 2D y en tetraedros en 3D.

### 3.4.1. Mallas de triángulos o de tetraedros.

Existen tres tipos de métodos de generación de mallas de triángulos o tetraedros, los métodos de *frente móvil*, los de tipo *Delaunay*, y los basados en la *descomposición octree*.

Los métodos de *frente móvil* [Lo'85] rellenan el interior del dominio avanzando desde las fronteras, y en ocasiones presentan dificultad para ejecutar correctamente la etapa final del mallado, mostrada en la figura I.48.

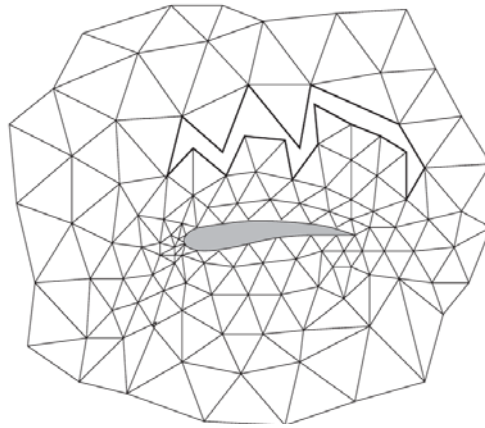


Figura I.48: Etapa de cierre del método de frente móvil [Bak'05].

Los métodos de tipo *Delaunay* primero generan una nube de puntos en el interior del dominio (puntos en negro en la figura 1.49), y a continuación para cada punto se van trazando las mediatrices de segmentos rectos definidos con dicho punto y otro de su alrededor. Como se muestra en la figura I.49, de estas mediatrices que rodean al punto, las más cercanas -al cortarse entre sí- definen un polígono alrededor de dicho punto. Entonces el dominio ha quedado conformado como un mosaico de estos polígonos, llamado *mosaico de Dirichlet*. Finalmente uniendo con segmentos rectos los puntos de polígonos contiguos se obtiene una malla de triángulos [Bak'87; Ceb'05].

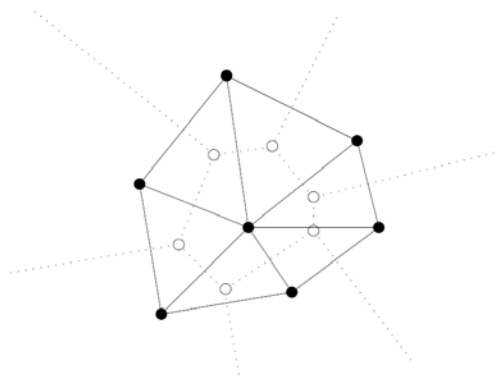


Figura I.49: Mosaico de Dirichlet (línea punteada), y malla de triángulos (puntos negros y línea continua) [Ede'01].

Finalmente, los métodos *octree* [Tho'98] dividen el dominio en rectángulos, y estos se dividen en dos triángulos. En el caso de que un rectángulo corte con una frontera, el rectángulo se divide en cuatro rectángulos, y se sigue esta ley recursiva hasta que la resolución de la malla es suficiente. Este esquema en forma de árbol acelera el proceso de mallado.

### 3.4.2. Mallas de cuadriláteros o hexaedros.

Suelen generarse también mediante técnicas de frente móvil [Bla'91] o tipo octree. Los métodos de frente móvil dan una malla de aspecto pavimentado (*paved*) y en ocasiones no son capaces de cerrar los últimos huecos del dominio con elementos correctos. Este cierre es más difícil cuando la diferencia de tamaño de elemento entre las fronteras es demasiado grande. Este problema puede evitarse modificando ligeramente el número de nudos en alguna frontera, reduciendo la diferencia de tamaño de elemento entre fronteras, o dividiendo el dominio en subdominios para que el frente resulte más fácil de cerrar en su etapa final. Esta falta de robustez en el mallado desaconseja su utilización en sistemas de optimización de forma, ya que hay riesgo de desechar algunos individuos.

Los métodos octree generan las llamadas *mallas cartesianas* dividiendo el dominio en celdas cuadradas (ó cúbicas en 3D) y al encontrar una frontera emplean un algoritmo recurrente. Es un método muy automático, aunque reproducir con exactitud la geometría de la frontera exige un intenso refinado de la malla en esta zona, que aumenta considerablemente el número de celdas [Par'98].

### 3.4.3. Mallado híbrido para capas viscosas.

Para resolver con precisión suficiente y de manera económica capas viscosas, habitualmente capas límite, se usan elementos o celdas de muy poco espesor en las cercanías de la pared, para recoger el elevado gradiente de velocidad en dirección transversal al flujo, pero con longitudes grandes frente a éste, es decir con formas anisotrópicas (alta relación de aspecto), porque las variaciones en dirección longitudinal son mucho menores.

Para esta exigencia son adecuadas las *mallas híbridas*, que combinan una malla estructurada en la proximidad de la pared (a base de prismas triangulares o hexaedros en tres dimensiones, y a base de cuadriláteros en dos dimensiones), con una malla desestructurada en la región exterior del flujo. La combinación de ambas técnicas de generación de mallas permite reducir el número de celdas empleado, ya que los métodos de mallado estructurado permiten un fácil control de la forma anisotrópica necesaria para las celdas próximas a la pared, y las técnicas de mallado desestructurado (como la de frente móvil) permiten que el tamaño de celda crezca hasta las fronteras exteriores de geometría arbitraria, para capturar sin exceso de coste unos gradientes que decrecen al alejarnos de la pared.

## 3.5. MALLADO MULTIBLOQUE.

La estrategia *multibloque* [Lee'80] permite el mallado de dominios de geometría compleja dividiéndolos en bloques más pequeños y sencillos geoméricamente. Los bloques pueden ser vistos como células de una malla gruesa que son mallados de manera individual. Esta *malla de bloques* puede ser estructurada o desestructurada, y

dentro de los bloques las mallas pueden ser estructuradas, desestructuradas o híbridas y son generadas utilizando alguna de las técnicas descritas anteriormente.

En mallas bidimensionales, los bloques suelen tener forma de cuadrilátero curvilíneo, y en tres dimensiones, de hexaedro curvilíneo, aunque pueden usarse otras formas, como el cilindro. La topología del mosaico-malla-estructura de bloques de la malla depende de la geometría del dominio y del flujo, y su correcta elección influye considerablemente en la calidad de la malla [Lis'07]. Algunas topologías ampliamente empleadas alrededor de aeronaves en tres dimensiones, o de perfiles de ala en dos dimensiones, son las topologías *H*, *O* y *C* mostradas en la figura I.50.

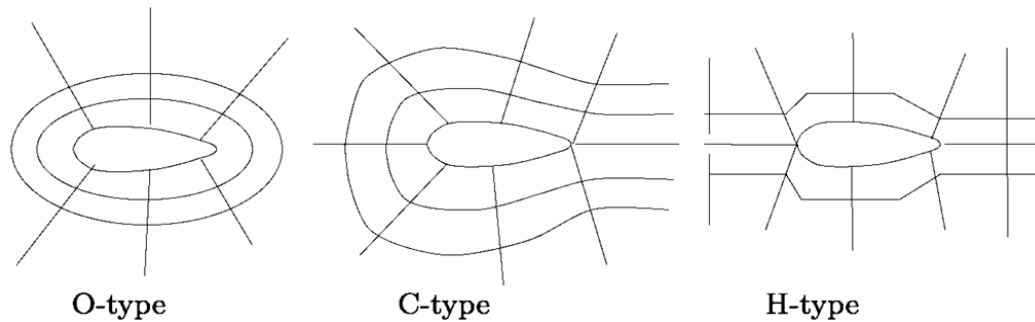


Figura I.50: Topologías en *O*, *C* y *H*. [Geo'08].

Según la continuidad de las líneas de malla a través de las fronteras de los bloques, existen tres tipos de mallas multibloque, dibujados en la figura I.51: las mallas multibloque *superpuestas*, las *parcheadas* y las *compuestas*.

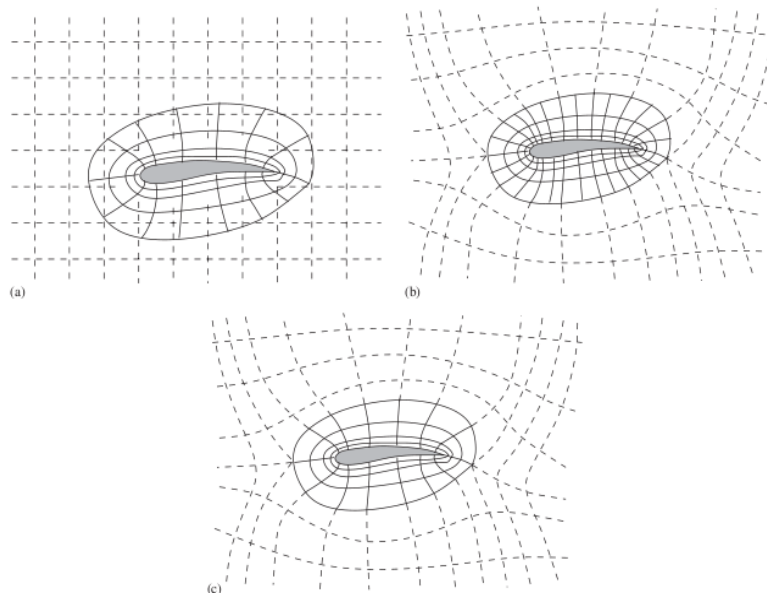


Figura I.51. Mallas multibloque; (izquierda) superpuesta, (b) parcheada, y (c) compuesta [Bak'05].

En las *mallas superpuestas* [Att'81] los bloques contiguos no están conectados, sino superpuestos. Esto facilita el mallado de geometrías complejas o con fronteras móviles, pero obliga a usar fórmulas de interpolación para transferir la información entre los bloques contiguos en las zonas de solape. En las *mallas parcheadas* [Flo'87] coinciden las fronteras entre bloques pero las líneas de malla pueden no ser continuas, dejando

nudos colgados en la frontera. Esto permite realizar densos refinados en algunos bloques sin extenderlos a los contiguos, y simplifica la interpolación en la frontera.

Por su parte en las *mallas multibloque compuestas* [Wea'85] los bloques comparten fronteras y las líneas de malla continúan al atravesarlas. Por este motivo, en mallas estructuradas el refinado de un bloque implica también refinar los bloques contiguos y a través de toda la malla. La interpolación en las uniones de los bloques no presenta complejidad, y debido a esto actualmente es el método de mallado estructurado más ofrecido en programas comerciales.

### 3.5.1. Mallado multibloque automático.

En la generación de mallas multibloque, el dominio es dividido manualmente por el usuario en bloques que serán mallados automáticamente. De esta manera se obtienen mallas de calidad, aunque en geometrías complejas el coste de interacción con el usuario es demasiado elevado [Lis'07]. Por este motivo, en la industria aeronáutica se han utilizado librerías de plantillas de topologías para configuraciones típicas, pero era necesaria una herramienta para construir automáticamente la estructura de bloques en geometrías complejas arbitrarias [Bak'05].

En este sentido, en los campos de la mecánica de sólidos y de fluidos se han desarrollado diferentes técnicas de generación automática de topologías multibloque a partir de la geometría de la superficie, que pueden dividirse en las de tipo octree, y en las que automatizan el trabajo de dividir el dominio. Ejemplos de estrategias de este último tipo son el método del eje mediano [Arm'95], el uso de lógica borrosa junto con técnicas de reconocimiento de patrones [Tak'91;Tag'00;Har'07] y los esquemas anidados [Raj'03].

### 3.5.2. Influencia del tipo de malla en la precisión.

En cinco talleres de predicción del arrastre (DPW, Drag Prediction Workshop) DPWV, celebrados entre 2001 y 2012 [Lev'13] se ha estudiado el efecto de la malla en los resultados del arrastre (y de la sustentación y del momento) en flujos aeronáuticos alrededor de alas y configuraciones ala-cuerpo en régimen transónico previamente ensayadas en túnel de viento. En flujo transónico, el arrastre tiene además de las componentes estudiadas del flujo incompresible, otra componente de presión debida a la onda de choque.

Diversos grupos de investigadores participantes emplearon mallas multibloque de diferentes tipos (superpuestas y compuestas, estructuradas, desestructuradas e híbridas) para varias densidades de malla escalonadas. Se emplearon diferentes *solvers*, diferentes modelos de turbulencia (SST de Menter, Spalart-Allmaras, EARSM, etc, que resuelven la zona de bajo número de Reynolds de la capa límite), todas las mallas contando en la pared con tamaños de celda/elemento con valores de  $y^+$  igual o menor de la unidad. En todos los cálculos se ha modelizado la capa límite como completamente turbulenta.

En estas condiciones, en el tercer taller [Mav'08] se observó que en flujos sin separaciones moderadas el modelo de turbulencia apenas influyó en los resultados. En el conjunto de resultados del quinto taller [Lev'13], se ha observado que en mallas moderadamente densas (por encima de cinco millones de celdas/elementos), salvo excepciones, la diferencia en el arrastre respecto de los experimentos en túnel de viento es inferior al 5%, y que usando una misma nube de puntos en el volumen para construir los diferentes tipos de malla (estructurada a base de hexaedros, desestructurada a base de tetraedros, etc) apenas hay diferencias en los resultados. Así, la mayor dispersión observada en los resultados de los talleres DPW I a IV parece deberse principalmente a las diferencias en la distribución de la densidad de malla en el dominio.

Por otra parte, ensayos en túnel de viento para el perfil naca0012 para cero grados de ángulo de ataque y número de Reynolds de  $6 \cdot 10^6$  [Cro'87] muestran que el adelanto de la transición al borde de ataque producido por la colocación de un alambre en dicha región, provoca un aumento del 40% en el arrastre. Así, es claro que una fuente de error mucho más importante que el tipo de malla reside en la predicción del punto de transición en capas límite transicionales (aquellas que tienen un tramo de flujo laminar y otro de flujo turbulento).

### 3.6. GENERACIÓN DE MALLAS EN DOMINIOS DE GEOMETRÍA VARIABLE.

En problemas de optimización de forma aerodinámica (donde cambia la geometría de la superficie, por ejemplo un ala o perfil), y en problemas de *interacción fluido-estructura* como el análisis aeroelástico (donde el ala se deforma a flexión y torsión), se calculan flujos alrededor de paredes de forma variable y es necesario cambiar la malla para cada nueva geometría, para lo cual es necesario disponer de un algoritmo automático y rápido que produzca mallas correctas.

Ante un cambio en la geometría del dominio fluido, existen dos opciones, rehacer la malla (remallar) o bien recolocar (o perturbar) sus nudos. Reconstruir la malla implica generar automáticamente otra malla de calidad aceptable en la geometría nueva, aumentando la dificultad de esta empresa con la magnitud de las deformaciones experimentadas por las fronteras. El coste de remallar cada nueva geometría es asumible si la malla no es muy compleja o masiva, como ocurre en las mallas bidimensionales. Sin embargo, en flujos de geometría tridimensional las mallas son masivas, y el coste de construir una malla nueva por cada cambio en la geometría es demasiado elevado [Hen'07]; entonces en muchos casos se ha optado por **perturbar** la malla, es decir mover sus nudos interiores para adaptarla al cambio.

Si la malla es **estructurada** el desplazamiento de los nudos interiores puede obtenerse mediante mecanismos algebraicos, como la *interpolación transfinita*, interpolando los desplazamientos de las fronteras [Bha'98; Byu'98]. Este método es rápido, pero no es robusto para grandes desplazamientos-deformaciones porque las líneas de malla se juntan o se pueden cruzar. En concreto en la pared, que es una zona crítica del flujo, la dirección de las líneas de malla se alejará más de la normal a la pared (en la malla inicial es habitual que no sean normales), deteriorando la calidad de la malla.



Para evitar este problema Gaitonde [Gai'95] pondera los desplazamientos para que decaigan con la distancia a la pared, forzando a la malla de sus proximidades a seguirla, manteniéndose así el espaciado y el grado de ortogonalidad en esta zona.

Para mallas **desestructuradas** no son aplicables los métodos algebraicos, y se han usado principalmente dos tipos de estrategias, la *analogía de muelles* y los esquemas *punto a punto*, también válidas para mallas estructuradas.

Los esquemas basados en la *analogía de muelles* [Bat'90; Rob'91] aprovechan la conectividad de los nudos internos. La nueva posición de los nudos interiores se calcula reemplazando los lados de las celdas/elementos que unen los nudos por muelles elásticos cuya rigidez es inversamente proporcional a su longitud elevada a alguna potencia. Entonces, una vez dadas las nuevas posiciones de los nudos de la pared, las longitudes de los muelles (con las que se obtiene la posición de los nudos internos) son calculadas resolviendo un sistema de ecuaciones que implica a todos los nudos. Por este motivo son esquemas relativamente costosos.

Sin embargo, la analogía de muelles no es robusta para grandes deformaciones de la malla [Cru'97]. Una dificultad crítica de estos métodos es el control de la distorsión de las celdas; con este fin se han desarrollado métodos basados en incluir muelles de torsión [Far'98], o en el uso de cuaterniones [Sam'02]. Estos últimos son una extensión de los números complejos, y se emplean aquí para preservar la forma de las celdas en las cercanías de la pared; y también pueden ser usados con interpolación transfinita.

Para mejorar la calidad de las mallas deformadas también se han usado estrategias alternativas más costosas como obtener el campo de deformación de la malla resolviendo ecuaciones en derivadas parciales como la de Laplace [Cru'97] o resolviendo el problema elástico lineal [Tez'92; Cav'97; Hsu'04].

Por su parte los esquemas *punto a punto* mueven cada nudo de manera individual en función de su ubicación en el espacio. Entre ellos destacan los métodos RFB (Radial Basis Functions) [Boe'07; Jak'07] que mueven los nudos de la malla situados afuera de la pared aplicando un campo de desplazamientos. Éste se define en cada punto en función de la distancia a cada uno de los nudos de la pared, como combinación lineal de *funciones radiales*. Los pesos de estas funciones se calculan resolviendo un pequeño sistema de ecuaciones que implica únicamente a los nudos de la pared, lo que supone una notable reducción del coste en relación a los esquemas anteriores.

En mallas de tipo **multibloque** el movimiento de la pared implica cambios en los dos niveles de malla, es decir en las fronteras de los bloques (que habitualmente es una malla desestructurada) y en las mallas interiores de cada bloque. Para cálculos aeroelásticos tridimensionales, es habitual [Hen'07; Tsa'01] calcular el movimiento de las fronteras de los bloques mediante el método de muelles, y a continuación deformar las mallas interiores mediante interpolación transfinita.

### 3.6.1. Método desarrollado de regeneración de malla para geometrías cambiantes.

Como se ha visto, un método adecuado para adaptar mallas a grandes deformaciones-desplazamientos de la geometría, debe dar elementos poco distorsionados en las

proximidades de la pared. Los métodos existentes que dan resultados aceptables en este sentido son muy complejos matemáticamente, y algunos de ellos excesivamente costosos para optimización de forma.

En esta tesis se han sorteado estos obstáculos usando una sencilla estrategia de mallado multibloque (ver capítulo III). Ésta consiste en definir previamente una estructura de bloques adecuada para la geometría del problema y después modificar de un modo simple las fronteras de los bloques para adaptarse a los cambios de geometría buscando mantener una cierta calidad de forma en las celdas, y finalmente regenerar la malla interior de los bloques usando un software comercial que emplea interpolación transfinita. Se ha optado por el uso de mallas estructuradas debido a la robustez del método TFI para generar este tipo de mallas, en contraposición a los métodos de mallado desestructurado disponibles en algunos códigos comerciales.

Teniendo en cuenta las características de la interpolación transfinita, se ha incidido a través de ellas para introducir un cierto grado de control sobre la forma de las celdas. En la interpolación TFI las geometrías de las fronteras del bloque de malla determinan las de las líneas de malla en su interior. Por lo tanto, es posible controlar en cierta medida la calidad de la malla definiendo adecuadamente las fronteras que no son pared, ya que las paredes son dato y por lo tanto no se pueden modificar.

La interpolación transfinita encuentra dificultad para generar mallas estructuradas de calidad en paredes con cambios importantes de pendiente, ya sean estos cambios en puntos singulares o a lo largo de tramos de cierta longitud (ver la geometría de las figuras I.52 y I.53). Para esta situación existen otras opciones, entre ellas se pueden resolver ecuaciones elípticas (ver apartado 3.3.3), o resolver la ecuación Eikonal en la zona estructurada de mallas híbridas para calcular en cada nudo de la pared una buena dirección de las líneas de malla [Wan'06]. Estas dos son técnicas costosas y matemáticamente complejas. También pueden emplearse esquemas de suavizado de malla similares a los métodos de muelles, que resuelven costosos sistemas de ecuaciones, o recolocar manualmente los nudos interiores en las cercanías del cambio de pendiente para mejorar la calidad de la malla, aunque esta última opción necesita de interacción con el usuario, y no sirve para resolver problemas de optimización de manera automatizada (eficiente).

La opción de usar interpolación transfinita es más rápida que las anteriores, pero como muestra la figura I.53 izquierda traza celdas distorsionadas alrededor de estas zonas. Usando interpolación transfinita, la distorsión de las celdas próximas a la pared depende de la dirección de las fronteras de bloque de malla en su nacimiento en la pared y de los cambios de dirección que experimente el tramo de pared limitado por ellas (ver figura I.53 izquierda). Así para minimizar la distorsión de las celdas próximas a la pared se toman dos medidas que atañen a la estructura de bloques de malla. Por un lado se fija el ángulo que forman las fronteras transversales con la pared. Por otro, se colocan fronteras transversales que dividen la pared en varios tramos, para reducir las oscilaciones en la dirección de la pared a lo largo de estos nuevos tramos (ver figuras I.52 y I.53). Así por ejemplo, en la figura I.52 se ha colocado una frontera intermedia en el intradós que evita que haya una gran oscilación de dirección de la pared en algún tramo de ésta, que produciría celdas bastante distorsionadas.

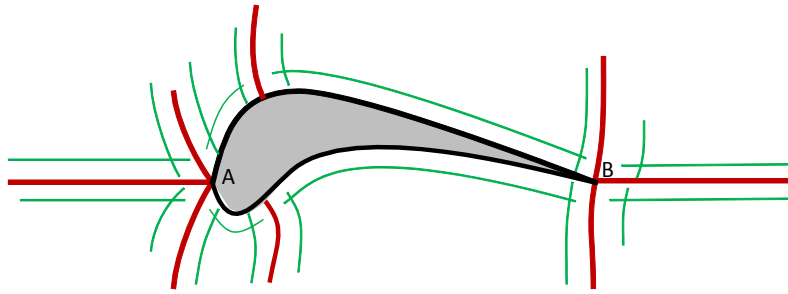


Figura I.52: Esquema de malla bidimensional estructurada multibloque alrededor de un perfil aerodinámico. Fronteras de bloque (en granate) en las proximidades de los puntos singulares A y B de la geometría de la pared, y en zonas de la pared donde hay cambios de pendiente importantes. En verde, líneas de malla próximas a las fronteras.

Usando este método, primero se definen los bloques para ubicar fronteras transversales a la pared en posiciones donde se prevén cambios importantes de dirección de la pared (ver figura I.53 derecha), y si la ubicación de estos cambios no es previsible (como suele ocurrir en optimización de forma de perfiles) entonces se colocan unas en los puntos singulares y otras distribuidas a lo largo de la pared (ver figura I.52). Con esto se acortan los tramos de pared, reduciéndose así la amplitud de los cambios de dirección en cada tramo. De esta manera las líneas de malla que salen de la pared forman ángulos menores con la normal a ésta (ver figuras I.52 y III.46).

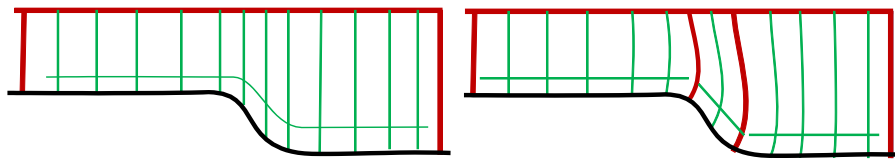


Figura I.53: (izquierda) Malla estructurada con celdas de mala calidad debido a los cambios importantes de pendiente en la pared. (derecha) División en subdominios colocando las fronteras en las zonas de cambio de pendiente.

#### 4. MÉTODOS PARA LA OPTIMIZACIÓN DE FORMA DE PERFILES AERODINÁMICOS.

En la optimización de forma de perfiles aerodinámicos se buscan las geometrías de perfiles que mejor cumplan algún requisito aerodinámico. En este caso, se trata de maximizar una función de los esfuerzos integrales que el flujo realiza sobre el perfil ( $c_a$ ,  $c_l$  y  $c_m$ ), siendo las variables de diseño las que definen la geometría de los perfiles. Se trata por tanto de optimizar una función rendimiento aerodinámico, en el dominio multidimensional en que están definidas las variables de diseño. Esta función no tiene expresión analítica y es muy compleja, y su evaluación muy costosa, pues obtener su valor en un punto del espacio conlleva la realización de un análisis fluidodinámico del flujo correspondiente.

Para acometer este tipo de optimizaciones se han empleado diferentes enfoques, que pueden ser clasificados en dos categorías: métodos de búsqueda global, generalmente estadísticos, entre los que destacan los algoritmos genéticos (GA), que exploran el espacio de búsqueda entero; y métodos de búsqueda local, generalmente deterministas, que incluyen los basados en el cálculo del gradiente o aproximaciones de éste. Los

métodos globales deben realizar un gran número de evaluaciones, mientras que los métodos locales son menos caros, pero tienden a quedar atrapados en extremos locales.

Los métodos de tipo gradiente, como su nombre indica conllevan el cálculo del gradiente de la función objetivo. Estos métodos exploran el espacio de búsqueda empleando un único punto que se mueve por éste en la dirección de la máxima variación de la función, esto es, del gradiente, y permiten encontrar el extremo global para funciones objetivo convexas y diferenciables.

Pero debido a la naturaleza de los flujos alrededor de perfiles, funciones de optimización con relieves tan sencillos como estos no se dan en los problemas de optimización aerodinámica. En general, los paisajes de búsqueda son muy complejos, ya que pequeños cambios de forma del perfil pueden producir grandes cambios en el flujo, como por ejemplo la separación de la capa límite. De esta manera la función objetivo suele presentar múltiples extremos locales. Por otra parte, el ruido numérico debido al uso de mallas groseras, también puede dar extremos locales [Bur'01]. Para que las búsquedas en este tipo de funciones objetivo sean fructíferas, es necesario que el método de optimización tenga gran capacidad de exploración.

Sin embargo, un inconveniente principal de los métodos tipo gradiente es que la búsqueda suele quedar atrapada en los extremos locales, no pudiendo alcanzar de esta manera el extremo global. A fin de reducir este riesgo, cuando se usan este tipo de métodos es recomendable repetir la búsqueda desde diferentes puntos iniciales. Aun así, su fiabilidad y éxito requiere en general de un espacio de búsqueda suave y de la existencia de un único extremo global [Hol'01].

Dentro de los métodos de tipo gradiente existen diferentes tipos de métodos en función de cómo se calcule el gradiente. El enfoque más simple es el *método de diferencias finitas* [Hic'78] y consiste en usar los valores de la función objetivo obtenidos de análisis fluidodinámicos determinados cambiando cada variable de diseño. Si se tienen  $k$  variables de diseño, se necesitan  $k+1$  evaluaciones, una de la geometría inicial y otra para cada perturbación de las  $k$  variables de diseño. Esto supone un gran coste. Por este motivo se han desarrollado otros métodos para reducir el coste de evaluar el gradiente de la función objetivo respecto de las variables de diseño. Entre ellos destaca el *método adjunto* de Jameson [Jam'88], que lo calcula resolviendo una ecuación adjunta derivada de la teoría de control, a un coste similar al de un análisis. Al obtenerse todas las derivadas resolviendo esta ecuación, con independencia del número de variables de diseño empleadas, el ahorro en coste operativo es enorme.

Entre los métodos de tipo estadístico destacan los algoritmos genéticos, que consisten en una búsqueda estadística dirigida por operadores que emulan la teoría de evolución de las especies de Darwin. Para ello emplean una población de puntos o soluciones posibles, a las que se llama *individuos*, que se mueve por el espacio de búsqueda. Los algoritmos genéticos frente a los métodos de tipo gradiente, presentan varias ventajas: no necesitan el cálculo de derivadas, las restricciones se incluyen fácilmente, y trabajan bien en espacios de diseño no suaves con extremos locales. Sin embargo, a diferencia de los métodos de tipo gradiente suelen encontrar cierta dificultad en el afinado de la ubicación de un extremo.

El artículo [Oba'97] compara la eficacia de un algoritmo genético (GA), un método de recocido simulado (éste último es un sencillo método estadístico de búsqueda global) y un método tipo gradiente, para encontrar formas de perfiles en flujo subsónico no viscoso con pocas variables de diseño que maximicen la fuerza de sustentación. Incluso para una función objetivo tan sencilla donde el flujo no presenta complejidades como la capa límite y su posible separación, el método de recocido simulado y el de tipo gradiente no pudieron encontrar el máximo global. A diferencia de ellos, el GA encontró perfiles con una sustentación mucho más elevada, aunque necesitó para ello un número de evaluaciones unas diez veces mayor que los otros métodos.

Los GAs han demostrado su robustez para evitar extremos locales en optimización aerodinámica [Oba'97; Mak'99; Qua'01], así como su validez en problemas con restricciones [Schm'04; Pei'04]. Aunque los GAs no garantizan la obtención del óptimo global, constituyen herramientas fiables para encontrar un mejor diseño [Hol'75]. Los GAs son métodos de exploración, es decir, analizan muchos diseños posibles. Esto no es un problema puesto que a todo individuo con una mala verificación según la función de evaluación le será asignado un valor bajo de aptitud.

Los GAs son también interesantes para búsquedas multiobjetivo, puesto que permite el cálculo de los conjuntos óptimos de Pareto, en lugar de dar una única solución. Su mayor inconveniente en problemas de optimización aerodinámica es el elevado coste total que supone la evaluación de grandes poblaciones a lo largo de muchas generaciones, que generalmente supera por mucho al de un método de tipo gradiente usando el método de diferencias finitas.

Contrastando las respectivas características de los métodos de los GAs y de los métodos tipo gradiente para la optimización de forma aerodinámica, la utilidad de estos últimos está motivada por su reducido coste, pero queda constreñida a búsquedas de diseños mejorados en las cercanías de un diseño inicial. Así, para el tipo de optimizaciones de forma de perfiles que se van a abordar en esta tesis, sobre funciones objetivo complejas definidas en grandes espacios de búsqueda, se optó por el empleo de un GA que usara grandes poblaciones de individuos; en concreto se eligió el GA simple por su conocida generalidad y eficacia en problemas complejos en diferentes áreas de la ingeniería mecánica.

La búsqueda aleatoria por su parte, es un método global (estadístico) muy sencillo que consiste en evaluar la función objetivo en puntos seleccionados de manera aleatoria en el espacio de búsqueda. Esta técnica posibilita la exploración del espacio, pero no garantiza la obtención del extremo global, y es comparativamente muy costosa. Suele usarse para comprobar la eficacia relativa de los GAs respecto de ésta.

Una vez comentado el interés de los GAs para el tipo de búsqueda considerada, se van a exponer sus fundamentos y algunas de sus variantes más usadas, y también las características de la búsqueda aleatoria. Ambos métodos serán usados a lo largo de esta tesis.

## 4.1. ALGORITMOS GENÉTICOS.

A continuación se expone un resumen extraído de la referencia [Avi'96]. Los algoritmos genéticos son técnicas de búsqueda estadística útiles para la optimización de funciones de cualquier naturaleza, que aparecieron en la década de los años sesenta del siglo XX. Una de las características ventajosas de los GAs es que no necesitan evaluar las derivadas de la función a optimizar. Actúan sobre una población de individuos que están definidos mediante un cromosoma, formado por genes.

Los genes pueden ser de diferente tipo, por ejemplo números binarios o números reales de coma flotante. En este caso cada gen contiene un número binario que es el valor de una variable real de coma flotante escrita en código binario. Para el caso de genes en código binario existe una justificación teórica de la tendencia estadística de los algoritmos genéticos a converger hacia la mejor solución del espacio de búsqueda, llamada *teorema de los esquemas*. Aunque los GAs que emplean cromosomas con genes de coma flotante no disponen del mismo soporte teórico, sus resultados muestran una eficacia similar.

Los GAs actúan directamente sobre los cromosomas mediante operadores genéticos que dirigen la búsqueda imitando algunas leyes de la teoría de Darwin de la evolución de las especies. Según esta teoría, en un medio de recursos limitados, tienden a sobrevivir los individuos más aptos, que son los que se reproducen y transmiten sus características a las generaciones siguientes. A diferencia de la teoría de Lamarck, cuya idea se emplea en algunas variantes de los GAs, aquí los individuos no adquieren caracteres modificados que puedan mejorar su aptitud a lo largo de su vida, sino que la información genética que pueden transmitir a la siguiente generación es la misma con la que nacieron.

### 4.1.1. El algoritmo genético simple.

Los operadores básicos del GA son los de *selección y reproducción, cruzamiento y mutación*, y actúan sobre una población de tamaño fijo  $p$  a lo largo de un número predeterminado de generaciones. Estos tres operadores por sí solos son los que definen el denominado GA simple, y aunque se han desarrollado también otros operadores y variantes específicas, estos suelen tener una influencia más secundaria. Algunos de ellos, se expondrán más adelante.

Con estos tres operadores se simula la selección natural para dar al cabo de varias generaciones individuos mejor adaptados al ambiente que sus predecesores. El ambiente artificial en que se desarrolla la evolución de la población es la función que se trata de optimizar, llamada *función objetivo*  $\Phi$ , y el grado en que cada individuo está adaptado a ese entorno se cuantifica mediante el valor de la función objetivo para ese cromosoma, denominado *aptitud*.

La acción de los GAs produce sobre la población de individuos un incremento paulatino del nivel de adaptación a la función objetivo, aplicando sobre aquella de manera secuencial operadores que imitan los procesos evolutivos de la naturaleza. Se genera de manera aleatoria una población inicial  $P(0)$  compuesta de  $p$  individuos representados

mediante sus cromosomas. El hecho de que esta población inicial sea aleatoriamente generada posibilita una mayor exploración del espacio de búsqueda. Aplicando unos operadores genéticos que modifican individuos elegidos de forma probabilística se crea una nueva población  $P(1)$ , y este proceso se repite a lo largo de un número dado  $T$  de generaciones obteniendo sucesivas poblaciones  $P(t)$ , donde  $t$  indica la generación, hasta obtenerse para la última generación  $T$  la población final  $P(T)$ , entre cuyos individuos se encontrará la mejor solución del problema planteado. Este proceso viene recogido en la figura I.54.

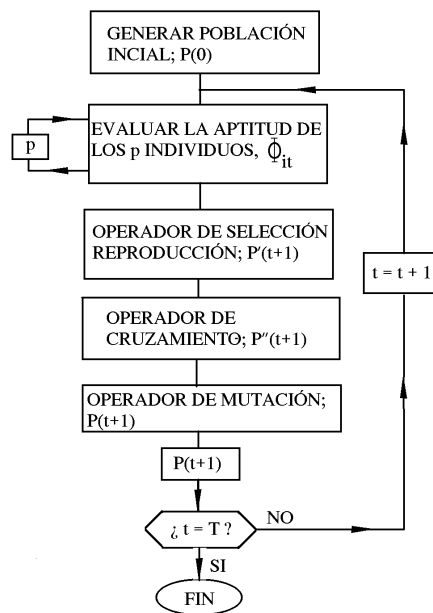


Figura I.54: Secuencia de operaciones en el algoritmo genético simple [Avi'96].

Se puede medir la aptitud de la población de una generación dada  $P(t)$  mediante la suma de los valores de la función objetivo de sus individuos, indicados por  $i$ , en la forma

$$\Psi_t = \sum_{i=1}^p \Phi_{it} \tag{I.111}$$

siendo de esperar que  $\Psi_t$  crezca según aumenta el número de generaciones  $t$ , aunque este crecimiento no sea monótono.

### Operadores básicos.

El GA simple realiza una primera operación de selección, asignado una probabilidad de selección a cada individuo  $s_{it}$  en función de su aptitud que en su forma más sencilla es

$$s_{it} = \frac{\Phi_{it}}{\Psi_t}, \tag{I.112}$$

de esta manera la probabilidad de supervivencia y reproducción de un individuo aumenta con su aptitud. Aunque aptitud y función objetivo no son exactamente el mismo concepto, y podrían tomar diferente valor para los individuos de la población,

generalmente se hacen coincidir. La aptitud siempre debe ser positiva, mientras que determinadas funciones objetivo no lo son. Por sencillez aquí se hablará de aptitud y función objetivo como valores coincidentes. A partir de la población  $P(t)$  compuesta de  $p$  individuos se genera una nueva población  $P'(t+1)$  aplicando  $p$  veces el **operador de selección y reproducción**, que selecciona aleatoriamente individuos de la población antigua mediante el método de Montecarlo, en función de las probabilidades  $s_{it}$ . En esta población, es habitual que existan individuos repetidos, con mayor probabilidad los de mayores valores de  $s_{it}$ .

A la población intermedia  $P'(t+1)$  se le aplica el **operador de cruzamiento**, en función de un parámetro del algoritmo llamado *tasa de cruzamiento* ( $0 < r_c < 1$ ). Para cada individuo de  $P'(t+1)$  se genera un número aleatorio  $r_i$ , comprendido entre 0 y 1, de manera que si es menor que  $r_c$  se selecciona para cruzamiento. Repitiendo este proceso  $p$  veces se tiene un total de  $p_c$  seleccionados. Se buscará que  $p_c$  sea par, y si no lo es se elige aleatoriamente entre las opciones de añadir o quitar uno a  $p_c$ . Si se añade se repite la selección para cruzamiento hasta que se obtenga un individuo más, si se elimina se selecciona uno aleatoriamente para ser eliminado.

A continuación en la opción *sin reemplazamiento generacional*, se toman aleatoriamente  $p/2$  parejas de progenitores, y para cada una de éstas se combinan sus cromosomas para dar  $p_c$  nuevos individuos denominados descendientes, que sustituyen a sus progenitores, con lo que se obtiene la población  $P''(t+1)$  en la que aun existen al menos  $(p-p_c)$  individuos de  $P'(t+1)$ . Se dice "al menos" porque si se emparejan dos cromosomas iguales, sus descendientes serán también este mismo cromosoma. Por su parte, en la opción de *reemplazamiento generacional*, a partir de los  $p_c$  individuos seleccionados para cruzamiento se obtienen  $p/2$  parejas que darán los  $p$  nuevos descendientes de la población ( $P''(t+1)$ ), en la que se han reemplazado todos los individuos, aunque por el mismo motivo anterior también puede haber individuos idénticos a los de la población anterior.

Al operador de cruzamiento se le considera el más importante de los GA por ser el responsable de la combinación de los bloques constructivos que controlan la convergencia.

La combinación de los cromosomas puede hacerse de diferentes maneras, una típica es el *cruzamiento de punto doble*, donde aleatoriamente se generan las posiciones de corte  $k_1$  y  $k_2$ , menores que la longitud del cromosoma, intercambiando seguidamente los trozos de cromosomas de ambos progenitores a derecha e izquierda del gen de posición  $k$ . En la figura I.55 se expone un ejemplo de cruzamiento de punto doble de dos cromosomas con 17 genes binarios.

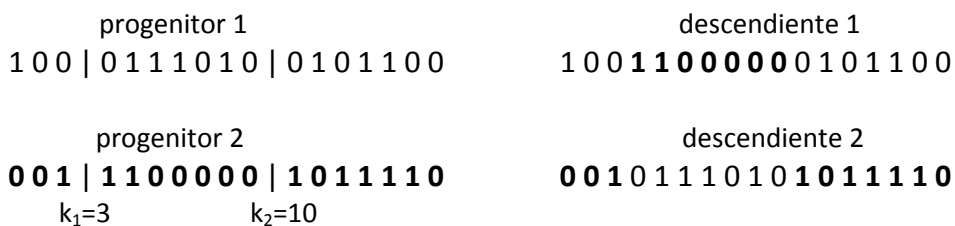


Figura I.55. Cruzamiento de punto doble con puntos de corte tres y diez en un cromosoma binario de longitud diecisiete.



El **operador de mutación**, trata de mantener la posibilidad de exploración de cualquier zona del espacio de búsqueda introduciendo pequeños cambios en la población  $P^{(t+1)}$  de manera aleatoria. Para ello se alteran una cantidad de genes que viene dada por el parámetro *tasa de mutación*  $r_m$  en tanto por uno. La *mutación uniforme* consiste en cambiar el valor del alelo del gen aleatoriamente seleccionado. Existen otros tipos de operadores de mutación, pero quedan fuera del alcance de este texto.

El operador de mutación además previene de la pérdida de información genética interesante que pudiera haber estado contenida en individuos de baja aptitud, cuya información genética tiende a ser eliminada. Para la tasa de mutación suelen tomarse valores pequeños, del orden de centésimas o milésimas, ya que el efecto de tomar valores más elevados es destruir muchos cromosomas generados por los operadores anteriores, tendiendo a convertir el GA en un algoritmo de búsqueda aleatoria.

Una vez aplicado el operador de mutación se obtiene la población  $P^{(t+1)}$ , este es el final de la iteración, y entonces se evalúa la función objetivo de todos los individuos que no existían en  $P^{(t)}$ . Lo esperado es que la aptitud de la nueva población  $\Psi_{t+1}$  sea por término medio mejor que  $\Psi_t$ . El proceso de aplicación de los operadores se repite sucesivamente de esta manera hasta que se verifique el criterio de convergencia, que puede ser el número máximo de iteraciones  $T$ , u otro que se haya fijado previamente. A continuación, el calculista puede comenzar la búsqueda del individuo idóneo entre los disponibles en la población  $P^{(T)}$ . Una ventaja de los GAs es que producen diferentes soluciones para un mismo problema entre las que se puede elegir teniendo en cuenta criterios que no hayan sido introducidos en la función objetivo.

Conviene apuntar aquí que la capacidad de convergencia del GA simple hacia las mejores soluciones de un espacio de búsqueda dado, depende de las características de la función objetivo. En general se hace necesario un ajuste de los parámetros de la búsqueda (tamaño de población, tasa de cruzamiento y de mutación) para poder extraer un buen rendimiento del GA en un problema dado. Cuanto más compleja sea la función objetivo (por ejemplo por ser multimodal, es decir presentar muchos extremos) y mayor sea el número de variables de diseño, mayor es la necesidad de exploración del ambiente, y por lo tanto serán necesarias poblaciones más grandes; o en caso de ser éstas de tamaño moderado por limitaciones de coste operativo, el valor de la tasa de mutación deberá ser relativamente elevado para proporcionar un grado de exploración suficiente.

### **Teorema de los esquemas.**

El denominado Teorema de los Esquemas de Holland, o Teorema Fundamental de los Algoritmos Genéticos, demuestra para el caso de cromosomas con genes de tipo binario, que ciertas partes de los cromosomas, denominadas bloques constructivos, una vez aplicados los operadores de selección y reproducción, cruzamiento y mutación tienden a multiplicar su número a lo largo de las sucesivas generaciones.

Los *esquemas* son plantillas de genes, cadenas formadas por los bits binarios 0, 1 y el carácter \* que representa la posibilidad de cualquiera de ambos. Cada cromosoma

concreto lleva asociados un gran número de esquemas. La aptitud de un esquema es la media de las aptitudes de los cromosomas que lo contienen en la población de una generación. Holland obtuvo una expresión que indica el número de copias de un esquema particular en la siguiente generación después de haber sido aplicados los operadores de selección y reproducción, cruzamiento y mutación, mediante la que se muestra cómo los esquemas particularmente buenos se multiplican en las generaciones siguientes. A estos esquemas de corta longitud y buena aptitud que son preferidos por la evolución se les denomina *bloques constructivos*.

Como estos bloques son de aptitud elevada, la calidad o adaptación de la población tiende a mejorar con el tiempo, haciendo que la búsqueda aleatoria sea sistemáticamente dirigida hacia la obtención de los valores óptimos de la función objetivo.

Para el caso de otro tipo de genes, como los que contienen números reales, aunque no existe una demostración similar, la experiencia de los resultados indica que el comportamiento es análogo al de los GAs con cromosomas binarios.

#### **4.1.2. Otros operadores.**

A fin de mejorar las prestaciones del GA simple, se han probado modificaciones que tratan de lograr un mayor control sobre el punto de equilibrio entre explotación y exploración, y entre diversidad de la población y presión selectiva. Estos dos últimos factores están estrechamente relacionados, una excesiva presión selectiva puede ocasionar una convergencia prematura, al haber sido arrastrada y concentrada la población a las cercanías de un extremo local del que no puede escapar. Mientras que poca presión selectiva puede dispersar excesivamente la búsqueda.

#### **Elitismo.**

El elitismo es una de las modificaciones más frecuentemente utilizadas y mejor verificadas. Consiste en preservar los  $e$  mejores individuos que van apareciendo a lo largo del proceso evolutivo, para que no puedan desaparecer por la actuación de los factores probabilísticos en los operadores genéticos. En la referencia [Rud'94] se prueba que un GA simple no converge necesariamente hacia el extremo absoluto, pero sin embargo sí lo hace un modelo elitista.

El algoritmo de *elitismo externo*, almacena los  $e$  mejores individuos en un fichero, sin que estos alteren el proceso evolutivo del GA simple. Una vez alcanzada la generación  $T$ , el usuario dispone de  $p$  cromosomas de  $P(T)$  más los  $e$  de los mejores individuos registrados.

Por su parte la opción de *elitismo interno* consiste en registrar el mejor individuo (o los  $e$  mejores) en la generación  $(t-1)$ , verificar si este individuo permanece en la generación  $t$  y si no es así incluirlo en  $P(t)$ , eliminando para ello el individuo menos apto, o bien uno seleccionado mediante un criterio probabilístico. Esta opción produce un aumento

de la presión selectiva, ya que el o los mejores individuos tienen garantizada su supervivencia, en detrimento de individuos peor adaptados.

### **Hibridación mediante búsqueda lamarckiana.**

Consiste en modificar algunos individuos de la población para mejorar su adaptación al medio en una generación dada, mejorando con ello la aptitud de la población en su conjunto. Esta adquisición de caracteres puede realizarse mediante la hibridación del GA con un procedimiento de optimización matemática como por ejemplo un método de tipo gradiente. Cada cierto número  $r_1$  de generaciones se elige un conjunto de  $l$  cromosomas de la población, por ejemplo tomando los  $l$  más aptos.

Si esta modificación se aplica cada pocas generaciones y sobre un número grande de individuos entonces se limita la capacidad de exploración del algoritmo en favor de una mayor profundidad, además de aumentar fuertemente el coste operativo. Si por el contrario sólo se eligen pocos individuos y la frecuencia temporal de esta modificación es baja, el algoritmo se acerca más a las características de exploración y explotación habituales de los GAs sin Lamarckismo.

A la combinación en el mismo algoritmo, de un procedimiento que utiliza una población y procesos de recombinación (como un GA) para realizar la búsqueda aproximada de zonas de máximos, junto con uno de búsqueda heurística para la aproximación local fina se denomina *Algoritmos Meméticos*. Este tipo de técnicas de optimización han demostrado ser muy eficaces.

#### **4.1.3. Optimización con restricciones.**

En esta área, a diferencia de lo que ocurre en los métodos clásicos de optimización, en los GAs no existe demasiada experiencia, y la justificación teórica es más bien escasa [Avi'96]. Es habitual en muchos tipos de restricciones no poder saber si un individuo las viola a menos que éste sea calculado (evaluado), por lo tanto este tipo de individuos son inevitables.

En problemas con restricciones no lineales un planteamiento muy usado y sencillo es el de usar funciones de penalización. Cuando un problema de optimización está sujeto a restricciones, estas pueden incorporarse al algoritmo de búsqueda añadiendo sumandos (o alternativamente también factores, como se hará en el capítulo IV) en la función objetivo que reduzca la aptitud en función del grado de violación de aquellas. Penalizando la aptitud de las soluciones que violan las restricciones se puede dirigir la búsqueda hacia zonas válidas del espacio de búsqueda.

El uso de penalizaciones fijas como imponer que la aptitud de un individuo no válido sea simplemente nula, asegura que solo las soluciones válidas formen parte del proceso de cruzamiento, pero de esta manera se puede perder información genética valiosa contenida en bloques constructivos de individuos no válidos [Pea'97]. Por este motivo es más habitual reducir la aptitud de las soluciones no válidas en una cantidad finita

respecto de las que cumplen las restricciones. Así los genes tienen todavía posibilidad de pasar a las siguientes generaciones.

De esta manera, la función objetivo en la que se mide la aptitud, se modifica añadiendo términos de penalización que pueden ser constantes o variables. Supóngase que se desea hacer máxima una función  $\Phi$  dependiente de  $n$  parámetros continuos  $\{x\}$ , sometida a  $c$  restricciones de cualquier tipo; la función objetivo con penalización se puede escribir en la forma:

$$\bar{\Phi}(\{x\}) = \Phi(\{x\}) - r_p \sum_{i=1}^c \varphi_i \quad (\text{I.113})$$

donde  $r_p$  es un coeficiente de penalización y  $\varphi_i$  es la penalización correspondiente a la restricción  $i$ . El coeficiente de ponderación puede ser variable con el tiempo, por ejemplo aumentando a medida que aumenta  $t$ .

La eficacia de la búsqueda usando (I.113) va a depender de una adecuada selección de los valores de penalización. Una penalización muy fuerte puede ocasionar una convergencia prematura, hacia individuos que verifican las restricciones aunque de baja calidad; por el contrario, una penalización insuficiente puede conducir a una población final en la que la mayoría de los individuos violen alguna restricción. No es necesario que todos los individuos verifiquen todas y cada una de las restricciones en cada generación  $t$ , los individuos que las violan, también participan en el proceso evolutivo. Se puede dar el caso de que dos progenitores que violan restricciones, originen descendientes que las satisfacen; y también el caso contrario es posible, es decir progenitores que las verifican y descendientes que no. En la figura I.56 se presenta un posible proceso evolutivo en el que, partiendo de una población inicial en la que todos los individuos satisfacen las restricciones, se llega a una población solución, globalmente de mejor calidad, en la que algunos individuos las verifican y otros no.

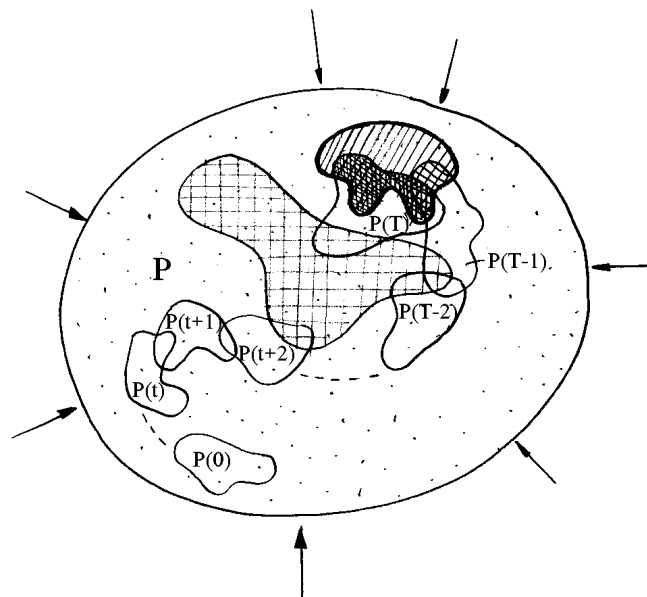


Figura I.56. Poblaciones evolucionando en un GA en presencia de restricciones, los individuos de P que violan algunas de ellas se han agrupado en la región cuadrículada, en la zona rayada se encuentran los mejores individuos [Avi'96].

El método de penalización fija no suele usarse, especialmente en el caso de restricciones que son difíciles de satisfacer, porque los individuos que son casi válidos son penalizados en el mismo grado que aquellos que han fallado por una gran distancia. En estos casos la población oscilará en el espacio de búsqueda hasta que caiga por azar en una región válida.

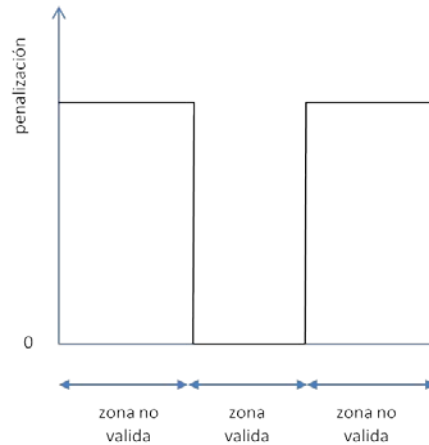


Figura I.57: Penalización fija para la violación de una restricción.

Por este motivo es más habitual usar una penalización gradual, siendo ahora  $\Phi_i$  una función que aumenta con el alejamiento de la zona válida. Así las soluciones que fallan por poco tienen más probabilidad de ser usadas como progenitores, y en consecuencia la población se mueve hacia regiones válidas del espacio de búsqueda. La forma de la penalización va a depender del problema y de la importancia de la restricción. Ejemplos de funciones de penalización son las lineales, polinomiales, exponenciales o escalonadas, algunas de ellas recogidas en la figura I.58.

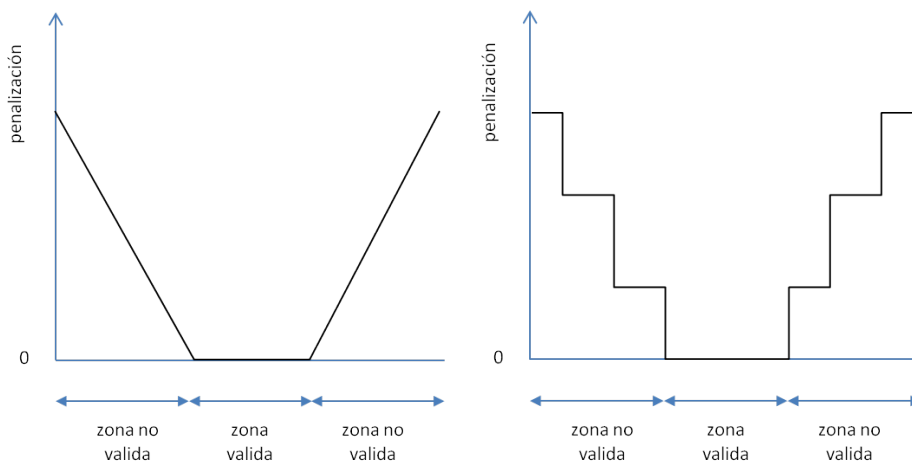


Figura I.58: Diferentes formas de penalización variable para la violación de una restricción.

La definición de las penalizaciones graduales presenta el problema de que es necesario un cierto grado de afinamiento de la magnitud de la penalización y de su variación con el grado de violación para dar la respuesta requerida en el espacio de búsqueda. Incluso se pueden usar penalizaciones que varíen a lo largo del proceso de búsqueda, pequeños

valores al inicio aumentan el número de individuos en las cercanías de la zona válida, y una penalización grande hacia el final fuerza una mayor adherencia a todas las restricciones.

#### **4.2. BÚSQUEDA ALEATORIA.**

La búsqueda aleatoria es un método muy básico de búsqueda que se limita a evaluar la aptitud de soluciones seleccionadas aleatoriamente en el espacio de búsqueda. Pretender encontrar los extremos del espacio de búsqueda usando este método no es útil, pues su coste es obviamente inviable. Sin embargo, el uso de esta técnica también tiene su utilidad. Para nuevos problemas sin resolver tiene su interés el comparar los resultados de un método de búsqueda más avanzado, como por ejemplo un GA, con aquellos obtenidos mediante búsqueda aleatoria para el mismo número de evaluaciones [Siv'07]. No es tan infrecuente que ocurra la circunstancia de que el GA usando una combinación de parámetros determinada no produzca resultados sustancialmente mejores que la búsqueda aleatoria. Esto es posible considerando que el comportamiento de los GAs ante una función objetivo dada es fuertemente dependiente de una codificación válida de los cromosomas y de la elección de unos valores de los parámetros de la búsqueda que se adecúen al paisaje. Por ejemplo, si la tasa de mutación es excesivamente elevada, se pueden romper demasiados cromosomas y ocurrir que la nueva población apenas esté relacionada con la de la generación anterior, en este caso el GA está haciendo una búsqueda aleatoria.

Por otra parte, como técnica de búsqueda en sí misma, la búsqueda aleatoria presenta la ventaja de no poder quedar atrapada en extremos locales, y está garantizado que llega a converger al extremo global si se sigue aumentando el número de evaluaciones, aunque esto carece de utilidad puesto que el tiempo de cálculo que implica explorar todo el espacio es en general inabordable.

**CAPÍTULO II.**  
**ANÁLISIS DE MODELOS DE TURBULENCIA**





## 1. INTRODUCCIÓN.

En este segundo capítulo se aborda la tarea de encontrar un modelo de flujo válido para problemas de optimización de forma de perfiles aerodinámicos. Para que un sistema de optimización sea útil, la herramienta de análisis del flujo que utiliza debe cumplir requisitos de economía y de precisión. Necesariamente ha de ser económica, especialmente cuando se emplean métodos de optimización como los algoritmos genéticos, que evalúan un gran número de individuos a lo largo de muchas generaciones. Además, dicha herramienta debe ser suficientemente precisa, para que las geometrías optimizadas den una mejoría en flujos reales.

La modelización precisa de los flujos de manera económica entraña una gran dificultad, y los diferentes modelos de flujo que van apareciendo tienen sus puntos fuertes y débiles. Una opción habitual en trabajos de investigación en optimización de forma de perfiles aerodinámicos es soslayar este problema usando modelos de flujo simples, que no aspiran a representar la función objetivo de manera muy realista, para centrarse en mejorar aspectos de los métodos de optimización que aplican sobre dicha función. Por ejemplo, en las referencias [Jam'94; Li'02] se optimiza usando el modelo de flujo no viscoso de las ecuaciones de Euler.

Esta tesis se ha centrado inicialmente en desarrollar un método eficaz de optimización mediante algoritmos genéticos [Lóp'08]. Así, al principio se ha empleado un modelo de flujo viscoso RANS con modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$ , pero una vez vistos los resultados, con vistas a mejorar su precisión se ha optado por el uso de un modelo de turbulencia más preciso capaz de modelizar la transición de flujo laminar a turbulento.

Inicialmente se eligió un modelo de turbulencia de tipo  $k-\varepsilon$  porque, entre la gran variedad de modelos de flujo viscoso turbulento disponibles en la literatura y en los programas de simulación, desde la década de los 70 son los más utilizados para el análisis de flujos con elevado número de Reynolds; entre ellos están los modelos estándar, extendido y RNG [Jon'72; Che'87; Yak'92]. Este tipo de modelos se han usado también en optimizaciones de forma de perfiles usando métodos evolutivos [Sha'07; Jah'11; Kha'12] y métodos tipo gradiente como el método adjunto basado en la teoría de control [Moh'97; Zym'10; Pap'16]. También ha sido muy empleado el modelo zonal empírico SST de Menter [Men'94] que modeliza la zona interior de la capa límite con un modelo  $k-\omega$  y con un  $k-\varepsilon$  su zona exterior, ambos mezclados progresivamente. Otro modelo de turbulencia muy popular es el de Spalart-Allmaras [Spa'92] que usa una ecuación empírica para la viscosidad turbulenta, y también se emplea habitualmente en métodos de optimización de forma [Koo'16].

En la referencia [Vill'11] se evaluaron los modelos de turbulencia SST, Spalart-Allmaras (SA),  $k-\varepsilon$  RNG [Yak'92], y un modelo de tensiones de Reynolds [Lau'75], para el análisis de flujos con alto número de Reynolds alrededor de un perfil de turbina eólica para un amplio rango de ángulos de ataque, representativos del tipo de flujo que nos concierne. Los modelos que dieron mejor rendimiento fueron el SST y el SA, y el peor el modelo de tensiones de Reynolds. Este último usa un mayor número de ecuaciones y aproxima un mayor número de términos y presentó problemas en modelizar la recirculación debida al despegue de la capa límite. El modelo SA por su parte, tiene el inconveniente de atenuar la turbulencia únicamente en base a su distancia a la pared; al no considerar la variable disipación, la energía cinética de la turbulencia

permanece constante en la estela. Los modelos dieron posiciones muy dispares del punto de separación para un ángulo de ataque de  $16^\circ$ , que fueron más similares para el SST y el SA.

Eleni y otros [Ele'12] evaluaron el comportamiento de tres modelos de turbulencia ( $k-\varepsilon$  realizable [Shi'95], SA y SST) para el flujo alrededor del perfil simétrico naca 0012 para alto número de Reynolds. El modelo que obtuvo un mayor grado de precisión fue el SST, seguido del SA y por último el  $k-\varepsilon$  realizable. Además, para todos ellos se observó que calculan bastante mejor las capas límites totalmente turbulentas que las capas límite con un tramo laminar, y dieron un mal rendimiento para elevados ángulos de ataque.

Así, la predicción de situaciones del flujo como la transición de flujo laminar a turbulento o el despegue de la capa límite son puntos flacos comunes a todos los modelos de turbulencia mencionados. Los modelos de tipo  $k-\varepsilon$  han sido muy usados durante décadas, pero su popularidad no estriba en su precisión, sino en la eficiencia y en la simplicidad de su formulación, al no ser aún los modelos de transporte de tensiones de Reynolds (RSM) una alternativa efectiva en aplicaciones de diseño. Los modelos  $k-\varepsilon$  dan una precisión razonable en capas límites completamente turbulentas, donde no hay separación o ésta es muy fácil de predecir (como por ejemplo en una esquina), y por ello han sido masivamente usados para calcular este tipo de flujos.

En el artículo [Lop'08] se incluyó un experimento preliminar de optimización de perfiles aerodinámicos para flujo incompresible, que se ha recogido y comentado en el capítulo IV. Se buscaban perfiles que maximizaran el cociente  $c_l/c_d$  para ángulo de ataque nulo, con una restricción de espesor mínimo, en flujos con número de Reynolds elevado, de 4,4 millones. Los análisis fueron realizados usando el programa comercial de CFD llamado Fidap que usa el método de elementos finitos, y se usó el modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$  RNG junto con el modelo de viscosidad turbulenta no lineal de Speziale [Spe'87]. Se tomó un modelo  $k-\varepsilon$ , dada su popularidad, y considerando el elevado coste de la optimización, que implicaba decenas de miles de evaluaciones de la función objetivo. Por este motivo, se emplearon mallas de elementos finitos muy económicas y groseras que permitían análisis rápidos sobre varios ordenadores personales.

Los mejores perfiles encontrados dieron cocientes  $c_l/c_d$  de valor 34, resultado que contrasta por ejemplo con el valor 66 mucho más elevado del perfil conocido naca 4412 (dato obtenido a partir de los ensayos en túnel de viento de la referencia [Abb'59]). Considerando que el espacio de búsqueda incluía perfiles de forma suave con curvaturas de línea media similares a las del perfil naca 4412 (y por tanto con esfuerzos aerodinámicos similares) y que la búsqueda realizada mediante GA fue eficaz (en el sentido de que parece haberse encontrado el máximo global, o al menos diseños muy próximos a éste), se concluye que la causa del reducido valor de los máximos de  $c_l/c_d$  encontrados reside en que el análisis de los flujos tenía un error elevado.

Ante esta situación se quiso mejorar la precisión del análisis, y con ello la utilidad del método de optimización. En el capítulo actual recogemos los pasos dados para ello.

Lo primero fue investigar la precisión de los modelos de elementos finitos con modelos de flujo de tipo  $k-\varepsilon$  en flujos alrededor de perfiles. Para ello se realizó un estudio sistemático de validación de cuatro variantes muy usadas del modelo  $k-\varepsilon$ , disponibles en

el programa Fidap. Para cada una de ellas se calcularon flujos alrededor de varios perfiles de características conocidas, para varios ángulos de ataque, y empleando diferentes densidades de malla. Se quería conocer la magnitud del error, y si éste se debía principalmente a las mallas o al modelo de flujo, y si alguna variante de modelo k- $\epsilon$  era más precisa que las demás para este tipo de flujos.

A lo largo de estos cálculos se comprobó que el error era grande y generalizado en todas las variantes de modelos k- $\epsilon$  investigadas, incluso para mallas de gran densidad. Por lo tanto, la falta de precisión no se debía a las mallas, sino al modelo de flujo, es decir a los modelos k- $\epsilon$  empleados.

Los cuatro modelos k- $\epsilon$  probados en los cálculos daban un error similar; estos son el modelo k- $\epsilon$  estándar y tres de sus variantes, consistentes éstas en añadir algunos términos y modificaciones al primero para mejorar la predicción de algunos efectos físicos. Entonces se optó por intentar mejorar el rendimiento del modelo k- $\epsilon$  estándar. Esta idea se basaba en que las constantes de cierre de este modelo fueron ajustadas para obtener buenos resultados en diferentes tipos de flujos [Fid'98], pero no exclusivamente para flujos alrededor de perfiles. Esto sugería que podría haber un margen de mejora de la precisión optimizando sus constantes de cierre, de manera exclusiva para flujos alrededor de perfiles aerodinámicos.

Así se optimizaron las constantes de cierre de este modelo mediante búsqueda aleatoria, para minimizar los errores en los esfuerzos aerodinámicos sobre un grupo de perfiles de forma variada [Lop'10]. Sin embargo, los resultados de esta optimización no fueron muy positivos.

Los diferentes modelos de flujo existentes tratan de capturar de manera sencilla en sus términos los mecanismos físicos de los flujos. De este modo, con idea de mejorar el análisis, se realizó una revisión bibliográfica para investigar el planteamiento de los modelos k- $\epsilon$  y la causa de sus errores (apartado cuarto), y necesariamente también el de los demás tipos de modelos de flujo, para poder confrontarlos como posible alternativa para el análisis de flujos alrededor de perfiles. Por lo tanto, también fue necesario investigar en detalle la física del flujo alrededor de perfiles. Con todo esto ya se estaba en condiciones de seleccionar un modelo de flujo adecuado para este tipo de flujos, y de valorar otras posibles alternativas, para estos cálculos o para líneas futuras de investigación.

Los modelos k- $\epsilon$  permiten modelizar la turbulencia desarrollada con razonable precisión, mientras que los modelos -más complejos- de tensiones de Reynolds (RSM), tienen una capacidad mejorada para recoger los cambios en dichas tensiones provocadas por las deformaciones rápidas del flujo medio. Entre ambos niveles de complejidad se encuentran los modelos no lineales de viscosidad turbulenta, y los modelos explícitos algebraicos de tensiones de Reynolds (EARSM). Sin embargo, ninguno de los planteamientos mencionados hasta ahora es capaz de modelizar correctamente algunos mecanismos fluidodinámicos que se dan en la capa límite, que influyen de manera determinante en los esfuerzos sobre los perfiles, como son la transición de flujo laminar a flujo turbulento, y la separación (por orden de imprecisión).

Para analizar flujos alrededor de perfiles con capas límite transicionales es más adecuado emplear modelos de flujo específicamente diseñados para predecir la

transición. Así Ferrer [Fer'09] obtiene resultados razonablemente precisos para perfiles con y sin rugosidad, usando el código de paneles Xfoil [Dre'89] que emplea el criterio de transición  $e^N$  (ver capítulo I apartado 2.3.2) y el código CFD Fluent con un modelo de turbulencia nuevo que predice la transición [Men'06] (descrito en el apartado I.2.6.1).

Por lo tanto, una vez se hubo comprobado que los modelos  $k-\varepsilon$  no eran los más adecuados para el cálculo de flujos transicionales (reales) alrededor de perfiles, se buscaron otros modelos RANS capaces de predecir la transición. Por otro lado, acababan de ser desarrollados varios modelos de transición RANS [Men'06; Wal'08], que estaban incluidos en el código comercial de volúmenes finitos llamado Fluent. No habiendo modelos de turbulencia de carácter universal válidos para cualquier flujo turbulento, en los últimos tiempos se han diseñado modelos especializados en recoger determinados efectos. Estos se apoyan en conocimiento reciente más detallado de algunos mecanismos físicos de los flujos proporcionado por simulaciones DNS y LES y en desarrollos previos en métodos de análisis.

Los avances en la predicción de la transición [Wal'04; Suz'03] se han condensado en modelos de transición empíricos como el de Menter [Men'06] o fenomenológicos como el de Walters y Colkijat [Wal'08]. Estos modelos activan la turbulencia en función únicamente de variables locales del flujo, es decir, definidas en cada punto del dominio, y así pueden ser utilizados por los códigos CFD. Hasta entonces los métodos de predicción de la transición usaban variables no locales para definir el estado de la capa límite, como el espesor de desplazamiento y el espesor de momento [Sch'00] que conllevaban el cálculo de integrales sobre el espesor de la capa límite. Usando variables locales se reduce el coste computacional y se facilita la implementación de los códigos CFD. El efecto de este tipo de modelos de transición está constreñido a la región de transición.

Finalmente, se ha seleccionado para la optimización de perfiles el modelo de transición  $k-k_t-\omega$  de Walters y Colkijat, porque ha demostrado su validez frente a otros modelos de turbulencia RANS actuales para predecir el comportamiento transicional del flujo en una amplia variedad de tipos de flujo [Wal'08], incluyendo flujos alrededor de perfiles aerodinámicos. Este modelo recoge las fluctuaciones en la capa límite del flujo laminar previas a la transición usando la variable  $k_t$ . Está basado en un modelo de turbulencia simple de dos ecuaciones  $k-\omega$  [Wil'93], al que se añade una tercera ecuación para  $k_t$ , que tiene en cuenta los efectos físicos de la transición natural [Sch'00] y bypass [Zak'05].

En el apartado 5 se ha validado el modelo  $k-k_t-\omega$  para flujos transicionales alrededor de perfiles (del tipo que empleamos en nuestras optimizaciones), realizando análisis sobre varios perfiles conocidos, con diferentes densidades de malla. Los resultados arrojaron una precisión razonable que contrasta con la de los modelos  $k-\varepsilon$ . Sin embargo, este nuevo modelo necesita de mucha mayor resolución en el interior de la capa límite que los modelos  $k-\varepsilon$ , lo que implica el uso de mallas mucho más densas en esta zona, con el consiguiente importante aumento de coste de malla. Los cambios necesarios para incorporar el modelo  $k-k_t-\omega$  al sistema de optimización se muestran en los capítulos III y IV.

## 2. EVALUACIÓN DE MODELOS DE TURBULENCIA DE TIPO $k$ - $\varepsilon$ .

Para evaluar la validez de los modelos  $k$ - $\varepsilon$  para el análisis de flujos con alto número de Reynolds alrededor de perfiles, se hicieron cálculos sistemáticos con cuatro modelos de este tipo, empleando diferentes formas de viscosidad turbulenta. Con estas combinaciones-modelo se calcularon flujos con un número de Reynolds de 6 millones, alrededor de cuatro perfiles conocidos para diferentes ángulos de ataque, y con diferentes densidades de malla. Los resultados se compararon con datos de ensayos en túnel de viento [Abb'59].

Los modelos de turbulencia  $k$ - $\varepsilon$  elegidos fueron el modelo *estándar* [Lau'74], el modelo *extendido* [Che'87], el modelo *RNG* [Yak'92] y el modelo *anisotrópico* [Spe'87], y las tres formas de viscosidad turbulenta las de Boussinesq, Speziale [Spe'87] y Launder [Lau'93]. Con todos ellos se tienen once combinaciones diferentes de modelo de turbulencia y viscosidad turbulenta, y no son doce porque el modelo anisotrópico no es compatible con la viscosidad turbulenta de Boussinesq. Los cálculos se realizaron usando el programa de elementos finitos para CFD Fidap que incluye todas estas opciones. Para los modelos de turbulencia extendido y RNG, el manual de Fidap [Fid'98] recomienda el uso de un conjunto alternativo revisado de constantes (de sus términos) que según asevera mejoran los resultados para flujos turbulentos. Así añadimos otras seis combinaciones entre modelo de turbulencia y viscosidad turbulenta, haciendo un total de 17 combinaciones a calcular.

### 2.1. MODELOS $k$ - $\varepsilon$ .

#### 2.1.1. Modelo $k$ - $\varepsilon$ estándar.

En el capítulo I se explicó el planteamiento del modelo  $k$ - $\varepsilon$  estándar [Lau'74], en el que se basan todas las variantes de modelos  $k$ - $\varepsilon$ . Sus ecuaciones completas para flujo medio incompresible y estacionario son

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ - \left( \frac{P}{\rho} + \frac{2}{3} k \right) \delta_{ij} + 2\nu D_{ij} + \underbrace{2\nu_t D_{ij}}_{-a_{ij} \text{ Boussinesq}} \right\} \quad (\text{II.2})$$

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II.3})$$

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \Pi - \varepsilon \quad (\text{II.4})$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\Pi \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II.5})$$

donde la ecuación (II.1) es la ecuación de conservación de masa, la (II.2) es la de conservación del momento, y (II.4) y (II.5) las ecuaciones de transporte de  $k$  y  $\varepsilon$

respectivamente con las que se obtiene la viscosidad turbulenta (II.3).  $U_i$  y  $P$  denotan la velocidad y presión medias,  $D_{ij}$  la tasa de deformación del flujo medio, y

$$\Pi \equiv 2\nu_t D_{ij} D_{ij} > 0 \quad (\text{II.6})$$

la tasa de producción de energía de la cinética turbulenta  $k$ , siendo los coeficientes de cierre [Lau'74]:

$$(c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, c_{\mu}, \sigma_k, \sigma_{\varepsilon}) = (1.44, 1.92, 0.09, 1, 1.3) \quad (\text{II.7})$$

### 2.1.2. Modelo “extendido”.

El modelo *extendido* de Chen y Kim [Che'87] añade el término  $c_{\varepsilon 3} \Pi^2/k$  a la ecuación de  $\varepsilon$  (II.5) para recoger mejor el mecanismo de transferencia de energía desde el flujo medio a la turbulencia. Así considera además de la escala de tiempo  $k/\varepsilon$  relacionada con la disipación, la escala  $k/\Pi$  ligada a la producción. De esta manera fuertes deformaciones del flujo medio aumentan la generación de  $\varepsilon$ , y las débiles la reducen. En las regiones donde la turbulencia está en equilibrio ( $\Pi=\varepsilon$ ), no hay diferencia apreciable con el modelo estándar dados los valores para  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$  y  $c_{\varepsilon 3}$ . Las constantes de cierre son

$$\sigma_k = 0.75, \sigma_{\varepsilon} = 1.15, c_{\varepsilon 1} = 1.15, c_{\varepsilon 2} = 1.9 \text{ y } c_{\varepsilon 3} = 0.25. \quad (\text{II.8})$$

Los valores de  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$  y  $c_{\varepsilon 3}$  han sido determinados a partir de observaciones en experimentos de decaimiento de turbulencia homogénea (con y sin deformación del flujo medio), y en flujo de pared. Los valores de  $\sigma_k$  y  $\sigma_{\varepsilon}$  se basan en observaciones del borde exterior de la capa límite. El modelo extendido suele dar mejores predicciones que el estándar en flujos con recirculación o curvatura de las líneas de corriente.

Los desarrolladores del programa de CFD Fidap [Fid'98], proponen el siguiente conjunto revisado de valores para estas constantes

$$\sigma_k = 0.75, \sigma_{\varepsilon} = 1.15, c_{\varepsilon 1} = 1.35, c_{\varepsilon 2} = 1.9 \text{ y } c_{\varepsilon 3} = 0.05, \quad (\text{II.9})$$

que mejora la precisión con dicho código para una amplia variedad de flujos turbulentos.

### 2.1.3. Modelo RNG.

El modelo RNG de Yakhot [Yak'92] para considerar los efectos de no equilibrio entre el flujo medio y turbulencia, añade al miembro derecho de la ecuación (II.5) de  $\varepsilon$  el término

$$c_{\mu} \frac{\eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k} \quad (\text{II.10})$$

donde  $\beta = 0.015$ ,  $\eta_0 = 4.38$ , y  $\eta = Dk/\varepsilon$  es el cociente entre la escalas de tiempo de la turbulencia y del flujo medio. La turbulencia se adapta más rápidamente a los cambios

del flujo medio cuanto menor sea  $Dk/\varepsilon$ ; este término reduce la tasa de disipación para deformaciones del flujo medio tales que  $Dk/\varepsilon > 4,38$ .

Las constantes del modelo propuestas por Yakhot son

$$\sigma_k = 0.7179, \sigma_\varepsilon = 0.7179, c_\mu = 0.085, c_{\varepsilon 1} = 1.42, c_{\varepsilon 2} = 1,68 \text{ y } \kappa = 0.3875, \quad (\text{II.11})$$

donde  $\kappa$  es la constante de von Karman que permite obtener en conjunción con las otras constantes del modelo el valor de los coeficientes  $\eta_0$  y  $\beta$ . Y los valores revisados propuestos para ser usados con el programa Fidap son

$$\sigma_k = 0.8, \sigma_\varepsilon = 1.15, c_\mu = 0.085, c_{\varepsilon 1} = 1.45, c_{\varepsilon 2} = 1,83 \text{ y } \kappa = 0.41. \quad (\text{II.12})$$

#### 2.1.4. Modelo k- $\varepsilon$ anisotrópico.

Este modelo [Spe'87] para mejorar la predicción de los efectos anisotrópicos en flujos que presentan fuerte curvatura en las líneas de corriente y fuerzas centrífugas, incluye términos en la ecuación para  $\varepsilon$  basados en modelos de tensiones de Reynolds y emplea una relación de viscosidad turbulenta no lineal (Launder o Speziale) y modifica los coeficientes  $c_{\varepsilon 1}$  y  $c_{\varepsilon 2}$  en función de la anisotropía  $a_{ij}$  del tensor de Reynolds.

#### 2.2.5. Relaciones de viscosidad turbulenta.

Las relaciones de Speziale [Spe'87] y de Launder [Lau'93]; son expansiones de la relación lineal de Boussinesq que han sido diseñadas para mejorar la predicción de la anisotropía  $a_{ij}$  del tensor de Reynolds.

La relación de Boussinesq se escribe

$$-\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + 2v_t D_{ij}. \quad (\text{II.13})$$

La ecuación constitutiva de Speziale le añade términos de segundo grado en los gradientes de velocidad del flujo medio,

$$-\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + 2v_t D_{ij} + 4c_{sp}c_\mu \frac{k}{\varepsilon} v_t \left( D_{ik} D_{kj} + \dot{D}_{ij} - \frac{1}{3}(D_{mn} D_{mn} + \dot{D}_{mm})\delta_{ij} \right) \quad (\text{II.14})$$

donde  $C_{sp}$  vale 1,68 y

$$\dot{D}_{ij} = -\frac{\partial U_i}{\partial x_k} D_{kj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} D_{ki}, \quad (\text{II.15})$$

y la ecuación constitutiva de Launder es de tercer grado y tiene la forma

$$\begin{aligned}
-\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = & -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + 2v_t D_{ij} + 4c_{L1}v_t \frac{k}{\varepsilon} (D_{ik}D_{kj} - \frac{1}{3}D_{mn}D_{mn}\delta_{ij}) - 4c_{L2}v_t \frac{k}{\varepsilon} (\omega_{ik}D_{kj} + \\
& \omega_{jk}D_{ki}) - 4c_{L3}v_t \frac{k}{\varepsilon} (\omega_{ik}\omega_{jk} - \frac{1}{3}\omega_{mn}\omega_{mn}\delta_{ij}) + 8c_{L4}c_\mu v_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} (D_{ki}\omega_{lj} + D_{kj}\omega_{li} - \\
& \frac{2}{3}D_{km}\omega_{lm}\delta_{ij})D_{kl} - 8c_{L5}c_\mu v_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} (D_{ik}D_{jl} - \frac{1}{3}D_{mk}D_{ml}\delta_{ij})D_{kl} + 8c_{L6}c_\mu v_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} D_{ij}D_{kl}D_{kl} - \\
& 8c_{L7}c_\mu v_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} D_{ij}\omega_{kl}\omega_{kl}, \quad (\text{II.16})
\end{aligned}$$

donde  $\omega_{ij}$  es el tensor de vorticidad media, y los valores de las siete constantes  $c_{Li}$  son respectivamente (0.1,0.1,0.26, 1.0, 0, 0.1,0.1).

Los coeficientes de estas dos expansiones de la hipótesis lineal de Boussinesq han sido ajustados empíricamente en capas límite y flujos secundarios en conductos no circulares, aunque la expresión de Launder da mejores resultados en flujos con fuerzas de volumen debidas a la rotación del sistema.

## 2.2. SELECCIÓN DE PERFILES.

Al objeto de recoger una muestra representativa de geometrías de perfiles aerodinámicos, se eligieron para los cálculos los perfiles naca0012, naca4412, naca4424 y naca661-212 que presentan diferente espesor máximo, combadura y distribución de espesores a lo largo de la cuerda.

Como muestra la figura II.1, el naca0012 es un perfil simétrico con un espesor máximo de  $0,12c$ .



Figura II.1: Perfiles usados para comprobar la validez del método de análisis.

El perfil naca4412 tiene la misma distribución de espesores a lo largo de la *línea media*, y su *línea media* presenta una combadura de  $0,04c$  sobre la *línea de cuerda* a una distancia  $0,4c$  desde el borde de entrada. La combadura añade curvatura a las líneas de corriente del flujo para aumentar la fuerza de sustentación.

El perfil naca4424 tiene la misma línea media que el naca4412, pero su espesor a lo largo de la línea media es el doble que en éste.

El perfil naca661-212 con un espesor de  $0,12c$  y ligera combadura, ha sido diseñado con menor radio de curvatura en la nariz y espesor suavemente creciente desde el borde de ataque a lo largo de una mayor distancia, dando en este tramo de pared más largo un



gradiente favorable de presión, que retrasa el punto de mínima presión hasta  $0,6c$ , de manera que para números de Reynolds elevados (del orden de millones) se retrasa la aparición de la turbulencia en la capa límite. Como muestran los datos experimentales (ver figura I.23) este cambio en la geometría produce descensos en el arrastre del orden del 40% para un cierto intervalo de ángulos de ataque de valor pequeño. Esto dibuja en la curva de  $c_d$  frente al ángulo de ataque ó el  $c_l$  un estrecho valle de fondo plano.

### 2.3. DISCRETIZACIÓN, MALLAS Y PROCESADO.

El dominio del flujo se ha modelizado de diferente manera en la zona de pared de la capa límite y en el resto del dominio, esto en Fidap se hace asignando a la pared el tipo de frontera *wall*.

Así, la zona de pared de la capa límite se discretiza usando una capa de *elementos especiales de pared* (ver figuras I.31 y I.33) destinados a modelizar al menos la subcapa viscosa y la capa buffer dentro de la capa límite. Para ello, en estos elementos se usa una función de pared que copia el perfil empírico de velocidad media (I.87) siendo la turbulencia modelizada mediante un modelo algebraico de viscosidad turbulenta (I.91) de cero ecuaciones, con amortiguamiento viscoso de Van Driest.

Se han construido las mallas de manera que casi todos los elementos de esta primera capa parámetro  $\Delta^+$  (ver expresión I.90 y apartado que la contiene) se encuentre entre 30 y 100 para contener la subcapa viscosa y la capa buffer y al mismo tiempo no entrar demasiado en la capa logarítmica, para que haya un número suficiente de elementos en el espesor de la capa límite. En adelante a este parámetro le llamaremos  $y^+$  (*y plus*) como es costumbre en la literatura.

Pero cumplir ese requisito a lo largo de toda la pared no es sencillo. Por ejemplo, en la pequeña región de remanso los valores de  $y^+$  serán casi nulos por la falta de velocidad del flujo en esta zona. Además aquí el perfil de velocidad no se parece a la función de pared, por lo que es inevitable cometer cierto error en esta zona, pero en el conjunto esto no se considera importante al ser una zona muy localizada y con tensiones cortantes muy pequeñas. Más importante es el error que se comete en la predicción de la ubicación del punto de separación de la capa límite (una causa de ello es que en sus cercanías el perfil de velocidad media no se parece a la función de pared) porque de su ubicación depende la distribución de presión y de cortante en la pared. En suma, el uso de un modelo de flujo con función de pared tiene importantes limitaciones, y se ha buscado aquí emplearlo adecuadamente tanteando la altura de la capa de elementos de pared para que el valor del parámetro  $y^+$  de casi todos los elementos se encuentre en el rango (30, 100).

En los elementos finitos situados afuera de la primera capa en la pared, se usa alguna de las combinaciones mencionadas de modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$  y viscosidad turbulenta. Los elementos finitos empleados aquí son cuadriláteros, y en su interior las variables  $U, V, k$  y  $\varepsilon$ , varían de manera lineal, mientras que la presión  $P$  tiene un valor constante.

El dominio bidimensional tomado para el flujo se extiende diez cuerdas aguas arriba, encima y debajo del perfil, y 30 cuerdas aguas abajo. Dicho dominio se dividió en

diferentes subdominios alrededor del perfil, como muestra la figura II.2, para ajustar la densidad de malla a la magnitud de los gradientes del flujo medio y de la turbulencia, usando densidades elevadas en la capa límite y en la estela, y decrecientes en las zonas contiguas a éstas. Los dos primeros subdominios que rodean al perfil fueron discretizados con una malla estructurada de elevada densidad, el primero contiene la capa límite y su unión con el flujo exterior, y en los siguientes subdominios hacia afuera se ha usado una malla desestructurada para proporcionar un rápido crecimiento en el tamaño de elemento. Esto permite reducir el coste total de la malla y mantener formas de calidad en los elementos. Análogamente para la región de la estela se usaron dos subregiones de malla estructurada con longitudes de elemento rápidamente crecientes en dirección transversal y más lentamente en sentido longitudinal aguas abajo. Para imponer el ángulo de ataque del perfil, antes de construir la malla los subdominios geométricos son girados en sentido horario respecto del punto situado en el borde de salida del perfil. Los subdominios adyacentes al perfil se giran el ángulo de ataque, y los subdominios de la estela son girados un ángulo menor cuyo valor fue elegido para que resulten alineados con la estela.

Para estudiar el efecto de la densidad de malla, en los cálculos se usaron mallas cuyo número de elementos varía entre los 6000 y los 200.000, con la misma distribución cualitativa de densidad de malla que en la figura II.2, usando el preprocesador comercial Gambit.

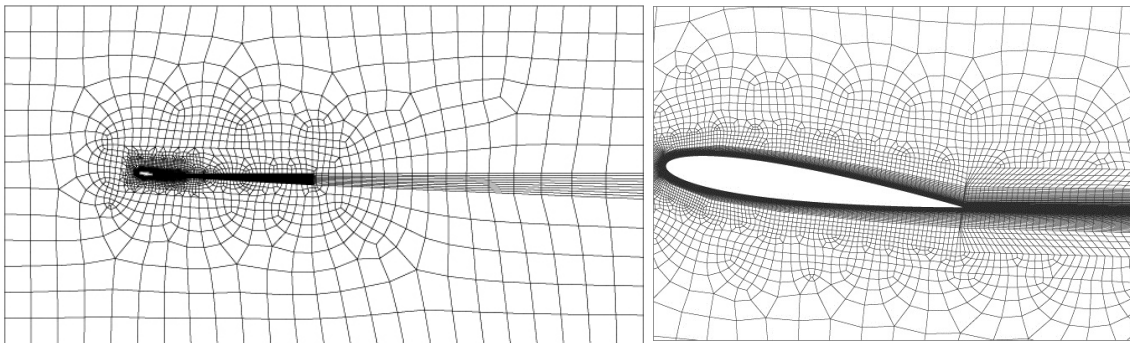


Figura II.2: (izquierda) Malla de 16000 elementos del dominio de fluido, (derecha) y detalle de subregiones contiguas al perfil.

Las condiciones de contorno usadas en la entrada del dominio fueron velocidad uniforme en la entrada, y un valor de energía cinética turbulenta y de disipación correspondientes a una intensidad de turbulencia menor del 1%, mientras que en las otras fronteras exteriores del dominio se impusieron condiciones de gradiente nulo para todas las variables, y en la pared la condición de no deslizamiento, es decir velocidad nula.

La construcción y resolución del sistema de ecuaciones del flujo ha sido realizada mediante el código comercial de CFD Fidap. Se usó un método híbrido de *upwinding* [Bro'82] y las ecuaciones del modelo discreto se resolvieron usando un método segregado empleando factores de relajación habitualmente de 0,4 para suavizar posibles inestabilidades numéricas que puedan hacer divergir el cálculo a lo largo del proceso de resolución iterativo. Para los flujos que divergieron, se repitieron los cálculos aumentando el factor de relajación.

En cuanto al procesado, el modelo  $k-\epsilon$  anisotrópico mostró el comportamiento más inestable, y aunque con este modelo se usaron mayores valores del factor de relajación, los cálculos divergieron con frecuencia como se observa por ejemplo en la figura II.3, donde los puntos que faltan indican cálculos que no convergieron. Por otra parte se ha comprobado que haciendo los cambios de tamaño de elemento suaves en lugar de bruscos, la convergencia suele resultar más estable.

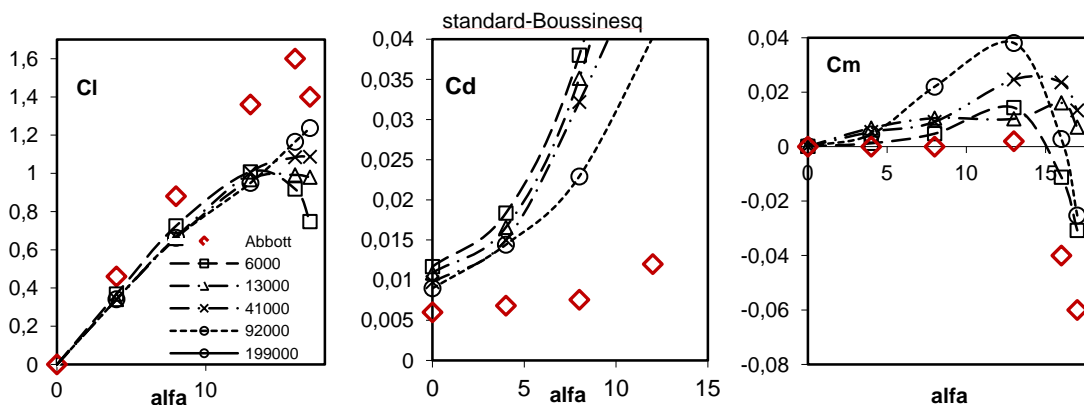
## 2.4. RESULTADOS.

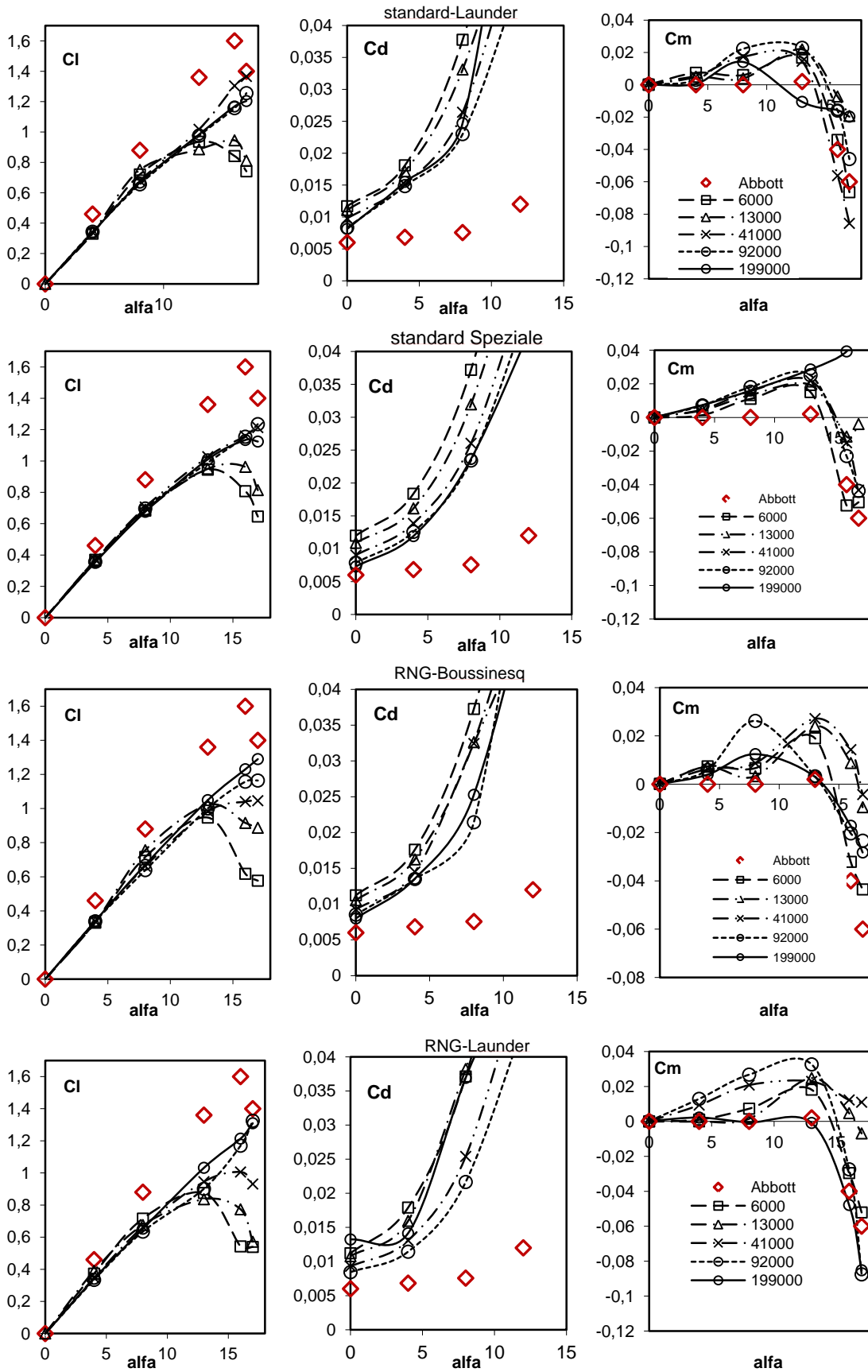
Se testaron las diecisiete mencionadas combinaciones de modelos de turbulencia con modelos de viscosidad turbulenta para flujos alrededor de los cuatro perfiles seleccionados para superficie no rugosa, con un número de Reynolds de 6 millones para diferentes ángulos de ataque (alfa).

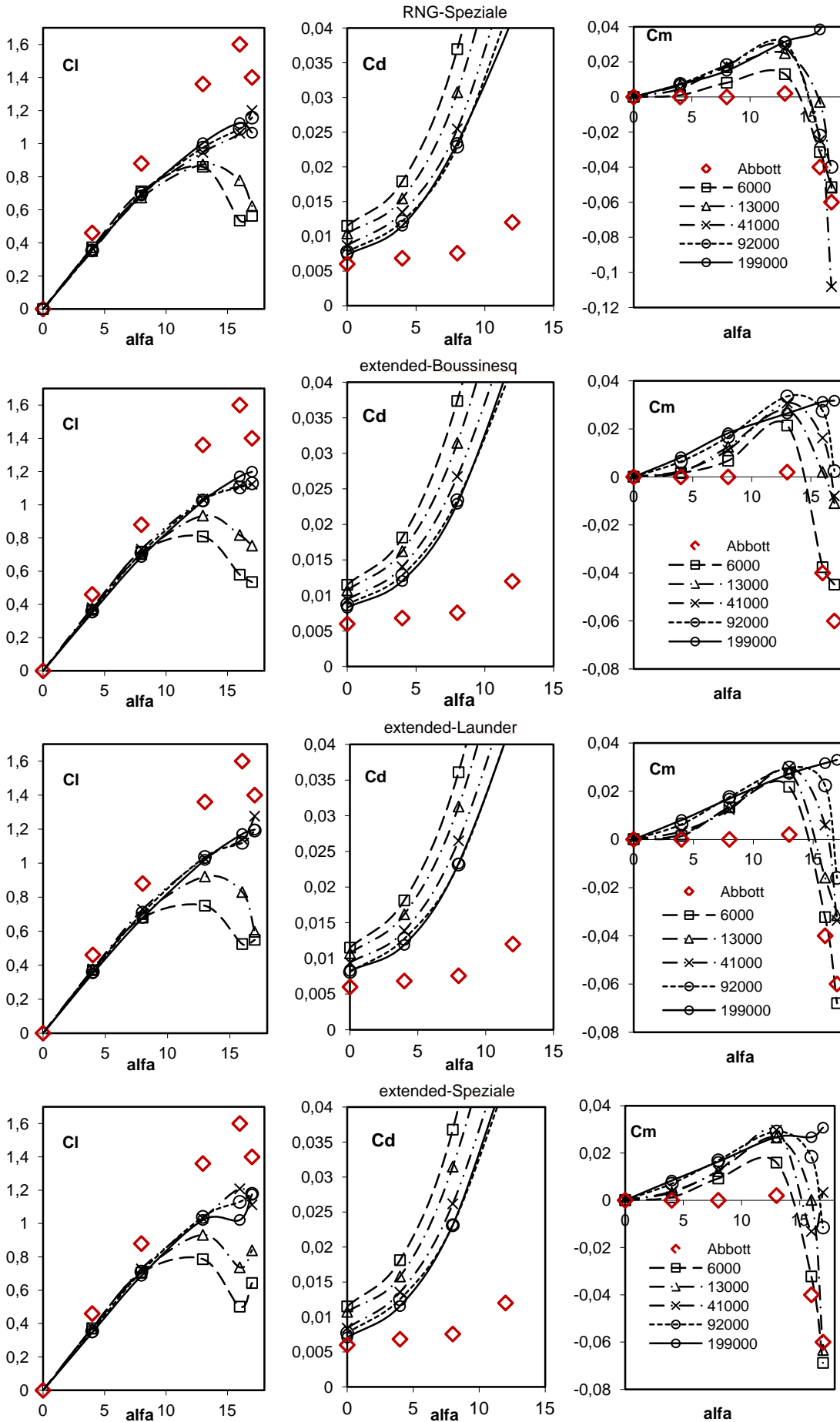
A continuación se recogen una parte significativa de los cálculos realizados, ordenados por perfiles. Para cada perfil se muestran gráficas con los resultados de los coeficientes aerodinámicos  $c_l$ ,  $c_d$  y  $c_m$  -expresiones (I.7)- de los flujos a diferentes ángulos de ataque para diferentes densidades de malla, junto a los correspondientes resultados experimentales recogidos por Abbott y von Doenhoff [Abb'59]. Estos se obtuvieron en el túnel de viento presurizado de Langley, con una intensidad de turbulencia muy reducida, de varias centésimas del 1%. Se hicieron también cálculos de prueba con niveles de turbulencia muy diferentes a la entrada del dominio, que no produjeron diferencias apreciables en los resultados.

### 2.4.1. Perfil naca0012.

En la figura II.3 se muestran los resultados arrojados para este perfil de las once combinaciones posibles entre modelos de turbulencia con constantes originales y modelos de viscosidad turbulenta.







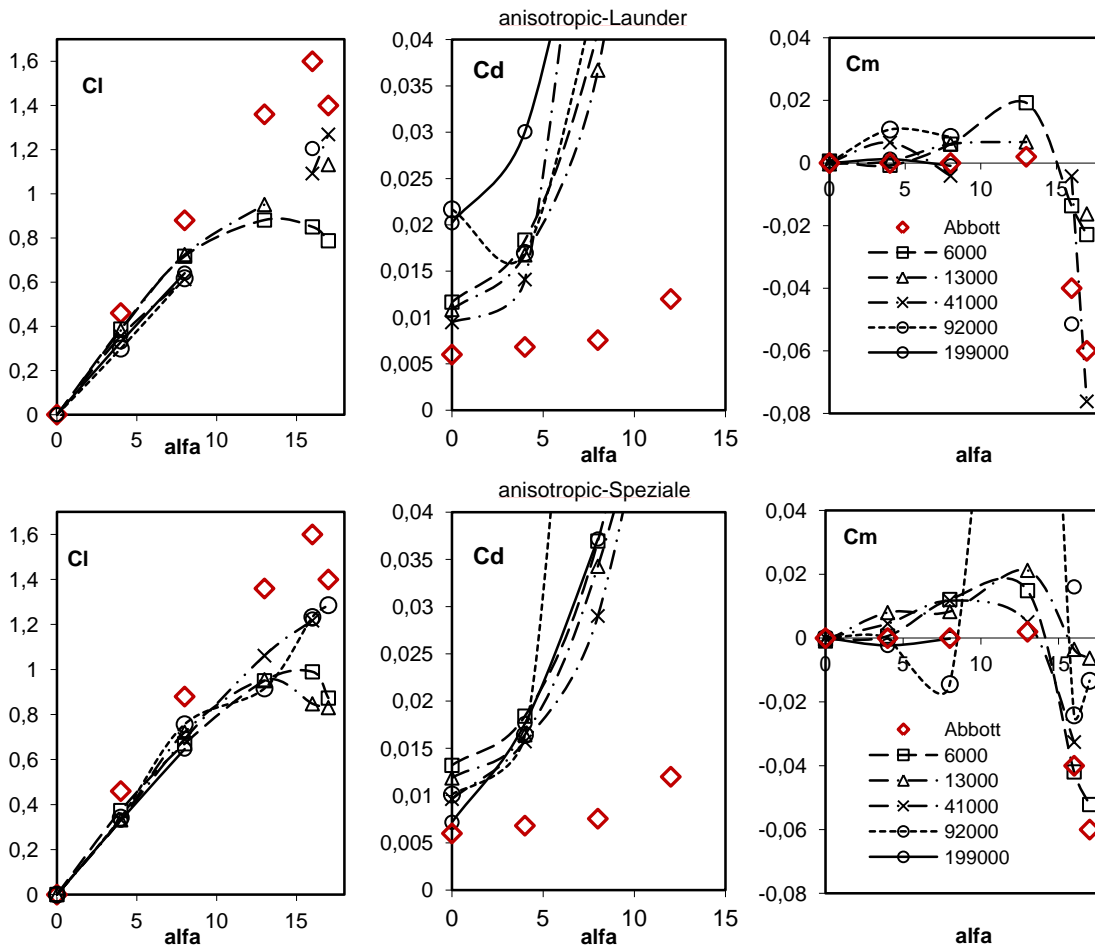


Figura II.3: Resultados de coeficientes aerodinámicos  $c_l$ ,  $c_d$  y  $c_m$  del perfil naca0012 en mallas de diferente densidad (el número total de elementos se especifica en las gráficas de la derecha), para diferentes combinaciones de modelos  $k-\varepsilon$  y ecuaciones constitutivas, y datos de túnel de viento.

En las gráficas anteriores se observa el mismo comportamiento generalizado para las diferentes combinaciones de modelo de turbulencia y viscosidad turbulenta que se comentan a continuación.

Los errores en el coeficiente de arrastre son grandes y por exceso, y aumentan fuertemente con el ángulo de ataque, mientras que con el aumento de densidad de malla estos disminuyen progresivamente. Su orden de magnitud se halla en torno al 50% para ángulo de ataque nulo y mallas de densidad más bien alta. Para densidades muy elevadas tampoco llega a converger a los resultados experimentales.

Los errores en el coeficiente de sustentación son menores que en el arrastre y suelen rondar el 10% para ángulos de ataque moderados y el 30% para ángulos de ataque elevados, próximos al ángulo de entrada en pérdida. Además parece que la predicción de este ángulo de ataque se adelanta según disminuye la densidad de las mallas. Sin embargo para ángulos de ataque pequeños y moderados no se aprecia variación en la precisión de la sustentación con el cambio de densidad de malla.

En cuanto a los resultados del coeficiente de momento, estos en general siguen la tendencia de los experimentos aunque con un cierto error, pero de menor magnitud que en el arrastre.

**2.4.2. Perfil naca4412.**

Para este perfil los resultados de los esfuerzos aerodinámicos siguen las mismas pautas observadas con el perfil naca 0012. Las gráficas de la figura II.4 muestran los resultados del modelo de turbulencia RNG, con constantes originales y revisadas, combinado con la viscosidad turbulenta de Boussinesq. Se comprueba cómo el uso de las constantes revisadas no produce cambios significativos en la precisión.

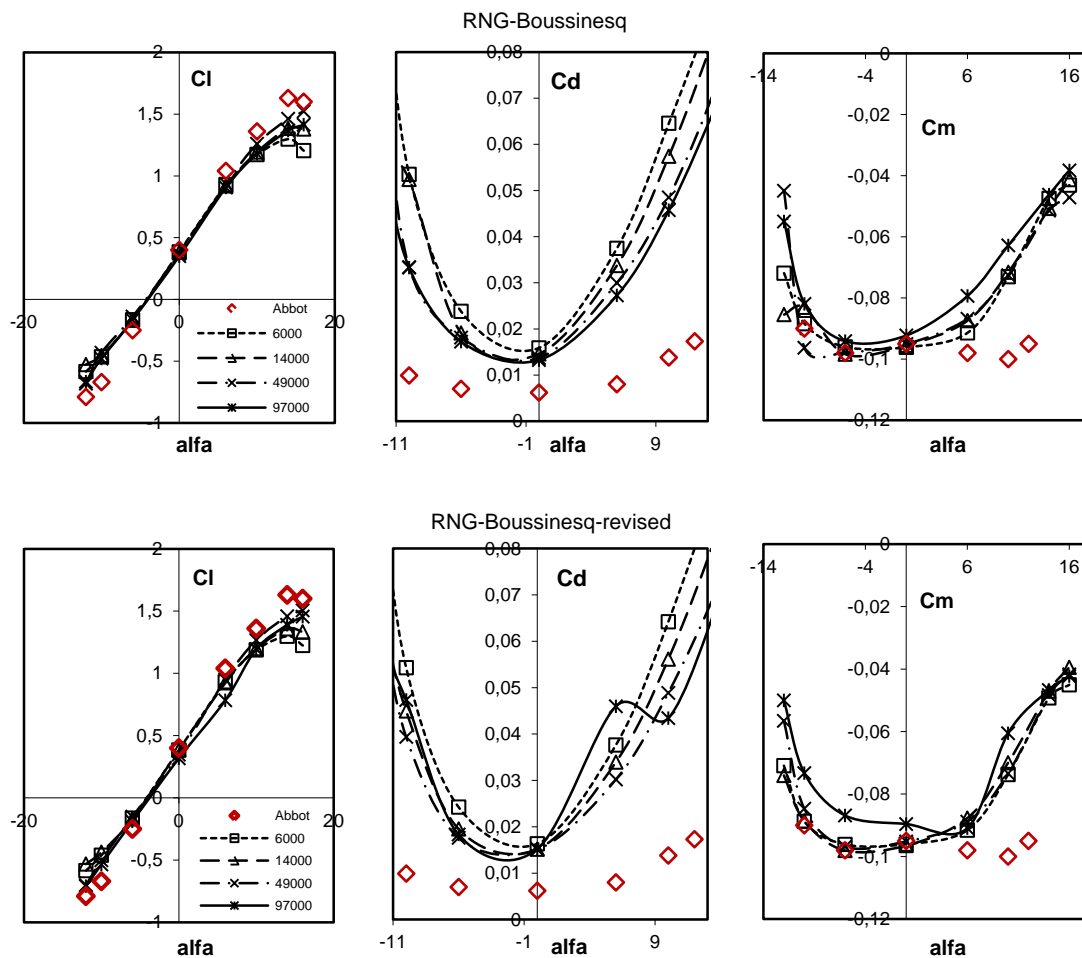


Figura II.4: Perfil naca4412 usando modelo de turbulencia RNG con viscosidad turbulenta de Boussinesq, y abajo con valores modificados para las constantes.

**2.4.3. Perfil naca 4424.**

En la figura II.5 se muestran los resultados para dos combinaciones de modelo de turbulencia (con constantes originales) y viscosidad turbulenta. Las demás combinaciones no produjeron diferencias significativas en los resultados, tal y como ocurre para los perfiles naca0012 y naca 4412 mostrados más arriba. La precisión en los

coeficientes aerodinámicos sigue las mismas tendencias comentadas para el perfil naca 0012.

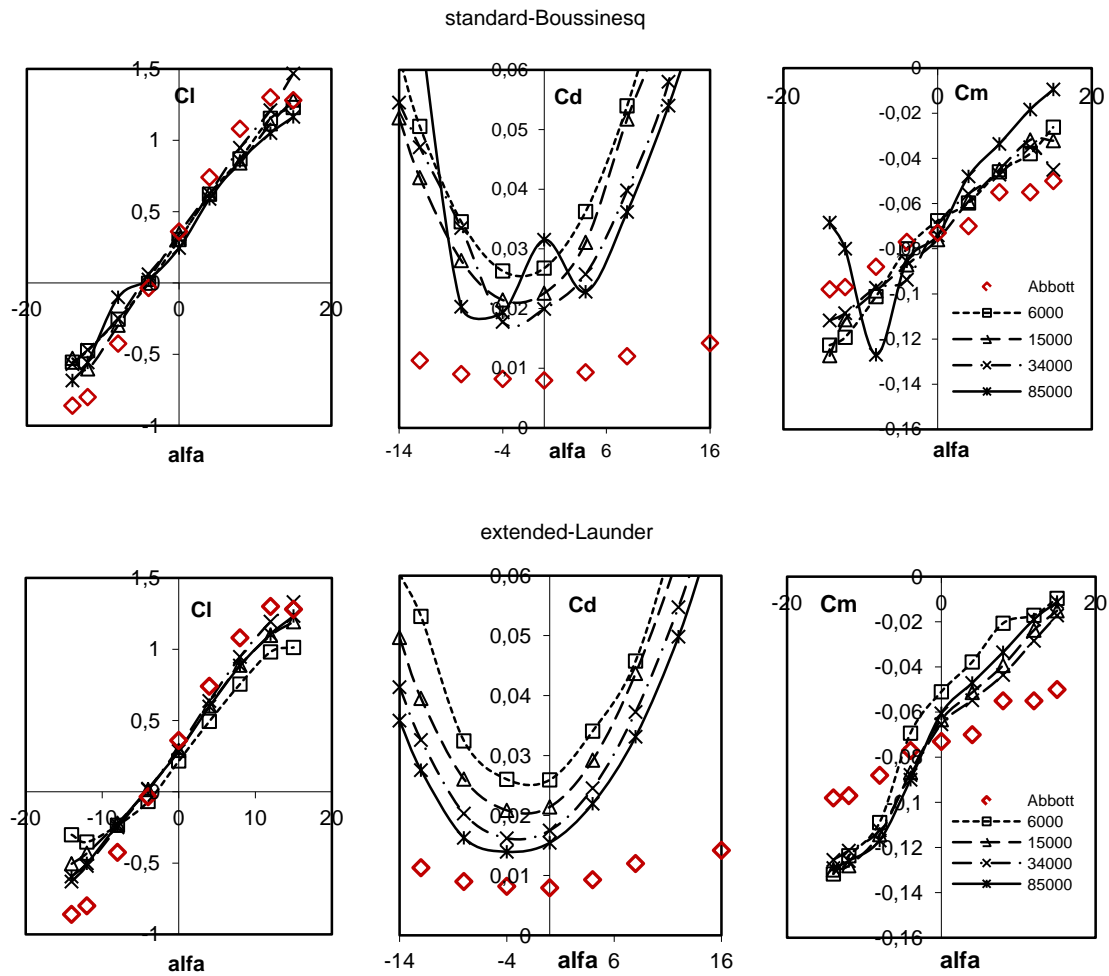


Figura II.5: Resultados de coeficientes aerodinámicos  $c_l$ ,  $c_d$  y  $c_m$  del perfil naca4424 en mallas de diferente densidad, para modelo  $k-\varepsilon$  estándar con viscosidad turbulenta de Boussinesq, y datos de túnel de viento.

#### 2.4.4. Perfil naca661-212

Para este perfil se muestran en la figura II.6 los coeficientes aerodinámicos obtenidos usando la combinación entre modelo  $k-\varepsilon$  estándar y viscosidad turbulenta de Boussinesq. En este caso se han realizado cálculos para más valores de pequeños ángulos de ataque, para comprobar si los modelos predicen el *laminar bucket*, descenso en el arrastre característico de los denominados “perfiles laminares”. Sin embargo, los resultados no lo recogen.



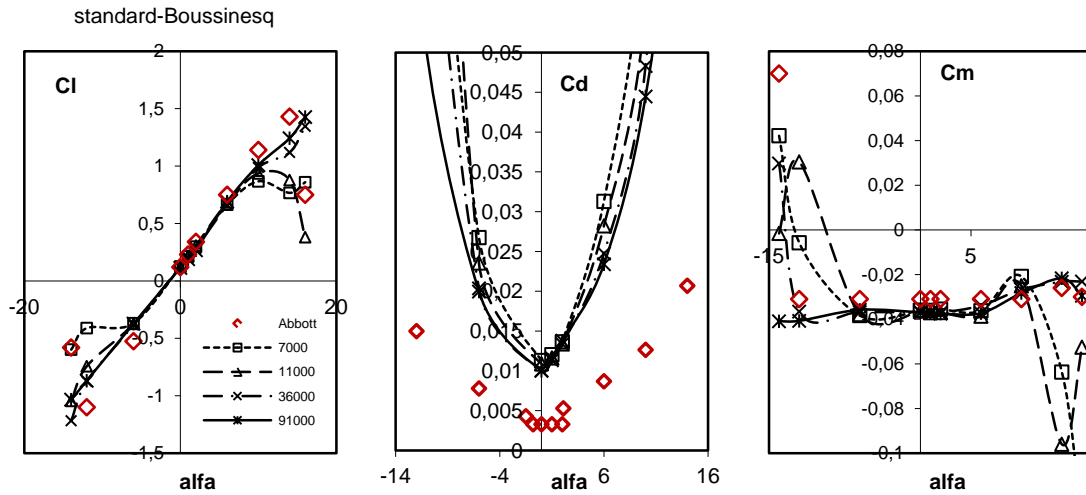


Figura II.6: Resultados de coeficientes aerodinámicos  $c_l, c_d$  y  $c_m$  del perfil naca66<sub>1</sub>-212 en mallas de diferente densidad, para modelo  $k-\epsilon$  estándar con viscosidad turbulenta de Boussinesq, y datos de túnel de viento.

### 2.4.5. Resumen de resultados.

Como resumen de los cálculos realizados para las diferentes combinaciones de modelos de turbulencia y de viscosidad turbulenta sobre los cuatro perfiles, los resultados obtenidos para los esfuerzos aerodinámicos presentan una gran imprecisión. Pero los errores no varían aleatoriamente, sino que hay una serie de rasgos que se repiten con independencia del perfil, del modelo de turbulencia (y de su conjunto de constantes) y de la viscosidad turbulenta utilizados.

En primer lugar se producen grandes errores por exceso en la fuerza de arrastre, que además aumentan fuertemente con el ángulo de ataque. En la fuerza de sustentación, el error es por defecto y de mucha menor magnitud salvo para elevados ángulos de ataque, donde además parece producirse una reducción del ángulo de entrada en pérdida. Para el esfuerzo de momento el nivel de precisión se encuentra entre el de arrastre y el de sustentación y varía más con el perfil.

La densidad de malla influye de la siguiente manera en los resultados: con su descenso los errores aumentaron y las tendencias mencionadas arriba se acentuaron. Las mallas más groseras aumentaron el error especialmente en el arrastre, debido probablemente a la peor resolución de la capa límite, que es donde hay mayores gradientes en las variables del flujo. Esta gran imprecisión de las mallas económicas desaconseja su uso en procesos de optimización que implican decenas de miles de análisis.

Por otra parte, las mallas muy densas, de unos doscientos mil elementos, tampoco llegaron ni de lejos a converger con los resultados experimentales. Este hecho indica que existe una fuente de error independiente de la densidad de malla, debida al modelo de flujo. Como este error es común a las 17 combinaciones evaluadas de modelos de tipo  $k-\epsilon$ , debe tener su origen en el planteamiento que comparten estos modelos  $k-\epsilon$ .

Los modelos  $k-\epsilon$  son económicos, y por ejemplo sus variantes estándar y RNG funcionan bien para el flujo en un conducto con un escalón mirando aguas abajo

[Haq'07]. Este flujo es usado típicamente para mostrar su validez, pero presenta una geometría muy sencilla con un punto de separación fácil de predecir. Sin embargo, en flujos con capa límite con gradientes de presión adversos (este es también el caso del tipo de flujos que nos interesa) estos modelos funcionan peor [Yan'05]. En esta misma dirección, los resultados obtenidos desaconsejan el uso de modelos  $k-\epsilon$  para flujos alrededor de perfiles.

Resumiendo, se ha realizado un estudio para evaluar la precisión de modelos RANS con modelo de turbulencia de tipo  $k-\epsilon$  sobre mallas de elementos finitos. Estos modelos son similares a los empleados en un experimento de optimización preliminar recogido en el capítulo IV y en la referencia [Lop'08], donde se usaron mallas groseras con modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  RNG y viscosidad turbulenta de Speziale. De los resultados obtenidos se extrae que los errores, principalmente en el arrastre, son inaceptables incluso en las mallas de elevada densidad, y que lo mismo ocurre para todas las variantes de modelo  $k-\epsilon$  testadas.

Se concluye así que ni el modelo RNG ni las demás variantes de modelo  $k-\epsilon$  chequeadas son aptas para analizar flujos alrededor de perfiles aerodinámicos, y que por lo tanto no sirven para un sistema de optimización de forma para perfiles.

### **3. OPTIMIZACION DE LOS COEFICIENTES DE CIERRE DE UN MODELO DE TURBULENCIA DE TIPO $k-\epsilon$**

#### **3.1 MOTIVACIÓN.**

Como se ha comentado previamente los modelos  $k-\epsilon$  modelizan solamente la zona de alto número de Reynolds de la capa límite y son populares entre los métodos CFD empleados en optimización de forma, principalmente debido a su sencillez y bajo coste. Pero se ha comprobado que sus errores en flujos alrededor de perfiles son demasiado elevados.

Por su parte, los modelos de turbulencia que modelizan también la zona de bajo número de Reynolds de la capa límite (como el modelo  $k-\omega$  de Wilcox, el SST  $k-\omega$  de Menter, o el modelo de Spalart-Allmaras) tienen en principio un mayor potencial de precisión, pero son mucho más costosos porque requieren en esta zona de una enorme densidad de malla. En efecto, la primera capa de celdas (ó elementos) debe tener típicamente valores del número de Reynolds local  $y^+$  cercanos a la unidad, esto hace que se dispare el número de elementos necesarios para cubrir la capa límite y en consecuencia el coste de malla total. Esto implica un gran aumento del coste operativo de una optimización de forma.

Por otra parte, teniendo en cuenta que la validez de los modelos  $k-\epsilon$  depende también de una correcta elección de los valores de sus constantes de cierre (que ponderan los efectos fluidodinámicos recogidos en los términos de sus ecuaciones, y que han sido obtenidas a partir de flujos canónicos sencillos), se pensó que la optimización de estas constantes específicamente para flujos alrededor de perfiles quizás podría arrojar resultados más precisos para este tipo de flujo.

A continuación, se expone un experimento de optimización, realizado mediante búsqueda aleatoria, para comprobar si es viable optimizar los valores de las constantes para este tipo de flujo. Para ello se eligió el modelo  $k-\varepsilon$  estándar, considerando que los demás modelos de este tipo previamente estudiados, que arrojan resultados muy similares, derivan de él.

Se presenta la optimización de los parámetros de cierre del modelo  $k-\varepsilon$  estándar para flujos alrededor de perfiles alares de superficie suave, utilizando un procedimiento económico de tipo ad-hoc para mejorar su rendimiento en un pequeño grupo de perfiles alares. El objetivo es probar la aplicabilidad de este método de optimización, mostrando que puede producirse una mejora de la precisión del análisis CFD para formas arbitrarias de los perfiles alares.

En este método, los coeficientes de cierre son las variables de la optimización y la función a minimizar contiene los errores en los flujos alrededor de un conjunto de perfiles para varios ángulos de ataque. Después, los resultados obtenidos se aplican a un conjunto alternativo de perfiles para comprobar si también se produce una mejoría.

### 3.2. OPTIMIZACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE CIERRE DEL MODELO $k-\varepsilon$ ESTÁNDAR.

Se van a optimizar los coeficientes de cierre del modelo  $k-\varepsilon$  estándar con relación constitutiva lineal de Boussinesq, recogido en las ecuaciones (II.1) a (II.5). Los valores originales de las constantes de cierre son

$$(C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\mu}, \sigma_k, \sigma_{\varepsilon}) = (1.44, 1.92, 0.09, 1, 1.3), \quad (\text{II.17})$$

y el método de análisis del flujo es el mismo usado en los cálculos del apartado 2 anterior, pero cambiando ahora las constantes de cierre para averiguar la validez de diferentes combinaciones de éstas.

Para mejorar la precisión de este modelo de turbulencia en flujo incompresible con alto número de Reynolds alrededor de perfiles para ángulos de ataque suficientemente menores que el ángulo de entrada en pérdida, los parámetros de cierre pasan a ser las variables de optimización. La función de error a minimizar contiene los errores cometidos en el análisis de una serie de flujos alrededor de perfiles (de un grupo específicamente seleccionado) para varios ángulos de ataque. Posteriormente, algunos de los conjuntos de parámetros que resulten beneficiosos se aplican sobre un grupo alternativo de perfiles para comprobar si también en ellos proporcionan mejoría. Ambos conjuntos de perfiles incluyen una gran variedad de geometrías. Para todos los cálculos se emplearon mallas económicas de unos 16.000 elementos finitos similares a la que se muestra en la figura II.2.

### 3.3. LA FUNCIÓN DE EVALUACIÓN.

Se van a buscar conjuntos de parámetros de cierre que produzcan resultados más estrechamente relacionados con los experimentos en túnel de viento que el conjunto

original (II.17). Para ello se va a minimizar la función de evaluación denotada por  $\Phi$  que se define en la forma

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (w_l \varepsilon_l^{ij})^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (w_d \varepsilon_d^{ij})^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (w_m \varepsilon_m^{ij})^2 \quad (\text{II.18})$$

que es suma ponderada de los cuadrados de los errores en los coeficientes aerodinámicos  $c_l$ ,  $c_d$  y  $c_m$  en nueve flujos con elevado número de Reynolds ( $Re_L=6 \cdot 10^6$ ) alrededor de los tres perfiles de superficie suave naca66-206, naca0012 y naca4424, para los tres respectivos ángulos de ataque: (-4,0,6), (0,4,8) y (-4,0,6). Estos perfiles, que aparecen en la figura II.7 izquierda, han sido seleccionados por reunir espesores, combaduras y formas bastante dispares.

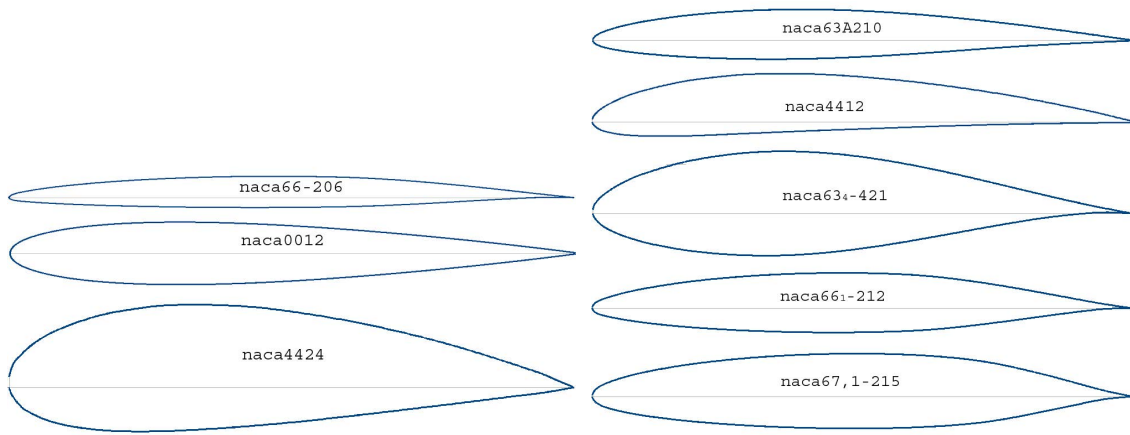


Figura II.7: (izquierda) Perfiles para la función de evaluación, y (derecha) grupo alternativo de perfiles para la función de comprobación.

La letra  $\varepsilon$  denota los errores absolutos, definidos como

$$\varepsilon_l^{ij} = c_l^{ij\text{modelo}} - c_l^{ij\text{exp}}, \quad \varepsilon_d^{ij} = c_d^{ij\text{modelo}} - c_d^{ij\text{exp}}, \quad \varepsilon_m^{ij} = c_m^{ij\text{modelo}} - c_m^{ij\text{exp}} \quad (\text{II.19})$$

donde  $i$  indica el perfil,  $j$  el ángulo de ataque, denotando  $c^{modelo}$  los coeficientes aerodinámicos resultantes del análisis con el modelo de turbulencia con los parámetros actuales y  $c^{exp}$  los correspondientes datos experimentales obtenidos en túnel de viento [Abb'59]. Las constantes  $w_l$ ,  $w_d$  y  $w_m$  son los pesos respectivos de los errores  $\varepsilon_l$ ,  $\varepsilon_d$  y  $\varepsilon_m$  en sustentación, arrastre y momento. Considerando a partir del estudio previo que las magnitudes de los errores  $\varepsilon_l$  son cercanas a 0,1, las de  $\varepsilon_d$  alrededor de 0,01, y las de  $\varepsilon_m$  de valores intermedios, se asignó a los pesos  $W(w_l, w_d, w_m)$  la tríada  $W_1(1,10,5)$ . De presentar los errores en los nuevos modelos una tendencia de variación similar con el ángulo de ataque, los mayores ángulos de ataque contribuirán en mayor medida a la función de evaluación.

### 3.4. LA FUNCIÓN DE COMPROBACIÓN.

Entre el total de conjuntos de constantes de cierre evaluados, algunos de los que produzcan valores de  $\Phi$  menores que el conjunto original (II.10) para el primer grupo de tres perfiles serán después calculados en el grupo alternativo de cinco perfiles de superficie suave de la figura II.7 derecha que incluye geometrías más variadas, para comprobar si también en ellos mejora el comportamiento del modelo de turbulencia. Este nuevo grupo de perfiles lo integran los perfiles naca63A210, naca4412, naca63-421, naca66<sub>1</sub>-212 y naca67,1-215 y cada uno de ellos se calcula respectivamente para la tríada de ángulos de ataque (-4,0,8), (-4,0,8), (-4,0,8), (-4,0,8) y (-4,0,6). Entonces a cada conjunto de constantes le es asignado un valor de la función de error de comprobación denotada por  $\Psi$ ,

$$\Psi = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 (w_l \varepsilon_l^{ij})^2 + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 (w_d \varepsilon_d^{ij})^2 + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 (w_m \varepsilon_m^{ij})^2. \quad (\text{II.20})$$

que presenta una forma análoga a la ecuación (II.19) salvo que ésta suma sobre cinco perfiles, variando  $i$  entre 1 y 5. Como valores de referencia, el conjunto original de constantes de cierre (II.17) da el valor  $\Phi_{orig}=0.416$  en el primer grupo de perfiles, y  $\Psi_{orig}=0,69$  en el grupo alternativo.

### 3.5. OPTIMIZACIÓN MEDIANTE BÚSQUEDA ALEATORIA.

La búsqueda de conjuntos de parámetros de cierre que superen los resultados del modelo original se va a realizar mediante una serie de ejecuciones de búsqueda aleatoria. Cada población es generada a partir de una secuencia de números aleatorios que viene determinada por un número entero -llamado semilla- que es proporcionado por el usuario. El procedimiento de optimización empleado se basa en la búsqueda aleatoria y viene indicado en la figura II.8. Cada individuo de la población es evaluado en el primer grupo de perfiles y le es asignado un valor de  $\Phi$ . Se realizan diez ejecuciones de búsqueda aleatoria sobre poblaciones de 400 individuos, considerando que un número total de cuatro mil individuos es suficiente para una primera exploración en un espacio de búsqueda de cinco dimensiones, cada una de ellas constreñida en un intervalo relativamente estrecho. Con los cinco mejores individuos de cada población se forma una élite de 50 individuos que después son evaluados en el grupo alternativo de perfiles. De esta élite se tomarán los individuos que den un mejor resultado en ambos grupos de perfiles, es decir los menores valores de  $\Phi + \Psi$ .

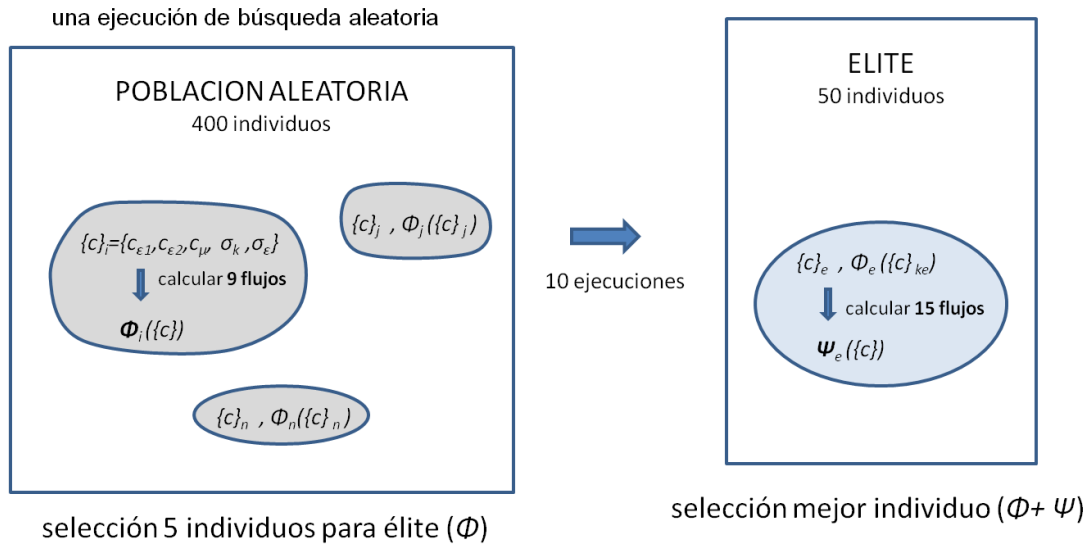


Figura II.8: Procedimiento de optimización.

### 3.6. EJEMPLO DE VALIDACIÓN.

#### 3.6.1. Prueba preliminar.

Como prueba preliminar, se realizó una optimización de búsqueda aleatoria sistemática de los coeficientes de cierre del modelo  $k$ - $\varepsilon$  estándar, con el fin de minimizar la evaluación función  $\Phi$  usando los pesos  $W_1(1,10,5)$  para los respectivos términos de error. Las variables de optimización se definieron en los siguientes rangos:  $[0.77, 2.88]$  para  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $[0.96, 3.84]$  para  $c_{\varepsilon 2}$ ,  $[0.02, 0.18]$  para  $c_{\mu}$ ,  $[0.5, 2]$  para  $\sigma_k$  y  $[0.65, 2.6]$  para  $\sigma_{\varepsilon}$ . La tabla II.1 muestra las constantes de cierre de los 50 individuos de la élite y los respectivos valores de las funciones de error  $\Phi, \Psi$  y de su suma  $\Phi + \Psi$ .

Obsérvese que en los cincuenta individuos los valores de  $c_{\varepsilon 1}$  y  $c_{\varepsilon 2}$  son mayores que los originales; aumentan la generación y la destrucción de  $\varepsilon$ . Con el fin de reflejar la calidad de los modelos de la élite, en la tabla II.2 se muestran los resultados de tres de ellos denotados por A, B y C. El modelo A obtuvo el menor valor de  $\Phi + \Psi$ , el modelo C el peor valor y el modelo B un valor intermedio.

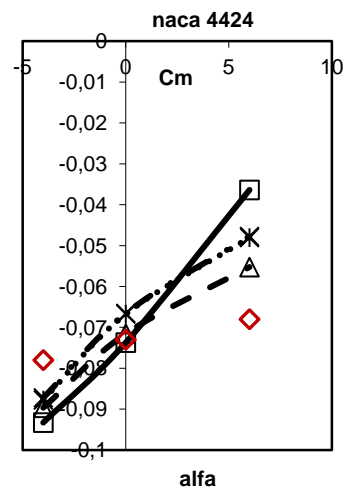
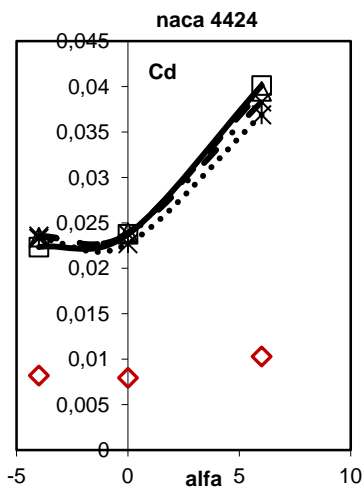
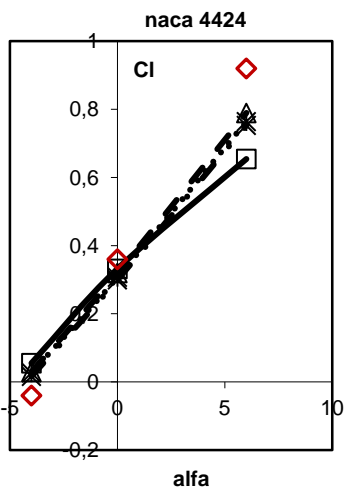
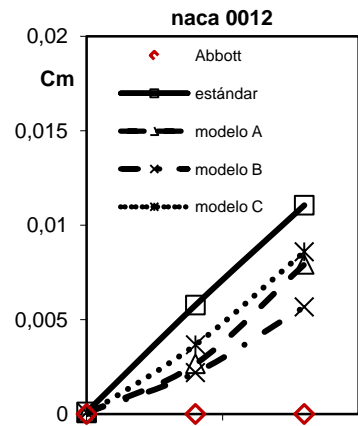
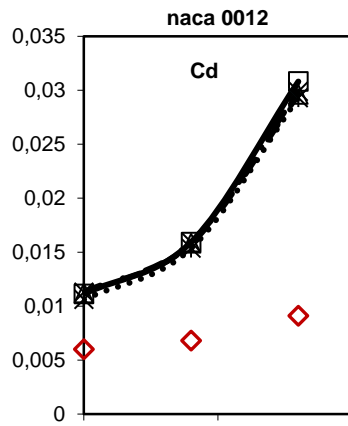
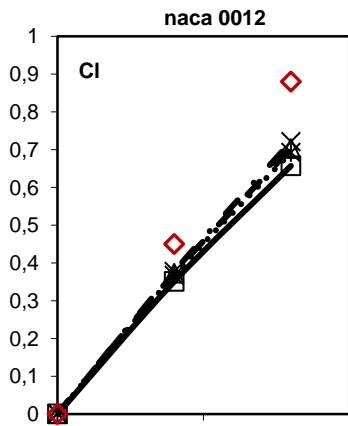
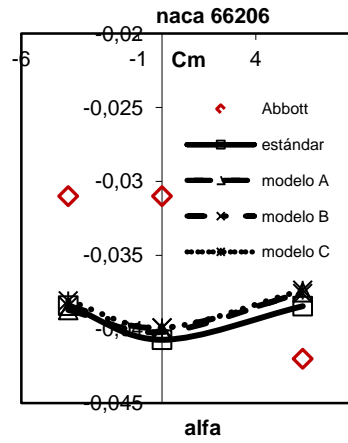
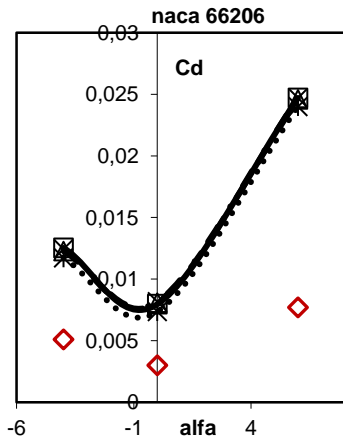
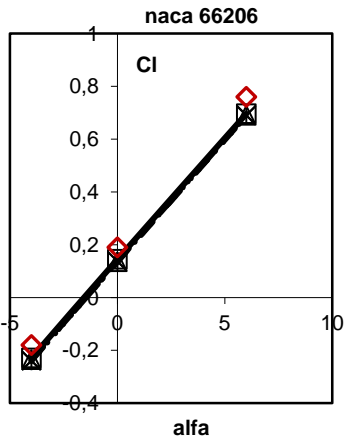
Tabla II.1: Valores de las constantes de cierre y funciones de error  $\Phi, \Psi$ , y  $\Phi+\Psi$  para los cinco mejores individuos obtenidos de cada ejecución de búsqueda aleatoria sobre una población de 400 individuos.

	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\mu}$	$\sigma_k$	$\sigma_{\epsilon}$	$\Phi$	$\Psi$	$\Phi+\Psi$
modelo original	1.44	1.92	0.09	1.0	1.3	0.416	0.690	1.1060
5 mejores 1ª ejec.	2.85	3.32	0.16	1.73	1.93	0.310	0.601	0.9111
	2.44	3.56	0.02	1.72	1.15	0.311	0.589	0.8995
	2.13	3.30	0.02	1.69	1.63	0.312	0.584	0.8960
	2.34	2.84	0.15	1.55	2.17	0.313	0.597	0.9099
	1.98	2.94	0.03	1.62	1.72	0.314	0.595	0.9083
5 mejores 2ª ejec.	2.37	3.10	0.06	1.80	0.95	0.303	0.601	0.9033
	2.78	3.46	0.09	1.69	1.10	0.308	0.591	0.8988
	2.01	3.62	0.02	1.60	1.20	0.308	0.585	0.8935
	2.32	2.93	0.11	1.68	1.69	0.309	0.586	0.8954
	2.40	3.18	0.09	1.36	1.20	0.312	0.590	0.9011
5 mejores 3ª ejec.	2.64	3.78	0.05	1.67	0.71	0.304	0.581	0.8856
	2.54	3.15	0.06	1.86	0.96	0.305	0.608	0.9123
	2.75	3.26	0.14	1.69	1.40	0.308	0.582	0.8898
	2.76	3.32	0.15	1.92	2.15	0.308	0.606	0.9144
	2.33	2.97	0.10	1.56	1.16	0.309	0.590	0.8995
5 mejores 4ª ejec.	2.31	2.85	0.10	1.72	1.22	0.308	0.590	0.8984
	2.54	3.04	0.13	1.58	1.48	0.309	0.590	0.8991
	2.40	2.85	0.11	1.65	1.21	0.309	0.598	0.9073
	1.98	2.89	0.04	1.40	1.10	0.310	0.603	0.9124
	2.24	3.59	0.03	1.62	1.00	0.310	0.590	0.9004
5 mejores 5ª ejec.	2.46	2.90	0.15	1.48	1.35	0.310	0.592	0.9019
	2.34	2.81	0.13	1.95	1.18	0.312	0.631	0.9427
	2.56	3.41	0.05	1.82	1.65	0.313	0.587	0.8999(B)
	1.94	3.79	0.02	0.88	1.35	0.313	0.584	0.8967
	2.72	3.37	0.13	1.15	1.15	0.315	0.588	0.9025
5 mejores 6ª ejec.	2.30	3.05	0.03	1.73	0.71	0.303	0.644	0.9465(C)
	2.35	3.46	0.04	1.34	0.74	0.307	0.586	0.8932
	2.63	3.15	0.17	1.88	2.06	0.308	0.587	0.8954
	2.78	3.84	0.06	1.40	0.69	0.308	0.573	0.8811(A)
	2.59	3.68	0.04	1.21	0.76	0.309	0.584	0.8928
5 mejores 7ª ejec.	2.08	3.45	0.03	1.03	1.00	0.310	0.575	0.8846
	2.71	3.36	0.10	1.79	1.52	0.310	0.600	0.9101
	2.75	3.40	0.17	1.70	1.19	0.310	0.595	0.9054
	2.33	3.51	0.05	1.68	1.00	0.311	0.589	0.8998
	2.41	3.38	0.04	1.40	0.96	0.311	0.589	0.8996
5 mejores 8ª ejec.	2.71	3.38	0.09	1.60	0.85	0.304	0.619	0.9234
	2.82	3.73	0.06	1.57	0.80	0.307	0.588	0.8950
	2.45	3.12	0.10	1.59	1.28	0.307	0.583	0.8900
	2.63	3.56	0.07	1.46	0.85	0.310	0.579	0.8885
	2.83	3.65	0.08	1.63	1.17	0.311	0.590	0.9010
5 mejores 9ª ejec.	2.81	3.24	0.16	1.84	1.61	0.306	0.585	0.8911
	2.25	2.78	0.08	1.82	1.28	0.307	0.589	0.8958
	2.50	3.04	0.16	1.75	2.55	0.313	0.610	0.9226
	2.00	3.73	0.05	0.69	0.83	0.313	0.595	0.9080
	2.54	3.48	0.07	1.39	1.27	0.314	0.592	0.9056
5 mejores 10ª ejec.	2.30	3.40	0.03	1.81	0.69	0.297	0.613	0.9098
	2.78	3.50	0.07	1.78	1.62	0.313	0.587	0.9005
	2.28	3.46	0.02	1.98	2.10	0.314	0.585	0.8989
	2.31	3.32	0.09	0.74	0.67	0.315	0.594	0.9087
	2.50	3.14	0.09	1.69	0.88	0.315	0.630	0.9459

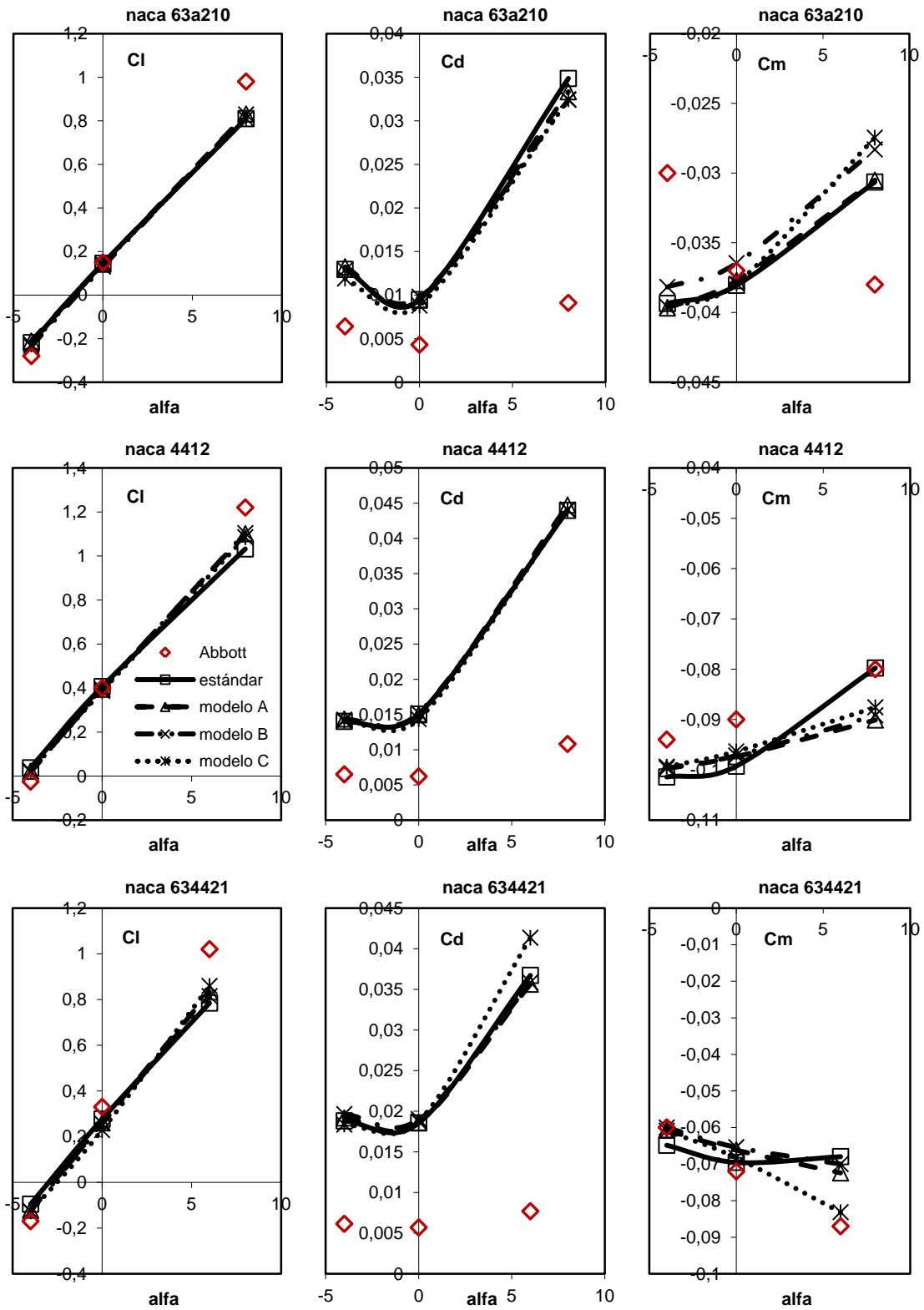
Tabla II.2: Tres individuos de la élite, cuyos valores de  $\Phi+\Psi$  ocupan las posiciones 1ª, 25ª y 50ª.

	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\mu}$	$\sigma_k$	$\sigma_{\epsilon}$	$\Phi$	$\Psi$	$\Phi+\Psi$	rango ( $\Phi+\Psi$ )
modelo A	2.78	3.84	0.06	1.4	0.69	0.308	0.573	0.8811	1º
modelo B	2.56	3.41	0.05	1.82	1.65	0.313	0.587	0.8999	25º
modelo C	2.3	3.05	0.03	1.73	0.71	0.303	0.644	0.9465	50º

En la figura II.9 se muestran los valores de  $c_l$ ,  $c_d$  y  $c_m$  que arrojan estos tres modelos para los ocho perfiles utilizados, junto con los resultados de túnel de viento y del modelo original.







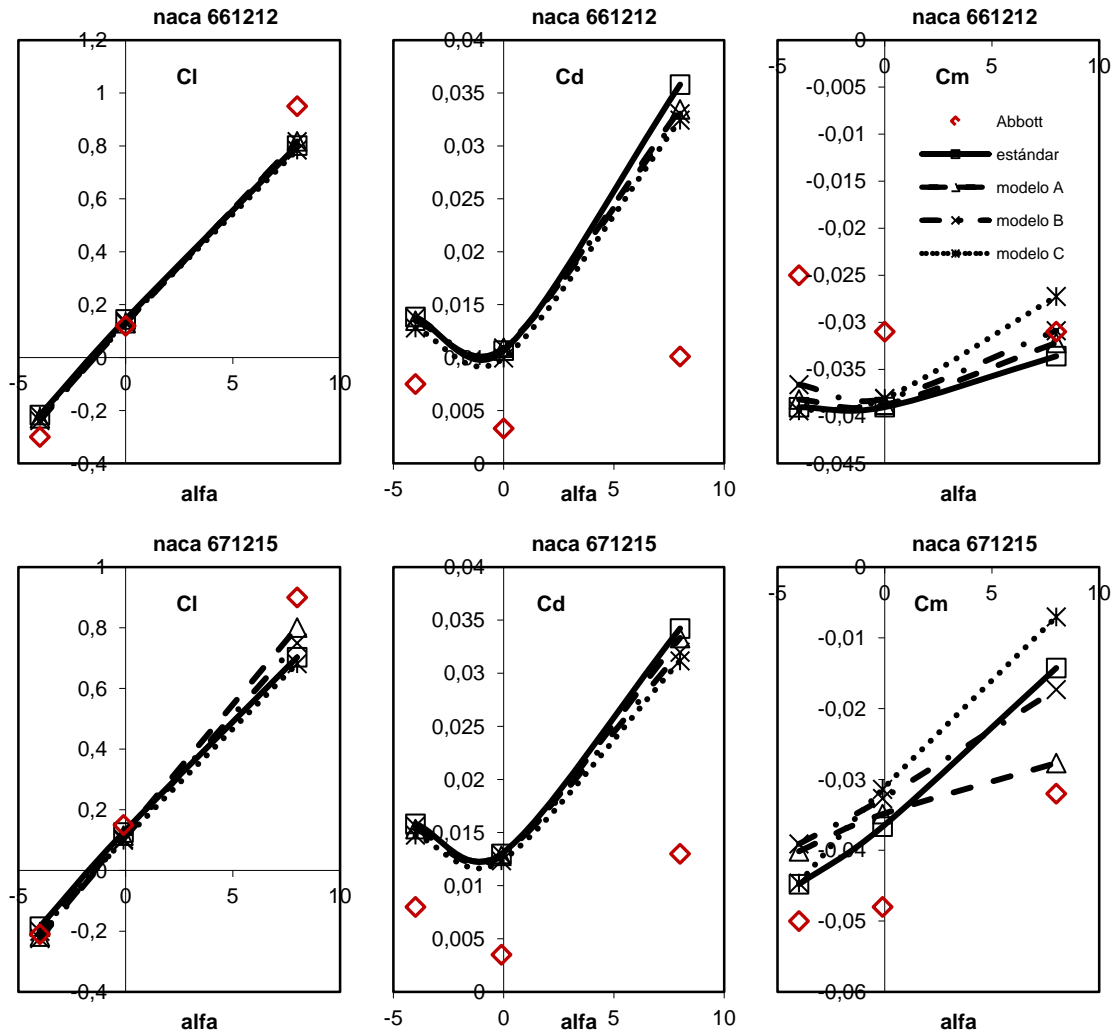


Figura II.9: Coeficientes aerodinámicos,  $c_l$ ,  $c_d$  y  $c_m$  para ocho perfiles utilizados, resultados del modelo A (---), modelo B (-.-), modelo C (.....), modelo estándar original (—) y datos de túnel de viento (□).

Como muestra la figura II.9, el efecto neto de estos tres nuevos modelos en los perfiles en relación al modelo estándar es una ligera mejora de la sustentación y el arrastre, y algo mayor para el momento; estos comportamientos se acentúan con el espesor del perfil. A modo de ejemplo, la figura II.10 muestra los respectivos flujos usando el modelo estándar y el modelo A alrededor del perfil naca0012 con un ángulo de ataque de  $8^\circ$ .

El modelo A difunde menos la turbulencia en dirección transversal que el modelo estándar (ver figura II.10a), sin embargo este hecho no repercute demasiado en el decremento de momento en dirección transversal, así el arrastre es ligeramente menor (ver figura II.9) y el espesor de la capa límite ligeramente mayor (ver figura II.10c).

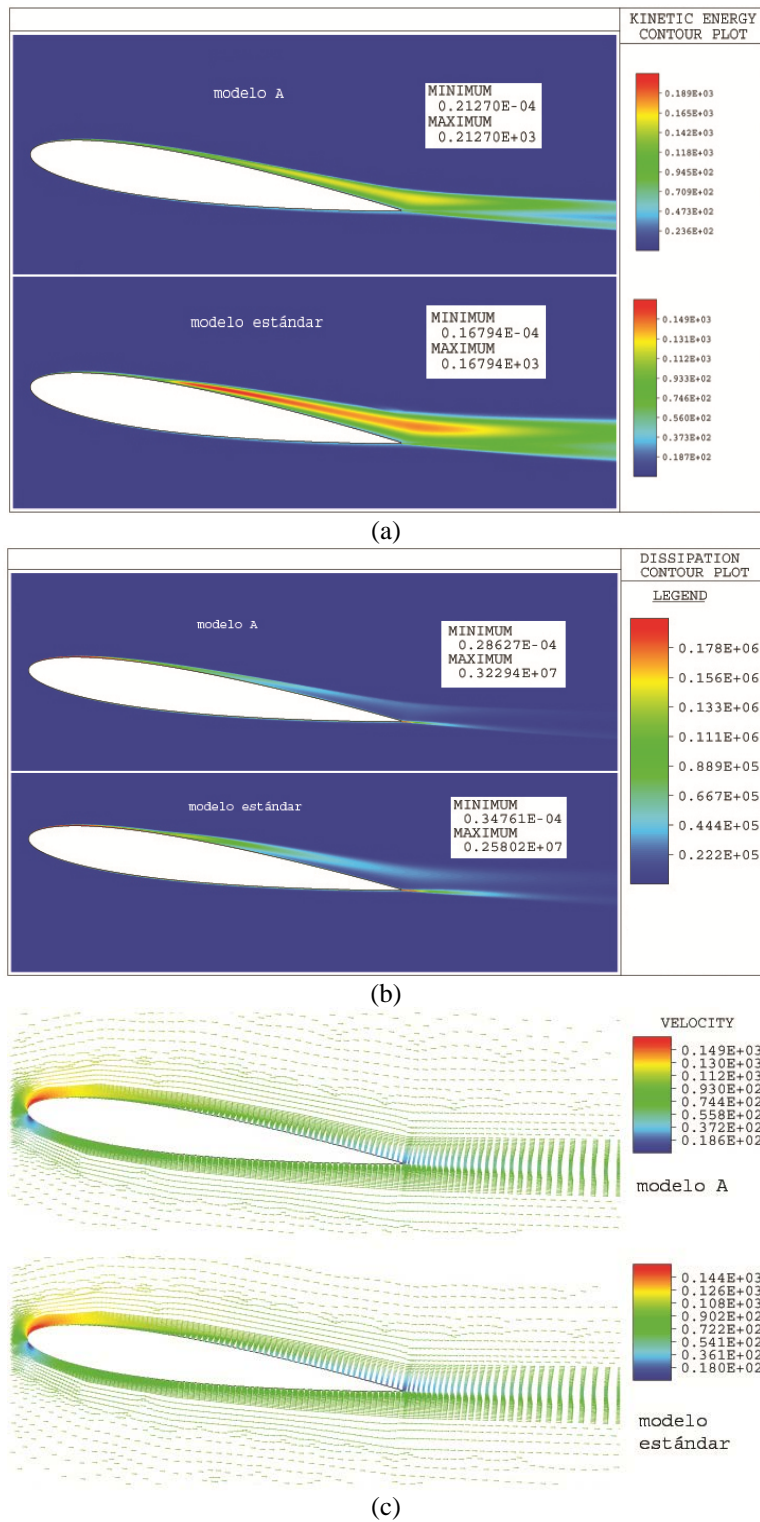


Figura II.10: Perfil naca0012 ADA=8°: (a) energía cinética turbulenta, (b) disipación de energía cinética turbulenta, (c) vectores de velocidad media, obtenidos con el modelo A y con el modelo estándar.

### 3.6.2. Otras combinaciones de pesos.

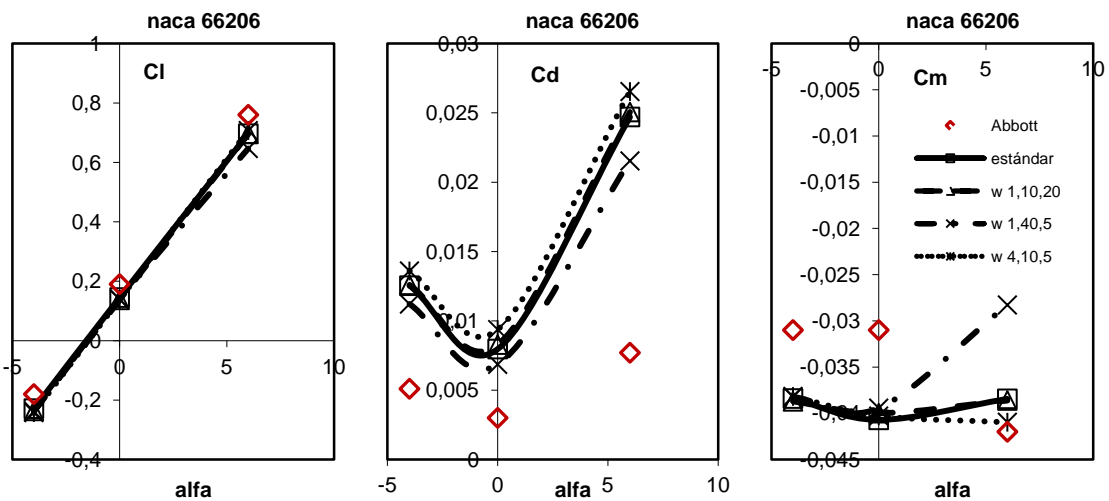
Los resultados de arriba corresponden a tres individuos de la élite seleccionada con el criterio de búsqueda  $W_1(1,10,5)$  entre los 4.000 individuos conocidos. Con el propósito

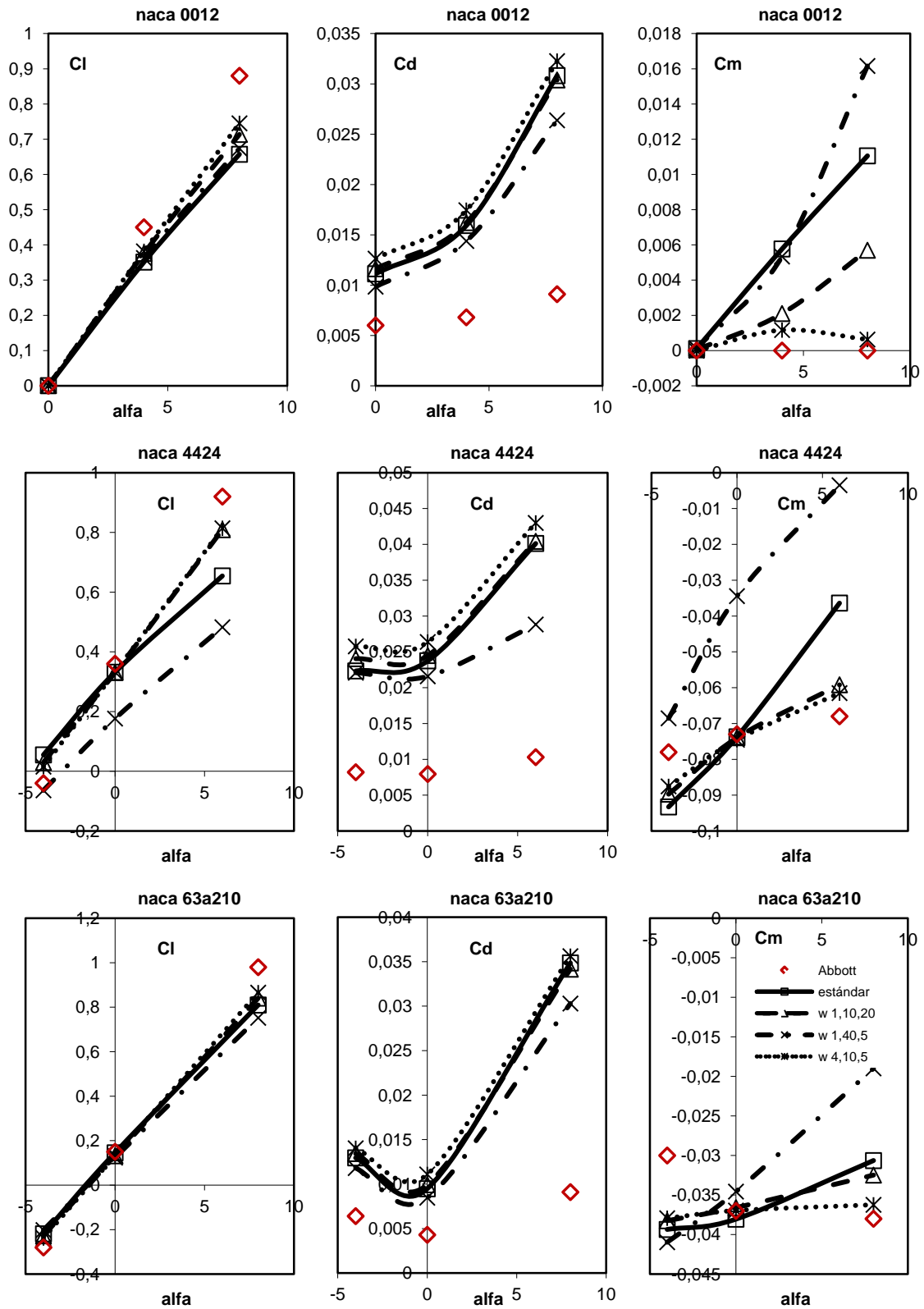
de ofrecer sendas mejoras específicas en los esfuerzos de sustentación, arrastre y momento de cabeceo, se investigaron respectivamente los nuevos criterios  $W_2(1,10,20)$ ,  $W_3(1,40,5)$  y  $W_4(4,10,5)$ .

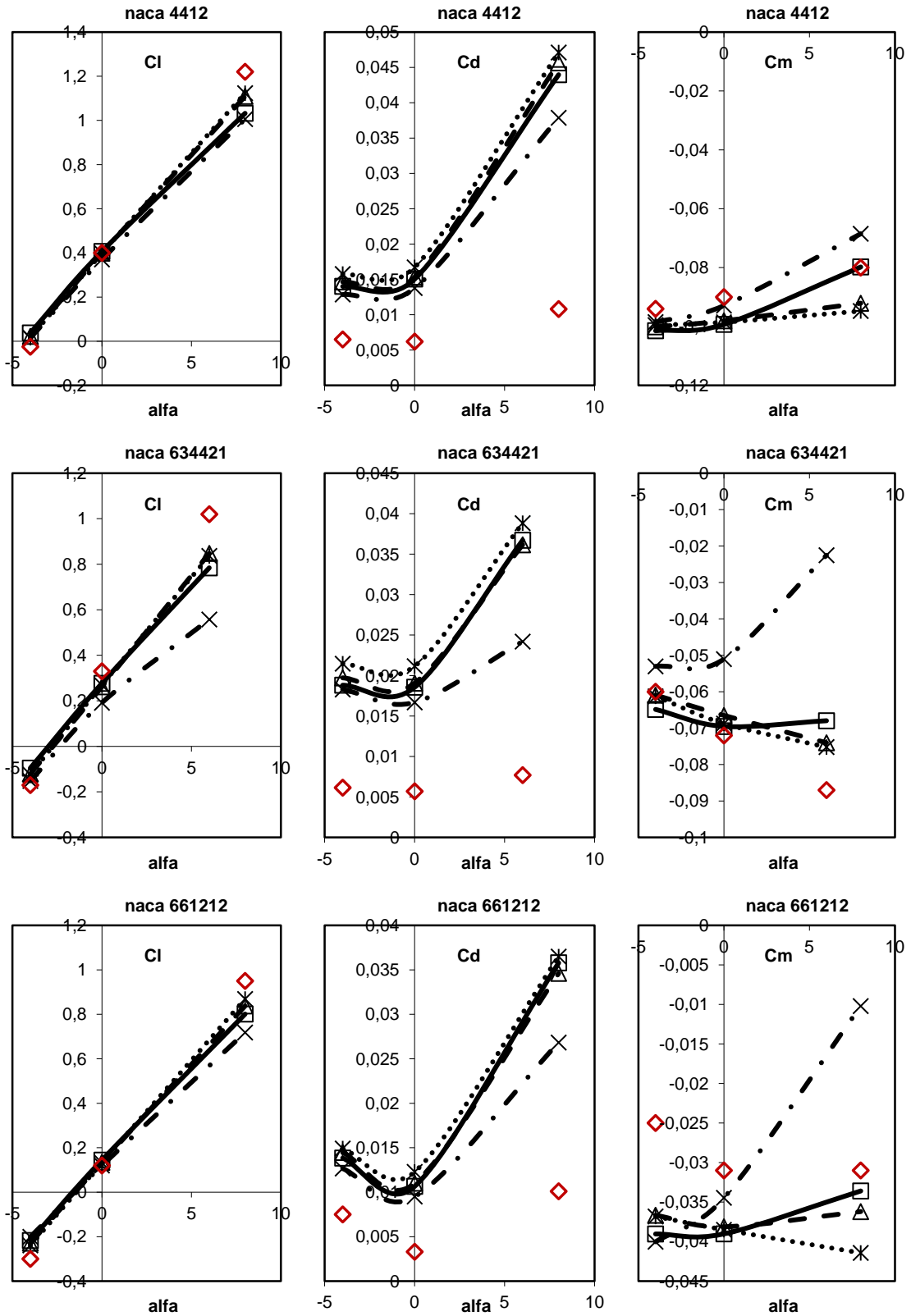
Para cada una de estas tres tríadas de pesos se repitió el proceso explicado a continuación. Se usaron los errores en los coeficientes aerodinámicos de los 4.000 modelos previamente calculados para el primer grupo de perfiles, pero ponderados con el nuevo criterio de pesos. De entre ellos fue seleccionada una nueva élite de cincuenta individuos, que fueron calculados sobre el grupo alternativo de perfiles. El mejor individuo obtenido con cada criterio aparece en la tabla II.3, y sus respectivos resultados junto con los del modelo original y los datos de túnel de viento para los ocho perfiles de superficie suave se muestran en la figura II.11.

Tabla II.3: Constantes de cierre de los mejores individuos usando los pesos,  $W_2(1,10,20)$ ,  $W_3(1,40,5)$  y  $W_4(4,10,5)$ .

criterio búsqueda $W(W_l, W_d, W_m)$	mejor individuo				
	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\mu}$	$\sigma_k$	$\sigma_{\varepsilon}$
$W_2(1,10,20)$	2.33	3.51	0.047	1.68	0.99
$W_3(1,40,5)$	2.60	2.80	0.14	1.13	1.49
$W_4(4,10,5)$	2.42	3.81	0.063	1.91	2.52







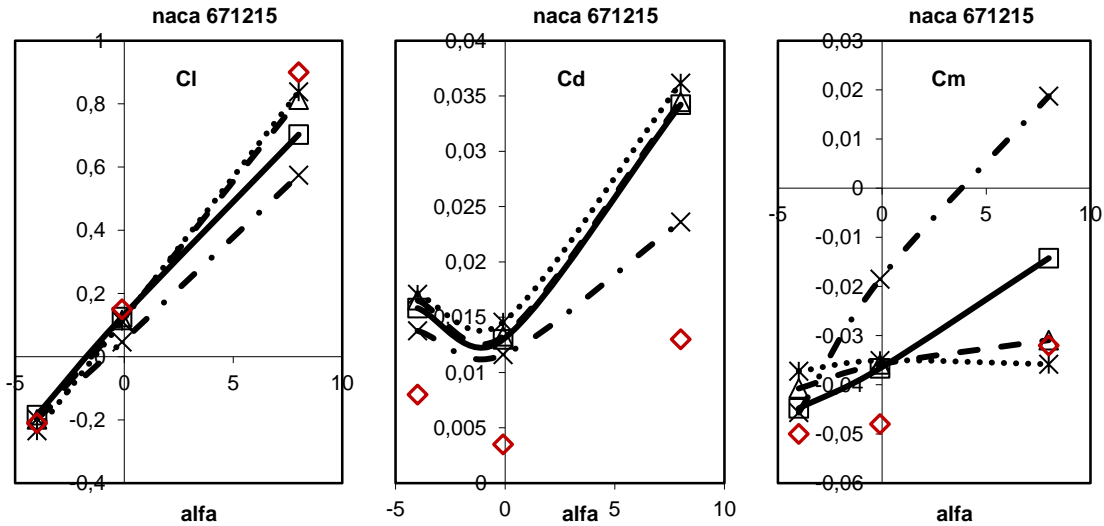


Figura II.11: Coeficientes aerodinámicos  $c_l$ ,  $c_d$  y  $c_m$  de los ocho perfiles obtenidos con los mejores modelos de los pesos  $W_2$  (---),  $W_3$  (-.-),  $W_4$  (.....), modelo estándar original (—) y experimentos en túnel de viento ( $\square$ ).

Los comportamientos del mejor modelo con  $W_2$  y del mejor modelo con  $W_4$  fueron muy similares en los ocho perfiles: leve mejoría en los esfuerzos de sustentación y cabeceo, acompañados de ligero empeoramiento en el de arrastre. Esta tendencia se acentúa con el espesor del perfil, como ya ocurriera en el modelo original y en los modelos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  encontrados con el criterio  $W_1$ . Por su parte el mejor modelo con  $W_3$  mejora en el arrastre y empeora en la sustentación y el momento, e igualmente las diferencias respecto del modelo estándar aumentaron con el espesor de los perfiles. Aunque este modelo mejora la precisión en el arrastre para todos los perfiles, este error sigue teniendo una magnitud inaceptable.

### 3.6.3. Resumen de los resultados obtenidos.

En el contexto de un problema de optimización de perfiles para flujos con alto número de Reynolds, se ha intentado mejorar la precisión de la herramienta de análisis de la que se partía, que emplea un modelo de turbulencia  $k-\epsilon$ . Con el propósito de mantener el coste de malla reducido, se ha optado por optimizar las constantes de cierre de un modelo de turbulencia económico, en este caso el conocido modelo  $k-\epsilon$  estándar, que es el modelo raíz del que derivan las diferentes variantes del modelo  $k-\epsilon$  testadas previamente en flujos alrededor de perfiles, y que como todas ellas proporciona abultados errores en los esfuerzos aerodinámicos, especialmente en el arrastre.

El procedimiento de búsqueda propuesto optimiza el vector de cinco constantes de cierre del modelo de turbulencia de manera ad-hoc, minimizando los errores en flujos alrededor de perfiles conocidos experimentalmente, en los que ninguno de los términos de las dos ecuaciones del modelo de turbulencia es nulo. El método de optimización empleado ha sido una búsqueda aleatoria, que usa una función de error exenta de consideraciones sobre los mecanismos físicos, siendo los datos de referencia los coeficientes aerodinámicos en nueve flujos alrededor de tres perfiles de geometría muy diferente. El objetivo es verificar si las constantes de cierre obtenidas mediante este

procedimiento mejoran la precisión del análisis en perfiles de forma arbitraria. Los mejores conjuntos de constantes encontrados mejoraron los resultados en los nueve flujos de la función de evaluación. Después fueron aplicados en 15 nuevos flujos sobre un grupo más amplio y variado de perfiles, y también mejoraron las predicciones, sugiriendo que este mismo comportamiento puede darse para perfiles elegidos arbitrariamente.

Sin embargo, los resultados siguen mostrando un nivel de error excesivo, especialmente en el arrastre, y por ello no son aptos para la realización de una optimización de forma de perfiles que aspire a dar resultados razonablemente realistas. Por este motivo, a continuación estudiamos el origen de los errores en todos los modelos  $k-\varepsilon$  empleados hasta ahora.

#### **4. ANALISIS DE ERRORES EN LA MODELIZACION.**

En resumen, en primer lugar se empleó un modelo  $k-\varepsilon$  para el análisis del flujo para optimización mediante GA de perfiles para flujos con alto número de Reynolds (ver capítulo IV ó referencia [Lop'08]). Con la idea de encontrar una herramienta de análisis suficientemente precisa y muy económica para esta tarea, se evaluaron diferentes modelos de tipo  $k-\varepsilon$ , y después se optimizaron las constantes del modelo  $k-\varepsilon$  estándar.

En primer lugar se evaluaron el modelo  $k-\varepsilon$  estándar y tres variantes similares de éste (dos de ellas con dos conjuntos de valores diferentes para sus constantes de cierre), en combinación con tres formas de viscosidad turbulenta, en flujos sobre varios perfiles. Pero todas estas diferentes combinaciones de modelo  $k-\varepsilon$  arrojaron grandes errores, muy similares entre sí, cuya característica más sobresaliente fue un gran error por exceso en la fuerza de arrastre de los perfiles.

En esta situación, se intentó mejorar la precisión de los modelos  $k-\varepsilon$  optimizando las constantes de cierre del modelo del que derivan todos los testados, el  $k-\varepsilon$  estándar, específicamente para flujos alrededor de perfiles. Como resultado, se encontraron conjuntos de constantes que mejoran ligeramente la precisión en los esfuerzos aerodinámicos en un conjunto de perfiles de geometría muy variada. Sin embargo, lamentablemente esto no significa que la mejora sea extensiva a cualquier perfil, y además los errores, en particular en el arrastre, continúan siendo excesivos, por lo que se descarta esta vía para mejorar la precisión del análisis, así como el uso de los modelos  $k-\varepsilon$  con constantes originales evaluados en el apartado 2, y se hace necesario investigar la causa de los malos resultados de estos últimos.

Las diferencias encontradas entre todos los modelos  $k-\varepsilon$  originales estudiados en el apartado 2 son irrelevantes ante la gran magnitud de los errores, que es común a todas las combinaciones, y que tiene su expresión más elocuente en un gran exceso de arrastre, que indica que la capa límite está mal modelizada. Todo esto apunta a que algún efecto fluidodinámico relacionado con la capa límite (más determinante que los matices que diferencian a los modelos examinados) no está siendo correctamente capturado.



En la referencia [Bax'08], para un perfil naca 0012 con ángulo de ataque de  $8^\circ$  para  $Re=1,5 \cdot 10^6$ , fijando de antemano el punto de transición de capa límite laminar a turbulenta (esta es una técnica muy recurrida en el análisis de este tipo de flujos, como señala Rumsey [Rum'02]), usando el modelo  $k-\epsilon$  estándar obtuvieron resultados que dieron bajos errores en los coeficientes de sustentación y de arrastre, respectivamente del 1,9% y del 8,5%. De esto se extrae que los modelos  $k-\epsilon$  son válidos para calcular tramos turbulentos de capa límite solo cuando se ha fijado el punto de transición de flujo laminar a flujo turbulento. Sin embargo, como éste no se puede conocer a priori, los modelos  $k-\epsilon$  no son válidos para calcular tramos turbulentos de capa límite.

Como muestra la figura II.12 izquierda, este tipo de modelos por sí mismos adelantan la transición hacia el borde de ataque de los perfiles, modelizando así toda la capa límite en régimen turbulento. Este es su principal problema: son incapaces de predecir el punto de transición, y por lo tanto son inadecuados para capas límites transicionales donde no se conoce de antemano la posición del punto de transición.

De ahí se deduce que en los cálculos se haya obtenido una excesiva sobreestimación del arrastre generalizada, insensibilidad a diferentes niveles de turbulencia del flujo libre, e incapacidad de predecir el “laminar bucket” para el perfil naca66<sub>1</sub>-212 (ver figura II.6). Como señala Wilcox [Wil'93] los modelos  $k-\epsilon$  han sido concebidos y calibrados solamente para turbulencia desarrollada con elevado número de Reynolds, y en consecuencia no pueden ni predecir la transición, ni representar una capa límite laminar. Por lo tanto, se concluye que los modelos  $k-\epsilon$  no son válidos para analizar flujos alrededor de perfiles en condiciones realistas (donde las capas límite son transicionales) y que se necesita un método de análisis que prediga correctamente la transición para los cálculos de optimización.

Por otra parte, se han realizado trabajos de optimización de perfiles usando modelo  $k-\epsilon$  [Moh'97; Sha'07; Jah'11], pero es preciso tener en cuenta que consideran que el flujo es turbulento en toda la pared, lo cual, en la práctica no suele ser cierto. La técnica de fijar a priori la transición no es aplicable en optimización de forma de perfiles, porque al ser desconocidos los nuevos perfiles, se desconoce su ubicación.

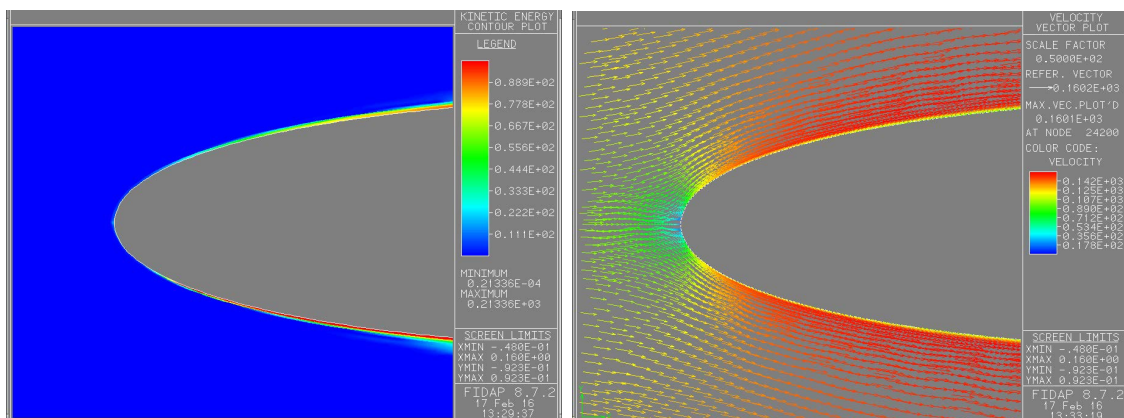


Figura II.12: (izquierda) Energía cinética turbulenta en el borde de ataque del perfil naca0012 para ángulo de ataque nulo, y (derecha) velocidad media, calculada con el modelo  $k-\epsilon$  RNG y viscosidad turbulenta de Speziale.

De manera consistente con lo comentado, los experimentos en perfiles muestran que el adelantamiento de la transición aumenta el arrastre en gran medida. Dicho

adelantamiento puede ser provocado por diferentes factores, entre ellos están la rugosidad, el aumento de la intensidad de la turbulencia en el flujo exterior y los gradientes de presión adversos.

Por ejemplo, Timmer y otros [Tim'04] señalan que el adelantamiento de la transición por motivo de la rugosidad provoca engrosamiento de la capa límite, aumento de la fuerza de arrastre y disminución de la combadura efectiva.

A su vez Croskey [Cro'87] estudió el efecto del adelanto de la transición al borde de ataque producido por la colocación de un alambre en dicha región. Realizó ensayos en túnel de viento para el perfil naca0012 para cero grados de ángulo de ataque y número de Reynolds de  $6 \cdot 10^6$  (el mismo utilizado en los cálculos realizados), que mostraron un aumento del 40% en el arrastre y reducción de la pendiente de la recta de la sustentación frente al ángulo de ataque.

Estos mismos efectos se dan en los ensayos de Abbott [Abb'59] para el perfil naca0012 recogidos en la figura II.13, donde se comparan ensayos sobre superficie suave (ya incluidos anteriormente en la figura II.3), sobre superficie rugosa, y los resultados obtenidos del modelo  $k-\varepsilon$  extendido con viscosidad turbulenta lineal de Boussinesq para mallas con diferente densidad. La presencia de rugosidad en la pared adelanta la transición y con ello aumenta el arrastre, se reduce ligeramente la pendiente de la curva de sustentación, y se adelanta el ángulo de entrada en pérdida.

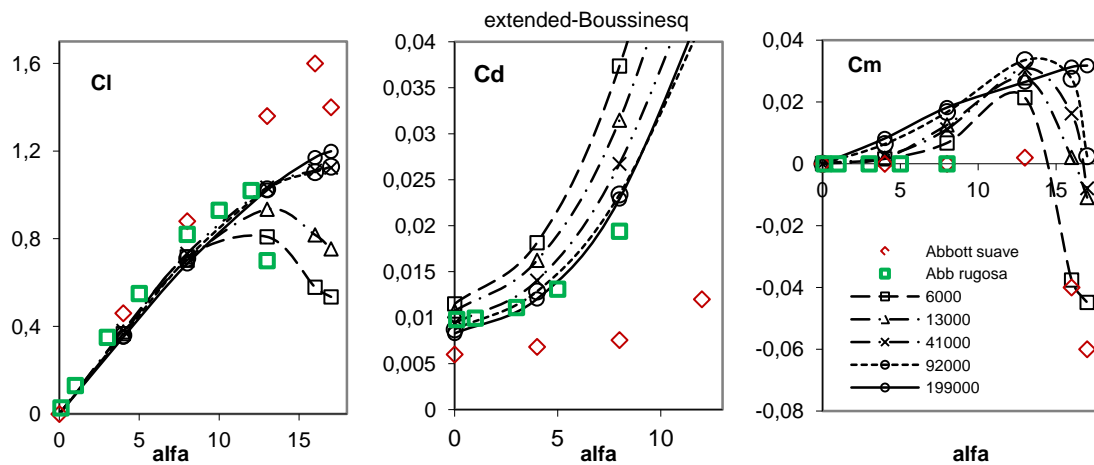


Figura II.13: Coeficientes aerodinámicos del perfil naca 0012 obtenidos con el modelo  $k-\varepsilon$  extendido con relación de viscosidad turbulenta lineal de Boussinesq para mallas con diferente número de elementos, y experimentos en túnel de viento para superficie suave ( $\diamond$ ) y rugosa ( $\square$ ).

Se observa que el comportamiento del modelo  $k-\varepsilon$  en los resultados obtenidos (con capa límite completamente turbulenta) es consistente con todo esto, ya que al aumentar la densidad de malla los resultados se parecen a los experimentos de pared rugosa que tienen capa límite completamente turbulenta, cuyos resultados distan mucho de los de pared suave, con capa límite transicional. De hecho, para pequeños ángulos de ataque el arrastre de las mallas de 200.000 elementos resulta algo menor que los experimentos de Abbott en superficie rugosa. En capas límite completamente turbulentas el arrastre aumenta con la rugosidad [Fer'09].

Por otra parte, en aerodinámica y turbomaquinaria no suele interesar optimizar perfiles rugosos porque dan mayor esfuerzo de arrastre.

#### 4.1. CONCLUSIONES.

Como conclusiones de los estudios de validación y de optimización de los modelos k- $\epsilon$  en flujos con alto número de Reynolds alrededor de perfiles y del análisis de sus resultados, hay que destacar que los modelos de tipo k- $\epsilon$  no tienen entre sus términos ninguno que modelice el mecanismo físico de la transición de flujo laminar a turbulento, sino que predicen una capa límite totalmente turbulenta desde su inicio en el punto de remanso. En tanto que predice que hay turbulencia en un tramo mayor que el real, el esfuerzo de arrastre total resulta excesivo. Esta es la principal causa de los errores en los modelos de tipo k- $\epsilon$  en flujos alrededor de perfiles.

Sin embargo, estos modelos producen una turbulencia razonablemente realista. Por este motivo su uso sigue estando muy extendido, al haber numerosas aplicaciones industriales en las que la región de interés tiene una capa límite completamente turbulenta.

Los términos de las ecuaciones del modelo k- $\epsilon$  son tales que aunque se optimicen sus constantes de cierre para un tipo de flujos en particular, no pueden recoger el mecanismo de transición. Así, los conjuntos de constantes optimizados tienden a dar una turbulencia ligeramente diferente de la real, pero extendida a lo largo de toda la pared, como en el caso de las constantes originales.

Los resultados de la optimización a simple vista mejoraban muy ligeramente unos malos resultados del modelo original, pero no han tenido en cuenta la física del flujo (la función de error a minimizar no compara la estructura de los movimientos modelizado y real sino únicamente el esfuerzo total resultante) y han modificado los pesos de diferentes efectos que estaban correctamente calibrados para turbulencia desarrollada, por lo tanto no son válidos.

Se han realizado optimizaciones ad-hoc similares como [Dar'06] que optimiza las constantes  $C_{\epsilon 1}$  y  $C_{\epsilon 2}$  del modelo k- $\epsilon$  estándar para mejorar su precisión en flujos alrededor de configuraciones multielemento de alta sustentación sin considerar la física del flujo. De esta manera se modifica el comportamiento de la turbulencia y pueden conducir a resultados engañosos en flujos de geometría compleja como éstos.

En este sentido Bardow y otros [Bar'08] proponen un procedimiento sistemático para elegir qué parámetros del modelo de turbulencia k- $\epsilon$  hay que modificar realmente para conducir a una mejora de su comportamiento para el flujo turbulento en un canal. Para ello estudian la influencia de las variaciones de los parámetros del modelo en el campo de velocidad. Observan que las variaciones de  $C_{\epsilon 1}$  y  $C_{\epsilon 2}$  son las que mayores cambios producen en el flujo, y que ambos efectos están relacionados linealmente, de manera que solo es necesario optimizar una de ellas junto con algún otro parámetro. Esto es reflejo del mayor peso que tienen los términos de estas constantes, como fue mostrado mediante simulación DNS por Mansour y otros [Man'88]. De todo lo anterior se concluye que para realizar correctamente una optimización de los parámetros de un

modelo de turbulencia para un tipo específico de flujo, es necesario el conocimiento de la física del flujo y del significado físico de los términos del modelo.

Finalmente, dado que no se considera aceptable modelizar una capa límite transicional como completamente turbulenta, es necesario buscar una herramienta de análisis económica que prediga la transición, válida para optimizaciones mediante GA's.

## 5. MODELO ELEGIDO DE TRANSICIÓN RANS.

Entre los modelos de flujo CFD capaces de recoger la transición, se contemplaron como posibles alternativas dos modelos de transición RANS populares en la actualidad (descritos en el apartado I.2.6.1): el modelo empírico de Menter [Men'06] y el modelo fenomenológico  $k-k_1-\omega$  de Walters [Wal'08]. En las citadas referencias ambos modelos muestran buenos resultados para la ubicación del punto de transición en flujos alrededor de perfiles. El principal inconveniente común a ambos modelos, estriba en que debido a que ambos modelos resuelven la zona de bajo número de Reynolds de la capa límite, necesitan una malla detallada para esta zona, ocasionando un gran aumento del coste de malla con respecto a los modelos  $k-\epsilon$ . Así, la necesidad mantener reducido el coste en tiempo de las optimizaciones obligará a que el número total de celdas o elementos de la malla sea lo más reducido posible.

Entre ambos modelos, finalmente se decidió utilizar el modelo  $k-k_1-\omega$ , porque modeliza los mecanismos físicos que desencadenan la transición, a diferencia del modelo de Menter que se basa en correlaciones empíricas. Ambos modelos se basan en planteamientos muy diferentes. En las referencias [Pas'09; She'17] se revisan y comparan diferentes modelos de transición.

El modelo de Walters usa una ecuación para la energía cinética de las oscilaciones del flujo que aún no son turbulentas  $k_1$  como variable clave para recoger el inicio de la turbulencia, que en la transición se trasvasa a energía cinética turbulenta  $k$ . El modelo de Menter sin embargo emplea una ecuación para la variable *intermitencia*  $\gamma$  de la turbulencia, que se define como el tanto por uno de tiempo que el flujo es turbulento en una posición. La utilidad de esta última variable para recoger la transición está cuestionada en la actualidad, ya que es difícil de capturar en los flujos, y además este tipo de modelos no modelizan la física de la interacción entre la zona turbulenta y no turbulenta en la transición, sino que imponen un promedio condicional multiplicando términos por el valor de la intermitencia [Pas'09].

### 5.1. VALIDACIÓN DEL MODELO DE TRANSICIÓN $k-k_1-\omega$

Para comprobar la validez del modelo  $k-k_1-\omega$  para el análisis de flujo alrededor de perfiles aerodinámicos, se hicieron cálculos sobre los perfiles naca 4412, naca 0012 y naca 4424 para ángulo de ataque nulo, para diferentes densidades de malla, y los valores de  $c_d$  y  $c_l$  obtenidos se compararon con los experimentos de Abbott y Von Dohenhoff [Abb'59]. Los cálculos se realizaron usando el programa comercial Fluent, que usa el método de discretización de volúmenes finitos, y se usó un esquema de discretización de segundo orden, porque mostró un mejor rendimiento que los de primer orden y

órdenes superiores en las pruebas. Los dominios modelizados fueron círculos de 100 cuerdas de diámetro en cuyo centro se ubica el borde de salida del perfil.

Para el perfil naca 4412 sobre mallas de unas 12000 celdas se obtuvieron errores similares para el arrastre y para la sustentación, en torno al 15%. Mallas con el doble de densidad que contenían del orden del cuádruple de celdas no arrojaron mejoras sustanciales en los resultados de los coeficientes aerodinámicos. Estos resultados, frente a los de los modelos k- $\epsilon$  anteriores, reflejan que se puede disponer de una herramienta de análisis razonablemente válida.

Sin embargo, a continuación se realizaron pruebas con mallas similares para un flujo simétrico, el flujo alrededor del perfil simétrico naca0012 con ángulo de ataque nulo, y dieron flujos con cierta asimetría debida a una notable diferencia de posición de los puntos de transición en el intradós y en el extradós. La ubicación de ambas transiciones se mostró muy sensible a las “imperfecciones” existentes en las mallas (elementos bastante distorsionados en zonas no alejadas del perfil con cambios bruscos en el tamaño de elemento). Esto, por otra parte no es de extrañar, ya que las celdas de mala calidad introducen ruido en el flujo, y el mecanismo físico de la transición es muy sensible a las perturbaciones del flujo.

Así, se consideró como requisito básico añadido para aceptar una malla (su distribución de tamaños y formas de celdas) que fuera capaz de modelizar como simétricos los flujos que realmente lo son. Sucesivas pruebas mostraron que la asimetría desaparecía al mejorar la calidad de la malla en algunas zonas. Para conseguirlo se aplicaron dos cambios, primero, en las celdas situadas algo más afuera de la capa límite se suavizó la velocidad de cambio de tamaño de celda, y se redujo la distorsión de forma. Segundo, para los bloques de malla que rodean a la estela se usaron mallas estructuradas con elementos de formas aproximadamente rectangulares orientados según los gradientes del flujo. Una de estas mallas es la de la figura II.14.

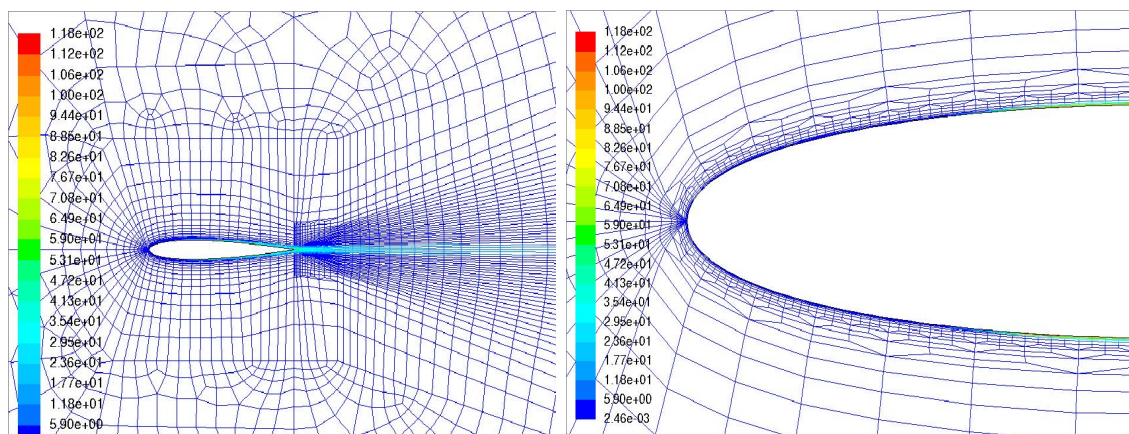


Figura II.14: (izquierda) Imagen del campo de energía cinética turbulenta sobre malla económica para perfil naca 0012 con ángulo de ataque nulo con modelo k- $k_1$ - $\omega$ . (derecha) Detalle donde se aprecia la zona de transición en intradós y extradós.

Para esta malla los valores de  $y^+$  en los elementos contiguos a la pared se encuentran en el intervalo (1, 2), que es adecuado para este modelo de turbulencia. Esto significa que el espesor de estos elementos es inferior al de la subcapa viscosa de la capa límite turbulenta. También se comprobó que los resultados empeoraban cuando el tamaño de las celdas más grandes, situadas en las cercanías de las fronteras exteriores, era mayor

de seis cuerdas. Por otra parte, el uso en las fronteras exteriores de la condición de contorno de tipo “*outflow*” (gradiente normal nulo) dio convergencias mucho más rápidas que la de tipo “*pressure outlet*” (presión constante a la salida).

Aplicando estas medidas se consiguieron para los perfiles naca0012 y naca4412 en mallas de 12000 celdas y 34000 celdas respectivamente los resultados mostrados en la tabla II.4. Las mallas más densas tenían aproximadamente el doble de celdas en las direcciones normal y longitudinal al flujo en las cercanías del perfil. El número de Reynolds de los flujos es de  $6 \cdot 10^6$ , los ángulos de ataque nulos, y la intensidad de la turbulencia en el flujo libre se ha tomado de “varias centésimas del 1 por cien” como en el túnel de viento de la referencia [Abb’59].

Tabla II.4: Resultados de porcentaje de error en la sustentación y en el arrastre para los perfiles naca 0012 y naca 4412 para  $Re=6 \cdot 10^6$  y ángulo de ataque nulo, para dos mallas de diferente densidad.

naca 0012, 12000 celdas		naca 4412, 34000 celdas	
$\varepsilon_l(\%)$	$\varepsilon_d(\%)$	$\varepsilon_l(\%)$	$\varepsilon_d(\%)$
0	10	14,15	7,45

Como conclusión de estas pruebas, se considera que el modelo k-k<sub>1</sub>- $\omega$  junto con las mallas empleadas constituye una herramienta válida (suficientemente precisa y no demasiado costosa) para predecir capas límites transicionales para los cálculos de optimización usando GA's, ya que para mallas de poco coste consigue obtener resultados razonables.

## **CAPITULO III.**

# **MÉTODO DE MALLADO PARA OPTIMIZACIÓN DE FORMA DE PERFILES AERODINÁMICOS**





## 1. INTRODUCCIÓN

En problemas de optimización de forma usando CFD la geometría cambia de un análisis al siguiente, y uno de los problemas básicos estriba en la generación de la malla. Es necesario emplear un procedimiento de generación de mallas eficiente, y capaz de generar automáticamente mallas de suficiente calidad alrededor de paredes de forma cambiante, para todas y cada una de las geometrías que surjan a lo largo de la búsqueda. Se presenta aquí un método de mallado multibloque desarrollado para la optimización de forma bidimensional de perfiles aerodinámicos. El método consiste en construir alrededor de cada perfil subdominios cuyas geometrías permitan generar mallas estructuradas de buena calidad en las cercanías de la pared. Técnicas de este tipo posibilitan el tratamiento de otros tipos de problemas y geometrías.

El desarrollo del método de mallado se realizó en dos fases, impuestas por las necesidades del tipo de modelo de flujo utilizado. En la primera fase (**apartado 4**) se describe como se construyen las mallas destinadas a análisis realizados con un modelo de alto número de Reynolds (un modelo de turbulencia de tipo  $k-\epsilon$ ). Como el método de discretización empleado fueron los elementos finitos, habitualmente hablaremos de *elementos* que forman mallas.

En la segunda fase (**apartado 5**) se describe como se construyen las mallas adecuadas para un modelo que modeliza la zona de bajo número de Reynolds de la capa límite (un modelo de turbulencia que incluye la predicción de la transición), y por lo tanto las mallas son más densas y detalladas en la zona de pared de la capa límite. Como el método de discretización usado fueron los volúmenes finitos, hablaremos normalmente de mallas divididas en *celdas*.

## 2. DESCRIPCIÓN GENERAL Y OBJETIVOS

Un sistema de optimización de forma fluidodinámica mediante GA para ser útil debe satisfacer tres necesidades: que sea robusto, que produzca buenos resultados, y que lo haga a un coste asumible. Estos requisitos lógicamente se extienden a sus diferentes módulos. Entre ellos es crítico el procedimiento de mallado automático para geometrías cambiantes, y en consecuencia debe ser diseñado para cumplir los siguientes objetivos: las mallas construidas deben ser correctas (sus celdas, que serán cuadriláteras, no pueden tener ángulos cóncavos ni cruzarse sus lados), precisas (la forma y tamaño de sus celdas debe ser adecuada a los gradientes del flujo y tener poca distorsión, especialmente en la pared), y su tiempo de mallado ha de ser reducido y su coste de malla asumible (para poder realizar la búsqueda mediante GA).

El diseño del método de mallado también está condicionado por el tipo de método de optimización empleado. En nuestro caso la optimización será realizada mediante GA's, donde a diferencia de lo que ocurre con métodos de tipo gradiente, el cambio en la

geometría de un individuo al siguiente es drástico. En este sentido, la pared puede experimentar desplazamientos muy grandes, del orden del 60% de la cuerda (ver apartado 3). Esto hace que el desarrollo de un método de mallado automático robusto constituya un reto en sí mismo. Además, usando GA's el número de evaluaciones de la función objetivo empleadas es mayor que usando un método de optimización de tipo gradiente, por lo que hay que reducir el coste de malla al mínimo.

Las optimizaciones de forma en CFD deben producir resultados en tiempos asumibles, por lo que las mallas deben ser generadas de manera totalmente automática, sin interacción alguna entre el usuario y el sistema de optimización una vez comenzada la búsqueda.

En un análisis CFD aislado el calculista sirviéndose de un mallador semiautomático construye una malla y la modifica en varios ciclos de prueba error, hasta que la considera válida. Si falla el proceso de construcción de la malla de un bloque, se puede reintentar por ejemplo cambiando la gradación de la malla de sus fronteras. Alternativamente para mejorar la precisión del análisis, se puede usar un procedimiento de mallado adaptativo que mejore la malla del análisis inicial en función de la magnitud de los residuos en cada zona.

En un sistema de optimización de forma no es admisible que las mallas de algunos individuos no sean correctas o tengan mala calidad, porque respectivamente disminuiría la diversidad de la búsqueda al eliminar individuos, o la podría desviar hacia zonas poco fructíferas del espacio de búsqueda. Por otra parte, las técnicas de *mallado adaptativo* no son aplicables para mejorar la precisión de la malla de cada individuo, porque multiplican el número de análisis y mallados, y con ello el coste.

Para un nivel de precisión deseado, se debe garantizar la calidad de la malla especialmente junto a la pared, al ser ésta la zona más crítica del flujo, y se debe minimizar el coste de malla (número total de elementos ó celdas). Para ello el tamaño y forma de los elementos/celdas debe ajustarse a los gradientes del flujo medio: en la capa límite deberán usarse elementos muy pequeños y anisotrópicos (con espesores pequeños frente a su longitud en la dirección del flujo y con poca distorsión angular), y en la zona del flujo exterior los elementos pueden tener formas más isotropas y crecer con cierta rapidez al moverse desde la capa límite hacia las fronteras exteriores del dominio, para ahorrar en número de elementos.

Se puede construir una malla con las características anteriores, suponiendo que el flujo no experimentará despegue de la capa límite, usando mallas de tipo híbrido, es decir estructuradas en la capa límite y sus cercanías y desestructuradas más afuera. Si hubiera despegue de la capa límite, el error no sería grande al tener la malla alta resolución alrededor del punto de despegue.

Desafortunadamente, los métodos de generación de mallas **desestructuradas** no son fiables al cien por cien. Entre estos, los de tipo Delaunay son relativamente costosos y tienen dificultad en respetar las fronteras dadas [Wea'90], y los de tipo *frente móvil*, disponibles habitualmente en programas comerciales, aun siendo más rápidos pueden presentar dificultades en la etapa de cierre (ver capítulo I), como se comprobará más adelante.

Ante este problema se ha optado por usar mallas **estructuradas**, porque los métodos de generación de este tipo de mallas son robustos. Sin embargo, esto implica un inevitable exceso de coste de malla en la zona del flujo exterior, porque las líneas de malla que salen de la pared atraviesan todo el dominio hasta las fronteras exteriores. Entre los métodos de generación de mallas estructuradas, se eligió la interpolación transfinita porque es el más rápido (ver capítulo I) y no puede bloquearse durante el mallado. El principal inconveniente del método TFI, es que no garantiza la calidad de las mallas, al no ser (en general) las líneas de malla en la pared ortogonales a ésta.

El reto es conseguir mallas de calidad ante los cambios de forma de los individuos, para todos ellos. Para ello se buscará una manera de definir las fronteras de los bloques de malla adecuada para este fin.

En el capítulo I se han revisado diversos métodos de mallado para geometrías cambiantes que han mostrado su validez en optimizaciones de forma y en cálculos aeroelásticos; algunas de ellas permiten conseguir mallas de calidad ante grandes deformaciones de la geometría. Sin embargo todas estas técnicas implican una cierta complejidad matemática para mover los nudos de una malla inicial (o de la malla anterior) adaptándose a los cambios de la geometría.

En este capítulo se recoge el desarrollo de un método de mallado multibloque sencillo, que reconstruye la malla ante grandes deformaciones de la geometría. Se divide previamente el dominio fluido en bloques de malla, que se modifican en función de la nueva geometría de manera sencilla y sin complejidad matemática, y a continuación se malla el interior de dichos bloques usando un programa comercial que emplea interpolación transfinita.

En los siguientes apartados se expone su desarrollo para el problema concreto de optimización de forma de perfiles aerodinámicos. Se ha recogido como fueron superados obstáculos de diferente naturaleza por diferentes caminos, que implicaron cambios en la estrategia del método, en el tipo de malla y su método de generación, y en la topología y el número de los bloques de malla empleados. El método se puede aplicar para otros problemas de optimización de forma en dinámica de fluidos con diferentes tipos de dominios.

### **3. PARAMETRIZACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS PERFILES**

La parametrización de la geometría de los perfiles debe ser capaz de generar geometrías lo más variadas posibles para un número dado de variables de diseño, para que la búsqueda pueda encontrar buenas geometrías. En el capítulo IV se muestra cómo se eligieron la parametrización de la geometría de los perfiles y los rangos de definición de las variables de diseño, que definen el espacio donde busca el GA. En el presente capítulo se introduce esta parametrización, porque el procedimiento de mallado se diseña para soportar las diferentes geometrías que alberga este espacio de búsqueda.

Se eligieron las curvas de Bézier porque permiten generar geometrías muy diversas con

curvaturas suaves, apropiadas para perfiles aerodinámicos, y tienen una formulación matemática muy sencilla. Son curvas paramétricas  $\vec{X}(t) = \{x(t), y(t)\}^T$  escritas en términos de los polinomios de Bernstein (que definen sus propiedades) y de las coordenadas de los vértices de su *polígono de control* (que definen su forma), que no requieren de la resolución de sistemas de ecuaciones para ser obtenidas [Cor'02]. El control de la forma se dice que es global, porque la modificación de la posición de un vértice de control modifica la posición de los puntos de la curva a lo largo de toda ella. Se usan dos de estas curvas, una para definir el extradós y otra para el intradós. Ambas tienen la forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i^n t^i (1-t)^{n-i} x_i \quad y(t) = \sum_{i=1}^n c_i^n t^i (1-t)^{n-i} y_i, \quad (\text{III.1})$$

donde  $n$  es el grado de la curva, siendo los coeficientes

$$c_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (\text{III.2})$$

y  $(x_i, y_i)$  son los  $n+1$  vértices del polígono de control de la curva, siendo  $t$  un parámetro que varía en el rango  $[0,1]$ . Cada curva tiene 5 vértices de control, como muestra la figura III.1, es decir  $n=4$ . El primero y el último están fijos en las posiciones  $(0,0)$  y  $(c,0)$ , coincidiendo con los bordes de ataque y de salida del perfil, y los otros tres intermedios se encuentran en las abscisas  $x_1=0$ ,  $x_2=0,3c$  y  $x_3=0,7c$  y pueden moverse verticalmente en los rangos indicados en la figura III.1. Estos tienen una amplitud de hasta  $0,7c$ , similar a la cuerda, para poder definir curvas muy diferentes.

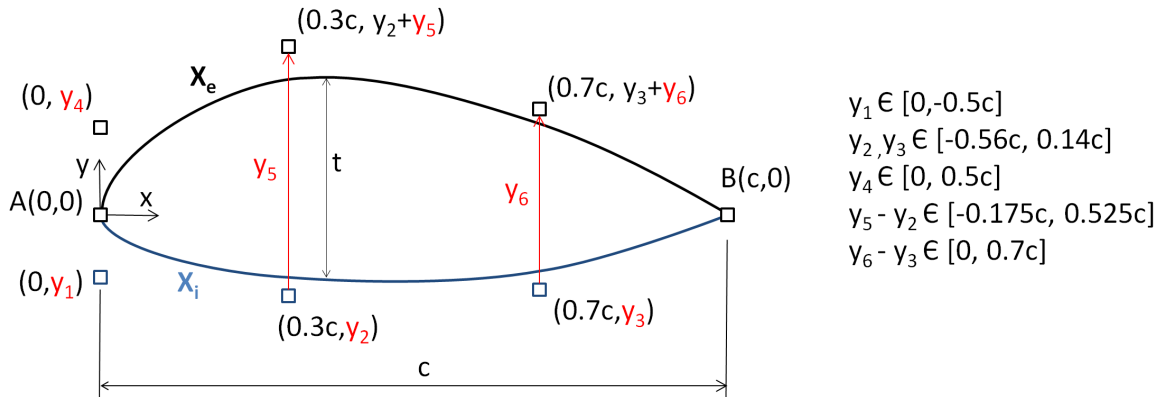


Figura III.1: Variables de diseño del perfil (en rojo), y sus intervalos de definición.

Cada curva tiene tres grados de libertad, y por lo tanto los perfiles tienen seis. Por las características de los polinomios de Bernstein, las tangentes en A y en B son respectivamente paralelas a los segmentos  $v_1v_2$  y  $v_4v_5$  (ver figura III.2), y como  $v_1v_2$  es vertical, ambas curvas tienen tangente vertical en el borde de entrada. Cuanto mayor sea la magnitud de  $y_1$  e  $y_4$  mayor es el radio de curvatura de cada curva en el borde de entrada.

La mayor flexibilidad de forma de estas curvas se da en la región delantera porque es donde hay más vértices de control. En concreto, en la proximidad del borde de entrada A es donde pueden producirse los mayores cambios de pendiente, y también las mayores curvaturas.

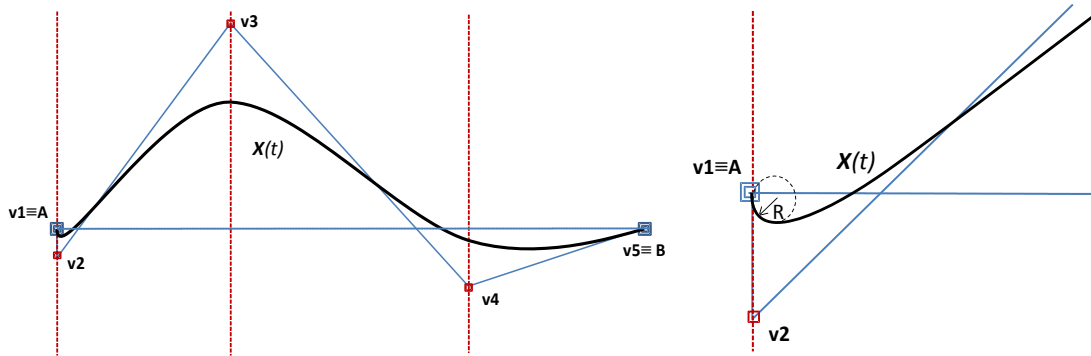


Figura III.2: Polígono y curva de Bézier de una pared de un perfil (izquierda). Detalle en la zona del borde de entrada, donde R denota el radio de curvatura mínimo en la curva (derecha).

En la curva de la figura III.2 se aprecia cómo cuando las ordenadas del segundo y tercer vértice,  $v_2$  y  $v_3$ , toman valores suficientemente elevados y de signo contrario, la curva  $X(t)$  en el tramo que sigue al borde de entrada del perfil presenta un radio de curvatura pequeño.

## 4. DESARROLLO DEL MÉTODO DE MALLADO AUTOMÁTICO

A continuación se recoge la evolución seguida para desarrollar el procedimiento de mallado válido para geometrías variables de los perfiles, incluyendo diferentes problemas que aparecieron y cómo se resolvieron.

El tipo de elemento finito elegido para las mallas fue el cuadrilátero lineal, porque tienen bajo coste y son más precisos que los triángulos lineales, siendo los “cuadráticos” más costosos. Inicialmente para los análisis se usó un modelo de turbulencia  $k-\epsilon$ . Con este tipo de modelos se modeliza únicamente la zona exterior dentro de la capa límite, de alto número de Reynolds, y para la zona más interior en lugar de emplear alta resolución de malla usan una única capa de elementos especiales con funciones de pared (descrito en el apartado I.2.6.1), lo que supone un ahorro notable en coste de malla.

### 4.1 MALLADO DESESTRUCTURADO E HÍBRIDO

Por sencillez, para garantizar la calidad de las mallas, se comenzó por usar mallas de tipo desestructurado e híbrido, que son generadas usando un programa comercial que emplea un algoritmo de frente móvil. Esta técnica no es fiable al cien por cien, porque pueden aparecer problemas en la etapa de cierre que bloqueen el proceso de mallado.

Ante este problema, la necesidad de mejorar la fiabilidad del proceso de generación de las mallas condujo a dividir el dominio de fluido en bloques de malla dispuestos de diferentes maneras (llamadas topologías ó *mapas de malla*) y cada vez de tamaño más pequeño. Estos mapas de malla fueron ensayados sobre grandes poblaciones de individuos obtenidos

aleatoriamente para chequear la calidad de las mallas y la fiabilidad de su proceso de generación. En las diferentes pruebas, la inmensa mayoría de las mallas producidas para los individuos fueron de calidad, pero siempre fallaba alguna malla al bloquearse el frente móvil, incluso cuando los bloques eran pequeños y sencillos.

#### 4.1.1 Elección del programa de mallado

Para elegir una herramienta adecuada para el mallado de dominios alrededor de perfiles, se evaluaron dos malladores comerciales: el módulo preprocesador del programa de elementos finitos Fidap, y el programa preprocesador Gambit, que es compatible con el procesador de Fidap, con el que se realizaron los cálculos.

Por sencillez, se comenzó por mallar el dominio de fluido de la figura III.3 con una malla desestructurada de un solo bloque, para un tamaño de elemento en las fronteras exteriores 9 veces mayor que en la pared.

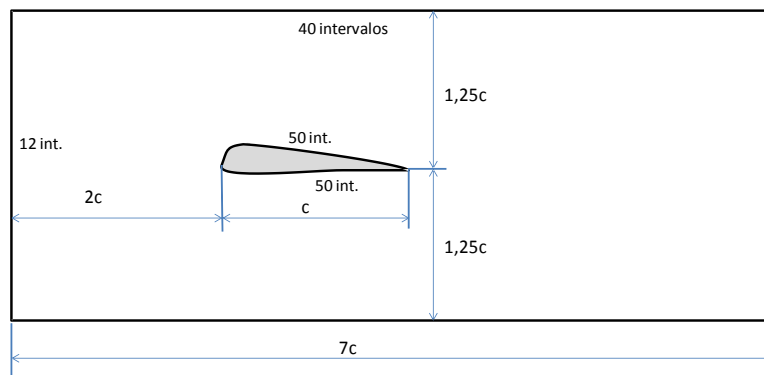


Figura III.3: Dominio de un solo bloque y densidad de malla especificada en las fronteras.

Los algoritmos de mallado desestructurado de Gambit y de Fidap usan la técnica de frente móvil, aunque presentan diferencias.

Como muestra la figura III.4 Fidap varía el tamaño de elemento de capa en capa, y malla correctamente el dominio. Gambit sin embargo usa elementos de tamaño uniforme, que cambian de tamaño únicamente en la etapa de cierre, al unir los frentes convergentes, y en este caso da un mallado fallido (figura III.5). La experiencia indica que éste mallador solo permite cambios de tamaño de elemento de hasta unas 2,5 veces entre una frontera y la opuesta en un bloque de malla. Entre ambas fronteras lógicamente tiene que haber una distancia suficiente para poder formar varias capas de elementos. Así, para mallar dominios con cambios de tamaño de elemento mucho mayores desde la pared hasta las fronteras exteriores, es necesario dividir el dominio en bloques de malla más pequeños, tal que el tamaño de elemento crezca de una frontera a la siguiente un máximo de 2,5 veces (ver figura III.6).

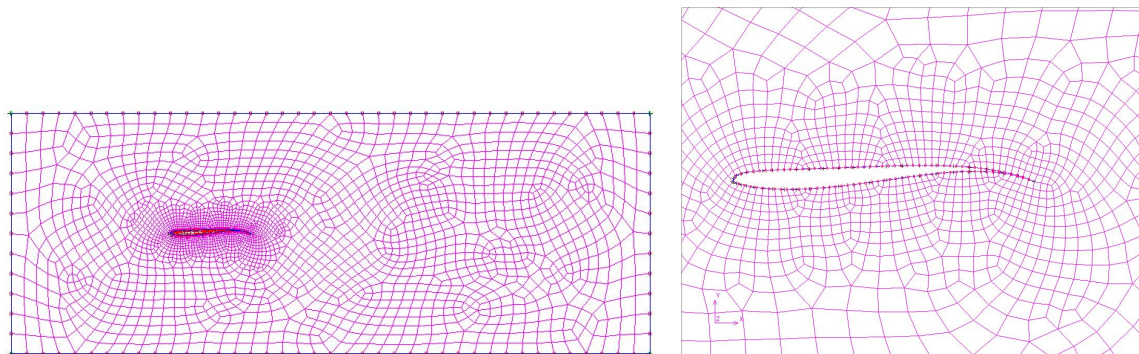


Figura III.4: Malla de un bloque generada con el programa Fidap (izquierda), detalle de la misma (derecha). El tamaño de elemento en la frontera exterior es 9 veces mayor que en la pared.

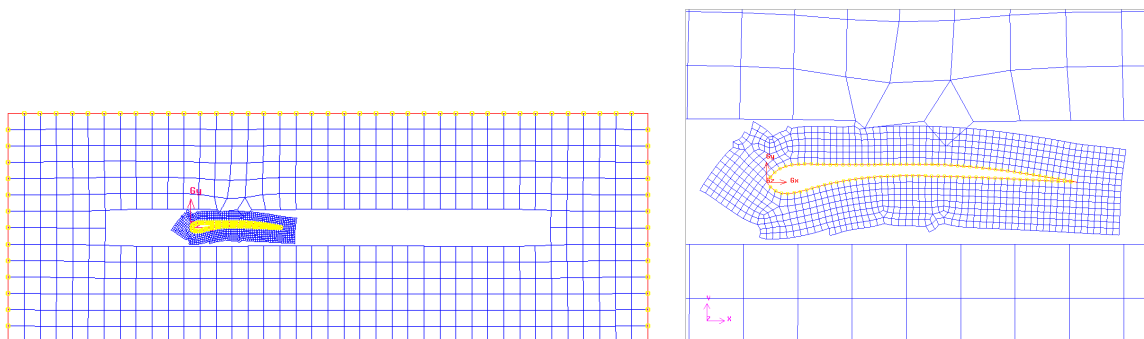


Figura III.5: Mallado usando Gambit que falla en la etapa de cierre (izquierda), y detalle del mismo (derecha). El tamaño de elemento en la frontera exterior es 9 veces mayor que en la pared.

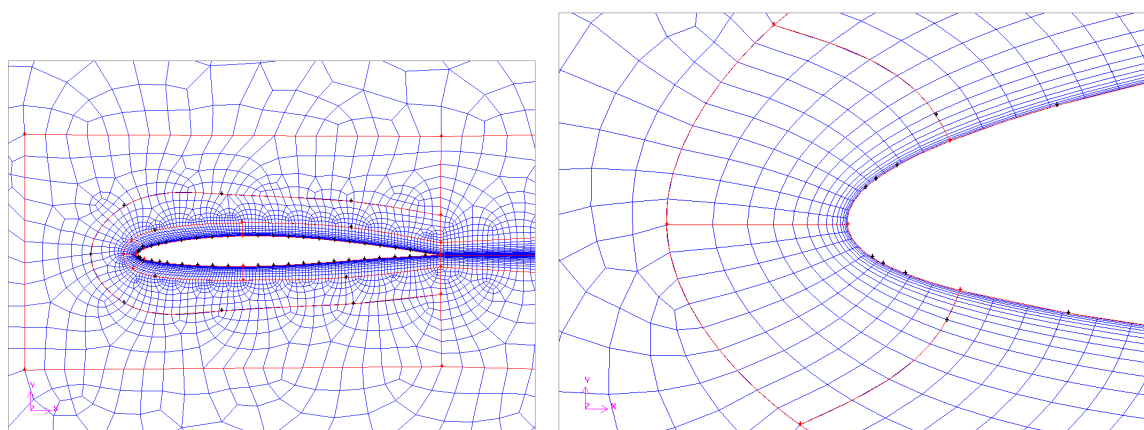


Figura III.6: Malla híbrida alrededor de un perfil generada con el preprocesador Gambit (izquierda), y detalle de la misma (derecha).

Por otra parte, para crecimientos de tamaño de elemento asumibles por ambos, Gambit falla con más frecuencia que Fidap en bloques de malla pequeños. Considerando todo lo anterior, se eligió Fidap frente a Gambit. De este modo además, el preprocesado y el procesado se realizan mediante Fidap, lo que ahorra el tiempo de abrir y cerrar el programa Gambit.

#### 4.1.2 Dominios con diferente número de bloques

Una vez elegido el preprocesador de Fidap, se realizó una prueba de mallado sobre una gran población de perfiles generados aleatoriamente, usando dominios con un único bloque como el de la figura III.3, y se produjeron abundantes mallados fallidos.

Para este dominio los frentes móviles son muy extensos, y la experiencia indica que el rendimiento de los algoritmos de frente móvil mejora en parcelas de malla pequeñas y de geometría sencilla, con frentes de malla menos extensos y más fáciles de cerrar. Esto condujo a dividir el dominio en diferentes bloques de malla, esperando reducir el número de fallos de mallado. Además, este tipo de topologías multibloque permite concentrar la densidad de malla en las regiones críticas sin afectar a bloques alejados de éstas.

Así, el dominio fue aparcelado en dos bloques de malla en la forma de la figura III.7, donde las fronteras exteriores del bloque interior forman un mismo rectángulo para todos los perfiles.

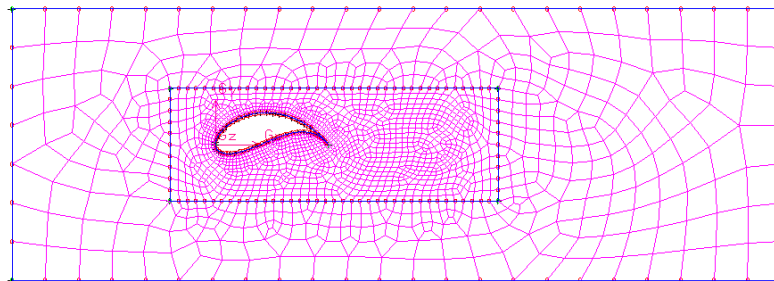


Figura III.7: Dominio dividido en dos bloques de malla.

Realizando una prueba de mallado sobre una población grande de perfiles generados aleatoriamente se obtuvo un gran número de mallados fallidos.

Obsérvese que el extradós del perfil de la figura III.7 está relativamente cerca de la frontera exterior superior de su bloque. En el espacio de búsqueda existen perfiles cuya pared se acerca aún más a la misma frontera superior, y esto dificulta la construcción de un número de capas de elementos suficiente para salvar la diferencia de tamaño de elemento entre ambas fronteras. Entonces, se impuso una distancia mínima entre la pared y las fronteras exteriores de su bloque de malla, en la forma de la figura III.8 (donde dicha distancia vale  $0,3c$ ), pero desafortunadamente en las pruebas seguían fallando algunos mallados.



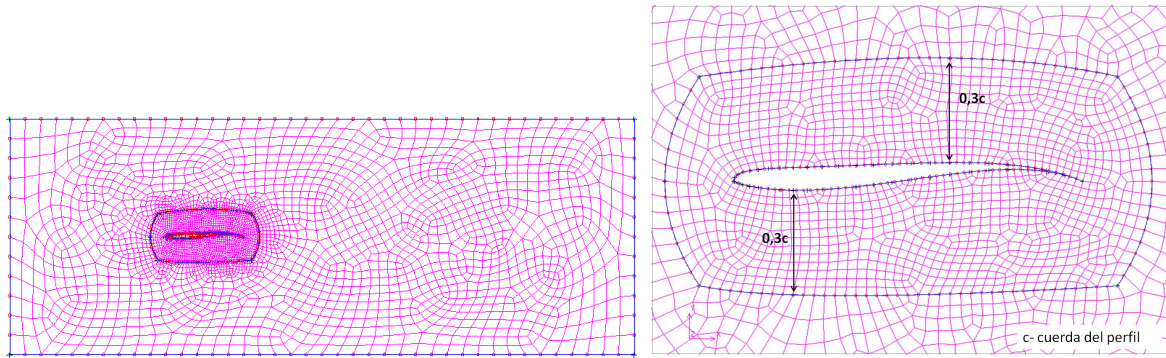


Figura III.8: Dominio con dos bloques de malla (izquierda), detalle de fronteras intermedias definidas en función del perfil (derecha).

La persistencia de los problemas en el cierre de algunas mallas, condujo a dividir el dominio en un mayor número de bloques de malla, cada vez más pequeños y simples, para intentar simplificar sus frentes móviles para facilitar el mallado de los perfiles. El mapa de malla de las figuras III.9 y III.10 tiene una topología de siete bloques, y también garantiza una distancia mínima entre la pared del perfil y las fronteras que la rodean. Sobre ésta topología se construyeron mallas con diferente distribución de densidad de malla, como muestran las figuras III.9 y III.10.

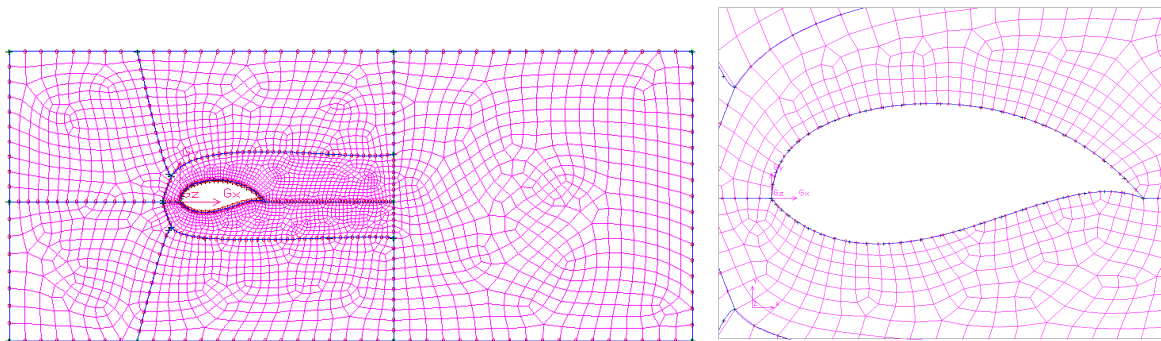


Figura III.9: Malla sobre topología de siete bloques de malla (izquierda), y detalle (derecha).

En concreto, la densidad de malla de la figura III.10 ha sido redistribuida para mejorar su eficiencia. El tamaño de elemento crece 25 veces, y tiene una mayor densidad de malla en la pared del perfil, donde además se ha colocado una zona de malla estructurada con elementos anisotrópicos.

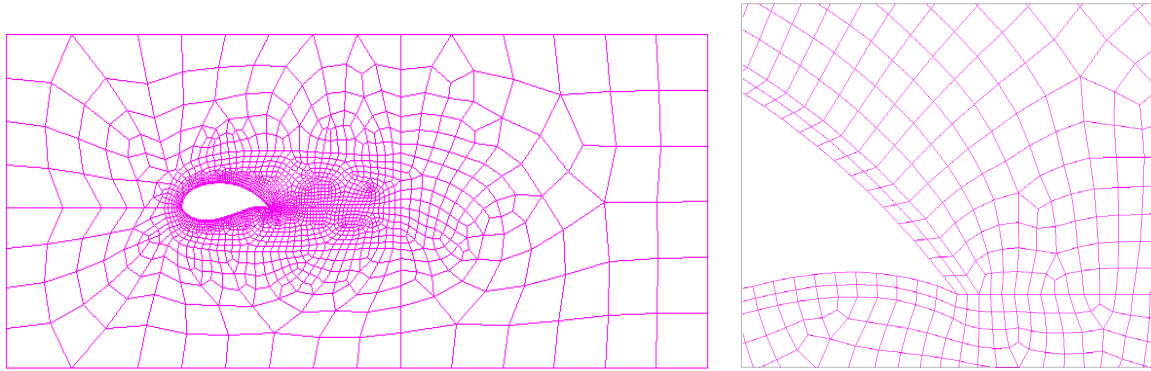


Figura III.10: Malla híbrida de 2100 elementos con malla estructurada de dos capas de elementos de espesor 0,01c , sobre la misma topología de siete bloques de malla (izquierda), y detalle del borde de salida (derecha).

Mallando poblaciones de perfiles aleatorios aparecieron más fallos en las del tipo de la figura III.10 (uno por cada 25 mallas) que en las de la figura III.9.

Para mejorar la calidad de malla en la zona del borde de salida, como muestra la figura III.11, fueron definidas nuevas fronteras en el borde de salida normales a la pared, y nuevos bloques de malla aguas abajo del perfil, para controlar la disminución de densidad de malla en esta zona.

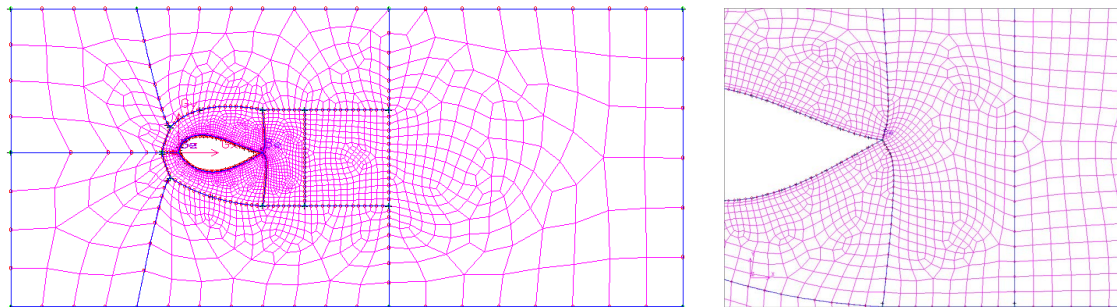


Figura III.11: Mapa de malla integrado por nueve bloques de malla (izquierda), y detalle del borde de salida (derecha).

Con estas medidas la frecuencia de los mallados fallidos se redujo aunque lamentablemente no llegaban a desaparecer. Dos pruebas de mallado, con ligeras diferencias de densidad de malla sobre una población de 90.000 perfiles generados aleatoriamente, dieron respectivamente 37 y 992 mallados fallidos, que son respectivamente 4 y 110 por cada 10.000 individuos.

Para intentar mejorar estos resultados, los bloques de malla más exteriores situados encima y debajo del perfil fueron partidos en dos como muestra la figura III.12 arriba.

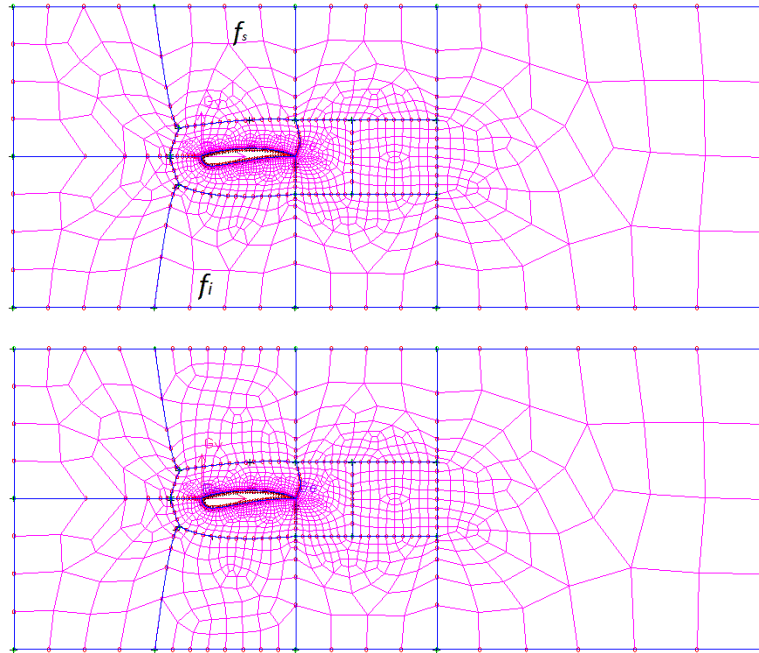


Figura III.12: Mallado híbrido sobre dominio dividido en once bloques (arriba). Malla de once bloques una vez modificada la gradación de las fronteras  $f_s$  y  $f_i$  (abajo).

En una prueba de mallado sobre este mapa de malla aparecieron 17 mallados fallidos por cada diez mil, y se dieron principalmente en los bloques de malla que contienen a las fronteras exteriores  $f_s$  y  $f_i$  (ver figura III.12 arriba). Entonces se optó por reintentar construir la malla de estos bloques de manera automática, cambiando el número de elementos en dichas fronteras. Así, cada vez que aparecía un mensaje de error de mallado del preprocesador, automáticamente se incrementaba en dos el número de elementos de ambas fronteras. Y si volvía a darse el fallo para el mismo individuo, se repetía la misma acción hasta un máximo de 4 veces.

Con esta medida se redujo el número de errores de mallado, aunque no pudieron ser eliminados completamente. Dos pruebas de búsqueda usando este mapa de malla mostraron una frecuencia de mallados fallidos encontrada de 4 y 6 por cada diez mil individuos.

Resumiendo, se ha intentado reconstruir las mallas para las geometrías cambiantes usando mallas desestructuradas (e híbridas) generadas con la técnica de frente móvil, porque su calidad (a diferencia de lo que ocurre con las mallas estructuradas generadas mediante interpolación transfinita) no depende de la forma de las fronteras de los bloques, y entonces el procedimiento de mallado es sencillo de automatizar. Sin embargo, esta técnica no es fiable al cien por cien, y en ocasiones en la etapa de cierre se bloquea y falla si el hueco que resta por mallar resulta demasiado difícil de rellenar con elementos correctos.

Entonces, para mejorar la fiabilidad del proceso se han empleado diferentes estructuras de bloques, que han reducido y simplificado los frentes móviles usando bloques cada vez más sencillos y pequeños, y con restricciones de distancia mínima entre las fronteras. Estos diferentes parcelamientos del dominio además han permitido una distribución más

eficiente de la densidad de malla. Desafortunadamente, no se ha conseguido la robustez total del proceso de generación de malla frente móvil, y esto implica la eliminación en la búsqueda mediante GA de los perfiles cuyo mallado ha fallado. Como ésta situación no la consideramos aceptable, hemos optado por usar mallas estructuradas. Como veremos a continuación esto aumenta el coste de malla y la complejidad del procedimiento de generación de malla para las geometrías cambiantes.

## 4.2 MALLADO ESTRUCTURADO

El uso de mallas estructuradas aparece como una alternativa fiable para mallar geometrías cambiantes, al no presentar sus técnicas de generación de malla, en principio, problemas de fiabilidad en el proceso de mallado. Una malla estructurada plana es la cuadrícula resultante de cruzar dos familias de líneas de malla. Esto tiene el inconveniente, de que para la misma precisión las mallas estructuradas dan un mayor coste de malla que las desestructuradas. En efecto, debido a la continuidad de sus líneas de malla a través de todo el dominio, el refinado de malla en la pared implica aumentar la densidad de malla también en el resto del dominio, dando un sobrecoste de malla innecesario en las regiones alejadas de la pared.

En concreto, para la generación de mallas estructuradas se ha seleccionado la técnica de interpolación transfinita (TFI) por su rapidez, sencillez y disponibilidad en los programas comerciales. Usando la técnica TFI, cada una de las dos familias de líneas de malla se obtiene interpolando algebraicamente el par correspondiente de fronteras opuestas de un cuadrilátero curvilíneo plano. Este método de mallado no tiene riesgo de quedarse bloqueado durante la generación de la malla, sin embargo, tiene el inconveniente de que la forma de las líneas de malla, y en consecuencia la calidad de los elementos, depende de la geometría de las fronteras.

Así la dificultad principal de generar mallas estructuradas mediante TFI en geometrías cambiantes, es conseguir mallas de calidad para todas ellas. Para ello, se ha desarrollado un procedimiento de mallado automático que considera las características de la ley de interpolación mencionada, para establecer un control de la geometría de las fronteras que pueda proporcionar elementos de calidad en su interior.

El procedimiento consiste en definir una *topología* de bloques de malla capaz de proporcionar mallas correctas (tal que los elementos no tengan ángulos cóncavos) para el amplio conjunto de formas incluidas en el espacio de búsqueda. Una topología es la forma en que están colocados los bloques y sus conectividades, y también se le llama *mapa* de malla o *estructura* de bloques de la malla. Las fronteras de los bloques (salvo las paredes del perfil y las fronteras exteriores del dominio, que son dato) serán definidas en función de la forma particular de cada perfil para que las líneas de malla de los bloques den elementos de calidad. En particular, es importante la definición de las fronteras de los bloques de malla que rodean la pared, porque junto a ella se encuentran las zonas críticas del flujo.

Para el mallado estructurado se ha empleado inicialmente el preprocesador del programa comercial Fidap. El dominio fluido es el área de la figura III.3, y el perfil se define

mediante dos curvas de Bézier en la forma descrita en el apartado 3. Como se va a ver a continuación, se usaron diferentes topologías de bloques de malla (ver figura I.50) que fueron modificadas hasta poder mallar correctamente perfiles de geometría compleja.

### 4.2.1 Topología multibloque en O

Inicialmente el dominio fue dividido en la estructura de bloques de malla en forma de O de la figura III.13 izquierda, integrada por diez bloques. Aquí la letra *e* -de extradós- designa entidades geométricas ubicadas en la parte de arriba del dominio, y la *i* -de intradós- sus homólogas de la parte inferior. Se denominan *radiales* las fronteras o líneas de malla que surgen del perfil (ellas o sus prolongaciones), como las fronteras *A-AA* y *Ce-CCe*; y *circundantes* las que lo rodean sin cortarlo, como las fronteras *AA-BB* de los bloques *B1*.

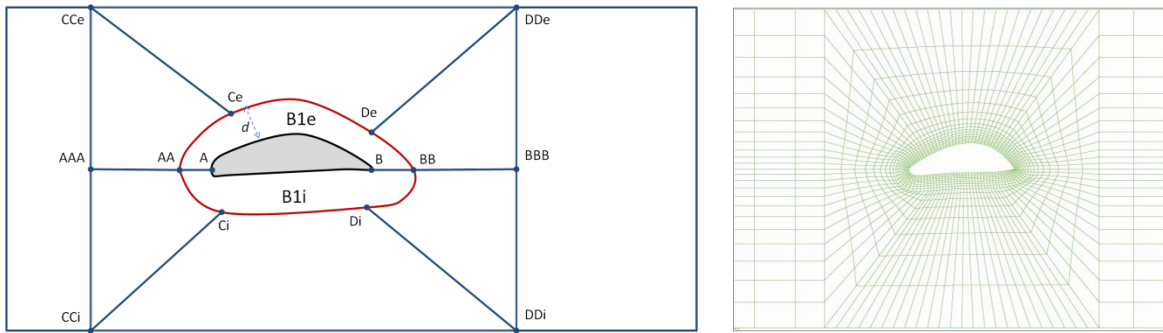


Figura III.13: Dominio en forma de O dividido en diez bloques de malla (izquierda), y ejemplo de malla alrededor de un perfil que apenas presenta concavidad (derecha).

Para construir en el bloque B1 capas de elementos de espesor constante a lo largo de la pared, se definen las fronteras circundantes *AA-BB* de modo que rodean al perfil a una distancia aproximada  $d$  (habitualmente se tomará  $d=0,2c$ ). Son curvas tipo NURBS que interpolan una hilera de  $m+2$  puntos  $Y_k$  obtenidos según muestra la figura III.14. En adelante las letras mayúsculas en negrita denotarán vectores de posición.

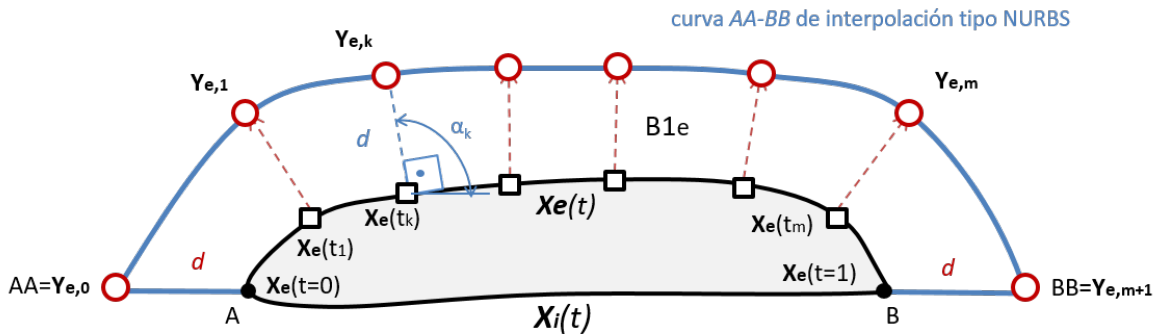


Figura III.14: Construcción de las fronteras de los bloques de malla *B1e* y *B1i*, extruyendo puntos en dirección normal a la pared una distancia  $d$ .

El primero y el último,  $Y_0$  e  $Y_{m+1}$ , son los vértices *AA* y *BB* situados sobre la horizontal  $y=0$

a una distancia  $d$  del perfil. Y entre ambos se encuentran  $m=24$  puntos

$$Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_m; \quad k=1, \dots, m; \quad (\text{III.3})$$

obtenidos respectivamente proyectando los siguientes  $m$  puntos de la pared  $X[x(t),y(t)]$ ,

$$X_1(t_1), \dots, X_k(t_k), \dots, X_m(t_m); \quad t_k=k\Delta t, \Delta t=1/(m+1)=0,04, 0 < t < 1, k=1,2 \dots, m; \quad (\text{III.4})$$

una distancia  $d$  en dirección normal al perfil hacia afuera, resultando sus coordenadas

$$Y_k=(x_k + d\cos\alpha_k, y_k + d\sin\alpha_k), \quad (\text{III.5})$$

siendo  $\alpha_k$  el ángulo entre la normal en el punto  $X(t_k)$  de la pared y el eje  $x$ . Las curvas AA-C-D-BB interpolan 26 puntos.

Para estudiar la validez de este *mapa de malla* (ver figura III.13 izquierda), se ha dibujado en la figura III.15 izquierda un esquema de la malla de los bloques de malla BI para un perfil que presenta una ligera concavidad en el intradós.

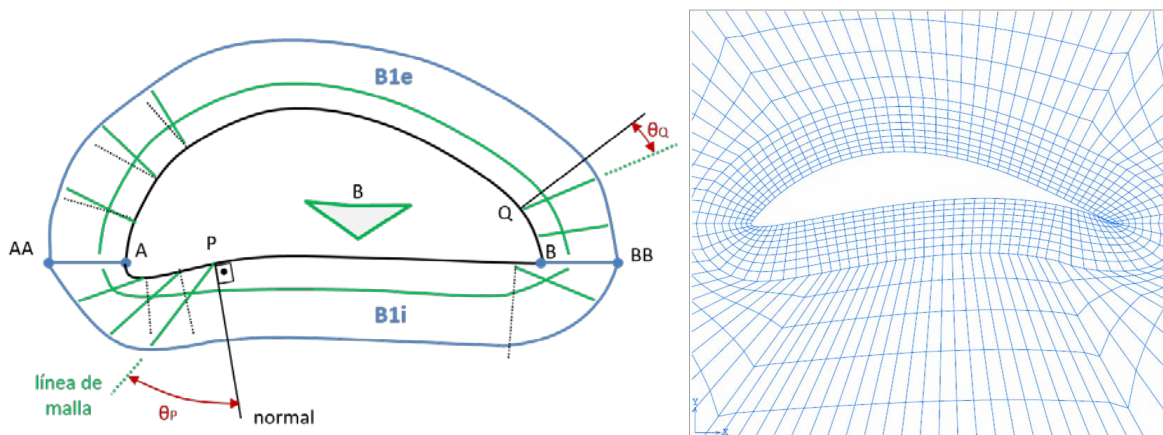


Figura III.15: Esquema de la malla del bloque B1 para un perfil ligeramente cóncavo en el intradós (izquierda). Malla alrededor de un perfil con rasgos geométricos similares usando el mapa de malla actual (derecha).

El ángulo  $\theta$  entre la normal y la línea de malla en la pared caracteriza la distorsión de los elementos en la pared. En el esquema puede observarse cómo en el intradós junto al borde de ataque hay elementos muy distorsionados. Además, en el borde de salida hay al menos un elemento incorrecto, por lo tanto el mapa de malla no es admisible. En la figura III.15 derecha aparece una malla para un perfil de características similares. Para evitar la posibilidad de ambos problemas, se modificó el mapa de malla como se explica en el siguiente apartado.

#### 4.2.2 Topología multibloque en C



En el bloque  $B1$  del mapa de malla de las figuras III.13 y III.15, según las características de la interpolación transfinita, la dirección de las líneas de malla "radiales" en su origen en la pared, viene fijada por la dirección en la pared de las fronteras "radiales" opuestas  $A-AA$  y  $B-BB$ . Como este bloque de malla recorre toda la longitud de la pared, la dirección de la pared puede experimentar grandes cambios y oscilaciones, y entonces la distorsión  $\theta$  de los elementos en la pared puede ser grande.

Para reducir dicha distorsión, se pueden disminuir los cambios en la pendiente de la pared dividiendo la pared en tramos más cortos. Así se ha definido la nueva frontera normal  $C-CC$  que divide el bloque  $B1$  como muestra la figura III.16. Esta curva es una línea de malla que definimos nosotros en dirección normal, que además mejora la calidad de la malla en sus cercanías en ambos bloques nuevos  $B1$  y  $B2$ .

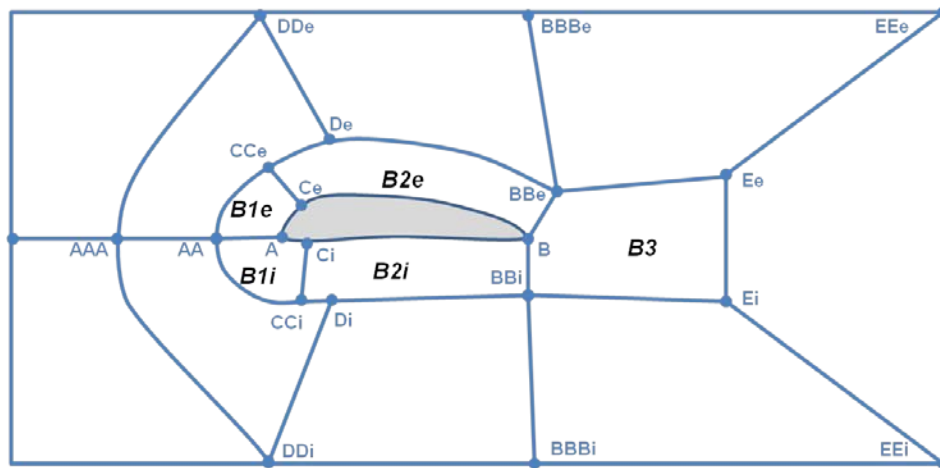


Figura III.16: Topología del dominio en forma de  $C$  que incluye un bloque de malla para la estela.

Además, para mejorar la calidad de la malla en el borde de salida y en la estela, se ha modificado el mapa de malla de la figura III.13 como muestra la figura III.17, desuniendo los bloques  $B1e$  y  $B1i$  por su zona posterior, tal que ahora la topología de bloques de malla presenta forma de  $C$ .

#### Trazado de las fronteras "radiales" $C-CC$

Como muestra la figura III.17 izquierda, el vértice  $C$  fue ubicado en la zona delantera del perfil, en el noveno punto  $X_8$  del conjunto  $X$  de 26 puntos del perfil, porque en esta zona la pendiente del perfil puede variar más rápidamente, como se ha mostrado en el apartado 3.

La nueva frontera circundante  $AA-CC$  es una curva NURBS que interpola la hilera de 9 puntos  $\{AA \equiv Y_0, Y_1, \dots, Y_8\}$ , mientras que la frontera  $CC-BB$  interpola los 17 restantes  $\{CC \equiv Y_8, Y_9, \dots, Y_{24}, BB\}$ . El vértice  $BB$  es la intersección entre la normal a la pared en el borde de salida y la horizontal  $BB-E$  (paralela a la cuerda a distancia  $d$ ).

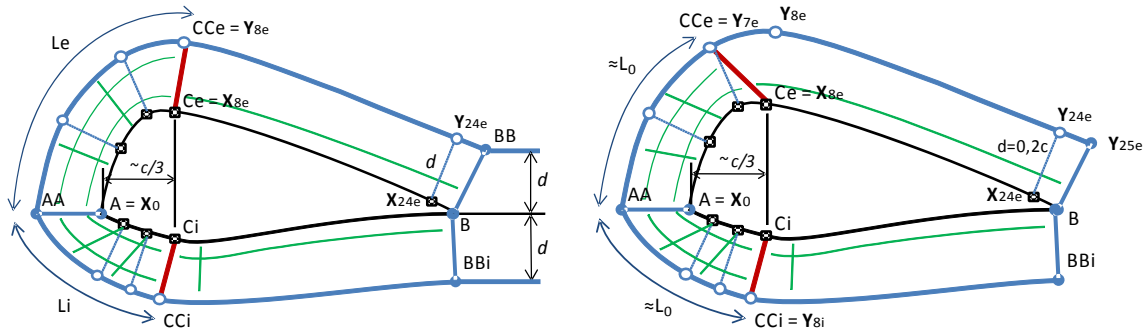


Figura III.17: Detalle de los nuevos bloques B1, B2 y B3 (izquierda). Modificación de las fronteras para controlar la densidad de malla en los bloques B1 (derecha).

Por sencillez, el número de elementos en la pared  $n=n_e=n_i$  es fijo. Estos elementos están repartidos en  $n_1$  elementos para el tramo anterior A-C, y  $n_2$  elementos para en el tramo posterior C-B, siendo  $n_1+n_2=n$ . La longitud L de cada curva AA-CC y la longitud de sus elementos varían con la forma del tramo de pared AC correspondiente (ver figura III.17 izquierda).

Para homogeneizar el tamaño de elemento en las curvas circundantes delanteras AA-CC de los diferentes perfiles, se trató de fijar su longitud con independencia del perfil. Para ello, la curva AA-CC interpolará un número variable de puntos, tomando  $Y_0, Y_1, \dots$  hasta que su longitud alcance el valor  $L_{AA-CC}=0,42c=L_0$ , (para  $d=0,2c$ , ver figura III.17 derecha). La longitud de la curva AA-CC se estima sumando las distancias consecutivas que hay entre sus puntos. En el caso en que se haya incluido hasta el punto  $Y_8$  y la longitud de esta curva  $Y_0-\dots-Y_8$  aún sea inferior a  $L_0$ , entonces se construye esta misma curva  $AA \equiv Y_0-Y_1 -\dots-Y_8 \equiv CC$  sin atender a su longitud.

El esquema de la figura III.17 derecha muestra un ejemplo del uso de este procedimiento, la curva AA-CC inferior interpola 9 puntos, mientras que su homóloga de la parte superior interpola 8 puntos. Se ha conseguido uniformizar el tamaño de elemento en las fronteras AA-CC, pero aparece el inconveniente de que en C la inclinación de la frontera C-CC respecto de la normal depende del perfil, pudiendo dar distorsiones elevadas en C como muestra la figura III.17 derecha en el extradós y la III.18 izquierda en el intradós.

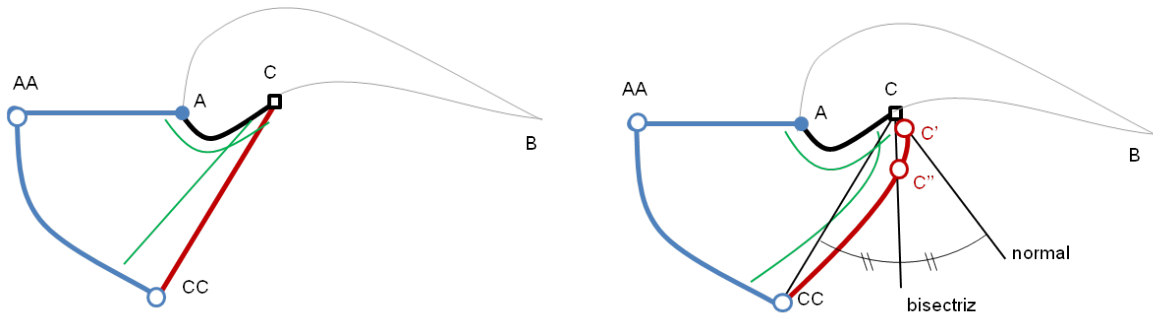


Figura III.18: Malla muy distorsionada en el intradós (izquierda). Modificación de la frontera C-CC, empleando puntos directores intermedios para reducir la distorsión en la pared (derecha).



La distorsión puede ser reducida trazando la curva  $C-CC$  normal a la pared en su inicio  $C$  en la forma de la figura III.18 derecha. Para ello, la frontera  $C-CC$  fue redibujada en las proximidades de la pared interpolando también los puntos  $C'$  y  $C''$  después del punto  $C$ . El punto  $C'$  está situado sobre la normal a la pared en  $C$  a una distancia de ésta similar al espesor de varias de las primeras capas de elementos desde la pared. A continuación el punto  $C''$  se sitúa respecto del  $C'$ , a una distancia similar a la anterior sobre la bisectriz entre la normal y la recta  $C-CC$  para que esta nueva frontera curva  $C-C'-C''-CC$  no se aleje demasiado de su cuerda, la recta  $C-CC$ .

Para mejorar la calidad de la malla en los bloques exteriores, como muestra la figura III.19 izquierda, para sus fronteras radiales  $CC-CCC$  de manera análoga se definieron puntos intermedios  $CC'$  y  $CC''$ , y para la  $BB-BBB$  el punto  $BB'$  sobre la bisectriz de las curvas  $CC-BB$  y  $BB-D$  de los bloques exteriores.

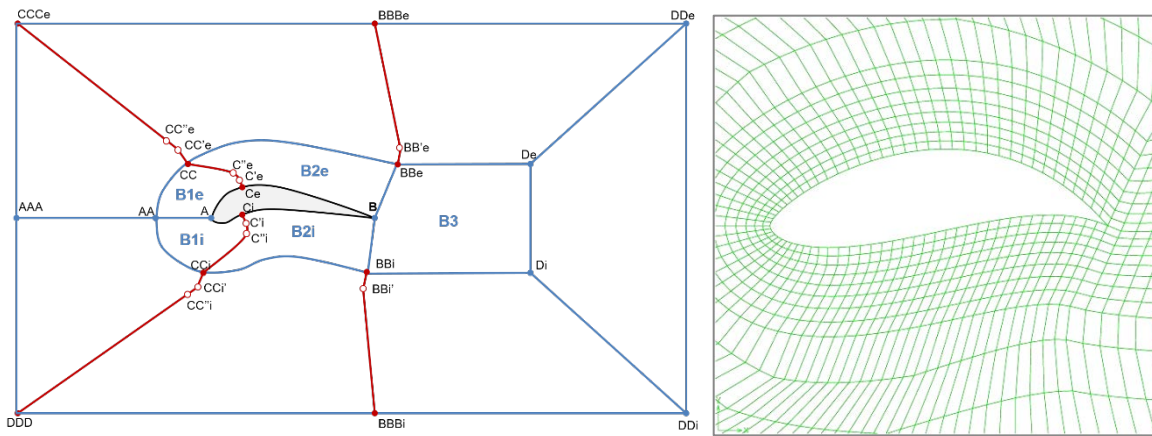


Figura III.19: Modificaciones en el mapa de malla (izquierda). Malla en las cercanías de un perfil de geometría relativamente sencilla (derecha).

Usando este mapa de malla modificado se ha obtenido la malla alrededor de un perfil de geometría sencilla de la figura III.19 derecha.

Para comprobar la validez del mapa de malla actual (figura III.19) se chequea a continuación la calidad de la malla para geometrías más complejas del espacio de búsqueda. Por ejemplo, los perfiles que aparecen en la figura III.20 y III.21, que estarían junto a los límites del espacio de búsqueda (ver figura III.1) al tener valores de  $y_1$  prácticamente nulos, presentan una pendiente positiva en el intradós en el borde de entrada  $A$ , tal que las fronteras del bloque  $B1i$  forman en  $A$  un ángulo superior a  $180^\circ$  que produce elementos incorrectos.

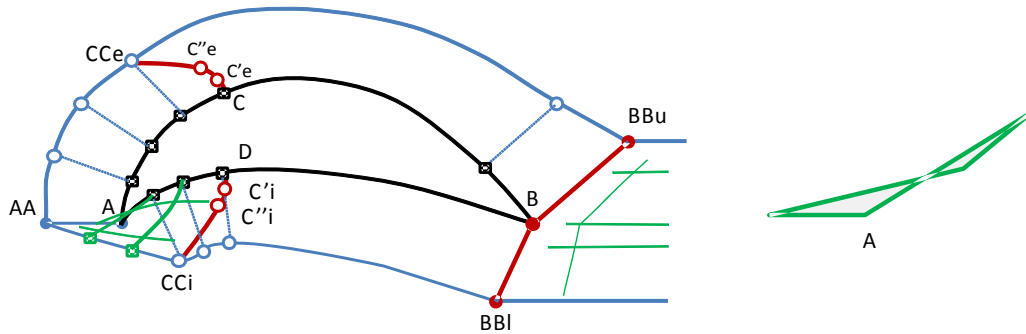


Figura III.20: Malla incorrecta usando el actual mapa de malla (izquierda), y elemento incorrecto (derecha).

En la malla de la figura III.21 (obtenida para una separación  $d=0,4c$  para acentuar defectos) se pueden apreciar elementos incorrectos en el borde de ataque, y en el bloque exterior  $B2i$  (ver nomenclatura de la figura III.17).

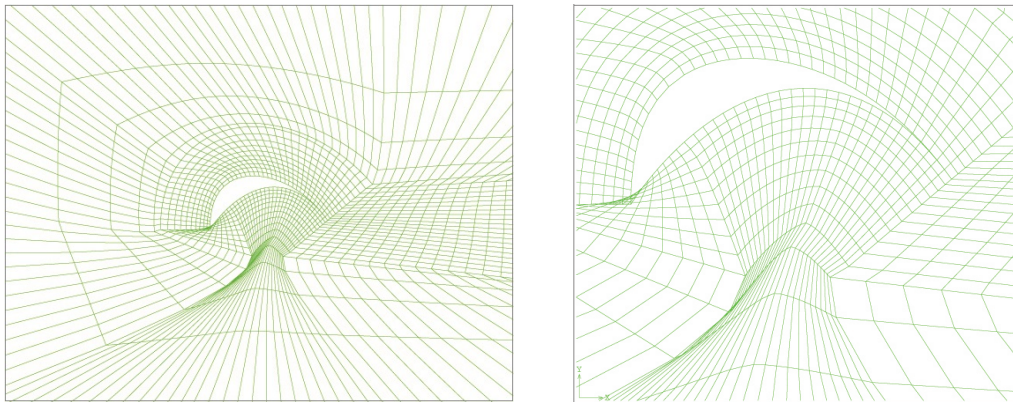


Figura III.21: Malla incorrecta alrededor de un perfil cóncavo para un valor excesivo de la distancia  $d$  (izquierda), y detalle (derecha).

Para poder mallar correctamente perfiles de este tipo incluso más afilados en la nariz, se pensó en orientar de manera más favorable las fronteras  $A-AA$  y  $AA-AAA$  como muestra la figura III.22. Sin embargo, en el borde de ataque son inevitables los elementos de muy mala calidad, y la dificultad para adaptar este mapa de malla para conseguir buenas líneas de malla en la zona X parece importante.

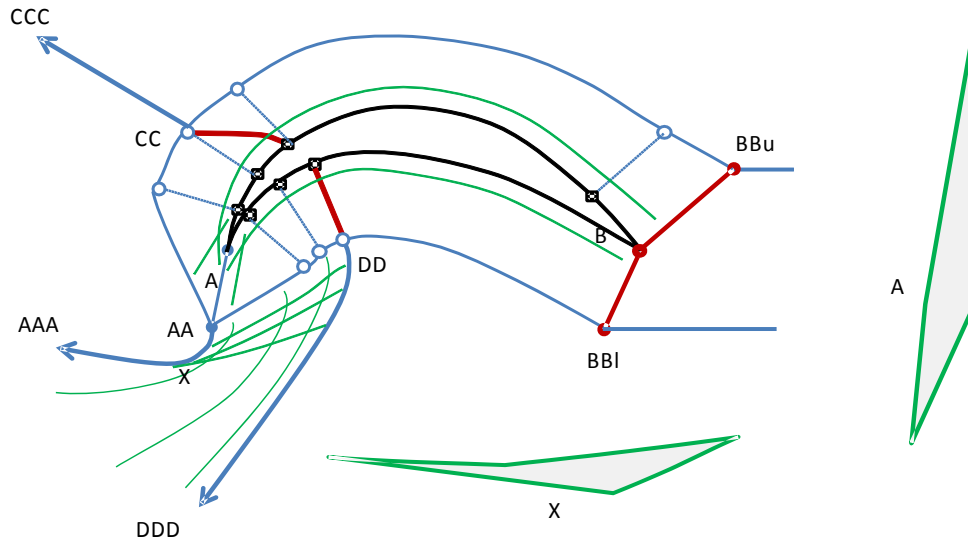


Figura III.22: Bloques de malla para un perfil de elevada combadura y nariz afilada, para la que no sirve la topología en forma de C.

### 4.2.3 Topología multibloque en H

Los problemas encontrados en el mallado de perfiles de geometría cada vez más compleja usando una topología de bloques de malla en forma de C, motivaron el uso de una nueva topología en forma de H, mostrada en la figura III.23.

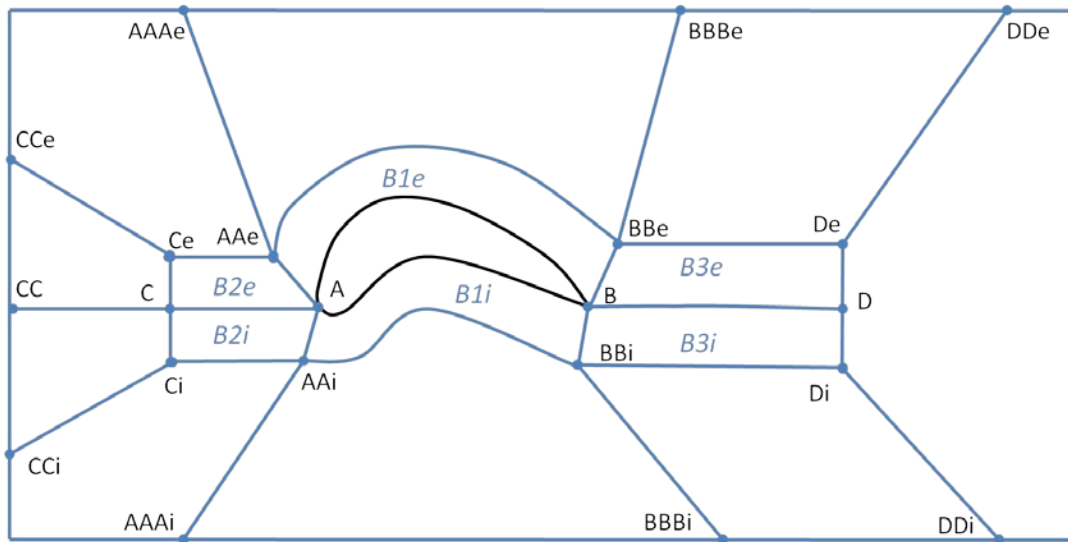


Figura III.23: Estructura de bloques en H alrededor del perfil.

Como muestra el detalle de la figura III.24 de este nuevo mapa de malla, se ha hecho coincidir la frontera A-AA del bloque de malla B1 con la bisectriz del ángulo  $\gamma$  (formado por la tangente a la pared y la horizontal en el borde de ataque) al objeto de limitar la distorsión

máxima de los elementos ubicados a sus lados en las proximidades del vértice A. Análogamente la frontera  $B-BB$  divide por la mitad el ángulo  $\zeta$  entre la pared en el borde de salida y la horizontal.

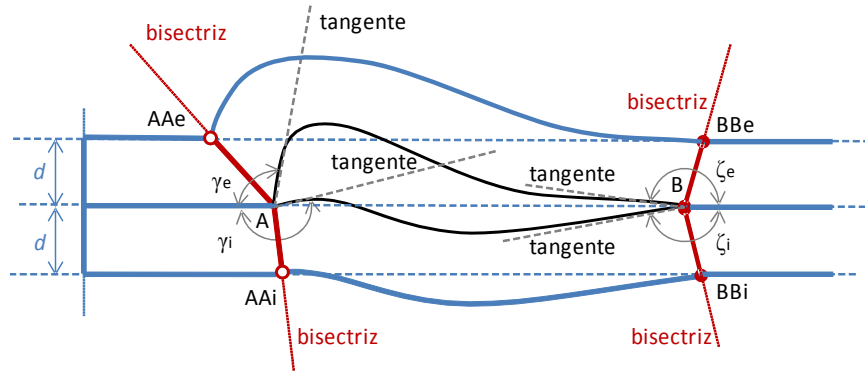


Figura III.24: Detalle de la estructura de bloques en  $H$  alrededor del perfil.

*Redefinición de la frontera circundante AA-BB*

Como muestra la figura III.14, la frontera  $AA-BB$  que rodea cada pared  $X(t)$  del perfil, fue definida interpolando una hilera  $Y$  de 26 puntos, habiendo sido proyectados desde la pared los 24 intermedios. Sin embargo, como muestra el esquema de la figura III.25, esta definición de la frontera no es adecuada para el nuevo mapa de malla en  $H$ , sobre un espacio de búsqueda que incluya geometrías de cierta complejidad.

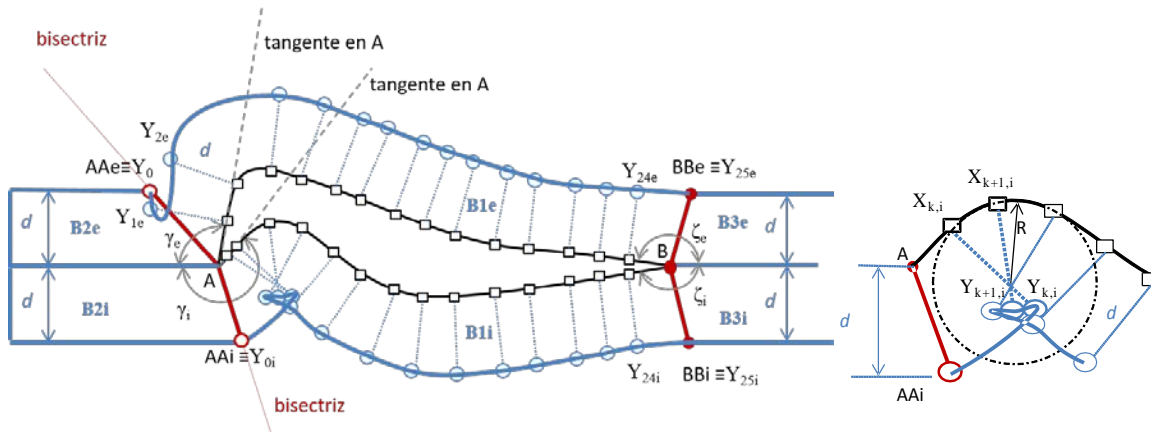


Figura III.25: Propuesta inicial de fronteras para los bloques que rodean al perfil (izquierda), y detalle en la parte delantera del intradós (derecha).

En efecto, el primer punto  $AAe \equiv Y_{0,e}$  de la frontera  $AA_e-BB_e$  se ubica sobre la frontera bisectriz  $A-AA_e$ , y para el caso del perfil de la figura III.25, el punto  $Y_{1,e}$  aparece situado a la izquierda de esta bisectriz. Esto hace que la frontera  $AA_e-BB_e$  oscile e invada el área del bloque  $B2e$  a su izquierda, dando elementos incorrectos en el bloque de malla  $B1e$ , que se superponen sobre otros del bloque  $B2e$ .

Por otra parte, si la pared presenta una concavidad cuyo radio de curvatura  $R$  es menor que la distancia  $d$ , en la frontera  $AA-BB$  aparecerán lazos o cambios de dirección bruscos. En efecto, en la parte delantera del intradós del perfil de la figura III.25, hay una concavidad de este tipo y entonces las normales se cortan a distancias de la pared  $R < d$ , produciéndose un lazo en la curva  $AA_i-BB_i$ , es decir

$$abscisa(Y_{k+1}) < abscisa(Y_k) \tag{III.6}$$

Una manera de evitar este tipo de problema es reducir la distancia  $d$  a un valor menor que el radio de curvatura mínimo del perfil, como muestra la figura III.26. Sin embargo, esto no hace más que trasladar al bloque inmediatamente exterior la dificultad de conseguir una buena malla, y superarla supondría complicar notablemente el procedimiento de malla.

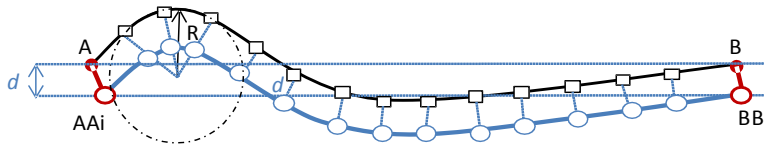


Figura III.26: Trazado de la curva  $AA-BB$  del intradós reduciendo la distancia  $d$ .

De manera alternativa, como muestra el esquema de la figura III.27, reducimos el número de puntos proyectados intermedios de la hilera  $Y$  (expresión (III.3)) que define la curva  $AA-BB$ , de 24 a solamente 5. Estos cinco puntos  $Y_1, \dots, Y_5$  son también proyectados desde la pared y como muestra la figura III.27 guardan entre ellos como mínimo la distancia horizontal de seguridad

$$\Delta X = [abscisa(BB) - abscisa(AA)]/6, \tag{III.7}$$

donde  $\Delta X$  tiene un valor muy próximo a  $c/6$ . Como se ha venido haciendo hasta ahora se va a usar la misma distancia  $d=0,2c$ .

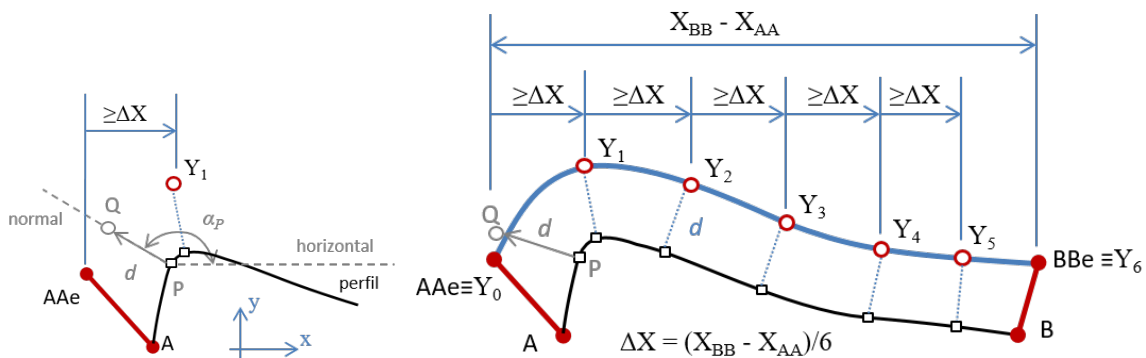


Figura III.27: Construcción mejorada de la curva circundante  $AA-BB$ .

El procedimiento para hallar estos cinco puntos consiste en mover un punto auxiliar de la

pared  $P=X(t_P)=(x_P, y_P)$  a lo largo de ella e ir calculando puntos proyectados  $Q \equiv (x_P + d \cos \alpha_P, y_P + d \sin \alpha_P)$ . El punto P se sitúa inicialmente en  $t=t_0=0,01$  y se mueve a lo largo de la pared hacia la derecha incrementando  $t$  en  $\Delta t=1/25=0,04$ . Cuando su proyectado Q diste del punto anterior AA la distancia horizontal  $\Delta X$ , éste pasa a ser  $Y_1$ . Y así sucesivamente hasta obtener  $Y_5$ .

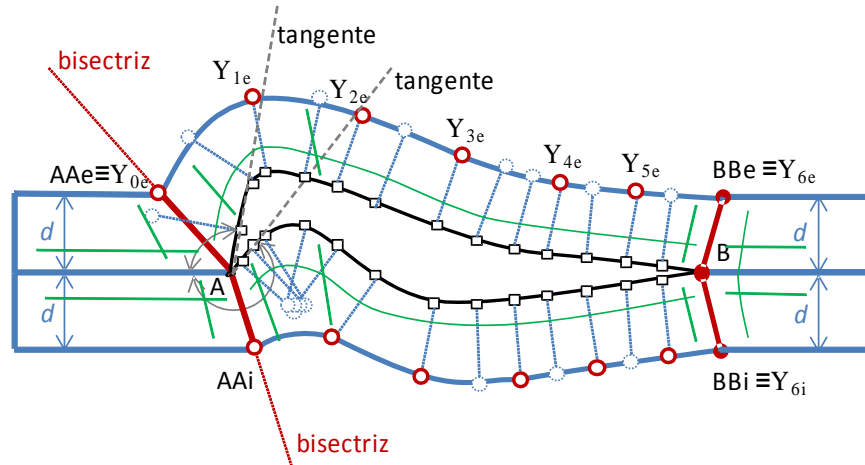


Figura III.28: Nueva definición de la curva AA-BB. En rojo los puntos a interpolar.

Debido a la separación impuesta entre los nuevos puntos  $Y_k$ , las fronteras AA-BB varían ahora más suavemente y se ha evitado la posibilidad de formación de lazos sobre sí misma, de modo que mejora la calidad de las mallas, como muestra por ejemplo la figura III.28 para el mismo perfil de la figura III.25.

#### Modificaciones de las fronteras que salen de la pared

En perfiles con formas del tipo de la figura III.29 (que para simplificar el dibujo tiene espesor nulo, tal que coinciden las curvas del extradós y del intradós) con concavidades junto al borde de entrada seguidas de tramos que alcanzan rápidamente elevados valores en la ordenada, el ángulo  $\gamma$  es mayor de  $180^\circ$ . Por consiguiente la frontera-bisectriz recta A-AA se inclina hacia la derecha y su vértice extremo AA puede aproximarse demasiado a la pared como ocurre para el bloque B1e, o incluso rebasarla. En estos casos la malla del bloque B2e resultaría incorrecta o de muy mala calidad.

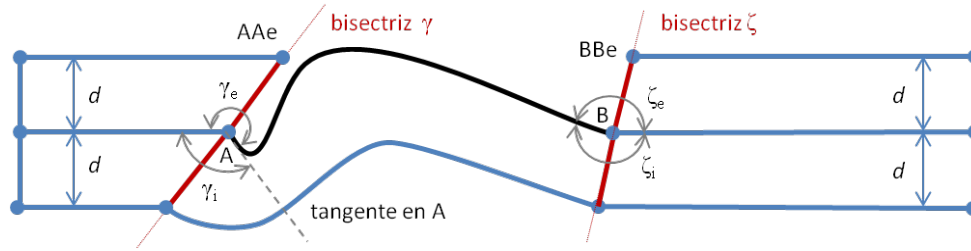


Figura III.29: Perfil de espesor nulo, con una concavidad junto al borde de ataque.

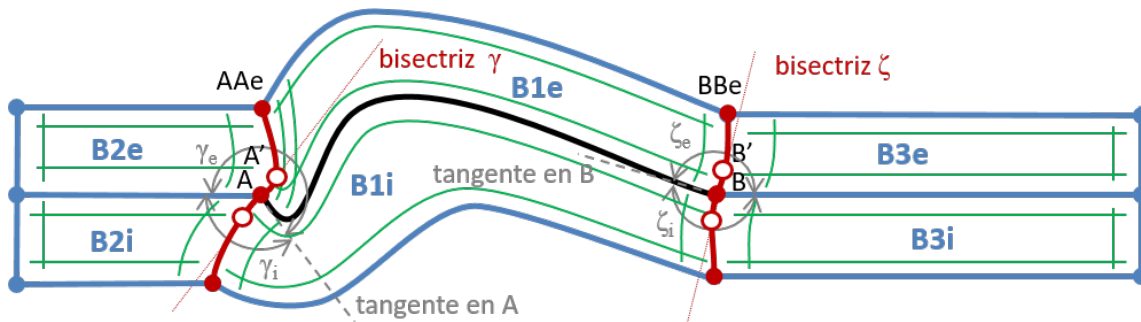


Figura III.30: Modificación de las fronteras que salen de los bordes de ataque y de salida.

Este problema puede evitarse reduciendo en gran medida la distancia  $d$ , aunque con esto nos encontraríamos de nuevo con una dificultad similar para mallar el bloque inmediatamente exterior, ya que la frontera AA-BB tendría una forma aún bastante complicada.

Alternativamente, redefinimos la frontera A-AA como muestran la figura III.30, y para otro perfil y con más detalle, la figura III.31. En la figura III.30 el extremo AAe ha sido desplazado hacia la izquierda para alejarlo de la pared. Y para que la frontera A-AA conserve su dirección en el origen A (y con esto se mantenga también la calidad de los elementos de sus cercanías) ésta interpolará un nuevo punto A' ubicado sobre la bisectriz del ángulo  $\gamma$  a una distancia pequeña del borde de ataque A.

Las modificaciones realizadas en las fronteras que salen de cada pared A-AA y B-BB vienen recogidas en la figura III.31, en función de la pendiente de la pared en los bordes de ataque y de salida. La modificación de la frontera A-AA está ajustada de dos maneras diferentes según si el ángulo  $\gamma$  es mayor o menor de  $180^\circ$ , y también la modificación de la curva B-BB es distinta si el ángulo  $\zeta$  supera o no los  $180^\circ$ .



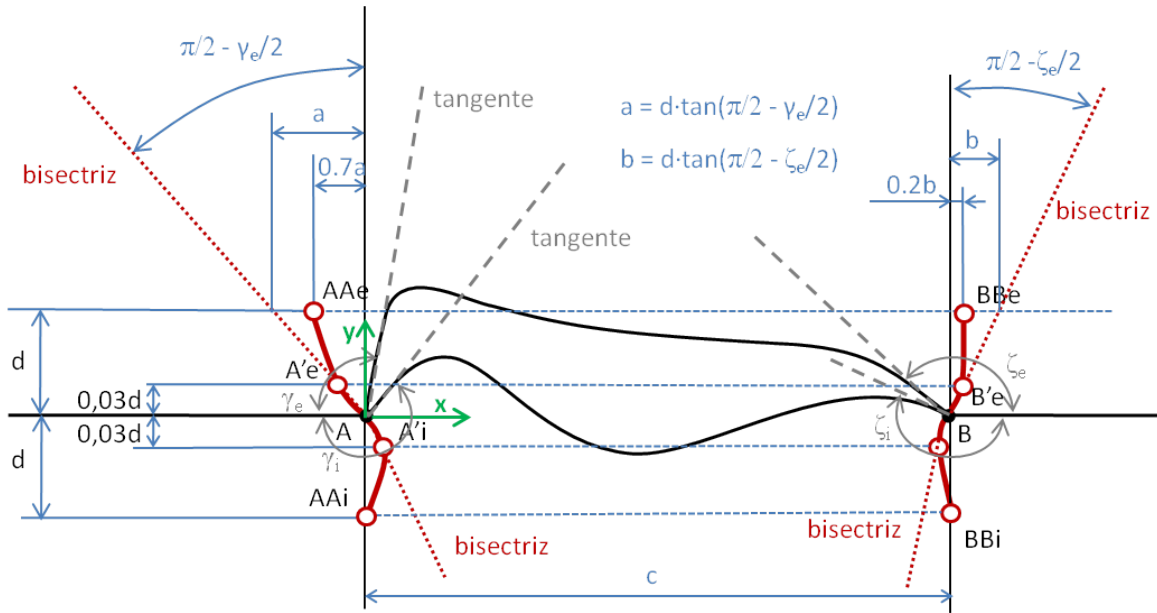


Figura III.31: Posición modificada de los puntos AA y BB.

Para  $\gamma < 180^\circ$  (es el caso del extradós) el vértice AA es movido desde su ubicación original en  $x_{AA} = -d \cdot |\tan(\pi/2 - \gamma/2)|$  un 30% de esta cantidad hacia la derecha, pasando a ubicarse en

$$x'_{AA} = -0,7 \cdot d \cdot |\tan(\pi/2 - \gamma/2)| \quad (\text{III.8})$$

para reducir la distorsión de los elementos del bloque B2 ubicados a su izquierda.

Para  $\gamma > 180^\circ$  (caso del intradós) el extremo AA es desplazado hacia la izquierda, sobre la horizontal  $y=d$ , desde  $x_{AA} = d \cdot \tan(\pi/2 - \gamma/2)$  hasta la vertical del borde de ataque A, es decir

$$x'_{AA} = 0 \quad (\text{III.9})$$

para que AA no pueda aproximarse a la pared.

En la zona del borde de salida B en las fronteras B-BB se procede de manera un poco diferente. Para ángulos  $\zeta < 180^\circ$  (caso del extradós) el vértice BB es movido hacia la izquierda desde su ubicación original en  $x_{BB} = c + d \cdot \tan(\pi/2 - \zeta/2)$  hasta

$$x'_{BB} = c + 0,2 \cdot d \cdot \tan(\pi/2 - \zeta/2). \quad (\text{III.10})$$

Y si  $\zeta > 180^\circ$  (caso del intradós) éste se desplaza hacia la derecha hasta la vertical del borde de salida, tal que

$$x'_{BB} = c. \quad (\text{III.11})$$

El rango de movimiento del vértice BB sobre la horizontal  $y=d$  es más estrecho que el del vértice AA, puesto que la forma de los perfiles tiene menos variabilidad en la zona del



borde de salida que la del borde de entrada (ver definición del espacio de búsqueda en la figura III.1).

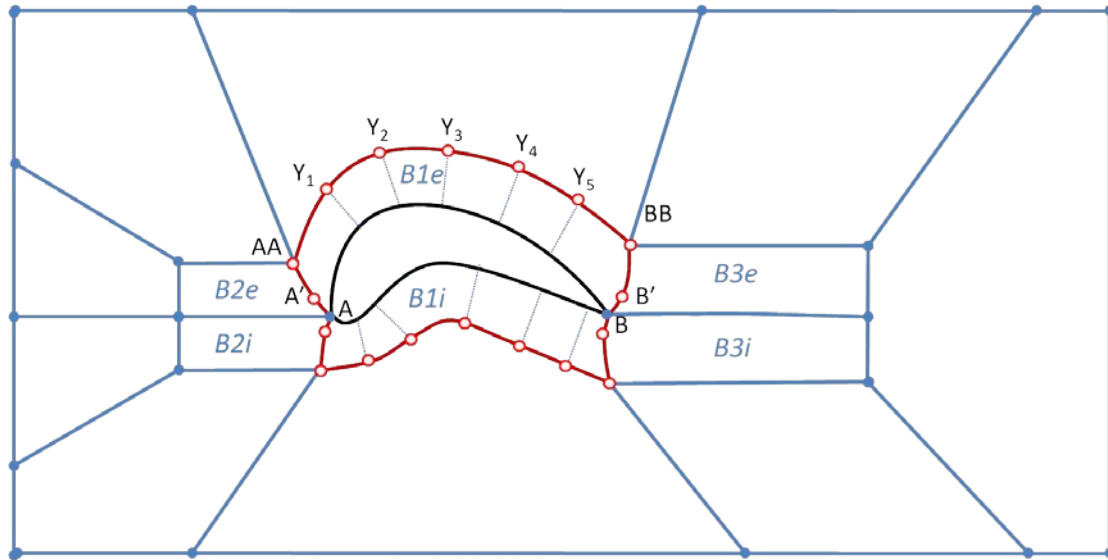


Figura III.32: División del dominio en subdominios para el mado, topología en H.

En resumen, buscando generar mallas de calidad en las zonas críticas del flujo, el dominio computacional ha sido dividido en diferentes topologías de bloques de mado. Entre ellas la topología en H de la figura III.32 ha demostrado su validez para las geometrías más complejas dentro del espacio de búsqueda actual [Lop'08]. En concreto, las fronteras de los bloques B1 que rodean la pared se han definido en función de la geometría del perfil, para que la mado de su interior sea de calidad. Estas tres fronteras, A-AA, B-BB y AA-BB son curvas de interpolación tipo NURBS definidas respectivamente mediante los conjuntos de puntos auxiliares  $\{A', AA\}$ ,  $\{B', BB\}$  y  $\{Y_1, \dots, Y_5\}$ . Primero se obtienen los puntos  $\{A', AA\}$  y  $\{B', B''\}$  según indica la figura III.31, y a continuación se obtienen los  $\{Y_1, \dots, Y_5\}$  según la figura III.27.

#### Validación del mapa de mado

El ejemplo de la figura III.33 para un perfil de geometría sencilla muestra la capacidad de la estructura de subdominios propuesta frente a una topología de bloques inadecuada.

El presente mapa de mado ha sido chequeado a través de numerosas ejecuciones de optimización [Lop'08] para una distancia  $d=0,2c$ . En ellas se han mado perfiles de geometría muy variada, algunos con pendientes que varían rápidamente a lo largo de la pared. Las figuras III.34 a III.40 muestran algunas mallas para perfiles representativos de dicha diversidad, y también para geometrías que se salen del espacio de búsqueda (figura III.1), para diferentes valores de la distancia  $d$ .

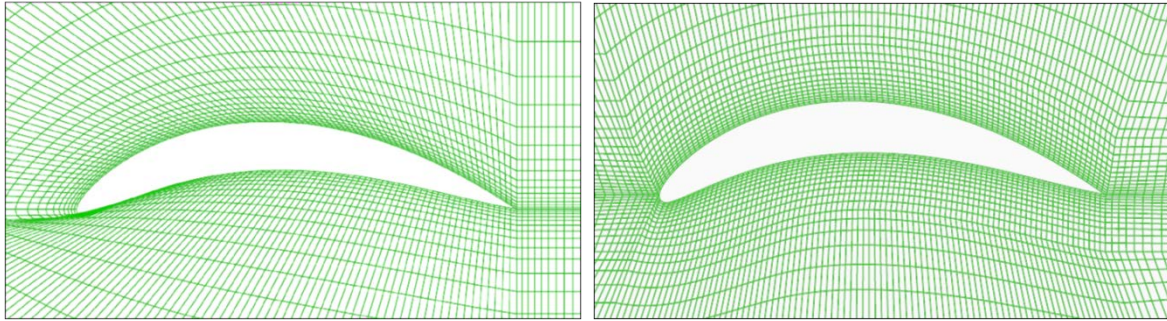


Figura III.33: Mallado incorrecto de un perfil mediante un mapa de malla inadecuado (izquierda), malla correcta usando el mapa de malla desarrollado (derecha).

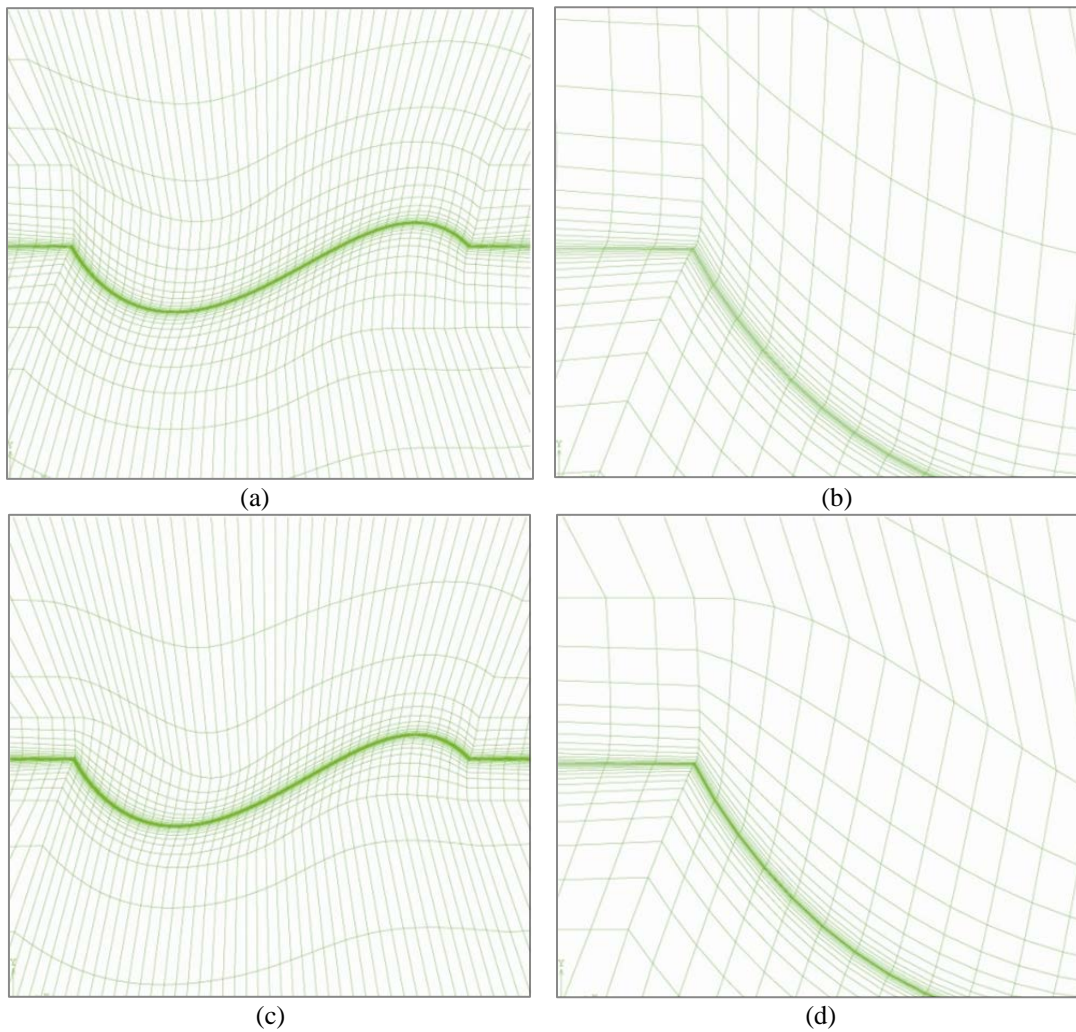


Figura III.34: Dos mallas para un perfil de espesor nulo. (a) Tomando  $d=20$ , y (b) detalle de la parte delantera. (c) Tomando  $d=10$ , y (d) detalle.

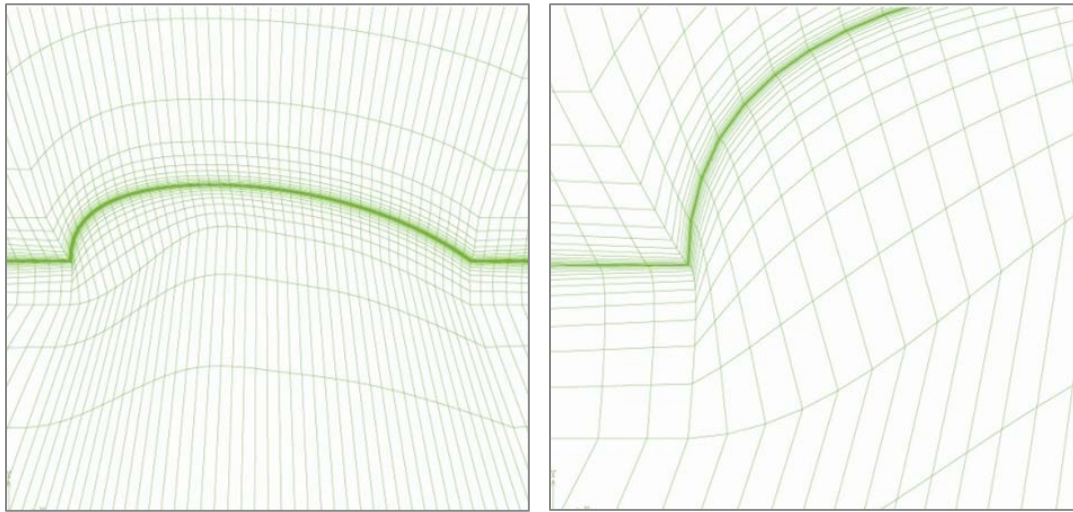


Figura III.35: Malla para un perfil de espesor nulo, cuya geometría no está incluida en el espacio de búsqueda ( $y_1 > 0$ , ver figura III.1). (izquierda) Tomando  $d=10$ , y (derecha) detalle de la parte delantera.

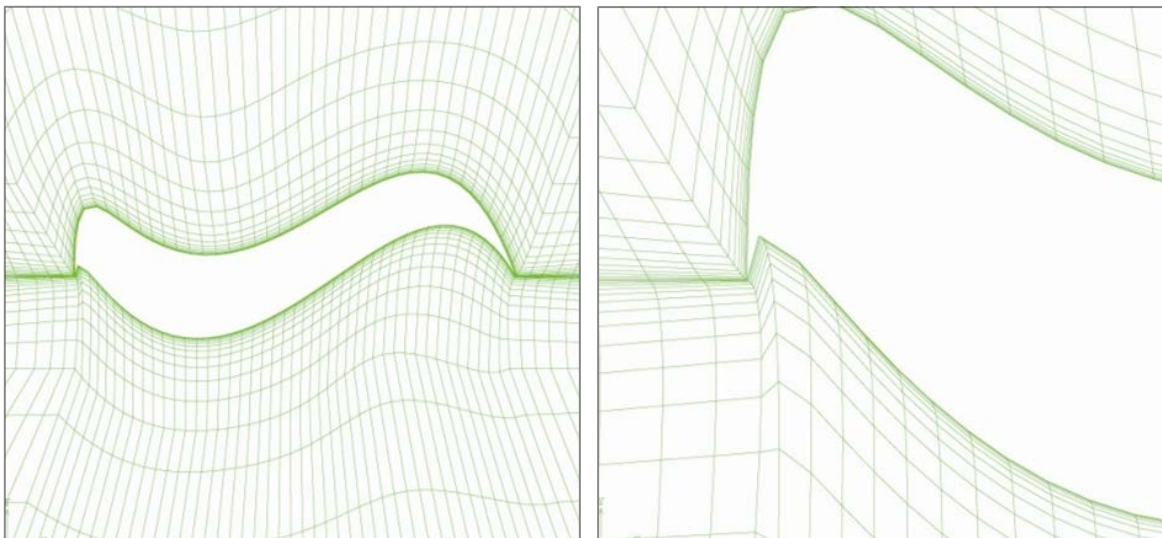


Figura III.36: Perfil de geometría compleja, no incluida en el espacio de búsqueda ( $y_1 > 0$ , ver figura III.1). (izquierda) Malla tomando  $d=20$ , y (derecha) detalle de la parte delantera.



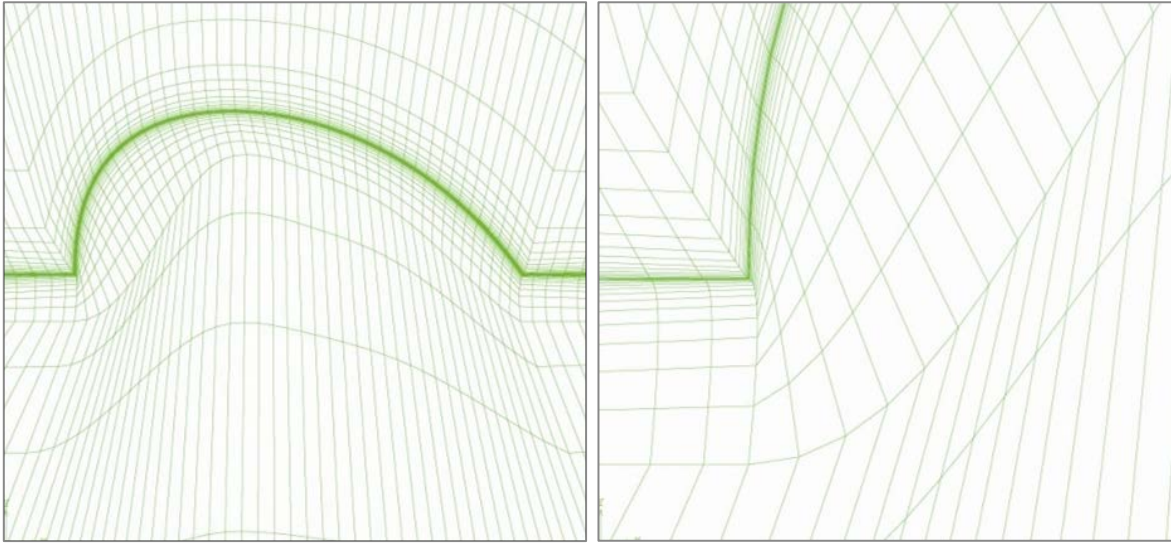


Figura III.37: Perfil de espesor nulo que no pertenece al espacio de búsqueda ( $y_1 > 0$ , ver figura III.1).  
(izquierda) Malla usando  $d=10$ , y (derecha) detalle de la parte delantera.

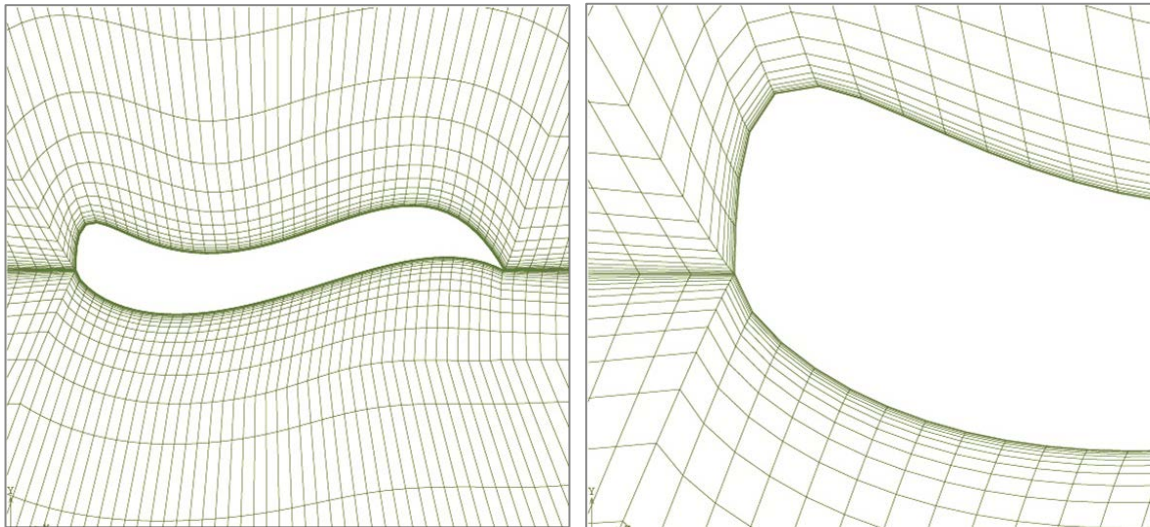


Figura III.38: (izquierda) Malla para un perfil tomando  $d=20$ , y (derecha) detalle de la parte delantera.

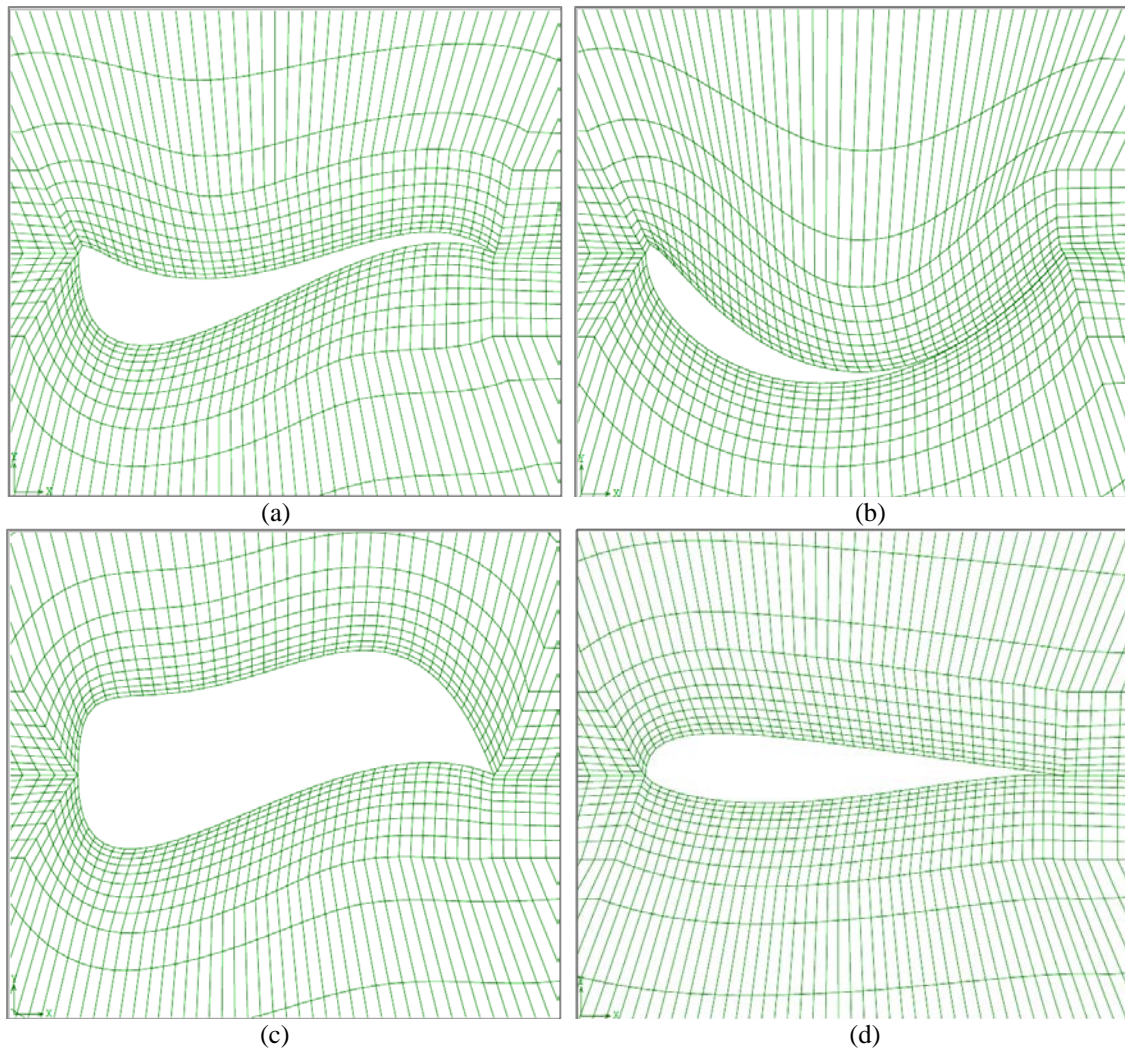


Figura III.39: Mallas alrededor de cuatro perfiles de geometría variada para  $d=0,2c$ , el espesor de las primeras capas de elementos es mayor que en las figuras anteriores.

Aunque el mapa de malla fue desarrollado para una distancia  $d=0,2c$ , las figuras III.34, III.35 y III.37 también recogen mallas donde  $d=0,1c$ . El uso de un valor u otro no afecta a la calidad de la malla en la capa límite, porque el espesor de ésta en flujos como los que calcularemos, cuyo número de Reynolds es elevado -del orden de millones- es varios órdenes de magnitud menor.

Sin embargo, para una distancia  $d$  menor, de valor  $0,05c$ , como muestra la figura III.40 izquierda, si el perfil sufre cambios de dirección muy rápidos pueden cortarse la pared y la frontera AA-BB. Esto es debido a que esta última frontera esta obtenida interpolando únicamente 7 puntos (ver figura III.27); para evitar este problema es necesario aumentar el número de estos puntos, y disminuir en consecuencia la distancia  $\Delta X$  en la expresión (III.7).



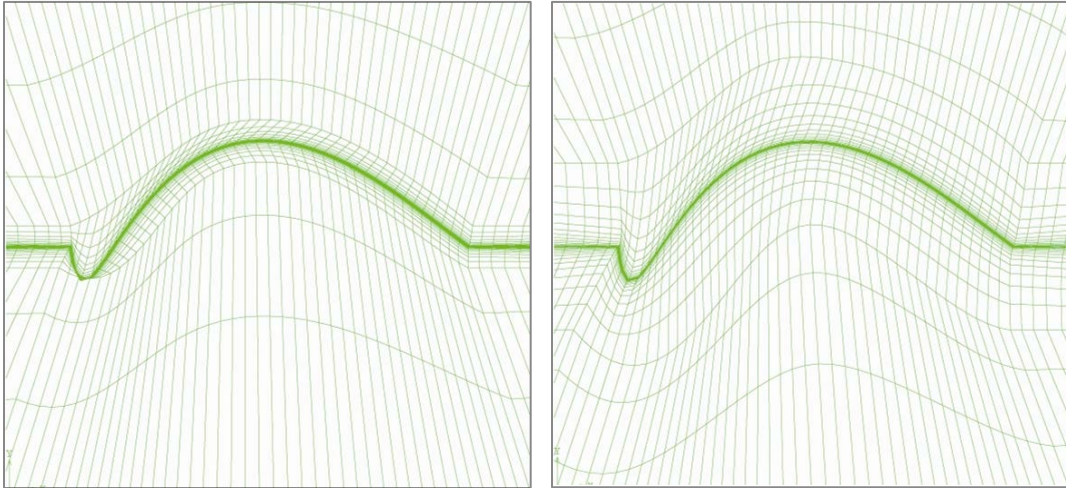


Figura III.40: Perfil de espesor nulo cuya geometría no está incluida en el espacio de búsqueda ( $y_4 < 0$ , ver figura III.1). (izquierda) Malla incorrecta para  $d=0,05c$ , y (derecha) malla correcta para  $d=0,2c$ .

Como se ha visto en las figuras III.34 a III.40 para diferentes geometrías, el procedimiento de mallado es capaz de construir mallas provistas de unas cuantas capas de elementos de calidad aceptable en las cercanías de la pared.

Resumiendo, la generación de mallas en bloques de malla cuadriláteros curvilíneos mediante TFI es un método fiable, pero las fronteras de cada bloque deben ser trazadas para evitar cruces de líneas de malla de la misma familia, y elementos de baja calidad.

A la vista de las numerosas pruebas realizadas, la topología de bloques en H junto con el calibrado definido para las fronteras cambiantes, parecen ser válidos para todas las geometrías del espacio de búsqueda de la figura III.1, con variables de diseño definidas en rangos muy amplios. La forma de las fronteras de los bloques que rodean la pared se obtiene en función de la geometría de cada individuo, buscando que las líneas de malla que salen de la pared tengan una inclinación no muy alejada de la normal.

## 5. PROCEDIMIENTO DE MALLADO PARA UN MODELO DE TRANSICIÓN

El procedimiento de mallado descrito en el apartado 4.2.3 ha probado su validez para adaptar las mallas a geometrías cambiantes en problemas de optimización de forma de perfiles. Los perfiles solución obtenidos en las ejecuciones de una optimización preliminar mediante GA usando análisis CFD con modelo  $k-\varepsilon$  RNG produjeron unos resultados mejorables (ver capítulo IV), porque los modelos de tipo  $k-\varepsilon$  son imprecisos, ya que modelizan capas límite completamente turbulentas donde en realidad hay capas límites transicionales, porque no predicen correctamente la transición de flujo laminar a turbulento.

Los modelos de turbulencia de alto número de Reynolds, como el modelo  $k-\varepsilon$  RNG, no resuelven la zona de pared o zona de bajo número de Reynolds de la capa límite, sino que

la cubren con una única capa de elementos especiales que tienen un espesor tal que  $y^+ > 30$ , que copia su perfil de velocidad media (ver apartado I.2.6.1). Esto reduce notablemente el número de elementos en la capa límite, la zona más densa de la malla. Además, para un mayor ahorro en coste de malla en la optimización, se usaron mallas de baja densidad, y en un dominio computacional relativamente pequeño.

En vista de la calidad de los resultados de las optimizaciones comentados más arriba, se propuso intentar mejorarlos. Para ello se cambió el modelo  $k-\epsilon$  anterior por otro más preciso, que modeliza la zona de bajo número de Reynolds de la capa límite, en concreto, por un modelo de transición. Entre los modelos de transición de tipo RANS desarrollados para CFD [Men'06; Wal'08] se ha optado por elegir uno de ellos para su utilización en la optimización, en concreto el modelo de transición  $k-k_1-\omega$  [Wal'08]. Este tipo de modelos necesitan mallas mucho más refinadas en la pared, con un espesor de la primera capa de celdas unos dos órdenes de magnitud menor que en el caso anterior, con valores de  $y^+$  entorno a la unidad. Esto obligó a usar mallas mucho más densas en la capa límite, lo que condujo a realizar cambios y mejoras en el procedimiento de mallado, que se recogen en los siguientes apartados.

El modelo  $k-k_1-\omega$  viene incluido en el programa comercial de CFD Fluent, que fue integrado en nuestro sistema de optimización. Fluent es un procesador y postprocesador CFD que usa volúmenes finitos, técnica de discretización del dominio muy conocida en la comunidad CFD (ver apartado I.1.2), y que como los elementos finitos, da muy buenos resultados. Así en adelante, a las pequeñas parcelas en que se divide el dominio discretizado les llamaremos celdas ó volúmenes finitos, pero no elementos finitos. Tal y como ocurre en las mallas de elementos finitos, en las de volúmenes finitos cuanto mayor sea la distorsión y falta de uniformidad en las celdas, mayores son los errores. Esto se muestra por ejemplo en el estudio de O'Brien y Hall de la referencia [OBr'90] en flujos alrededor de perfiles alares.

Por otra parte, el procedimiento de mallado para geometrías cambiantes desarrollado en el apartado anterior es robusto, pero tiene puntos débiles. Para algunas geometrías de perfiles (ver figura III.39b) pueden darse tramos en la pared con cierta distorsión en la malla (introduce error), además el dominio empleado es demasiado pequeño (añade error), y se regeneran las mallas de todos los bloques (aumenta el tiempo de mallado).

Para paliar estos problemas y adecuar el procedimiento de mallado a las nuevas necesidades del modelo de transición, se introdujeron una serie de modificaciones en la topología de bloques de malla y en las mallas que se recogen a continuación, y se explican en los siguientes apartados, aunque se mantuvo la estrategia de remallar subdominios cuyas fronteras cambian en función de la forma del perfil.

Se ha reducido la distorsión de las celdas dividiendo los bloques de malla adyacentes al perfil en otros más pequeños y trazando las fronteras de bloque transversales en dirección normal a la pared.

Además, se ha aumentado el tamaño del dominio para mejorar la precisión. En este sentido algunos estudios [Mav'08; Rib'12] han comprobado que aumentar las dimensiones del

dominio a longitudes del orden de la centena de cuerdas reduce el error en los esfuerzos que el flujo ejerce sobre el perfil, al minimizar el efecto de las condiciones de contorno de campo lejano sobre el flujo modelizado en las cercanías del perfil. Así, se decidió fijar la posición de las fronteras exteriores a 50 cuerdas de la pared del perfil.

La aplicación en mallas estructuradas del aumento de densidad de malla en la pared que exige un modelo de transición, puede suponer aumentar el coste de malla en un orden de magnitud o más, y esto puede impedir la realización de optimizaciones de forma por resultar demasiado costosas. Por este motivo, se ha contenido este aumento de coste de malla introduciendo patrones de celdas de transición que reducen el número de líneas de malla transversales que atraviesan el dominio en la zona exterior a la capa límite. Estos no están disponibles en el módulo mallador de Fidap, pero sí en el programa preprocesador comercial Gambit, que es compatible con Fluent y fue incorporado al sistema de optimización.

Por sencillez y para minimizar el tiempo de mallado, se ha rediseñado la estructura de bloques para que con la geometría de cada perfil solo cambien los bloques adyacentes a éste, que por lo tanto serán ahora los únicos que hay que remallar. Como los bloques alejados de la pared no cambian, se reduce el tiempo de remallado por individuo mallando estos una sola vez (inicialmente). Para reducir su número de celdas, las mallas de estos bloques serán desestructuradas, para que crezca más rápido el tamaño de celda.

La topología en H del mapa de malla anterior (ver figura III.32) aplicada ahora a una capa límite con mayor densidad de malla, da capas de celdas con densidades de malla excesivamente concentradas en zonas aguas arriba del perfil que no son críticas para el flujo. Para evitar este problema, se ha adoptado una topología en C para el mapa de malla.

Además, para mejorar la precisión en el trazado de las paredes del perfil, para dibujar cada curva de Bézier se aumentó de 26 a 51 el número de puntos interpolados (mediante una curva NURBS).

En los siguientes apartados se desarrollan estas modificaciones del procedimiento de mallado para las nuevas necesidades.

## 5.1 DIVISIÓN DE BLOQUES DE MALLA

En el mapa de malla en H de la figura III.32 un sólo bloque de malla (B1) abarcaba toda la pared del perfil. Como se ha visto (apartados I.3.6.1 y III.4.2, y figuras III.39b ó III.40 derecha) si a lo largo del perfil hay cambios u oscilaciones de pendiente importantes, las líneas de malla transversales pueden alejarse de la normal y generar celdas distorsionadas en la pared.

La calidad de las celdas de la pared va a ser mejorada dividiendo el bloque B1 en tres bloques más cortos en la forma de la figura III.41. Así, imponiendo dos nuevas líneas de



malla normales a la pared, que son las fronteras de bloque C-CC y D-DD, se controla mejor la distorsión de las celdas más próximas a la pared. Al ser ahora más cortos los tramos de pared, en cada tramo la dirección de la pared cambia u oscila menos y resulta más difícil que las líneas de mallas transversales en la pared se alejen de la normal.

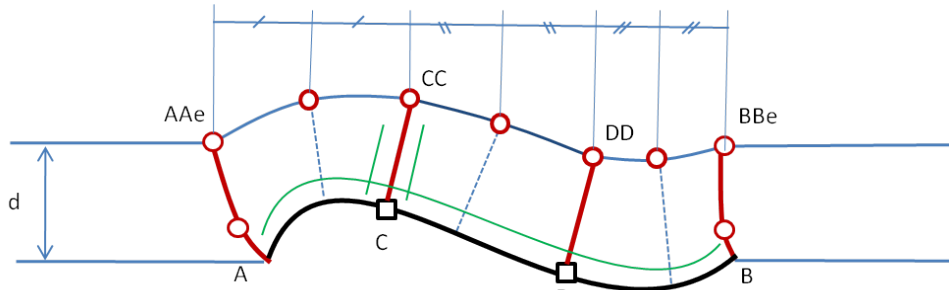


Figura III.41: División del bloque de malla contiguo al perfil en tres más pequeños.

Las nuevas fronteras C-CC y D-DD son rectas normales a la pared de longitud  $d$ , trazadas desde los puntos C y D de la curva de Bézier de la pared, cuyos valores de  $t$  son respectivamente  $t_C=9/24$  y  $t_D=19/24$ . Las tres nuevas fronteras opuestas a la pared AA-CC, CC-DD y DD-BB fueron definidas tales que interpolan tres puntos. En cada una de ellas el uso del punto intermedio impide que se aproximen demasiado a la pared. Estos puntos intermedios se obtendrían fijando sus abscisas hacia la mitad de las de ambos extremos, de manera análoga al método mostrado en la figura III.27.

## 5.2 SIMPLIFICACIÓN DE LOS SUBDOMINIOS

Para simplificar el trazado de las fronteras opuestas a la pared, se eliminaron los puntos intermedios, como muestra la figura III.42.

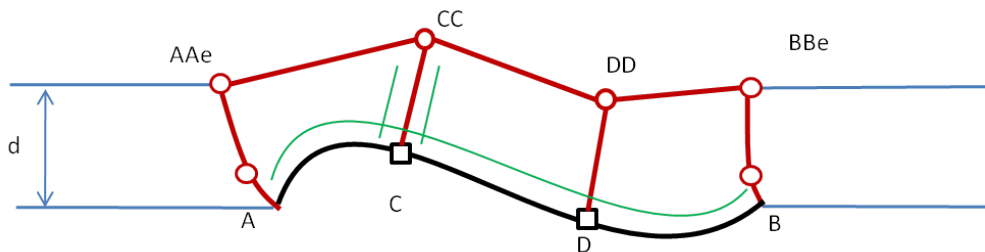


Figura III.42: Definición de bloques de malla con fronteras opuestas a la pared rectas.

Ahora bien, si un tramo de pared convexo se curva mucho, podría acercarse en exceso a su frontera opuesta. Para evitar esto es conveniente aumentar la distancia  $d$ , pero así podrían juntarse demasiado las fronteras transversales, entonces para que éstas se mantengan suficientemente separadas se van a fijar los vértices CC y DD y se van a hacer curvilíneas las nuevas fronteras transversales C-CC y D-DD a semejanza de las más antiguas A-AA y B-BB. Así los puntos CC y DD se fijaran sobre las respectivas verticales de C y D.

Además, por sencillez también se van a fijar los puntos AA y BB. De esta manera (ver figura III.43 izquierda), para los bloques de malla colindantes con el perfil todas las fronteras exteriores son fijas. Esto tiene la ventaja de que las mallas más exteriores no van a variar con el perfil, y por lo tanto no hay que remallarlas, lo que supone un importante ahorro en tiempo de mallado.

A partir de ahora, se van a denominar *bloques adyacentes* a los bloques de malla que tienen una frontera o un vértice (punto donde se unen dos de estas fronteras) sobre la pared del perfil. Estos bloques son cuadriláteros curvilíneos que tienen al menos una frontera que varía con la geometría del perfil. Se llamarán *bloques lejanos* a los demás, cuyas fronteras son todas fijas y están ubicados entre los primeros y las fronteras exteriores del dominio. En la figura III.43 izquierda se han dibujado los bloques adyacentes, los bloques lejanos serán descritos más adelante.

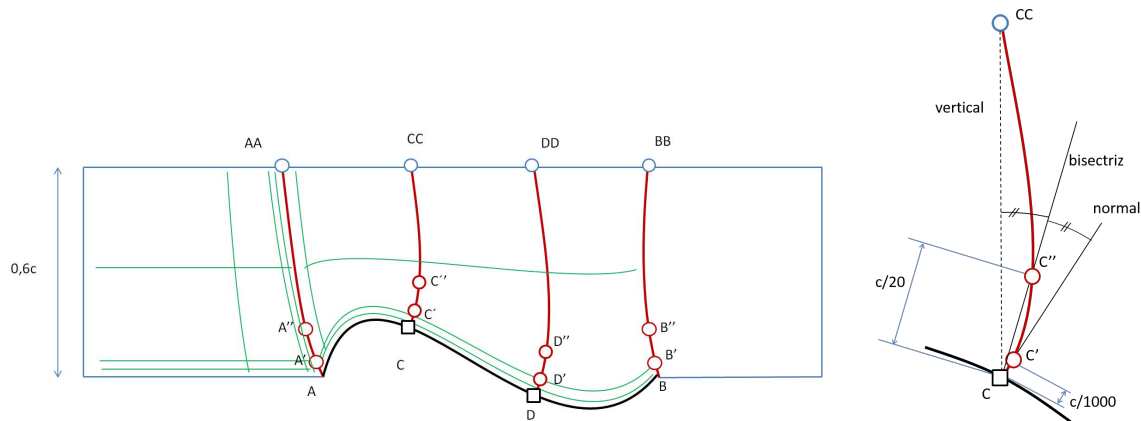


Figura III.43: (izquierda) Topología en forma de H para los bloques de malla adyacentes al perfil, con fronteras fijas opuestas a la pared, y (derecha) detalle de la obtención de los puntos que definen las fronteras transversales.

Las fronteras fijas opuestas a la pared se han definido como rectas horizontales situadas a una distancia suficiente de la cuerda del perfil ( $0,6c$ ) habiendo considerado el amplio recorrido vertical de los vértices del polígono de Bézier (ver figura III.1), para evitar posibles cortes o acercamientos excesivos con los perfiles, circunstancias que echarían a perder la calidad de las mallas estructuradas.

Por otra parte, como puede verse en la figura III.43, el hecho de que las fronteras opuestas a la pared sean rectas no afecta a la forma y calidad de las celdas próximas a la pared, que mantienen un espesor aproximadamente uniforme a lo largo de ésta. En efecto, al generarse las mallas mediante interpolación transfinita, la familia de líneas de malla “paralelas” al flujo varían entre la forma de la pared y la forma recta de su frontera opuesta. Por lo tanto, las líneas de malla cercanas a la pared son muy similares a ésta. Además el mallador Gambit permite crear esquemas de malla estructurada llamados “boundary layer” mediante los cuales se especifica el espesor exacto de las celdas en varias capas contiguas a la pared.

A continuación se redefinen las fronteras transversales en la pared para minimizar la distorsión. Para ello las curvas C-CC y D-DD (ver figura III.43 derecha), saldrán de la pared en dirección normal, pero debido a la necesidad de disminuir el espesor de las primeras capas de celdas en la pared, es conveniente aproximar los puntos intermedios C' y D' a la pared para que las celdas en contacto con C y D no tengan distorsión (se sitúan a una distancia  $c/1000$  del punto de la pared sobre la normal). Pero si se utilizara únicamente un punto intermedio tan próximo a la pared, estas fronteras se separarían demasiado de la vertical, y para evitar esto se ha introducido un segundo punto director C'' y D'' ubicado a una distancia  $c/20$  respecto del punto de la pared y sobre la bisectriz entre la normal y la vertical.

Por su parte, el punto A' (de manera análoga a la figura III.31) se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman la tangente a la pared en el borde de entrada A y la horizontal que sale hacia la izquierda de éste, pero ahora a una distancia  $c/1000$  de A. El punto A'' se sitúa en la bisectriz de las rectas A-A' y A-AA a una distancia  $c/20$  de A, para que la frontera A-A'-A''-AA no se separe mucho de la recta A-AA. Y en la zona del borde de salida, los puntos directores B' y B'' se sitúan a estas mismas distancias de la pared, el punto director B' sobre la bisectriz entre la tangente al perfil en el borde de salida y la horizontal que sale hacia la derecha (como en la figura III.31), y el B'' sobre la bisectriz de las rectas B-B' y la vertical B-BB.

Así, las cuatro fronteras transversales móviles (dependientes de la forma del perfil) son ahora curvas NURBS que interpolan cuatro puntos.

Para mejorar la precisión de la geometría de cada una de las dos paredes del perfil, extradós e intradós, se ha duplicado el número de puntos que las definen, interpolando ahora cada una de ellas 51 puntos de Bézier (ver figuras III.44 y III.45 izquierda).

Estas paredes se dividen en tres tramos consecutivos, cada uno para un bloque. Considerando que las variaciones más rápidas de pendiente de la pared se pueden producir en su zona delantera (ver figura III.2), para que haya más control de la forma de las celdas en la región delantera, la pared no fue dividida en tres tercios iguales, sino que fue cortada en las abscisas  $0,2c$  y  $0,66c$  medidas desde el borde de ataque. Y la recta fija opuesta a la pared fue cortada en estas mismas abscisas como muestra la figura III.44.

Ante la nueva mayor densidad de malla junto a la pared, ahora aparecen líneas de malla muy concentradas junto al borde de entrada en los bloques de malla adyacentes aguas arriba del perfil, debido a que la topología de bloques de la figura III.43 tiene forma de H. Estas líneas de malla son irradiadas desde las proximidades del borde de ataque hacia la izquierda, hacia arriba y hacia abajo, dando capas de celdas de densidad muy concentrada en zonas del flujo alejadas de la pared (por ejemplo a la izquierda de AA), donde es innecesaria tamaña densidad.

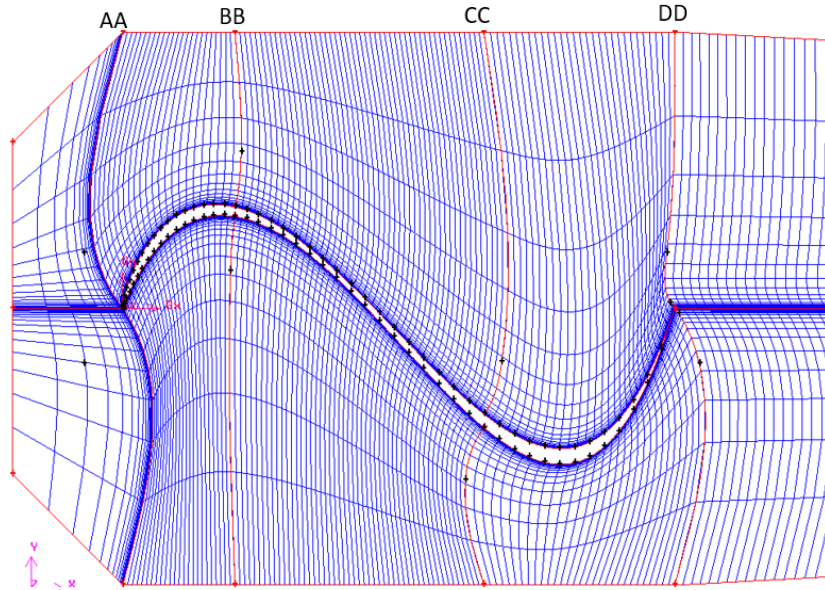


Figura III.44: Bloques de malla contiguo al perfil usando una topología en H.

Esto puede verse en la malla de la figura III.44, donde se han inclinado las fronteras rectas que salen hacia la izquierda del vértice AA (que en la figura III.43 eran horizontales) para que las longitudes de celda fueran un poco mayores sobre ella. Alternativamente podría buscarse separar entre sí estas líneas de malla según se alejan del borde de ataque, imponiendo gradaciones de tamaño de celda más uniformes sobre las fronteras exteriores de los bloques de malla de la izquierda, pero esto daría celdas más distorsionadas.

### 5.3 MODIFICACIÓN DE LA TOPOLOGÍA DE BLOQUES DE MALLA

Para evitar las mencionadas capas de densidad concentrada, se adoptó una topología en C como muestra la figura III.45, donde se han sustituido los bloques de malla adyacentes aguas arriba del perfil, que antes eran cuadriláteros curvilíneos, por triángulos curvilíneos B1.

En estos nuevos bloques triangulares B1 se emplea un esquema diferente de malla estructurada, las líneas de malla son irradiadas desde el vértice situado en el borde de ataque hasta la frontera opuesta, dando una primera capa de celdas triangulares, seguida por otras de celdas cuadriláteras de longitudes crecientes (ver figuras III.45 derecha, III.46 y III.51 derecha).

Aguas abajo del borde de salida se ha definido el bloque de malla B5 con fronteras móviles B-B'-BB relativamente cortas. Esto se ha hecho para colocar patrones de transición de malla en la horizontal BB-E (ver figura III.46), que reducen el número de líneas de malla transversales en el bloque B6, y con ello el coste de malla. Obsérvese que en la frontera móvil B-BB se ha eliminado el segundo punto director B'', ya que no es necesario enderezar esta frontera móvil, porque al ser más corta puede separarse menos de la vertical.



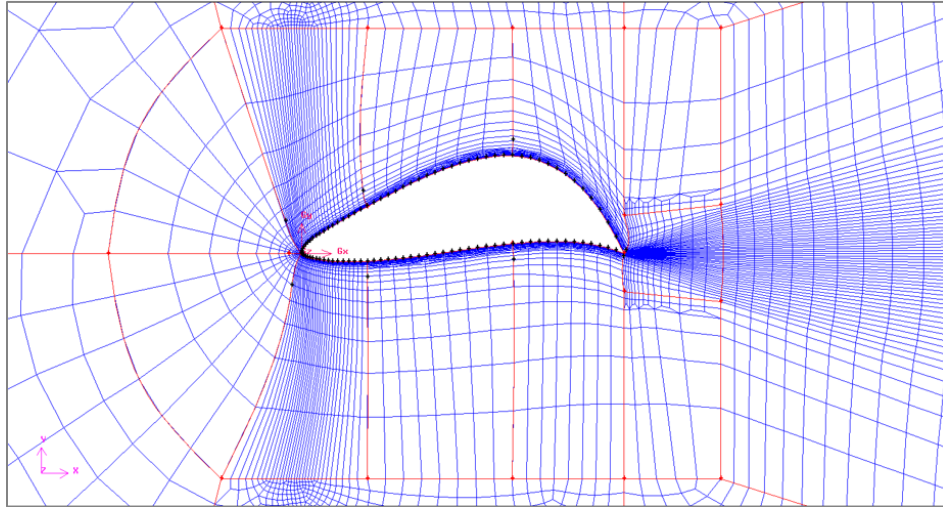


Figura III.46: Bloques de malla del nuevo mapa de malla, empleado en los cálculos de optimización. Los dos bloques de malla contiguos al borde de entrada por su izquierda son triángulos curvilíneos que emplean un nuevo esquema de malla estructurada.

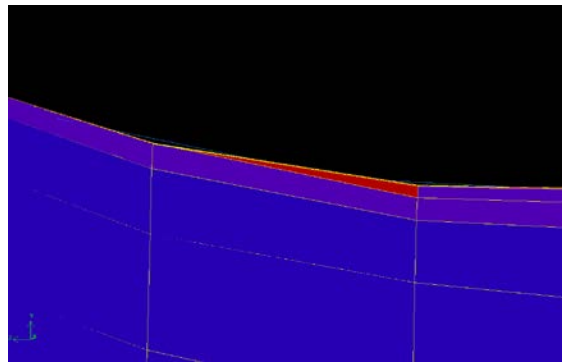


Figura III.47: En rojo, celda cuadrilátera incorrecta en la proximidad de la pared. La escala horizontal del dibujo aparece muy reducida.

Para evitar este problema se aumentó 100 veces la escala de la geometría en el preprocesador. Y después el procesador (Fluent) lee la malla, pero a escala 1/100, para no modificar el número de Reynolds del flujo.

Por otra parte, para recoger con precisión los cambios de presión a lo largo de la pared, y con ello el punto de transición y los posibles puntos de despegue, el número de celdas en dirección longitudinal en cada pared no debe de ser menor de varios cientos. Entonces hubo que aumentar considerablemente la densidad de malla a lo largo de la pared. Usando mallas estructuradas esto provoca un gran aumento del número de líneas de malla transversales al flujo, que resulta excesivo en regiones alejadas de la capa límite donde los cambios en el flujo son más suaves e isótropos, disparando el coste de malla en el contexto de una optimización que implica miles de estos análisis CFD.

Para ahorrar en coste de malla en las zonas exteriores a la capa límite, se ha reducido el número de líneas de malla transversales usando patrones de transición de tamaño de celda,

como muestra la figura III.48. Además, en los bloques de malla alejados del perfil que no varían con éste, se han usado mallas desestructuradas, que dan celdas más isotrópicas y cuyo tamaño crece más rápido, con el consiguiente ahorro de celdas. La figura III.48 muestra el ahorro en coste de malla fruto de aplicar ambas medidas.

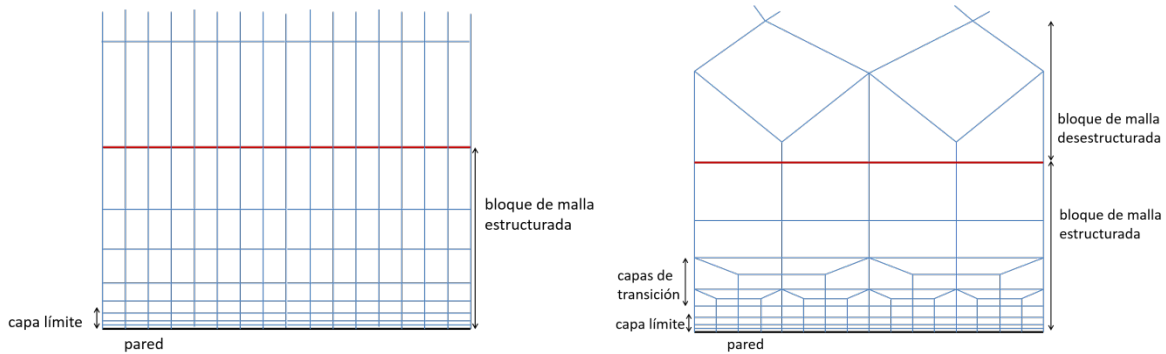


Figura III.48: (izquierda) Bloques de malla estructurada alrededor de una placa plana. (derecha) Reducción del coste de malla empleando patrones de transición en el bloque interior, y malla desestructurada en el exterior.

Gambit dispone de patrones que unen  $n$  (2, 3 ó 5) celdas cuadriláteras de una capa, en una celda más larga cuadrilátera situada en la siguiente capa. Así se reduce  $n$  veces el número de líneas de malla transversales a la pared. En la malla de figura III.48 derecha se han colocado afuera de la capa límite dos capas con patrones de transición con  $n=2$ , reduciendo el número de líneas de malla transversales por  $2n=4$  veces. Obsérvese que en la figura III.46, aguas abajo del perfil, se ha empleado una capa de patrones con  $n=3$ .

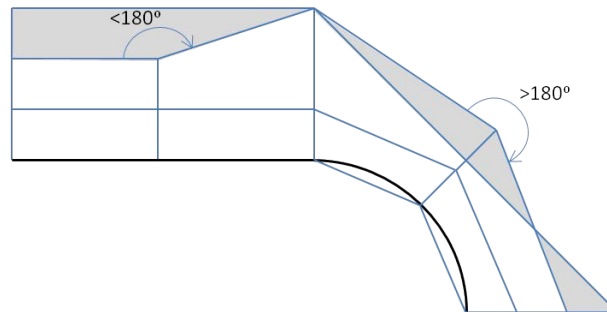


Figura III.49: Problemas en el mallado de patrones de transición cuando la curvatura de la pared es muy elevada (la longitud de las celdas a lo largo de la pared es comparable al radio de curvatura). A la izquierda la celda más exterior del patrón es correcta, pero a la derecha es incorrecta. Es necesario reducir la longitud de las celdas en la dirección de la pared.

Sin embargo, si el radio de curvatura de la pared es muy pequeño y comparable a la longitud de las celdas que la bordean, moviéndonos a lo largo de la pared entre una celda y la siguiente habrá cambios de dirección importantes, y las celdas exteriores de los patrones de malla resultarán incorrectas, como muestra la figura III.49. Este problema es más fácil que ocurra si el número de capas de transición es elevado (3 por ejemplo); para solucionarlo es necesario aumentar el número de celdas a lo largo de la pared en estas



zonas, con lo que además se consigue discretizar la geometría del tramo curvo de pared de un modo aceptable.

Tal como fueron definidos los polígonos de control de las curvas de Bézier de los perfiles (ver figuras III.1 y III.2), las curvaturas elevadas pueden darse únicamente en la parte más delantera del perfil, donde hay mayor flexibilidad para el cambio de pendiente.

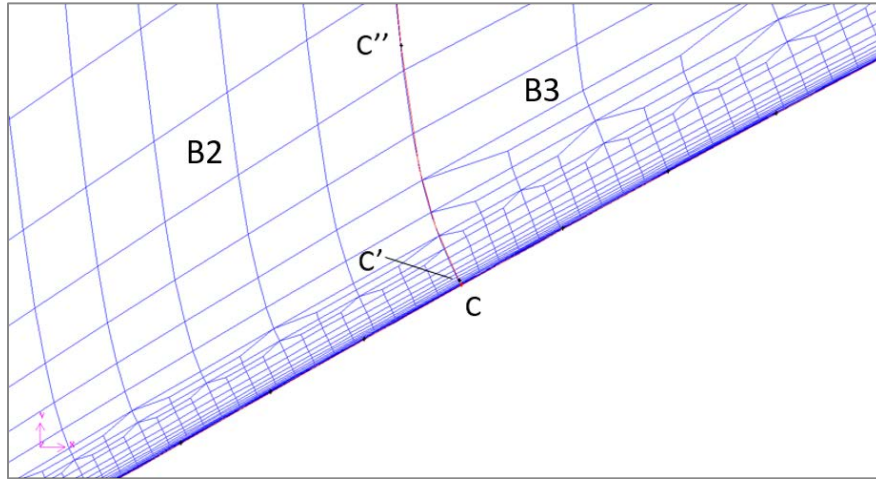


Figura III.50: Detalle de la malla del perfil de la figura III.46, donde se aprecia la malla en las proximidades de la pared y los puntos directores  $C'$  y  $C''$  sobre la frontera cambiante C-CC. En el bloque de la izquierda B2 se han usado dos capas de celdas de transición y en el de la derecha (B3) tres.

Así, para garantizar que todos los patrones de transición puedan ser correctamente construidos, en el bloque de malla B2 que contiene la nariz del perfil se aumentó la densidad de malla de la pared concentrándola hacia adelante, reduciendo la longitud de las celdas. De paso, esta medida contribuye a mejorar la precisión, ya que aquí es donde se inicia la capa límite y por lo tanto los gradientes del flujo presentan su mayor magnitud. En este bloque de pared delantero B2 se usaron únicamente dos capas de transición (ver figuras III.50 y III.51 derecha), que reducen cuatro veces el número de líneas de malla transversales en la zona exterior a la capa límite, mientras que en los bloques de malla B3 y B4 situados a su derecha (ver figura III.50) se usaron tres capas de celdas de transición, disminuyéndolas en ocho veces. Por estos motivos, como se aprecia en las figuras III.50 y III.51 izquierda, el número de líneas de malla exteriores a los patrones es mayor en el bloque de malla delantero que en los traseros. La figura III.50 muestra el empleo de patrones de transición de tamaño de celda insertados afuera de la capa límite en las cercanías del punto C de la malla de la figura III.46.



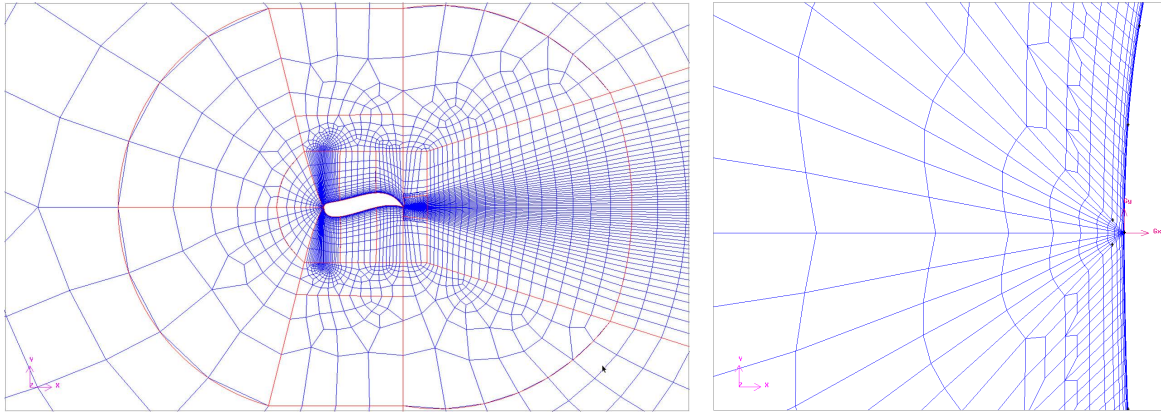


Figura III.51: (izquierda) Malla alrededor de un perfil aerodinámico y (derecha) detalle cerca del borde de entrada, donde se pueden distinguir los puntos directores A'.

### 5.4.2 Malla en los bloques lejanos

Los bloques adyacentes B1 a B5 (ver figura III.45) cambian con cada perfil y en ellos se emplearon mallas estructuradas para garantizar que no falle el proceso de generación de la malla. En los bloques lejanos las fronteras son fijas, por lo tanto solo hay que mallarlos una vez, previa a la optimización, y en consecuencia pueden usarse mallas desestructuradas. Las fronteras exteriores del dominio se tomaron con forma de circunferencia, aunque son válidas otras formas siempre y cuando estén a una distancia suficiente del perfil.

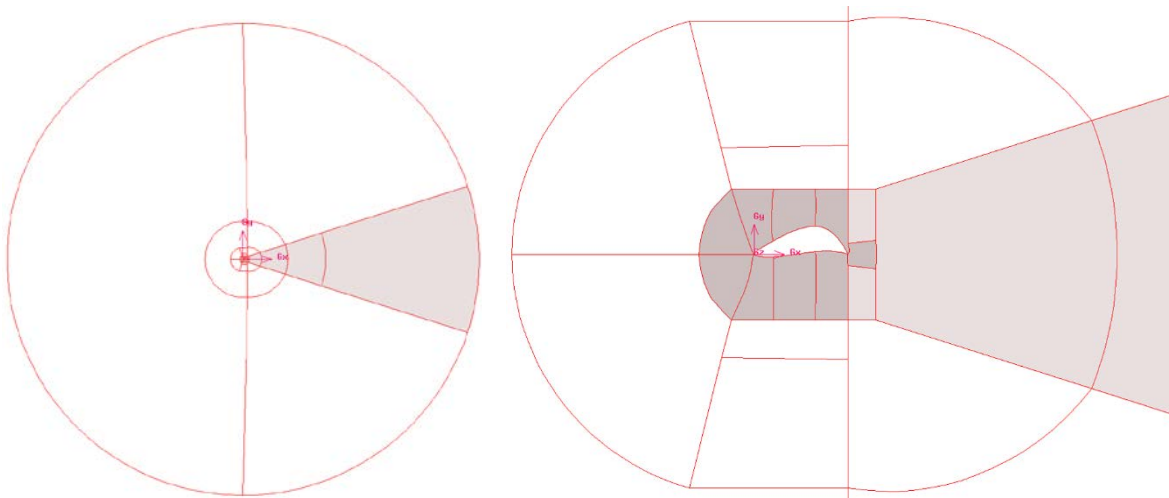


Figura III.52: (izquierda) Dominio computacional de 100 cuerdas de diámetro dividido en bloques de malla, y (derecha) detalle: en gris se han coloreado los bloques con malla estructurada, entre ellos en gris medio los bloques adyacentes (variables), y en gris claro los bloques lejanos (fijos). En blanco los bloques fijos con malla desestructurada.

En los bloques no adyacentes al perfil los gradientes del flujo tienen magnitudes pequeñas e isotrópicas que decrecen con la distancia al perfil, salvo en la estela, donde hay variaciones anisotrópicas de cierta magnitud en dirección transversal al flujo. Considerando esto, como muestran las figuras III.51 izquierda y III.52 izquierda, en los bloques que no contienen la estela se van a usar mallas desestructuradas con celdas de formas isotrópicas, rápidamente crecientes para ahorrar al máximo en coste de malla. Los bloques lejanos que contienen la estela serán mallados con mallas estructuradas con celdas anisotrópicas para poder recoger de manera económica las variaciones anisotrópicas de las variables del flujo.

Los bloques de malla desestructurada fueron mallados usando una técnica de frente móvil, que como se ha comprobado (ver apartado 4.1) no es fiable al cien por cien porque puede fallar en la etapa de cierre del proceso de mallado. Pero esto no es un problema porque el mallado de estos bloques, al ser fijos, se realizará antes de la optimización.

## 5.5 SECUENCIA DE MALLADO EN OPTIMIZACIÓN

Para los bloques de malla lejanos, como sus fronteras no varían con el perfil, las mallas se van a generar una única vez inicialmente y se usarán éstas mismas para todos los perfiles. Así, solamente se remallarán los bloques adyacentes al perfil, para ahorrar en tiempo de mallado.

La secuencia del procedimiento de mallado es la siguiente. Primero, previo al proceso de optimización, se han mallado los bloques lejanos usando Gambit; estas mallas constituyen una *malla exterior permanente* que va a permanecer intacta para cada nuevo perfil. Esta tiene un hueco interior, que de momento está vacío, y donde posteriormente se alojarán los bloques de malla adyacentes (B1 a B5 en figura III.45) para cada perfil.

Cuando comienza la optimización, sobre el hueco interno se dibuja el primer perfil, con sus fronteras de pared, y las fronteras de bloque móviles que salen de sus vértices (como en la figura III.53). A continuación Gambit en los bloques con pared (B2, B3 y B4) esboza un esquema “boundary layer” (capa límite) que define como será la malla de las primeras capas de la malla en la pared y los patrones de transición (ver figura III.50). Después, sirviéndose de éste y usando interpolación transfinita, malla todo el área del bloque de malla. Los bloques de malla adyacentes que no tienen pared (B1 y B5) son mallados directamente mediante TFI. Con el segundo perfil se toma otra vez la malla permanente inicial y se repite la misma secuencia, y así sucesivamente.

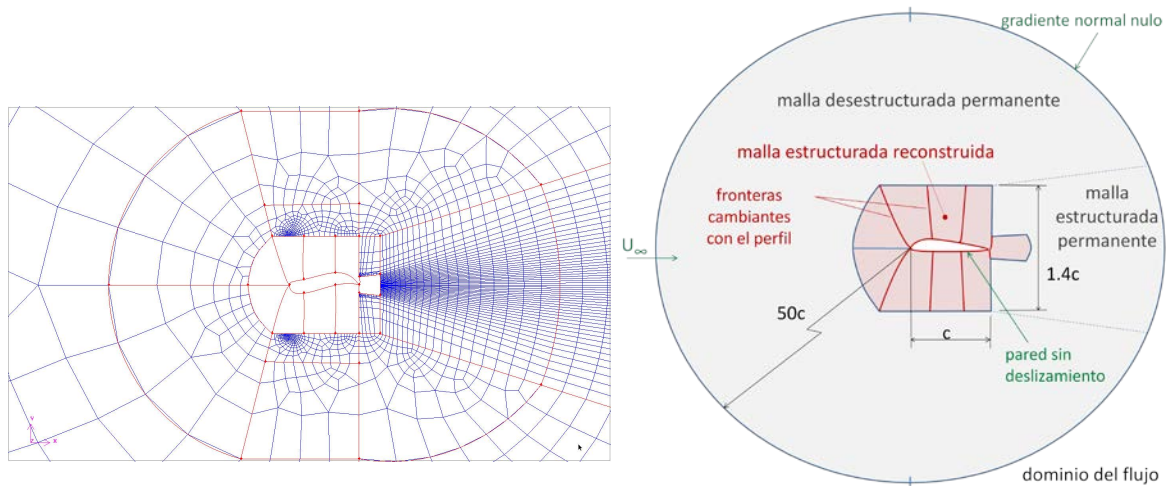


Figura III.53: (izquierda) Malla exterior permanente y fronteras móviles para el perfil actual, y (derecha) dominio del flujo para análisis CFD, tipo de condiciones de frontera, y estructura de los bloques de malla.

Esta secuencia de mallado de cada perfil, es fiable porque se reconstruyen únicamente mallas estructuradas, y es rápida porque solamente se reconstruyen los bloques adyacentes.

Las mallas completas empleadas para los perfiles (véase la figura III.51) contienen en torno a 12000 volúmenes finitos. Estas se han probado sobre perfiles conocidos (ver apartado II.5.1) y dieron resultados dentro de un nivel de precisión razonable.

Resumiendo, el proceso de generación de malla en optimización de forma mediante GA's tiene que cumplir requisitos muy severos de robustez, calidad y coste. Para mejorar la precisión en el análisis de los flujos se ha ampliado el dominio fluido y se ha adoptado el uso de un modelo de transición, que exige aumentar dramáticamente la densidad de malla en la capa límite. Todo esto motivó la mejora de las mallas, y para ello se modificó el procedimiento de mallado respecto del artículo [Lóp'08]. Así, para reducir la distorsión de las mallas cerca de la pared se han creado nuevos subdominios y se ha modificado su topología. Para reducir el coste de malla se han introducido patrones de malla que reducen bruscamente su densidad fuera de la capa límite. Los bloques de malla alejados del perfil son ahora fijos, y contienen mallas permanentes, desestructuradas en la mayoría de ellos.

La validez de este nuevo método de mallado ha sido comprobada mediante numerosas pruebas (ver apartado IV.6). Además, el método es general y puede ser adaptado para otros problemas y dominios diferentes.



## **CAPÍTULO IV.**

# **DESARROLLO DE UN SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN DE FORMA**



## 1. INTRODUCCIÓN.

En el capítulo sobre el estado del arte se han expuesto las ventajas del uso de GAs para la optimización de forma de perfiles aerodinámicos. Estos, pese a su elevado coste fueron elegidos como la opción más interesante para hacer una búsqueda global eficaz en el espacio de búsqueda. El elevadísimo coste de estas optimizaciones de forma mediante CFD usando GAs constituye un obstáculo básico en esta tesis. Este coste resulta de multiplicar el elevado coste de evaluación de cada individuo por un amplio tamaño de población necesario (entre medio centenar de individuos y unos cuantos cientos), y por un número grande de generaciones (en torno a cien), ascendiendo el total de evaluaciones por ejecución a decenas de miles.

El problema de optimización de forma de perfiles se aborda en el presente capítulo, y consiste en la búsqueda de perfiles aerodinámicos cuya forma sea óptima para algún criterio aerodinámico. Por ejemplo, un criterio que se usará será maximizar el cociente entre el esfuerzo de sustentación y de arrastre  $c_l/c_d$  que experimenta el perfil para ángulo de ataque nulo.

Para poder realizar estas búsquedas se ha desarrollado un sistema de optimización (**apartado 2**) que integra diferentes funciones y programas necesarios para realizar análisis CFD y optimizar los perfiles.

La función objetivo, como el flujo, es función de la geometría del perfil, que se define mediante *variables de diseño* constreñidas en ciertos intervalos; este espacio multidimensional es el *espacio de búsqueda*. En esta Tesis se ha usado una parametrización geométrica que define el perfil mediante dos curvas de Bézier, una para el extradós y otra para el intradós, empleando un total de seis variables de diseño que se especifican más adelante. Esta parametrización fue adoptada a partir de las conclusiones de un estudio previo (**apartado 3**) donde también se valoraron otras opciones. En este estudio se primó la sencillez de la formulación analítica, y el uso de un número de variables reducido para no aumentar en exceso el tamaño de las poblaciones, pero procurando mantener una buena flexibilidad geométrica (capacidad de generación de formas muy variadas).

Como es frecuente en problemas de optimización complejos, la función objetivo y su gradiente carecen de expresión analítica en función de las variables de diseño. De esta manera, el único modo de conocer el relieve con el fin de hallar sus extremos absolutos es realizar en cada punto un costoso análisis fluidodinámico del flujo correspondiente. Este análisis introduce una cierta cantidad de error con respecto al flujo real, que depende de la idoneidad de las ecuaciones empleadas para recoger la física del tipo de flujo de interés y del grado de resolución del modelo discretizado. Cuanto mayor sea la discrepancia entre el paisaje calculado y el paisaje real, menos se parecerán los diseños más aptos encontrados (en el paisaje calculado) a los más aptos del paisaje real.

Se emplearon herramientas CFD para el análisis del flujo, por su aplicabilidad a cualquier tipo de geometría y por su precisión reconocida en cálculos ingenieriles a un coste razonable. En este caso el error en el análisis se debe al uso de modelos de turbulencia RANS que simplifican las ecuaciones de Navier-Stokes, y a limitaciones en

la densidad y/o calidad de las mallas que cubren el dominio. Se van a utilizar dos programas comerciales de CFD; en los apartados 2, 3 y 4 el código Fidap de elementos finitos con modelo de turbulencia RANS de tipo k- $\epsilon$ , y en los apartados 5 y 6 el código Fluent de volúmenes finitos con un modelo de turbulencia RANS de transición.

Otra importante dificultad en la optimización de forma es la de conseguir la construcción de mallas para geometrías muy variadas de los perfiles, integradas por celdas/elementos de formas adecuadas en las zonas críticas del flujo. Para superarla fue desarrollada una herramienta automática de mallado para geometrías cambiantes (ver capítulo III). Por otra parte, la máxima densidad de malla utilizable viene determinada por la potencia de hardware disponible, que impone un número máximo de grados de libertad a los modelos discretizados, al ser inadmisibles tiempos de resolución por optimización que superen unos pocos días.

Volviendo al tema del análisis, los modelos de turbulencia de tipo k- $\epsilon$  son muy conocidos, y los más usados datan de las décadas de los años setenta y ochenta del siglo pasado, y dan buenos resultados cuando la capa límite es totalmente turbulenta [Bax'08]. Sin embargo, es habitual en flujos aeronáuticos como los abordados en esta Tesis, que la capa límite sea transicional, es decir que tenga un tramo inicial laminar, y que después se vuelva turbulenta. En estos casos se comprobó (ver capítulo II apartado 2.4) que estos modelos producían errores importantes y en consecuencia las formas seleccionadas en las optimizaciones (**apartado 4**) eran poco realistas.

Para reducir el error de los análisis, se optó por cambiar a un modelo de turbulencia reciente y más avanzado, que predice la transición, disponible en el código comercial de volúmenes finitos Fluent, que fue integrado en el sistema de optimización (**apartado 5**). Así se realizó una segunda campaña de cálculos de optimización (**apartado 6**) con una herramienta de análisis mejorada. Este tipo de modelos de turbulencia necesitan de mallas mucho más densas, y este aumento de coste de malla, obligó a reducir el tamaño de las poblaciones usadas en las búsquedas para no disparar su coste de tiempo.

En este capítulo se muestra el desarrollo de un sistema de optimización de forma para problemas de dinámica de fluidos, y su aplicación a un problema de optimización de perfiles aerodinámicos bidimensionales con restricciones. El sistema de optimización está gobernado por un GA básico. Este sistema se ha empleado en una campaña de cálculos inicial en un primer ejemplo de función objetivo (apartado 4), donde la función de evaluación empleaba el código comercial Fidap de elementos finitos, y en una campaña posterior en la que usaba el código Fluent de volúmenes finitos sobre dos funciones de optimización (apartado 6), la primera de ellas muy similar a la anterior. En ambas campañas de cálculos de optimización de forma se han realizado sendos estudios para verificar la eficacia de diferentes combinaciones de los parámetros básicos del GA.

## 2. DESARROLLO DEL SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN.

A continuación, se explica detalladamente cómo está constituido el sistema de optimización desarrollado, cuyo esquema general aparece en la figura IV.1. El programa OMEGA (Oriented Mechanical Engineering Genetic Algorithm) [Gom'01] basado en la librería de funciones PGAPack de David Levine, en lenguaje de programación C, es



empleado como un GA simple que gobierna la búsqueda, y sobre él se ensambla una función de evaluación específica, diseñada para la función objetivo correspondiente, y que ha sido desarrollada en esta tesis para el caso de funciones de optimización de forma de perfiles.

La función de evaluación es la encargada de obtener la aptitud de cada individuo de la población de búsqueda: el GA llama a la función de evaluación, y ésta realiza una serie de tareas necesarias para asignarle un valor de aptitud. Las tareas principales de la función de evaluación se muestran en la figura IV.1, estas son el trazado de subdominios (bloques de malla) con una forma adecuada para el correcto mallado de la nueva geometría, el análisis CFD (incluyendo el mallado), y la comprobación de la posible violación de las restricciones por parte del perfil, para en caso de producirse, calcular la cuantía de la penalización que le corresponde.

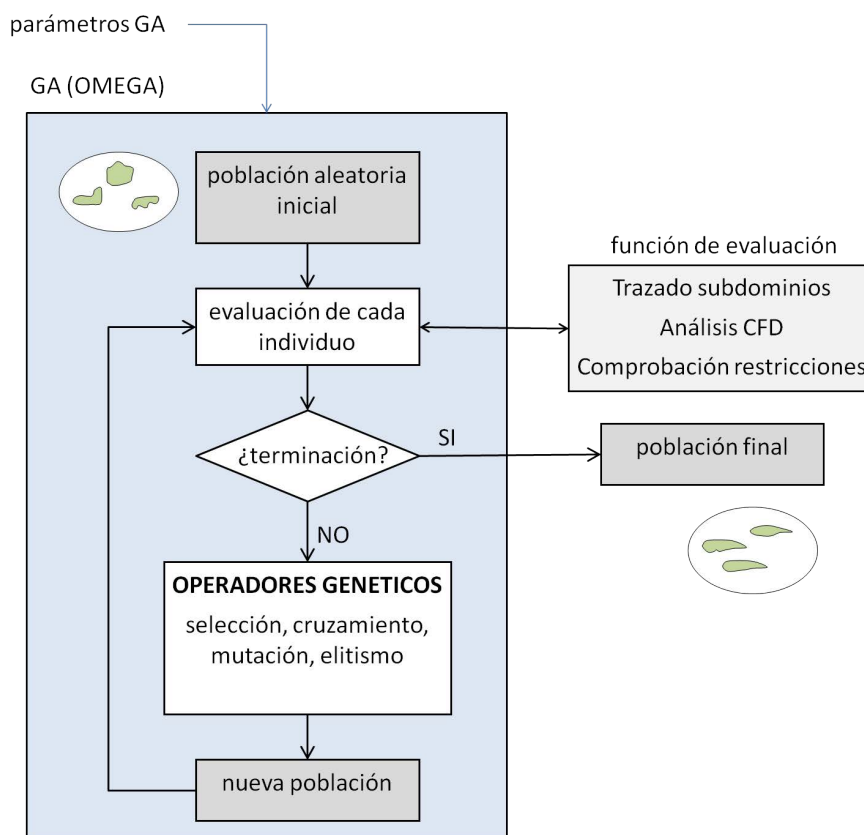


Figura IV.1: Esquema del sistema de optimización.

En concreto, la función de evaluación es un programa en lenguaje C, que se compone de una serie de subrutinas seguidas de un cuerpo principal, donde se ha implementado una secuencia de llamadas a dichas subrutinas y a programas externos. Los programas externos son programas comerciales usados para la generación de las mallas y el análisis CFD, ambas tareas son las más costosas implicadas en la evaluación, siendo la construcción y resolución de las ecuaciones del modelo discreto mucho más costosas que el mallado. Las subrutinas por su parte posibilitan el intercambio de información con los mencionados programas externos (escribiendo y leyendo datos respectivamente en sus archivos de entrada y salida) y realizan otras tareas como el cálculo de la geometría del perfil a partir de los genes del individuo y la subsiguiente definición de

los bloques de malla (subdominios), algunas comprobaciones sobre la geometría del perfil, los resultados del flujo y las restricciones, para el cálculo de las penalizaciones, etc.

Las tareas de la función de evaluación se desglosan de manera más detallada en los siguientes apartados, y los diagramas de flujo de las funciones de evaluación empleadas en esta tesis aparecen en las figuras IV.3 y IV.20. Inicialmente el análisis CFD del flujo alrededor del perfil se realizó usando el programa comercial Fidap, y posteriormente mediante el programa comercial Fluent (ver apartado 5). Por su parte, la generación de la malla de los bloques de malla alrededor del perfil también se realiza mediante un programa comercial (inicialmente el módulo mallador incluido en Fidap, posteriormente el programa de mallado Gambit).

En conjunto, para poder realizar una optimización de forma se define la función objetivo, se programa la función de evaluación correspondiente definiendo las subrutinas que sean necesarias, y a continuación ésta se ensambla al conjunto del programa-sistema OMEGA, produciendo un archivo ejecutable.

Para realizar cada búsqueda, se ejecuta éste último. Entonces, el sistema pide al calculista los datos de los parámetros básicos del GA para la búsqueda actual (tamaño de población, tasa de cruzamiento y tasa de mutación), y otras opciones de la búsqueda (método de selección, tipo de reemplazamiento generacional, posible opción de elitismo, criterio de terminación). Como se ve en la figura IV.1, una vez estos datos han sido introducidos comienza la búsqueda mediante GA, y a lo largo de ella para evaluar cada individuo, se hace una llamada a la función de evaluación, esta devuelve el valor de su aptitud al GA, que lo escribe en el archivo de resultados, además, cuando ha terminado de evaluar todos los individuos de la generación actual escribe en este mismo archivo un informe con la aptitud media de la población, y la aptitud del mejor individuo de la misma. Cuando se cumple la condición de terminación de la búsqueda, el GA escribe los cromosomas descodificados de los individuos de la población final en un archivo.

El sistema se ha desarrollado sobre plataforma Linux, y los cálculos de optimización se realizaron también en ordenadores con dicho sistema operativo.

## 2.1 MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN.

La optimización fue realizada usando un GA simple que sigue la secuencia mostrada en la figura IV.1. Primero el usuario proporciona un número *semilla*, de cuatro cifras, que es usado para generar una secuencia unívoca de números aleatorios que forman los genes de los  $p$  cromosomas en la población inicial. Ésta se denota  $P(t=0)$ , donde  $P$  significa población y  $t=0$  es el número de la generación. El número semilla también podría ser generado de manera aleatoria, pero se prefirió la opción en que lo elige el usuario porque permite repetir los experimentos, y probar diferentes combinaciones de parámetros sobre una misma población inicial para investigar sus efectos de diferentes combinaciones de los parámetros del GA en el comportamiento exploratorio y de explotación de la búsqueda. El propósito es ajustar estos parámetros para obtener buenos resultados para una función objetivo dada, esto es, para un paisaje de búsqueda determinado.

Como muestra la figura IV.1, una vez generada la población inicial  $P(0)$ , cada individuo es evaluado, y después se aplican los operadores de selección, cruzamiento y mutación para obtener la siguiente generación de individuos  $P(1)$  según la siguiente secuencia. En el método de selección por torneo, que será el usado en los cálculos, una nueva población  $P'(1)$  es generada después de  $p$  torneos, donde cada torneo consiste en tomar aleatoriamente tres individuos y seleccionar el de mayor aptitud. Después, para una tasa de cruzamiento  $c$ , se cruzan aproximadamente  $pc/2$  pares de individuos (ver apartado 4.1 del capítulo I), cada uno de los cuales produce dos hijos que sustituyen a sus progenitores y se integran junto con los individuos no cruzados en la población  $P''(1)$ . Se usó cruzamiento de dos puntos. A continuación, un porcentaje  $m \cdot 100$  de los genes de esta población son mutados. Una vez que la primera generación  $P(1)$  ha sido obtenida, se repite el mismo proceso hasta satisfacer el criterio de terminación. El criterio usado en este estudio fue 100 generaciones.

Cuando se aplica elitismo, el individuo más apto de cada generación  $P(i)$  es automáticamente introducido en la siguiente generación  $P(i+1)$ . Esta opción incrementa la presión de explotación y acelera la convergencia, aunque reduce la diversidad en las poblaciones a través de la evolución. Por ello la búsqueda es más propensa a quedar atrapada en extremos locales si se usan poblaciones pequeñas.

Cuando no se usa elitismo, el algoritmo tiende a converger si se encuentra un buen individuo, pero esto no reduce la exploración de otras posibilidades en el espacio de búsqueda. Para alcanzar este comportamiento, se requiere una definición más precisa de los demás parámetros. Este es el antagonismo entre los aspectos principales de los GAs, buscar y afinar. No es posible afinar una solución si hay una tendencia a buscar en el espacio de búsqueda entero, y viceversa. Por lo tanto, el usuario tiene que encontrar un equilibrio adecuado para cada caso concreto.

## **2.2 ANÁLISIS CFD DE CADA PERFIL USANDO EL PROGRAMA FIDAP.**

El análisis mediante el código de elementos finitos Fidap consiste en la construcción del modelo de elementos finitos, la resolución del sistema de ecuaciones discretizadas y la lectura de resultados de los esfuerzos, y se describe a continuación.

El programa Fidap se compone de varios módulos. En primer lugar para la modelización geométrica y la generación de la malla se usa el módulo FI-GEN. En este módulo se construyen los subdominios a mallar, se especifica la distribución de nudos de malla en cada frontera de bloque de malla y se mallan éstos.

A continuación en el módulo FIPREP se introduce la física del modelo computacional. Ésta consiste en las propiedades del material fluido (densidad y viscosidad), el tipo de flujo (bidimensional, newtoniano, incompresible, turbulento y estacionario), el modelo de turbulencia RANS (tipo  $k-\epsilon$ ) y el tipo de viscosidad turbulenta, las condiciones iniciales y de contorno, la opción de discretización de “upwinding” (se usa la opción híbrida), y las opciones del control de la simulación (algoritmo de solución segregado,

valor del factor de relajación, tolerancias de convergencia para los residuos de las variables, y número máximo de iteraciones internas y externas).

Una vez construido el modelo, el comando CREATE chequea la calidad de la malla, y en caso de haber elementos finitos incorrectos, cuyo jacobiano es negativo, lo indica con un mensaje, no se hace el procesamiento del modelo de elementos finitos y el perfil resulta fuertemente penalizado. Como se ha visto en el apartado III.4.2.3, los bloques de malla de geometría cambiante se trazan para evitar que esta circunstancia pueda ocurrir. Este procedimiento busca minimizar la distorsión en los elementos de las proximidades de la pared para que los resultados del flujo puedan ser válidos.

Si el chequeo ha dado una respuesta satisfactoria, el módulo FISOLV construye y resuelve automáticamente el sistema de ecuaciones discretizadas del modelo. La aplicación del método de elementos finitos a las ecuaciones de gobierno del flujo se hace usando el método de residuos ponderados de Galerkin, resultando en un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas, integrado por las ecuaciones del modelo discreto del flujo, y que tiene la forma

$$[K(\{u\})]\{u\}=\{F\} \quad (IV.1)$$

donde  $[K]$  es la matriz global,  $\{u\}$  es el vector de incógnitas nodales ( $u,v,p,k,\varepsilon$ ), y  $\{F\}$  es el vector que incluye las condiciones de contorno. El residuo se define en la forma

$$\{R(\{u\})\}=[K(\{u\})]\{u\}-\{F\}, \quad (IV.2)$$

este vector es nulo cuando la solución es exacta.

El sistema de ecuaciones (IV.1) es no lineal y debe ser resuelto usando un procedimiento iterativo. Se usa el algoritmo segregado, por ser más rápido que el acoplado cuando el número de elementos finitos es relativamente elevado. El método segregado [Fid'98] evita la formación directa de una matriz global; en su lugar desacopla las ecuaciones de conservación y resuelve cada una de ellas de manera secuencial. En cada iteración se resuelve para una de estas incógnitas ( $u,v,p, k$  ó  $\varepsilon$ ), mientras que las otras mantienen los valores de la iteración anterior. La siguiente iteración se usa para la siguiente incógnita. Esto requiere menos almacenamiento de memoria, aunque aumenta el número de iteraciones.

El postprocesado se realiza usando el módulo FIPOST. La solución de las variables en cada nudo se encuentra en el archivo base de datos \*.FDPOST, y con esta información se obtienen los esfuerzos que el flujo ejerce sobre el perfil.

Como muestra la figura IV.2, el análisis de un perfil comprende tres procesos del programa Fidap, que se han representado por sus respectivas carpetas de archivos temporales. Cada uno de estos procesos realiza respectivamente el preprocesado, el procesamiento y el postprocesado del análisis.

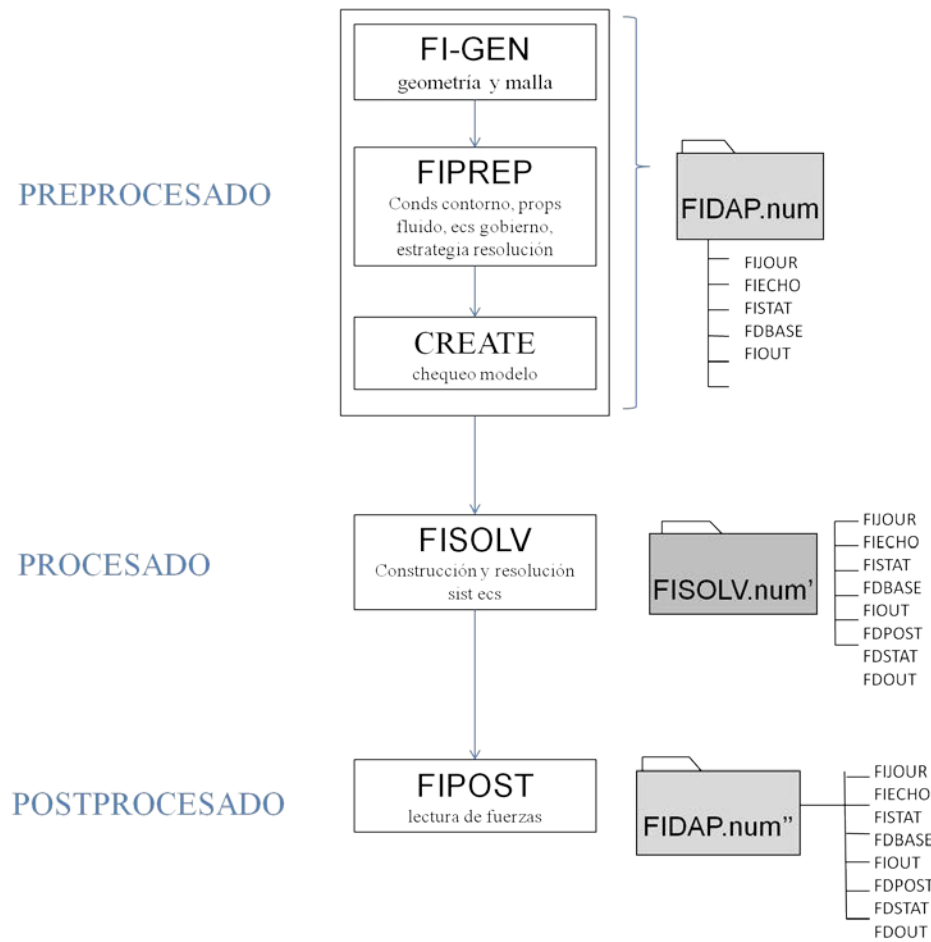


Figura IV.2: Módulos de Fidadap implicados en una evaluación y los procesos necesarios, de los que se representan sus carpetas y ficheros temporales.

### 2.3 IMPLEMENTACIÓN DE LA FUNCIÓN DE EVALUACIÓN USANDO FIDAP.

A continuación se van a enumerar detalladamente las tareas que desempeña la función de evaluación para obtener el valor de la aptitud de cada cromosoma, que vienen recogidas en la figura IV.3 izquierda. En concreto para cada perfil se hacen tres test, uno para chequear si su geometría es factible (que no tenga forma de ocho), otro para detectar si la malla es correcta (el ya mencionado test CREATE interno de Fidadap), y el último para averiguar si el proceso de cálculo ha convergido.

Primero la función de evaluación lee las variables del cromosoma. Éste está compuesto por los seis genes  $y_1, \dots, y_6$ , que son las posiciones de los vértices intermedios de los polígonos de control de ambas curvas de Bézier del perfil, expresadas en código binario (alelos). Las ecuaciones (III.1) de ambas curvas del perfil de parámetro  $t$  están escritas en términos de  $(y_1, \dots, y_6)$ , y sustituyendo en ellas un número suficiente de valores del parámetro  $t$ , en este caso 25, se obtienen los puntos de ambas paredes (curvas de Bézier) del perfil.

Después se chequea si el perfil tiene forma de ocho, es decir, si estas curvas intersectan, comprobando si para alguno de los valores de  $t$  empleados (salvo el 0 y el 1 correspondientes al borde de ataque y de salida) el punto correspondiente al extradós  $y_e(t_i)$  tiene una ordenada menor que el del intradós  $y_i(t_i)$ . En caso afirmativo el individuo-perfil no es factible, y se le asigna un valor muy reducido a su aptitud (-10), y se pasa al siguiente individuo.

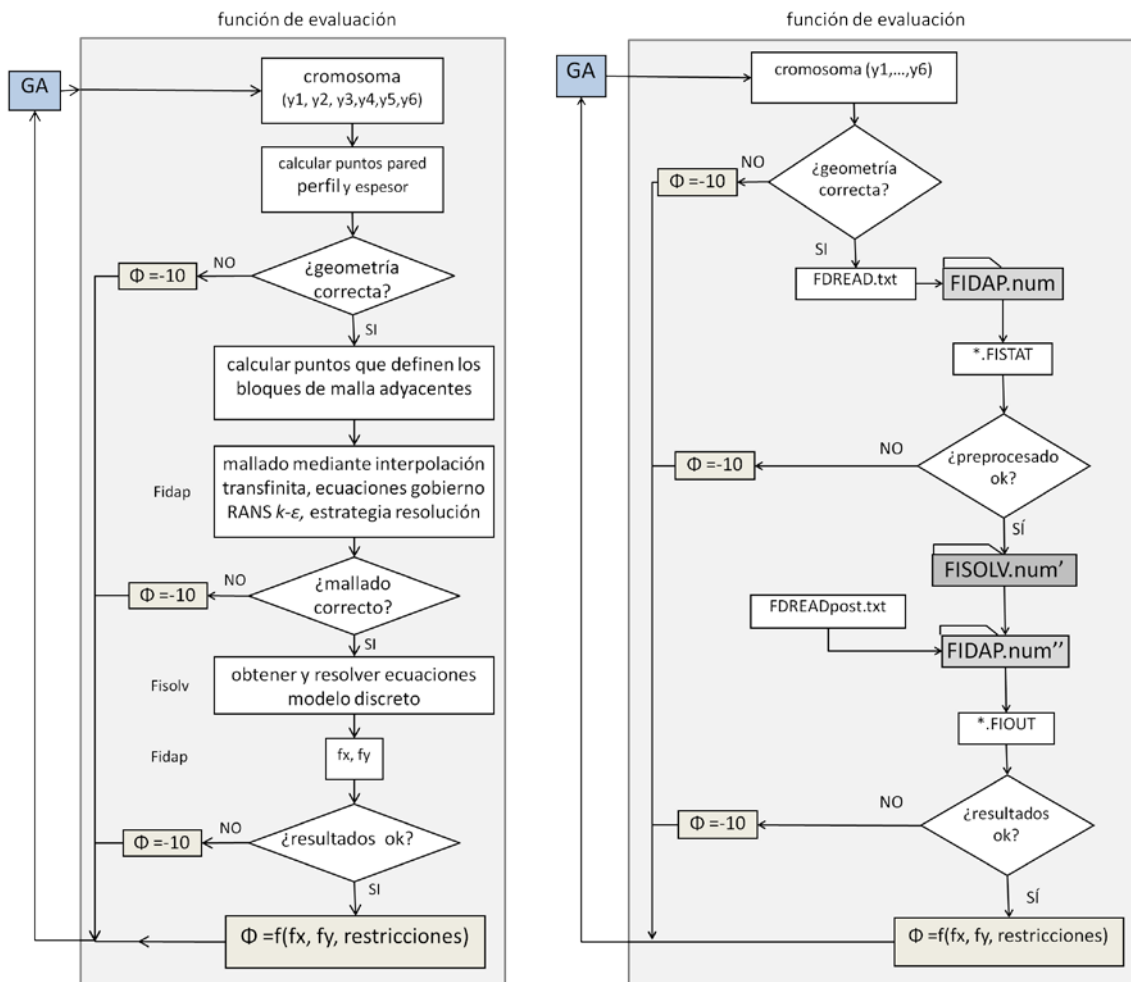


Figura IV.3: Implementación de la función de evaluación, (izquierda) diagrama de flujo de las tareas, y (derecha) de los procesos y ficheros empleados.

Si no se cortan las curvas, el perfil es factible, y usando algunos puntos de cada curva se calculan los puntos que definen las fronteras de forma variable de los bloques de malla adyacentes al perfil (según apartado III.4.2.3). Las coordenadas de los puntos del perfil, de los puntos de las fronteras de forma variable de bloques adyacentes, y las de los puntos que definen los bloques de malla fijos, son a continuación escritas en el archivo de texto FDREAD. Este archivo contiene los datos y comandos necesarios para construir y resolver el modelo, relativos respectivamente a los módulos FI-GEN y FIPREP.

Entonces el sistema de optimización crea un primer proceso Fidap, en el que se ejecuta la secuencia de comandos del archivo FDREAD para crear el modelo discreto de elementos finitos para el flujo alrededor del perfil.

Esta secuencia es como sigue. En el módulo FI-GEN se crean los puntos que definen todas las fronteras de los bloques de malla (incluyendo las paredes del perfil). Los puntos introducidos son entonces interpolados usando curvas de tipo NURBS para obtener las fronteras de los bloques de malla. Así por ejemplo, la geometría de cada pared del perfil es ahora una curva NURBS que interpola un conjunto de 25 puntos de la correspondiente curva Bézier. El motivo de usar NURBS es que FI-GEN no dispone de un comando para trazar curvas de Bézier.

Usando las curvas de las fronteras se generan los bloques de malla, que a continuación son mallados mediante interpolación transfinita. Después mediante el comando CREATE se chequea la calidad de la malla, y en caso de encontrar elementos finitos incorrectos Fidap escribe en el archivo \*.FISTAT un mensaje de error indicando que existen elementos con jacobiano negativo (es decir, existe algún cuadrilátero con un ángulo cóncavo o cuyos lados se cruzan).

Una vez construido el modelo, y para saber si la malla es correcta, el sistema lee el fichero \*.FISTAT y si encuentra el mensaje de error anterior entonces la malla no es correcta, y se asigna al perfil actual un valor de aptitud negativo (-10), y sin calcular este flujo se pasa al siguiente cromosoma. Si no existe dicho mensaje de error, se crea un proceso FISOLV en el que se resuelve el sistema de ecuaciones del flujo, y se almacenan los resultados de las variables en los nudos de la malla en el archivo base de datos \*.FDPOST.

Después del procesado, el sistema abre un segundo proceso Fidap sobre el modelo actual para realizar el postprocesado, y ejecuta el fichero de comandos FDREADpost que calcula los esfuerzos del flujo sobre el perfil ( $f_y$  y  $f_x$ ) a partir de dichos resultados. Fidap escribe estos esfuerzos en el fichero de programa FIOUT, y el sistema los lee para calcular la aptitud del perfil.

Acerca del procesado, en pruebas de optimización sobre decenas de miles de perfiles, se observó que cuando se usaban valores reducidos del factor de relajación (0 ó 0,2) para algunos flujos divergía el proceso de resolución del sistema de ecuaciones (IV.1), arrojando valores muy elevados de los residuos y esfuerzos de magnitud inaceptablemente elevados, sin sentido físico. Para evitar este problema, se aumentó el factor de relajación a 0,5. Esto ralentizó los cálculos pero redujo en gran medida el número de cálculos divergentes.

Como aún existe un pequeño riesgo de introducir perfiles con aptitud incorrecta en la búsqueda, se realiza un último filtro-comprobación: solamente se admiten los perfiles cuyo esfuerzo de arrastre esté en un rango plausible, entre el valor correspondiente a una placa plana y el de un cuadrado. Es decir, si los valores de las fuerzas no se encuentran dentro de este rango razonable, lo más probable es que el proceso de resolución de las ecuaciones haya divergido y se asigna al perfil una aptitud de valor -10. Realizada esta tercera comprobación, las probabilidades de que se haya colado en la búsqueda un perfil mal calculado son ínfimas.

A continuación, se comprueba si el perfil viola las restricciones de la función objetivo, y en caso de ser así, se le penaliza en función del grado de violación. Por ejemplo, un tipo de restricción que se usará en las optimizaciones será imponer un espesor mínimo para

los perfiles. En este caso se calcula el espesor máximo de cada perfil a lo largo de su cuerda (usando las coordenadas de los puntos de ambas paredes), y se compara con el valor mínimo admisible, y si es menor que éste será penalizado tal y como se verá más adelante.

### **3. PARAMETRIZACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS PERFILES Y CODIFICACIÓN DE LOS CROMOSOMAS.**

En este apartado se selecciona una parametrización válida para la geometría de los perfiles entre diferentes opciones, partiendo de limitar el número de variables de diseño para que el coste de las búsquedas no sea prohibitivo. Se elegirán las variables de diseño y sus intervalos de definición de manera que el espacio de búsqueda sea adecuado para la misma.

En una optimización de forma, en este caso de perfiles, la parametrización empleada para definir su geometría afecta a la optimización ya que define la topología del espacio de búsqueda y condiciona el paisaje de la función objetivo, donde se refleja la física de los flujos comprendidos en dicho espacio.

La forma de los perfiles se puede definir mediante curvas de diferente naturaleza y con diferente número de parámetros, que tienen mayor o menor relación con la física del flujo. Algunas muy usadas para este fin en la literatura son las curvas NURBS, B-splines, Bézier, Hicks&Henne o la parametrización PARSEC.

Los estudios preliminares de optimización de perfiles realizados están condicionados por un coste muy alto para las búsquedas mediante GA, debido al elevado coste de cada análisis CFD. De esta forma, está limitado el número de parámetros de diseño que se puede emplear (las dimensiones del espacio de búsqueda) y por lo tanto también la flexibilidad geométrica de la parametrización (capacidad de generar formas muy variadas). Si el número de dimensiones es elevado, para que la búsqueda sea eficaz el tamaño de población debe aumentar, disparando el número de evaluaciones de la función objetivo. En esta situación se ha optado por que el número de variables de diseño que definen la geometría del perfil sea 6. Siendo éste un número relativamente pequeño, se limita la capacidad de encontrar geometrías, pero aún se puede conseguir una variedad razonable de formas si se elige una parametrización adecuada.

Para ello se buscará una parametrización que permita geometrías útiles desde el punto de vista aerodinámico (con radios pequeños y grandes en el borde de entrada, bordes de salida afilados y amplio rango de espesores y combaduras, y formas suaves) y con una amplia variedad de formas. Se primará también la sencillez en las ecuaciones de las curvas. Además, la codificación será elegida para producir un espacio de búsqueda con una topología sencilla, donde las búsquedas puedan ser eficientes.

El método de Hicks y Henne [Hic'78] compone la geometría mediante superposición lineal de curvas que presentan una protuberancia en diferentes posiciones a lo largo de la cuerda, pero se necesitan de un número elevado de éstas para dar geometrías suficientemente variadas. La parametrización PARSEC [Sob'99;Oya'00;Sha'07]



emplea 11 parámetros fuertemente relacionados con la forma del perfil y el flujo, sin embargo este número es aún excesivo para las limitaciones de coste dadas.

Por su parte, las NURBS [Rob'01] también necesitan de un buen número de variables de diseño para proporcionar cierta flexibilidad geométrica, y su representación analítica es compleja. Sin embargo, las curvas de Bézier [Wan'03; Des'07; Lop'08] tienen una formulación analítica más sencilla que las NURBS y B-splines [Cos'84], y al no ser curvas de interpolación ni tener control local de la forma, usando un reducido número de variables de diseño es posible generar cierta variedad geométrica, aunque renunciando eso sí, a la representación de cambios de forma bruscos.

Hechas estas consideraciones previas con carácter de preselección, a continuación se llevó a cabo la selección de una parametrización geométrica adecuada para un bajo número de variables de diseño. Esto incluye elegir el tipo de curvas, la ubicación de los puntos que controlan la forma, y la amplitud de los intervalos de existencia de las variables de diseño, todo ello buscando que la variedad geométrica sea amplia y la topología del espacio de búsqueda sencilla.

### 3.1 CURVAS DE INTERPOLACIÓN NURBS.

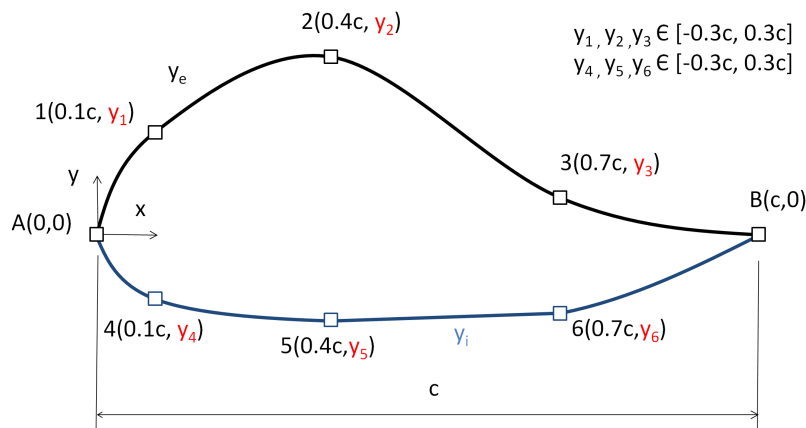


Figura IV.4: Codificación del cromosoma empleando curvas de interpolación tipo NURBS.

Inicialmente se decidió definir la geometría de los perfiles usando el tipo de curva más flexible incluida en el preprocesador de Fidap: las curvas NURBS. Los parámetros geométricos tomados se muestran en la figura IV.4, donde extradós e intradós son sendas curvas NURBS que interpolan cinco puntos. Los tres puntos intermedios tienen fijadas sus abscisas en los valores de la figura IV.4, y sus ordenadas son las variables de diseño y están definidas en los rangos indicados. Así el cromosoma de cada individuo tiene seis genes  $y_1, \dots, y_6$ , cuyos alelos son los números binarios correspondientes.

Se realizó una prueba de optimización usando esta parametrización, y se comprobó que las curvas del extradós y del intradós se cortan para muchos individuos, dando geometrías imposibles. Algunos de estos perfiles no factibles, como el mostrado en la figura IV.5 izquierda, son analizados sin que haya sido advertido que no tienen sentido físico, contaminando así la búsqueda.

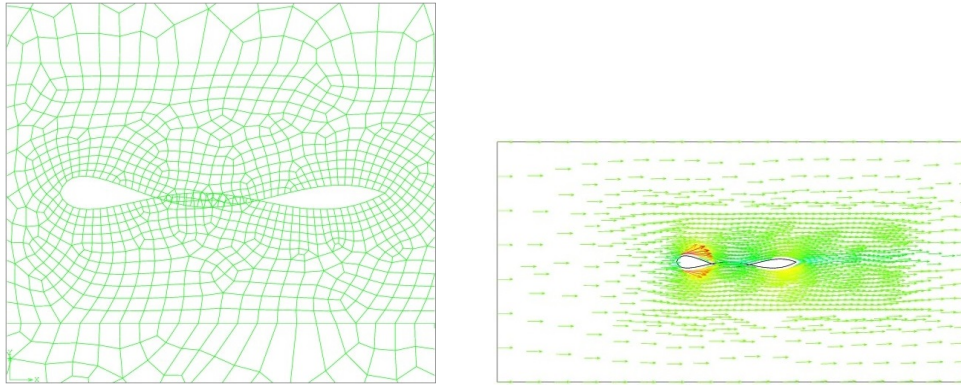


Figura IV.5: Flujo sin sentido físico, debido a que las curvas del extradós y del intradós se cortan, que sin embargo ha sido calculado por el procesador Fidap. (izquierda) Malla, y (derecha) velocidad del flujo.

Para evitar este problema, se implementó un test que comprueba la geometría de cada perfil antes de calcular su flujo (ver el diagrama de la figura IV.3). Si las curvas del perfil intersectan en algún punto diferente de sus extremos, entonces el perfil es fuertemente penalizado para expulsarlo de la búsqueda.

Ahora bien, realizar esta comprobación implica manejar las ecuaciones de las curvas, que en el caso de las curvas NURBS son muy complejas [Cor'02]. Por ello se ha desestimado el uso de curvas NURBS. Otro motivo que condujo a tomar esta decisión fue el hecho de que la parametrización de la figura IV.4 no permite trazar pendientes verticales en el borde de entrada del perfil sin introducir variables de diseño adicionales.

Así, se buscó una parametrización que tenga una formulación analítica más sencilla, y que permita pendientes verticales en el borde de entrada.

### 3.2 CURVAS DE BÉZIER SIMPLES.

La parametrización de la geometría de los perfiles mediante curvas de Bézier es muy sencilla, por ejemplo usando dos curvas de Bézier, definidas según la expresión (III.1), una para la pared superior y otra para la inferior.

Inicialmente se propuso la parametrización de este tipo mostrada en la figura IV.6. Cada curva de Bézier está definida por un polígono de control de 5 vértices, de los cuales el primero y el último están fijos en las posiciones respectivas  $(0,0)$  y  $(c,0)$ , coincidiendo con los bordes de ataque y de salida del perfil, y los tres intermedios se encuentran en las abscisas  $x_1=0$ ,  $x_2=0,3c$  y  $x_3=0,7c$  y pueden moverse verticalmente en los rangos indicados en la figura IV.6 para definir diferentes curvas.

Para comprobar si las curvas de un perfil se cortan es suficiente con comparar las ordenadas de cada una, que viene dada por una expresión paramétrica, para un número suficiente de valores del parámetro  $t$ .

La variabilidad de la geometría de cada curva viene dada mediante 3 variables, que son las ordenadas de los tres vértices intermedios del polígono de control. Por las características de los polinomios de Bernstein, base de las curvas de Bézier, la pendiente

en los puntos extremos de la curva (inicio y fin de ésta) coincide con la del segmento del polígono de control en el mismo punto. Es decir, colocando el vértice 1 en la vertical de A se impone una pendiente vertical en el borde de ataque. Análogamente, la pendiente en B coincide con la del lado 3B.

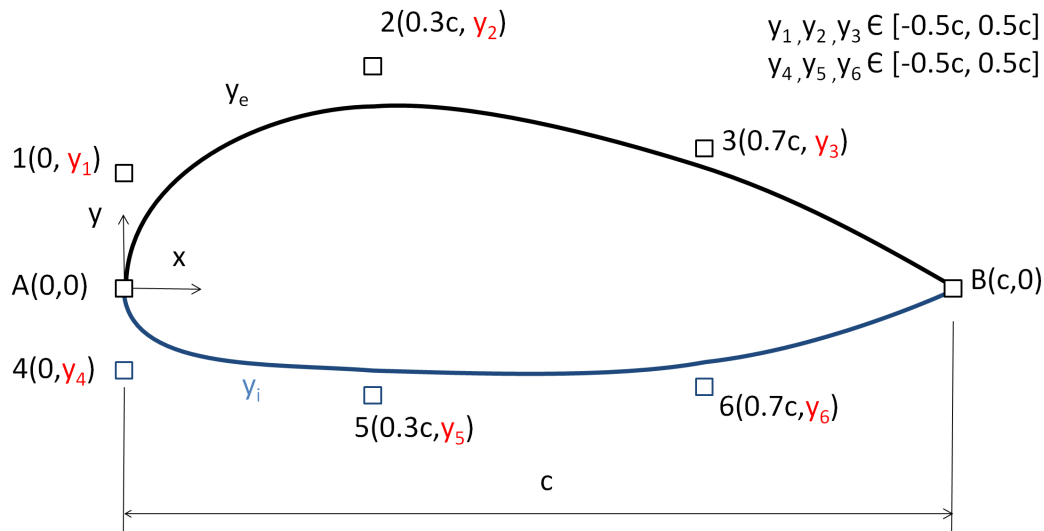


Figura IV.6: Codificación de un perfil usando sendas curvas de Bézier para el extradós y el intradós.

Estas curvas son apropiadas para perfiles aerodinámicos porque permiten generar geometrías muy diversas con curvaturas suaves. El control de la forma se dice que es global, ya que la modificación de la posición de un vértice de control influye en la forma de toda la curva.

Usando esta codificación, se observó en varias pruebas de optimización sobre poblaciones de 100 individuos, como era previsible, que la mayoría de los perfiles de la población inicial (habitualmente entre el 50 y el 75% de ellos) eran perfiles no válidos cuyas curvas se cortan. Estos individuos con “forma de ocho” son duramente penalizados sin ser calculados, para ser expulsados de la búsqueda. En las generaciones siguientes a partir de la inicial, el número de individuos no factibles se redujo rápidamente porque estas poblaciones descienden (proceden) de individuos factibles.

Así, el espacio de búsqueda actual presenta zonas no factibles que ocupan una parte demasiado amplia de él, donde caen la mayoría de los individuos de la población inicial generados aleatoriamente. Por lo tanto, esta topología del espacio de búsqueda no es interesante porque la exploración de sus zonas factibles es muy reducida, y aumentarla implica multiplicar el tamaño de población, y con ello el coste de la optimización.

Mejorar la eficiencia de las búsquedas pasa necesariamente por aumentar la exploración para un tamaño de población dado, aumentando la proporción de perfiles factibles en la población inicial.

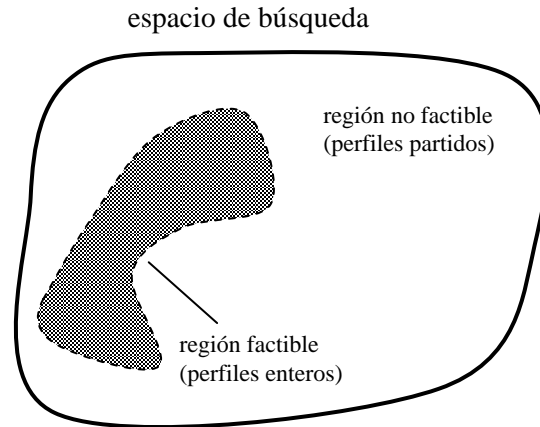


Figura IV.7: Espacio de búsqueda para la codificación actual.

Un modo de conseguir esto es sustituir cada individuo absurdo (perfil en ocho) generado aleatoriamente para la población inicial por otro nuevo, generado aleatoriamente, las veces que haga falta hasta que sea factible. Esta opción apenas añade coste operativo a la búsqueda, y presumiblemente mejoraría su eficacia. Pero al introducir una población inicial que no está aleatoriamente repartida en el espacio de búsqueda, sino forzada a pertenecer a la región factible de éste, se está modificando la naturaleza de la herramienta de optimización (el GA básico) y creando una nueva variante, y se prefiere no hacerlo, porque no se conoce el comportamiento de ésta última y se pierde el referente de otros trabajos que usan GA's.

Análogamente, se podría también emplear el mismo operador iterativo comentado, no solo en la población inicial sino en cada generación, para potenciar la exploración haciendo que todos los individuos fueran factibles, pero por los mismos motivos no se va a hacer.

Alternativamente, se opta por modificar la parametrización-codificación de los perfiles para mejorar la topología del espacio de búsqueda, reduciendo la extensión de su zona no factible, es decir, la proporción de perfiles rotos o en ocho. Por supuesto se mantiene el número de variables y se busca la sencillez de las ecuaciones de las curvas.

### 3.3 CODIFICACIÓN PARA MINIMIZAR EL NÚMERO DE PERFILES QUE SE CORTAN.

El uso de curvas de interpolación, permite un mayor control sobre las posiciones relativas de las curvas, porque se pueden definir los rangos de movilidad de los puntos interpolados del extradós más arriba que los de sus homólogos del intradós, y evitar así en buena medida que ambas curvas se corten.

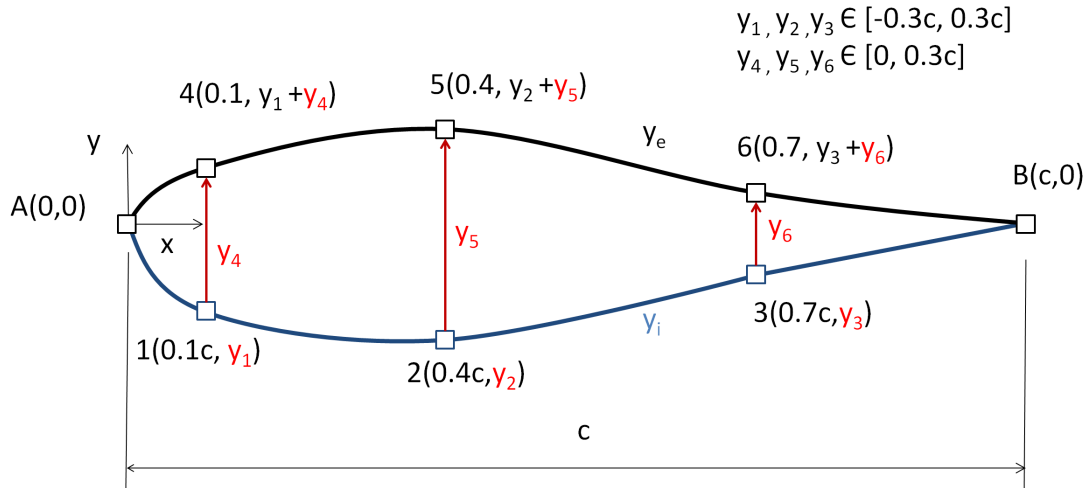


Figura IV.8: Perfil obtenido mediante dos curvas que interpolan tres puntos intermedios, y definición de los rangos de existencia de las variables de diseño para minimizar el número de perfiles que se cortan.

Como se propone en la figura IV.8, las variables  $y_4$ ,  $y_5$  e  $y_6$  representan las distancias entre los tres puntos de control intermedios homólogos de cada curva, e imponiendo que sean positivas se reduce fuertemente la probabilidad de que un perfil sea roto, aunque no la elimina totalmente como se puede apreciar en la figura IV.9.

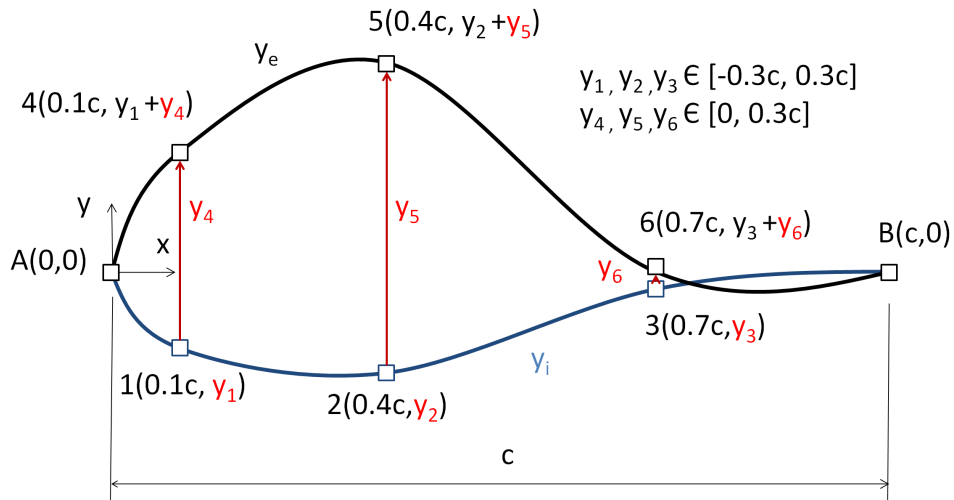


Figura IV.9: Caso poco habitual de un perfil definido a la manera anterior en que se produce el corte de las curvas de extradós e intradós.

Entonces se pensó en usar para estas curvas de interpolación cuatro tramos de splines cúbicos, que en el caso del intradós serían los tramos A1, 12, 23 y 3B. Estos polinomios de tercer grado garantizan la continuidad de la pendiente en los puntos de unión 1, 2 y 3, y tienen en los extremos de cada tramo curvatura nula [Cor'02]. Sin embargo, para obtener la ecuación de cada tramo es indispensable resolver sistemas de ecuaciones, y por razones de sencillez fue desestimado este tipo de curvas.

### 3.4 CURVAS DE BEZIER COMPUESTAS.

Para sortear la resolución de sistemas de ecuaciones para la obtención de las expresiones de las curvas, y al mismo tiempo buscar que el número de perfiles rotos fuera reducido en el conjunto del espacio de búsqueda, se optó por el uso de *curvas de Bezier compuestas* de dos tramos, como puede verse en la figura IV.10.

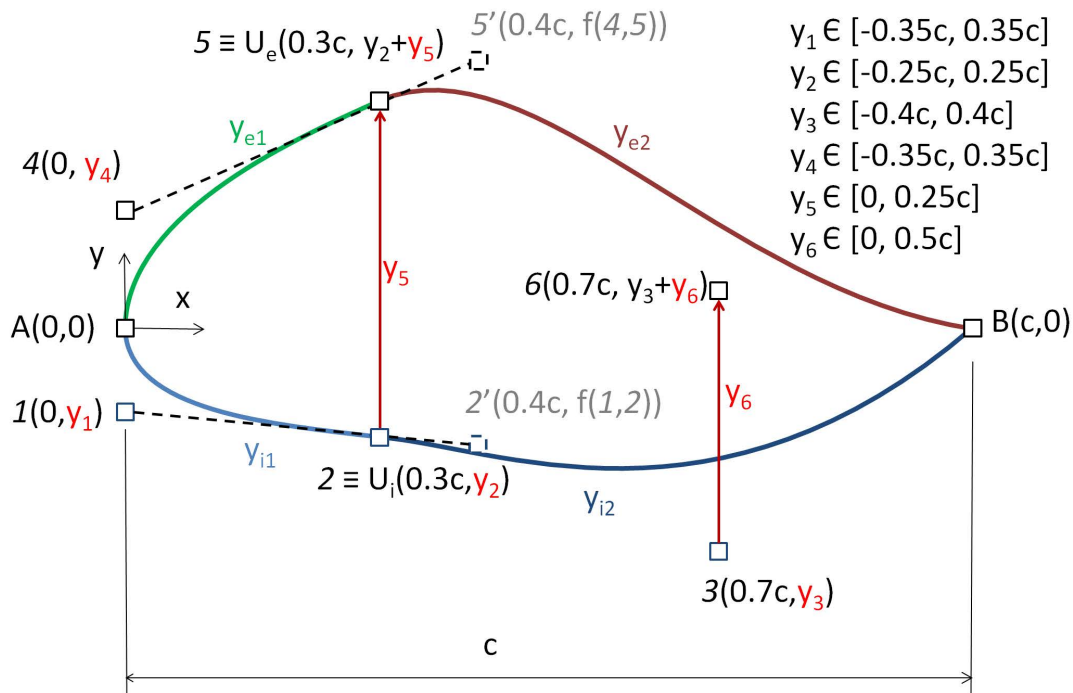


Figura IV.10: Perfil construido usando dos curvas de Bézier compuestas para el extradós,  $y_{e1}$  e  $y_{e2}$ , y otras dos para el intradós,  $y_{i1}$  e  $y_{i2}$ , y codificación del cromosoma para reducir el número de perfiles partidos.

Esta parametrización de la geometría emplea una curva de Bézier compuesta para el intradós y otra para el extradós, estando cada una de ellas formada por dos curvas Bézier simples. Las Bézier simples se unen en el punto U, para el extradós estas son la  $y_{e1}$  cuyo polígono de control es el A-4-5, y la  $y_{e2}$ , cuyo polígono de control es el 5-5'-B. La continuidad de la pendiente en su unión  $5 \equiv U_e$  está garantizada porque los vértices 4,5 y 5' están alineados. Lo mismo ocurre con los vértices de control 1,2 y 2' del intradós.

Por el hecho de pertenecer los vértices de control  $5 \equiv U_e$  y  $2 \equiv U_i$  a cada pared, se puede imponer que el primero se ubique siempre por encima del segundo, como se muestra en la figura IV.10, reduciendo así la proporción de perfiles que se cortan en comparación con la parametrización a base de curvas de Bézier simples de la figura IV.6.

Para ello se ha definido la variable de diseño  $y_5$  como la diferencia de ordenadas entre  $U_e$  y  $U_i$  y se ha impuesto que ésta sea siempre positiva. La forma del extradós queda determinada por la posición de los tres vértices de control móviles 4, 5 y 6. El vértice de control 5' tiene por abscisa  $0,4c$ , y su ordenada no es libre, sino que viene fijada por las variables  $y_4$  e  $y_5$  que definen la recta 4-5-5'.



Se realizaron varias ejecuciones de prueba con esta codificación, obteniéndose en las poblaciones iniciales entorno a un tercio de individuos factibles. En caso de definir la variable  $y_4$  como positiva el número de perfiles factibles en la población inicial aumenta.

En la figura IV.11 se muestran las mallas de dos perfiles de una de estas búsquedas, generados con esta parametrización. Obsérvese que, aunque hay continuidad de la pendiente en los puntos  $U_e$  y  $U_i$ , la curvatura cambia bruscamente y la forma pierde su “suavidad” y parece que haya sido ligeramente doblada por ahí. Debido a esta irregularidad en la forma, esta parametrización no se considera válida.

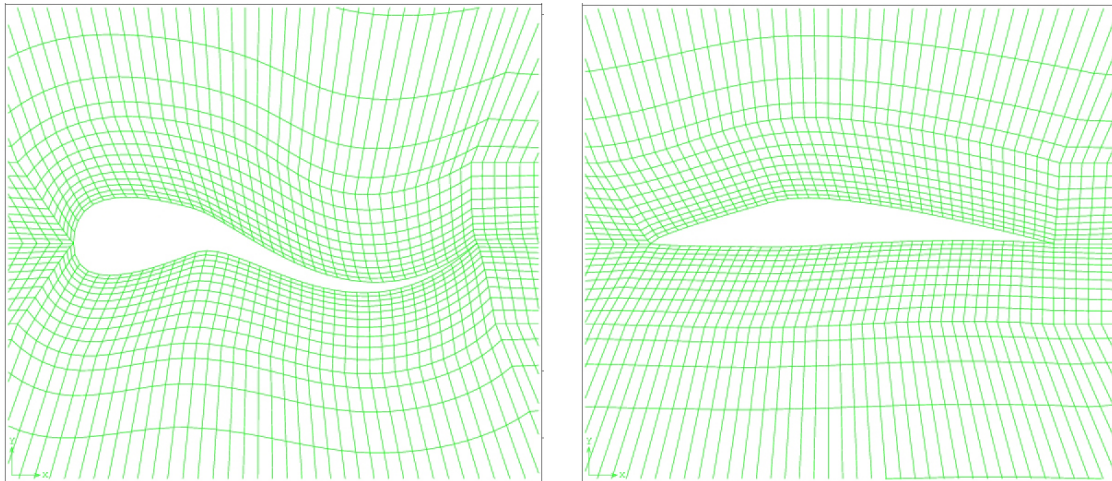


Figura IV.11: Mallas para dos perfiles obtenidos en una búsqueda que emplea la parametrización a base de curvas de Bézier compuestas.

Se planteó el uso de curvas de Bézier compuestas de tres tramos para cada pared, pero presumiblemente aún quedarían individuos no factibles, y además cada curva tendría dos puntos con cambio brusco de curvatura. Por lo tanto tampoco sirven.

Por otra parte, conseguir la continuidad de la curvatura en la unión  $U$  supondría imponer restricciones a los vértices de control y con ello perder flexibilidad geométrica [Cor'02]. Entonces, para mantener los tres grados de libertad de la curva se debería aumentar el número de puntos de control. Se consideró que así se complicaba excesivamente la parametrización y se desestimó este método.

### 3.5 MODIFICACIÓN DE LOS RANGOS DE LAS VARIABLES EN CURVAS DE BÉZIER SIMPLES.

Una vez desestimado el uso de curvas de interpolación y de curvas de Bézier compuestas, se retomó la opción de las curvas de Bézier simples porque éstas garantizan la suavidad de forma en toda su longitud.

Ahora, la parametrización sobre curvas de Bézier simples propuesta en la figura IV.6 ha sido mejorada en la figura IV.12 definiendo las variables del extradós  $y_5$  e  $y_6$  respecto de las del intradós para disminuir la cantidad de perfiles rotos.

En primer lugar se definió la variable de diseño  $y_6$  como la distancia vertical entre los vértices 6 y 3, siempre positiva, para establecer un ángulo entre ambas curvas en el borde de salida tal que éstas ya no se pueden cortar aquí.

La variable  $y_5$  se definió como la distancia vertical entre los vértices 5 y 2, pero en un rango que incluya valores negativos y positivos, para que los negativos posibiliten la reducción de espesor de los perfiles en zonas intermedias de su longitud, como ocurre en la figura IV.12, aunque esto puede propiciar que algunas geometrías se corten.

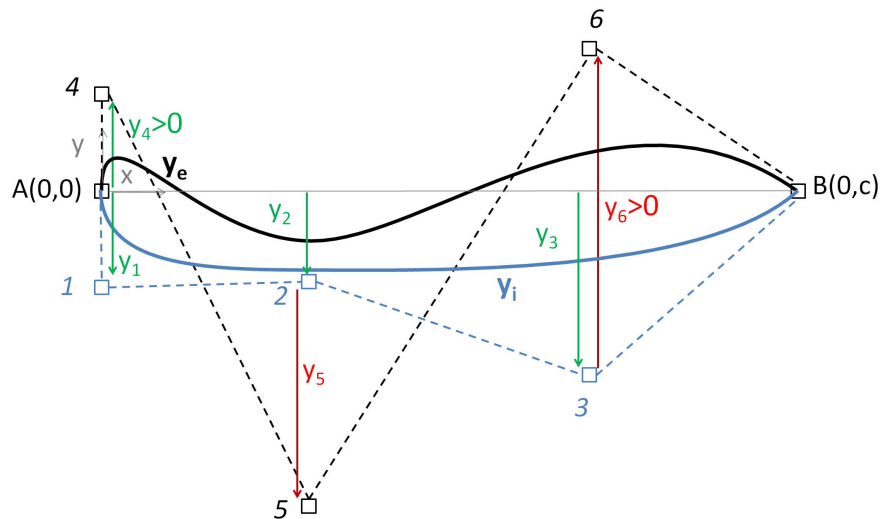


Figura IV.12: Definición modificada de las variables de diseño usando curvas de Bézier (en verde las variables definidas de manera absoluta, y en rojo las variables definidas respecto de otras) y polígonos de control de éstas.

La zona del borde de ataque se define imponiendo que el vértice 1 se sitúe debajo del borde de ataque (o sobre él), y el vértice 4 más arriba del borde de ataque (o sobre él). De esta manera se impiden concavidades tras el borde de ataque, como la de la figura IV.13, que producen el despegue de la capa límite en esa zona, y no fueron de las formas con mejor comportamiento aerodinámico.

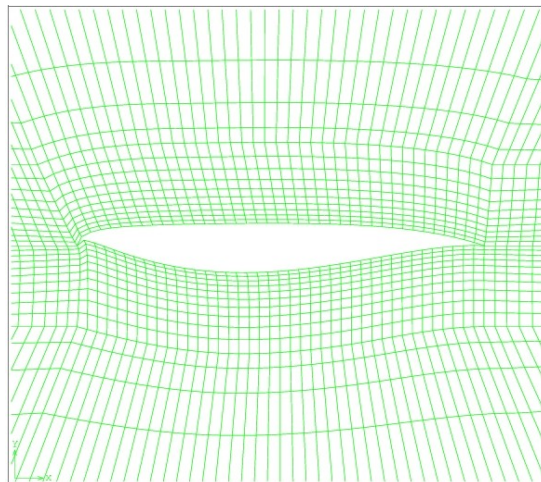


Figura IV.13: Perfil con concavidad en el intradós junto al borde de ataque. Este tipo de forma local fue eliminada del espacio de búsqueda.



La codificación adoptada finalmente se recoge en la figura IV.14 (análoga a la figura III.1). En pruebas de búsquedas empleando esta codificación para los cromosomas se comprobó que el número de perfiles factibles en la población inicial se encontraba en torno al 98%. Con ello se da por resuelto el problema de la exploración inicial pobre.

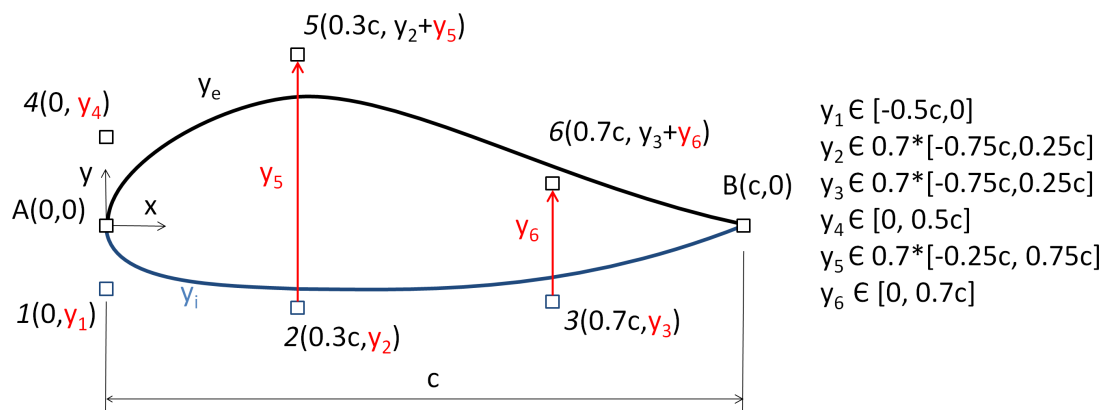


Figura IV.14: Codificación adoptada para los cromosomas usando sendas curvas de Bézier simples para el extradós y el intradós.

## 4. OPTIMIZACIÓN DE PERFILES USANDO EL MODELO $k-\epsilon$ .

### 4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.

Para probar la eficiencia del sistema de optimización desarrollado junto con la parametrización elegida, se propone a continuación una aplicación simple [Lóp'08]. Se pretende optimizar la forma de un perfil bidimensional de cuerda  $c=1$  m para maximizar el esfuerzo de sustentación frente al consumo de combustible para una velocidad de vuelo de 240 km/h. El criterio de maximización elegido fue el ratio entre los coeficientes de lift y de drag  $c_l/c_d$ . Para aumentar la complejidad del problema y su utilidad práctica, se ha incluido la siguiente restricción al espesor del perfil  $t$ ,

$$t \geq t_{min} = 0,12c \tag{IV.3}$$

donde  $t_{min}$  es el espesor mínimo permitido a los perfiles, considerando que el espesor de un perfil es la distancia máxima entre extradós e intradós a lo largo de su cuerda. Es evidente que de no introducir esta restricción en el problema, los perfiles más aptos son placas curvas de espesor nulo.

En espacios de búsqueda con restricciones la solución óptima puede encontrarse en la intersección entre la condición de restricción y el espacio de búsqueda. Uno de los posibles métodos de introducción de restricciones no lineales es a través de una penalización. En este caso se ha optado por aumentar la penalización con el grado de violación de la restricción, así se permite que también contribuya a la búsqueda la información genética de perfiles cuyo espesor es ligeramente menor que  $t_{min}$ .

Entonces se definió la función objetivo en la forma

$$\Phi = \frac{c_l}{c_d} \varphi \quad (\text{IV.4})$$

donde el factor de penalización es

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq t_{min} \\ 1 - k(t_{min} - t)/t_{min} & \text{si } t < t_{min} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

y varía linealmente con el espesor, siendo  $k$  una constante positiva. Se realizaron pruebas para diferentes valores, que mostraron que un valor  $k=2$  da un buen comportamiento para la búsqueda. El factor de penalización  $\varphi$  para este valor se muestra la figura IV.15.

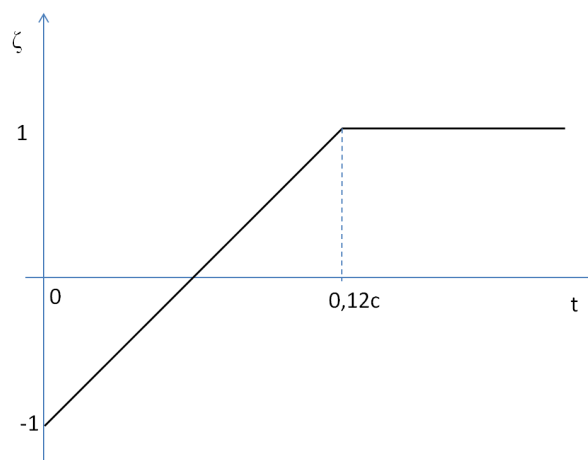


Figura IV.15: Factor de penalización debido a la restricción en el espesor.

## 4.2 SIMULACIÓN.

Los modelos de elementos finitos se han construido y resuelto con ayuda del programa Fidap. Las mallas empleadas se componen de cerca de 1800 elementos finitos (ver por ejemplo las figuras IV.11 y IV.13), y han sido generadas mediante el preprocesador de Fidap, sobre bloques de malla calculados en función de la forma del perfil tal y como se ha descrito en el capítulo III. El modelo de flujo empleado son las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes (RANS) con modelo de turbulencia de tipo  $k-\varepsilon$  (en concreto el modelo RNG junto con modelo de viscosidad turbulenta de Speziale). Para el proceso de resolución del sistema de ecuaciones del modelo se ha empleado el método segregado, y a lo largo de este proceso iterativo, para evitar cambios bruscos en los campos de las variables que pudieran conducir a la divergencia, se empleó un factor de relajación de valor 0,5, que mostró un buen comportamiento.

## 4.3 OPTIMIZACIÓN.

Para la optimización, se empleó un operador de selección por torneo, y se optó por un operador de cruzamiento de dos puntos y un modelo con reemplazamiento generacional.

Al objeto de elegir qué valores de los parámetros básicos son adecuados para un problema de optimización de este tipo, se realizaron pruebas para diferentes combinaciones de tamaño de población, tasa de cruzamiento y tasa de mutación, usando varios niveles para estos parámetros, tal y como se muestra en la tabla IV.1. No se empleó ningún tipo de elitismo. El criterio de terminación fue establecido en base al número de generaciones, en este caso 100.

#### 4.4 RESULTADOS.

Tal y como se recoge en la tabla IV.1, con el fin de encontrar conjuntos de parámetros que hagan eficaces las búsquedas, se usaron diez combinaciones diferentes de los tres parámetros básicos del GA. Se realizaron 10 ejecuciones diferentes para cada combinación para tener una muestra amplia del comportamiento del GA, con lo cual el número de búsquedas realizadas asciende a cien.

Tabla IV.1. Resultados de la función aptitud (IV.4) para cada combinación de los parámetros del GA. Para cada una fueron realizadas diez ejecuciones.

Tamaño población	200		400		800	
Tasa de mutación	0.001	0.01	0.001	0.01	0.001	0.01
Tasa de cruzamiento	0.5	0.65	0.65	0.5	0.65	0.65
Media mejor individuo	25.8	24.5	25.1	27.7	24.9	29.3
Mejor individuo encontrado	28.4	26.9	29.0	31.1	26.7	33.3

En los resultados de las pruebas se aprecia que las mejores soluciones del GA mejoran con el tamaño de población, y que en el caso de las poblaciones más grandes, de 800 individuos, la búsqueda converge para un menor número de generaciones (ver figura IV.16).

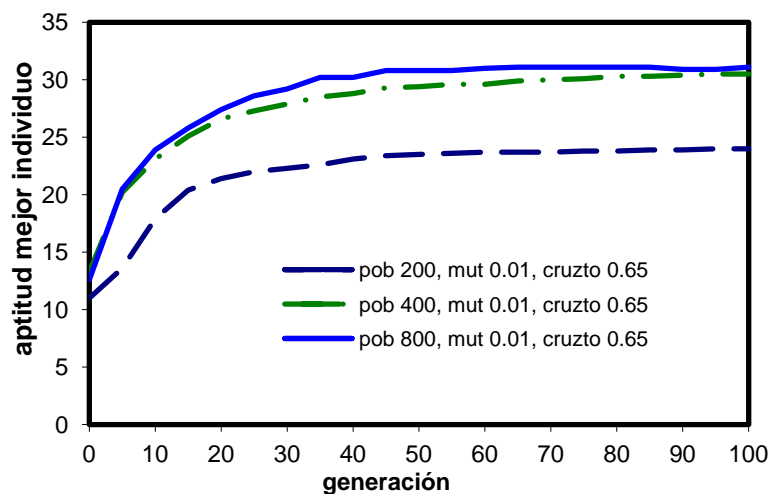


Figura IV.16: Evolución de la aptitud del mejor individuo para tres ejecuciones típicas con diferentes tamaños de población.

Por otra parte, se realizaron cuatro ejecuciones con un tamaño de población de 1000 individuos, y no se observaron mejoras sustanciales en relación a las poblaciones de 800 individuos. Una tasa de mutación del 1% dio el mejor rendimiento. Sin embargo valores

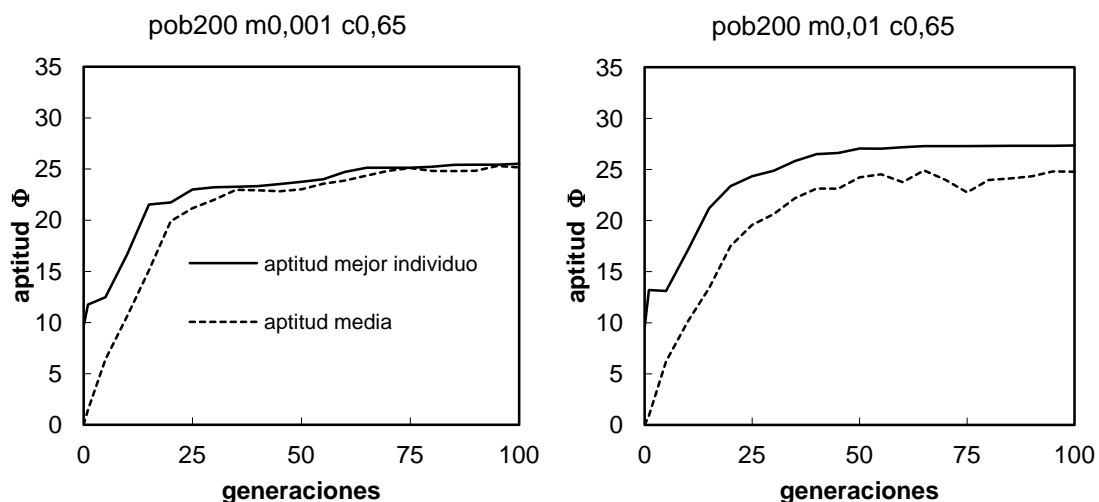
moderados de tasa de cruzamiento no parecen afectar de manera significativa a la aptitud máxima.

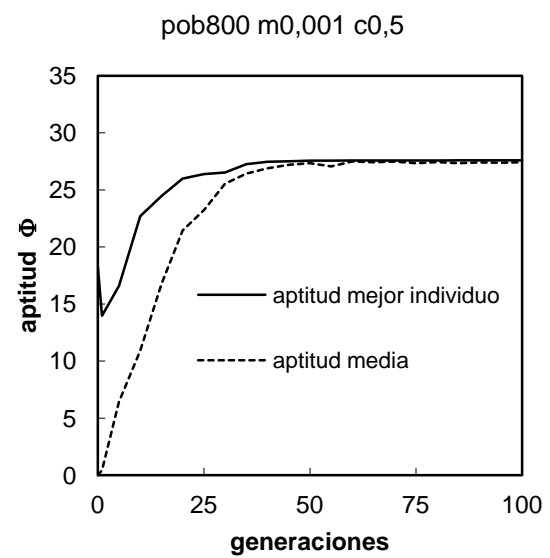
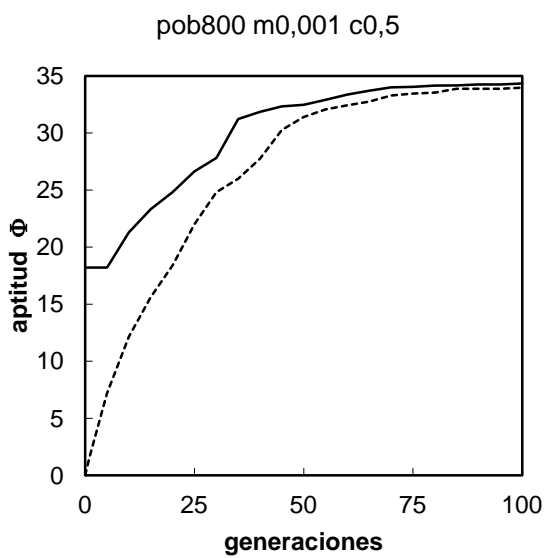
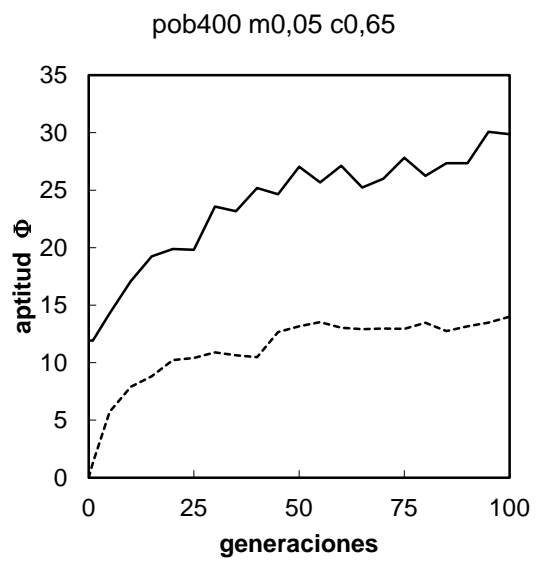
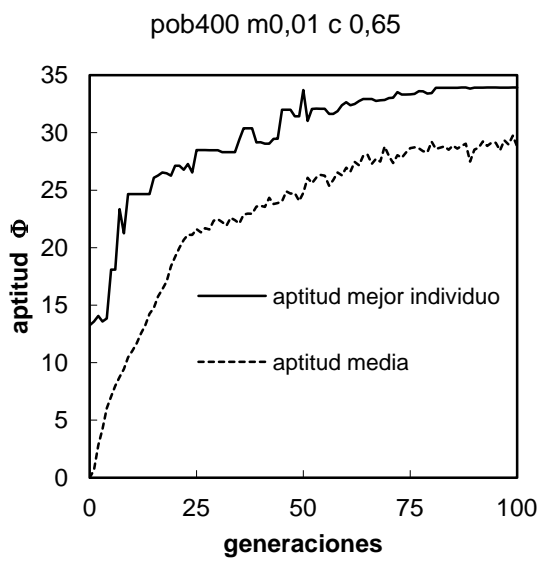
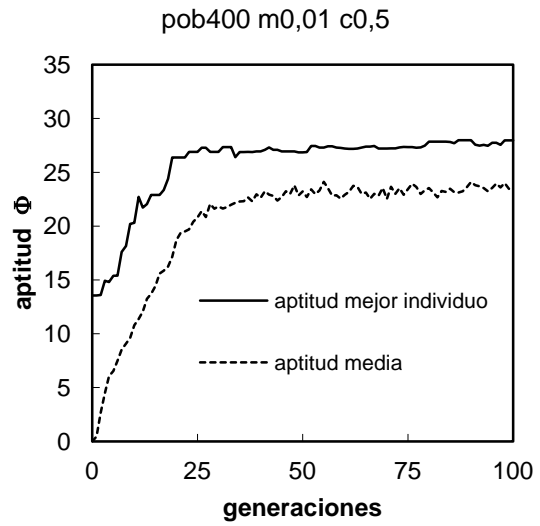
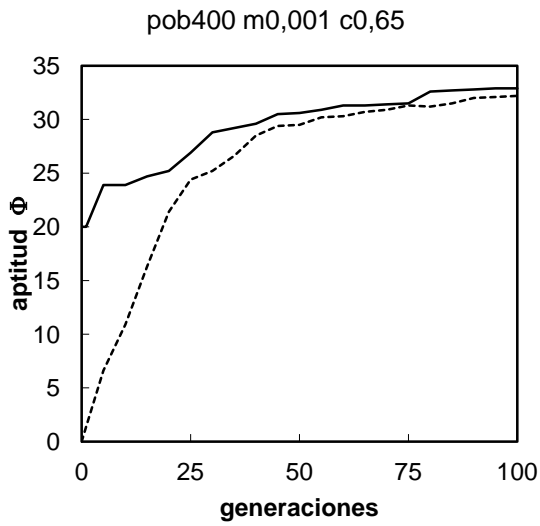
Valores más elevados de la tasa de mutación (5%) no produjeron una notable reducción de la aptitud; esto podría deberse a una falta de bloques constructivos de manera que no funcionara el GA. Para refutar esta hipótesis se realizó una serie de ejecuciones de búsqueda aleatoria sobre 80.000 individuos, es decir el mismo número de evaluaciones que en las mayores ejecuciones mediante GA. El mejor individuo encontrado en todas ellas tenía una aptitud de valor 25, y la media de los mejores individuos de cada ejecución fue 21. Esto prueba que el GA es más eficiente que la búsqueda aleatoria.

#### 4.4.1 Forma de la evolución en las búsquedas.

A continuación se van a estudiar en mayor detalle los resultados de 10 ejecuciones en las que se han usado diferentes valores de los tres parámetros básicos del GA. Una de ellas tiene una tasa de mutación muy elevada (del 5%, es decir  $m=0,05$ ) y las otras nueve se encuentran entre las de la tabla I y se considera que son representativas de ese amplio conjunto de ejecuciones de optimización.

Las diez gráficas de la figura IV.17 muestran la evolución de la aptitud del mejor individuo de la población y de la aptitud media a lo largo de cada búsqueda, pudiéndose observar en ellas el efecto que tienen los diferentes valores de los tres parámetros básicos del GA en el comportamiento evolutivo las búsquedas. Algunas de las gráficas unen valores de aptitud tomados para cada generación, pero la mayoría usa resultados tomados cada 5 generaciones. En la figura IV.18 se ha recogido la forma del mejor perfil encontrado en cada una de ellas.





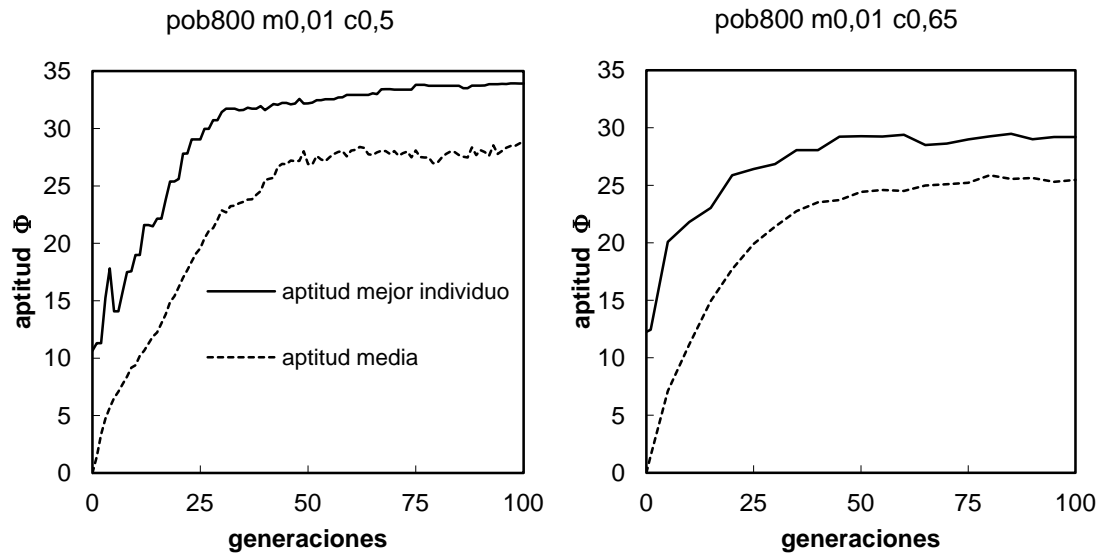


Figura IV.17: Evolución a lo largo de la búsqueda de la aptitud del mejor individuo y de la aptitud media de la población para diferentes valores de los parámetros básicos del GA: tamaño de población (pob), tasa de mutación (m) y tasa de cruzamiento (c).

De la observación del conjunto de resultados y de estas ejecuciones en particular se extrae que los tamaños de población grandes, que realizan una mayor exploración, suelen encontrar mejores soluciones. Las tasas de mutación elevadas ( $m=0,01$ ) alteran el código de muchos cromosomas, dispersan la población aumentando la exploración y por ello se reduce la aptitud media; esto dificulta la posibilidad de que la población quede atrapada en torno a máximos locales puesto que por estadística algunos de los individuos mutados van a caer en la cercanía de nuevos y posiblemente mejores extremos de la función objetivo.

El aspecto azaroso o factor suerte (introducido por el operador de mutación, y por otros) es responsable también de que para tamaños de población y tasas de mutación iguales haya unas ejecuciones que den mejores soluciones que otras. Si se comparan por ejemplo las dos gráficas correspondientes a las ejecuciones con parámetros pob400-m0,01-c0,65 y pob400-m0,01-c0,5, esta última búsqueda se quedó estancada porque los individuos mutados no fueron a parar a zonas de aptitud suficientemente elevada.

El uso en una ejecución de un valor de mutación más elevado, de 0,05 (ver la gráfica correspondiente en la figura IV.17, para una población de 400 individuos) produjo una curva oscilante para la aptitud máxima, con una tendencia de aptitud ascendente que no se ha estancado aún para 100 generaciones. En este caso son mutados demasiados cromosomas, y de este modo los individuos de mayor aptitud (en la población provisional de cada generación antes de ser aplicado el operador de mutación) no escapan a la mutación, por lo que se dificulta la explotación de las zonas con mayor aptitud. No se han hecho suficientes ejecuciones con este valor como para poder juzgar su eficacia -o la falta de ella- en relación a los otros valores; en todo caso sí queda claro que el GA con esta tasa de mutación aún funciona mejor que la búsqueda aleatoria.

En cuanto a las dos tasas de cruzamiento empleadas, que son moderadas, tal y cómo reflejaban las estadísticas de los resultados (ver tabla IV.1) no se han encontrado tendencias sustancialmente diferenciadas.

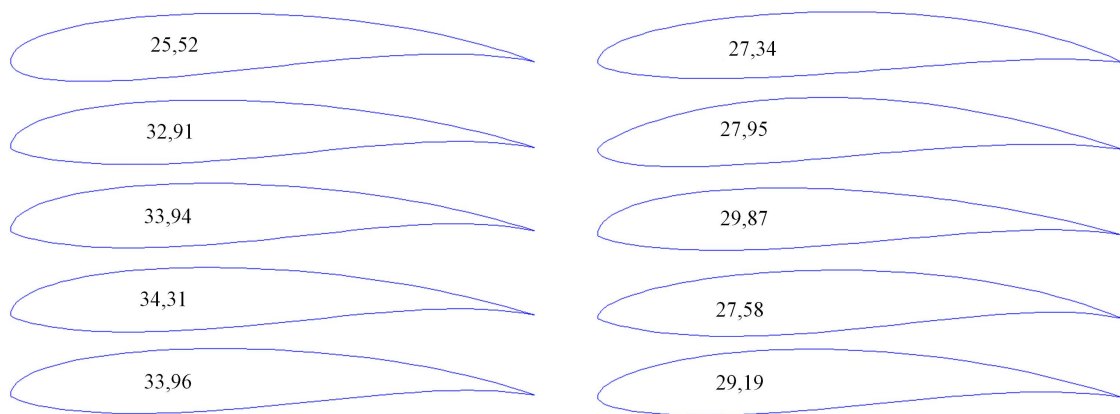


Figura IV.18: Mejores perfiles encontrados en cada una de las diez ejecuciones escogidas, colocados correlativamente a la figura IV.17 anterior.

Por otra parte, observando las formas de estos 10 mejores individuos encontrados en sus respectivas ejecuciones recogidas en la figura IV.17, estas geometrías tienen combaduras relativamente elevadas. Esto indica que en las simulaciones de los flujos, las combaduras mayores no mejoran la aptitud, sino que producen el despegue de la capa límite aumentando fuertemente el drag. Y todos estos perfiles tienen un espesor muy próximo a  $0,12c$  ya que el drag disminuye con el espesor.

Resalta el hecho de que las 10 formas tienen un aspecto muy similar entre ellas, apreciándose pequeñas diferencias a nivel local y global. En particular las tres formas de mayor aptitud son todavía más similares entre sí, aunque con matices diferenciados cerca del borde de salida. Se han buscado formas diferentes a estas tres en perfiles con elevada aptitud dentro del ingente número de ejecuciones realizadas, y entre lo más dispar que se ha encontrado estaba por ejemplo el perfil de la figura IV.19, que aunque tiene su punto más alto más adelantado, sigue siendo bastante similar a ellos.



Figura IV.19: Perfil cuya aptitud vale 33,6.

A partir de estas observaciones se puede interpretar que en este paisaje las poblaciones suelen dirigirse hacia una misma región relativamente localizada donde se encuentran los mayores valores de aptitud.

Por otra parte considerando el conjunto de ejecuciones realizadas (tabla IV.1) y estos 10 resultados particulares (figura IV.18), se puede afirmar que bastan tamaños de población de 400 u 800 individuos para dar con dicha zona, aunque por el carácter estadístico de la búsqueda mediante GA parece necesario realizar varias ejecuciones para asegurar la obtención de los individuos más aptos.

Esto sugiere que podría mejorarse la eficacia y la eficiencia de las búsquedas usando algún medio que potencie la explotación a nivel local, como por ejemplo combinar el GA con un algoritmo de búsqueda de tipo gradiente. De este modo quizás podría

reducirse el tamaño de población necesario para dar con un buen ramillete de soluciones que incluyera también a las mejores.

#### 4.4.2 Discusión de los resultados.

La realización de numerosas ejecuciones de búsqueda mediante GA ha permitido comprobar la robustez del sistema de optimización de forma desarrollado para el problema de optimización de forma de perfiles aerodinámicos. El sistema es capaz de evaluar de manera automática geometrías muy diferentes, cuyos mallados han sido correctamente construidos.

Asimismo se ha comprobado la validez del GA para este tipo de problema frente a una búsqueda aleatoria, y se han hallado valores de los parámetros del GA que producen buenos resultados para la búsqueda en el paisaje actual (consistente en la función objetivo  $c_l/c_d$  con restricción de espesor evaluada con modelo k- $\epsilon$  sobre mallas de 1800 elementos finitos). Para ello fueron realizadas más de cien ejecuciones con diferentes combinaciones de valores de los parámetros básicos del GA. De estos resultados también se ha podido inferir cierta información acerca de la orografía del paisaje de búsqueda actual.

Ahora bien, es necesario detenerse aquí para valorar la validez aerodinámica real de los mejores perfiles encontrados, y con ello juzgar la eficacia del sistema en su conjunto, lo que incluye cuestionar el realismo de los valores calculados de la función objetivo.

Los perfiles encontrados son nuevos; de ellos se conoce únicamente una simulación del flujo usando modelo k- $\epsilon$  sobre mallas con pocos grados de libertad, pero no su comportamiento aerodinámico real. Sería interesante realizar algún ensayo en túnel de viento para comprobar la validez de estos cálculos, pero esta posibilidad no está disponible. Sin embargo, se puede extraer cierta información al respecto comparando los mejores valores de  $c_l/c_d$  obtenidos en la optimización, con datos de túnel de viento de perfiles conocidos que arrojen un buen cociente  $c_l/c_d$ . Como se ha visto, los mejores perfiles encontrados en las búsquedas alcanzaron unos rendimientos  $c_l/c_d$  de 34 para ángulo de ataque nulo, resultado que se antoja excesivamente bajo si se compara por ejemplo con el valor del cociente  $c_l/c_d = 0,4/0,006 = 66,6$  del perfil naca 4412, que tiene una combadura relativamente elevada.

Esta gran diferencia en el cociente  $c_l/c_d$  parece revelar la ineficacia de la búsqueda realizada, y puede deberse a diferentes causas. Dada la gran cantidad de ejecuciones realizadas con el GA (ver tabla IV.1), probablemente hayan sido encontrados los mejores individuos del espacio de búsqueda empleado. Por lo tanto, el problema no parece ser la eficacia del método de optimización, sino el paisaje de búsqueda modelizado. Este paisaje depende de la parametrización geométrica empleada, y fundamentalmente de la precisión del análisis de los flujos.

La codificación usada para los cromosomas es muy sencilla, los genes son posiciones y distancias verticales que caracterizan la geometría del perfil y están muy directamente relacionados con la forma del flujo. Los tres primeros genes definen rasgos importantes del intradós, y los tres siguientes del extradós y de la distribución de espesor del perfil.



Podría pensarse que la parametrización geométrica empleada, que usa dos curvas de Bézier con un total de seis grados de libertad (ver figura IV.14) diera un espacio de búsqueda que fuera demasiado pequeño como para incluir formas suficientemente variadas o complejas, y no albergaría formas de elevada aptitud. Sin embargo, bien mirada esta cuestión, aunque la parametrización empleada no permite formas con cambios rápidos locales (salvo en los bordes de entrada y de salida), es capaz de generar sin dificultad geometrías similares a la del naca 4412, con combadura elevada, radio de curvatura de cierta magnitud en el borde de ataque (esto es posible gracias a que cada curva dispone de un vértice de control Bézier ubicado en la vertical del borde de entrada), y distribución de espesor que varía suavemente a lo largo de la longitud del perfil.

De hecho, los mejores perfiles encontrados tienen los tres mencionados rasgos geométricos, y presumiblemente darían flujos **reales** con sustentaciones elevadas, sin despegue de la capa límite, y con bajo arrastre, es decir, buenos valores de aptitud, probablemente comparables al del perfil naca 4412.

Por lo tanto, todo apunta a la hipótesis de que la función objetivo tiene una cantidad importante de error, debido al uso de mallas muy groseras o a un modelo de flujo inadecuado. Así, la *función objetivo aparente* que resulta de los análisis sería muy diferente de la *función objetivo real* de los flujos reales, de manera que las cimas de la segunda son mucho más elevadas que las de la primera y posiblemente se encuentran en otras localizaciones del espacio de búsqueda. Es decir, posiblemente existen perfiles realmente más aptos que los mejores encontrados pero que arrojarían una menor aptitud aparente.

#### 4.4.3 Conclusiones.

Como conclusiones globales se puede decir que se ha desarrollado un sistema de optimización de forma para problemas fluidodinámicos, donde un algoritmo de optimización (algoritmo genético) se ha combinado con un programa comercial de elementos finitos para CFD para resolver dichos problemas. Se ha desarrollado un sistema automático capaz de generar una malla estructurada de calidad para cualquier geometría del espacio de búsqueda, siendo esto necesario porque la naturaleza exploratoria del GA provoca la generación de geometrías muy diversas. En efecto, aunque el espacio de búsqueda tiene un modesto número de variables de diseño, éstas han sido definidas en rangos amplios, y por ello alberga formas muy variadas.

La validez del sistema de optimización de forma ha sido evaluada para el problema específico de un perfil aerodinámico. Se ha realizado un experimento preliminar acerca de los parámetros óptimos del algoritmo de optimización para este problema. Para determinadas combinaciones de los parámetros básicos del GA las búsquedas son eficaces para la función objetivo calculada, sin embargo el problema reside en que esta función es calculada de manera poco realista porque el análisis de los flujos parece ser poco preciso, y debido a ello presumiblemente no se pueden encontrar los mejores perfiles.

Al objeto de mejorar el rendimiento del sistema de optimización para este tipo de flujos, fue necesario averiguar hasta qué punto es preciso su análisis, para poder tomar

decisiones correctas que conduzcan a encontrar mejores perfiles. De esta forma, se realizó un estudio de los errores del modelo de flujo empleado y su origen (respectivamente en apartados 2 y 4 del capítulo II), y se constató que los errores eran grandes, debido a que usando modelos  $k-\epsilon$  la capa límite es modelizada como completamente turbulenta, cuando en realidad tiene un tramo laminar.

Con esto, se puede afirmar que los mejores perfiles encontrados en la presente optimización no son los mejores del espacio de búsqueda.

Sin embargo, tomando otro punto de vista, se puede decir que se han obtenido buenos perfiles para el caso flujos con capa límite completamente turbulenta, tal y como se ha enfocado en numerosos artículos de optimización de perfiles donde también se usaron modelos  $k-\epsilon$  [Sha'07; Jah'11; Kha'12; Moh'97; Zym'10; Pap'16]. Aunque por supuesto estos perfiles no son tan buenos para el caso real de capas límite transicionales.

Una vez conocido el origen de la discrepancia entre los análisis realizados y los experimentos en túnel de viento, se vio necesario elegir una herramienta de análisis más adecuada y precisa e incorporarla al sistema, como se describe en los siguientes apartados.

## **5. SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN MEJORADO CON MODELO DE TRANSICIÓN EN FLUENT.**

### **5.1 INTRODUCCIÓN.**

En los últimos años los desarrollos en métodos de análisis de flujo han facilitado la solución de problemas de diseño más realistas mediante simulación por ordenador [Vei'17]. En particular, el progreso en la predicción de la transición ha permitido mejorar la capacidad de la optimización de forma como herramienta de diseño [Lee'09; Rob'15].

Los avances en hardware han posibilitado un progreso considerable en la predicción de flujo usando simulaciones DNS y LES, ambos usados principalmente en el ámbito de la investigación. Así, se ha adquirido un conocimiento más detallado de la física de los flujos turbulentos, y en particular de los mecanismos de transición de flujo laminar a flujo turbulento [Kal'03; Zak'05]. Esto ha posibilitado el desarrollo de mejores modelos de turbulencia de tipo RANS, aunque existe aún cierta incapacidad para predecir correctamente la separación, que depende a su vez de una apropiada predicción de la transición.

Los avances en la predicción de la transición [Wal'04; Suz'03] se han condensado en modelos de transición empíricos como el de Menter [Men'06] o fenomenológicos, es decir basados en la física del flujo, como el de Walters y Colkijat [Wal'08]. Estos modelos están diseñados para activar la turbulencia en función únicamente de valores locales de variables del flujo definidas en cada punto del dominio, evitando así el uso de magnitudes integrales. Y es que la obtención de estas últimas implica realizar laboriosas operaciones de integración en regiones difíciles de definir, un ejemplo es el cálculo del *espesor de momento* de la capa límite. De esta manera se reduce el coste computacional

y se facilita la implementación en códigos CFD. El efecto de este tipo de modelos de transición está constreñido a la región de transición.

En esta tesis, para mejorar la precisión en los cálculos de optimización (recogidos en el apartado 4), se ha modificado el sistema de optimización desarrollado previamente (ver figura IV.3) incorporando una herramienta de análisis CFD más precisa que incluye modelos de transición. La función de evaluación analiza los flujos usando el código comercial Fluent que dispone de este tipo de modelos de turbulencia más avanzados. Paralelamente se ha modificado el método de mallado para proporcionar mallas con mayor resolución en la pared, que son necesarias para que el modelo de transición funcione correctamente. Además, se llevó a cabo un estudio para obtener combinaciones eficientes de los parámetros básicos del GA, considerando que ahora, aunque se use el mismo criterio de optimización la función objetivo ha cambiado y es más realista.

## 5.2. MODIFICACIONES EN EL SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN.

Inicialmente el modelo de flujo empleado en el análisis de los flujos fue un modelo RANS, con modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$ , que modelizaba la región de pared de la capa límite ( $y^+ < 30$ ) dentro de la primera capa de elementos en contacto con la pared mediante una función de pared para la velocidad del flujo medio y un modelo de turbulencia algebraico simple. Pero de esta manera la transición de flujo laminar a turbulento se desencadenaba siempre en la nariz del perfil, modelizando una capa límite completamente turbulenta, cuando en realidad, en los perfiles existe un primer tramo laminar. Como se ha explicado en el capítulo II, este es el origen de la mayor parte del error en el análisis de flujo en las ejecuciones de optimización de forma recogidas en el apartado 4 anterior.

Es importante predecir correctamente los puntos de transición en el extradós y en el intradós. Si se calcula una capa límite completamente turbulenta (tal y como hacen los modelos de turbulencia de tipo  $k-\varepsilon$ ) ciertas características del flujo nunca ocurren en la simulación. En particular, en flujos con bajo número de Reynolds (por debajo del millón) las burbujas de separación laminar son suprimidas y con ellas el cambio asociado en la distribución de presión a lo largo de la pared. Para flujos en un rango más amplio de números de Reynolds, resultan modificadas la distribución de tensión de fricción en la pared, y las fuerzas de arrastre y de sustentación. Además, el conjunto del comportamiento de la separación es diferente.

La aparición de modelos de transición de última generación [Wal'08; Men'06] implementados en códigos CFD para mejorar los modelos de turbulencia RANS, denominados ahora modelos de transición RANS, va a permitir mejorar la precisión de los análisis usados en las optimizaciones de forma, para obtener mejores diseños de perfiles. Ambos modelos mencionados están incluidos en el código comercial Fluent basado en volúmenes finitos, que fue incorporado al sistema de optimización.

Por otra parte, la adopción de un modelo de transición exige construir mallas con mayor resolución en la capa límite, por lo que el método de mallado fiable para geometrías cambiantes usado en la optimización anterior (apartado III.4) ha sido adaptado y mejorado para las nuevas necesidades (ver apartado III.5). Así, se han conservado los

aspectos del método de mallado que le confieren robustez, y se han tomado dos medidas para mejorar la malla en la capa límite: aumentar fuertemente su densidad y mejorar la forma de las celdas. Para limitar el consiguiente sobrecoste de malla se incluyeron cambios en la estructura de la malla que permiten aumentar el tamaño de celda en la zona exterior a la capa límite.

### 5.2.1 Nuevo sistema de optimización.

Para evaluar un perfil debe de ser realizado un costoso análisis CFD, lo que implica implementar una serie de tareas usando diferentes técnicas, para realizar automáticamente el preprocesado, procesado y postprocesado. Esta plataforma [Lop'13] se muestra en el diagrama de flujo de la figura IV.20. Las tareas más costosas y complejas son el mallado y la resolución del modelo de volúmenes finitos del flujo, y son efectuadas respectivamente por dos códigos comerciales, el preprocesador Gambit y el procesador de CFD Fluent.

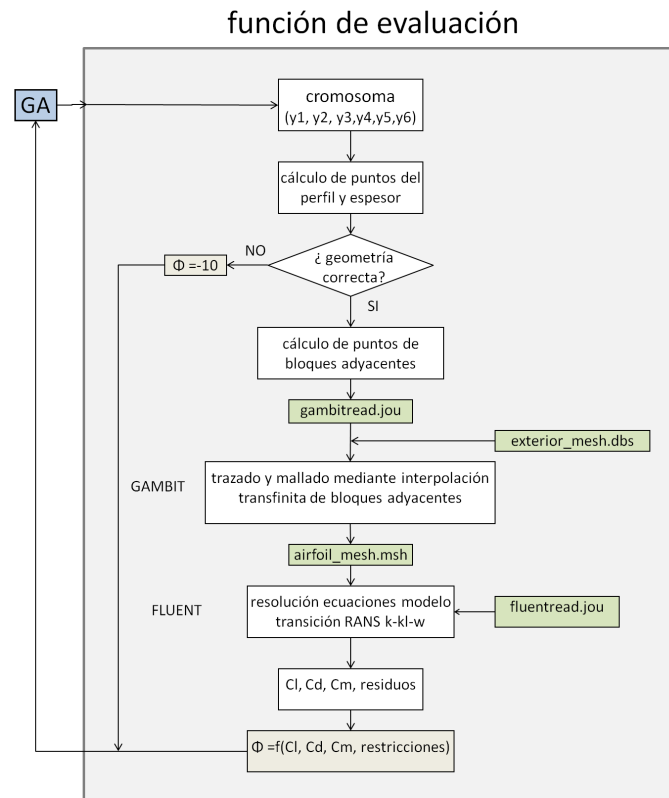


Figura IV.20: Procedimiento de evaluación usado para cada perfil (detalle de la figura IV.1).

Tal y como se muestra en la figura IV.1, una vez que el usuario ha introducido los parámetros relevantes del GA, el programa optimizador GA (OMEGA) marca el paso del proceso de optimización, y entre otras operaciones ordena la evaluación de la aptitud de cada individuo (perfil). Ésta comprende una serie de llamadas concatenadas a diferentes herramientas (incluyendo códigos comerciales) que realizan una larga secuencia de tareas, que se detallan a continuación.

Del cromosoma se toman las variables de diseño, y conociendo así los 5 vértices del polígono de control de la curva de Bézier del intradós y los del extradós, se introducen éstos en las ecuaciones (III.1) para obtener una hilera de 51 puntos del intradós y otra del extradós, tomando valores del parámetro  $t$  a intervalos de 0,02 desde 0 a 1. Como los puntos del borde de ataque y del borde de salida pertenecen a ambas paredes, se tiene un conjunto de 100 puntos que define ambas paredes del perfil. A continuación, se comprueba si estas paredes intersectan, esto ocurre si para alguno de los valores de  $t$  usados previamente (salvo 0 y 1) la ordenada del punto del extradós es igual o inferior a la del intradós. Entonces la geometría del perfil es incorrecta y se le asigna directamente al individuo un valor negativo de aptitud, con lo que se omite su análisis CFD y se le expulsa de la evolución.

Si la geometría es correcta, a partir de ambas curvas de Bézier del perfil, se obtienen los puntos que definen las fronteras de los bloques de malla adyacentes al perfil (en la forma especificada en el apartado III.5, y mostrados figura III.45 derecha). Ambos conjuntos de puntos (los del perfil, y los de las fronteras cambiantes de los bloques adyacentes) son escritos en el fichero de comandos de Gambit (“gambitread.jou”), que incluye también los comandos para construir los bloques de malla ubicados junto al perfil y rellenarlos con mallas estructuradas.

A continuación se abre un proceso Gambit sobre el modelo de volúmenes finitos inicial que contiene los bloques de malla alejados del perfil (fichero base de datos “exterior\_mesh.dbs”). Entonces se ejecutan los comandos contenidos en el fichero de texto “gambitread.jou”, con los que se crean ambos conjuntos de puntos, y las correspondientes fronteras y bloques de malla adyacentes al perfil (mediante interpolación transfinita), y se exporta la malla completa al fichero “airfoil\_mesh.msh”.

Después se abre un proceso del código Fluent, que ejecuta el guión de comandos “fluentread.jou” que contiene las órdenes para el procesado y postprocesado del análisis. Así, importa el fichero de malla, especifica las condiciones iniciales y de contorno, las ecuaciones de gobierno, un esquema de discretización de segundo orden, los criterios de terminación de las ecuaciones de las variables, y resuelve el sistema de ecuaciones del modelo discreto resultante. Y finalmente obtiene de la solución del flujo los esfuerzos que éste ejerce sobre el perfil. Así se tienen las características del perfil  $c_l$  y  $c_d$  y en función de estos datos y de las restricciones se calcula el valor de la función aptitud  $\Phi$  del perfil (por ejemplo usando las expresiones (IV.8)- (IV.10)).

## 6. EJEMPLOS DE APLICACIÓN USANDO MODELO DE TRANSICIÓN.

En este estudio se aborda mediante dos ejemplos de aplicación la optimización mediante GAs de costosas funciones objetivo no definidas analíticamente. Cada individuo es un perfil aerodinámico y el valor de su aptitud es un punto del paisaje de búsqueda. Las funciones de aptitud usadas en optimización de forma aerodinámica pretenden representar ciertos aspectos del rendimiento aerodinámico del perfil que necesitan ser mejoradas. Así se ha abordado el problema directo usando dos funciones objetivo, que fueron definidas como función de las cargas aerodinámicas  $c_l$  y  $c_d$  ejercidas por el flujo

sobre el perfil, e incluyen en ambos casos restricciones sobre el espesor del perfil para garantizar un umbral de resistencia estructural, y en el segundo caso además una restricción sobre el valor del lift.

## 6.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.

Se considera un problema de optimización de flujo subsónico con alto número de Reynolds (6 millones). Se han usado dos funciones de aptitud diferentes para optimizar sendas características aerodinámicas para un perfil aerodinámico bidimensional que está sujeto a restricciones en su geometría para garantizar un umbral de resistencia estructural. La primera función es maximizar el cociente  $c_l/c_d$ , la segunda consiste en minimizar  $c_d$  para un valor fijado de  $c_l$ .

En este estudio se ha empleado el modelo de transición  $k-k_1-\omega$  de Walters y Colkjat [Wal'08], porque ha demostrado su validez frente a otros modelos de turbulencia RANS actuales para predecir el comportamiento transicional del flujo en una amplia variedad de tipos de flujo, incluyendo flujos alrededor de perfiles aerodinámicos. Este modelo está basado en un modelo de turbulencia simple de dos ecuaciones  $k-\omega$  [Wil'98], al que se añade una tercera ecuación para tener en cuenta los efectos físicos de la transición natural [Sch'00] y bypass [Zak'05]. La transición natural ocurre para valores de la intensidad de la turbulencia del flujo libre por debajo del 1%, mientras que la transición bypass tiene lugar por encima de este valor.

## 6.2 PARAMETRIZACIÓN.

Para asegurar un proceso de optimización fructífero, el espacio de búsqueda debe incorporar tanta flexibilidad geométrica como sea posible con tan pocas variables de diseño como sean posibles. En este sentido las curvas de Bézier proporcionan formas suaves y flexibles si los intervalos de definición de las variables de diseño son apropiadamente definidos. Así, se ha empleado la misma parametrización de la geometría empleada en la optimización anterior (apartado 4), recogida en la figura IV.14.

## 6.3 ECUACIONES DE GOBIERNO.

El modelo de flujo usado en este estudio se basa en el sistema de ecuaciones diferenciales RANS para flujo incompresible, es decir las ecuaciones de conservación de la masa (I.58) y del momento (I.59), junto con el modelo de turbulencia  $k-k_1-\omega$  [Wal'08]. Éste introduce la componente anisotrópica del tensor de tensiones de Reynolds a través de la hipótesis de modelización de Boussinesq:

$$-\overline{u_i u_j} + \frac{1}{3} \overline{u_k u_k} \delta_{ij} = 2\nu_t D_{ij} \quad (\text{IV.6})$$

donde  $\nu_t$  es la viscosidad turbulenta. Los efectos de la transición a la turbulencia y de la turbulencia son aproximados por tres ecuaciones de transporte adicionales que influyen en el flujo medio a través de la viscosidad turbulenta. Esta es una compleja función que incluye los efectos de la transición natural y bypass, y que ha sido cuidadosamente calibrada.

## 6.4 SIMULACIÓN.

Todos los análisis se han realizado usando el procesador Fluent basado en volúmenes finitos. Se ha empleado un esquema de discretización tipo “upwind” de segundo orden. Las condiciones de contorno aplicadas en el dominio computacional se pueden ver en la figura III.53 derecha. En la semicircunferencia de entrada fueron impuestos un perfil de velocidad constante y una intensidad de turbulencia de 0,93% y en la semicircunferencia de salida una condición de gradiente nulo en la dirección normal (condición tipo *outflow*). La condición de no deslizamiento fue impuesta en la pared del perfil. Todas las mallas tienen unas 12000 celdas y fueron construidas con un valor de  $y^+$  de la primera capa de celdas en la pared alrededor de la unidad. El mismo tipo de malla fue usado sobre el perfil naca 0012 (ver apartado II.5.1) produciendo un error del 10% en la fuerza de arrastre.

## 6.5 RESULTADOS.

Se realizaron dos pruebas preliminares para identificar combinaciones eficientes de parámetros del GA básico, para sendos problemas sencillos de optimización de forma monoobjetivo.

El propósito es optimizar la forma de perfiles aerodinámicos bidimensionales para flujo incompresible con un número de Reynolds basado en la cuerda de  $6 \times 10^6$ , para dos criterios de optimización diferentes, por separado. El primero es maximizar el ratio del esfuerzo de sustentación frente al de arrastre, y el segundo consiste en minimizar  $c_d$  para un valor dado de  $c_l$ . En ambos casos el ángulo de ataque es nulo y el espesor del perfil  $t$  está constreñido a ser mayor que  $0,12c$ , donde  $c$  es la longitud de cuerda, y siendo  $t$  la distancia vertical máxima entre el extradós y el intradós a lo largo de la cuerda tomada en dirección normal a ésta.

Estas funciones objetivo se definen en la forma

$$\Phi = f(c_l, c_d) \cdot p_t \cdot p_a \cdot p_s \quad (\text{IV.7})$$

donde  $f$  es la función aerodinámica que necesita ser optimizada, y las variables  $p$  son funciones de penalización que incluyen restricciones no lineales de diferentes tipos. Sus valores se encuentran en el rango  $[0,1]$ , valen 1 cuando la restricción es satisfecha, y según el grado en que la restricción sea excedida se reduce su valor, hasta un mínimo de 0. La función de penalización  $p_t$  introduce la restricción en el espesor del perfil para garantizar una cierta resistencia estructural,  $p_a$  las condiciones necesarias (en caso de haberlas) que deben cumplir las cargas aerodinámicas, y  $p_s$  penaliza los perfiles cuya simulación del flujo es sospechosa de haber sido resuelta incorrectamente.

Estas funciones de penalización modifican la función objetivo, y una definición inadecuada puede dificultar e incluso impedir que el GA encuentre los mejores individuos. En los siguientes apartados se muestra como fueron cuidadosamente diseñadas considerando diferentes aspectos.

### 6.5.1 Optimización de $c_l/c_d$ con restricción en el espesor del perfil.

El primer objetivo fue encontrar formas de perfiles con máximo ratio de sustentación entre arrastre y con espesores por encima de  $0,12c$ . Para ello la función objetivo fue definida en la forma:

$$\Phi = (c_l/c_d) \cdot p_t \cdot p_s \quad (\text{IV.8})$$

donde los factores de penalización  $p_t$  y  $p_s$  fueron definidos cuidadosamente para introducir en la función de evaluación respectivamente la restricción de espesor mínimo del perfil, y un filtro que elimina perfiles calculados incorrectamente.

#### Definición del factor de restricción de espesor $p_t$ .

En espacios de búsqueda con restricciones, la solución óptima puede encontrarse en las fronteras donde éstas son satisfechas. Un ejemplo de problema de optimización donde esto ocurre es en la maximización del ratio  $c_l/c_d$  en perfiles. Aquí los mayores valores de este ratio se corresponden con los espesores más pequeños. Esto se puede ver en experimentos en túnel de viento como los recogidos en la tabla IV.2, para los perfiles naca2424, naca2412 y naca2408, cuyo espesor decrece desde el primero al tercero y tienen la misma línea media y la misma forma de la distribución de espesor.

Tabla IV.2. Valores de los esfuerzos de arrastre y sustentación y funciones relacionadas, para tres perfiles de espesor decreciente y misma línea media, para ángulo de ataque nulo y un número de Reynolds del flujo de  $6 \cdot 10^6$  [Abb'59].

	$t/c$	$c_l$	$c_d$	$1/c_d$	$c_l/c_d$
naca2424	0.24	0.18	0.008	125	22.5
naca2412	0.12	0.22	0.0065	153.84	33.84
naca2408	0.08	0.22	0.0055	181.82	40

El aumento del ratio  $c_l/c_d$  según se reduce el espesor  $t$  del perfil, es muestra de que si se impone una restricción de espesor mínimo, el máximo se producirá para dicho espesor mínimo (como se ha comprobado en los resultados de la optimización del apartado 4).

Lo anterior se ha tenido en cuenta para definir  $p_t(t)$  en la forma

$$p_t(t) = \begin{cases} 0.2 \exp[0.01045t^2] & \text{si } 0 < t < 0.12c \\ 1 & \text{si } 0.12c < t \leq 0.3c \\ 0 & \text{si } t > 0.3 \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

cuya gráfica se muestra en la figura IV.21.



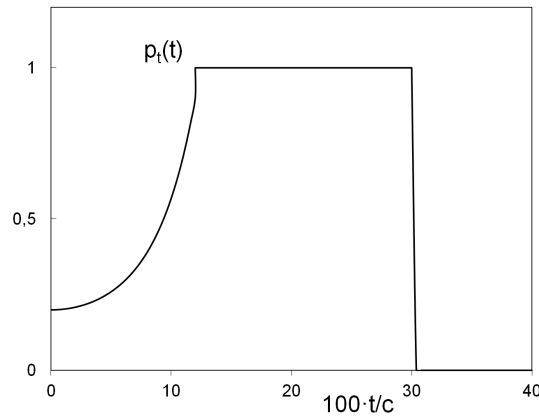


Figura IV.21: Factores de penalización para las restricciones al espesor.

El propósito de este término es dirigir la evolución hacia perfiles con valores de espesor superiores a  $t=0.12c$ , pero conservando también información genética de perfiles ligeramente más delgados.

La función  $p_t$  impone para los perfiles más delgados ( $t < 0.08c$ ) que incumplen de largo el requisito de resistencia estructural ( $t_{\min}=0.12c$ ), una penalización severa que elimina la ventaja en el valor de  $c_l/c_d$  que pueden tener debido a su reducido espesor. A continuación  $p_t$  crece rápidamente en el rango de espesores ( $0.08c < t < 0.12c$ ), para permitir que perfiles algo más delgados de lo permitido con buen ratio  $c_l/c_d$  puedan también aportar información genética útil a la búsqueda. Además, para el valor de espesor  $0.12c$  se produce un salto del 10% en esta función, para subrayar esta frontera. Los espesores por encima de  $0.3c$  fueron considerados excesivos, y se les asigna una aptitud nula sin ser calculados sus flujos.

### Definición del factor de penalización de simulaciones incorrectas $p_s$ .

Entre decenas de miles de simulaciones realizadas con el modelo de transición  $k-k_l-\omega$  para perfiles diferentes, excepcionalmente se encontraron algunas que arrojaban valores de  $f$  (ver expresión (IV.7)) absurdamente altos, de varios o muchos cientos, debido a valores que no tienen sentido físico para las cargas aerodinámicas, como coeficientes de arrastre menores que el de una placa plana con ángulo de ataque nulo.

Estas simulaciones no válidas se deben a problemas en la resolución del sistema de ecuaciones mediante el procesador del código comercial Fluent, que fue usado a modo de caja negra. En ellas se ha observado que la evolución de los valores de los residuos de las ecuaciones experimenta los dos siguientes tipos de comportamientos.

En el primer caso los residuos en un momento dado del proceso sufren un incremento brusco importante, y posteriormente, aunque se reduzcan lo suficiente como para llegar a satisfacer los criterios de convergencia de la simulación, dan un flujo sin sentido físico. Un ejemplo de este tipo de simulación incorrecta es el de la figura IV.22, que dio un valor de  $c_l/c_d=186$ , carente de sentido físico como muestra el campo obtenido de energía cinética turbulenta.

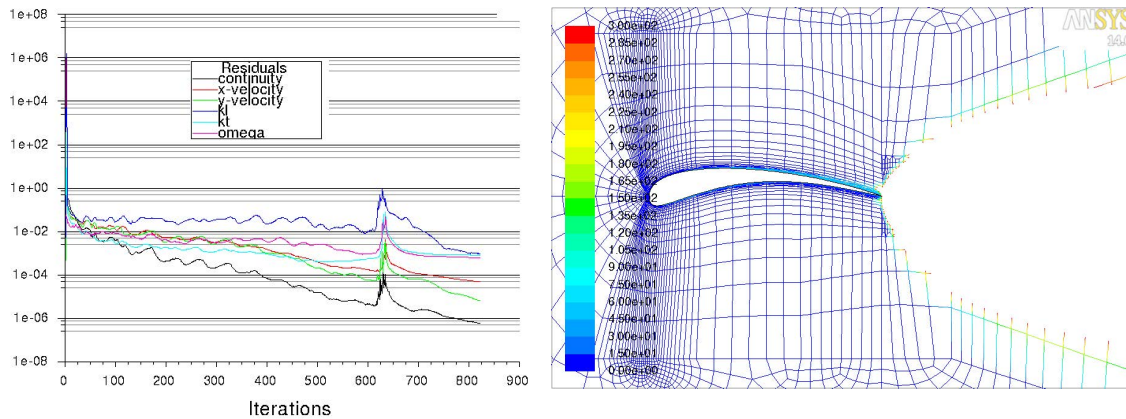


Figura IV.22: Procesado de un perfil que no ha convergido correctamente. (izquierda) Evolución de los residuos, y (derecha) campo de  $k_t$  en la última iteración trazado sobre la malla, en la zona blanca se superan los  $300 \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

En el segundo caso (figura IV.23), el flujo no converge hacia un estado único estacionario, sino hacia una sucesión periódica de estados en que los residuos oscilan indefinidamente dentro de un rango de pequeña amplitud hasta que se alcanza el número máximo de iteraciones. Esto es, el resultado no está definido. Se comprobó que en este tipo de simulaciones el flujo presenta una gran zona de separación de la capa límite, y su comportamiento a lo largo de las iteraciones se asemeja a flujos inestables con desprendimiento de vórtice periódico (ver por ejemplo la referencia [Zhu'07]).

Así, los valores de los coeficientes aerodinámicos también oscilan periódicamente a lo largo de las iteraciones. Este caso es especialmente problemático si el valor mínimo del arrastre es demasiado pequeño o incluso negativo, porque el resultado en la última iteración no tendría sentido físico, y lo que es peor, daría un valor de aptitud extraordinariamente grande.

La figura IV.23 muestra un caso de este tipo que arrojó en la última iteración un cociente  $c_l/c_d = 1,37/0,019 = 72,10$ , aparentemente excesivo. Si el límite de iteraciones (en este caso 1800) hubiera coincidido con un valor del arrastre más pequeño, como el de la iteración 1722, el resultado habría sido desorbitado.

Ambos tipos de simulaciones problemáticas aparecían también para valores elevados del factor de relajación, de 0,5 en el caso de los ejemplos de las figuras IV.22 y IV.23.

Considerando que no se tiene acceso al procesador (Fluent), y que la modificación de un código CFD queda fuera del alcance de esta tesis, ambos tipos de simulaciones incorrectas, aunque poco frecuentes, son inevitables. Entre ellas son especialmente dañinas las simulaciones que dan aptitudes sobrevaloradas muy altas, porque desvían la búsqueda hacia regiones realmente poco aptas del espacio de diseño, arruinando sus resultados. Así, es crucial eliminar estos individuos (“superindividuos falsos”) de la búsqueda evolutiva, y para ello es necesario detectarlos y penalizarlos.

Para conseguir esto se buscaron los rasgos que caracterizan a los procesos de resolución incorrectos encontrados. Los individuos que presenten dichos rasgos en su procesado serán penalizados, porque probablemente sean incorrectos y en consecuencia potenciales superindividuos falsos. Las operaciones de penalización se agrupan en la función de penalización  $p_s$ .

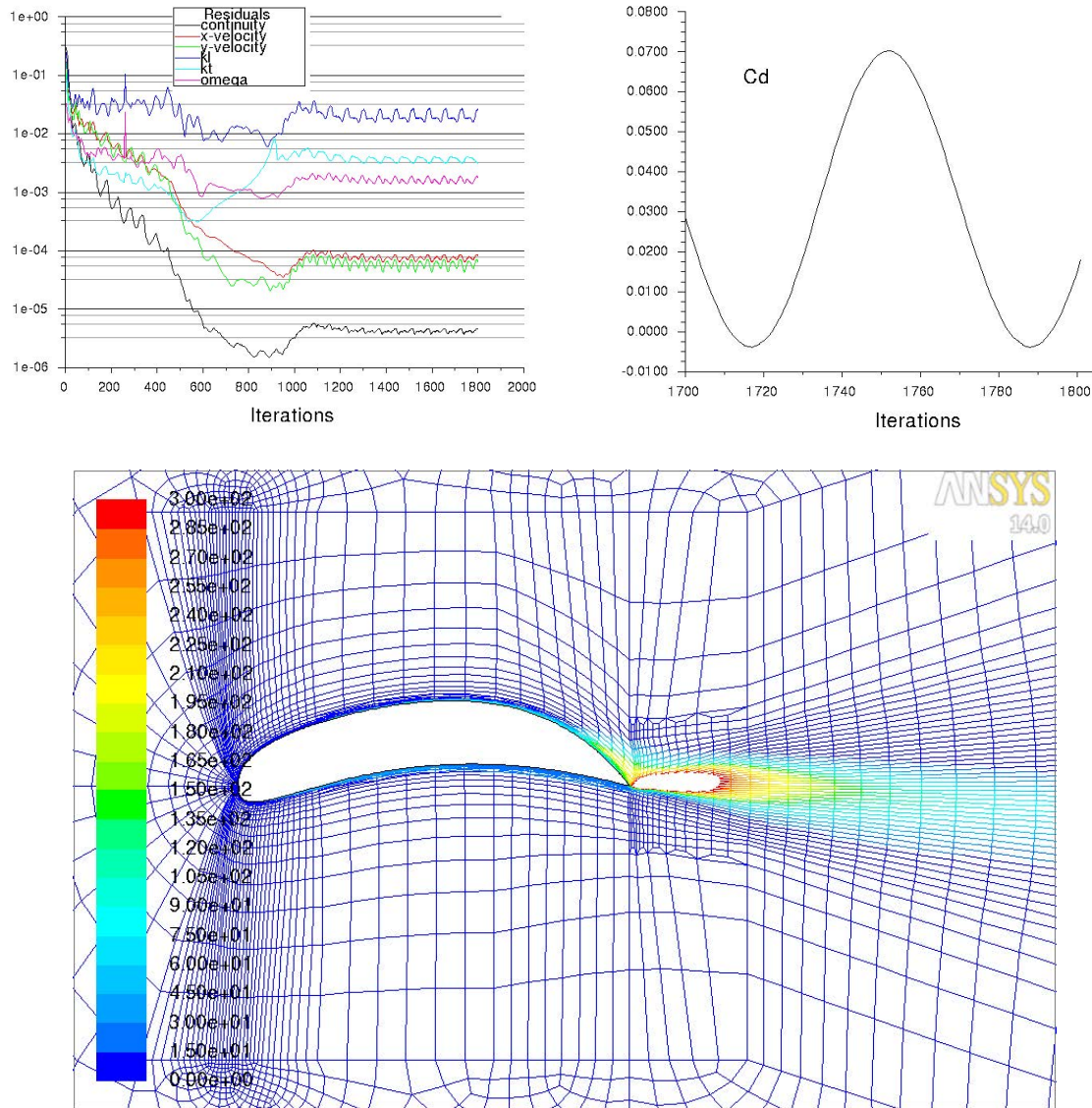


Figura IV.23: Simulación incorrecta con resultado oscilante. (izquierda), y (derecha) variación periódica de los residuos y oscilación del coeficiente de arrastre en el estadio final del procesado. (abajo) Flujo obtenido en la última iteración, que presenta despegue de la capa límite y una región en la estela con valores de  $k_t$  muy elevados y probablemente erróneos.

A diferencia de las simulaciones incorrectas como las de los ejemplos característicos de las figuras IV.22 y IV.23, las simulaciones correctas suelen seguir un patrón de convergencia de los residuos de las ecuaciones como el mostrado en la figura IV.24 izquierda. En ellas el residuo de la ecuación de  $k_t$  muestra un comportamiento distinto al de los demás residuos según se acerca el final del proceso de resolución: en lugar de descender de manera no monotónica, experimenta un crecimiento monotónico lento que se va acelerando, hasta que finalmente desciende bruscamente hasta un valor menor de  $5 \cdot 10^{-4}$ . Se aprovechará este rasgo para distinguirlas de las simulaciones no válidas. En adelante se denominará  $r_k$  al valor del residuo en la ecuación de la energía cinética turbulenta obtenido en la última iteración de la simulación.

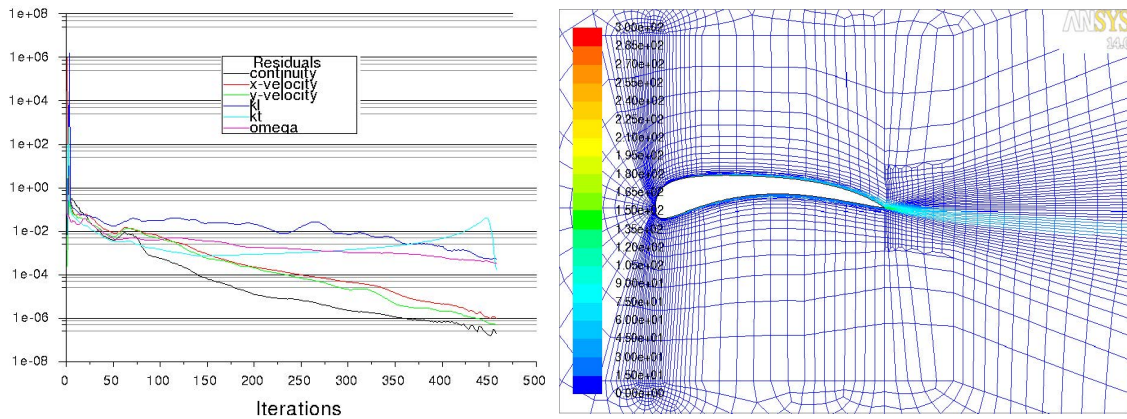


Figura IV.24: Simulación correcta del flujo alrededor de un perfil con modelo de turbulencia  $k-k_1-\omega$  para el que se obtuvo  $c_l/c_d = 77$ . (izquierda) Evolución de los residuos, obsérvese el característico comportamiento de la ecuación de  $k_1$ . (derecha) Campo de  $k_1$  tras la última iteración.

En las resoluciones incorrectas (de ambos tipos mencionados anteriormente), la curva de evolución del residuo de la ecuación de  $k_1$  en su estadio final es diferente a la de la figura IV.24, y siempre se cumple que  $r_k > 5 \cdot 10^{-4}$ . Pero no todos los procesados (es decir, procesos de resolución de las ecuaciones numéricas mediante Fluent) que cumplen esta última condición son incorrectos, sino que algunos de ellos, aunque son muy poco frecuentes, dan campos de las variables y esfuerzos aparentemente correctos. Considerando lo anterior, la aptitud de los individuos que arrojan  $r_k > 5 \cdot 10^{-4}$  fue reducida al 40% (ver expresión (IV.10)).

En caso de que los esfuerzos oscilen en las últimas iteraciones, del lado de la seguridad se toma como valor del arrastre ( $c_d$ ) el máximo de la última oscilación ( $c_{dmax}$ ), y no el de la última iteración. Si este máximo es inferior a 0,003 (valor menor que el arrastre de una placa plana con ángulo de ataque nulo) se asigna un valor nulo a la aptitud del individuo, considerando que los resultados carecen de sentido físico, y si el mínimo ( $c_{dmin}$ ) es menor de 0,002 se reduce su aptitud a la mitad, por falta de fiabilidad del resultado.

Teniendo en cuenta que los procesados oscilantes (de los individuos) más peligrosos presentaron grandes oscilaciones con valores de  $c_{d,min}/c_{d,max} < 0,7$ , la aptitud de los individuos que cumplen esta condición se multiplica por 0,5.

Así, la función de penalización por procesado  $p_s$  se implementó en la forma:

si  $r_k \leq 0.0005$  entonces  $p_s=1$ ;

si  $r_k > 0.0005$  entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} p_s=0.4; \\ \text{si } c_{dmin}/c_{dmax} \leq 0.7 \quad p_s=0.5 \cdot p_s; \\ \text{si } c_{dmax} \leq 0.003 \quad p_s=0; \\ \text{si } c_{dmin} \leq 0.002 \quad p_s=0.5 \cdot p_s; \end{array} \right.$$

(IV.10)

A lo largo de numerosas ejecuciones de optimización usando esta función de penalización no apareció ningún superindividuo falso, por lo tanto el factor  $p_s$  cumple su objetivo principal.

Entre los individuos penalizados por procesado sospechoso, es decir con valores de  $r_k > 5 \cdot 10^{-4}$ , en torno al 99% eran aparentemente incorrectos, ya que la inmensa mayoría presentaban regiones con separación de la capa límite y algunos producían estelas con un exceso de turbulencia que no tiene sentido físico.

El 1% restante fueron individuos con procesos no oscilantes y campos plausibles de  $k_t$ , por lo tanto probablemente penalizados de manera “injusta” con el valor  $p_s=0,4$ . Así se ha dificultado la transmisión de la información genética de estos últimos individuos a la siguiente generación, pero esto supone solamente un mal menor para la búsqueda, comparado con el perjuicio que acarrea la desprotección frente a los superindividuos fraudulentos.

### Ejecuciones de optimización con diferentes parámetros del GA.

El GA empleó selección por torneo y un modelo de reemplazamiento generacional. Se realizaron ejecuciones usando diferentes combinaciones de tamaños de población, tasa de cruzamiento y tasa de mutación como se muestra en la tabla IV.3. Se usó cruzamiento de dos puntos, y operador simple de mutación que cambia bits en posiciones aleatorias a lo largo del cromosoma. En cada generación, después de haber aplicado los operadores de cruzamiento y mutación, los individuos que aparecen repetidos son mutados hasta que ya no queden individuos idénticos. Esta operación refuerza la exploración del espacio de búsqueda.

Al menos tres ejecuciones fueron realizadas para cada combinación de los tres parámetros básicos. El criterio de terminación establecido se basó en fijar un número máximo de generaciones, 100 en este caso.

Tabla IV.3: Resultados para cada combinación de parámetros del GA.

Tamaño de población	40				100	
Tasa de mutación	0.0025		0.025		0.01	0.025
Tasa de cruzamiento	0.5	0.65	0.5	0.65	0.65	0.65
Mejor individuo encontrado	(a) 75.53	(a) 82.30	(a) 82.64	(a) 68.84**	(e) 89.04	(e) 87.72
	(b) 81.72	(b) 77.32	(b) 88.02	(b) 86.60		
( ) población inicial	(c) 82.07	(c) 76.27	(c) 87.95	(c) 88.11		
* elitismo				(d) 87.43		
** evolución anómala	(a)* 88.98	(a)* 81.91	(a)* 89.51	(a)* 90.77		
Media del mejor individuo	79.64	79.28 (a,c)	86.20	82.74		87.38 (b,c,d)

Se aprecia que las mejores soluciones en poblaciones de 40 cromosomas fueron obtenidas usando una tasa de mutación de 2,5%, y que usando poblaciones de 100 individuos muy probablemente se pueden mejorar los valores de la mejor aptitud.

Los dos niveles moderados empleados de tasa de cruzamiento no parecieron afectar significativamente al máximo valor de aptitud.



En cuanto al efecto de la tasa de mutación, la figura IV.25 muestra dos ejecuciones que parten de la misma población inicial y son representativas de los patrones de evolución típicos con cada nivel de tasa de mutación. Cuando se usan tasas de mutación bajas ( $m=0,25\%$ ) el valor medio de aptitud en cada generación se mantiene próximo al de la aptitud del mejor individuo. Hay poca diferencia entre los individuos de la población así que el riesgo de quedar atrapado en máximos locales es relativamente elevado. Esto es consistente con los resultados recopilados en la tabla IV.3.

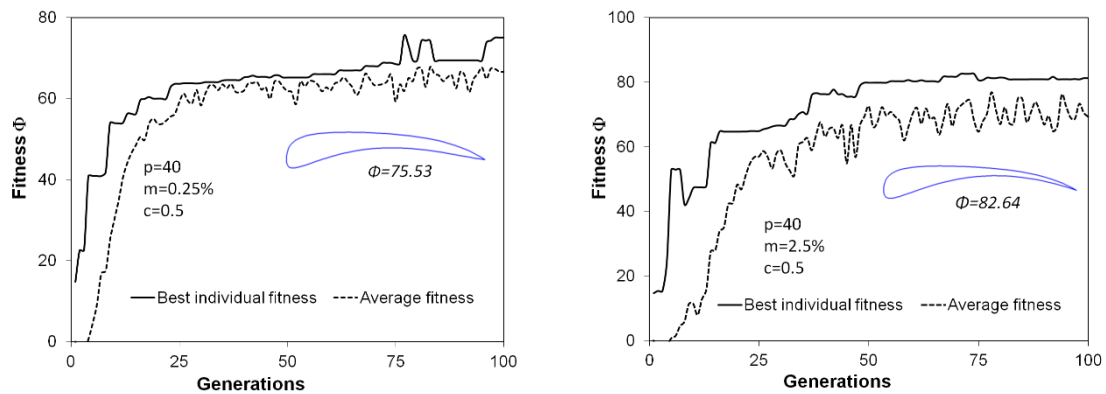


Figura IV.25: Patrones de evolución típicos para tasas de mutación bajas y altas en la misma población inicial (a) de 40 individuos y tasa de cruzamiento  $c=0,5$ .

Cuando se emplea un valor más elevado de mutación  $m=2,5\%$ , también se produce un incremento (no monótono) en las aptitudes máxima y media. Esta característica indica que aunque esta tasa de mutación es relativamente elevada, y muchos genes han sido alterados, el GA no se comporta aún como una búsqueda aleatoria y que sigue habiendo bloques constructivos. Existe una diversidad más amplia en la población y el valor de la aptitud media evoluciona a una mayor distancia por debajo de la máxima aptitud. La curva de aptitud media de la población tiene ahora un aspecto más rugoso, con variaciones mayores, consistente con la mayor frecuencia de los cambios aleatorios impuestos en los genes.

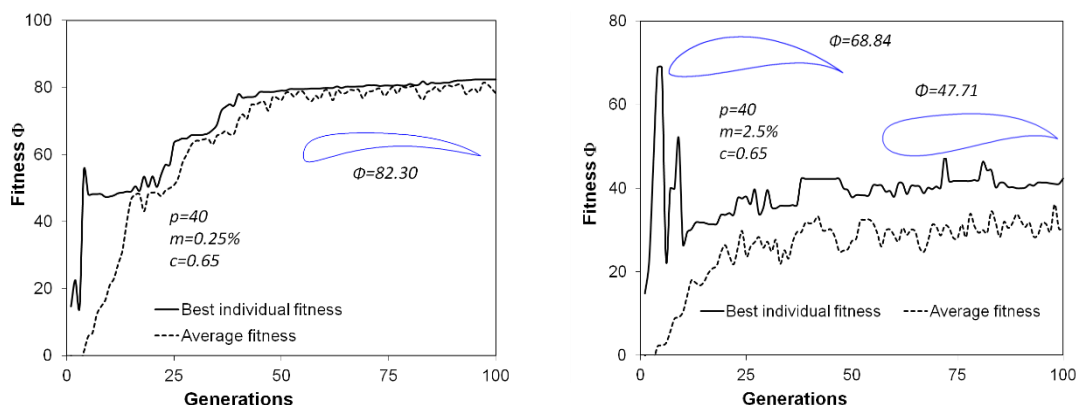


Figura IV.26: Evolución de la búsqueda para dos ejecuciones realizadas sobre la misma población inicial para diferentes tasas de mutación, (izquierda) baja y (derecha) alta. El tamaño de población es 40 y la tasa de cruzamiento 0,65. La última ejecución mostró un comportamiento anómalo.

Las tasas de mutación elevadas reducen el riesgo de una búsqueda infructuosa del GA, pero no lo evitan completamente. En este sentido, la ejecución marcada con (\*\*) en la

tabla IV.3 experimentó una evolución atípica mostrada en la figura IV.26 derecha. La aparición prematura de un individuo con una aptitud muy elevada en una generación tan temprana como la tercera (que sobrevivió durante dos generaciones) guio la población hacia regiones no prósperas donde quedaron atrapados todos los individuos.

Se comprobó que el uso de elitismo aceleró la convergencia hacia un máximo elevado del espacio de búsqueda, como muestra la ejecución seleccionada en la figura IV.27. Las poblaciones convergen prácticamente hacia el primer tercio del máximo de generaciones. De manera consistente con la reducción de la exploración, los resultados de la tabla IV.3 muestran que el uso del elitismo no garantiza alcanzar el máximo global. Sin embargo, tres de las cuatro ejecuciones realizadas con elitismo, mejoraron la aptitud del mejor individuo obtenido en las correspondientes ejecuciones que emplearon misma tasa de mutación, cruzamiento, y tamaño de población, pero sin elitismo.

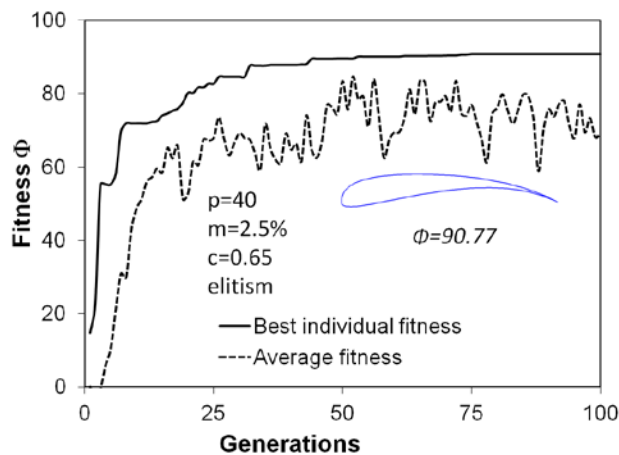


Figura IV.27: Patrón típico de convergencia con elitismo. Evolución de la búsqueda que arrojó el mejor valor de aptitud de la tabla IV.3.

La figura IV.28 muestra siete perfiles, que son los mejores de sus respectivas ejecuciones. Entre ellos existe una cierta variedad de formas.

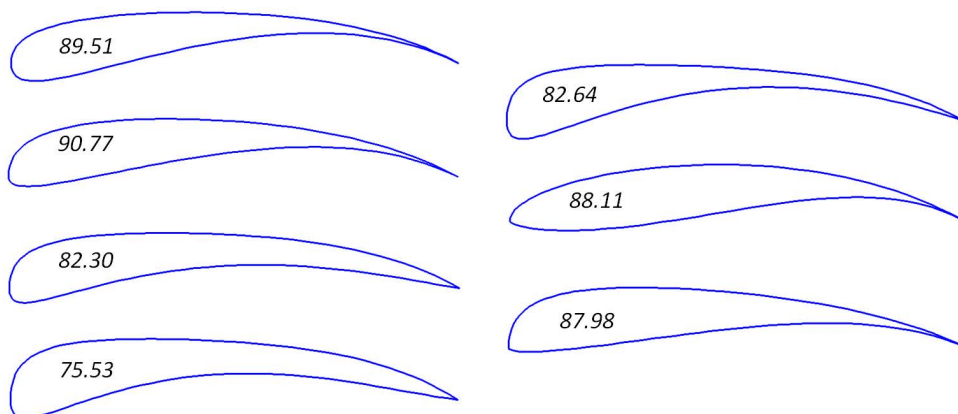


Figura IV.28: Mejores individuos encontrados en algunas ejecuciones de la tabla IV.3 y su valor de aptitud.

Habiéndose comprobado que en la mayoría de las ejecuciones realizadas (incluyendo estas siete) existe gran similitud en las formas de los mejores individuos de la población final, esto indica que los mejores individuos en la población final de cada búsqueda suelen quedar confinados en las cercanías de un máximo local.

Por lo tanto es probable que la función objetivo actual tenga muchos máximos locales de aptitud elevada, y siendo muy posible que sus respectivas aptitudes sean sustancialmente diferentes, considerando además que los tamaños de población empleados son pequeños, una hipótesis razonable es pensar que el máximo global puede no haber sido aún encontrado. En este sentido, encontrar el supuesto máximo global implicaría ampliar la campaña de ejecuciones usando tamaños de población mayores, y en consecuencia acarreando costes desmesurados.

En cuanto a las formas de los mejores perfiles encontrados en las ejecuciones realizadas, estas son producto de la función objetivo. Como puede verse, la función aerodinámica  $c_l/c_d$  a maximizar ha propiciado combaduras muy elevadas, con valores de sustentación muy elevados, hasta bordear el despegue de la capa límite, y la restricción de espesor mínimo ha penalizado los espesores inferiores a 0,12c, para que este canto garantice un mínimo de resistencia estructural.

Sin embargo, entre las mejores formas encontradas se observa que algunas teniendo cierto espesor en la zona delantera son demasiado delgadas en la parte de atrás, lo cual puede acarrear falta de rigidez en un tramo largo. Este problema podría subsanarse introduciendo restricciones adicionales sobre la geometría de los perfiles imponiendo una sección mínima y/o espesores mínimos en diferentes posiciones a lo largo de la cuerda (ver por ejemplo el estudio de optimización de alas tridimensionales [Lyu' 12]).

La plataforma computacional usada en el análisis es un PC con 12 CPUs con una velocidad de 3GHz y 96 Gb de RAM. En una optimización usando una población de 40 individuos a lo largo de 100 generaciones, el número necesario de evaluaciones de la función se encuentra habitualmente entre 1600 y 2500 porque algunos individuos se repiten en la siguiente generación, dando un tiempo de cálculo en este PC de unas 48 horas.

### 6.5.2 Minimización del arrastre para un valor dado de sustentación y espesor mínimo.

Para minimizar el valor de  $c_d$ , se aborda la maximización de  $l/c_d$ . La función objetivo se define en la forma

$$\Phi = (1/c_d) \cdot p_t(t) \cdot p_a(c_l) \cdot p_s \quad (\text{IV.11})$$

donde el factor de penalización  $p_s$  que filtra las simulaciones incorrectas es el mismo empleado en el problema de optimización anterior. También se ha mantenido la definición del factor de penalización por escasez de espesor  $p_t$  del ejemplo anterior, porque en perfiles con la misma línea media y la misma forma de distribución de espesor, el arrastre tiende a reducirse al disminuir el espesor, y con ello su inverso ( $1/c_d$ ) tiende a aumentar de manera similar al ratio  $c_l/c_d$  (ver tabla IV.2).



### Definición del factor de restricción para el $c_1$ .

La restricción en el valor del coeficiente de sustentación para conseguir perfiles que satisfagan aproximadamente la condición  $c_1=0,4$  se ha introducido a través del factor

$$p_a(c_1) = \begin{cases} \exp[a(c_1 - 0.4)] & \text{si } c_1 < 0.4 \\ \exp[-a(c_1 - 0.4)] & \text{si } c_1 \geq 0.4 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

donde el parámetro  $a$  controla la pendiente de la curva  $p_a(c_1)$  y el grado de localización de la zona más elevada. En la figura IV.29 se ha representado esta curva para el valor  $a=1,2$ .

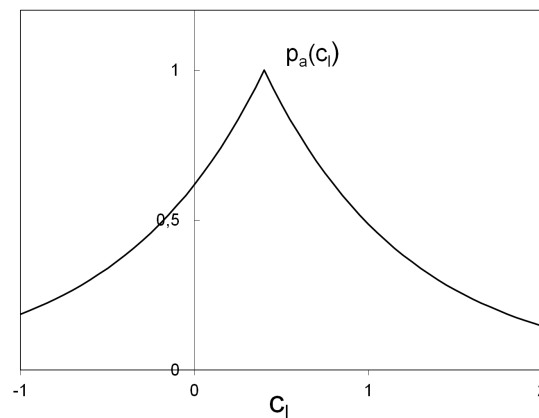


Figura IV.29: Factor de penalización para las restricciones sobre la sustentación para  $a=1,2$ .

El factor  $p_a(c_1)$  ha sido diseñado con una variación exponencial por dos razones. En primer lugar se busca que sea creciente a medida que la sustentación se aproxima a 0,4 (donde tiene un máximo) para premiar el acercamiento a este valor, y así conducir la población hacia estas regiones del espacio de búsqueda. A su vez, interesa que la pendiente en el máximo sea elevada, para que los valores próximos al máximo queden en un intervalo de  $c_1$  relativamente estrecho, esto hace posible que la sustentación de los individuos más aptos no diste mucho de 0,4.

En concreto, usando  $a=4$  se comprobó que los individuos con valores de  $c_1$  muy próximos a 0,4 no aparecían hasta bastante avanzadas las evoluciones. Esto se debe a que la curva de la ecuación (IV.12) es en este caso muy puntiaguda, y los puntos con mayor aptitud del espacio quedan confinados en regiones muy pequeñas del espacio de búsqueda, que resultan más difíciles de encontrar. Por ello se optó utilizar el valor  $a=1,2$  para los cálculos, que suaviza la pendiente de la curva de la ecuación (IV.12) haciéndola menos puntiaguda, que permitió que en generaciones tempranas aparecieran individuos con valores de sustentación muy próximos a 0,4.

### Ejecuciones de optimización con diferentes parámetros del GA.

En los cálculos se usaron dos poblaciones iniciales diferentes (señaladas como “a” y “f” en la tabla IV.4) de 40 individuos, junto con las mismas combinaciones de parámetros tasa de cruzamiento y de mutación para el GA empleadas en el apartado anterior. Dos diferencias claras pueden ser distinguidas en el comportamiento evolutivo de las ejecuciones comparado con las del criterio previo (expresión IV.8). Primero, la

convergencia es más lenta (como puede verse en la ejecución recopilada en la figura IV.30 derecha), que presenta un comportamiento convergente típico) y hay una mayor tendencia a quedar atrapadas en máximos locales. Expresión de esto es el elevado espesor del mejor perfil en la ejecución representada en la Figura IV.30 izquierda.

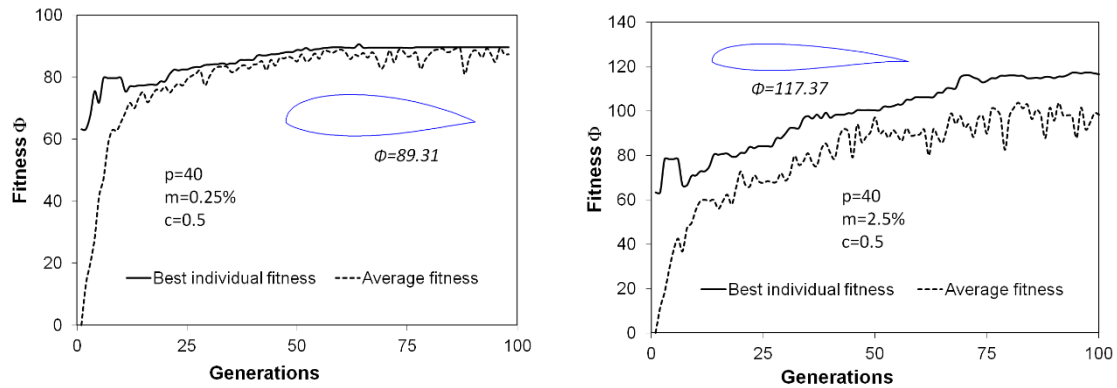


Figura IV.30: Evolución de la búsqueda en dos ejecuciones realizadas en la misma población inicial de 40 individuos para diferentes tasas de mutación. La tasa de cruzamiento es 0,5.

Sin embargo, los efectos de las diferentes combinaciones de los parámetros del GA en la búsqueda parecen ser cualitativamente similares a los observados en la función objetivo previa. En este sentido, los resultados de las 14 ejecuciones recogidas en la tabla IV.4 sugieren que las tasas de mutación elevadas arrojan los mejores resultados, y que también en este caso poblaciones mayores podrían mejorar la aptitud del mejor individuo (ver figura IV.31 izquierda). La evolución de la búsqueda del mejor valor de aptitud en la tabla IV.4 viene recogida en la figura IV.31 derecha.

Tabla IV.4: Resultados para cada combinación de parámetros del GA.

Tamaño de población	40		100		
Tasa de mutación	0.0025	0.025	0.025	0.025	
Tasa de cruzamiento	0.5	0.65	0.5	0.65	
Mejor individuo encontrado	(f) 70.57	(f) 105.88	(f) 117.37	(f) 111.78	(g) 122.32
( ) población inicial	(a) 89.31	(a) 85.68	(a) 123.18	(a) 111.63	
Media mejor individuo	79.94	95.78	120.28	111.70	122.32

El comportamiento del GA sobre esta segunda función objetivo, con respecto a la anterior, ha mostrado una mayor tendencia a quedar atrapado en máximos locales, de manera consistente con un paisaje actual más abrupto. La introducción en la función objetivo de la restricción en la sustentación a través del término multiplicador  $p_a(c_l)$  definido en  $[0,1]$  (ver figura IV.29) excava valles en la función, sobre el dominio de las seis variables de diseño que definen el perfil. Ahora hay una mayor cantidad de máximos locales, de manera que el GA encuentra mayor dificultad para alcanzar el pico más alto. Una definición del factor  $p_a$  con pendientes menores podría mejorar sustancialmente los resultados.

Es razonable suponer, como en los cálculos del criterio de optimización anterior, que el máximo absoluto ha podido no ser encontrado en el puñado de búsquedas realizadas, además en este caso se han realizado menos ejecuciones y sobre una función más

compleja (que puede necesitar de tamaños de población aún mayores), como se acaba de explicar.

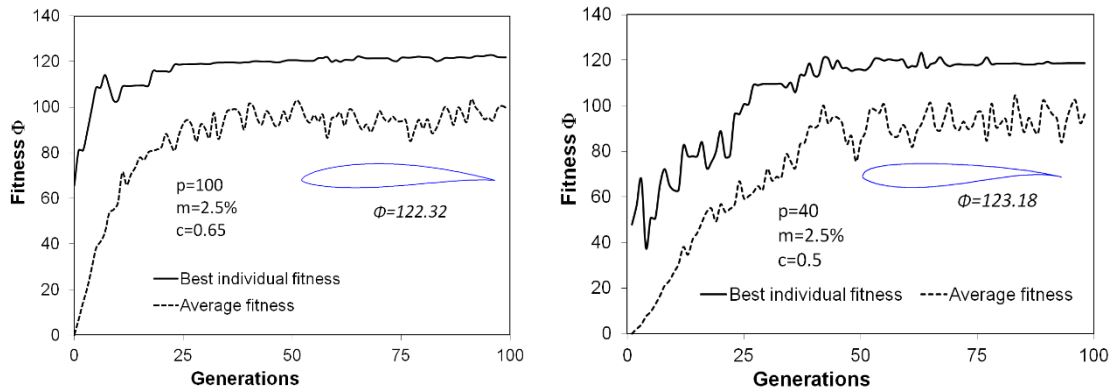


Figura IV.31: (izquierda) Evolución de la búsqueda para una ejecución con una población de 100 individuos, una tasa de cruzamiento  $c=0,65$  y una tasa de mutación del 2,5%. (derecha) Evolución de la búsqueda del mejor valor de aptitud en la tabla IV.4.

Por otra parte, como consecuencia de la función objetivo empleada, que impone un lift moderado de 0,4, las combaduras de los mejores perfiles son menores que para el criterio anterior, y los flujos parecen estar más lejos de la separación de la capa límite. A su vez los espesores de los mejores individuos tienden al mínimo permitido, ya que el arrastre tiende a disminuir con el espesor, como muestran los resultados experimentales, por ejemplo los recogidos en la tabla IV.2.

## 6.6 CONCLUSIONES.

Se ha desarrollado un sistema de optimización de forma integrando el código de algoritmos genéticos OMEGA y el código comercial de CFD Fluent, que ha facilitado la optimización de forma de perfiles aerodinámicos. Este sistema es una versión mejorada de la anterior, que analizaba los flujos usando el programa Fidap con un modelo de turbulencia de tipo  $k-\epsilon$ . De esta forma, los flujos son analizados con mayor precisión usando un modelo de turbulencia que predice la transición de flujo laminar a turbulento. Este modelo de flujo necesita de mallas más detalladas en la pared. Con este fin se ha mejorado el procedimiento de mallado fiable para geometrías cambiantes desarrollado para el sistema inicial (apartado III.4.2.3), de manera que ahora construye mallas que en la pared tienen mayor resolución y celdas menos distorsionadas (apartado III.5).

La robustez del sistema de optimización actual ha sido verificada para el problema específico de optimización de la forma de un perfil aerodinámico. Se han realizado dos ensayos preliminares para identificar parámetros eficientes del algoritmo de optimización para dos funciones objetivo diferentes con restricciones. Las restricciones han sido introducidas en las funciones objetivo a través de funciones de penalización diseñadas para facilitar una buena convergencia hacia soluciones óptimas. En ambos casos el uso de poblaciones de 40 individuos junto con una elevada tasa de mutación mostró un buen comportamiento, aunque con limitaciones.

En efecto, el uso de mallas más masivas ha disparado el coste por evaluación, obligando ello a reducir fuertemente los tamaños de población (de 200 a 40 individuos en el nivel básico). Como resultados de estas nuevas optimizaciones se han encontrado buenos perfiles, sin embargo comparando los mejores individuos de las diferentes ejecuciones realizadas (un individuo por ejecución) hay grandes diferencias entre sus geometrías. Esto sugiere la posibilidad de que no haya sido alcanzado el extremo global. Comprobarlo y encontrar este extremo global implicaría emprender nuevas ejecuciones mucho más costosas sobre poblaciones mucho mayores.

En comparación con el sistema inicial (modelo  $k-\epsilon$ ), el sistema actual (modelo de transición) crea paisajes más realistas para las mismas funciones objetivo, de manera que los mejores individuos encontrados ahora presentan formas diferentes y una mejor aptitud real. Muestra de ello es por ejemplo que, para la función objetivo  $c_l/c_d$ , los mejores perfiles actuales (ver figura IV.28) tienen más combadura que los iniciales (figura IV.18).

## **CAPÍTULO V.**

### **CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN**



## 1. CONCLUSIONES

Se recogen en este apartado las principales conclusiones y aportaciones de la tesis doctoral realizada.

- Se ha desarrollado un sistema de optimización de forma para perfiles aerodinámicos para flujo subsónico. Este sistema integra un GA y un código CFD y es robusto frente a extremos locales.
- Se han probado diferentes combinaciones de valores de los parámetros principales del GA para encontrar cuales pueden dar búsquedas eficaces. En las búsquedas donde el elevado coste por análisis obligó a usar tamaños de población pequeños, se hace necesario emplear elevadas tasas de mutación.
- El sistema de optimización ha sido aplicado con resultados satisfactorios sobre diferentes funciones objetivo con restricciones. Las restricciones fueron incluidas en la función objetivo mediante factores de penalización. El comportamiento evolutivo de las búsquedas depende de la complejidad del relieve de la función objetivo resultante, que está condicionado por los factores de penalización. Estos han sido diseñados para posibilitar que las búsquedas sean eficientes y el sistema robusto.
- Habiendo comprobado que los métodos de generación de mallas desestructuradas incluidos habitualmente en preprocesadores comerciales no son herramientas fiables para el mallado automático de geometrías cambiantes, se ha desarrollado un procedimiento de mallado automático capaz de mallar geometrías que experimentan grandes desplazamientos entre cada una y la siguiente. Este procedimiento ha mostrado su robustez para la diversidad de formas incluidas en el espacio de búsqueda, y consiste en construir subdominios, de tal manera que las fronteras de los subdominios en contacto con la pared son trazadas en función de la forma de ésta, para minimizar la distorsión de las celdas. Las mallas así obtenidas emplean mallas estructuradas para los bloques de malla que rodean la pared, y dentro de éstos junto a la pared las mallas presentan una elevada densidad y formas de calidad aceptable.
- El sistema de optimización de forma puede ser adaptado a otros problemas de diferente geometría, diseñando un mapa de subdominios específico para cada caso.
- En un contexto con limitación de potencia de cálculo de los ordenadores, se optó por emplear un espacio de búsqueda con seis variables de diseño. Se ha realizado un estudio para elegir una parametrización de la geometría de los perfiles que con este número de variables permita formas muy variadas y útiles (con posibilidad de amplios radios de curvatura en el borde de entrada, bordes de salida puntiagudos, y formas suaves). Para ello se han empleado dos curvas de Bézier, una para el extradós y otra para el intradós, cada una con cinco vértices de control y tres grados de libertad. Los rangos de existencia de estas seis variables han sido elegidos para que la probabilidad de tener perfiles en forma

de ocho sea pequeña, mejorando con ello la exploración del espacio de búsqueda útil.

- En cuanto al tipo de análisis empleado para los flujos, se ha comprobado que los modelos de turbulencia RANS de tipo  $k-\varepsilon$  no son válidos para calcular flujos alrededor de perfiles con capas límite en régimen transicional. Por el contrario se ha comprobado que el modelo RANS de transición  $k-k_1-\omega$  de Walters sí es válido para este tipo de flujos.
- Se ha comprobado que la optimización de las constantes de cierre de un modelo turbulencia de tipo  $k-\varepsilon$  para flujos alrededor de perfiles con capas límite transicionales (las habituales en los flujos reales), no permite mejorar la validez del modelo para este tipo de flujos. El problema reside en que los modelos  $k-\varepsilon$  no son capaces de modelizar la transición de capa límite laminar a turbulenta, sino que modelizan capas límite completamente turbulentas.

## 2. LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Los trabajos desarrollados en esta Tesis han dejado abiertas o sugieren una serie de líneas de investigación, y entre ellas las principales son:

- Realizar un estudio más exhaustivo sobre los valores del GA (tamaño de población, tasa de mutación, tasa de cruzamiento, elitismo, tipo de operador de selección, etc) con respecto al valor de la función aptitud obtenida. Los resultados de las ejecuciones de optimización realizadas sugieren que se puede mejorar la aptitud máxima aumentando el tamaño de población, aunque esto multiplica el coste de tiempo.
- De cara a la optimización de forma, emplear como método de análisis alternativo a los métodos CFD, un método de paneles con modelo de transición. Este tipo de métodos presentan las ventajas de reducir fuertemente el coste por análisis y tener una precisión razonable, y de no usar mallas que cubran el dominio de fluido, sino únicamente las fronteras.
- Para intensificar la explotación en el espacio de búsqueda, combinar con el GA algún algoritmo de tipo gradiente, es decir utilizar algoritmos meméticos. Con esto se facilita el hallazgo de los individuos más aptos del espacio, y al mismo tiempo quizás se pueda reducir el número de análisis, dependiendo del coste de evaluación del gradiente.
- Realizar un estudio de optimización inversa para encontrar el perfil que mejor se ajuste a la distribución experimental de presiones o tensión cortante de un perfil de referencia conocido. De esta manera la optimización tiende a encontrar dentro del espacio de búsqueda el perfil que más se parece al perfil de referencia. Para ello se pueden utilizar parametrizaciones geométricas a base de curvas de Bézier con diferente número de vértices de control (y por lo tanto de parámetros de



diseño), para comparar sus respectivas flexibilidades geométricas y costes totales, de cara a elegir el número más adecuado de estos vértices.

- Estudio de la reducción del coste computacional cuando se paraleliza el código CFD y el algoritmo genético.
- Para reducir el número de análisis CFD requeridos por el GA utilizar ANN (Artificial Neural Networks) para crear metamodelos sustitutivos. Sin embargo es importante evaluar la efectividad del metamodelo mediante validación.
- Realizar una optimización multiobjetivo con variación del ángulo de ataque del perfil.



## **REFERENCIAS**



- [Abb'59] Abbott I. H., von Doenhoff A. E., Theory of wing sections, including a summary of airfoil data. Dover, 1959.
- [All'08] Allen C. B., Towards automatic structured multiblock mesh generation using improved transfinite interpolation. International journal for numerical methods in engineering 2008; 74; pp 697–733.
- [And'91] Anderson J. D., Fundamentals of aerodynamics. McGraw Hill, 2nd edition, 1991.
- [And'00] Anderson J. D., Introduction to Flight. McGraw Hill, 4th edition, 2000.
- [Arm'95] Armstrong C. G, Robinson D.J., McKeag R.M., Li T.S., Bridgett S.J., Donaghy R. J. and McGleenan C.A, Medials for meshing and more. Proceedings, 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, 1995; pp 277–288.
- [Att'81] Atta E., Component-adaptive grid interfacing. AIAA 19th aerospace sciences meeting. AIAA paper 81-0382, 1981.
- [Avi'96] Avilés R., Introducción a los algoritmos genéticos con aplicaciones en ingeniería mecánica. Bilbao, 1996.
- [Bab'03] Babinsky H., How do wings work? Physics Education, 2003; 38(6); p 497.
- [Bak'05] Baker T. J., Mesh generation: Art or science?. Progress in Aerospace Sciences, 2005; 41(1); pp 29–63.
- [Bak'87] Baker T. J., Three dimensional mesh generation by triangulation of arbitrary point sets, AIAA eighth CFD conference. Honolulu, HI. AIAA paper 87-1124, 1987.
- [Bal'78] Baldwin B. S. and Lomax H., Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA Paper 78-257, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1978.
- [Bal'90] Baldwin B. S. and Barth T. J., A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows. NASA TM-102847, National Aeronautics and Space Administration, 1990.
- [Bar'08] Bardow A., Bischof C. H., Bücker H. M., Dietze G., Kneer R., Leefken A., Marquardt W., Renz U., Slusanschi E., Sensitivity-based analysis of the  $k-\epsilon$  model for the turbulent flow between two plates. Chemical Engineering Science, 2008; 63(19); pp 4763 – 4775.
- [Bat'67] Batchelor G. K, An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, 1967.
- [Bat'90] Batina J. T., Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. AIAA Journal, 1990; 28(8); pp 1381-1388.
- [Bax'08] Baxevanou C. A., Fidaros, D. K., Validation of numerical schemes and turbulence models combinations for transient flow around airfoil. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2008;2(2); pp 208–221.
- [Bha'98] Bhardwaj M. K., Kapania R. K., Reichenbach E., and Guruswamy G. P., Computational fluid dynamics/computational structural dynamic interaction methodology for aircraft wings, AIAA Journal, 1998; 36(12); pp 2179–2186.
- [Bip'99] Bippes H., Basic experiments on transition in three-dimensional boundary layers dominated by crossflow instability. Progress in Aerospace Sciences, 1999; 35(4), pp 363–412.
- [Bla'91] Blacker T. D., Stephenson M. B., Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation. International Journal for Numerical

- Methods in Engineering, 1991; 32; pp 811–47.
- [Boe'07] De Boer A., van der Schoot M. S. and Bijl H., Mesh deformation based on radial basis function interpolation. *Computers and Structures*, 2007; 85; pp 784–795.
- [Bra'96] Bradshaw P., Turbulence modeling with application to turbomachinery. *Progress in Aerospace Science*, 1996; 32; pp 575–624.
- [Bur'01] Burman J. and Gebart B. R., Influence from numerical noise in the objective function for flow design optimization. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 2001; 11(1); pp 6–19.
- [Byu'98] Byun C. and Guruswamy G. P., Aeroelastic Computation on Wing–Body–Control Configurations on Parallel Computers. *Journal of Aircraft*, 1998; 35(2); pp 288–294.
- [Cav'97] Cavallo P. A., Hosangadi A., Lee T. A., Dash S. M., Dynamic unstructured grid methodology with application to aero/propulsive flowfields. *AIAA Paper 97-2310*, 1997.
- [Ceb'74] Cebeci T., Smith A. M. O., Analysis of turbulent boundary layers. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1974; vol XV, Academic Press, New York, 1974.
- [Ceb'05] Cebeci T., Shao J. P., Kafyeke F., Laurendeau E., *Computational fluid dynamics for engineers*. Springer 2005.
- [Che'87] Chen Y. S., Kim S. W., Computation of turbulent flows using an extended  $k$ - $\epsilon$  turbulence closure model. *NASA CR-179204*; 1987.
- [Coo'67] Coons, S. A., Surfaces for computer aided design of space forms, Project MAC, Design Div., Dept of Mech. Engineering, MIT, 1964. Revised to MAC-TR-41, June, 1967.
- [Cor'02] Cordero J. M., Cortés J., *Curvas y superficies para modelado geométrico*. Editorial RA-MA 2002.
- [Cos'84] Cosentino G. B. and Holst T. L., Numerical Optimisation Design of Advanced Transonic Wing Configurations, *Journal of Aircraft*, 1986; 23(3), pp 192–199.
- [Cro'87] McCroskey W. J., A critical assessment of wind tunnel results for the naca 0012 airfoil, *NASA Technical Memorandum 100019*, October 1987.
- [Cru'97] Crumpton P. I. and Giles M. B., Implicit time-accurate solutions on unstructured dynamic grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1997; 25(11), pp 1285–1300.
- [Dar'05] Darmofal D. L., Lift generation and streamline curvature. *Massachusetts Institute of Technology*, 2005.
- [Dar'06] Darbandi M., Modification of the standard  $k$ - $\epsilon$  turbulence model for multi-element airfoil application using optimization technique. *24th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 5–8 June 2006, San Francisco, California.
- [Dav'11] Davidson P. A., Kaneda Y., Moffatt K., Sreenivasan K R. (editors). *A voyage through turbulence*. Cambridge University Press, 2011.
- [Des'07] Désidéri J. A., El Majd B. A., Janka A., Nested and self-adaptive Bézier parameterizations for shape optimization. *Journal of Computational Physics*, 2007; 224; 117–131.
- [Dre'89] Drela M., XFOIL: An analysis and design system for low Reynolds number airfoils. *Proceedings of the Conference Notre Dame, Indiana, USA*, 5–7 June 1989; pp 1–12.
- [Dri'56] Van Driest E. R., On turbulent flow near a wall. *Journal of the*

- Aeronautical Sciences, 1956; 23(11); pp 1007-1011.
- [Dur'91] Durbin P. A., Near-wall turbulence closure modeling without 'damping functions". *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1991; 3, pp 1-13.
- [Dur'93] Durbin P. A., A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993; 249; pp 465–498.
- [Dur'11] Durbin P. A., Pettersson Reif B. A., *Statistical theory and modeling for turbulent flows*. Second Edition, John Wiley & Sons 2011.
- [Dyk'82] Van Dyke M., *An album of fluid motion*. The Parabolic Press, 1982.
- [Ede'01] Edelsbrunner H., *Topology for mesh generation*. Cambridge University Press, 2001.
- [Eim'00] Eymard R., Gallouët T. and Herbin R., Finite volume methods. *Handbook of Numerical Analysis, Volume VII*, North Holland, 2000; pp 713-1020.
- [Ele'12] Eleni D. C, Athanasios T. I. and Dionissios M. P., Evaluation of the turbulence models for the simulation of the flow over a National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) 0012 airfoil. *Journal of Mechanical Engineering Research*, 2012; 4(3), pp 100-111.
- [Eri'90] Erickson L. L., Panel methods – An introduction. Nasa technical paper 2995, 1990.
- [Far'98] Farhat C., Degrand C., Koobus B., Lesoinne M., Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 1998;163; pp 231–45.
- [Fer'09] Ferrer E., Munduate X., CFD predictions of transition and distributed roughness over a wind turbine airfoil. 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition 5 - 8 January 2009, Orlando, Florida.
- [Fer'96] Ferziger J. H., Perić M., *Computational methods for fluid dynamics*. Springer 1996.
- [Fid'98] Fidap theory manual. Fluent Inc. 1998.
- [Flo'87] Flores J., Reznick S.G., Holst T.L., Gundy K., Transonic Navier–Stokes solutions for a fighter-like configuration. AIAA 25th aerospace sciences meeting, Reno, NV. AIAA paper 87-0032, 1987.
- [Fra'10] Franke M., Rober T., Kugeler E., Ashcroft G., Turbulence treatment in steady and unsteady turbomachinery flows. V European Conference on Computational Fluid Dynamics. ECCOMAS CFD 2010 Lisbon, Portugal, 14-17 June 2010.
- [Gai'95] Gaitonde A.L, A dual time method for the solution of the 2D unsteady Navier–Stokes equations on structured moving meshes. *Proceedings of the 13th AIAA applied aerodynamics conference*, San Diego, USA, 1995; p 1877.
- [Gat'93] Gatski T. B. and Speziale C. G., On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993; 254; pp 59-78.
- [Geo'08] George P. L. and Frey S. *Mesh generation*. 2nd edition, J Wiley & Sons Inc. 2008.
- [Gir'96] Girimaji S. S., Fully-explicit and self-consistent algebraic Reynolds-stress model *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1996; 8(6); pp 387–402.
- [Gom'01] Gomez V., Fernandez de Bustos I., Aguirrebeitia J., Angulo C. and Avilés R., A modified genetic algorithm suitable for nonstationary environments.

- Proceedings of the Fourth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-4), Dalian, China, 2001; pp 1–6.
- [Gor'73] Gordon W. N. and Hall C.A., Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973; 7; pp 461-477.
- [Han'76] Hanjalic K. and Launder B. E., Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds number turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, 1976; 74(4); pp 593-610.
- [Han'05] Hanjalic K., Popovac M. and Hadziabdic M., A robust near-wall elliptic relaxation eddy-viscosity turbulence model for CFD. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2005; 25; pp 1047–1051.
- [Haq'07] Haque A., Ahmad F., Yamada S. and Chaudhry S. R., Assessment of turbulence models for turbulent flow over backward facing step. *Proceedings of the World Congress on Engineering 2007 Vol II WCE 2007*, July 2 - 4, 2007, London, U.K.
- [Har'07] Hariya M., Nishigaki I. and Hiro Y., An automatic hexahedral mesh generation system with feature line extraction technique. *Journal of solid mechanics and Materials Engineering*, 2007; 1(2); pp 202-210.
- [Hat'99] Hatman A., Wang T., A prediction model for separated-flow transition. *Journal of Turbomachinery*, 1999; 121(3), pp 594-602.
- [Hen'07] Henshaw M. J. C., Badcock K. J., Vio G. A., Allen C. B., Chamberlain J., Kaynes I., Dimitriadis G., Cooper J. E., Woodgate M. A., Rampurawala A. M., Jones D., Fenwick C., Gaitonde A. L., Taylor N. V., Amor D. S., Eccles T. A., Denley C. J., Non-linear aeroelastic prediction for aircraft applications. *Progress in Aerospace Sciences*, 2007; 43; pp 65–137.
- [Hic'78] Hicks R. M. and Henne P. A., Wing design by numerical optimization. *Journal of Aircraft*, 1978; 15(7); pp 407-413.
- [Hin'75] Hinze, J. O, *Turbulence*. McGraw-Hill, 1975.
- [Hol'75] Holland J. H., *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor, Mich, USA, 1975.
- [Hol'01] Holst T. L. and Pulliam T. H., Aerodynamic shape optimization using a real number encoded genetic algorithm. 19<sup>th</sup> AIAA Applied Aerodynamics Conference Anaheim, CA, USA, 2001-2473.
- [Hom'08] Homsy G. M, *Multimedia Fluid Mechanics*. 2nd edition, Cambridge University Press, 2008.
- [Hos'16] Hosseini S. M., Vinuesa R., Schlatter P., Hanifi A., Henningson D. S.. Direct numerical simulation of the flow around a wing section at moderate Reynolds number. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2016; 61; pp 117–128.
- [Hsu'04] Hsu S. Y., Chang C. L., Samareh J., A simplified mesh deformation method using commercial structural analysis software. 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference Albany, New York, Aug. 30-Sep. 1, 2004.
- [Ing'08] Van Ingen J. L., The  $e^N$  method for transition prediction. Historical review of work at TU Delft. 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 23 - 26 June 2008, Seattle, Washington. AIAA 2008-3830.
- [Ive'75] Ives D. C., A modern look at conformal mapping including doubly connected regions. *Proceedings of the AIAA eighth fluid and plasma dynamics conference*, Hartford, CT. AIAA paper 75-842, 1975.



- [Jah'11] Jahangirian A., Shahrokhi A., Aerodynamic shape optimization using efficient evolutionary algorithms and unstructured CFD solver. *Computers & Fluids*, 2011; 46; pp 270–276.
- [Jak'07] Jakobsson S. and Amoignon O., Mesh deformation using radial basis functions for gradient-based aerodynamic shape optimization. *Computers & Fluids*, 2007; 36(6), pp 1119–1136.
- [Jam'88] Jameson A., Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 1988; 3; pp 233-260.
- [Jam'94] Jameson A., Control theory based airfoil design using the Euler equations. 5th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 1994, Panama City Beach, FL,U.S.A.
- [Joh'85] Johnson D. A and King L. S., A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers. *AIAA Journal*, 1985; 23, 1684–1692.
- [Jon'72] Jones W. P., Launder B. E., The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*, 1972; 15; pp 301–314.
- [Kal'03] Kalitzin G., Wu X., Durbin P. A., DNS of fully turbulent flow in a LPT passage. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2003; 24(4), pp 636–644.
- [Kha'12] Khalkhalia A., Safikhanib H., Applying evolutionary optimization on the airfoil design. *Journal of Computational and applied Research in Mechanical Engineering*, 2012; 2(1); pp 51-62.
- [Koo'16] Koo D. and Zingg D. W, Progress in aerodynamic shape optimization based on the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2016.
- [Lan'02] Langtry R., Sjolander S., Prediction of transition for attached and separated shear layers in turbomachinery. 38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit Indianapolis, Indiana, 7-10 july, 2002.
- [Lau'74] Launder B. E., Sharma B. I, Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in heat and mass transfer*, 1974;1(2); pp 131-138.
- [Lau'75] Launder B. E., Reece, G. J. and Rodi W., Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of fluid mechanics*, 1975; 41; pp 537-566.
- [Lau'93] Launder, B. E., Lecture notes on “turbulence modeling in industrial flows”. Les Houches Summer School on Computational Fluid Dynamics, 1993.
- [Lee'09] Lee J. D. and Jameson A., Natural-laminar-flow airfoil and wing design by adjoint method and automatic transition prediction. 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting, pp 1-25, Orlando, Florida, USA, 2009.
- [Lee'80] Lee K. D., Huang M., Yu N. J., Rubbert P. E, Grid generation for general three-dimensional configurations. Proceedings of the NASA Langley workshop on numerical grid generation techniques, Langley, VA, October 1980.
- [Lev'13] Levy D. W, Laflin K. R., Tinoco E. N., Vassber J. C., Summary of data from the Fifth AIAA CFD Drag Prediction Workshop. AIAA Paper 2013-0046, NF1676L-15853. 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting; 7-10 Jan. 2013; Grapevine, TX; United States.

- [Lew'05] Lewis R. I., Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems. Cambridge University Press 2005.
- [Li'02] Li W., Huyse L., Padula S., Robust airfoil optimization to achieve drag reduction over a range of Mach numbers. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002; 24(1); pp 38-50.
- [Lis'07] Liseikin V. D., A computational differential geometry approach to grid generation. 2nd edition, Springer 2007.
- [Liu'98] F. Liu, S. Ji, and G. Liao. An adaptive grid method and its application to steady Euler flow calculations. *Siam Journal on Scientific Computing*, 1998; 20(3); pp 811-825.
- [Lo'85] Lo S. H., A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985; 21; pp 1403–26.
- [Lop'08] López D., Angulo C. and Macareno L., An improved meshing method for shape optimization of aerodynamic profiles using genetic algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008; 56; pp 1383–1389.
- [Lop'10] López, D.; Fernández de Bustos, I.; Angulo, C.; Avilés, R. Validation and optimization of turbulence models for incompressible flow around airfoils. *Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics ICFD*, 12-15 abril 2010. Reading, UK.
- [Lop'13] López D., Angulo C., Fernández de Bustos I., and García V., Framework for the shape optimization of aerodynamic profiles using genetic algorithms. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2013, article ID 275091, 11 pages.
- [Lyu'12] Lyu Z., Kenway G. K. W. and Martins J. R. R. A., Aerodynamic shape optimization investigations of the common research model wing benchmark. *AIAA Journal*, 2015; 53(4); pp. 968-985.
- [Mak'99] Makinen R.A.E., Periaux J. and Tovainen J., Multidisciplinary shape optimization in aerodynamics and electromagnetics using genetic algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1999; 30(2); pp 149–159.
- [Mal'96] Malkiel E. and Mayle R.E., Transition in a separation bubble. *ASME Journal of Turbo machinery*, 1996; 118; pp 752-759.
- [Man'88] Mansour N. N., Kim J., Moin P., Reynolds-stress and dissipation rate budgets in a turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1988; 194; pp 15–44.
- [Mat'00] Mathieu J., Scott J., An introduction to turbulent flow. Cambridge University Press, 2000.
- [Mav'08] Mavriplis D. J., Grid quality and resolution issues from the Drag Prediction Workshop Series. 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 7 - 10 January 2008, Reno, Nevada. AIAA 2008-930.
- [May'91] Mayle R.E., The role of laminar-turbulent transition in gas turbine engines. *Journal of Turbomachinery*, 1991; 113; pp. 509-537.
- [Men'94] Menter F. R., Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal* 1994; 32(8); pp 1598-1605.
- [Men'03] Menter F. R., Kuntz M. and Langtry R., Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*, 2003; 4(1); pp 625-632.
- [Men'06] Menter F. R., Langtry R., Völker S., Transition modelling for general

- purpose CFD codes. *Flow Turbulence and Combustion*, 2006; 77; pp 277–303.
- [Moh'97] Mohammadi, B., Optimal shape design, reverse mode of automatic differentiation and turbulence. 35<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit AIAA Paper No. 97-0099, 1997.
- [Mor'16] Morgado J., Vizinob R., Silvestre M. A .R., Páscoa J. C., XFOIL vs CFD performance predictions for high lift low Reynolds number airfoils. *Aerospace Science and Technology*, 2016; 52; pp 207–214.
- [NAC'www] Aerodynamics Airfoil Camber Flaps Slots Slats Drag Smoke Lifts circa 1938 NACA Langley, [www.youtube.com/watch?v=zxpPo\\_wBejw](http://www.youtube.com/watch?v=zxpPo_wBejw)
- [Nao'73] Naot D., Shavit A., Wolfstein M., Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses. *The Physics of Fluids*, 1973; 16; pp 738-743.
- [Oba'97] Obayashi S. and Tsukahara T., Comparison of optimization algorithms for aerodynamic shape design. *AIAA Journal*, 1997; 35(8); pp 1413–1415.
- [OBr'90] O'Brien P. and Hall M. G., A comparison of the effects of grid distortion on finite-volume methods for solving the Euler equations. Contributed Paper Sessions Algorithm Development And Parallel Computing, Twelfth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Proceedings of the Conference Held at the University of Oxford, England on 9–13 July 1990 Volume 371 of the series Lecture Notes in Physics pp 287-290.
- [Oya'00] Oyama A., Obayashi S., Nakahashi K., Nakamura T., Aerodynamic optimization of transonic wing design based on evolutionary algorithm. Third International Conference on Non-Linear Problems in Aviation and Aerospace Methods and Soft Ware, Daytona Beach, FL, USA, May 10–12, 2000.
- [Pap'16] Papoutsis-Kiachagias E. M., Giannakoglou K. C., Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: industrial applications. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2016; 23; pp 255–299.
- [Par'98] Park S. and Lee K., Automatic multiblock decomposition using hipercube ++ for grid generation. *Computers & Fluids*, 1998; 27(4); pp 509-528.
- [Pas'09] Di Pasquale D., Rona A., Garrett S. J., A selective review of CFD transition models. 39th AIAA Fluid Dynamics Conference, 22 - 25 June 2009, San Antonio, Texas.
- [Pea'97] Pearce R., Constraint resolutions in genetic algorithms. pp 79-98. Chapter 4 in *Genetic algorithms in engineering systems*, 1997, Zalzala A. M., Fleming P. J. (editors).
- [Pei'04] Peigin S. and Epstein B., Robust optimization of 2D airfoils driven by full Navier Stokes computations. *Computers and Fluids*, 2004; 33; pp 1175–1200.
- [Pop'75] Pope S. B., A more general effective viscosity hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 1975; 72; pp 331-340.
- [Pop'99] Pope S. B., A perspective on turbulence modeling. M. D. Salas et al. (editors), *Modeling Complex Turbulent Flows* 53-67, Kluwer Academic Publishers 1999.
- [Pop'00] Pope S. B., *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [Qua'01] Quagliarella D. and Vicini A., Viscous single and multicomponent airfoil design with genetic algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*,

- 2001; 37; pp 365–380.
- [Raj'03] Rajagopalan K., Automatic nested refinement – a technique for the generation of high quality multi-block structured grids for multi-scale problems using GridPro® ” - Master's Thesis in Mechanical and Aerospace Engineering presented to the University of Virginia, May 2003.
- [Rey'1895] Reynolds O., On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1895, series A, 186,123.
- [Rib'12] Ribeiro A. F. P., Awruch A. M., Gomes H. M., An airfoil optimization technique for wind turbines. *Applied Mathematical Modelling*, 2012; 36; pp 4898–4907.
- [Rob'91] Robinson B. A., Batina J. T., and Yang, H. T. Y., Aeroelastic analysis of wings using the Euler equations with a deforming mesh. *Journal of Aircraft*, 1991; 28(11); pp 778–788.
- [Rob'01] Robinson G. M. and Keane A. J., Concise orthogonal representation of supercritical airfoils. *Journal of Aircraft*, 2001;38(3); pp 580-583.
- [Rob'15] Robitaille M., Mosahebi A., Laurendeau E.. Design of adaptive transonic laminar airfoils using the  $\gamma - Re_{\theta t}$  transition model. *Aerospace Science and Technology*, 2015; 46, pp 60-71.
- [Rod'76] Rodi W., A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *Gesellschaft Angewandte Mathematik und Mechanik Workshop Paris France*, 1976, vol. 56.
- [Rod'85] Rodi W., Scheuerer G., Calculation of laminar-turbulent boundary layer transition on turbine blades. *NASA STI/Recon Technical Report N, 86, 29839*, 1985.
- [Rud'94] Rudolph G., Convergence analysis of canonical genetic algorithms. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1994; 5(1), pp 96-101.
- [Rum'02] Rumsey C. L., Ying S. X., Prediction of high lift: review of present CFD capability. *Progress in Aerospace Science*, 2002;38; pp 145-180.
- [Sam'90] Samareh-Abolhassani J., Sadrehaghighi I., Smith, R.E., and Tiwari, S.N., Applications of Lagrangian blending functions for grid generation around airplane geometries. *Journal of Aircraft*, 1990; 27(10); pp 873-877.
- [Sam'02] Samareh J. A., Application of quaternions for mesh deformation. *NASA TM 2002-211646*, 2002.
- [Sch'00] Schlichting H., Gersten K., *Boundary layer theory*. 8th edition, Springer, 2000.
- [Sch'05] Schlatter P., Large-eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow. Ph.D. thesis, ETH Zurich, 2005.
- [Schm'04] Schmid F., Hirschen K., Meynen S. and Schäfer M., An enhanced approach for shape optimization using an adaptive algorithm. *Finite Element in Analysis and Design*, 2004; 41; pp 521-543.
- [Sel'www] [http://m-selig.ae.illinois.edu/uiuc\\_lsar.html](http://m-selig.ae.illinois.edu/uiuc_lsar.html)
- [Sel'69] Sells C. C. L., Plane subcritical flow past a lifting aerofoil. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1969; 308(1494); pp 377–401.
- [Sha'07] Shahrokhi A., Jahangirian A., Airfoil shape parameterization for optimum Navier–Stokes design with genetic algorithm. *Aerospace Science and Technology*, 2007Volume; 11(6); pp 443–450.
- [Sha'61] A. Shapiro. *Movie Series of the National Committee for Fluid Mechanic*

- Films, 1961. <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>
- [She'17] Sheng C., Advances in transitional flow modeling, applications to helicopter rotors. Springer, 2017.
- [Shi'95] Shih T. H., Liou W. W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J., A new  $k-\epsilon$  viscosity model for high Reynolds number turbulent flows. *Computers & Fluids*, 1995; 24(3); pp 227-238.
- [Siv'07] Sivanandam S. N., Deepa S. N., Introduction to Genetic Algorithms. Springer Science & Business Media, 2007.
- [Sob'99] Sobieczky H., Parametric airfoils and wings, Recent Development of Aerodynamic Design Methodologies, 1999; pp 71-87. Vieweg+ Teubner Verlag
- [Son'00] Soni B. K., Grid generation: Past, present and future. *Applied Numerical Mathematics*, 2000; 32(4); pp 361-369.
- [Spa'92] Spalart P. R. and Allmaras S. R., A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. 30th aerospace sciences meeting and exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Paper 439, 1992.
- [Spe'87] Speziale C. G., Mansour N. N. and Rogallo, R. S., The decay of isotropic turbulence in a rapidly rotating frame. Moin P., Reynolds W. C., and Kim J. (editors) *Proceedings of the 1987 Summer Program of the Center for Turbulence Research*, p. 205. Stanford University Press, 1987.
- [Ste'96] Steelant J., Dick E., Modelling of bypass transition with conditioned Navier–Stokes equations coupled to an intermittency transport equation. *International journal for numerical methods in fluids*, 1996; 23; pp 193–220.
- [Ste'80] Steger J. L, Sorenson R. L, Use of hyperbolic partial differential equations to generate body fitted coordinates. *Proceedings of the NASA Langley workshop on Numerical grid generation techniques*, Langley, VA, October 1980.
- [Suz'03] Suzen Y. B., Huang P. G., Hultgren L. S., Ashpis D. E., Predictions of separated and transitional boundary layers under low-pressure turbine airfoil conditions using an intermittency transport equation, 2003; 125(3); pp 455–464.
- [Tag'00] Taghavi R., Automatic block decomposition using fuzzy logic analysis. *Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable*, pp 187–192, October 2000.
- [Tak'91] Takahashi H. and Shimizu H., A general purpose automatic mesh generation using shape recognition technique. *ASME Computers in Engineering*, 1991; 1; pp 519-526.
- [Ten'72] Tennekes H., Lumley J. L., A first course in turbulence. MIT Press, 1972.
- [Tez'92] Tezduyar T. E., Behr M., A new strategy for finite-element computations involving moving boundaries and interfaces. The deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992; 94(3); pp 339-351.
- [Tho'74] Thompson J. F., Thomas F. C., Mastin C. W., Automatic numerical generation of body fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics*, 1974; 15(3); pp 299–319.
- [Tho'85] Thompson J. F., Warsi Z. U. A. and Mastin C. W., Numerical grid generation, Foundations and applications. Elsevier Science Publishing

- Company, 1985.
- [Tho'98] Thompson J. F., Soni B. K., Weatherill N. P. (editors), Handbook of grid generation. CRC Press, 1998.
- [Tim'04] Timmer W. A., Schaffarczyk A. P., The effect of roughness at high Reynolds numbers on the performance of aerofoil DU 97-W-300MO. *Wind Energy*, 2004;7(4); pp 295–307.
- [Tsa'01] Tsai H. M., Wong A. S. F., Cai J., Zhu Y., Liu F., Unsteady flow calculations with a parallel multiblock moving mesh algorithm. *AIAA Journal*, 2001; 39(6); pp 1021-1029.
- [Vei'17] Veilleux J. C., Dumas G., Numerical optimization of a fully-passive flapping-airfoil turbine. *Journal of Fluids and Structures*, 2017; 70; pp 102–130.
- [Vill'11] Villalpando F., Reggio M. and Ilinca A., Assessment of turbulence models for flow simulation around a wind turbine airfoil. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2011; 6, Article ID 714146, 8 pages.
- [Wal'04] Walters D. K. and Leylek J. H., A new model for boundary layer transition using a single-point RANS approach. *Journal of Turbomachinery*, 2004; 126(1); pp 193–202.
- [Wal'08] Walters D. K. and Cokljat D., A three-equation eddy-viscosity model for Reynolds-Averaged Navier–Stokes simulations of transitional flow,” *Journal of Fluids Engineering*, 2008; 130(12); pp. 121401-01–121401-14 (14 pages).
- [Wall'00] Wallin S. and Johansson A. V., An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000; 403; pp 89-132.
- [Wan'03] Wang J. F, Wu Y. Z., Hierarchical evolutionary algorithms and its application in transonic airfoil optimization in aerodynamics. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2003; 16(1); pp 1-6.
- [Wan'06] Wang Y., Murgie S., Hybrid Mesh Generation for Viscous Flow Simulation. *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*, 2006; pp 109-126, Springer Berlin Heidelberg.
- [Wea'85] Weatherill N. P., Forsey C. R., Boerstoe J. W., Grid generation and flow calculations for aircraft geometries. *Journal of Aircraft* 1985; 22(10); pp 855–60.
- [Wea'90] Weatherill N. P., The integrity of geometrical boundaries in the two-dimensional Delaunay triangulation. *Communications in applied numerical methods*, 1990; 6(2); pp 101-109.
- [Wil'93] Wilcox D. C., *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries Inc; 1993.
- [Wil'94] Wilcox D. A., Simulation of Transition with a Two-Equation Turbulence Model. *AIAA Journal*, 1994; 32(2); pp. 247-255.
- [Yak'92] Yakhot V., Orszag S. A., Thangam S., Gatski, T. B., and Speziale, C. G., Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*; 4(7); pp 1510-1520.
- [Yan'05] Yang X. D., Ma H. Y., Huang Y. N., Prediction of homogeneous shear flow and a backward-facing step flow with some linear and non-linear  $k-\epsilon$  turbulence models, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 2005; 10(3); pp 315-328.
- [Yos'84] Yoshizawa A., Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation. *The Physics of fluids*, 1984; 27(6); pp 1377-1387.

- [Zak'05] Zaki T. and Durbin P. A., Mode interaction and the bypass route to transition. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005; 531; pp 85-111.
- [Zhu'07] Zhu B., Lei J., Cao S., Numerical simulation of vortex shedding and lock-in characteristics for a thin cambered blade. *Journal of Fluids Engineering*, 2007; 129(10); pp 1297-1305.
- [Zym'10] Zymaris A., Papadimitriou D., Giannakoglou K., Othmer C., Adjoint wall functions: a new concept for use in aerodynamic shape optimization. *Journal of Computational Physics*, 2010; 229(13); pp 5228–5245.