Analisi Konplexua

Javier Duoandikoetxea
eta
Judith Rivas

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

emman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

Duoandikoetxea, Javier

Analisi konplexua [Recurso electrónico] / Javier Duoandikoetxea eta Judith Rivas. – Datos. – Bilbao : Servicio Editorial. Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, [2017]. – 1 recurso en línea : PDF (161 p.)
Modo de acceso: World Wide Web.
ISBN: 978-84-9082-631-7

1. Análisis matemático. 2. Funciones de variables complejas. I. Rivas Ulloa, Judith, coaut.

(0.034)517.53

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiaren bitartez.

ISBN: 978-84-9082-631-7

Aurkibidea

Sarrera

Analisi konplexua aldagai konplexuko funtzioen azterketa da. Funtzio errealen kalkulu diferentziala eta integrala funtzio konplexuetarako egokitzea da analisi konplexuaren helburua.

Zenbaki konplexuak XVI. mendean agertu ziren matematikan. Hurrengo mendean, kalkulu infinitesimala asmatu zuten eta horrek matematikaren atal berri bat sortu zuen, analisi matematikoa. Analisian, funtzioa da objektu matematiko nagusia. Arlo horren garapenak modu naturalean ekarri zuen oinarrizko zenbait funtziotan aldagaiaren balio konplexuak hartzea. XVIII. mendean L. Euler (1707-1783) matematikari suitzarrak urrats aipagarriak egin zituen aldagai konplexuko zenbait funtzio berezi landuz. Hala ere, funtzio konplexuen azterketa teorikoa ez zen XIX. mendera arte heldu. A. L. Cauchy (1789-1857) matematikari frantsesak ekin zion bide horri eta berari zor dizkiogu deribazio eta integrazio konplexuari loturiko oinarrizko teoremak. Geroago, B. Riemann (1826-1866) eta K. Weierstrass (1815-1897) matematikari alemaniarren funtsezko lanek Cauchyren teoria osatu zuten. Horrela, XIX. mendearen amaierarako, analisi konplexua analisi matematikoaren berezko atal modura geratu zen.

Testu honen lehen gaian, zenbaki konplexuen oinarrizko definizioak eta propietateak agertzen dira. Bigarren gaian hasten da funtzio konplexuen azterketa. Jarraitutasuna eta deribagarritasuna kontuan hartuta, lehena planoko funtzio errealen bezalakoa dela ikusten da, baina bigarrenak betebehar handiagoa eskatzen die funtzio konplexuei. Horrela, funtzio deribagarriek (holomorfoak edo analitikoak deitzen dira hemen) izaera berezia izango dute. Hirugarren gaian oinarrizko funtzioen definizioa ematen da, aldagaiaren balio konplexuetarako. Zeregin berezia izango du funtzio esponentzialak, hortik abiatuko baitira logaritmoen eta funtzio trigonometrikoen definizioak. Laugarren gaian integrazio konplexua agertzen da. Funtzio konplexuak kurben gainean integratzen dira, planoko bektore-eremuak bezala. Kurben gaineko integral horiek funtzio holomorfoen zenbait propietate berezi erakutsiko dituzte. Bosgarren gaiak berretura-serieak aztertzen ditu. Hor erakusten denez, funtzio holomorfoak eta berretura-serieak estuki lotuta daude. Seigarren gaiak hondarren kontzeptua —funtzio errealetan baliokiderik ez duen kontzeptua— aurkezten du eta hondarren zenbait erabilera. Horien artean dago, besteak beste, integral erreal inpropio batzuen kalkulua. Azken gaiak ikuspegi geometrikoagoa du eta funtzio konplexuak planoko transformazio modura azterten ditu. Gainera, bi eranskin ipini ditugu. Lehenengoak azaltzen du zenbaki konplexuak nola sortu ziren eta bigarrenak euskaraz, gaztelaniaz eta ingelesez ematen ditu termino garrantzitsuenak.

Gaien aukera eta garapena Euskal Herriko Unibertsitateko Matematikako graduko *Analisi konplexua* eta Fisikako eta Ingeniaritza Elektronikoko graduetako *Analisi bektoriala eta konplexua* irakasgaien programari lotuta dago. Horregatik, analisi konplexuko oinarrizko gaiak baino ez dira agertzen. Hortik aurrera ere teoria oparoa du analisi konplexuak eta irakurle interesatuak bibliografiako liburuetan aurkituko du zer gehiago ikasi.

Leioa, 2016ko iraila

Javier Duoandikoetxea eta Judith Rivas

1. Gaia

Zenbaki konplexuak. Plano konplexua

1.1 Zenbaki konplexuak. Forma binomikoa

Definizioa. *Zenbaki konplexuak* zenbaki errealen bikote ordenatuak dira. Zenbaki konplexuen multzoa adierazteko, $\mathbb{C}$ ikurra erabili ohi da,

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \;:\; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Beraz, multzo modura, $\mathbb{C}$ eta $\mathbb{R}^2$ multzo bera dira. Aldea da zenbaki konplexuen arteko biderketa definituko dugula.

Definizioa. $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ badira,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 =& (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\; y_1 + y_2), \\ z_1 \cdot z_2 =& (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\; x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Eragiketa horien propietate aljebraikoak kontuan hartuta, $\mathbb{C}$ gorputz trukakorra (edo abeldarra) da.

Zenbaki errealak konplexuen azpimultzotzat har daitezke. Horretarako, $(a, 0)$ bikotea a zenbaki errealarekin identifikatuko dugu, $(a, 0) \equiv a$. Bereziki, $(1, 0) \equiv 1$. Identifikazioa justifikatuta dago, eragiketekin bateragarria delako:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{eta} \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Goiko eragiketen ondorioz, $(x, y) \in \mathbb{C}$ bada,

$$(x, y) = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot (0, 1).$$

Gainera, $(0, 1) = i$ deitzen badugu, $z = (x, y)$ zenbaki konplexuaren *forma binomikoa* lortzen dugu,

$$z = x + yi.$$

Definizioa. $z = x+yi$ zenbaki konplexuaren *parte erreala* x da, eta *parte irudikaria* y da. $x = \operatorname{Re} z$ eta $y = \operatorname{Im} z$ notazioa erabiliko dugu. i *unitate irudikaria* dela diogu.

Biderketaren definiziotik,

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = -1.$$

Propietate hori izan behar dugu gogoan zenbaki konplexuen biderketa definitzeko. Hona hemen eragiketa aljebraikoen itxura, forma binomikoa erabiliz: $z_1 = x_1 + y_1 i$ eta $z_2 = x_2 + y_2 i$ badira,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 =& (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \\ z_1 \cdot z_2 =& (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 \\ =& x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i. \end{aligned}$$

Adibidea. Izan bitez $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 7 + 2i$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 =& (3 - i) + (7 + 2i) = 10 + i, \\ z_1 \cdot z_2 =& (3 - i) \cdot (7 + 2i) = 21 + 6i - 7i - 2i^2 = 21 - i + 2 = 23 - i. \end{aligned}$$

Definizioa. Izan bedi $z = x + yi \in \mathbb{C}$. z-ren *konjugatua* honela definitzen da:

$$\overline{z} = x - yi.$$

Adibideak. $\overline{3 - i} = 3 + i$, $\overline{2 + 5i} = 2 - 5i$, $\overline{-2} = -2$, $\overline{-3i} = 3i$.

1.1 Proposizioa (Konjugatuaren propietateak)**.** *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$.*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$.

(ii) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *eta* $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

(iii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *eta* $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

Froga. Izan bitez $z = x + iy$, $w = u + iv$. Orduan,

(i) $\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi$, beraz, $\overline{\overline{z}} = \overline{x - yi} = x - (-y)i = x + iy = z$.

(ii) $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \dfrac{x + yi + x - yi}{2} = x$ eta $\dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \dfrac{x + yi - (x - yi)}{2i} = y$.

(iii) Alde batetik, $\overline{z + w} = \overline{x + u + (y + v)i} = x + u - (y + v)i$, eta, bestetik, $\overline{z} + \overline{w} = x - yi + u - vi = (x + u) - (y + v)i$.

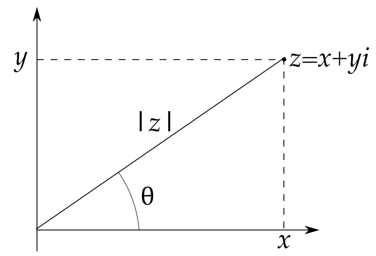
Gainera, $\overline{zw} = \overline{xu - yv + (xv + yu)i} = xu - yv - (xv + yu)i$ da eta konjugatuen biderkadura $\overline{z}\,\overline{w} = (x - yi)(u - vi) = xu - yv + (-xv - yu)i$ da. □

1.2 Plano konplexua. Forma polarra

Esan dugun bezala, multzo modura, $\mathbb{C}$ eta $\mathbb{R}^2$ multzo bera dira; beraz, zenbaki konplexuak planoko puntuekin identifikatzen dira. Planoko puntuen koordenatu polarrak ere erabil daitezke zenbaki konplexuak adierazteko.

Definizioa. (i) Izan bedi $z \in \mathbb{C}$. Jatorritik z punturainoko distantzia z-ren *modulua* da eta $|z|$ notazioaren bidez adierazten da.

(ii) Izan bedi $z \in \mathbb{C}-\{0\}$. Jatorrian hasi eta z puntutik pasatzen den zuzenerdiak ardatz erreal positiboarekin osatzen duen angelua da z-ren *argumentua*. Angelua ardatzetik hasten da neurtzen, erlojuaren orratzen aurkako noranzkoan.



Argumentua ez da bakarra. Baldin θ z-ren argumentua bada, $\theta + 2k\pi$ ere z-ren argumentua da, $k \in \mathbb{Z}$ guztietarako.

Argumentu guztietatik $(-\pi, \pi]$ tartean dagoenari *argumentu nagusia* deritzo. $\operatorname{Arg} z$ notazioaren bidez adieraziko dugu[1]. Aldiz, $\arg z$ notazioak z-ren argumentu guztiek osatzen duten multzoa adieraziko du, hots,

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Bestalde, z-ren argumentu bat adierazteko ere $\arg z$ erabil daiteke, zehaztu gabe zein argumentu hartzen den.

Adibideak.

- $|1| = 1$; $\operatorname{Arg} 1 = 0$, $\arg 1 = \{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- $|i| = 1$; $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$, $\arg i = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- $|-1-i| = \sqrt{2}$; $\operatorname{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$, $\arg(-1-i) = \{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Zenbakiaren forma binomikoa $z = x + yi$ baldin bada, orduan,

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan(\arg z) = \frac{y}{x}.$$

[1]Autore batzuek notazioa alderantziz erabiltzen dute: $\arg z$ da argumentu nagusia eta $\operatorname{Arg} z$ erabiltzen dute argumentu guztietarako edo zehaztu gabeko bat adierazteko.

Bestalde, $|z| = r$ eta $\theta \in \arg z$ baldin badira,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Oharra. Arku tangente funtzio errealaren irudia $(-\pi/2, \pi/2)$ tartean dago, horregatik $\arctan y/x$ bakarrik izango da z-ren argumentua puntua lehen edo laugarren koadrantean badago.

Definizioa. Izan bedi $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Baldin $|z| = r$ eta $\theta \in \arg z$ badira, koordenatu kartesiar eta polarren arteko erlazioa kontuan izanda, z-ren *forma polarra* eman daiteke:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

1.2 Proposizioa (Moduluaren propietateak)**.** *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$.*

(i) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, *beraz* $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $\forall z \neq 0$.

(ii) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

(iii) $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $|\operatorname{Im} z| \le |z|$, *eta* $|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

(iv) $|zw| = |z|\,|w|$.

(v) $|z + w| \le |z| + |w|$.

(vi) $||z| - |w|| \le |z - w|$.

Froga. Izan bitez $z = x + yi$ eta $w = u + vi$.

(i) $z\,\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

(ii) Berehala ikusten da.

(iii) Lehen biak bistakoak dira. Hirugarrenerako,
$x^2 + y^2 \le x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$; beraz, $|z| \le |x| + |y|$.

(iv) (i) atala erabiliz, $|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2|w|^2$. Hots, $|zw| = |z||w|$.

(v) Berriro (i) atala erabiliz,
$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$,
non azken berdintzan konjugatuaren bigarren propietatea erabili dugun. Orain, proposizio honen (iii), (iv) eta (ii) erabiliz, $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \le |\operatorname{Re}(z\overline{w})| \le |z\overline{w}| = |z||w|$, beraz,

$$|z + w|^2 \le |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

(vi) Aurreko atala erabiliz, $|z| = |(z - w) + w| \le |z - w| + |w|$. Era berean, z eta w trukatuz, $|w| \le |w - z| + |z|$. Biak kontuan hartuta, $-|z - w| \le |z| - |w| \le |z - w|$ eta ondorioz, $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$. □

Oharra. Proposizioaren lehen atala erabiltzen da zatidura baten forma binomikoa lortzeko:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{\operatorname{Re}(z\overline{w})}{|w|^2} + \frac{\operatorname{Im}(z\overline{w})}{|w|^2}\, i.$$

Adibidea. $\dfrac{2+i}{3-i} = \dfrac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{5+5i}{10} = \dfrac{1+i}{2}.$

1.3 Proposizioa (Argumentuaren propietateak)**.** *Izan bitez* $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$.

(i) $\operatorname{Arg} z = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$, $\operatorname{Arg} z = \pi \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}^-$.

(ii) $\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$, $z \notin \mathbb{R}^-$ *bada.*

(iii) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$, *baina* $\operatorname{Arg}(zw) \neq \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ *izan daiteke.*

(iv) $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg} z$, $z \notin \mathbb{R}^-$ *bada.*

(Hirugarren propietatean $\arg z + \arg w = \{\theta + \varphi : \theta \in \arg z$ *eta* $\varphi \in \arg w\}$ *da.)*

Froga. (i) Argumentuaren definiziotik berehala ateratzen da.

(ii) Funtzio trigonometrikoen bakoititasuna/bikoititasuna erabiliz,

$$\overline{z} = |z|\cos\theta - i|z|\sin\theta = |z|\big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big),$$

eta $\theta \in (-\pi, \pi)$ bada, $-\theta \in (-\pi, \pi)$, beraz $-\theta = -\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} \overline{z}$.

(iii) Baldin $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ eta $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ badira,

$$\begin{aligned} zw =& |z|(\cos\theta + i\sin\theta)|w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ =& |z||w|\big((\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)\big) \\ =& |zw|\big(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\big). \end{aligned}$$

Beraz, $\theta \in \arg z$ eta $\varphi \in \arg w$ badira, $\theta + \varphi \in \arg(zw)$.

$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ izan dadin, $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi]$ beharko genuke eta hori ez da beti betetzen.

(iv) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ denez, $= \operatorname{Arg} z^{-1} = \operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\operatorname{Arg} z$ da. □

Definizioa (**Eulerren formula**)**.** Defini dezagun $t \in \mathbb{R}$ guztietarako,

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

Argumentuaren propietateen (iii) atalak erakusten du funtzio horrek esponentzialaren oinarrizko propietatea betetzen duela: $e^{it_1}e^{it_2} = e^{i(t_1+t_2)}$.

Eulerren formulan $t = \pi$ hartuz, $e^{\pi i} = -1$ edo $e^{\pi i} + 1 = 0$ lortzen da. Azken formula horretan, matematikako zenbakirik ospetsuenak (0, 1, e, π eta i), oinarrizko eragiketa aritmetikoa (batuketa) eta oinarrizko erlazioa (berdintza) agertzen dira.

Definizioa. $|z| = r$ eta $\theta \in \arg z$ badira, z-ren *forma esponentziala* honako hau da:

$$z = re^{i\theta}.$$

Eulerren formulako funtzioak esponentzialaren oinarrizko propietatea betetzen duenez, forma esponentziala oso egokia da biderkadurak, alderantzizkoak eta berreturak kalkulatzeko. Izan bitez $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Orduan,

(i) $z \cdot w = re^{i\theta}\rho e^{i\varphi} = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$,

(ii) $z^{-1} = \dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$,

(iii) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} = \dfrac{r}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)}$,

(iv) $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

Adibidea. $(1+i)^3$ kalkulatzeko forma binomikoa zein esponentziala erabil daitezke:

$$\begin{aligned}(1+i)^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3 = -2+2i,\\ (1+i)^3 &= \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^3 = 2^{3/2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2+2i.\end{aligned}$$

Baina berretzailea handiagoa bada, forma binomikoa ez da aproposa. Adibidez,

$$(1-i)^{18} = \binom{18}{0}1^{18}(-i)^0 + \binom{18}{1}1^{17}(-i)^1 + \binom{18}{2}1^{16}(-i)^2 + \cdots + \binom{18}{18}1^0(-i)^{18}$$

eta kalkulua oso luzea da. Aldiz, forma esponentziala erabiliz,

$$(1-i)^{18} = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{18} = (\sqrt{2})^{18}e^{-18\frac{\pi}{4}i} = 2^9 e^{-\frac{9\pi}{2}i} = -512i.$$

De Moivreren formula. $z = e^{i\theta}$ hartuz,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Adibidea. $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ da; beraz, parte errealak eta parte irudikariak berdinduz,

$$\begin{aligned}\cos^2\theta - \sin^2\theta &= \cos(2\theta),\\ 2\cos\theta\sin\theta &= \sin(2\theta).\end{aligned}$$

1.3 Zenbaki konplexu baten n-garren erroak

1.4 Proposizioa. *Izan bitez $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ eta $n \in \mathbb{N}$. Orduan, z-k n n-garren erro desberdin ditu, hau da, existitzen dira n zenbaki desberdin $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$, zeinetarako $w_i^n = z$ den, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Froga. Izan bitez $z = re^{i\theta}$, $\theta = \operatorname{Arg} z$ izanik, eta $w = \rho e^{i\varphi}$, non $w^n = z$ den. Orduan, $re^{i\theta} = \rho^n e^{in\varphi}$ izan dadin,

$$r = \rho^n \quad \text{eta} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

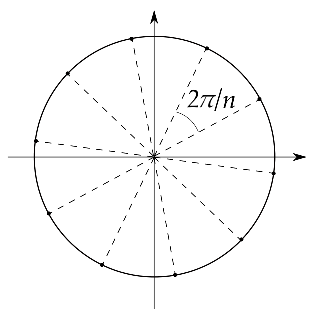
$k \in \mathbb{Z}$ baterako. Hortik, $\rho = \sqrt[n]{r}$ eta k-ren arabera, zenbait aukera ditugu φ-rako; k-ri balioak emanez,

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta}{n} i} \\
w_1 &= \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta + 2\pi}{n} i} \\
&\dots \\
w_{n-1} &= \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} i} \\
w_n &= \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta + 2n\pi}{n} i} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{\theta}{n} + 2\pi) i} = w_0,
\end{aligned}$$

eta, hortik aurrera, errepikatu egiten dira lortutako balioak. Beraz, $w_0, \dots, w_{n-1}$ dira z-ren n-garren erro desberdinak. Hots,

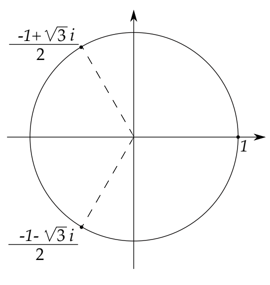
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} i}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \qquad \square$$

Frogan ikusi dugun bezala, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ zenbaki konplexuaren erro guztien modulua berdina da, $\sqrt[n]{|z|}$, eta ondorioz z-ren n-garren erroak jatorrian zentroa duen eta $\sqrt[n]{|z|}$ erradioa duen zirkunferentzian daude. Gainera, ondoz-ondoko erroen arteko angelua $\dfrac{2\pi}{n}$ anplitudekoa denez, erroak n aldeko poligono erregular baten erpinak dira.



Adibidea. $z = 1$ zenbakiaren erro kubikoak.

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{1} e^{\frac{0}{3} i} = e^{0i} = 1, \\
w_2 &= \sqrt{1} e^{\frac{2\pi}{3} i} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \\
w_3 &= \sqrt{1} e^{\frac{4\pi}{3} i} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.
\end{aligned}$$



1.4 Zenbaki konplexuen ordena

$\mathbb{R}$-ko ordena, $<$ edo $>$, osoa da eta eragiketekin bateragarria, hau da, $a, b, c \in \mathbb{R}$ badira,

(i) $a < b$ edo $b < a$ edo $a = b$, bat betetzen da eta bat bakarrik;

(ii) $a < b$ bada, $a + c < b + c$;

(iii) $a < b$ bada eta $0 < c$, orduan $ac < bc$.

Ezinezkoa da hiru propietate horiek beteko dituen ordena bat izatea $\mathbb{C}$-n. Ordena hori balego, $0 < i$ edo $0 < -i$ izango genuke. Horietako edozeinek, (iii) erabiliz, $0 < -1$ ematen du. Hortik, berriro (iii) erabiliz, $0 < (-1)^2 = 1$. Azken biak batuz eta (ii) erabiliz, $0 < 0$. Baina hori ezin da gertatu, (i)-en arabera.

1.5 Plano konplexuko distantzia

Definizioa. Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$. z eta w zenbakien arteko *distantzia* honela definitzen da:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

1.5 Proposizioa (Distantziaren propietateak)**.** *Izan bitez $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.*

(i) $d(z_1, z_2) \geq 0$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *guztietarako, eta* $d(z_1, z_2) = 0$ *baldin eta soilik baldin* $z_1 = z_2$.

(ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$.

(iii) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$.

Froga. Lehen bi atalak zuzenean ondorioztatzen dira moduluaren propietateetatik. (iii) moduluaren desberdintza triangeluarraren ondorioa da. □

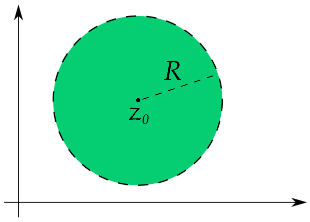
Definizioa. Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$ eta $R, R_1, R_2 > 0$.

(i) $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ z_0 *zentroko eta* R *erradioko bola (disko) irekia* da.

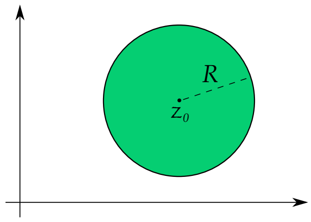
(ii) $\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ z_0 *zentroko eta* R *erradioko bola (disko) itxia* da.

(iii) $A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ z_0 *zentroko eta* R_1 *eta* R_2 *erradioetako eraztuna* da.

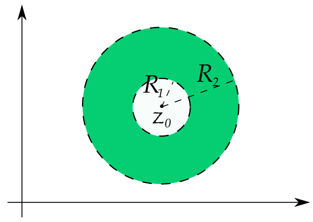
(iv) z_0 puntuan zentraturiko edozein bola ireki z_0*-ren ingurunea* da.



$B_R(z_0)$



$\overline{B_R(z_0)}$



$A(z_0, R_1, R_2)$

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(i) Ω *irekia* dela diogu baldin eta, Ω-ko edozein puntutarako, han zentraturiko bola ireki bat existitzen bada, Ω-ren parte dena.

(ii) Ω *itxia* dela diogu baldin eta $\mathbb{C} - \Omega$ irekia bada.

(iii) Ω-ren *muga* ($\partial\Omega$ ikurraren bidez adieraziko dugu) multzo hau da:

$$\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \forall R > 0,\ B_R(z) \cap \Omega \neq \emptyset \ \text{ eta } \ B_R(z) \cap (\mathbb{C} - \Omega) \neq \emptyset\}.$$

(iv) $K \subset \mathbb{C}$ *trinkoa* da itxia eta bornatua bada.

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(i) Ω *konexua* dela diogu ez badira existitzen $C, D \subset \mathbb{C}$, C eta D irekiak eta disjuntuak, zeinetarako

$$\Omega \cap C \neq \emptyset, \quad \Omega \cap D \neq \emptyset, \quad \Omega \subset C \cup D.$$

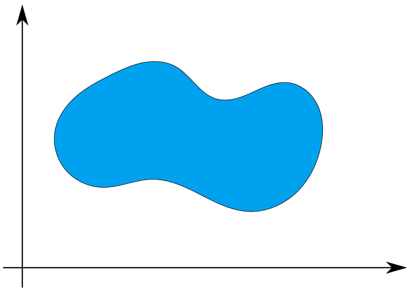
(ii) Ω *arkuz konexua* da baldin eta, Ω-ko edozein bi puntu emanda, existitzen bada biak batzen dituen lerro poligonal bat Ω-ren parte dena. ($\mathbb{C}$-ko n puntu ordenatu hartuta ($n \geq 2$), bakoitzetik hurrengora doan zuzenkia eginez lortzen den planoko kurbari deitzen diogu lerro poligonala.)

(iii) Ω *eremua* dela diogu baldin irekia eta konexua bada.

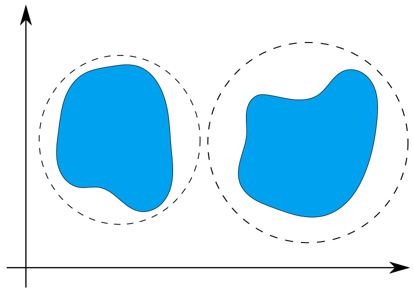
1.6 Proposizioa. *Izan bedi* $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(i) Ω *arkuz konexua bada, konexua da.*

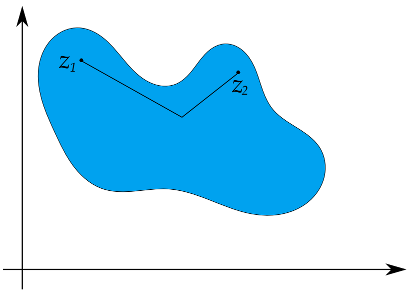
(ii) Ω *irekia izanez gero, arkuz konexua da baldin eta soilik baldin konexua bada.*



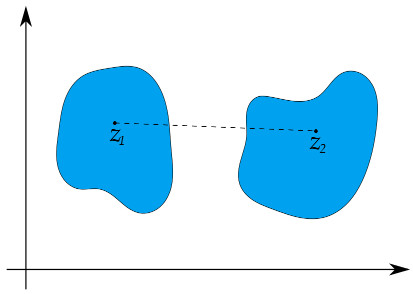
konexua



ez-konexua



arkuz konexua



arkuz ez-konexua

1.6 Proiekzio estereografikoa

Izan bedi S $(0,0,1/2)$ zentroko eta $1/2$ erradioko esfera $\mathbb{R}^3$-n. $\mathbb{C}$-ren eta $S-\{(0,0,1)\}$ multzoaren arteko bijekzio bat definituko dugu. Horretarako, $(\xi,\eta,\zeta)\in S-\{(0,0,1)\}$ bada, har dezagun $(0,0,1)$ eta (ξ,η,ζ) puntuetatik pasatzen den zuzena. Zuzen horrek $(x,y,0)$ puntuan ebakitzen badu OXY planoa, (ξ,η,ζ) da $z=x+yi$ zenbaki konplexuaren proiekzio estereografikoa esferan.

Ikus dezagun zein den (ξ,η,ζ) eta $z=x+yi$-ren arteko erlazioa. Horretarako, $(0,0,1)$ eta (ξ,η,ζ) puntuetatik pasatzen den zuzenaren ekuazio parametrikoa idatziko dugu:

$$\alpha(t)=(0,0,1)+t((\xi,\eta,\zeta)-(0,0,1))=(t\xi,t\eta,1+t(\zeta-1)).$$

Zuzen honek OXY planoa ebakiko du $1+t(\zeta-1)=0$ bada, hau da, $t=1/(1-\zeta)$ bada. Ondorioz, $z=x+yi$ zenbakiaren proiekzio estereografikoa (ξ,η,ζ) izango da baldin

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}\quad \text{eta}\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}$$

badira.

Alderantzizko erlazioa aurkitzeko, ξ, η eta ζ koordenatuek baldintza hauek bete beharko dituzte:

$$\xi = x(1-\zeta), \quad \eta = y(1-\zeta) \quad \text{eta} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta,$$

non azkena esferaren ekuazioa den. Hortik,

$$(x^2 + y^2)(1-\zeta)^2 = \zeta(1-\zeta).$$

Kontuan izanda $\zeta \neq 1$ dela, ζ-ren balioa lortzen dugu eta gero, ξ eta η.

Beraz, $z = x + yi$ zenbaki konplexuaren proiekzio estereografikoa honako hau da:

$$(\xi, \eta, \zeta) = \Big(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \Big).$$

Honela, plano konplexuko puntu guztiak identifikatzen dira esferaren puntuekin eta esferaren puntu guztiak, $(0,0,1)$ izan ezik, planoko puntuekin.

1.7 Plano konplexu hedatua

Plano konplexuari puntu bat gehituz, plano konplexu hedatua lortzen da. Puntu hori "infinitu"deitzen da eta ohiko ∞ ikurrarekin adieraziko dugu. Multzo modura, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dugu.

Proiekzio estereografikoari erreparatuz, orain $\overline{\mathbb{C}}$-ren eta S-ren arteko bijekzioa izango dugu, $(0,0,1)$ puntua ∞-ren proiekzio estereografikotzat hartuta.

Ez da soilik multzo baten definizioa. Sartu dugun ∞ puntu horren inguruneak ere defini daitezke. Esferan $(0,0,1)$ puntuan zentraturiko zirkulu bat egiten badugu, proiekzio estereografikoak zirkulu hori planoko disko baten kanpoaldearekin identifikatzen du. Horrela, ∞-ren inguruneak, $|z| > R$ erako multzoak dira. Limiteak definitzen ditugunean, kontzeptu horrek balio digu limitea ∞ dela esateko edo limiteak ∞-n kalkulatzeko.

1.8 Zenbaki konplexuen segidak eta serieak

Zenbaki konplexuen segida $\mathbb{N}$-tik $\mathbb{C}$-ra doan aplikazioa da. Ohiko notazioan $n \in \mathbb{N}$ aldagaia azpiindize modura idazten da: $n \to z_n$.

Definizioa. Izan bedi $\{z_n\}$ zenbaki konplexuen segida. $\{z_n\}$ *segida konbergentea* da eta haren *limitea* $l \in \mathbb{C}$ da, hau betetzen bada:

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0, \quad |z_n - l| < \epsilon.$$

Hala gertatzen bada, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$ idatziko dugu.

Definizioak dio edozein $\epsilon > 0$ emanda, segidaren leku batetik aurrera $B_\epsilon(l)$ disko irekian daudela gai guztiak. Alegia, l-ren ingurune bat emanda, leku batetik aurrera, ingurune horretan daude segidaren gaiak.

1.7 Proposizioa. *Izan bedi $\{z_n\}$ zenbaki konplexuen segida.*

(i) $\lim_{n\to\infty} z_n = l$ *da baldin eta soilik baldin* $\lim_{n\to\infty} |z_n - l| = 0$ *bada.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} z_n = l$ *da baldin eta soilik baldin*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} l \quad \textit{eta} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} l$$

betetzen badira.

Lehenengoa berehala ikusten da definizioan. Bigarrenerako, kontuan hartu

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} l|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} l| \leq |z_n - l| \leq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} l| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} l|$$

desberdintzak betetzen direla.

Definizioa. Izan bedi $\{z_n\}$ zenbaki konplexuen segida. $\{z_n\}$ segidaren limitea ∞ da hau betetzen bada:

$$\forall M > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0, \quad |z_n| > M.$$

Hala gertatzen bada, $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ idatziko dugu.

Segida konbergenteen kasuan bezala, inguruneen bidez eman daiteke definizio hori, ∞-ren inguruneak $|z| > M$ erako multzoak direla kontuan hartuta. Horrela, $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ da baldin eta, ∞-ren edozein ingurune emanda, segidaren gai guztiak leku batetik aurrera ingurune horretan badaude.

1.8 Proposizioa. *Izan bedi $\{z_n\}$ zenbaki konplexuen segida.*

(i) $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ *da baldin eta soilik baldin* $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ *bada*

(ii) $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ *da baldin eta soilik baldin* $\lim_{n\to\infty} |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n| = +\infty$ *bada.*

Limite finituaren kasuan ez bezala, ezin daiteke esan $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \infty$ eta $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \infty$ direnik.

Zenbaki konplexuen serie bat, zenbaki konplexuen segida baten gaien batura da. Baina, gai-kopurua infinitua denez, esanahia eman behar zaio batura horri. Baldin $\{z_n\}$ zenbaki konplexuen segida bada, dagokion seriea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ idazten da. Batura definitzeko, seriearen batura partzialak definitzen dira lehenengo:

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n.$$

Hemengo batuketa ondo definituta dago, gai-kopurua finitua delako.

Definizioa. Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ zenbaki konplexuen seriea. Serie hori *konbergentea* da, batura partzialen $\{s_n\}$ segida konbergentea bada. Bestela, seriea *dibergentea* da. Seriea konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} s_n$ balioari seriearen batura deitzen zaio.

1.9 Proposizioa. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *seriea konbergentea da baldin eta soilik baldin* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ *eta* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ *konbergenteak badira.*

Seriearen batura partzialen segidari gorago segidetarako eman dugun 1.7(ii) proposizioa aplikatuz, berehala ateratzen da.

Serie errealen teoriatik ezagutzen ditugun propietateak erabiliz, honako hau ondorioztatzen da.

1.10 Proposizioa. $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *konbergentea bada,* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *ere konbergentea da.*

Definizioa. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ seriea *absolutuki konbergentea* da, $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konbergentea bada.

Definizio hori erabiliz, proposizioa beste modu honetan eman daiteke: serie bat absolutuki konbergentea bada, konbergentea da. Baina badaude absolutuki konbergenteak ez diren serie konbergenteak. Konbergentzia absolutua aztertzea praktikoa da serieen estudioan, gai positiboko serie errealak aztertzeko zenbait irizpide erabil daitezkeelako.

1.9 Ariketak

1. Idatz itzazu zenbaki hauek forma binomikoan:

   (i) $(2+i)+i(7-2i)$ *Em.:* $4+8i$.

   (ii) $(2+i)(6+3i)$ *Em.:* $9+12i$.

   (iii) $(-1-i)(5+i)$ *Em.:* $-4-6i$.

   (iv) $\dfrac{3+i}{7-i}$ *Em.:* $\dfrac{2+i}{5}$.

   (v) $\dfrac{-3+2i}{5+i}$ *Em.:* $\dfrac{-1+i}{2}$.

   (vi) $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$ *Em.:* $2+2\sqrt{3}i$.

   (vii) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}$ *Em.:* $\dfrac{1-3i}{2}$.

   (viii) $-2e^{-i\pi/3}$ *Em.:* $-1+i\sqrt{3}$.

   (ix) i^5+i^{16} *Em.:* $1+i$.

   (x) $|3+4i|$ *Em.:* 5.

2. $z=x+iy$ izanik, aurki itzazu zenbaki hauen parte erreala eta parte irudikaria.

   (i) $w=z^4$ *Em.:* $\operatorname{Re} w = x^4-6x^2y^2+y^4$, $\operatorname{Im} w = 4x^3y-4xy^3$.

   (ii) $w=\dfrac{1}{z}$ *Em.:* $\operatorname{Re} w = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im} w = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

   (iii) $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ *Em.:* $\operatorname{Re} w = \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2x+1}$, $\operatorname{Im} w = \dfrac{2y}{x^2+y^2+2x+1}$.

   (iv) $w=\dfrac{1}{z^2}$ *Em.:* $\operatorname{Re} w = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\operatorname{Im} w = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

3. Idatz itzazu zenbaki hauek forma esponentzialean:

   (i) $-2+2\sqrt{3}i$ *Em.:* $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

   (ii) i^{503} *Em.:* $e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

   (iii) $-2e^{-i\pi/3}$ *Em.:* $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

   (iv) $\dfrac{1+i}{1-i}$ *Em.:* $e^{\frac{\pi}{2}i}$.

   (v) $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *Em.:* $e^{\alpha i}$.

4. Kalkula itzazu zenbaki konplexu hauen modulua eta argumentu nagusia:

   (i) $z = \cos\alpha - i\sin\alpha,\ \ \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ izanik *Em.:* $|z| = 1$, $\operatorname{Arg} z = 2\pi - \alpha$.

   (ii) $z = e^{it} + 1$, $t \in (-\pi, \pi)$ izanik *Em.:* $|z| = 2\cos\dfrac{t}{2}$, $\operatorname{Arg} z = \dfrac{t}{2}$.

5. $z = re^{i\theta}$ eta $w = Re^{i\varphi}$ baldin badira, egiazta ezazu hau betetzen dela:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}.$$

6. Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$. Froga ezazu berdintza hauek betetzen direla:

   (i) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

   (ii) $|z\overline{w} + 1|^2 + |z-w|^2 = (1+|z|^2)(1+|w|^2)$.

   (iii) $|z\overline{w} - 1|^2 - |z-w|^2 = (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1)$.

7. Kalkula itzazu berretura hauek eta eman ezazu emaitza forma binomikoan eta esponentzialean:

   (i) $(1+i)^{12}$ *Em.:* $-64 = 64e^{\pi i}$.

   (ii) $(1+i\sqrt{3})^{-10}$ *Em.:* $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2048} = 2^{-10}e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

   (iii) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$ *Em.:* $1 = e^{0i}$.

   (iv) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$ *Em.:* $-2^{19}(1+i\sqrt{3}) = 2^{20}e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

8. De Moivreren formula erabiliz, adieraz itzazu $\cos 5\alpha$ $\cos\alpha$-ren funtzio modura eta $\sin 5\alpha$ $\sin\alpha$-ren funtzio modura.

   Em.: $\cos(5\alpha) = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$,
   $\sin(5\alpha) = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$.

9. Kalkula itzazu erro hauek eta eman ezazu emaitza forma binomikoan eta esponentzialean:

   (i) $\sqrt[4]{-1}$ *Em.:* $e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{3\pi}{4}i} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{5\pi}{4}i} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{7\pi}{4}i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

   (ii) $\sqrt{1-i}$ *Em.:* $\sqrt[4]{2}e^{-\frac{\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2}\Big(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Big)$,
   $\sqrt[4]{2}e^{\frac{7\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2}\Big(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Big)$.

   (iii) $\sqrt[3]{i}$ *Em.:* $e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$.

(iv) $\sqrt[4]{-i}$ *Em.:* $e^{-\frac{\pi}{8}i} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $e^{\frac{3\pi}{8}i} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $e^{\frac{7\pi}{8}i} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $e^{\frac{11\pi}{8}i} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

(v) $\sqrt[4]{64}$ *Em.:* $2\sqrt{2}e^{0i} = 2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i} = 2\sqrt{2}i$, $2\sqrt{2}e^{\pi i} = -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}i} = -2\sqrt{2}i$.

(vi) $\sqrt[3]{-1+i}$ *Em.:* $\sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt[6]{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\sqrt[6]{2}e^{\frac{11\pi}{12}i} = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)$, $\sqrt[6]{2}e^{\frac{19\pi}{12}i} = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)$.

(vii) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$ *Em.:* $2e^{-\frac{\pi}{6}i} = \sqrt{3} - i$, $2e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\sqrt{3} + i$.

(viii) $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}}$ *Em.:* $e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $e^{\frac{2\pi}{3}i} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $e^{\frac{5\pi}{3}i} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

10. Froga ezazu koefiziente errealetako bigarren mailako ekuazioen ebazpen-metodoa $az^2+bz+c=0$ ekuazioaren soluzioak topatzeko ere erabil daitekeela, $a, b, c \in \mathbb{C}$ badira.

11. Aurki itzazu ekuazio hauen soluzio konplexu guztiak:

    (i) $z^2 + iz + 2 = 0$ *Em.:* $i, -2i$.

    (ii) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ *Em.:* $\pm\left(\frac{\sqrt{3}\pm i}{\sqrt{2}}\right)$.

    (iii) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ *Em.:* $\frac{1\pm i}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{-(1-\sqrt{3})\pm(1+\sqrt{3})i}{2\sqrt[3]{2}}$, $\frac{-(1+\sqrt{3})\pm(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt[3]{2}}$.

    (iv) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ *Em.:* $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, 1+i\sqrt{3}, -2, 1-i\sqrt{3}$.

    (v) $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$ *Em.:* $\frac{1-\sqrt[3]{4}+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$, $-1-\sqrt[3]{2}$, $\frac{1-\sqrt[3]{4}-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$.

    (vi) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$ *Em.:* $z = 3,\ 1+2i,\ -1, 1-2i$.

12. Idatz itzazu forma binomikoan:

    (i) $(2-i) + 2i(4+i)$ (ii) $(1-5i) - (3+i)$

    (iii) $\dfrac{5i}{2+i}$ (iv) $(3+4i)^{-1}$

    (v) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ (vi) $(1+i\sqrt{3})^3$

13. Kalkula ezazu $\mathrm{Arg}(1+zw)$, $|z| = |w| = 1$ eta $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\mathrm{Re}\, w > 0$ badira.

14. Izan bedi $z \neq 1$ zenbaki konplexua, $|z| = 1$ izanik. Froga ezazu $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = 0$ dela.

15. $a \in \mathbb{R}$ bada, kalkula ezazu a-ren balioa $\dfrac{2+ai}{a+2i}$ zenbakia erreala izan dadin. Kalkula ezazu, halaber, zatidura horren balioa.

16. Kalkula itzazu erro hauek:

(i)	$\sqrt[6]{-8}$	(ii)	$\sqrt[8]{1}$
(iii)	$\sqrt[3]{-2+2i}$	(iv)	$\sqrt{3+4i}$

17. De Moivreren formula erabiliz, idatz itzazu $\cos 4\alpha$ eta $\sin 4\alpha$, $\cos\alpha$-ren eta $\sin\alpha$-ren funtzio modura.

18. Ebatz itzazu honako ekuazio hauek:

(i)	$\lvert z\rvert - z = 1+2i$	(ii)	$(3+4i)^2 - 2\overline{z} = z$
(iii)	$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dfrac{1}{z} = 1+i$	(iv)	$(z+2i)^3 + (z+i)^3 = 0$
(v)	$z^2 = 3-4i$	(vi)	$z^8 + 15iz^4 + 16 = 0$

19. Eman itzazu ekuazio eta inekuazio hauek definitzen dituzten multzoen adierazpide geometrikoa:

(i)	$\lvert z-1\rvert = 2$	(ii)	$-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi,\ \lvert z\rvert > 3$
(iii)	$\lvert z-3\rvert > \lvert z\rvert$	(iv)	$z\overline{z} \le 2$
(v)	$\overline{z} + z = \lvert z\rvert^2$	(vi)	$\operatorname{Im}(z^2) > 0$
(vii)	$\lvert 2z+3\rvert > 5$	(viii)	$z - \overline{z} = i$
(ix)	$\lvert z+1\rvert = \lvert z-1\rvert$	(x)	$\lvert z\rvert + \operatorname{Re} z \le 1$

20. Kalkula itzazu, existitzen badira, zenbaki konplexuen segida hauen limiteak:

$$z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}, \quad w_n = n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

21. Azter ezazu serie hauen izaera:

(i)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n},$	(ii)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{in},$
(iii)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2},$	(iv)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}.$

22. Kalkula ezazu z-ren zein balio konplexutarako den konbergentea serie hau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n.$$

2. Gaia

Aldagai konplexuko funtzioak

2.1 Oinarrizko definizioak eta adibideak

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$. Multzo horretako elementu bakoitza zenbaki konplexu batekin erlazionatzen duen f erregela badugu, f Ω-n definituriko *aldagai konplexuko funtzio konplexua* da:

$$\begin{aligned} f\colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto w = f(z). \end{aligned}$$

Aldagaia zenbaki konplexua denez, forma binomikoan idatz dezakegu, $z = x+yi$. Era berean, $f(z) \in \mathbb{C}$ denez, haren forma binomikoa dugu, $f(z) = u+iv$. Normalean, honela idatziko dugu:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Beraz, f-rekin lotuta, bi aldagaiko bi funtzio erreal ditugu. Hau da, aldagai konplexuko funtzio konplexu bat $\mathbb{R}^2$ planoko multzo batean definituriko bektore-eremu batekin identifika dezakegu:

$$\begin{aligned} (u,v)\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (u(x,y), v(x,y)). \end{aligned}$$

Adibideak.

- $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ bada, $u(x,y) = x^2 - y^2$ eta $v(x,y) = 2xy$.
- $f(z) = |z|$ bada, $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ eta $v(x,y) = 0$.
- $f(z) = \operatorname{Arg} z$ balio errealeko funtzioa da. $\operatorname{Arg} z$ funtzioaren definizio-eremua $\mathbb{C} - \{0\}$ da eta
$$\tan u(x,y) = \frac{y}{x}, \quad v(x,y) = 0.$$

2.2 Limiteak eta jarraitutasuna

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$. $z \in \mathbb{C}$ Ω-ren *metatze-puntua* da baldin

$$\forall\, r > 0, \quad (B_r(z) - \{z\}) \cap \Omega \neq \emptyset,$$

edo beste modu batean esanda, baldin

$$\forall\, r > 0, \quad \exists\, w \in \Omega,\ w \neq z\ :\ |w - z| < r.$$

Hau da, z-tik nahi dugun bezain hurbil (edo z-ren edozein ingurunetan), badago z-ren desberdina den Ω-ko punturen bat.

Definizioa. Izan bedi $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta izan bitez $z_0, l \in \mathbb{C}$, z_0 Ω-ren metatze-puntua izanik. f funtzioak z_0 puntuan l *limitea* du ($\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$), hau betetzen bada:

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < |z - z_0| < \delta \text{ eta } z \in \Omega \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon.$$

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$ Ω-ren metatze-puntua. f funtzioaren z_0 puntuko limitea infinitu da ($\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$), hau betetzen bada:

$$\forall\, M > 0, \quad \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < |z - z_0| < \delta \text{ eta } z \in \Omega \Longrightarrow |f(z)| > M.$$

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$ non $\Omega \cap \{z\ :\ |z| > M\} \neq \emptyset$ den, M guztietarako. f funtzioaren ∞-ko limitea $l \in \mathbb{C}$ da ($\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = l$) hau betetzen bada:

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, K > 0\ :\ |z| > K, z \in \Omega \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon.$$

f funtzioaren ∞-ko limitea ∞ da ($\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$), hau betetzen bada:

$$\forall\, M > 0, \quad \exists\, K > 0\ :\ |z| > K, z \in \Omega \Longrightarrow |f(z)| > M.$$

Oharra. Definiziotik berehala ateratzen da irizpide hau:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \text{ da, baldin eta soilik baldin } \lim_{z \to z_0} |f(z) - l| = 0 \text{ bada.}$$

Oso praktikoa da, konparazio bidez limitea lortzeko balio duelako: $|f(z) - l| \leq g(z)$ bada, z-ren ingurune batean, eta $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$ bada, orduan, $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z) - l| = 0$ da eta, ondorioz, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$. (Kontuan izan $g(z)$ erreal positiboa izango dela, desberdintzak zentzua izan dezan.)

2.1 Proposizioa. *Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ Ω-ren metatze-puntua, eta $l = l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$. Orduan, $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ da baldin eta soilik baldin*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = l_1 \ \textit{eta} \ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = l_2$$

badira.

Froga. Gogora dezagun $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ eta

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

betetzen direla.

Orduan,

$$|f(z) - l| \leq |u(x, y) - l_1| + |v(x, y) - l_2| \leq 2|f(z) - l|$$

izango da. Alde batetik, $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z) - l| = 0$ bada, bigarren desberdintza erabiliz,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |u(x, y) - l_1| = 0 \text{ eta } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |v(x, y) - l_2| = 0$$

beteko dira. Beste alde batetik, horiek betetzen badira, lehen desberdintza erabiliz, $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z) - l| = 0$ da. □

2.2 Proposizioa. *Izan bitez $f, g \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0 Ω-ren metatze-puntua eta $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = m$.*

(i) $$\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \begin{cases} l + m, & l, m \in \mathbb{C}, \\ \infty, & l = \infty, m \in \mathbb{C};\ \textit{edo } l \in \mathbb{C}, m = \infty; \\ \textit{ind.}, & l = m = \infty. \end{cases}$$

(ii) $$\lim_{z \to z_0} (f(z)g(z)) = \begin{cases} lm, & l, m \in \mathbb{C}, \\ \infty, & l = \infty, m \neq 0;\ \textit{edo } m = \infty, l \neq 0;\ \textit{edo } l = m = \infty, \\ \textit{ind.}, & l = 0, m = \infty;\ \textit{edo } l = \infty, m = 0. \end{cases}$$

(iii) $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \dfrac{l}{m}, & l, m \in \mathbb{C}, m \neq 0, \\ \infty, & l = \infty, m \in \mathbb{C};\ \textit{edo } m = 0, l \in \mathbb{C}, \\ 0, & l \in \mathbb{C}, m = \infty, \\ \textit{ind.}, & l = m = 0,\ \textit{edo } l = m = \infty. \end{cases}$$

(iv) *$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, $f(z) \neq l$ izanda, eta $\lim\limits_{z \to l} g(z) = m$ badira, $\lim\limits_{z \to z_0} g(f(z)) = m$.*

Adibideak.

- $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2 + 1}{z - i} = \lim\limits_{z \to i} \dfrac{(z + i)(z - i)}{z - i} = \lim\limits_{z \to i} (z + i) = 2i.$
- $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^3 + 1}{z^4 + 5} = 0.$

Definizioa. Izan bitez $f \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. Esaten dugu f funtzioa z_0 puntuan *jarraitua* dela baldin eta $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ bada.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$ Ω-ren metatze-puntua. f funtzioa z_0 puntuan jarraitua ez bada, esaten dugu z_0 f-ren *etengunea* edo *eten-puntua* dela.

Baldin f-ren z_0 etengunerako $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ bada, esaten dugu z_0 f-ren etengune gaindigarria dela. $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ birdefinituz, f jarraitua da z_0-n.

Aurreko 2.1 eta 2.2 proposizioak erabiliz, honako bi proposizio hauek ditugu.

2.3 Proposizioa. *Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ eta $z_0 \in \Omega$, $z_0 = x_0 + iy_0$.*

f z_0 puntuan jarraitua da baldin eta soilik baldin u eta v jarraituak badira (x_0, y_0) puntuan.

2.4 Proposizioa. *Izan bitez $z_0 \in \Omega$ eta $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ z_0 puntuan jarraituak. Orduan,*

(i) $f + g$ *eta* fg *jarraituak dira* z_0*-n.*

(ii) $g(z_0) \neq 0$ *bada, orduan* $\dfrac{f}{g}$ *jarraitua da* z_0*-n.*

(iii) h *jarraitua bada* $f(z_0)$ *puntuan, orduan,* $h \circ f$ *jarraitua da* z_0*-n.*

Adibideak.

- $f(z) = \dfrac{1}{z}$ jarraitua da puntu guztietan, $z_0 = 0$ puntuan izan ezik.
- $f(z) = \dfrac{z+1}{z^3+1}$ ez da jarraitua $\sqrt[3]{-1}$ puntuetan (hiru puntu dira). Horietatik, -1 gaindigarria da,

$$\lim_{z\to -1} \frac{z+1}{z^3+1} = \lim_{z\to -1} \frac{z+1}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{1}{3}$$

  delako. Beste bietan, limitea ∞ da.
- $f(z) = \dfrac{x^3 - iy^3}{x^2+y^2}$ ez da jarraitua 0 puntuan, ez dagoelako hor definituta. Baina 0 f-ren etengune gaindigarria da

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0 \quad \text{eta} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = 0$$

  direlako.
- $f(z) = |z|$ jarraitua da puntu guztietan.

- $f(z) = \operatorname{Arg} z$, $\mathbb{C} - \{0\}$ multzoan definiturik, ez da jarraitua zenbaki erreal negatiboetan. Izan bedi $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}^-$,

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z = x_0 + iy, y > 0}} \operatorname{Arg} z = \pi,$$
$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z = x_0 + iy, y < 0}} \operatorname{Arg} z = -\pi.$$

Beraz, $\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg} z$ ez da existitzen eta $\operatorname{Arg} z$ ez da jarraitua z_0-n.

Gauza bera gertatzen da beste edozein argumentu hartzen badugu. Adibidez, $f(z) = \theta$ bada, non $\theta \in \arg z \cap [0, 2\pi)$, f ez da jarraitua zenbaki erreal positiboetan. Oro har, $\alpha \in \mathbb{R}$ finkoa bada, $f(z) = \theta$, non $\theta \in \arg z \cap [\alpha, 2\pi + \alpha)$ den, ez da jarraitua $z_r = re^{i\alpha}$ $(r > 0)$ erako puntuetan.

2.3 Deribatu konplexua

Definizioa. Izan bitez $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. f z_0 puntuan *deribagarria* da baldin eta

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existitzen bada ($\mathbb{C}$-n). Kasu horretan, limite hori $f'(z_0)$ idazten da eta *f-ren z_0 puntuko deribatua* dela esaten da.

2.5 Proposizioa. *f z_0 puntuan deribagarria da baldin eta soilik baldin existitzen bada $A \in \mathbb{C}$, zeinetarako*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

den. Hala bada, $A = f'(z_0)$ da.

Berehala frogatzen da: definizioaren aldaera bat baino ez da.

Adibideak.

- $f(z) = z$.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1 \implies f'(z) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

- $f(z) = \overline{z}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Bi norabidetako limiteak kalkulatuko ditugu: lehenengo eta behin h erreala hartuz,

$$\lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \frac{\overline{h}}{h} = 1;$$

eta, ondoren, h irudikaria hartuz, hau da, $h = iy$ modukoa, y erreala izanik,

$$\lim_{h\to 0, h=iy, y\in\mathbb{R}} \frac{\overline{h}}{h} = -1.$$

Bi limite horiek desberdinak direnez, f ez da inon deribagarria.

- $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$.

  $z_0 = 0$ bada,

  $$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0,$$

  beraz, $f'(0) = 0$. Baina $z_0 \neq 0$ bada,

  $$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0 + h)(\overline{z_0 + h}) - z_0\overline{z_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{z_0\overline{h} + h\overline{z_0} + h\overline{h}}{h} = \overline{z_0} + \lim_{h\to 0}\Big(z_0\frac{\overline{h}}{h} + \overline{h}\Big)\end{aligned}$$

  eta limite hori ez da existitzen.

  Beraz, $f(z) = |z|^2$ soilik $z_0 = 0$ puntuan da deribagarria.

Oharra. Azken bi adibideek erakusten dute f-ren deribagarritasuna ez dela zuzenean ondorioztatzen $u(x, y)$ eta $v(x, y)$ funtzioen deribagarritasunetik. Horiek biak diferentziagarriak izanda ere, gerta daiteke f ez izatea deribagarria.

2.6 Proposizioa. *Izan bitez $z_0 \in \Omega$ eta $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ z_0 puntuan deribagarriak.*

(i) $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

(ii) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

(iii) $g(z_0) \neq 0$ *bada,* $\Big(\dfrac{f}{g}\Big)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$.

(iv) $f\colon \Omega_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eta* $g\colon \Omega_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *badira,* $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ *izanik, eta* f z_0 *puntuan deribagarria eta* g $f(z_0)$ *puntuan deribagarria badira, orduan,*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Propietate horiek frogatzeko, aldagai bateko funtzio errealen kasuan erabiltzen diren bide berak erabil daitezke.

2.7 Proposizioa. *Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. f z_0-n deribagarria baldin bada, orduan jarraitua da z_0-n.*

Froga. Frogatu behar dugu $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z) - f(z_0)) = 0$ dela. Limiteen propietateak erabiliz,

$$\lim_{z\to z_0}(f(z) - f(z_0)) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) = f'(z_0)\cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Kontuan izan alderantzizkoa ez dela gertatzen. Adibidez, $f(z) = \overline{z}$ jarraitua da puntu guztietan, baina ez da inon deribagarria.

Cauchy-Riemannen baldintzak

Ikus dezagun orain zer erlazio dagoen $f = u+iv$ funtzioaren deribagarritasunaren eta u, v funtzio errealen diferentziagarritasunaren artean. Gogora dezagun lehenengo zer den bi aldagaiko funtzio erreal baten diferentziagarritasuna.

Definizioa. Izan bitez $u\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta $(x_0, y_0) \in D$. u funtzioa (x_0, y_0) puntuan *diferentziagarria* da baldin existitzen badira $A, B \in \mathbb{R}$, zeinetarako

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - A(x-x_0) - B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

betetzen den. Gainera, $A = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ eta $B = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$ dira.

Oharra. Aurrerantzean, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = u_y$ notazioa erabiliko dugu deribatu partzialetarako.

Geroago aipatuko dugun aldagai anitzeko analisi errealeko teorema batek honako hau dio:

2.8 Teorema. *Izan bitez $u\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, eta $(x_0, y_0) \in D$. Baldin u_x eta u_y jarraituak badira (x_0, y_0)-n, hau da, u $\mathcal{C}^1$ klasekoa bada (x_0, y_0) puntuan, orduan, u diferentziagarria da (x_0, y_0)-n.*

Alderantzizkoa ez da egia, hau da, u-ren deribatu partzialek ez dute zertan jarraituak izan u diferentziagarria izateko.

2.9 Teorema. *Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ eta $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. f z_0 puntuan deribagarria da baldin eta soilik baldin u eta v diferentziagarriak badira eta*

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Bi berdintza horiek Cauchy-Riemannen baldintzak dira.

Gainera, f deribagarria bada z_0 puntuan, orduan,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= (u_x + iv_x)(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \\ &= (v_y - iu_y)(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

(Hemen $f(x, y) := f(x + iy)$ idazkera onartzen ari gara, f_x eta f_y notazioa erabiltzeko.)

Froga. (i) Lehenengo eta behin, demagun f deribagarria dela z_0 puntuan. 2.5 proposizioa erabiliz,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0.$$

Idatz dezagun $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. Orduan,

$$0 = \lim_{z\to z_0} \frac{u(x,y)+iv(x,y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)-(\alpha+i\beta)(x+iy-x_0-iy_0)}{|x+iy-x_0-iy_0|}.$$

Parte erreala eta irudikaria bananduz,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

eta

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)-\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

Ondorioz, u eta v diferentziagarriak dira (x_0, y_0) puntuan eta

$$u_x(x_0,y_0) = \alpha, \quad u_y(x_0,y_0) = -\beta, \quad v_x(x_0,y_0) = \beta, \quad v_y(x_0,y_0) = \alpha.$$

Hau da, Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dira.

(ii) Demagun orain u eta v diferentziagarriak direla (x_0, y_0) puntuan eta Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dituztela.

Idatz dezagun $u_x(x_0,y_0) = \alpha$ eta $u_y(x_0,y_0) = -\beta$. Cauchy-Riemannen baldintzen ondorioz, $v_x(x_0,y_0) = \beta$ eta $v_y(x_0,y_0) = \alpha$. Diferentziagarritasunaren definizioa erabiliz,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

eta

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)-\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

Bigarrena i-rekin biderkatuz eta lehenengoarekin batuz,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-(\alpha+i\beta)(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0$$

lortzen dugu, eta, 2.5 proposizioa erabiliz, f deribagarria da z_0 puntuan eta $f'(z_0) = \alpha + i\beta$ betetzen da. □

Ohar gaitezen teoremaren frogak f-ren deribatua idazteko zenbait modu erakusten dizkigula:

$$\begin{aligned} f'(z_0) =& u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ =& v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) = -i(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)) \\ =& u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \\ =& v_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = i(v_x(x_0, y_0) - iv_y(x_0, y_0)). \end{aligned}$$

Azken teorema hau 2.8 teoremarekin batera erabiliz, honako irizpide praktiko hau daukagu.

2.10 Korolarioa. *u eta v $\mathcal{C}^1$ klasekoak badira eta Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen badituzte (x_0, y_0) puntuan, orduan, $f = u + iv$ deribagarria da $z_0 = x_0 + iy_0$ puntuan.*

Adibidea. Izan bedi $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$.

$u(x, y) = e^x \cos y$ eta $v(x, y) = e^x \sin y$ diferentziagarriak dira $\mathbb{R}^2$ osoan. Gainera,

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y \text{ eta } v_y = e^x \cos y$$

direnez, Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dira eta f deribagarria da planoko puntu guztietan, eta

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

Adibidea. Ikusi dugu $f(z) = \overline{z}$ ez dela inon deribagarria. Nahiz eta $u(x, y) = x$ eta $v(x, y) = -y$ funtzioak $\mathcal{C}^1$ klasekoak izan puntu guztietan, berehala ikusten da ez dituztela Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen: $u_x = 1$ eta $v_y = -1$ dira.

2.4 Funtzio holomorfoak eta harmonikoak

Definizioa. Izan bedi $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω irekia izanik.

(i) Esaten dugu f $z_0 \in \Omega$ puntuan *holomorfoa* dela deribagarria bada z_0 puntuaren ingurune batean, hau da, existitzen bada $r > 0$ non f deribagarria den $B_r(z_0)$ bolako puntu guztietan.

(ii) Esaten dugu f Ω-n *holomorfoa* dela holomorfoa bada Ω-ko puntu guztietan.

(iii) Esaten dugu f funtzioa *osoa* dela holomorfoa bada $\mathbb{C}$ plano konplexu osoan.

Oharra. Funtzio *analitikoak* ere deitzen zaie funtzio holomorfoei eta izen horrekin aurkitzen dira liburu askotan. Berez, berretura-serie modura idatz daitezkeen funtzioak dira analitikoak, baina, holomorfo guztiek propietate hori badutenez, geroago agertuko den bezala, izen biak baliokidetzat hartzen dira.

Adibideak.

- Polinomioak osoak dira.
- Funtzio arrazionalak holomorfoak dira izendatzailea anulatzen ez den puntuetan. (Gogoratu funtzio arrazionalak P/Q erako funtzioak direla, P eta Q polinomioak izanik.)
- $f(z) = |z|^2$ soilik da deribagarria $z_0 = 0$ puntuan, beraz ez da inon holomorfoa.

Definizioa. Izan bedi $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Esaten dugu u Ω-n *harmonikoa* dela haren laplacearra nulua bada puntu guztietan, hots,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \forall\,(x, y) \in \Omega.$$

2.11 Teorema. *Izan bedi $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfoa, $f = u + iv$, $u, v \in \mathcal{C}^2$ izanik. Orduan, u eta v harmonikoak dira Ω-n.*

Froga. f holomorfoa denez, Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen ditu. Orduan,

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy},$$

hau da, $\Delta u = 0$. (Hor, $(v_y)_x = (v_x)_y$ da, $v \in \mathcal{C}^2$ delako.) Era berean,

$$v_{xx} = (v_x)_x = (-u_y)_x = -(u_x)_y = -(v_y)_y = -v_{yy}. \qquad \square$$

Definizioa. Izan bedi $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ klaseko funtzio harmonikoa. Esaten dugu v funtzioa u-ren *harmoniko konjugatua* dela Ω-n, u-ren eta v-ren arteko Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen badira. Bestela esanda, $f = u + iv$ holomorfoa bada Ω-n.

Oharra. Aurrerago ikusiko dugu f Ω-n holomorfoa bada, f' ere holomorfoa dela. Indukzioz f-k ordena guztietako deribatu holomorfoak ditu. Beraz, $f = u + iv$ holomorfoa bada, u eta v funtzioak $\mathcal{C}^\infty$ klasekoak dira.

Bada analisi errealeko teorema bat funtzio harmoniko baten konjugatuaren existentzia ziurtatzen duena. Horretarako, funtzioa harmonikoa den multzoari baldintza topologiko bat eskatzen zaio: sinpleki konexua izatea (intuitiboki, zulorik ez izatea). Kontzeptu hori kurba itxiekin erlazionatuta dagoenez, laugarren kapituluan ikusiko dugu. Hemen analisi errealeko teoremaren enuntziatua utziko dugu.

2.12 Teorema. *Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C}$ eremu sinpleki konexua eta izan bedi $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonikoa Ω-n. Orduan, existitzen da $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ u-ren harmoniko konjugatua. Gainera, v bakarra da konstante batengatik izan ezik.*

Funtzio harmonikoa emanda, u, honen deribatuek eta Cauchy-Riemannen baldintzek v-ren gradientea zein den esaten digute. Integrazioz, v lortzen da.

Adibidea. Izan bedi $u(x,y) = x^2 - y^2$. Deribatuak kalkulatuz, $u_{xx} = 2$ eta $u_{yy} = -2$ dugu. Hortaz, u harmonikoa da $\mathbb{R}^2$ osoan. Orain, u-ren harmoniko konjugatua kalkulatuko dugu. Cauchy-Riemannen baldintzak erabiliz,

$$v_x = -u_y = 2y \quad \text{eta} \quad v_y = u_x = 2x.$$

Lehena x-rekiko integratuz, $v(x,y) = 2xy + h(y)$. Hori y-rekiko deribatuz eta $v_y = 2x$ erabiliz, $2x + h'(y) = 2x$ da eta $h'(y) = 0$, edo, $h(y) = k$ (konstantea).

Orduan, $v(x,y) = 2xy + k$, $k \in \mathbb{R}$ edozein izanik, u-ren harmoniko konjugatua da. Emandako u parte erreal modura duten f holomorfoak hauek dira:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + i(2xy + k) = z^2 + ki.$$

Adibidea. $u(x,y) = e^x \cos y$ funtzio harmonikoa da $\mathbb{R}^2$ osoan, zeren eta

$$u_{xx} = e^x \cos y \quad \text{eta} \quad u_{yy} = -e^x \cos y.$$

Kalkula dezagun orain u-ren harmoniko konjugatua. Cauchy-Riemannen baldintzak erabiliz,

$$v_x = -u_y = e^x \sin y \quad \text{eta} \quad v_y = u_x = e^x \cos y.$$

Lehenengoa x-rekiko integratuz, $v(x,y) = e^x \sin y + h(y)$. Hori y-rekiko deribatuz eta aurreko v_y-rekin berdinduz, $h'(y) = 0$, edo, $h(y) = k$ dugu. Orduan, u-ren harmoniko konjugatua $v(x,y) = e^x \sin y + k$ da, k edozein konstante izanik. Beraz,

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y + ki$$

holomorfoa da.

Oharra. Ω ez bada sinpleki konexua, baliteke harmoniko konjugaturik ez egotea. Hona hemen adibide bat.

Izan bedi $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. Deribatuak kalkulatuz,

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad u_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ u_y &= \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad u_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Bistan da funtzio hori harmonikoa dela $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ eremuan. (Eremu hori ez da sinpleki konexua, $\{0\}$ puntuan "zuloa"duelako.)

Demagun orain existitzen dela u-ren harmoniko konjugatua, v, eta defini dezagun

$$g(t) = v(\cos t, \sin t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Kosinu eta sinuaren periodikotasunagatik, g periodikoa da, 2π periododuna. Deribatuz eta Cauchy-Riemannen baldintzak kontuan hartuz,

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\sin t\, v_x(\cos t, \sin t) + \cos t\, v_y(\cos t, \sin t) \\ &= \sin t\, u_y(\cos t, \sin t) + \cos t\, u_x(\cos t, \sin t) \\ &= \sin t \frac{2\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \cos t \frac{2\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2. \end{aligned}$$

Beraz, $g(t) = 2t + g(0)$. Hortik, adibidez, $g(2\pi) = 4\pi + g(0)$ lortuko genuke, eta hori ez da g periodikoa izatearekin bateragarria. Kontraesan batera heldu gara. Ondorioz, ez da existitzen u-ren harmoniko konjugaturik $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ multzoan.

Eremua murrizten badugu eta sinpleki konexua hartu, u-ren harmoniko konjugatua lor daiteke. Esaterako, $\{(x,y) : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ eremuan harmoniko konjugatua existitzen da.

2.5 Ariketak

1. Froga itzazu:

   (i) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ da baldin eta soilik baldin $\lim_{z\to z_0} 1/f(z) = 0$ bada.

   (ii) $\lim_{z\to\infty} f(z) = A$ da baldin eta soilik baldin $\lim_{z\to 0} f(1/z) = A$ bada.

   (iii) $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ da baldin eta soilik baldin $\lim_{z\to 0} \dfrac{1}{f(1/z)} = 0$ bada.

2. Demagun $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ dela.

   (i) Baldin eta $|g(z)| \leq M$ bada z_0-ren ingurune batean, froga ezazu $\lim_{z\to z_0} g(z)f(z) = 0$ dela;

   (ii) Baldin eta $|g(z)| \geq m > 0$ bada z_0-ren ingurune batean, froga ezazu $\lim_{z\to z_0} g(z)/f(z) = \infty$ dela. (Zatidura horiek zentzuzkoak izan daitezen $f(z) \neq 0$ izango da $0 < |z - z_0| < \delta$ erako multzo batean.)

3. Izan bedi f jarraitua z_0-n eta $f(z_0) \neq 0$. Froga ezazu existitzen direla $m > 0$ eta $\delta > 0$, zeinetarako $|z - z_0| < \delta$ bada, $|f(z)| > m$ den.

4. Froga ezazu f z_0-n jarraitua eta g $f(z_0)$-n jarraitua badira, $g \circ f$ z_0-n jarraitua dela.

5. Azter ezazu honako funtzio hauen jarraitutasuna, eta kalkula ezazu $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

   (i) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-i}$. *Em.:* i gaind., $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

   (ii) $f(z) = \dfrac{z^4+16}{z^4-16}$. *Em.:* $\pm 2, \pm 2i$ ez gaind., $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$.

   (iii) $f(z) = \dfrac{z^4 - z^2}{z^8 + z^5 - z^4 - z}$. *Em.:* $0, 1$ gaind., $-1, \pm i, \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ez gaind., $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

   (iv) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$. *Em.:* -1 gaind., $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ez gaind.; $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

6. Azter ezazu honako funtzio hauen deribagarritasuna:

   (i) $f(x+iy) = x^2 + xy - i(y+1)$. *Em.:* Derib. $z = -i$ puntuan.

   (ii) $f(x+iy) = (x+1) + iy^2$. *Em.:* Derib. $z = x + \dfrac{i}{2}$ puntuetan, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

   (iii) $f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 - 2xy)$. *Em.:* Derib. $z = 0$ puntuan.

7. Azaldu ezazu zergatik ez diren inon holomorfoak funtzio hauek:
   (i) $f(x+iy) = xy + iy$.
   (ii) $f(x+iy) = e^y(\cos x + i \sin x)$.

8. Izan bedi
$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{z})^2}{z}, & z \neq 0 \text{ bada,} \\ 0, & z = 0 \text{ bada.} \end{cases}$$
Egiazta ezazu f funtzioak Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dituela $z = 0$ puntuan, baina ez dela deribagarria puntu horretan.

9. Izan bedi $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ non $z = r\,e^{i\theta}$ den. Froga ezazu Cauchy-Riemannen baldintzak koordenatu polarretan modu honetan idazten direla:
$$ru_r = v_\theta, \qquad rv_r = -u_\theta.$$
Cauchy-Riemannen baldintzak polarretan aplikatuz, azter ezazu honako funtzio hauen deribagarritasuna:
   (i) $f(z) = z^{27}$. *Em.:* f osoa da.
   (ii) $f(z) = |z|\,z^2$. *Em.:* f deribagarria $z = 0$ puntuan soilik.
   (iii) $f(re^{i\theta}) = r^2 + \theta + 2ir^2\theta$. *Em.:* f deribagarria $z = re^{i\theta}$-n $\Leftrightarrow$ $1 + 4r^2\theta = 0$.

10. Aurki itzazu $f(x+iy) = u(x) + iv(y)$ moduan adieraz daitezkeen funtzio holomorfo guztiak.
Em.: $f(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$.

11. Froga ezazu $f(z)$ $\mathbb{C}$-n holomorfoa bada, $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ ere holomorfoa dela. Zer esan dezakezu $h(z) = f(\overline{z})$ funtzioari buruz?

12. Izan bedi f holomorfoa multzo ireki batean. Froga ezazu $\operatorname{Re} f$ edo $\operatorname{Im} f$ edo $|f|$ konstantea bada, f ere konstantea dela.

13. Zer baldintza bete behar dute $u(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ funtzioaren koefizienteek harmonikoa izan dadin? Baldintza betetzen bada, kalkula ezazu harmoniko konjugatua.

14. Izan bedi $u(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + x + 1$.
   (i) Froga ezazu u harmonikoa dela plano osoan.
   (ii) Aurki ezazu u parte erreal modura duen f funtzio holomorfoa.
   (iii) Aurki ezazu u parte irudikari modura duen g funtzio holomorfoa.
   (iv) Azaldu ezazu f eta g funtzioen arteko erlazioa.

   Em.: (ii) $f(z) = -iz^4 + z + 1 + \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}$; (iii) $g(z) = z^4 + iz + \beta + i$, $\beta \in \mathbb{R}$.

15. v funtzioa u-ren harmoniko konjugatua bada, froga ezazu uv eta $e^u \cos v$ funtzio harmonikoak direla.

16. Aurki itzazu k-ren balioak, $u(x,y) = (e^{2y} + e^{ky}) \sin 2x$ funtzioa harmonikoa izan dadin. Kalkula ezazu harmoniko konjugatua posible den kasuetan.

Em.: $k = 2$, $v(x,y) = 2e^{2y} \cos 2x + \alpha$;
$k = -2$, $v(x,y) = (e^{2y} - e^{-2y}) \cos 2x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

17. Izan bedi f holomorfoa $\{z : |z| > R\}$-n. Defini dezagun $g(z) = f(1/z)$, $0 < |z| < 1/R$ denean. Baldin $g(0)$ definitu ahal bada, g holomorfoa izan dadin $\{z : |z| < 1/R\}$ multzoan, esaten da f ∞*-n holomorfoa* dela. Froga ezazu f ∞-n holomorfoa dela baldin eta soilik baldin existitzen badira $a, b \in \mathbb{C}$ zeinetarako $\lim\limits_{z\to\infty} z(f(z) - a) = b$ betetzen den.

Zer funtzio arrazional dira holomorfoak ∞-n?

18. Aurki itzazu ematen diren Ω multzoen $f(z)$ funtzioaren bidezko irudi-multzoak:
    (i) $f(z) = z^4$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| < \pi/4,\ 0 < |z| < +\infty\}$.
    (ii) $f(z) = (1+i)z+1$, Ω erpinak 0, $1-i$ eta $1+i$ puntuetan dituen triangelua.
    (iii) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
    (iv) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = k\}$, $k > 0$ izanik.
    (v) $f(z) = \overline{z}^2$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{2}\}$.

19. Izan bedi $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$. Erabaki ezazu $z_0 = 0$ f-ren etengune gaindigarria den edo ez.

20. Azter itzazu funtzio hauen etenguneak eta erabaki ezazu zeintzuk diren gaindigarriak:

$$\text{(i)} \quad f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}; \qquad \text{(ii)} \quad f(z) = \frac{z^2-1}{z^3+1}; \qquad \text{(iii)} \quad f(z) = \frac{z^{10}+1}{z^6+1}.$$

21. Izan bedi $z = x + iy$. Egiazta ezazu $f(z) = \sqrt{xy}$ funtzioak Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dituela $z = 0$ puntuan, baina ez dela deribagarria puntu horretan.

22. Azter ezazu funtzio hauen deribagarritasuna:

(i) $f(z) = 2x + xy^2 i$; (ii) $f(z) = z - \overline{z}$; (iii) $f(z) = e^x(\cos y - i \sin y)$.

23. Aurki ezazu u parte erreal modura duen funtzio holomorfoa, kasu hauetan:

$$\text{(i)} \quad u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2; \qquad \text{(ii)} \quad u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\text{(iii)} \quad u(x,y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x); \qquad \text{(iv)} \quad u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

24. Aurki itzazu a eta b parametroen balioak funtzio hau holomorfoa izan dadin:

$$f(z) = \sin\big(e^{ax}\cos(by)\big)\cosh\big(e^{ax}\sin(by)\big) + i\cos\big(e^{ax}\cos(by)\big)\sinh\big(e^{ax}\sin(by)\big).$$

25. Izan bedi $f(z) = \cos x(\cosh y + a\sinh y) + i\sin x(\cosh y + b\sin hy)$. Aurki itzazu a eta b parametroen balioak f holomorfoa izan dadin puntu guztietan. Idatz ezazu f funtzioa z aldagaiaren menpe.

26. Aurki ezazu $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ funtzio holomorfoa baldintza hauek betetzen baditu:

$$f(0) + f'(0) = i \quad \text{eta} \quad u + 2v = 2x(1 - y + x) - 2y(y - 2).$$

27. Izan bedi $v(x,y) = x^3 - 3axy^2$.
    (i) Aurki itzazu a parametroaren balioak v harmonikoa izan dadin.
    (ii) Aurki ezazu $u(x,y)$ funtzioa, aurreko ataleko $v(x,y)$ funtzio harmonikoaren harmoniko konjugatua.
    (iii) Topa ezazu $f = u + iv$ funtzio holomorfoa, u eta v aurreko funtzioak izanik.
    (iv) Izan bedi $f(z) = u + iv$ aurreko atalean lortutako funtzioa. u eta v harmonikoak direnez, $u+v$ ere harmonikoa da. Aurki ezazu, $f(z)$ funtzioa erabiliz, $u + v$ parte erreal modura duen funtzio holomorfoa.

28. Aurki itzazu $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ moduko polinomio harmoniko guztiak. Topa ezazu $v(x,y)$ funtzioa, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ funtzio osoa izan dadin.

29. Izan bitez u eta v harmoniko konjugatuak. Froga ezazu bikote hauek ere harmoniko konjugatuak direla:
    (i) $U = au - bv$, $V = bu + av$, $a, b \in \mathbb{R}$ konstanteak izanik.
    (ii) $U = e^{u^2-v^2}\cos(2uv)$, $V = e^{u^2-v^2}\sin(2uv)$.

30. Izan bedi $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$. Egiazta ezazu Laplaceren ekuazioa, $\Delta u = 0$, betetzen duela $\mathbb{R}^2$-n eta bila itzazu u-ren harmoniko konjugatu guztiak. Adieraz ezazu $f(z) = u + iv$ funtzioa z-ren menpe, $f(0) = 1$ izanik.

31. Izan bedi $u(x,y) = xy + (e^y + e^{-y})\cos x$. Froga ezazu u harmonikoa dela eta aurki ezazu f funtzio holomorfoa, $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ eta $f(0) = 2 + i$ izan daitezen. Adieraz ezazu f $z = x + iy$ aldagaiaren menpe.

32. Aurki itzazu (existitzen baldin badira) honako modu hauetan idazten diren funtzio harmonikoak:

    (i) $u(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$; (ii) $u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$;

    (iii) $u(x,y) = \varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$; (iv) $u(x,y) = \varphi\Big(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\Big)$.

33. Aurki ezazu $v(x,y) = \phi(xy)$ moduan adieraz daitezkeen bi aldagaiko funtzio harmoniko guztiak. Aurki itzazu, halaber, lortutako v parte irudikari modura duten funtzio holomorfoak.

34. Froga ezazu funtzio hauek osoak direla:
    (i) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$.
    (ii) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}(\cos y - i \sin y)$.
    (iii) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

35. Aljebraren oinarrizko teorema hau da: *koefiziente konplexuko polinomio ez-konstante batek erro konplexu bat du, gutxienez.* Ariketa honetan, teorema horren froga egingo dugu, polinomioen jarraitutasuna erabiliz.

    Demagun $P(z)$ polinomioa ez dela konstantea.

    (a) Froga ezazu existitzen dela $R > 0$ zeinetarako, $|z| > R$ bada, $|P(z)| > |P(0)|$ betetzen den.

    (b) $|z| \leq R$ multzoan $|P(z)|$-ren balio minimoa existituko da (zergatik?). Demagun z_0 puntuan lortzen dela minimo hori. Ondoriozta ezazu $|P(z_0)|$ minimoa dela $\mathbb{C}$ osoan.

    Ikus dezagun $P(z_0) = 0$ dela, absurdora eramanez.

    (c) Baldin $P(z_0) \neq 0$ bada, defini dezagun $Q(z) = P(z + z_0)/P(z_0)$. Orduan, Q polinomioa da, $Q(0) = 1$ eta $|Q(z)| \geq 1$. Izan bedi Az^m, $Q(z) - 1$ polinomioaren lehen gai ez-nulua (maila txikienekoa).

    d) Izan bedi $\alpha \in \mathbb{C}$, $A\alpha^m = -1$ betetzen duen zenbaki bat. Har dezagun $R(z) = Q(\alpha z)$. Orduan, $R(z) = 1 - z^m + bz^{m+1} + \cdots$ da eta $|R(z)| \geq 1$.

    e) Kontraesan batera heltzeko, erakuts ezazu $|R(z)| < 1$ dela z positiboa eta txikia hartuz gero.

3. Gaia

Aldagai konplexuko oinarrizko funtzioak

Aurreko gaian, aldagai konplexuko funtzioen jarraitutasuna eta deribagarritasuna definitu eta aztertu ditugu. Funtziorik sinpleenak polinomioak dira eta, ondoren, funtzio arrazionalak. Esan dugun bezala, polinomioak funtzio osoak dira eta funtzio arrazionalak holomorfoak dira plano konplexuko puntu guztietan izendatzailearen erroetan izan ezik.

Aldagai errealeko funtzioen artean, garrantzi handia dute esponentzialak, funtzio trigonometrikoek eta haien alderantzizkoek. Gai honetan, esponentzial konplexua definituko dugu, haren propietateak aztertuko ditugu eta ikusiko dugu alderantzizkoa definitzeko ez dagoela aukera bakarra, ez delako injektiboa. Horrela, logaritmoaren adarrak definituko ditugu eta ondorioztatuko dugu logaritmoa funtzio holomorfoa izan dadin ebaki bat egin behar dela plano konplexuan.

Esponentzialaren eta logaritmoaren laguntzaz, aldagai konplexuko beste funtzio batzuk definituko ditugu: berretura konplexuak —erroak barne—, funtzio trigonometrikoak eta hiperbolikoak.

3.1 Funtzio esponentziala

Aldagai errealeko esponentziala definituta daukagu; beraz, e^x egin dezakegu, $x \in \mathbb{R}$ bada. Bestalde, Eulerren formulak e^{iy}-rako definizioa ematen digu, $y \in \mathbb{R}$ izanda. Esponentzialaren oinarrizko propietatea ($e^{a+b} = e^a\, e^b$) mantenduz, e^{x+iy}-rako definizioa lortuko dugu.

Definizioa. Izan bedi $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Orduan,

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ikusten denez, $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ eta $\operatorname{Im} z \in \arg(e^z)$ dira. Esan dugun bezala, $z = x \in \mathbb{R}$ bada, esponentzial erreala berreskuratzen da, eta $z = iy$ bada, $y \in \mathbb{R}$ izanik, berriz, Eulerren formula.

3.1 Proposizioa. *e^z funtzio osoa da. Gainera, $(e^z)' = e^z$ da.*

Froga. e^z-ren parte erreala $u(x, y) = e^x \cos y$ da eta parte irudikaria, $v(x, y) = e^x \sin y$. Funtzio horiek diferentziagarriak dira $\mathbb{R}^2$ osoan eta $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ guztietarako

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y = v_y, \\ u_y &= -e^x \sin y = -\, v_x, \end{aligned}$$

hau da, Cauchy-Riemannen baldintzak betetzen dira $\mathbb{R}^2$ osoan. Beraz, e^z deribagarria da puntu guztietan, eta, ondorioz, funtzio osoa da. Gainera, $(e^z)' = u_x + iv_x = e^z$ da. □

3.2 Proposizioa (Esponentzialaren propietateak)**.** *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$.*

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$.

(ii) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

(iii) Esponentziala periodikoa da, periodoa $2\pi i$ izanik, hau da

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Froga. Izan bitez $z = x + iy$ eta $w = u + iv$.

(i) Esponentzial errealaren propietateak eta berdintza trigonometrikoak erabiliz,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x(\cos y + i \sin y) e^u (\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u}(\cos(y + v) + i \sin(y + v)) \\ &= e^{z+w}. \end{aligned}$$

(ii) Aurreko atala erabiliz, $e^{-z} e^z = e^0 = 1$.

(iii) Berriro lehen atala erabiliz, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$, $e^{2\pi i} = 1$ baita. □

3.2 Esponentzialaren alderantzizkoa: logaritmoa

Ikusi dugu e^z esponentzial konplexua periodikoa dela; beraz, ez da injektiboa eremutzat $\mathbb{C}$ osoa hartzen bada. Orduan, alderantzizkoa definitzean, infinitu balioren artean aukeratu beharko dugu.

Aurkitu (edo definitu) nahi dugu f funtzio holomorfoa, zeinetarako

$$e^{f(z)} = z.$$

Lehenengo, $f(z) = w$ idazten badugu, $e^w = z$ ekuazioa ebatzi behar dugu.

$z = 0$ baldin bada, ekuazioak ez du soluziorik. Demagun $z \neq 0$ dela. $z = |z| e^{i\theta}$ eta $w = \alpha + i\beta$ idatziz,

$$e^w = z \implies e^\alpha e^{i\beta} = |z| e^{i\theta} \implies \alpha = \ln |z|, \ \beta = \theta + 2\pi k.$$

Oharra. Hemen eta aurrerantzean, ln notazioak zenbaki erreal positibo baten logaritmo nepertar bakarra adieraziko du.

Ikusten dugunez, β-ren balioa ez da bakarra eta, beraz, w ere ez da bakarra. $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ bada, z-ren infinitu logaritmo existitzen dira:

$$\begin{aligned}\log z &= \ln|z| + i \arg z \\ &= \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Argumentu nagusia hartuz, logaritmo nagusia definitzen da

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

eta irudiak $\{w \in \mathbb{C}\colon -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi\}$ multzoan daude.

Adibideak.

- $\operatorname{Log} 1 = 0$ eta $\log 1 = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\operatorname{Log}(-1) = \pi i$ eta $\log(-1) = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definizioa. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{C} - \{0\}$. Baldin $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfoa Ω-n existitzen bada, eta

$$e^{f(z)} = z, \ \forall z \in \Omega,$$

betetzen bada, orduan, esaten da f *adar logaritmikoa* dela Ω-n.

$\Omega \subset \mathbb{C} - \{0\}$ izanik, aurreko kalkuluen arabera, f adar logaritmiko bat bada, orduan,

$$f(z) = \ln|z| + i\theta(z)$$

izango da, non $\theta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ argumentuak neurtzen dituen funtzio jarraitua den.

Ikusi dugu $\operatorname{Arg} z$ ez dela jarraitua zenbaki erreal negatiboetan; beraz, $\operatorname{Log} z$ ere ez da jarraitua izango puntu horietan.

3.3 Proposizioa. *Izan bedi $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Ω-n definitutako*

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

funtzio holomorfoa da eta haren deribatua

$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}$$

da. Esaten da $\operatorname{Log} z$ *logaritmoaren adar nagusia dela.*

Logaritmo nagusia logaritmo errealaren berdina da z zenbaki erreal positiboa bada eta, nahiz eta zenbaki erreal negatiboetan definituta egon, ez da holomorfoa puntu horietan.

$\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ eremuan defini daitezkeen beste adar logaritmikoak adar nagusiaren translazioak dira:

$$\ln|z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Ω-n definitutako adar logaritmiko guztien deribatua $1/z$ da.

$\alpha \in \mathbb{R}$ bada, balioen multzoa $\{w \; : \; \alpha < \operatorname{Im} w \leq \alpha + 2\pi\}$ bandan hartuz gero, logaritmoaren beste adar bat definitzen da. Funtzio holomorfoa izan dadin $\Omega_\alpha = \mathbb{C} - (\{0\} \cup \{z \colon \alpha \in \arg z\})$ hartu behar dugu definizio-eremutzat. Horrela definituriko logaritmoaren deribatua ere $1/z$ izango da.

Badaude beste modu batzuk logaritmoaren adar holomorfoak definitzeko. Ahalik eta eremurik handiena hartzeko, jatorritik infinitura doan kurba injektibo bat kendu behar zaio plano konplexuari (esaten da kurba hori planoko *ebakia* dela). Aurreko kasuetan, kurba horiek zuzenerdiak izan dira.

Oharra. $e^{\log z} = z$ da $\log z$ logaritmoaren edozein adar izanik, baina $\log e^z = z + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Orokorrean, $\operatorname{Log} e^z \neq z$. Adibidez, $z = 4\pi i$ bada, $e^z = e^{4\pi i} = 1$ eta ondorioz $\operatorname{Log}(e^z) = \operatorname{Log} 1 = 0 \neq 4\pi i$.

Oharra. $\log(zw) = \log z + \log w$ formula betetzen da logaritmoaren balio guztiak kontuan hartzen badira, hau da, $\log z$-ren balio guztiak eta $\log w$-ren balio guztiak batuz gero, $\log(zw)$-ren balio guztiak lortzen dira. Formula hori ez da beti betetzen logaritmoaren adar bat finkatzen bada. Adibidez, $z = w = e^{\frac{3\pi}{4} i}$ badira, logaritmo nagusiak hartuz,

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(zw) &= \operatorname{Log} e^{\frac{3\pi}{2} i} = -\frac{\pi}{2} i, \\ \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w &= \frac{3\pi}{4} i + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} i. \end{aligned}$$

3.3 Berretura konplexuak

Definizioa. Izan bedi $c \in \mathbb{C}$. Baldin $z \neq 0$ bada,

$$z^c = e^{c \log z}$$

berretura konplexua definitzen da.

Oro har, z^c-k infinitu balio ditu: logaritmoaren adar bakoitzak z^c-ren adar bat ematen du. Logaritmo nagusiak ematen duena z^c-ren adar nagusia da.

Hartzen badugu z^c-ren definizio-eremu modura eremu bat non logaritmoa holomorfoa den, z^c ere holomorfoa izango da hor eta

$$(z^c)' = cz^{c-1},$$

aukeratutako adar logaritmikoa mantenduz z^{c-1} kalkulatzean. Deribatuaren formula hori frogatzeko, erabili katearen erregela.

Adibidea. z^i funtzioak infinitu adar holomorfo ditu $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$-n,

$$\begin{aligned} z^i =& e^{i \operatorname{Log} z} = e^{-\operatorname{Arg} z} e^{i \ln |z|}, \quad \text{adar nagusia}, \\ (z^i)_k =& e^{i(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)} = e^{-\operatorname{Arg} z} e^{-2k\pi} e^{i \ln |z|}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Baldin $c = n \in \mathbb{Z}$ bada,

$$z^n = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{n(\log z + 2k\pi i)} = e^{n \log z}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

beraz, z^n-k balio bakarra du.

Eta $z^{1/n}$-ren kasuan,

$$z^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log z} = e^{\frac{1}{n}(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)} = e^{\frac{\operatorname{Log} z}{n} + \frac{2k\pi}{n} i},$$

eta n balio desberdin lortzen dira, $k = 0, \dots, n-1$, balioei dagozkienak.

Definizioa. Izan bedi $c \in \mathbb{C} - \{0\}$.

$$c^z = e^{z \log c}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

c^z holomorfoa da $\log c$-ren balio bat finkatzen denean eta

$$(c^z)' = c^z \log c.$$

Oharra. 1^z-ren balio nagusia 1 da, baina ez da bakarra 1 zenbakiak infinitu logaritmo konplexu dituelako, $\log 1 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ izanik, beraz, $1^z = e^{2k\pi z i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Halaber, e^z-rako infinitu balio lortzen dira. Hala ere, notazioa ez nahasteko, onartzen da e^z idazten denean balio nagusia hartzen dela.

3.4 Erroak

z^2 funtzioa ez da injektiboa: $\Omega_1 = \{z = re^{i\theta} : \ -\pi/2 < \theta \leq \pi/2\} \cup \{0\}$ hartzen badugu, z^2-ren irudi-multzoa $\mathbb{C}$ osoa da eta berdin gertatzen da $\Omega_2 = \{z = re^{i\theta} : \pi/2 < \theta \leq 3\pi/2\} \cup \{0\}$ hartuz. Beraz, z^2-ren alderantzizkoa definitzerakoan bi aukera izango ditugu.

f funtzio holomorfoa bilatzen dugu, non

$$(f(z))^2 = z$$

den. $z = 0$ bada, $f(0) = 0$ da ekuazioaren soluzio bakarra. $z \neq 0$ bada, $z = re^{i\theta}$ eta $f(z) = \rho e^{i\varphi}$ baldin badira

$$(f(z))^2 = z \implies \rho^2 e^{2i\varphi} = re^{i\theta} \implies \rho = \sqrt{r},\ \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{2}.$$

φ bakarra ez denez, $f(z)$ ere ez da bakarra izango, baina, kasu honetan, nahiz eta $k \in \mathbb{Z}$ den eta infinitu balio izan, bakarrik $f(z)$-ren bi balio desberdin lortzen dira:

$$\sqrt{|z|}e^{\frac{\operatorname{Arg} z}{2}i}, \quad \text{eta} \ -\sqrt{|z|}e^{\frac{\operatorname{Arg} z}{2}i}.$$

Ikusi dugunaren arabera, f holomorfoa izan dadin,

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta(z)}{2}},$$

non $\theta(z)$ angeluak neurtzen dituen funtzio jarraitua izango den.

Definizioa. Izan bedi $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Erro karratuaren adar nagusia Ω-n definitutako funtzio hau da:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}}.$$

Horrela definitutako $\sqrt{z}$ funtzioa holomorfoa da eta

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad \forall\, z \in \Omega.$$

Ω-n defini daitekeen beste adarra $\sqrt{z} = -\sqrt{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}}$ da. Hori ere holomorfoa da eta $(\sqrt{z})' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$, $z \in \Omega$ guztietarako.

Definizio-eremutzat $\mathbb{C} - (\{0\} \cup \{z\colon \alpha \in \operatorname{Arg} z\}$ hartuta ere, $\sqrt{z}$-ren bi adar defini daitezke, biak holomorfoak eta deribatua $(\sqrt{z})' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ da. Kontuan izan deribatuan agertzen den $\sqrt{z}$-ren balioa, funtzioa definitzeko erabilitako bera dela.

Baldin $n \geq 3$ bada, $f(z) = z^n$ funtzioaren alderantzizkoarekin arazo bera dugu eta, orain, n balioren artean aukeratu beharko dugu. $\sqrt[n]{z}$ funtzio holomorfoa definitzeko, $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ har daiteke definizio-eremutzat eta hor eman adar nagusia, argumentu nagusia erabiliz,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\operatorname{Arg} z}{n}i}.$$

Multzo berean, beste $n - 1$ adar holomorfo defini daitezke. Kasu guztietan,

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{z^{n-1}}}.$$

Adibidea. $\sqrt[3]{z}$ funtzioak hiru adar holomorfo ditu $\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$-n.

$$\begin{aligned}
(\sqrt[3]{z})_1 &= \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{3}}, \quad \text{adar nagusia},\\
(\sqrt[3]{z})_2 &= \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z + 2\pi}{3}},\\
(\sqrt[3]{z})_3 &= \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z + 4\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

3.5 Funtzio trigonometrikoak eta haien alderantzizkoak

Definizioa. Izan bedi $z \in \mathbb{C}$. Orduan,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{eta} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Baldin $z = x \in \mathbb{R}$ bada, aldagai errealeko funtzio trigonometrikoen balioak berreskuratzen dira. Gainera, ohiko formula trigonometrikoak betetzen dituzte. Adibidez,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \ \forall\, z \in \mathbb{C},$$
$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z, \ \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

3.4 Proposizioa (Funtzio trigonometrikoen propietateak)**.** *Hona hemen funtzio trigonometrikoen propietate batzuk.*

(i) $\sin z$ *eta* $\cos z$ *funtzio osoak dira eta*

$$(\sin z)' = \cos z \quad \textit{eta} \quad (\cos z)' = -\sin z,$$

$z \in \mathbb{C}$ *guztietarako.*

(ii) Sinuaren eta kosinuaren zeroak errealak dira, hau da

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi, \ k \in \mathbb{Z};$$
$$\cos z = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Funtzio periodikoak dira, periodoa 2π *izanik, hau da,*

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z \quad \textit{eta} \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Froga. Funtzio trigonometrikoen propietateak haien definizioetatik ondorioztatzen dira, esponentzialaren propietateak erabiliz.

(i) Kontuan izanda esponentzialaren deribatua esponentziala bera dela, eta katearen erregela aplikatuz,

$$(\sin z)' = \Big(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\Big)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

eta modu berean,

$$(\cos z)' = \Big(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\Big)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

(ii) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ denez,

$$\begin{aligned} \sin z = 0 &\iff e^{iz} - e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i},\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff 2iz = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z} \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Antzera,

$$\begin{aligned} \cos z = 0 &\iff e^{iz} + e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2iz} = -1 \\ &\iff 2iz = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z} \iff z = \frac{2k+1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(iii) Gogoratuz $e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$ dela,

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z.$$

Modu berean,

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z. \qquad \square$$

Oharra. $x \in \mathbb{R}$ bada, $|\sin x| \le 1$ eta $|\cos x| \le 1$. Aldiz, $z \in \mathbb{C}$ bada, $\sin z$ eta $\cos z$ edozein zenbaki konplexu izan daitezke, alderantzizkoa kalkulatzean ikusiko dugunez.

Definizioa. Beste funtzio trigonometrikoak hauek dira:

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = i\frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}, \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}, \\ \operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}. \end{aligned}$$

Definizio-eremuan, $\sin z$ edo $\cos z$ anulatzen duten balioak kendu behar dira $\mathbb{C}$-tik.

Bila dezagun orain $\sin z$ funtzioaren alderantzizkoa. Hau da, $z \in \mathbb{C}$ emanda, bilatuko ditugu w guztiak zeinetarako $\sin w = z$ betetzen den.

$$\begin{aligned} \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \quad &\implies \quad e^{iw} - e^{-iw} = 2iz \\ &\implies \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \\ &\implies \quad e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = iz + \sqrt{1 - z^2} \\ &\implies \quad iw = \log(iz + \sqrt{1 - z^2}) \\ &\implies \quad w = -i\log(iz + \sqrt{1 - z^2}). \end{aligned}$$

Esan bezala, sinua periodikoa da; beraz, ez da injektiboa eta w-k infinitu balio desberdin har ditzake. Erro karratuak bi balio posible ditu eta logaritmoak, infinitu.

Arcsin z, arku sinuaren adar nagusia definitzeko, $\mathbb{C}-((-\infty,-1]\cup[1,\infty))$ definizio-eremua hartzen da eta erro karratuaren eta logaritmoaren adar nagusiak $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ multzoan. Hala, irudia $\{w \in \mathbb{C} : \ -\pi/2 < \operatorname{Re} w < \pi/2\}$ multzoa da, Arcsin z funtzio holomorfoa da eta haren deribatua honako hau da:

$$(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Kosinuaren, tangentearen eta gainontzeko funtzio trigonometrikoen alderantzizkoak antzera definitzen dira.

3.6 Funtzio hiperbolikoak

Definizioa. *Sinu* eta *kosinu hiperbolikoak* honela definitzen dira:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Funtzio hiperbolikoak osoak dira eta

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Aldagai erreal baten kasuan, funtzio trigonometrikoak eta hiperbolikoak erabat desberdinak dira. Aldagai konplexuaren kasuan, aldiz, ia funtzio berdinak dira, aldagai-aldaketa batek elkarrekin erlazionatzen baititu:

$$\sinh z = -i \sin(iz) \text{ eta } \cosh z = \cos(iz).$$

Ondorioz, funtzio trigonometrikoekin gertatu den bezala, funtzio hiperbolikoak ez dira injektiboak eta, horrenbestez, haien alderantzizkoek infinitu adar dituzte. Alderantzizkoen formulak topatzeko, sinu trigonometrikoarekin egin den prozedura bera erabil daiteke, edo aldagai-aldaketa baliatu.

3.7 Ariketak

1. Izan bedi $D = \{z : \operatorname{Re} z \in [0,1], \operatorname{Im} z \in [0,1]\}$. Marraztu ezazu multzo horren irudia e^z funtzioaren bidez.

2. Izan bedi $e^{1/z} = u(x,y) + iv(x,y)$. Eman itzazu u eta v-ren adierazpenak. Non dira harmonikoak u eta v, eta zergatik?

3. Noiz da $\operatorname{Log}(z^2) = 2\operatorname{Log} z$? Noiz da $\operatorname{Log} z^{1/2} = (\operatorname{Log} z)/2$?

4. z^i funtzioaren adar nagusia hartuz, aurki itzazu $u(r,\theta)$ eta $v(r,\theta)$ funtzio harmoniko konjugatuak, $z^i = u + iv$ izanik.
   Em.: $u(r,\theta) = e^{-\theta}\cos(\ln r)$, $v(r,\theta) = e^{-\theta}\sin(\ln r)$.

5. Izan bedi $z \neq 0$ eta $c \in \mathbb{C}$. Eman itzazu $|z^c|$ eta $\arg(z^c)$.

6. Eman itzazu zenbaki konplexu hauek forma binomikoan:
   (i) $\log e$ *Em.:* $1 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (ii) $\log(3-2i)$ *Em.:* $\dfrac{1}{2}\ln 13 - i(\arctan\dfrac{2}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (iii) 1^i *Em.:* $e^{-2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (iv) $(1-i)^i$ *Em.:* $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}(\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2}))$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (v) $(-1)^{1/\pi}$ *Em.:* $\cos(2k+1) + i\sin(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (vi) i^i *Em.:* $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (vii) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$ *Em.:* $e^{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (viii) $(\operatorname{Log} i)^i$ *Em.:* $e^{-\pi/2}e^{2k\pi}\big(\cos(\ln\frac{\pi}{2}) + i\sin(\ln\frac{\pi}{2})\big)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (ix) i^{3+4i} *Em.:* $-e^{-2\pi}e^{8k\pi}i$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (x) $(1+i)^{1+i}$
   Em.: $e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}(\cos(\ln\sqrt{2}) - \sin(\ln\sqrt{2}) + i(\cos\ln\sqrt{2} + \sin(\ln\sqrt{2})))$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. (i) Funtzio trigonometrikoen definizioak kontuan harturik, froga itzazu berdintza hauek:
   $$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin(z+w) = \sin z\cos w + \sin w\cos z,$$
   $$\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}, \qquad \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w.$$
   (ii) Aurki itzazu $\sinh(z+w)$ eta $\cosh(z+w)$-rako formulak.
   (iii) Non anulatzen da $\sinh z$ funtzioa?
   (iv) Noiz da $\sin z = \sin w$?
   (v) Aurki ezazu z-ren zer baliotarako den $\sin z$ erreala. Gauza bera $\cos z$-rako.

(vi) Aurki ezazu z-ren zer baliotarako den $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1$.

8. Idatz itzazu zenbaki hauek forma binomikoan:
   (i) $\sin(2+3i)$ *Em.:* $\sin 2 \cosh 3 + i \cos 2 \sinh 3$.
   (ii) $\cos\Big(\dfrac{\pi}{2} + i \ln 2\Big)$ *Em.:* $-3i/4$.
   (iii) $\cosh^2(i\pi)$ *Em.:* 1.
   (iv) $\sinh\Big(1 + i\dfrac{\pi}{2}\Big)$ *Em.:* $\dfrac{e^2+1}{2e} i$.
   (v) $\operatorname{cotan}(i\pi)$ *Em.:* $\dfrac{1+e^{2\pi}}{1-e^{2\pi}} i$.
   (vi) $(\cos i)^i$ *Em.:* $e^{2k\pi}\big(\cos(\ln \frac{1+e^2}{2e}) + i \sin(\ln \frac{1+e^2}{2e})\big)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (vii) $i^{\sin i}$ *Em.:* $e^{\frac{1-e^2}{2e}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Idatz itzazu funtzio hauen parte erreala eta parte irudikaria:
   (i) e^{-z^2} *Em.:* $u(x,y) = e^{y^2-x^2}\cos(2xy)$, $v(x,y) = -e^{y^2-x^2}\sin(2xy)$.
   (ii) $\cos z$ *Em.:* $u(x,y) = \cos x \cosh y$, $v(x,y) = -\sin x \sinh y$.
   (iii) $\tan z$ *Em.:* $u(x,y) = \frac{\sin(2x)}{\cosh(2y)+\cos(2x)}$, $v(x,y) = \frac{\sinh(2y)}{\cosh(2y)+\cos(2x)}$.

10. Aurki itzazu funtzio hauen balio guztiak:
    (i) $\arcsin\Big(i\dfrac{\pi}{3}\Big)$
    Em.: $2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{\pi^2+9}-\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; $(2m+1)\pi - i \ln \frac{\sqrt{\pi^2+9}+\pi}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$.
    (ii) $\arccos i$ *Em.:* $\pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(\pm 1 + \sqrt{2})$, $k \in \mathbb{Z}$,
    (iii) $\arctan(1+2i)$. *Em.:* $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} + k\pi - i\frac{\ln 5}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$,

11. Aurki itzazu ekuazio hauen soluzio guztiak:
    (i) $e^{iz} = 1+i$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi - \dfrac{i}{2}\log 2$, $k \in \mathbb{Z}$.
    (ii) $e^z = -3$ *Em.:* $\ln 3 + (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
    (iii) $\operatorname{Log} z = i\dfrac{\pi}{2}$ *Em.:* i.
    (iv) $\cos z = 0$ *Em.:* $\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
    (v) $\sin z = 3$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3 \pm 2\sqrt{2})$, $k \in \mathbb{Z}$.
    (vi) $\sin z + \cos z = 2$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.
    (vii) $\sin z - \cos z = i$
    Em.: $-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\pi}{4} + 2m\pi - i\ln\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

(viii) $\sinh z + 2\cosh z = i$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ -\ln 3 - (\frac{\pi}{2} + 2m\pi)i,\ m \in \mathbb{Z}.$

12. Lau aukera ditugu $f(z) = z^{1/4}$ funtzio holomorfoa definitzeko $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ multzoan. Har dezagun $f(1) = -i$ egiten duena. Eman itzazu $f(e^{2\pi i/3})$ eta $f'(e^{2\pi i/3})$.

$$Em.:\ f(e^{2\pi i/3}) = \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ f'(e^{2\pi i/3}) = \frac{i}{4}.$$

13. Aurki ezazu $\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} z \in [\ln 2, \ln 3],\ \operatorname{Im} z \in [-\pi, \pi]\}$ multzoaren irudia $f(z) = e^z$ funtzioaren bidez.

14. Eman itzazu adierazpen hauen balio posible guztiak:

(i) $\cos(\pi + i\log 2)$	(ii) $\log(-1)$	(iii) $\arcsin(i\pi)$
(iv) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$	(v) $\log(-3e^{\frac{\pi}{2}i})$	(vi) $\tanh\left(\dfrac{\pi}{2}i\right)$
(vii) $\cosh^{-1}(i)$	(viii) $2^{\sqrt{2}}$	(ix) $\arccos 2$
(x) $\log((1-\sqrt{2})i)$	(xi) $(1-i)^{1+i}$	(xii) $(\cos i)^i$

15. Ebatz itzazu ekuazio hauek:

(i) $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$	(ii) $(e^z + 1)^3 + 8 = 0$
(iii) $\sin z = i$	(iv) $\sin z = 2$
(v) $\cos z = \cosh z$	(vi) $1^z = 2i$
(vii) $\sin z + \cos z = 2$	(viii) $z^{1+i} = 4$

16. Izan bedi $\Omega = \mathbb{C} - \gamma$ non γ lehenengo koadranteareren erdibitzailea den. Izan bedi $\sqrt{z}$ Ω-n definitutako erro karratuaren adar holomorfoa, $\sqrt{9} = -3$ izanik. Kalkula itzazu $\sqrt{-9}$, $\sqrt{i}$ eta $\sqrt{-i}$.

17. (i) Aurki ezazu $Q = \{z \in \mathbb{C} :\ 4 \le |z| \le 9, -\pi/2 \le \operatorname{Arg} z \le \pi/2\}$ multzoaren irudia $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ multzoan definitutako $f(z) = \sqrt{z}$ funtzioaren adar nagusiaren bidez.

    (ii) Kalkula ezazu $\{z \in \mathbb{C} :\ 8 \le |z| \le 27, -3\pi/4 \le \operatorname{Arg} z \le 0\}$ multzoaren irudia $\sqrt[3]{z}$ funtzioaren $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ multzoan definitutako adar nagusiaren bidez.

18. Izan bedi $f(z)$ $D = \mathbb{C} - \{z = -iy,\ y \ge 0\}$ multzoan holomorfoa den $\sqrt{z}$ funtzioaren adarra, $f(1) = -1$ izanik. Kalkula itzazu $f(-1)$ eta $f(2i)$.

19. Kalkula ezazu $\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| \le 4,\ -\pi/4 \le \operatorname{Arg} z \le \pi/4\}$ eremuaren irudia $f(z) = \sqrt{z}$ funtzioaren bidez, baldin

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i(\pi + \operatorname{Arg} z/2)}.$$

4. Gaia

Integrazio konplexua eta Cauchyren teoremak

4.1 Aldagai errealeko funtzio konplexuak

Definizioa. Izan bitez $I \subset \mathbb{R}$ eta $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzio errealak. Defini dezagun

$$\begin{aligned} h\colon I &\to \mathbb{C} \\ t &\rightsquigarrow h(t) = u(t) + iv(t). \end{aligned}$$

Orduan, h aldagai errealeko funtzio konplexua da.

h-ren deribatua eta integrala definitzeko, u eta v-renak erabiltzen dira:

$$\begin{aligned} h'(t) &= u'(t) + iv'(t), \\ \int_a^b h(t)\, dt &= \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt. \end{aligned}$$

Horretarako, u eta v deribagarriak edo integragarriak izatea beharko dugu. Zenbait propietate aldagai errealeko funtzioen propietateetatik atera daitezke. Batzuetan, hala ere, konplexuak erabili behar dira.

4.1 Teorema (Katearen erregela)**.** *$f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $h\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ funtzio deribagarriak badira eta $h(a,b) \subset D$ betetzen bada, $f \circ h$ deribagarria da eta*

$$\frac{d}{dt} f(h(t)) = f'(h(t))h'(t).$$

Analisi errealeko funtzioetarako frogatzen den moduan egin daiteke teorema horren froga. Beste bide bat hau da: f-ren parte erreala eta irudikaria erabili eta analisi errealeko katearen erregela aplikatu.

4.2 Proposizioa. *Izan bedi $h\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ jarraitua. Orduan*

$$\left| \int_a^b h(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |h(t)|\,dt.$$

Proposizio honen froga kapitulu amaierako ariketa batean eskatzen da. Han ikus daiteke, laguntza modura, zein bide erabili behar den.

4.2 Kurbak plano konplexuan

Definizioa. Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Esaten dugu $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ aplikazio jarraitua *kurba parametrizatua* dela.

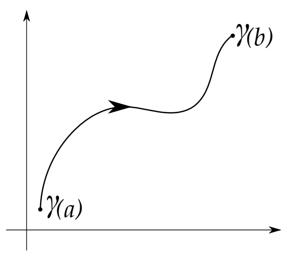
- $\gamma(a)$ kurbaren *hasierako puntua* eta $\gamma(b)$ *amaierako puntua* dira.
- γ injektiboa bada, esaten dugu *kurba sinplea* dela.
- $\gamma(a) = \gamma(b)$ bada, esaten dugu *kurba itxia* dela.
- γ itxia bada eta $[a,b)$ tartean injektiboa, orduan, esaten dugu *kurba itxi sinplea* edo *Jordanen kurba* dela.

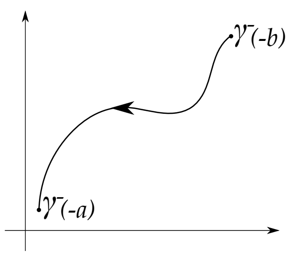
Definizioa. Izan bitez $I = [a,b]$, $J = [\alpha, \beta]$ eta $h\colon J \to I$ funtzio jarraitu bijektiboa. Izan bitez $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eta $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$. Esaten da $\tilde{\gamma}$ γ-ren *birparametrizazioa* dela.

h gorakorra baldin bada, $\tilde{\gamma}(\alpha) = \gamma(a)$ eta $\tilde{\gamma}(\beta) = \gamma(b)$ dira eta esaten dugu birparametrizazioak orientazioa mantentzen duela. Aldiz, h beherakorra denean, $\tilde{\gamma}(\alpha) = \gamma(b)$ eta $\tilde{\gamma}(\beta) = \gamma(a)$ dira eta esaten dugu birparametrizazioak orientazioa aldatzen duela.

Definizioa. Izan bedi $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ kurba. γ-ren *aurkako kurba* hau da:

$$\begin{aligned} \gamma^-\colon [-b,-a] &\to \mathbb{C} \\ t &\to \gamma(-t). \end{aligned}$$

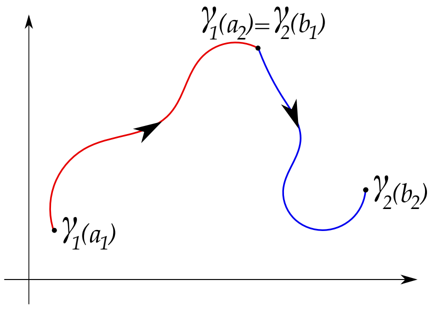




γ^- orientazioa aldatzen duen γ-ren birparametrizazioa da. Muturrak trukatzen dira: γ-ren hasierako puntua γ^--en amaierakoa da eta alderantziz.

Definizioa. Izan bitez $\gamma_1\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2\colon [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ bi kurba eta demagun $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ dela. Orduan, γ_1 eta γ_2 kurben *batura* deitzen dugun $\gamma_1 + \gamma_2$ kurba honela definitzen da:

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2\colon [a_1, b_1 + b_2 - a_2] &\to \mathbb{C} \\ t &\to \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases} \end{aligned}$$



Definizioa. Izan bedi $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ kurba parametrizatua. γ C^1 klasekoa bada, esaten dugu *kurba leuna* dela. Halaber, γ C^1 zatika bada, esaten dugu *kurba zatika leuna* dela. Hau da, γ zatika leuna da jarraitua bada eta $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ existitzen badira, zeinetarako γ deribagarria den (t_i, t_{i+1}) tarteetan, $i = 0, \ldots, n-1$, eta deribatua jarraitua bada tarte bakoitzean. Kasu horretan, esaten da ere γ *bidea* dela.

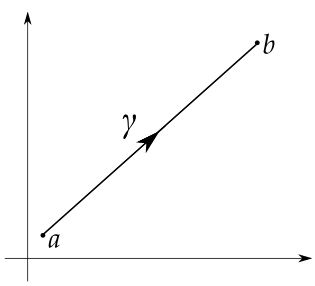
Adibideak.

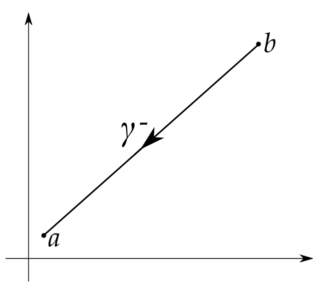
- Izan bitez $a, b \in \mathbb{C}$. a eta b puntuak lotzen dituen zuzenkiaren parametrizazio bat hau da:

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\to C \\ t &\to (1-t)a + tb. \end{aligned}$$

Antzera, b eta a puntuak lotzen dituen zuzenkiarena:

$$\begin{aligned} \gamma^-\colon [0,1] &\to C \\ t &\to ta + (1-t)b. \end{aligned}$$



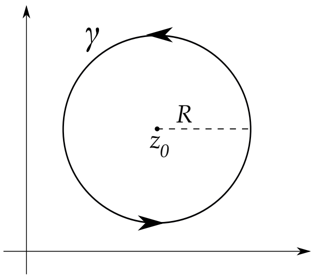


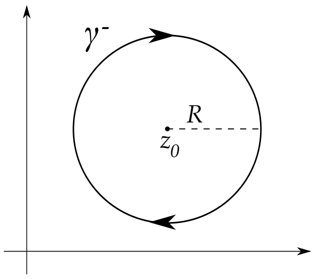
- Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$. z_0 zentroko eta R erradioko zirkunferentzia honela parametrizatzen da:

$$\begin{array}{rcl} \gamma\colon [-\pi,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \to & z_0 + Re^{it}. \end{array}$$

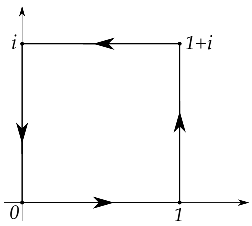
Zirkunferentzia bera baina kontrako noranzkoan,

$$\begin{array}{rcl} \gamma^-\colon [-\pi,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \to & z_0 + Re^{-it}. \end{array}$$





- Erpinak 0, 1, $1+i$ eta i puntuetan dituen karratua:



$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1], \\ 1 + (t-1)i, & t \in [1,2], \\ (3-t) + i, & t \in [2,3], \\ (4-t)i, & t \in [3,4]. \end{cases}$$

Edo, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ moduan deskonposatuz, non

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = t, & t \in [0,1], \\ \gamma_2(t) = 1 + ti, & t \in [0,1], \\ \gamma_3(t) = (1-t) + i, & t \in [0,1], \\ \gamma_4(t) = (1-t)i, & t \in [0,1]. \end{array}$$

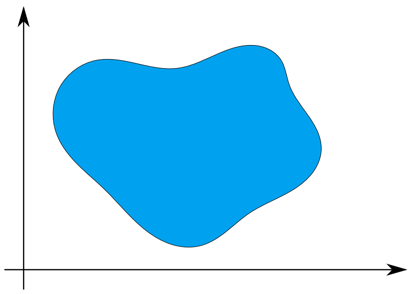
Edo, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \tilde{\gamma_3} - \tilde{\gamma_4}$ moduan deskonposatuz, non γ_1 eta γ_2 goiko kurbak diren eta

$$\begin{array}{ll} \tilde{\gamma_3}(t) = t + i, & t \in [0,1], \\ \tilde{\gamma_4}(t) = ti, & t \in [0,1]. \end{array}$$

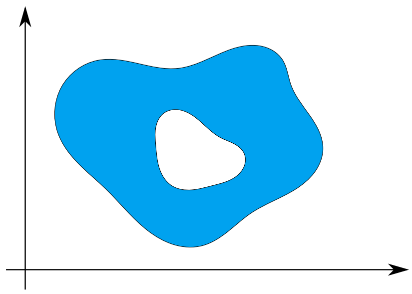
Kurba itxi sinpleen propietate topologiko bat erakusten du hurrengo teoremak. Kasu errazetan bistakoa den arren, zaila da kasu orokorrean frogatzea.

4.3 Teorema (Jordanen kurbaren teorema)**.** *Kurba itxi sinple baten osagarria planoan bi multzo konexu disjunturen bildura da eta kurba da bi multzoen muga. Multzo konexu horietako bat bornatua da eta kurbaren barruko aldea deritzo; bestea ez da bornatua eta kurbaren kanpoko aldea deritzo.*

Definizioa. Esaten dugu Ω *eremu sinpleki konexua* dela baldin eta kurba sinple itxi guztien barruko aldea multzoko parte bada. (Bestela esanda, "zulorik"ez badu.)



sinpleki konexua



ez-sinpleki konexua

4.3 Aldagai konplexuko funtzioen integrazioa

Definizioa. Izan bitez $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ bidea eta f γ-ren ingurune batean definitutako funtzio jarraitua. Orduan, f-ren γ bidearen gaineko integrala honela definitzen da:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ baldin bada, eta $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, orduan

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b \big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt \\ &= \int_a^b \big(u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\big)\,dt \\ &\quad + i\int_a^b \big(u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)\big)\,dt.\end{aligned}$$

Oharra. Izan bitez (P,Q) planoko bektore-eremu jarraitua eta $\gamma(t) = (x(t),y(t))$, $a \le t \le b$ kurba zatika leuna. Aldagai anitzeko funtzio errealen kalkuluan, honela definitzen da (P,Q)-ren integrala γ-ren gainean:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\,dt.$$

Horren arabera,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx).$$

4.4 Teorema. *Izan bitez γ bidea, $\tilde{\gamma}$ haren birparametrizazioa eta f γ-ren ingurune batean jarraitua. Orduan,*

(i) $\tilde{\gamma}$-k orientazioa mantentzen baldin badu, $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$

(ii) $\tilde{\gamma}$-k orientazioa aldatzen baldin badu, $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$

Froga. Izan bedi $h\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$, non $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ den. Orduan,

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(h(t)))\gamma'(h(t))h'(t)\,dt.$$

Egin dezagun $\xi = h(t)$ aldagai-aldaketa azken integralean. Orduan,

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(\gamma(\xi))\gamma'(\xi)\,d\xi.$$

$\tilde{\gamma}$-k orientazioa mantentzen badu, $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$; beraz,

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(\xi))\gamma'(\xi)\,d\xi = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

$\tilde{\gamma}$-k orientazioa aldatzen badu, $h(\alpha) = b$, $h(\beta) = a$; beraz,

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_b^a f(\gamma(\xi))\gamma'(\xi)\,d\xi = -\int_a^b f(\gamma(\xi))\gamma'(\xi)\,d\xi = -\int_\gamma f(z)\,dz. \qquad \square$$

Definizioa. Izan bitez $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ bidea eta f γ-ren ingurune batean definitutako funtzio jarraitua.

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt.$$

Bereziki, $f \equiv 1$ bada,

$$l(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$

eta γ kurbaren *luzera* lortzen da.

4.5 Proposizioa (Integral konplexuaren propietateak)**.** *Izan bitez γ, γ_1, γ_2 bideak, f eta g kurben ingurune batean definitutako funtzio jarraituak eta $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

(i) $\displaystyle\int_\gamma \big(\alpha f(z)+\beta g(z)\big)\,dz=\alpha\int_\gamma f(z)\,dz+\beta\int_\gamma g(z)\,dz.$

(ii) $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$

(iii) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)\,dz=-\int_\gamma f(z)\,dz.$

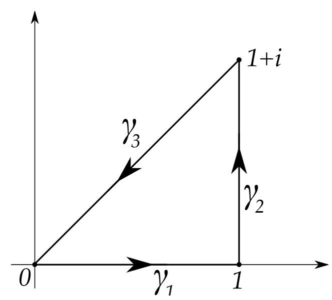
(iv) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le\int_\gamma |f(z)|\,|dz|.$

(v) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le\max_{z\in\gamma}|f(z)|\,l(\gamma).$

Adibideak.

- Kalkula dezagun $\displaystyle\int_\gamma z^2\,dz$, non γ erpinak 0, 1 eta $1+i$ puntuetan dituen triangelua den, erlojuaren orratzen kontrako noranzkoan. γ hiru zatitan banatuko dugu, $\gamma=\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3$, non

$$\begin{aligned}\gamma_1\colon [0,1]&\to\mathbb{C}\\ t&\to\ t\\ \gamma_2\colon [0,1]&\to\mathbb{C}\\ t&\to\ 1+ti\\ \gamma_3\colon [0,1]&\to\mathbb{C}\\ t&\to\ (1+i)t.\end{aligned}$$



Orduan,

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2\,dz=&\int_{\gamma_1} z^2\,dz+\int_{\gamma_2} z^2\,dz-\int_{\gamma_3} z^2\,dz\\ =&\int_0^1 t^2\,dt+\int_0^1(1+ti)^2\,i\,dt-\int_0^1((1+i)t)^2(1+i)\,dt\\ =&\int_0^1 t^2\,dt+i\int_0^1(1-t^2+2it)\,dt-(1+i)^3\int_0^1 t^2\,dt\\ =&(1-i-1-3i-3i^2-i^3)\int_0^1 t^2\,dt+i\int_0^1 dt-2\int_0^1 t\,dt\\ =&(3-3i)\frac{t^3}{3}\Big|_0^1+i-t^2\Big|_0^1\\ =&1-i+i-1=0.\end{aligned}$$

- Kalkula dezagun $\displaystyle\int_{|z|=R} z\,dz$, non $|z|=R$ jatorrian zentratuta dagoen eta R erradioa duen zirkunferentzia den, erlojuaren orratzen kontrako norazkoan hartuta. $\gamma(t)=Re^{it}$, $t\in[-\pi,\pi]$ moduan parametrizatuko dugu. Orduan,

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R} z\,dz &= \int_{-\pi}^{\pi} Re^{it}Rie^{it}\,dt = iR^2\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(2t)+i\sin(2t))\,dt\\ &= iR^2\left(\frac{\sin 2t}{2}-i\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_{|z|=R}\overline{z}\,dz=\int_{-\pi}^{\pi}Re^{-it}Rie^{it}\,dt=iR^2\int_{-\pi}^{\pi}dt=2\pi R^2 i.$

- $\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{dz}{z}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{Re^{it}}Rie^{it}\,dt=i\int_{-\pi}^{\pi}dt=2\pi i.$

- $\displaystyle\int_{|z|=R}\sqrt{z}\,dz$, non $\sqrt{z}$-rako $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ multzoan definitutako erro karratuaren adar nagusia hartzen dugun.

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R}\sqrt{z}\,dz &= \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{R}e^{i\frac{t}{2}}Rie^{it}\,dt = iR\sqrt{R}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{3t}{2}i}\,dt\\ &= iR\sqrt{R}\,\frac{2}{3i}e^{\frac{3t}{2}i}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2R\sqrt{R}}{3}\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}-e^{-\frac{3\pi}{2}i}\right)=-\frac{4R\sqrt{R}}{3}i.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_{|z|=R}\sqrt{z}\,dz$, non $\sqrt{z}$-ren definiziorako $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ multzoan definitutako adar bat hartzen dugun, $\sqrt{-1}=i$ egiten duena. Hemen, parametrizazioaren definizio-tartea $\sqrt{z}$-ren definizio-eremura egokitu behar dugu, $t\in[0,2\pi]$, eta $\sqrt{-1}=i$ denez, $\sqrt{Re^{it}}=\sqrt{R}\,e^{it/2}$ da. Beraz,

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R}\sqrt{z}\,dz &= \int_{0}^{2\pi}\sqrt{R}e^{i\frac{t}{2}}Rie^{it}\,dt = iR\sqrt{R}\int_{0}^{2\pi}e^{\frac{3t}{2}i}\,dt\\ &= iR\sqrt{R}\,\frac{2}{3i}e^{\frac{3t}{2}i}\Big|_{0}^{2\pi}=\frac{2R\sqrt{R}}{3}\left(e^{3\pi i}-e^{0i}\right)=-\frac{4R\sqrt{R}}{3}.\end{aligned}$$

4.4 Kalkulu integralaren oinarrizko teorema

4.6 Teorema (Kalkulu integralaren oinarrizko teorema)**.** *Izan bitez $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ bidea eta f jarraitua γ-ren irudiaren puntuetan. Demagun existitzen dela F holomorfoa, zeinetarako $F'=f$ den. Orduan,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a)).$$

($F'=f$ bada, esaten dugu F f-ren jatorrizkoa dela.)

Froga. Izan bedi $g(t) = F(\gamma(t))$. Katearen erregelagatik, $g'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Orduan,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \qquad \square$$

Adibidea. $\displaystyle\int_{|z|=1} z^n\,dz$ kalkulatuko dugu, $n \in \mathbb{Z}$ guztietarako.

- $n \geq 0$ bada, $f(z) = z^n$ funtzioaren jatorrizkoa $F(z) = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ funtzioa da $\mathbb{C}$ osoan. Beraz,
$$\int_{|z|=1} z^n\,dz = 0, \quad \forall\, n \geq 0.$$
- $n < 0$ bada, $n \neq -1$, $f(z) = z^n$ ez da jarraitua $z = 0$ puntuan, eta jatorrizkoa ere ez da definituta egongo puntu horretan. Hala ere, $n \leq -2$ bada, $F(z) = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ f-ren jatorrizkoa izango da $\mathbb{C} - \{0\}$ multzoan. Ondorioz,
$$\int_{|z|=1} z^n\,dz = 0, \quad \forall n \leq -2.$$
- Azkenik, $n = -1$ bada, z^{-1} funtzioaren jatorrizkoa logaritmoaren edozein adar da, baina logaritmoaren adarrak holomorfoak izan daitezen, jatorritik infinitura doan kurba bat kendu behar da $\mathbb{C}$-n, eta kurba horrek $|z| = 1$ zirkunferentzia ebakitzen du; beraz, ezin da aurkitu z^{-1} funtzioaren jatorrizko holomorforik $|z| = 1$ kurbaren ingurune batean.

  Lehengo adibide batean ikusi dugun bezala, $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$

4.7 Teorema. *Izan bitez $\Omega \subset \mathbb{C}$ multzo irekia eta f jarraitua Ω-n. Baliokideak dira:*

(i) f-k jatorrizko funtzioa du Ω-n.

(ii) f-ren integrala Ω-ko kurba itxietan 0 da.

(iii) Ω-ko γ_1 eta γ_2 kurben hasierako puntuak eta amaierako puntuak berdinak badira, $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ da.

Froga. (i) $\Rightarrow$ (ii): aurreko teoremaren ondorioa da.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\gamma_1 + \gamma_2^-$ kurba itxia da. Orduan,

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^-} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): izan bedi $a \in \Omega$ eta $\gamma(a,z)$, a puntuan hasi eta z puntuan amaitzen den bide bat Ω-n. Defini dezagun

$$F(z) = \int_{\gamma(a,z)} f(w)\, dw.$$

Ondo definituta dago (iii)-ren arabera.

Frogatuko dugu $F'(z_0) = f(z_0)$ dela $z_0 \in \Omega$ guztietarako, hau da,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = 0.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. Ω irekia eta f jarraitua direnez, existitzen da $\delta > 0$, zeinetarako, $|z - z_0| < \delta$ bada, $z \in \Omega$ eta $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ diren. Gainera, (iii)-ren arabera, z horietarako,

$$\int_{\gamma(a,z)} f(w)\, dw = \int_{\gamma(a,z_0)} f(w)\, dw + \int_{[z_0,z]} f(w)\, dw,$$

non $[z_0, z]$ notazioak z_0-tik z-ra doan zuzenkia adierazten duen (zuzenkia Ω-ren parte da). Beraz,

$$F(z) = F(z_0) + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\, dt.$$

(Zuzenkia $z_0 + t(z - z_0)$, $0 \le t \le 1$, parametrizatu dugu.) Orduan,

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \int_0^1 [f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)]\, dt.$$

Baldin $|z - z_0| < \delta$ bada, $w \in [z_0, z]$ guztietarako $|w - z_0| < \delta$ beteko da eta, hortaz, $|f(w) - f(z_0)| < \epsilon$ izango da. Ondorioz,

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \le \int_0^1 |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|\, dt < \epsilon. \qquad \square$$

4.5 Cauchyren teorema integrala

4.8 Teorema. *(Cauchy-Goursaten teorema) Izan bitez $\Omega \subset \mathbb{C}$ eremu sinpleki konexua, f holomorfoa Ω-n eta γ kurba itxi zatika leuna Ω-n. Orduan,*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Cauchy-Goursaten teoremak honako hau ematen du aurrekoarekin batera: $\Omega \subset \mathbb{C}$ multzo ireki eta sinpleki konexuan f holomorfoa badugu, f-ren jatorrizko funtzioa existituko da eta kurba baten gaineko integrala hasierako eta amaierako puntuen menpekoa izango da, ez kurbaren ibilbidearena.

Cauchy-Goursaten teoreman f-ren deribatuari jarraitua izatea eskatuz gero, analisi errealeko Greenen teoremaren bidez froga daiteke. Hipotesi horrekin eman zuen Cauchyk jatorrizko teorema eta Goursat konturatu zen ez zela beharrezkoa. Geroago ikusiko dugu funtzio holomorfoen deribatuak beti direla jarraituak eta, horrela, Goursaten bertsioak ez dio funtzio gehiagori eragiten. Baina deribatuen jarraitutasuna frogatzeko, teorema hori erabiliko dugu; horregatik merezi du hipotesia ez jartzea enuntziatuan.

Greenen teorema. Izan bedi γ planoko kurba itxi sinplea eta D kurbaren barrualdea. Aukera dezagun kurbaren orientaziorako D eremua ezkerrean uzten duena. Izan bedi (P, Q) bektore-eremu bat, γ-ren gainean jarraitua eta D-n $\mathcal{C}^1$ klasekoa. Orduan,

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y)\, dxdy.$$

Aldagai anitzeko kalkulu errealean frogatzen da teorema hori, D eremuari baldintza batzuk eskatuta. Guk erabiliko ditugun eremuetan baldintza horiek betetzen dira.

Greenen teorematik Cauchy-Goursaten teoremarako bidea egiteko, hartu

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (vdx + udy),$$

eta erabili Greenen teorema eskuin atala honela idazteko:

$$\iint_D (-v_x - u_y)\, dxdy + i \iint_D (u_x - v_y)\, dxdy.$$

Bi integrakizunak anulatzen dira, Cauchy-Riemannen baldintzen ondorioz.

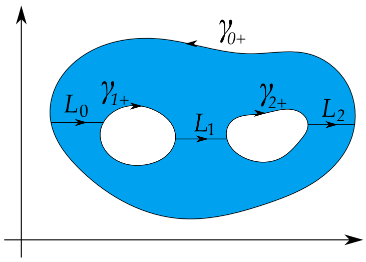
Oharra. Kapitulu amaierako eranskin batean Cauchy-Goursaten teoremaren froga bat aurkituko duzue, izar erako multzoetarako, deribatuaren jarraitutasuna erabili barik.

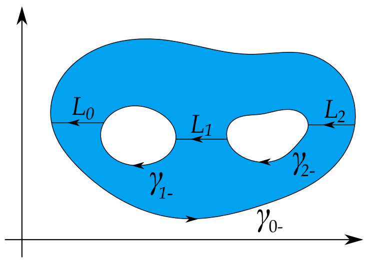
4.9 Teorema (Cauchyren teoremaren forma orokortua)**.** *Izan bitez $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bide itxi sinpleak eta Ω_i γ_i kurbak mugatzen duen eremu bornatua, $i = 0, \ldots, n$ guztietarako. Demagun $\Omega_i \subset \Omega_0$ dela $i = 1, \ldots, n$ guztietarako eta $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ dela, $i \neq j$ bada. Izan bedi $\Omega = \Omega_0 - \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ eta aukera dezagun γ_i kurbaren orientazioa Ω ezkerrean gera dadin. Orduan, f funtzio holomorfoa bada Ω-ren ingurune batean,*

$$\sum_{i=0}^n \int_{\gamma_i} f(z)\, dz = 0.$$

Froga. Demagun $n = 2$ dela, eta defini ditzagun bide hauek (ikusi irudia):

$$\begin{aligned}\alpha =& \gamma_{0+} + L_0 + \gamma_{1+} + L_1 + \gamma_{2+} + L_2,\\ \beta =& \gamma_{0-} - L_2 + \gamma_{2-} - L_1 + \gamma_{1-} - L_0.\end{aligned}$$





α eta β multzo sinpleki konexuen barruan geratzen dira; beraz, f holomorfoa denez, Cauchy-Goursaten teoremaren arabera,

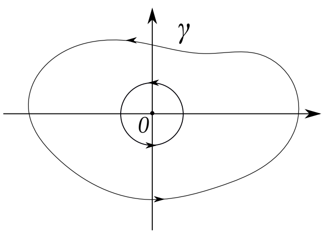
$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\beta f(z)\,dz = 0.$$

Orduan,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz \\ &= \int_{\gamma_{0+}} f(z)dz + \int_{L_0} f(z)dz + \int_{\gamma_{1+}} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + \int_{\gamma_{2+}} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz \\ &\quad + \int_{\gamma_{0-}} f(z)dz - \int_{L_2} f(z)dz + \int_{\gamma_{2-}} f(z)dz - \int_{L_1} f(z)dz + \int_{\gamma_{1-}} f(z)dz - \int_{L_0} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

Beraz, $\displaystyle\int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$ □

Adibidea. Izan bedi γ jatorria barneko aldean duen edozein kurba sinple, positiboki orientatuta. Orduan, R txikia hartuta, $|z| = R$ zirkunferentzia γ-k mugatzen duen eremu bornatuaren barruan geratuko da eta



$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{|z|=R} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Oharra. Aurreko teorema honela ere ulertu daiteke: $\partial\Omega$, Ω-ren muga, kurba konposatutzat hartzen da, γ_j, $0 \le j \le k$, kurba guztiez osatua. $\partial\Omega$-ren gainean noranzko bat definitzeko, Ω multzoa ezker aldean uzten da. Orduan, $\partial\Omega$-ren gaineko f-ren integrala 0 da.

4.6 Cauchyren formula integrala

4.10 Teorema (Cauchyren formula integrala)**.** *Izan bitez γ bide itxi sinplea, erlojuaren orratzen kontrako noranzkoarekin hartuta, $\Omega \subset \mathbb{C}$ γ-ren barrualdea, f holomorfoa $\overline{\Omega}$-n eta $z_0 \in \Omega$. Orduan,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Froga. Baldin $C_r = \{z : |z - z_0| = r\}$ zirkunferentzia Ω-n badago, Cauchyren teoremaren forma orokortuagatik,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz =& \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \\
=& \int_{C_r} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \\
=& f(z_0) \int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.
\end{aligned}$$

C_r, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, aplikazioaren bidez parametrizatuz,

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\, dt = 2\pi i.$$

Bestalde, f jarraitua denez z_0-n, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, hau da, edozein $\epsilon > 0$ emanda, existitzen da $\delta > 0$, zeinetarako $|z - z_0| < \delta$ bada $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ den. Har dezagun $r < \delta$. Orduan,

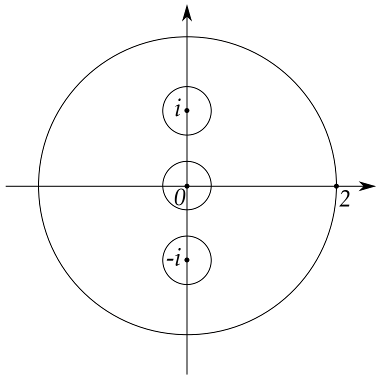
$$\Big| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \Big| \leq \frac{\epsilon\, l(C_r)}{r} = 2\pi\epsilon,$$

hau da, $\lim_{r \to 0} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0$ eta, ondorioz, $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$. □

Adibidea. Kalkula dezagun $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3 + z}\, dz$, zenbait kurbatarako.

- $|z| = 2$ zirkunferentzia.

  $\frac{\cos z}{z^3 + z}$ funtzioa ez da holomorfoa 0, i eta $-i$ puntuetan. Haren integrala γ-n zehar kalkulatzeko Cauchyren teoremaren forma orokortua erabil dezakegu. Orduan, $r < 1/2$ hartuz,



$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3+z}\,dz =& \int_{|z-i|=r}\frac{\cos z}{z(z-i)(z+i)}\,dz + \int_{|z|=r}\frac{\cos z}{z(z-i)(z+i)}\,dz\\ &+\int_{|z+i|=r}\frac{\cos z}{z(z-i)(z+i)}\,dz\\ =&2\pi i\left.\frac{\cos z}{z(z+i)}\right|_{z=i}+2\pi i\left.\frac{\cos z}{(z-i)(z+i)}\right|_{z=0}+2\pi i\left.\frac{\cos z}{z(z-i)}\right|_{z=-i}\\ =&2\pi i\frac{\cos i}{i2i}+2\pi i\frac{\cos 0}{(-i)i}+2\pi i\frac{\cos(-i)}{(-i)(-2i)}\\ =&-\pi i\frac{e^{-1}+e}{2}+2\pi i-\pi i\frac{e+e^{-1}}{2}\\ =&2\pi i(1-\cosh 1).\end{aligned}$$

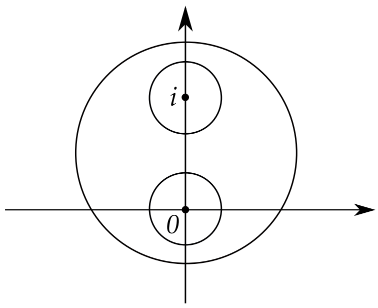
Beste aukera bat da $\dfrac{1}{z^3+z}$ frakzio sinpleetan deskonposatzea, hau da,

$$\frac{\cos z}{z^3+z}=\frac{\cos z}{z}-\frac{1}{2}\frac{\cos z}{z+i}-\frac{1}{2}\frac{\cos z}{z-i},$$

eta, ondorioz,

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3+z}\,dz =& \int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}\,dz-\frac{1}{2}\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z+i}\,dz-\frac{1}{2}\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-i}\,dz\\ =&2\pi i\cos 0-\frac{1}{2}2\pi i\cos(-i)-\frac{1}{2}2\pi i\cos i\\ =&2\pi i(1-\cosh 1).\end{aligned}$$

- $\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=1$ zirkunferentzia. Lehen bezala, bi modutan egin daiteke. Batetik, $r<1/2$ hartuz,



$$\begin{aligned}\int_{|z-\frac{i}{2}|=r}\frac{\cos z}{z^3+z}\,dz=&\int_{|z-i|=r}\frac{\cos z}{z(z-i)(z+i)}\,dz+\int_{|z|=r}\frac{\cos z}{z(z-i)(z+i)}\,dz\\ =&2\pi i\;\frac{\cos z}{z(z+i)}\bigg|_{z=i}+2\pi i\;\frac{\cos z}{(z-i)(z+i)}\bigg|_{z=0}\\ =&2\pi i\frac{\cos i}{i2i}+2\pi i\frac{\cos 0}{(-i)i}\\ =&2\pi i\Big(1-\frac{\cosh 1}{2}\Big).\end{aligned}$$

Bestetik, frakzio sinpleetako deskonposaketa erabiliz,

$$\begin{aligned}\int_{|z-\frac{i}{2}|=1}\frac{\cos z}{z^3+z}\,dz=&\int_{|z-\frac{i}{2}|=1}\frac{\cos z}{z}\,dz-\frac{1}{2}\int_{|z-\frac{i}{2}|=1}\frac{\cos z}{z+i}\,dz\\ &-\frac{1}{2}\int_{|z-\frac{i}{2}|=1}\frac{\cos z}{z-i}\,dz\\ =&2\pi i\cos 0-\frac{1}{2}0-\frac{1}{2}2\pi i\cos i\\ =&2\pi i\Big(1-\frac{\cosh 1}{2}\Big).\end{aligned}$$

- $|z|=1/2$ zirkunferentzia. Kasu honetan, etengune bakar bat geratzen da kurbaren barruan; beraz,

$$\int_{|z|=1/2}\frac{\cos z}{z^3+z}\,dz=\int_{|z|=1/2}\frac{\cos z}{z(z^2+1)}\,dz=2\pi i\;\frac{\cos z}{z^2+1}\bigg|_{z=0}=2\pi i\cos 0=2\pi i.$$

4.11 Teorema (Funtzio holomorfoen deribagarritasuna)**.** *Izan bedi γ kurba itxi sinplea, erlojuaren orratzen kontrako noranzkoarekin hartuta, eta Ω, γ-ren barrualdea. f holomorfoa bada $\overline{\Omega}$-n, edozein ordenatako deribatuak ditu hor. Gainera, $z_0\in\Omega$ bada,*

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Froga. Indukzioz frogatzen da. $n = 0$ kasua Cauchyren formula integrala da. $f^{(n-1)}$-erako balio duela onartuta, $f^{(n)}$-rako balio duela ikusi behar da. Hau da,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(z_0+h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

lortu behar dugu,

$$f^{(n-1)}(z_0+h) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-h)^n}\, dz$$

eta

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\, dz$$

direla onartuta. Bestela esanda,

$$\lim_{h\to 0} \int_\gamma f(z) \left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(z-z_0-h)^n} - \frac{1}{(z-z_0)^n}\right) - \frac{n}{(z-z_0)^{n+1}}\right] dz = 0$$

ikusi behar da.

Idatz ditzagun $n = 1$ kasurako xehetasunak. Hasteko, hau dugu:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-z_0-h} - \frac{1}{z-z_0}\right) - \frac{1}{(z-z_0)^2} \\
&\qquad = \frac{1}{h}\,\frac{(z-z_0)^2 - (z-z_0-h)(z-z_0) - h(z-z_0-h)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2} \\
&\qquad = \frac{h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}.
\end{aligned}$$

Izan bitez d z_0-tik γ-rainoko distantzia eta $M = \max_{z\in\gamma} |f(z)|$. Orduan, hau dugu:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\gamma f(z) \left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-z_0-h} - \frac{1}{z-z_0}\right) - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right] dz\right| \\
&\qquad = \left|\int_\gamma f(z) \frac{h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\, dz\right| \\
&\qquad \le \int_\gamma |f(z)| \frac{|h|}{|z-z_0-h|\,|z-z_0|}\, |dz| \le \frac{M\, l(\gamma)\, |h|}{d^2(d-|h|)}.
\end{aligned}$$

Beraz, limitea 0 da.

Antzera egiten da n-ren balio handiagoetarako, Newtonen binomioa erabiliz $(z-z_0-h)^n$ adierazpenean. □

Adibidea. Kalkula dezagun $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz$, zenbait kurbatarako.

- $|z| = 2$ zirkunferentzia. $1/(z^2(z-1))$ frakzio sinpletan deskonposa dezakegu. Honela,
$$\frac{\cos z}{z^2(z-1)} = \frac{\cos z}{z-1} - \frac{\cos z}{z} - \frac{\cos z}{z^2},$$
beraz,
$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz =& \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z-1}\,dz - \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z}\,dz - \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2}\,dz \\ =& 2\pi i \cos 1 - 2\pi i \cos 0 - \frac{2\pi i}{1!}(\cos z)'\big|_{z=0} \\ =& 2\pi i(\cos 1 - \cos 0 + \sin 0) = 2\pi i(\cos 1 - 1).\end{aligned}$$
Edo, Cauchyren teorema eremua sinpleki konexua ez denean erabiliz, $r < 1/2$ hartuta,
$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz =& \int_{|z|=r} \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz + \int_{|z-1|=r} \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz \\ =& \frac{2\pi i}{1!}\Big(\frac{\cos z}{z-1}\Big)'\Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{\cos z}{z^2}\Big|_{z=1} \\ =& 2\pi i\Big(\frac{-\sin 0(0-1) - \cos 0}{(0-1)^2} + \frac{\cos 1}{1^2}\Big) = 2\pi i(\cos 1 - 1).\end{aligned}$$

- $|z| = 1/3$ zirkunferentzia. Kasu honetan $z_0 = 0$ da kurbaren barruan geratzen den etengune bakarra, beraz,
$$\int_{|z|=1/3} \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\Big(\frac{\cos z}{z-1}\Big)'\Big|_{z=0} = 2\pi i(-\cos 0) = -2\pi i.$$

- $|z-1| = 1/3$ zirkunferentzia. Berriro, etengune bakarra dugu kurbaren barruan, orain, $z_0 = 1$. Orduan,
$$\int_{|z-1|=1/3} \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz = 2\pi i \frac{\cos z}{z^2}_{|z=1} = 2\pi i \cos 1.$$

4.12 Teorema (Moreraren teorema)**.** *Izan bitez $\Omega \subset \mathbb{C}$ irekia eta sinpleki konexua eta $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ jarraitua. $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ bada γ bide itxi sinple guztietarako, orduan f holomorfoa da Ω-n.*

Froga. Ikusi dugu baldintza horietan existitzen dela f-ren jatorrizko funtzioa, F. Orduan, F holomorfoa da D-n. Ondorioz, $F' = f$ ere holomorfoa da. □

Teorema hori Cauchyren teorema integralaren alderantzizkoa da. Han esaten genuen funtzio holomorfoen integrala kurba itxietan 0 dela; hemen, integrala 0 bada, funtzioa holomorfoa dela.

4.13 Teorema (Liouvilleren teorema)**.** *$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funtzio osoa eta bornatua baldin bada, konstantea da.*

Froga. f bornatua denez, existitzen da $M > 0$, zeinetarako $|f(z)| \leq M$ den, $z \in \mathbb{C}$ guztietarako. Orduan, edozein $z_0 \in \mathbb{C}$ eta $R > 0$ emanda,

$$|f'(z_0)| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\Big| \leq \frac{M}{2\pi}\int_{|z-z_0|=R} \frac{1}{|z-z_0|^2}\,|dz| = \frac{2\pi RM}{2\pi R^2} = \frac{M}{R}.$$

Limitea hartuz ($R \to \infty$), $|f'(z_0)| = 0$ da. $z_0 \in \mathbb{C}$ edozein denez, f konstantea da. □

4.14 Teorema (Batezbestekoaren propietatea)**.** *f holomorfoa bada $|z - z_0| \leq r$ zirkuluan,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Hau da, f-ren batezbestekoa $|z - z_0| = r$ zirkunferentzian $f(z_0)$ da.

Froga. Cauchyren formula integralaren arabera, $C_r = \{z : |z - z_0| = r\}$ bada,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrizazioa hartuz,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}\,rie^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$ □

4.15 Teorema (Modulu maximoaren printzipioa)**.** *Izan bitez $\Omega \subset \mathbb{C}$ irekia eta konexua eta f Ω-n holomorfoa eta ez konstantea. Orduan, $|f(z)|$-k ezin du maximoa lortu Ω-n. Bereziki, f jarraitua bada $\Omega \cup \partial\Omega$ multzoan, orduan, $|f|$-k bere maximoa $\partial\Omega$-n lortzen du.*

Froga. Izan bedi $M = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|$. Definitu $A = \{z \in \Omega : |f(z)| = M\}$ eta demagun ez dela hutsa. Multzo itxia da, $|f|$ jarraitua delako.

Izan bedi $z_0 \in A$ eta $\{z : |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$. Ikus dezagun $\{z : |z - z_0| \leq r\} \subset A$ dela (eta, beraz, A irekia). Batezbesteko propietatea erabiliz,

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\,dt \leq M.$$

Ondorioz, desberdintzak berdintzak dira eta

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(z_0 + re^{it})| - M)\,dt = 0.$$

Baina $|f(z_0 + re^{it})| - M \leq 0$ denez, integrala 0 izan dadin, $|f(z_0 + re^{it})| = M$ behar da.

A irekia eta itxia denez, eta Ω konexua, $A = \Omega$. □

4.16 Teorema (Aljebraren oinarrizko teorema)**.** *Koefiziente konplexuko polinomio ez-konstante orok erro bat du plano konplexuan, gutxienez.*

Froga. Izan bedi P polinomio ez-konstantea. Baldin $P(z) \neq 0$ bada, z guztietarako, $1/P$ osoa da. Gainera, $\lim_{z\to\infty} 1/P(z) = 0$ denez, $1/P$ bornatua da. Liouvilleren teorema erabiliz, $1/P$ konstantea da eta, beraz, P ere bai. Baina esan dugunez P ez dela konstantea, kontraesan batera heldu gara eta $P(z)$ ezin da ez-nulua izan puntu guztietan; existitu behar da z_0, zeinetarako $P(z_0) = 0$ den. □

4.7 Eranskina: Cauchy-Goursaten teoremaren froga izar erako multzoetan

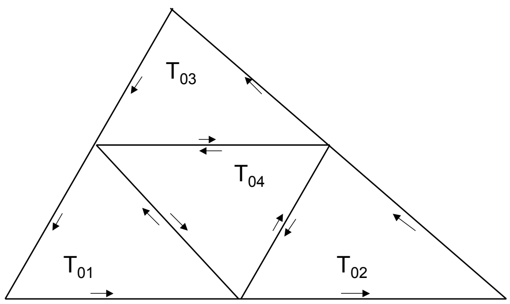
Esaten dugu multzo bat, D, izar erakoa dela, $a \in D$ existitzen bada, zeinetarako $[a, z]$ zuzenkia D-ren parte den, $z \in D$ guztietarako.

4.17 Teorema (Cauchy-Goursat)**.** *Izan bedi D izar erako multzo irekia eta f holomorfoa D-n. Izan bedi γ kurba itxia eta zatika leuna D-n. Orduan,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Froga. (i) Hasteko, kurba triangelu bat den kasurako frogatuko dugu. Hemen triangelua kurbari deitzen diogu, barruko aldea sartu barik. Notazio hau erabiliko dugu: T triangelua bada, $\tilde{T}$ izango da triangelua barruko aldearekin eta $l(T)$, T-ren perimetroa.

Oinarrizko prozesua hau da. Zati dezagun $\tilde{T}$ lau zatitan, aldeak erdibituz. Izendatu T_{01}, T_{02}, T_{03} eta T_{04}, irudiak erakusten duen moduan, zatien mugako kurbak.



Bistan denez,

$$\int_T f(z)dz = \int_{T_{01}} + \int_{T_{02}} + \int_{T_{03}} + \int_{T_{04}}.$$

Modulua hartuz eta desberdintza triangeluarra erabiliz ikusten da eskuin aldeko integral baten moduluak hasierako integralaren moduluaren laurdena, gutxienez, balio duela. Bat baino gehiago badago propietatea betetzen duena, edozein hauta daiteke, adibidez, hor idatzita dauden ordena berean lehenengo datorrena.

Izan bedi I, T-ren gaineko f-ren integrala. Triangeluen segida bat definituko dugu, $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, non $T_0 = T$ den eta T_n-tik T_{n+1}-era pasatzeko oinarrizko prozesua erabilitzen den. Orduan,

$$\left| \int_{T_n} f(z)dz \right| \geq \frac{|I|}{4^n}, \quad l(T_n) = \frac{l(T_0)}{2^n},$$

eta

$$\tilde{T}_0 \supset \tilde{T}_1 \supset \tilde{T}_2 \supset \cdots \supset \tilde{T}_n \supset \dots$$

Azken propietate horrek ziurtatzen du puntu bat dagoela, z_0, guztien ebakiduran. (Puntua bakarra da, gainera, diametroen segidak zerorantz jotzen duelako.)

Har dezagun $\epsilon > 0$. Funtzioa z_0-n deribagarria denez, existitzen da $\delta > 0$ zeinetarako, $|z - z_0| < \delta$ bada,

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

den. Idatzi $r(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$. Triangeluen diametroak zerorantz doazenez, hau betetzen duen T_n existitzen da: $T_n \subset D(z_0, \delta)$. Orduan, T_n-ko z guztietarako betetzen da desberdintza. Idatzi

$$\int_{T_n} f(z)dz = \int_{T_n} r(z)dz + \int_{T_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)]dz.$$

Azken integrala 0 da integrakizuna polinomioa delako (polinomioek jatorrizko funtzioa dute). Gainera, $z \in T_n$ bada, $|r(z)| \leq \epsilon l(T_n)$ da, eta, orduan,

$$\left| \int_{T_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{T_n} r(z)dz \right| \leq \epsilon l(T_n)^2 = 4^{-n} \epsilon l(T_0)^2.$$

Ezker atala $\geq 4^{-n}|I|$ denez, $|I| \leq \epsilon l(T_0)^2$ dugu. Beraz, $I = 0$.

(ii) D izar erakoa denez, har dezagun $a \in D$, $[a, z] \subset D$ bete dadin $z \in D$ guztietarako. Defini dezagun

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw.$$

Har dezagun $r > 0$ zeinetarako z zentroko eta r erradioko diskoa D-ren parte den. Orduan, $|h| < r$ bada, a, z eta $z + h$ erpinak dituen triangelua D-ren parte da, eta, (i) erabiliz,

$$F(z + h) = F(z) + \int_{[z,z+h]} f(w)dw.$$

Gorago egin dugun moduan, $F'(z) = f(z)$ frogatzen da. Jatorrizko funtzioa izanik f-rako D multzoan, kurba itxien gaineko integrala 0 da. □

4.8 Ariketak

1. Izan bitez $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $h : [a, b] \to \mathbb{C}$ funtzio deribagarriak, $h([a, b]) \subset D$ izanik. Egiazta ezazu katearen erregela:

$$\frac{d}{dt} f(h(t)) = f'(h(t))h'(t).$$

2. Izan bedi $f(t) = e^{(a+bi)t}$, non a eta b errealak diren. Kalkula itzazu f' eta f-ren jatorrizko funtzioa. Erabil ezazu kalkulu hori $e^{at} \sin bt$ eta $e^{at} \cos bt$ funtzio errealen jatorrizkoak idazteko.

3. Izan bedi h aldagai errealeko funtzio konplexua, $[a, b]$ tartean integragarria. Froga ezazu desberdintza hau:

$$\left| \int_a^b h(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |h(t)|\, dt.$$

   Laguntza: Idatz ezazu $\int_a^b h(t)\, dt = Re^{i\theta}$. Orduan, $R = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} h(t))\, dt$. Hemen erabil ezazu funtzio errealetarako emaitza.

4. Izan bedi C unitate zirkunferentziaren goiko erdia, 1-etik -1-eraino. Kalkula itzazu:

   (i) $\displaystyle\int_C \operatorname{Re} z\, dz.$ *Em.:* $\pi i/2$

   (ii) $\displaystyle\int_C (z^2 + z\overline{z})\, dz.$ *Em.:* $-8/3$

   (iii) $\displaystyle\int_C z \operatorname{Im}(z^2)\, dz.$ *Em.:* $-\pi/2$

5. Izan bedi $D = \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$ eta C, D-ren muga noranzko positiboan. Kalkula itzazu integral hauek:

   (i) $\displaystyle\int_C |z|\overline{z}\, dz.$ *Em.:* $7\pi i$

   (ii) $\displaystyle\int_C \frac{z}{\overline{z}}\, dz.$ *Em.:* $4/3$

   (iii) $\displaystyle\int_C |z|\, dz.$ *Em.:* -3

6. Kalkula itzazu integral hauek, beheko mugan hasierako puntua eta goiko mugan amaierako puntua duen edozein kurbaren gainean:

   (i) $\displaystyle\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\, dz.$ *Em.:* $7 + 19i$

   (ii) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}\, dz.$ *Em.:* $\dfrac{1+i}{\pi}$

(iii) $\displaystyle\int_0^i z\cos z\,dz.$ *Em.:* $\dfrac{1-e}{e}$

7. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_\gamma z^{-1/2}\,dz$, γ unitate zirkunferentziaren goiko erdia izanik, 1-etik -1-eraino, eta $z^{1/2}$ definitzeko $\sqrt{1}=-1$ ematen duen adarra hartuz.
Em.: $2-2i$

8. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_\gamma z^{-3/4}\,dz$, γ unitate zirkunferentziaren goiko erdia izanik, 1-etik -1-eraino, eta $z^{1/4}$ definitzeko $\sqrt[4]{1}=1$ ematen duen adarra hartuz.
Em.: $2\sqrt{2}(1-\sqrt{2}+i)$

9. Izan bedi γ 1-etik i-rainoko zuzenkia. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z}\,dz.$
Em.: $-\pi^2/8$

10. Izan bedi $\gamma_R=\{z:|z|=R\}$. Froga ezazu
$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz\right|\le\frac{2\pi(\ln R+\pi)}{R}.$$
Ondorioz, erabaki ezazu integralak 0-rantz jotzen duela R infiniturantz doanean.

11. Egiazta ezazu z^{-1} funtzioak integral bera duela jatorrian zentraturiko elipse guztietarako. Ondorioz, atera ezazu
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt=\frac{2\pi}{ab}\quad(a>0,b>0).$$

12. Froga ezazu
$$I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+ia)^2}\,dx\ \left(=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R}e^{-(x+ia)^2}\,dx\right)$$
ez dela a-ren menpekoa. Horretarako, integra ezazu e^{-z^2} funtzioa $-R$, R, $R+ia$ eta $-R+ia$ erpinak dituen laukizuzenean eta eraman R infiniturantz. $I(0)=\sqrt{\pi}$ dela kontuan izanda, lor ezazu honako hau:
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}.$$

13. Kalkula ezazu $\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$, ematen den zirkunferentzia hauetariko bakoitzerako, orientazio positiboarekin hartuta:
    (i) $|z-2|=1$. *Em.:* 0
    (ii) $|z-2|=3$. *Em.:* $-\pi i/3$
    (iii) $|z-2|=5$. *Em.:* $\frac{\pi i}{3}(e^{36}-1)$

14. Kalkula itzazu integral hauek Cauchyren formula erabiliz. Har ezazu zirkunferentzien noranzko positiboa.
    (i) $\int_{|z-1|=1/2} \frac{e^{1/z}}{z^2+z}\,dz$. *Em.:* 0
    (ii) $\int_{|z-2|=2} \frac{\cosh z}{z^4-1}\,dz$. *Em.:* $\frac{\pi i(e^2+1)}{4e}$
    (iii) $\int_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2-2z+2}\,dz$. *Em.:* $i\pi \sinh \pi$
    (iv) $\int_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz$. *Em.:* $\frac{2\pi i}{3}\cosh \pi$
    (v) $\int_{|z|=4} \frac{1}{(z^2+9)(z+9)}\,dz$. *Em.:* $-\frac{\pi}{45}i$
    (vi) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z}\,dz$. *Em.:* 0

15. Kalkula ezazu $\int_\gamma \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz$, γ kurbaren posizioaren arabera, jakinda itxi sinplea dela eta ez dela 0, 1 eta -1 puntuetatik pasatzen.

16. Kalkula itzazu integral hauek deribatuetarako formula integrala erabiliz. Har ezazu zirkunferentzien noranzko positiboa.
    (i) $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$. *Em.:* $-\pi^2 i/2$
    (ii) $\int_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz$. *Em.:* $-\frac{i\pi}{2e}$
    (iii) $\int_{|z|=2} \frac{z \sinh z}{(z^2-1)^2}\,dz$. *Em.:* 0
    (iv) $\int_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)}\,dz$. *Em.:* $-\pi i/27$
    (v) $\int_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}\,dz$. *Em.:* $\pi^3 i$

(vi) $\displaystyle\int_{|z+i|=2} \frac{e^{1/(z+2)}}{(z^2+4)^2}\,dz.$ *Em.:* $-\dfrac{5\pi}{64}e^{1/4}(\cos\dfrac{1}{4}+i\sin\dfrac{1}{4})$

17. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+a^2}\,dz$, γ kurba itxi sinplea bada eta $|z|\leq a$ diskoa kurbaren barrualdean badago.

Em.: $\dfrac{2\pi i}{a}\sin a$

18. Izan bedi f funtzio osoa. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_{|z|=2}\left[\frac{f(z)}{(z-i)^3}-\frac{f'(z)}{(z-i)^2}\right]dz.$

Em.: $-\pi i f''(i)$

19. Aurki ezazu f holomorfoa $|z|\leq 2$ diskoan, baldintza honekin:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=2}\frac{wf(w)}{(w-z)(w-1)}\,dw = z^2-1.$$

Em.: $f(z)=z^2-z-1$

20. Izan bitez f holomorfoa $|z-z_0|\leq R$ zirkuluan eta $M_R=\max\{|f(z)| : |z-z_0|=R\}$. Froga itzazu Cauchyren desberdintza hauek:

$$|f^{(n)}(z_0)|\leq \frac{M_R\,n!}{R^n},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

21. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ jarraian agertzen diren kasuetan, $z=x+iy$ izanik.

(i) $f(z)=y-x-3x^2i$ funtzioa, 0 eta $1+i$ puntuak lotzen dituen segmentuan.

(ii) $f(z)=\dfrac{z}{\overline{z}}$ eta bidea $\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<2, \operatorname{Im} z>0\}$ eraztunerdiaren muga, noranzko positiboan hartuta.

(iii) $f(z)=|z|\overline{z}$ funtzioa eta $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$ eremuaren muga, noranzko positiboan.

(iv) $f(z)=|z|^2$, $|z-1|=1$ ekuazioko zirkunferentzian.

22. Kalkula itzazu integral hauek:

$$\int_\gamma \sin z\cos z\,dz,\qquad \int_\gamma \frac{dz}{\cos^2 z},\qquad \int_\gamma z^i\,dz.$$

(Azkenekoan, har ezazu z^i-ren adar nagusia.) γ kurbarako bi aukera hauek erabili:

(i) 0 eta $\pi+i$ puntuak lotzen dituen segmentua;

(ii) $\gamma(t) = \sin^{2017} t + ie^t$, $0 \leq t \leq 10\pi$ parametrizazioaren bidez emandako kurba.

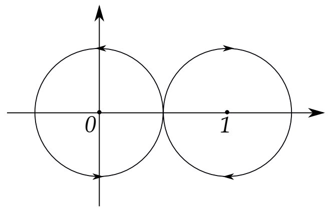
23. Kalkula itzazu integral hauek:

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz, \qquad \int_{|z|=2} \frac{z^2}{z^3-1}\, dz.$$

24. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_{|z+1|=r} \frac{z}{z^4-1}\, dz$, r parametroaren balioen arabera ($r \neq 2, \sqrt{2}$).

25. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{ze^z}{(z-a)^3}\, dz$ integrala, $|a| < 1$ izanik.

26. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)}\, dz$, non γ $|z| = 1/2$ ekuazioko zirkunferentziaren eta $|z-1| = 1/2$ ekuazioko zirkunferentziaren batura den, lehenengoa noranzko positiboan eta bigarrena noranzko negatiboan hartuta.



27. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}$ integrala kasu hauetan:

(i) C kurba $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 1, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$ eremuaren muga da;

(ii) C kurba $|z+2| = 1$ zirkunferentzia da.

28. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(t + \sin t)\, dt$, e^z funtzioa $|z| = 1$ zirkunferentzian integratuz.

29. Froga ezazu $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\, dz = \sin t$ dela, $t > 0$ guztietarako.

30. Izan bedi f holomorfoa $|z| < 2$ zirkuluan. Kalkula ezazu honako integral hau, f-ren eta haren deribatuen menpe,

$$\int_{|z|=1} \left(z + 2 + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

31. Izan bedi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funtzio osoa eta bornatua (hau da, $\exists\, M \in \mathbb{R}$ non $|f(z)| \leq M$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$).

(i) Izan bitez $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ eta izan bedi $R > \max\{|a|, |b|\}$. Froga ezazu

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{2\pi i}{b-a} \left(f(b) - f(a)\right).$$

(ii) Izan bitez $a, b \in \mathbb{C}$. Froga ezazu $R > \max\{|a|, |b|\}$ guztietarako,

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{|b-a|MR}{(R-|a|)(R-|b|)}.$$

(iii) Limiteak hartuz ($R \to \infty$), froga ezazu $f(a) = f(b)$ dela, $a, b \in \mathbb{C}$ guztietarako.

Beraz, f osoa eta bornatua bada, f konstantea da. Horrela, Liouvilleren teorema beste modu batez frogatu dugu.

32. Ariketa honetan aljebraren oinarrizko teoremaren beste froga bat egingo dugu.

Izan bedi $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ $(n \geq 1)$. Defini dezagun $Q(z)$ modu honetan: $P(z) = zQ(z) + a_0$. Orduan,

$$\frac{1}{z} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{zP(z)}.$$

Izan bedi γ_R jatorrian zentratuta dagoen eta R erradioa duen zirkunferentzia. Integra itzazu γ_R-ren gainean aurreko berdintzako atal biak.

(i) Kalkula ezazu ezker ataleko integrala.

Demagun P polinomioak ez duela errorik eta hel gaitezen kontraesan batera.

(ii) P-k errorik ez badu, bigarren ataleko lehen gaiaren integrala 0 da. Zergatik?

(iii) Froga ezazu existitzen dela $M > 0$ zeinetarako $|P(z)| \geq |a_n||z|^n/2$ den, $|z| > M$ bada. Erabil ezazu hori bigarren ataleko bigarren gaiaren integralaren modulua goitik bornatzeko γ_R-n. Ondoriozta ezazu integral horren limitea 0 dela, R infiniturantz doanean.

Kontraesan batera heldu gara. Azal ezazu zergatik.

5. Gaia

Taylorren eta Laurenten serieak. Puntu singularrak

5.1 Funtzio-segidak eta funtzio-serieak

Definizioa. Izan bedi $f_n\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funtzioa, $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako, eta izan bedi $D \subset \Omega$. Esaten dugu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida D multzoan *puntuz puntu konbergentea* dela baldin eta $z \in D$ bakoitzerako existitzen bada $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \in \mathbb{C}$, hau da,

$$\forall\, z \in D,\ \forall \epsilon > 0, \quad \exists\, n_0 = n_0(\epsilon, z) \in \mathbb{N} \,:\, \forall n \geq n_0, \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Limite horrek definitzen duen f funtzioa, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren *limite puntuala* (edo *puntuz puntuko limitea*) da D multzoan eta $f_n \xrightarrow{p} f$ D-n idazten da.

Definizioa. Izan bitez $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida eta f haren limite puntuala D multzoan. Esaten dugu $\{f_n\}$ D-n *uniformeki konbergentea* dela baldin eta

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \geq n_0, \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall\, z \in D.$$

Kasu honetan, $f_n \xrightarrow{u} f$ D-n idatziko dugu.

Konbergentzia uniformearen definiziotik abiatuta, berehala ikusten da propietate hau: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak f-rantz konbergitzen du uniformeki baldin eta soilik baldin

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

bada. Hala, gai positiboko zenbakizko segida batek ematen du konbergentzia uniformea eta askotan errazagoa izaten da horren azterketa.

Oharra. Definizioak kontuan hartuz, argi dago $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformeki konbergentea bada, orduan, puntuz puntu konbergentea ere badela. Alderantzizkoa, oro har, ez da betetzen. Badaude puntuz puntu konbergenteak diren funtzio-segidak, uniformeki konbergenteak ez direnak.

Definizioa. Izan bitez $f_n\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $D \subset \Omega$. Esaten dugu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea D multzoan *puntuz puntu (uniformeki) konbergentea* dela baldin eta batura partzialen segida, $\{S_n = f_1 + \cdots + f_n\}$, D multzoan puntuz puntu (uniformeki) konbergentea bada. $\{S_n\}$ segidaren limite puntuala S funtzioa baldin bada, esaten dugu S seriearen *batura* dela eta $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ idatzi.

Definizioa. Esaten dugu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea *absolutuki puntuz puntu (uniformeki) konbergentea* dela baldin eta $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ puntuz puntu (uniformeki) konbergentea bada.

Konbergentzia absolutuaren analisia errazagoa da konbergentzia baino, gai positiboko serie baten izaera aztertu behar delako. Serie horietarako analisi errealeko teknikak ezagunak dira (konparazioa eta konbergentzia-irizpideak).

5.1 Proposizioa. *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea absolutuki puntuz puntu (uniformeki) konbergentea bada, orduan puntuz puntu (uniformeki) konbergentea da.*

5.2 Teorema (Weierstrassen M-testa)**.** *Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida eta demagun existitzen dela $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida bat, zeinetarako $|f_n(z)| \leq M_n$ den, $z \in D$ guztietarako. $\sum M_n$ seriea konbergentea bada, orduan $\sum f_n$ absolutuki eta uniformeki konbergentea da D-n.*

5.3 Teorema. *Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Ω-n definitutako funtzio-segida, f_n jarraitua izanik, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Izan bedi γ kurba bat Ω-n.*

(i) $f_n \xrightarrow{u} f$ *Ω-n bada, orduan, f jarraitua da Ω-n.*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *uniformeki konbergentea bada Ω-n, orduan* $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jarraitua da Ω-n.*

(iii) $f_n \xrightarrow{u} f$ *γ-n bada,* $\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$

5.2 Berretura-serieak

Funtzio-serieen artean, garrantzi handikoak dira berretura-serieak, hau da, seriearen batura partzialak polinomioak direneko kasua.

Definizioa. Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$ eta $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako. Esaten dugu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ moduko funtzio-seriea z_0 puntuan zentratutako *berretura-seriea* dela.

Berretura-serieen izaera aztertuko dugu. Horretarako, gogora dezagun gai positiboko serieetarako Cauchyren irizpidea.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. $\{a_n\}$ segidaren *behe-limitea*, $\liminf_{n\to\infty} a_n$, honela definitzen da:

- baldin $\inf\limits_{k\geq n} a_k = -\infty$ bada, orduan, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$;
- bestela, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\inf\limits_{k\geq n} a_k\big) = \sup\big(\inf\limits_{k\geq n} a_k\big)$ ($+\infty$ izan daiteke).

Era berean, $\{a_n\}$ segidaren *goi-limitea*, $\limsup_{n\to\infty} a_n$, honela definitzen da:

- baldin $\sup\limits_{k\geq n} a_k = +\infty$ bada, orduan $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
- bestela, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\sup\limits_{k\geq n} a_k\big) = \inf\big(\sup\limits_{k\geq n} a_k\big)$ ($-\infty$ izan daiteke).

5.4 Proposizioa. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.*

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea bada, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren goi-limitea (behe-limitea) limite finitua edo infinitua duten haren azpisegiden limiteen arteko handiena (txikiena) da.

5.5 Teorema (Cauchyren irizpidea edo erroaren irizpidea)**.** *Izan bitez $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.*

(i) Baldin $l < 1$ bada, orduan, $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Baldin $l > 1$ bada, orduan, $\sum a_n$ dibergentea da.

Gai positiboko seriea denez, $l \in [0, +\infty]$ da.

5.6 Teorema (Cauchy-Hadamard)**.** *Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ guztietarako eta $\Lambda = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Orduan,*

(i) $0 < \Lambda < \infty$ baldin bada, $R = 1/\Lambda$ izendatuz, $\sum a_n(z-z_0)^n$ absolutuki konbergentea da $|z-z_0| < R$ diskoan; uniformeki konbergentea da $|z-z_0| \leq \rho$ diskoan, $\rho < R$ guztietarako; eta dibergentea da $|z-z_0| > R$ denean.

(ii) $\Lambda = +\infty$ bada, $\sum a_n(z-z_0)^n$ dibergentea da $z \neq z_0$ guztietarako.

(iii) $\Lambda = 0$ baldin bada, $\sum a_n(z-z_0)^n$ absolutuki konbergentea da $\mathbb{C}$ osoan eta uniformeki konbergentea $|z-z_0| \leq \rho$ diskoan, $\rho > 0$ edozein izanik.

Froga. Har dezagun $\sum |a_n(z-z_0)^n|$ gai positiboko seriea eta erabil dezagun Cauchyren irizpidea.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \Lambda|z-z_0|.$$

(i) $|z - z_0| < R = 1/\Lambda$ bada, $\Lambda|z - z_0| < 1$ da eta, Cauchyren irizpidearen arabera, $\sum |a_n(z - z_0)^n|$ konbergentea da, hau da, $\sum a_n(z - z_0)^n$ (absolutuki) konbergentea da.

$|z - z_0| > R$ bada, orduan, $\Lambda|z - z_0| = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} > 1$ denez, infinitu n-tarako $\sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} > 1$; beraz, $|a_n(z - z_0)^n| > 1$ infinitu n-tarako. Ondorioz, $\lim_{n\to\infty} a_n(z - z_0)^n \neq 0$ eta seriea dibergentea da.

Azkenik, $|z - z_0| \leq \rho < R$ bada, $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|\rho^n$ eta $\sum |a_n|\rho^n$ konbergentea da $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\rho^n} = \Lambda\rho < 1$ delako; beraz, Weierstrassen M-testaren arabera, $\sum a_n(z - z_0)^n$ (absolutuki) uniformeki konbergentea da.

(ii) $\Lambda = +\infty$ bada, $z \neq z_0$ denean $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = +\infty$ eta, beraz, $\lim_{n\to\infty} a_n(z - z_0)^n \neq 0$. Ondorioz, $\sum a_n(z - z_0)^n$ dibergentea da.

(iii) $\Lambda = 0$ bada, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n} = 0 < 1$ da $z \in \mathbb{C}$ guztietarako, eta Cauchyren irizpideak ziurtatzen digu $\sum a_n(z - z_0)^n$ (absolutuki) konbergentea dela $\mathbb{C}$ osoan.

Gainera, $\rho > 0$ bada, $|z - z_0| \leq \rho$ denean, $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|\rho^n$ da eta, $\sum |a_n|\rho^n$ konbergentea denez, berriro, Weierstrassen M-testaren bidez ziurta dezakegu $\sum a_n(z - z_0)^n$ (absolutuki) uniformeki konbergentea dela $|z - z_0| \leq \rho$ zirkuluan. □

Definizioa. Izan bitez $\sum a_n(z - z_0)^n$ berretura-seriea eta $\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Baldin $0 < \Lambda < +\infty$ bada, izan bedi $R = 1/\Lambda$. Esaten da R zenbakia $\sum a_n(z - z_0)^n$ berretura-seriearen *konbergentzia-erradioa* dela eta $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ seriearen *konbergentzia-diskoa* edo *konbergentzia-zirkulua.*

$\Lambda = +\infty$ bada, seriea z_0 puntuan soilik da konbergentea; esaten da konbergentzia-erradioa 0 dela eta ez dago konbergentzia-zirkulurik. Aldiz, $\Lambda = 0$ bada, seriea konbergentea da $\mathbb{C}$ osoan.

Oharra. $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existitzen bada, orduan $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Horrek kalkulua erraztu egin dezake batzuetan. Baina gerta daiteke ezkerraldeko limitea ez existitzea eta eskuinaldekoa, bai. Eta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ez bada existitzen ere, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ beti existitzen da, finitua edo infinitua. Adibidez, $a_n = 2$ bada n bikoitia denean eta $a_n = 1$ bada n bakoitia denean, orduan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1/2, & n \text{ bikoitia denean,} \\ 2, & n \text{ bakoitia denean.} \end{cases}$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ez da existitzen, baina $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Adibideak.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ seriea konbergentea da $|z| < 1$ zirkuluan, zeren eta

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konbergentea da plano konplexu osoan, zeren eta

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$. Kasu honetan $a_m = 2^n$, $m = n!$ denean, eta $a_m = 0$, bestela.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{(n-1)!}} = 1.$$

  Beraz, konbergentzia-erradioa $R = 1$ da.

Berretura-serie baten batugaiak polinomioak direnez, argi dago funtzio jarraituak direla. Gainera, konbergentzia-zirkuluaren barruan geratzen den edozein zirkulu itxitan konbergentzia uniformea da; beraz, berretura-serie baten batura jarraitua da konbergentzia-zirkuluan, lehenago enuntziatu dugun teoremaren arabera. Ikus dezagun zer gertatzen den deribagarritasunarekin.

5.7 Teorema. *Izan bitez $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ berretura-seriea, R, haren konbergentzia-erradioa, eta f funtzioa, haren batura konbergentzia-zirkuluan. Orduan,*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ *berretura-seriearen konbergentzia-erradioa R da.*

(ii) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, $|z-z_0| < R$ *bada.*

Are gehiago, arrazonamendu bera behin eta berriro aplikatuz, $k \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}, |z-z_0| < R \text{ denean.}$$

Horren ondorioz, berretura-serie batek funtzio holomorfo bat definitzen du bere konbergentzia-zirkuluan. Seriearen gaiak banan-banan deribatuz gero lortzen den berretura-seriea konbergentea da zirkulu berean eta hasierako seriearen baturaren deribaturantz konbergitzen du. Gainera, batura infinitu bider deribagarria da.

5.8 Teorema. *Izan bitez $R > 0$ eta $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $|z-z_0| < R$ zirkuluan. Orduan,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Ondorioz, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ bada $|z-z_0| < R$ zirkuluan, orduan, $a_n = b_n$, n guztietarako.

Teorema horren arabera, berretura-serie baten baturak seriearen koefizienteak modu bakarrean definitzen ditu.

5.3 Taylorren serieak

5.9 Teorema (Taylorren teorema)**.** *Izan bedi f holomorfoa $|z-z_0| < R$ diskoan. Orduan,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R \text{ denean.}$$

Froga. Izan bedi z, non $|z-z_0| < R$ den. Har dezagun $r < R$, non $|z-z_0| < r$ den. Cauchyren formula integralaren arabera,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Serie geometrikoaren batura erabiliz,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{(w-z_0)\left(1 - \dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Serie hori uniformeki konbergentea da $|w-z_0| = r$ zirkunferentzian, eta, goiko formulan sartuta, batukaria integraletik atera daiteke,

$$\begin{aligned}
f(z) =& \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \\
=& \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \\
=& \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.
\end{aligned}$$

□

Oharra. Teoremaren frogak Cauchyren formula deribatuetarako ematen du. Frogaren azken urratsean seriearen koefizienteak idazteko erabili dugun arren, ez zen beharrezkoa.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw$$

betetzen dela ikusi eta gero, horrek erakusten du f funtzioa berretura-serie baten batura dela $|z - z_0| < R$ zirkuluan. Baina badakigu hori berretura-serie bakar batek bete dezakeela eta seriearen koefizienteek $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ izan behar dutela. Ondorioz, Cauchyren formula deribatuetarako ateratzen da.

Definizioa. Esaten da $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ berretura-seriea f funtzioaren z_0 puntuko *Taylorren seriea* dela.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. Esaten dugu f z_0-n *analitikoa* dela baldin eta existitzen bada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ berretura-seriea, $|z - z_0| < r$ moduko zirkulu batean konbergentea, $r > 0$ izanik, eta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r \text{ denean.}$$

Taylorren teoremaren arabera, f holomorfoa bada z_0-n, analitikoa da. Baina alderantzizkoa ere egia da: funtzio analitikoak holomorfoak dira berretura-serieen baturen propietateen arabera. Horregatik, funtzio konplexuetarako, holomorfo eta analitiko termino baliokideak dira.

Adibideak.

- $\displaystyle e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \; \forall\, z \in \mathbb{C}.$
- $\displaystyle \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; \forall\, z \in \mathbb{C}.$
- $\displaystyle \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \; \forall\, z \in \mathbb{C}.$
- $\displaystyle \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \; |z| < 1 \text{ denean.}$
- $\displaystyle \operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \; |z| < 1 \text{ denean.}$

5.10 Korolarioa. *Izan bitez Ω ireki konexua eta $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfoa Ω-n. $z_0 \in \Omega$ existitzen bada, non $f^{(k)}(z_0) = 0$ den $k = 0, 1, \dots$ guztietarako, orduan $f(z) = 0$, $z \in \Omega$ guztietarako.*

Oharra. Aurreko korolarioak dioena ez da betetzen $\mathbb{R}$-n. Adibidez,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

bada, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots$ guztietarako, baina f ez da funtzio nulua, hots, $f(x) \neq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Adibide horrek erakusten digu funtzio erreal bat $\mathcal{C}^\infty$ izan daitekeela, analitiko izan gabe.

5.11 Teorema. *Izan bedi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ berretura-seriea; R, haren konbergentzia-erradioa, $0 < R < \infty$; eta f, haren batura konbergentzia-zirkuluan.*

(i) $|z - z_0| = R$ zirkunferentzian badago gutxienez puntu bat, non f ez den holomorfoa.

(ii) $R = \inf\{|z - z_0| \colon f$ ez da holomorfoa z-n$\}$.

5.12 Teorema. *Izan bitez f holomorfoa z_0-n eta $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zenbaki konplexuzko segida, $z_n \neq z_0$ izanik $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Baldin $f(z_n) = 0$ bada, $n \geq 1$ guztietarako, orduan, $f \equiv 0$ da z_0-ren ingurune batean.*

Froga. Frogatuko dugu $f^{(n)}(z_0) = 0$ dela, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Horretarako, indukzio matematikoaren printzipioa erabiliko dugu.

f jarraitua denez z_0-n, $f(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Orain, demagun $f^{(j)}(z_0) = 0$ dela $j < n$ guztietarako. Orduan,

$$f(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m = (z - z_0)^n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^{m-n},$$

beraz,

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^{m-n}.$$

Bereziki, $z = z_k$ hartuz,

$$0 = \frac{f(z_k)}{(z_k - z_0)^n} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z_k - z_0)^{m-n}.$$

k ∞-rantz eramanez, seriearen gai guztiak 0-ra doaz, lehenengoa izan ezik, beraz, $f^{(n)}(z_0) = 0$. $\square$

Oharra. Aurreko teoremaren ondorioz, honako hauek ere betetzen dira:

(i) Izan bedi f holomorfoa D ireki konexuan. D-ko puntu baterantz konbergitzen duen segida baten puntuetan f anulatzen bada, segidaren gaiak limitearen desberdinak izanik, $f \equiv 0$ da D-n.

(ii) Izan bitez f eta g holomorfoak D ireki konexuan. $f(z_n) = g(z_n)$ bada $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida ez-konstanteko puntuetan eta $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in D$ bada, f eta g berdinak dira D-ko puntu guztietan.

(iii) Izan bitez f eta g holomorfoak D ireki konexuan. f eta g berdinak badira $A \subset D$ multzoan eta A-k metatze-puntu bat badu D-n, f eta g berdinak dira D-ko puntu guztietan.

5.13 Korolarioa. *Izan bedi f osoa eta ez-nulua.*

(i) Multzo trinko batean, f-ren zero kopurua finitua da (beraz, multzo bornatuetan ere bai);

(ii) f-ren zeroen multzoa finitua edo kontagarria da.

5.4 Laurenten serieak

5.14 Teorema. *Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$ eta $0 \le r < R \le \infty$. Izan bedi f holomorfoa $r < |z - z_0| < R$ eraztunean. Orduan, $r < |z - z_0| < R$ bada,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

non

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

den $n \in \mathbb{Z}$ guztietarako, $\rho \in (r, R)$ edozein izanda.

Gainera, seriea absolutuki konbergentea da $r < |z - z_0| < R$ eraztunean, eta uniformeki konbergentea da $r_1 \le |z - z_0| \le R_1$ eraztunean, $r < r_1 < R_1 < R$ bada.

Froga. Har ditzagun z eraztuneko puntua eta r', R', zeinetarako $r < r' < R' < R$ eta $r' < |z - z_0| < R'$ betetzen diren. Izan bedi γ bidea z-n zentraturiko zirkunferentzia bat, orientazio positiboarekin hartuta, $r' < |w - z_0| < R'$ eraztunaren barrualdean. Cauchyren teorema orokortuagatik,

$$\int_{|w-z_0|=R'} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \int_{|w-z_0|=r'} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = 0.$$

Cauchyren formula aplikatuz γ-ren gaineko integralean,

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \int_{|w-z_0|=R'} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \int_{|w-z_0|=r'} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Lehenengo integralean, Taylorren teoremaren frogan egin dugun bezala,

$$\frac{1}{w-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

berdintza erabiliko dugu, serie hori uniformeki konbergentea baita $|w-z_0|=R'$ zirkunferentzian. Bigarren integralean, serie geometrikoa aldatuko dugu (uniformeki) konbergentea izan dadin $|w-z_0|=r'$ zirkunferentzian, eta

$$\frac{1}{w-z}=-\frac{1}{z-z_0+z_0-w}=\frac{-1}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

idatziko dugu. Integraletan ordezkatuz,

$$\begin{aligned} f(z)=&\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R'}f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r'}f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,dw\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R'}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\Big)(z-z_0)^n\\ &+\sum_{m=-\infty}^{-1}\Big(\int_{|w-z_0|=r'}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{m+1}}\,dw\Big)(z-z_0)^m, \end{aligned}$$

non, azken urratsean, bigarren batukarian $n+1=-m$ aldaketa egin dugun.

Bestalde, f holomorfoa denez $r<|w-z_0|<R$ eraztunean, r' eta R' erradioetako zirkunferentzietan integratu beharrean, eraztunaren barruan dagoen edozein zirkunferentziak balio du integratzeko, Cauchyren teoremaren arabera. □

Definizioa. f holomorfoa bada $r<|z-z_0|<R$ eraztunean, f-ren *Laurenten seriea* eraztun horretan honako hau da:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

non, $\rho\in(r,R)$ edozein izanda,

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,\quad \forall\, n\in\mathbb{Z}.$$

Baldin eraztuna $0<|z-z_0|<R$ erakoa bada, funtzioa holomorfoa da z_0-ren ingurune batean, baina agian ez z_0-n bertan. Eraztun horretarako lortzen den Laurenten serieak z_0-ren inguruneko funtzioaren portaera aztertzeko balio du. Berre-

tzaile negatiboak dituen $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ parteari Laurenten seriearen *parte nagusia* deritzo, eta $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ Laurenten seriearen *parte erregularra* edo analitikoa da.

Oharra. Funtzio baten Laurenten seriezko garapena bakarra da eraztun batean, baina gerta daiteke funtzioa holomorfoa izatea puntu berean zentratutako zenbait eraztunetan. Garapenak desberdinak izango dira eraztun batean edo bestean.

Adibideak.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, $z_0 = 0$.

f ez da holomorfoa 0 eta 1 puntuetan, beraz, holomorfoa da $z_0 = 0$ puntuan zentraturiko bi eraztunetan: $0 < |z| < 1$ eta $1 < |z|$.

- $0 < |z| < 1$ eraztunean,

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n.$$

- $|z| > 1$ eraztunean,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n.\end{aligned}$$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$.

f holomorfoa da jatorrian zentraturiko hiru eraztunetan: $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ eta $2 < |z|$.

- $|z| < 1$ diskoan: f holomorfoa da $z_0 = 0$ puntuan, beraz Laurenten seriea Taylorren seriea da kasu honetan.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.\end{aligned}$$

- $1 < |z| < 2$ eraztunean,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

- $|z| > 2$ denean,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{z}\Big)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1}z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}(2^{-(n+1)}-1)z^n.\end{aligned}$$

$z_0 = 1$ puntuan zentratutako eraztunak hartzen baditugu, bi aukera ditugu.

- $0 < |z-1| < 1$ eraztunean,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-1}\frac{-1}{2-z} = -\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n.\end{aligned}$$

- $|z-1| > 1$ bada,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-1}\frac{-1}{2-z} = -\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)^n = \sum_{n=-\infty}^{-2}(z-1)^n.\end{aligned}$$

(3) $f(z) = e^{1/z^2}$, $z_0 = 0$.

Kasu honetan, eraztun bakarra dugu, $|z| > 0$, hain zuzen ere.

$$e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{z^2}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^{2n}.$$

(4) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$,

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n+2)!}, \quad \forall\, z \neq 0.$$

5.5 Puntu singularrak. Sailkapena

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$. f holomorfoa baldin bada z_0-n, esaten dugu z_0 f-ren *puntu erregularra* dela. f ez bada holomorfoa z_0-n, baina z_0-ren edozein ingurunetan baldin badaude puntuak non f holomorfoa den, orduan, esaten dugu z_0 f-ren *puntu singularra* dela.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$ f-ren puntu singularra. Esaten dugu z_0 f-ren *puntu singular isolatua* dela baldin eta existitzen bada $r > 0$, zeinetarako f holomorfoa den $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean.

Adibideak.

- $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$. f-ren puntu singularrak 0 eta $\dfrac{1}{k\pi}$ puntuak dira, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ izanik.

  $z_0 = 0$ ez da f-ren puntu singular isolatua, 0-n zentratutako edozein zirkulutan $\dfrac{1}{k\pi}$ moduko zenbakiak daudelako. Aldiz, $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ f-ren puntu singular isolatua da $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ guztietarako: f holomorfoa da $|z - z_k| < \dfrac{1}{|k|(|k|+1)\pi}$ eraztunean.

- $f(z) = \operatorname{Log} z$ logaritmoaren adar nagusia bada $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ multzoan, haren puntu singularrak zenbaki erreal ez-positiboak dira, eta ez dira isolatuak: $x \in (-\infty, 0]$ bada, x-n zentratutako zirkulu guztietan infinitu zenbaki negatibo daude.

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \mathbb{C}$ f-ren puntu singular isolatua. Har dezagun $r > 0$ zeinetarako f holomorfoa den $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean. Izan bedi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

f-ren Laurenten seriea eraztun horretan.

(i) Esaten da z_0 f-ren *puntu singular gaindigarria* edo *ekidingarria* dela baldin $a_n = 0$ bada $n < 0$ guztietarako, hau da, Laurenten seriearen parte singularra nulua bada.

(ii) Esaten da z_0 f-ren m *ordenako poloa* dela baldin $a_{-m} \neq 0$ bada eta $a_n = 0$, $n < -m$ guztietarako, hau da, Laurenten seriearen parte singularrean batugai kopuru finitu bat badago. $m = 1$ bada, esaten dugu z_0 f-ren *polo sinplea* dela.

(iii) Esaten dugu z_0 f-ren *puntu singular esentziala* dela baldin eta $m \in \mathbb{N}$ guztietarako, existitzen bada $n < -m$ non $a_n \neq 0$ den, hau da, Laurenten seriearen parte nagusian infinitu batugai ez-nulu baldin badaude.

Adibideak.

- $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. $z_0 = 0$ f-ren puntu singular gaindigarria da, zeren eta isolatua baita eta, gainera,

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, \quad |z| > 0 \text{ denean.}$$

- $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. $z_k = k\pi$ puntu singular isolatua da $k \in \mathbb{Z}$ guztietarako.

  Azter dezagun $z_0 = 0$ puntua.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} - \dots\right)} \\ &= \frac{|}{z}\left(1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \dots;\end{aligned}$$

  beraz, $z_0 = 0$ f-ren 1 ordenako poloa edo polo sinplea da.

- $f(z) = e^{1/z}$. f-ren puntu singular bakarra $z_0 = 0$ da eta, ondorioz, isolatua.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \implies z_0 = 0 \text{ puntu singular esentziala.}$$

5.15 Teorema (Puntu singular gaindigarrien karakterizazioa)**.** *Izan bedi z_0 f-ren puntu singular isolatua. Baliokideak dira:*

(i) z_0 *f-ren puntu singular gaindigarria da.*

(ii) $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

(iii) f *bornatua da* $0 < |z - z_0| < r_1$ *erako eraztun batean.*

Froga. z_0 f-ren puntu singular isolatua denez, existitzen da $r > 0$, zeinetarako f holomorfoa den $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean. Izan bedi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ f-ren Laurenten seriea eraztun horretan.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Demagun z_0 f-ren puntu singular gaindigarria dela, hau da, f-ren Laurenten seriearen parte singularra nulua dela,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Orduan,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0 \in \mathbb{C}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Demagun orain $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ dela. Limitea existitzen denez, funtzioa bornatua da z_0-ren ingurune batean.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Demagun f bornatua dela $0 < |z - z_0| < r_1$ eraztunean, hau da, existitzen dela $M > 0$, zeinetarako $|f(z)| \leq M$ den, $0 < |z - z_0| < r_1$ bada. Dakigunez, f-ren Laurenten seriea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ bada $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

$\rho \in (0, r)$ edozein izanik. Orduan,

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

$n < 0$ denean, $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{M}{\rho^n} = \lim\limits_{\rho\to 0} M\rho^{-n} = 0$ denez, $a_n = 0$ da $n < 0$ guztietarako, hots, z_0 puntu singular gaindigarria da. □

Puntu singularra gaindigarria bada, defini dezagun

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & 0 < |z - z_0| < r \text{ bada,} \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z), & z = z_0 \text{ bada.} \end{cases}$$

Orduan, g holomorfoa da z_0-n.

Definizioa. $z_0 \in \mathbb{C}$ g funtzio holomorfoaren *zeroa* da $g(z_0) = 0$ bada. g ez bada nulua z_0-ren ingurune batean, z_0-n nulua ez den g-ren deribatu bat existitzen da. Baldin $g^{(k)}(z_0) = 0$ bada, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ balioetarako, eta $g^{(m)}(z_0) \neq 0$ bada, orduan, esaten da z_0 g-ren m *ordenako zeroa* dela.

Baldin g eta haren ordena guztietako deribatuak anulatzen badira z_0 puntuan, ikusi dugu g funtzioa z_0-ren ingurune batean anulatzen dela. Horregatik, g ez bada nulua z_0-ren ingurune batean, anulatzen ez den lehen deribatu bat egongo da eta zeroaren ordena ondo definituta dago.

Funtzioak m ordenako zeroa badu z_0-n, haren Taylorren seriearen lehen gai eznulua $(z - z_0)^m$-ri dagokiona da. Gainera, $g(z) = (z - z_0)^m\tilde{g}(z)$ idatz daiteke, non $\tilde{g}$ holomorfoa den eta $\tilde{g}(z_0) \neq 0$.

5.16 Teorema (Poloen karakterizazioa)**.** *Izan bedi z_0 f-ren puntu singular isolatua. Baliokideak dira:*

(i) z_0 f-ren m ordenako poloa da.

(ii) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

(iii) *Existitzen dira* $r > 0$ *eta* g *holomorfoa* $|z - z_0| < r$ *diskoan, zeinetarako* $g(z_0) \neq 0$ *eta* $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ *den,* $0 < |z - z_0| < r$ *denean.*

(iv) $1/f$ *funtzioak* m *ordenako zeroa du* z_0 *puntuan (singularitatea gainditu eta gero).*

Froga. z_0 f-ren puntu singular isolatua denez, existitzen da $r > 0$, zeinetarako f holomorfoa den $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean. Izan bedi $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ f-ren Laurenten seriea $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Lehenengo eta behin, demagun z_0 f-ren m ordenako poloa dela. Orduan,

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

$a_{-m} \neq 0$ izanik. Beraz,

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \to z_0} \big(a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots\big) = a_{-m} \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Defini dezagun $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, $z \neq z_0$-rako. Hipotesiz, $\lim_{z \to z_0} g(z) = l \in \mathbb{C} - \{0\}$ dugu. Orduan, z_0 puntu singular gaindigarria da g-rako eta, $g(z_0) = l$ definituz, funtzio holomorfoa da z_0-n. Orduan, (iii) betetzen da.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) g z_0-n holomorfoa denez, eta $g(z_0) \neq 0$, $1/g$ z_0-n holomorfoa da. $1/f(z) = (z - z_0)^m (1/g(z))$ denez, bistan da (iv) betetzen dela.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Demagun z_0 $1/f$ funtzioaren m ordenako zeroa dela. Horrek esan nahi du $\dfrac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m h(z)$ dela, non h holomorfoa den z_0-ren ingurune batean eta $h(z_0) \neq 0$. Orduan, $g = 1/h$ hartuz, (iii) betetzen da.

(iii) $\Rightarrow$ (i) g-ren Taylorren seriea hartuz, bistan da f-ren Laurenten seriea

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots$$

dela. Beraz, z_0 f-ren m ordenako poloa da. □

Hortik, ordena adierazten ez duen poloen karakterizazio bat ondorioztatzen da.

5.17 Korolarioa. *Izan bedi* z_0 f*-ren puntu singular isolatua.* z_0 *poloa da baldin eta soilik baldin* $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ *bada.*

Puntu singular gaindigarrien eta poloen karakterizazioak kontuan hartuta, honako teorema hau berehalakoa da.

5.18 Teorema (Puntu singular esentzialen karakterizazioa)**.** *Izan bedi z_0 f-ren puntu singular isolatua. z_0 f-ren puntu singular esentziala da baldin eta soilik baldin $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existitzen ez bada (ez da zenbaki konplexua, ez eta ∞ ere).*

Adibideak.

- $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Funtzio honen puntu singular bakarra $z_0 = 0$ da eta gaindigarria da, zeren eta
$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$
- $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Ikusi dugu f-ren puntu singular isolatuak $z_k = k\pi$ modukoak direla, $k \in \mathbb{Z}$ izanik. $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ definituz, $g(z) = \sin z$ da eta
$$g(z_k) = 0, \quad g'(z_k) = \cos z_k = (-1)^k \neq 0.$$
Beraz, $z_k = k\pi$ polo sinplea da $k \in \mathbb{Z}$ guztietarako.
- $f(z) = e^{1/z}$ funtzioaren puntu singular bakarra $z_0 = 0$ da. $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ existitzen ez denez, $z_0 = 0$ puntu singular esentziala da.

Definizioa. Izan bedi $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. f-ren puntu singular ez-gaindigarriak poloak baldin badira, esaten da f *meromorfoa* dela. Hau da, f meromorfoa da puntu singular guztiak isolatuak badira eta puntu singular esentzialik ez badago.

Adibidez, funtzio arrazionalak meromorfoak dira.

5.19 Teorema (Sojotski-Weierstrass-Cassoratiren teorema)**.** *Izan bedi z_0 f-ren puntu singular esentziala. f holomorfoa bada $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean, orduan, $\delta \in (0, r)$ guztietarako, $f(\{z\colon 0 < |z - z_0| < \delta\})$ dentsoa da $\mathbb{C}$-n, hau da, $A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ guztietarako existitzen da $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki konplexuen segida bat, zeinetarako $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ eta $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$ betetzen diren.*

Froga. Hasteko, har dezagun $A = \infty$. f ez dago bornatuta $0 < |z - z_0| < \delta/n$ eraztunean; bestela, z_0 gaindigarria izango litzateke. Orduan, existitzen da z_n eraztun horretan, zeinetarako $|f(z_n)| > n$ den. Beraz, $\{z_n\}$ segidak betetzen du eskatutakoa.

Izan bedi orain $A \in \mathbb{C}$. Existitzen bada segida bat, $\{z_n\}$, z_0-rantz konbergentea eta $f(z_n) = A$ betetzen duena, badugu behar duguna. Existitzen ez bada, $f(z) \neq A$ da $0 < |z - z_0| < \delta'$ eraztunean ($\delta' \leq \delta$) eta
$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

holomorfoa da eraztun horretan. z_0 φ-ren puntu singular esentziala da. Ezin da izan ez gaindigarria, ez poloa, zeren, kasu horietan, $\lim_{z\to z_0}\varphi(z)$ existituko bailitzateke $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$-n eta, ondorioz, $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ere. Baina hori ezinezkoa da z_0 f-ren puntu singular esentziala delako. Froga honen lehen partean ikusi dugunaren arabera, $\{z_n\}$ segida z_0-rantz konbergentea existitzen da, zeinetarako $\lim_{n\to\infty}\varphi(z_n)=\infty$ den. Hortaz, $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=A$ izango da segida horretarako. $\square$

5.20 Teorema (Picarden teorema)**.** *Izan bitez $f\colon\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eta z_0 f-ren puntu singular esentziala. Orduan, $A\in\mathbb{C}$ guztietarako, salbu agian puntu baterako (salbuespen-puntua izenaz ezagutzen dena), existitzen da $\{z_n\}$ segida, zeinetarako $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ den eta $f(z_n)=A$, $n\in\mathbb{N}$ guztietarako.*

Alegia, $f(\{z\colon 0<|z-z_0|<\epsilon\})$ multzoa edo $\mathbb{C}$ osoa da edo puntu bakar bat falta zaio $\mathbb{C}$ osoa izateko.

Adibidea. $f(z)=e^{-1/z^2}$ funtzioak puntu singularra du $z_0=0$ puntuan. Puntu singular esentziala da, eta funtzioaren Laurenten seriezko garapena $\mathbb{C}-\{0\}$ multzoan honako hau da:

$$e^{-1/z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{z^2}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n}},\ \ |z|>0 \text{ bada.}$$

Izan bedi $A\in\mathbb{C}$.

- $A=0$ baldin bada, ez da existitzen $z\in\mathbb{C}$ non $f(z)=A$ den, beraz $A=0$ salbuespen-puntua da.
- $A\neq 0$ bada, $e^{-1/z^2}=A$ ekuazioak $z_n=\dfrac{i}{\sqrt{\ln|A|+i(\operatorname{Arg}A+2\pi n)}}$ soluzioak ditu eta, $\lim_{n\to\infty} z_n=0$ denez, edozein $\epsilon>0$ emanda, beti daude $|z_n|<\epsilon$ betetzen duten balioak.

5.6 Puntu singularra ∞-n

Baldin f funtzioa holomorfoa bada $|z|>R$ erako eraztun batean, ∞ puntu singular isolatutzat har daiteke.

Defini dezagun $\varphi(z)=f(1/z)$. Orduan, φ holomorfoa da $0<|z|<1/R$ eraztunean eta 0 puntu singular isolatua da φ-rako. φ-ren puntu singulartzat 0-k duen izaera (gaindigarria, poloa, esentziala) hartzen da f-ren ∞ puntu singularrerako.

Aurretik ikusi ditugun karakterizazioak kontuan hartuta, hau esan dezakegu:

(i) ∞ gaindigarria da, $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existitzen bada $\mathbb{C}$-n.

(ii) ∞ poloa da, $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$ bada. Poloaren ordena m da,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^{m-1}}=\infty \quad\text{eta}\quad \lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^m}=c_m\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

badira.

(iii) ∞ esentziala da, $\lim_{z\to\infty} f(z)$ ez bada existitzen $\overline{\mathbb{C}}$-n.

Adibideak.

- $P(z)$ m mailako polinomioa bada, ∞ m ordenako poloa da P-rako.
- $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ funtzio arrazionalerako, ∞ poloa da P-ren maila Q-ren maila baino handiagoa bada; bestela, puntu singular gaindigarria da.
- ∞ puntu singular esentziala da e^z-rako.

5.7 Ariketak

1. Aurki ezazu serie hauen konbergentzia-erradioa:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\cos in)\, z^n \qquad\qquad \text{(iv)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

$$\text{(v)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 4^{n(-1)^n} z^n \qquad\qquad \text{(vi)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^2 z^n$$

Em.: (i) 0, (iI) 1, (iii) $1/e$, (iv) 4, (v) $1/4$, (vi) 1.

2. Aurki ezazu $\sum_n a_n z^n$ seriearen konbergentzia-erradioa, $a_n = n^2$ bada, n bikoitirako, eta $a_n = 2^n$, n bakoitirako.

Em.: $1/2$.

3. Kalkula itzazu $\sinh z$ eta $\cosh z$ funtzioen $z = 0$ puntuan zentratutako berretura-serieak.

Em.: $\sinh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

4. Gara itzazu funtzio hauek $z = 0$ puntuan zentratutako berretura-serieetan:

(i) $f(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3}$. *Em.:* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n$, $|z| < 1$.

(ii) $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$. *Em.:* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

(iii) $f(z) = \mathrm{Arctan}\, z$. *Em.:* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$.

(iv) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$. *Em.:* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big((-1)^n \frac{2}{3 \cdot 5^{n+1}} - \frac{1}{3} \Big) z^n$, $|z| < 1$.

5. Gara itzazu jarraian ematen diren funtzioak $z = z_0$ puntuan zentratutako Taylorren serieetan eta esan ezazu zein den zirkulurik handiena non seriearen bidezko adierazpena baliozkoa den:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = -1$. *Em.:* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$, $|z+1| < 2$.

(ii) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Em.: $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{(z - \frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!} - \frac{(z - \frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big)$, $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1/2$. *Em.:* $f(z) = \sqrt{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1/2)^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

6. Idatz ezazu $\mathrm{Log}(2-z)$ funtzioaren Taylorren seriea jatorrian, deribatuarena erabiliz, eta eman ezazu konbergentzia-erradioa.

Em.: $\mathrm{Log}(2-z) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$, $R = 2$.

7. Erabil itzazu berretura-serieak honako limite hauek kalkulatzeko:

(i) $\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{Log}\, z}{z-1}$. *Em.* 1.

(ii) $\lim_{z\to 0}\frac{e^{\alpha z}-1}{z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. *Em.* α.

8. *L'Hôpitalen erregela.* Izan bitez f eta g holomorfoak z_0-n eta $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Baldin $g'(z_0) \neq 0$ bada, froga ezazu

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

9. Izan bedi α erreal positiboa. Defini dezagun

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \quad n = 1, 2... \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Froga ezazu $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$ berretura-seriearen konbergentzia-erradioa 1 dela. Izan bedi $f(z)$ serie horren batura konbergentzia-zirkuluan. Froga ezazu

$$(1+z)f'(z) = \alpha f(z)$$

betetzen dela eta aurki ezazu $f(z)$.

Em. $f(z) = (1+z)^\alpha$.

10. Idatz ezazu z^4-ren koefizientea $f(z) = (1+\sin^2 z)^{1/3}$ funtzioaren Taylorren serierako $z_0 = 0$ puntuan, aurreko ariketako emaitza erabiliz.

Em. $-2/9$.

11. Fibonacciren segida honela definitzen da:

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 2).$$

Idatz dezagun

$$\frac{Az+1}{Bz^2+Cz+1} = \sum_{n=0}^{\infty}F_n z^n,$$

jatorriaren ingurune batean.

(i) Aurki itzazu A, B eta C.

(ii) Ezkerreko atala frakzio sinpletan deskonposatuz eta serie geometrikoa erabiliz, eman ezazu F_n-rako formula bat.

(iii) Non da konbergentea seriea?

12. Gara ezazu $f(z) = (z^3 - z)^{-1}$ funtzioa Laurenten serie modura eraztun hauetan:

(i) $0 < |z| < 1$ *Em.:* $-\sum_{n=-1}^{\infty} z^{2n+1}$.

(ii) $1 < |z|$ *Em.:* $\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{2n-1}$.

(iii) $0 < |z-1| < 1$ *Em.:* $\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n\big(\frac{1}{2^{n+2}} - 1\big)(z-1)^n$.

(iv) $1 < |z-1| < 2$ *Em.:* $\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n(z-1)^n + \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$.

13. Gara itzazu funtzio hauek $z_0 = 0$ puntuan zentratutako Laurenten serie modura:

(i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$. *Em.:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$.

(ii) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}$. *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$.

(iii) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$. *Em.:* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{1}\frac{z^n}{(1-n)!}$.

(iv) $f(z) = \sin z + \sin\dfrac{1}{z}$. *Em.:* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^{-n}\frac{z^{2n-1}}{(1-2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

14. Idatz itzazu honako funtzio hauen Laurenten serieen parte nagusia $z = 0$ puntuan:

(i) $\dfrac{\operatorname{Log}(1+z^2)}{\sin z - z + z^3/6}$. *Em.:* $\dfrac{120}{z^3} - \dfrac{400}{7z}$.

(ii) $\dfrac{1}{z^5}\operatorname{Log}\dfrac{\sin z}{z}$. *Em.:* $-\dfrac{1}{6z^3} - \dfrac{1}{180z}$.

15. Azter ezazu zer motatako puntu singularra den $z = 0$ funtzio hauetan:

(i) $\dfrac{\operatorname{Log}(1+z) - z}{z^m}$ $(m \geq 1)$.
Em.: $m = 1, 2$: gaindigarria; $m \geq 3$: $m-2$ ordenako poloa.

(ii) $z^2 \sin\dfrac{1}{z}$. *Em.:* esentziala.

(iii) $\dfrac{1}{e^z - 1}$. *Em.:* polo simplea.

(iv) $\dfrac{1}{\mathrm{Log}(1+z^2)-z^2}$. *Em.:* 4 ordenako poloa.

16. Sailka itzazu funtzio hauen puntu singular isolatuak:

(i) $f(z) = \dfrac{z}{z^3+z}$. *Em.:* 0 gaindigarria, $\pm i$ polo sinpleak.

(ii) $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$. *Em.:* $\pm i$ polo sinpleak.

(iii) $f(z) = e^{z-\frac{1}{z}}$. *Em.:* 0 esentziala.

(iv) $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \sin\dfrac{1}{z}$. *Em.:* 0 esentziala.

(v) $f(z) = e^{\tan 1/z}$. *Em.:* $\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ esentziala, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

(vi) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}-1}{e^z-1}$. *Em.:* 0 esentziala, $2k\pi i$ polo sinplea, $\forall\, k \in \mathbb{Z}-\{0\}$.

(vii) $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$. *Em.:* 0 gaindigarria, $2k\pi i$ polo sinplea $\forall\, k \in \mathbb{Z}-\{0\}$.

(viii) $f(z) = \dfrac{e^z-1}{z^2(z-1)}$. *Em.:* $0, 1$ polo sinpleak.

(ix) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{1+e^z}$. *Em.:* $(2k+1)\pi i$ polo sinplea, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

(x) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{\sin(1/z)}\right)$. *Em.:* $\dfrac{1}{k\pi}$ esentziala $\forall\, k \in \mathbb{Z}-\{0\}$.

(xi) $f(z) = \dfrac{1}{1-\sin z}$. *Em.:* $\pi/2+2k\pi$ 2 ordenako poloa, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

(xii) $\dfrac{z^5}{(z^3+8)^2}$. *Em.:* $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$ 2 ordenako poloak.

(xiii) $\dfrac{z(z-\pi)^2}{(\sin z)^2}$. *Em.:* 0 p. sinplea; π gaind.; $k\pi$ 2 ordenako p. $(k \in \mathbb{Z}-\{0,1\})$.

(xiv) $\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$. *Em.:* 0 3 ordenako p.; $2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3})$ p. sinplea; $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(xv) $\dfrac{1}{z^3(1-\cos z)}$. *Em.:* 0 5 ordenako poloa; $2k\pi$ 2 ordenako poloa.

17. Froga ezazu $\tan z$ funtzioaren puntu singular guztiak poloak direla. Idatz ezazu puntu horietan Laurenten seriearen parte nagusia.

Em.: $-\dfrac{1}{z-z_k}$, $z_k = \dfrac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

18. Aurki ezazu serie hauen konbergentzia-erradioa:

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n \qquad \text{(iii)} \sum_{n=0}^{\infty} 4^{(-1)^n n}\, z^n$$

$$\text{(iv)} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, z^{n!} \qquad \text{(v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \text{(vi)} \sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^n$$

$$\text{(vii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+(1+i)^n} \qquad \text{(viii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)} \qquad \text{(ix)} \sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$$

19. Eman itzazu funtzio hauen Taylorren serieak $(z-1)$-en berreturetan:

$$\text{(i)} \ \frac{2z+3}{z+1}; \qquad \text{(ii)} \ \frac{2z+3}{(z+1)^2}; \qquad \text{(iii)} \ \mathrm{Log}(1+z).$$

20. Aurki itzazu $z = 0$ puntuan zentratutako Taylorren garapenen lehenengo lau koefizienteak funtzio hauetarako:

$$f(z) = e^z \sin z, \qquad g(z) = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

21. Aurki itzazu Laurenten serie hauen konbergentzia-eraztunak:

$$\text{(i)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}; \qquad \text{(ii)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n; \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n^2} + \frac{n^2}{(2z)^n} \right).$$

22. Eman itzazu funtzio hauen Laurenten garapenak $z_0 = 1$ puntuan zentraturiko eraztunetan:

$$\text{(i)} \ \frac{1}{z(z-3)^2}; \qquad \text{(ii)} \ \frac{z^2-1}{z^2+1}.$$

23. Eman itzazu $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$ funtzioaren Laurenten garapenak $0 < |z-1| < 1$ eta $1 < |z-1| < 2$ eraztunetan.

24. Eman ezazu $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ funtzioaren Laurenten garapena $0 < |z-1| < 2$ eraztunean.

25. Aurki ezazu honako funtzio hauetarako z_0 puntuaren ingurune batean konbergentea den Laurenten seriearen parte singularra:

    (i) $\dfrac{z}{(z+2)^2}$, $z_0 = -2$.

    (ii) $\dfrac{z-1}{\sin^2 z}$, $z_0 = 0$.

    (iii) $\dfrac{e^{iz}}{z^2+b^2}$, $z_0 = bi$, $b > 0$ izanik.

26. Sailka itzazu funtzio hauen puntu singularrak (∞ ere):

(i) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$	(ii) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$	(iii) $z^2 \cos \dfrac{\pi}{z}$
(iv) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$	(v) $\dfrac{\sin(z^2)}{z^3(2-\cos z)}$	(vi) $\dfrac{z}{\tan z}$
(vii) $\tan \pi z$	(viii) $\dfrac{z}{e^z+1}$	(ix) $\dfrac{1}{z^3(1-\cos z)}$
(x) $\dfrac{(z-1)(z-2)^3}{\sin^3(\pi z)}$	(xi) $\dfrac{z-2\pi i}{e^z-1} + \dfrac{2\pi i}{z}$	(xii) $\dfrac{z^8}{(z-1)^4} + z^2 \sin \dfrac{1}{z+1}$

27. Izan bedi
$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}.$$

    (i) Aurki eta sailka itzazu f-ren puntu singularrak.

    (ii) Eman ezazu f-ren Laurenten seriearen parte singularra z-ren berreturetan, $0 < |z| < R$ moduko eraztun batean. Zein da R erradioaren balioa?

28. Aurki ezazu $f(0) = 0$, $f'(0) = i$ baldintzak eta $f''(z) + i^2 f(z) = 0$ ekuazio diferentziala betetzen dituen funtzioaren seriezko garapena $z_0 = 0$ puntuaren ingurune batean. Zein da f funtzioa?

29. Izan bedi $f(z) = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

    (i) Aurki itzazu f funtzioaren $z_1 = 2\pi i$ eta $z_2 = -4\pi i$ puntuen inguruko Laurenten serieen parte nagusiak.

    (ii) Zein da z_2 puntuaren inguruko seriearen konbergentzia-erradioa?

    (iii) Kalkula itzazu $z_3 = 0$ puntuaren inguruko Laurenten seriearen parte holomorfoaren lehenengo hiru gaiak.

    (iv) Sailka itzazu f-ren puntu singularrak.

6. Gaia

Hondarrak eta haien erabilerak

6.1 Hondarren teorema

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funtzio bat, $z_0 \in \mathbb{C}$ f funtzioaren puntu singular isolatua eta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ f-ren Laurenten seriea $0 < |z-z_0| < r$ eraztunean, $r > 0$ izanik. Esaten da c_{-1} koefizientea f funtzioaren z_0 puntuko *hondarra* dela. $c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ edo $c_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$ idatziko dugu.

Laurenten seriearen koefizienteen formularen arabera,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz, \quad 0 < \rho < r \text{ izanik.}$$

Hondarrak integralaren balioa ematen duelako izango da garrantzitsua eta erabilgarria.

6.1 Teorema (Hondarren teorema)**.** *Izan bitez $\Omega \subset \mathbb{C}$ eta f funtzio holomorfoa Ω-n, multzo finitu bateko puntuetan izan ezik. Izan bedi γ f-ren puntu singularretatik pasatzen ez den bide itxi bat Ω-n, orientazio positiboarekin. γ-ren barrualdean geratzen diren puntu singularrak $z_1, \ldots, z_m$ baldin badira, orduan,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Froga. Har ditzagun $|z - z_i| = \rho_i$ zirkunferentziak, non ρ_i erradioak aukeratzen diren zirkunferentzia guztien barruko aldeak binaka disjuntuak izan daitezen eta denak γ-ren barrualdean gera daitezen. Cauchy-Goursaten teorema integrala (bertsio orokortua) aplikatuz,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{|z-z_i|=\rho_i} f(z)\,dz.$$

Hondarraren definizioaren ondorioz, teoremaren berdintza dugu. □

Oharra. Kurbaren barruko puntu singularrak kopuru finituan daudenez, isolatuak dira ezinbestean. Teoremaren enuntziatuan f-k infinitu puntu singular izatea onar dezakegu, baina ondorioak bakarrik balioko du kurbaren barrualdeko puntu singularren multzoa finitua bada.

6.2 Hondarrak kalkulatzeko metodoak

6.2.1 Definizioa erabili

Ikusi dugunaren arabera, f-ren Laurenten seriea $0 < |z - z_0| < r$ eraztunean, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ bada,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Adibidea. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z - z}$ funtzioaren $z_0 = 0$ puntuko hondarra kalkulatuko dugu.

$z_0 = 0$ f-ren 3 ordenako poloa da, beraz,

$$\frac{1}{\sin z - z} = \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots$$

Orduan,

$$\begin{aligned} 1 &= \Big(\frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots\Big)(\sin z - z) \\ &= \Big(\frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots\Big)\Big(-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\Big). \end{aligned}$$

Orain, z-ren berreturen koefizienteak berdinduz,

$$\begin{aligned} &(z^0) \quad 1 = -\frac{a_{-3}}{3!} \implies a_{-3} = -3! = -6. \\ &(z^1) \quad 0 = -\frac{a_{-2}}{3!} \implies a_{-2} = 0. \\ &(z^2) \quad 0 = \frac{a_{-3}}{5!} - \frac{a_{-1}}{3!} \implies a_{-1} = \frac{3!a_{-3}}{5!} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z - z}. \end{aligned}$$

6.2.2 m ordenako poloetako hondarra

z_0 f-ren m ordenako poloa baldin bada, orduan,

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

Polo sinplea. Polo sinplea badugu, Laurenten seriearen parte nagusiak gai bakarra izango du, $c_{-1}(z - z_0)^{-1}$. Orduan, berehala ikusten da berdintza hau:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Kasu orokorra. Poloaren ordena m bada, $(z-z_0)^m$-rekin biderkatuz,

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \ldots$$

Orduan $(z-z_0)^m f(z)$ funtzioak puntu singular gaindigarria du z_0 puntuan, eta eskuin ataleko berretura-seriea g funtzio holomorfo baten Taylorren seriea da. Bilatzen ari garen c_{-1} koefizientea $(z-z_0)^{m-1}$ monomioari dagokionez, $g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$ da, edo f-ren arabera emanda,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z-z_0)^m f(z)\big).$$

Adibidea. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ funtzioaren $z_0 = i$ eta $z_0 = -i$ polo sinpleetako hondarrak kalkulatuko ditugu.

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1} = \lim_{z=i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}, \\
\operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{1}{z^2+1} &= \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{z^2+1} = \lim_{z=i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

Adibidea. Egin dezagun berriro $f(z) = \dfrac{1}{\sin z - z}$ funtzioaren $z_0 = 0$ puntuko hondarra, poloetarako metodoa erabiliz. Badakigunez 3 ordenako poloa dela,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z - z} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\Big(\frac{z^3}{\sin z - z}\Big).$$

Idatz dezagun $g(z) = \dfrac{z^3}{\sin z - z}$. Orduan,

$$g''(z) = \frac{6z}{\sin z - z} - \frac{3z^2(\cos z - 1)}{(\sin z - z)^2} - \frac{3z^2(\cos z - 1) - z^3 \sin z}{(\sin z - z)^2} + \frac{2z^3(\cos z - 1)^2}{(\sin z - z)^3}.$$

Beraz,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z - z} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} g''(z) = -\frac{3}{10}.$$

6.2.3 Polo sinpleen kasu berezi bat

Izan bedi $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, non $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ eta $h'(z_0) \neq 0$ diren. Orduan, z_0 f-ren polo sinplea da, zeren eta $1/f$ anulatzen baita z_0 puntuan, baina haren deribatua, ez. Aurreko atalean ikusitakoa eta deribatuaren definizioa erabiliz,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Adibidea. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ funtzioaren $z_0 = i$ puntuko hondarra kalkulatuko dugu. f funtzioa $g(z) = z$ eta $h(z) = z^2+1$ funtzioen arteko zatidura da. g ez da $z_0 = i$ puntuan anulatzen; h, bai, baina haren deribatua, ez. Orduan,

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{2z}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{2}.$$

6.3 Hondarra ∞-n

Definizioa. Izan bedi ∞ puntu singular isolatua f-rako, hau da, izan bedi f holomorfoa $|z| > R$ erako eraztun batean. Izan bedi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

f-ren Laurenten seriea $|z| > R$ eraztunean. Orduan, f-ren hondarra ∞-n hau da:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Laurenten seriearen teoreman agertzen den koefizienteen formula kontuan hartuta,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f(z)\, dz, \quad \rho > R \text{ izanik.}$$

Hemen zirkunferentzia orientazio positiboarekin hartzen da.

Zeinu negatiboaren arrazoia hau da: ∞-tik begiratuta ohiko orientazioaren aurkakoa litzateke orientazio positiboa. Bestela esanda, zirkunferentzia (ohiko) orientazio negatiboarekin ibiltzean, $|z| > R$ eremua ezker aldean uzten da.

Oharra. Kontuan izan ∞ gaindigarria izan arren, hondarra ez-nulua izan daitekeela. Adibidez, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \dfrac{1}{z} = -1$.

6.2 Teorema. *Izan bedi f funtzio holomorfoa $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ multzoan. Orduan,*

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Froga. Har dezagun $R > \max(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_m|)$. Orduan, hondarren teorema aplikatuz,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Ezker atala $-\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$ denez, teorema ateratzen da. □

6.4 Funtzio trigonometrikoen integral erreal mugatuak

$\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$ moduko integral erreal mugatuak kalkula daitezke aldagai konplexuko $F\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big), \frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)\Big)\frac{1}{iz}$ funtzioa $|z| = 1$ zirkunferentzian integratuz.

Har dezagun $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, zirkunferentziaren parametrizazioa. Orduan,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \cos\theta,\\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) = \sin\theta,\\ \frac{dz}{iz} &= \frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}}\,d\theta = d\theta.\end{aligned}$$

Adibidea. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t}$, $a > 1$ izanik.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}\\ &= \int_{|z|=1} \frac{2z}{2az+z^2+1}\frac{dz}{iz}\\ &= -\,2i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}.\end{aligned}$$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+2az+1}$ funtzioaren puntu singularrak $z_1 = -a+\sqrt{a^2-1}$ eta $z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$ dira, biak polo sinpleak.

Bigarrena ez da zirkunferentziaren barrualdean geratzen:

$$|-a-\sqrt{a^2-1}| = a+\sqrt{a^2-1} > a > 1.$$

Lehena, bai:

$$|-a+\sqrt{a^2-1}| = \left|\frac{a^2-a^2+1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right| = \frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}} < 1.$$

Beraz,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} &= -\,2i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}\\ &= -\,2i\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} \frac{1}{z^2+2az+1}\\ &= 4\pi\frac{1}{(2z+2a)|_{z=-a+\sqrt{a^2-1}}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\end{aligned}$$

6.5 Aldagai errealeko integral inpropioak eta balio nagusiak

Lehenengo eta behin, gogora dezagun zer den aldagai errealeko funtzio baten integral inpropio konbergentea eta zer den integral inpropio baten balio nagusia.

Definizioa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornatua.

(i) $\displaystyle\lim_{R_1 \to +\infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx$ eta $\displaystyle\lim_{R_2 \to +\infty} \int_{0}^{R_2} f(x)\,dx$ finituak badira, esaten dugu $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioa *konbergentea* dela, eta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1 \to +\infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R_2 \to +\infty} \int_{0}^{R_2} f(x)\,dx.$$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioaren *balio nagusia* honela definitzen da:

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \Big(\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{R} f(x)\,dx \Big) = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Oharrak. Izan bedi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornatua.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konbergentea bada, orduan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Baina integral inpropioa dibergentea izan daiteke eta haren balio nagusia finitua.

(ii) f bikoitia baldin bada, orduan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;\text{ konbergentea } \iff p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;\text{ konbergentea.}$$

Definizioa. Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$ eta $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eta demagun existitzen dela $c \in (a,b)$, zeinetarako $\displaystyle\lim_{x \to c} |f(x)| = +\infty$ den.

(i) $\displaystyle\lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{a}^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx$ eta $\displaystyle\lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,dx$ finituak baldin badira, esaten da $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ integral inpropioa *konbergentea* dela, eta

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{a}^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,dx.$$

(ii) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ integral inpropioaren *balio nagusia* honela definitzen da:

$$p.v. \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big(\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \Big).$$

Adibidea. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ integral inpropioa da, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$ delako.

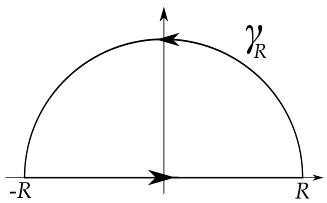
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\epsilon\to 0}(\ln 1-\ln\epsilon)=+\infty,$$

beraz, integral inpropioa dibergentea da. Aldiz,

$$p.v.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\epsilon}^{1}\frac{dx}{x}\Big)=\lim_{\epsilon\to 0}(\ln\epsilon-\ln|-1|+\ln 1-\ln\epsilon)=0.$$

6.5.1 Funtzio arrazionalen integral inpropioak

Izan bitez P eta Q polinomioak, $\deg Q\geq\deg P+2$ izanik eta $Q(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$ guztietarako. $F(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ definituz, F-k ez du puntu singular errealik. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ integral inpropioa konbergentea da. Horren balioa kalkulatzeko F aldagai konplexuko funtzioa γ_R bidean integratuko dugu, γ_R $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<R, 0<\operatorname{Arg}z<\pi\}$ multzoaren muga izanik,



eta, gero, limitea hartuko dugu R-k ∞-rantz jotzen duenean.

6.3 Lema. *Izan bitez* $R_0>0$ *eta* f *holomorfoa* $\{z:|z|>R_0,\operatorname{Im}z>0\}$ *multzoan. Baldin* $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\max_{|z|=R}|zf(z)|=0$ *bada, orduan,*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz=0,$$

non C_R*,* $|z|=R$ *zirkunferentziaren* $\operatorname{Im}z>0$ *planoerdiko zatia den.*

Froga. Frogatuko dugu $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\Big|\int_{C_R}f(z)\,dz\Big|=0$ dela.

$$\begin{aligned}\Big|\int_{C_R}f(z)\,dz\Big|&=\Big|\int_{C_R}zf(z)\frac{dz}{z}\Big|\leq\int_{C_R}|zf(z)|\Big|\frac{dz}{z}\Big|\\&\leq\max_{|z|=R}|zf(z)|\int_{0}^{\pi}\Big|\frac{Rie^{it}}{Re^{it}}\Big|\,dt=\pi\max_{|z|=R}|zf(z)|.\end{aligned}$$

Hipotesia erabiliz, R infiniturantz eramanez, limitea 0 da. □

6.4 Korolarioa. *Izan bitez P, Q polinomioak,* $\deg Q \geq \deg P + 2$ *izanik. Orduan,*

$$\lim_{R\to\infty}\Big|\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\Big| = 0.$$

Froga. Izan bedi $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Orduan,

$$\lim_{z\to\infty}\Big|\frac{P(z)}{a_n z^n}\Big| = 1$$

denez, existitzen da $R_1 > 0$, zeinetarako, $|z| > R_1$ bada,

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq 2|a_n||z|^n.$$

Modu berean, $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0$ bada, existitzen da $R_2 > 0$, zeinetarako, $|z| > R_2$ denean,

$$\frac{1}{2}|b_m||z|^n \leq |Q(z)| \leq 2|b_m||z|^m.$$

Orduan, $R = \max\{R_1, R_2\}$ bada,

$$\max_{|z|=R}\Big|z\frac{P(z)}{Q(z)}\Big| \leq \max_{|z|=R}|z|\frac{2|a_n||z|^n}{\frac{1}{2}|b_m||z|^m} = \frac{4|a_n|}{|b_m|}|z|^{n-m+1} \to 0, \quad R\to\infty \text{ bada,}$$

eta, aurreko teoremaren arabera,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0. \qquad \square$$

Adibidea. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ kalkulatzeko, $\displaystyle\int_{\gamma_R}\frac{dz}{1+z^2}$ integrala egingo dugu, γ_R gorago definitutakoa izanik, eta $R > 1$. $F(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ funtzioaren puntu singularrak $z = i$ eta $z = -i$ dira, baina $z = -i$ kurbaren kanpoaldean dago; beraz, hondarren teoremaren arabera,

$$\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{z^2+1} = 2\pi i\frac{1}{2i} = \pi.$$

Bestalde,

$$\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z^2+1} = \int_{L_R}\frac{dz}{z^2+1} + \int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1},$$

non L_R ardatz errealaren gainean dagoen zuzenkia den eta C_R jatorrian zentratuta dagoen eta R erradioa duen goiko zirkunferentzierdia.

$P(z) = 1$ eta $Q(z) = 1 + z^2$ izendatuz, $\deg P = 0$ eta $\deg Q = 2$ direnez, korolarioaren arabera,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1} = 0.$$

Bestalde, zuzenkia $\gamma(t) = t$ ($t \in [-R, R]$) parametrizazioaren bidez deskriba daiteke, eta integrala honela geratzen da:

$$\int_{L_R} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{-R}^{R} \frac{dt}{t^2+1}.$$

Beraz, limiteak hartuz,

$$\pi = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{dz}{z^2+1} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Adibidea. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

6.5.2 Funtzio arrazional eta trigonometrikoen biderkadurak

Izan bitez P eta Q polinomioak, $\deg Q \geq \deg P + 1$ eta $Q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako, eta $a > 0$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax)\, dx$ edo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax)\, dx$ integral inpropioak konbergenteak dira. Horiek kalkulatzeko, $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$ funtzioa γ_R bidean integratuko dugu, γ_R aurreko atalean erabili dugun kurba bera izanik.

6.5 Lema (Jordanen lema)**.** *Izan bitez $R_0 > 0$ eta f analitikoa $|z| > R_0$, $\operatorname{Im} z > 0$ eremuan. $\lim_{R\to\infty} \max_{|z|=R} |f(z)| = 0$ baldin bada, orduan, $\lambda > 0$ guztietarako,*

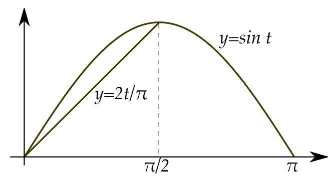
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 0,$$

C_R jatorrian zentratuta dagoen eta R erradioa duen goiko zirkunferentzierdia izanik.

Froga. Frogatuko dugu $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz \right| = 0$ dela.

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz \right| &\leq \int_{C_R} |e^{i\lambda z}||f(z)||dz| \leq \max_{|z|=R} |f(z)| \int_0^{\pi} |e^{i\lambda Re^{it}}||Rie^{it}|\, dt \\ &= R \max_{|z|=R} |f(z)| \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin t}\, dt = 2R \max_{|z|=R} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t}\, dt,\end{aligned}$$

non, azken berdintzan, $\sin t$ funtzioaren simetria erabili dugun.



Gainera, $t \in [0, \pi/2]$ bada, $\sin t \geq \dfrac{2t}{\pi}$ da, eta, beraz, $\lambda > 0$ denez,

$$e^{-\lambda R \sin t} \leq e^{-\frac{2\lambda R}{\pi} t}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ bada.}$$

Ondorioz,

$$\begin{aligned} \Big| \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz \Big| \leq & 2R \max_{|z|=R} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi} t}\, dt \\ = & 2R \max_{|z|=R} |f(z)| \frac{\pi}{2\lambda R} \big(1 - e^{-\lambda R}\big) \to 0, \quad R \to \infty \text{ bada.} \qquad \square \end{aligned}$$

Adibidea. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2}\, dx$, $a > 0$, $b > 0$.

$F(z) = \dfrac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2}$ aldagai konplexuko funtzioa γ_R bidean integratuko dugu, γ_R aurreko adibideetako kurba bera izanik.

F-ren puntu singularrak $z = bi$ eta $z = -bi$ dira, biak polo simpleak. $R > b$ bada, kurbaren barrualdean geratzen den bakarra $z = bi$ da; beraz, hondarren teoremaren arabera,

$$\overset{\circ}{\int}_{\gamma_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=bi} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2} = 2\pi i \frac{bi e^{iaib}}{2bi} = e^{-ab} \pi i.$$

Bestalde, L_R $-R$-tik R-ra doan zuzenkia, eta C_R jatorrian zentratuta dagoen eta R erradioa duen goiko zirkunferentzierdia baldin badira,

$$\int_{\gamma_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2}\, dz = \int_{L_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2}\, dz + \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2}\, dz.$$

Ikus dezagun $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + b^2}$ funtzioak Jordanen lemaren baldintza betetzen duela.

$$|f(z)| = \Big| \frac{z}{z^2 + b^2} \Big| \leq \frac{|z|}{|z^2 + b^2|} \leq \frac{|z|}{|z|^2 - b^2} = \frac{R}{R^2 - b^2}, \quad |z| = R \text{ bada,}$$

beraz, $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \max_{|z|=R} |f(z)| = 0$, eta

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2}\, dz = 0.$$

Gainera, zuzenkia parametrizatuz,

$$\int_{L_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{x e^{iax}}{x^2 + b^2}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + b^2} (\cos ax + i \sin ax)\, dx.$$

Beraz, limiteak hartuz,

$$e^{-ab}\pi i = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+b^2}(\cos ax + i\sin ax)\,dx.$$

$\dfrac{x\sin ax}{x^2+b^2}$ funtzio bikoitia denez, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx = 2\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx$. Parte irudikariak hartuz goiko berdintzan,

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{e^{-ab}\pi}{2}.$$

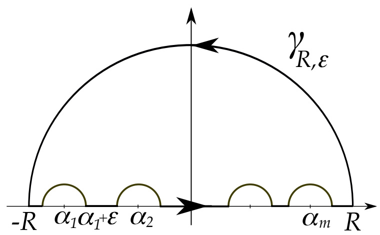
6.5.3 Funtzio arrazional eta trigonometrikoen biderkadura batzuen balio nagusiak

Izan bitez P eta Q polinomioak, $\deg Q \geq \deg P + 1$ izanik. Demagun Q-k badituela zero errealak. Kasu honetan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax\,dx \quad \text{eta} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax\,dx$$

ez dira konbergenteak, oro har, baina integralen balio nagusia finitua izan daiteke. Gainera, Q-ren zero errealak sinpleak badira eta integralean agertzen den $\cos ax$ edo $\sin ax$ funtzioaren zeroak ere badira, integrala konbergentea da.

Integral horiek kalkulatzeko, $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}$ funtzioa integratzen da irudian agertzen den $\gamma_{R,\epsilon}$ bidean, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Q-ren zero errealak izanik.



6.6 Lema. *Izan bedi z_0 f-ren polo sinplea, eta izan bedi C_ϵ z_0 zentroko eta ϵ erradioko zirkunferentziaren arku bat, honela parametrizatuta: $C_\epsilon(t) = z_0 + \epsilon e^{it}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $0 \leq t_0 < t_1 \leq 2\pi$. Orduan,*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = i(t_1 - t_0)\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Froga. $A = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ idazten badugu, $f(z) = \dfrac{A}{z-z_0} + h(z)$ dugu z_0-ren ingurune batean, h holomorfoa izanik. Alde batetik,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} h(z)\,dz = 0$$

da, h bornatua delako $|z - z_0| \leq \delta$ erako multzo batean; beste alde batetik, enuntziatuan ematen den kurbaren parametrizazioa erabiliz,

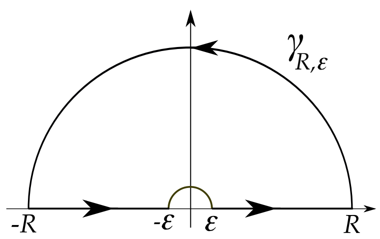
$$\int_{C_\epsilon} \frac{A}{z - z_0}\, dz = \int_{t_0}^{t_1} \frac{A}{\epsilon e^{it}} i\epsilon e^{it}\, dt = (t_1 - t_0)iA. \qquad \square$$

Adibidez, C_ϵ zirkunferentzierdi bat bada, orientazio positiboarekin hartuta,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)\, dz = i\pi \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Adibidea. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$

$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ funtzioa $\gamma_{R,\epsilon}$ bidean integratuko dugu, $\gamma_{R,\epsilon}$ irudikoa izanik.



f holomorfoa da $\gamma_{R,\epsilon}$ bidearen ingurune batean, beraz, Cauchy-Goursaten teoremaren arabera, ϵ eta R guztietarako, $0 < \epsilon < R$ izanik,

$$\int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

Bestalde, zuzenkiak parametrizatuz,

$$\int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz,$$

non C_ϵ eta C_R jatorrian zentratutako goiko zirkunferentzierdiak diren, ϵ eta R erradiokoak, hurrenez hurren.

Alde batetik, $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \max_{|z|=R} \left|\frac{1}{z}\right| = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0$ denez, Jordanen lema erabiliz,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

Gainera, aurreko lemaren arabera, $z_0 = 0$ f-ren polo sinplea denez,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = i\pi \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} = i\pi e^{i0} = i\pi.$$

Bestalde, $\displaystyle\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$ integralean, $x=-t$ aldaketa eginez,

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{R}^{\epsilon} \frac{e^{-it}}{-t}\,(-dt) = \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx \\ =2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Orduan, limiteak hartuz ($R\to\infty$ eta $\epsilon\to 0$),

$$0 = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 2i\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx + 0 - i\pi.$$

Beraz, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

Adibidea. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$

Integral hau kalkulatzeko, lehenengo eta behin, integrakizuna berridatzi behar dugu:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2}\,dx.$$

Integral hori ez da zehazki lehen aipatu ditugun integralen erakoa, baina bide beretik kalkula daiteke. Horretarako, $f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ funtzioa integratuko dugu aurreko adibideko $\gamma_{R,\epsilon}$ bidean. Cauchy-Goursaten teoremaren arabera,

$$\int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz = 0.$$

Bestalde, C_R eta C_ϵ aurreko adibidean bezala definituz,

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz \\ &\quad= \int_{\epsilon}^{R} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\,dx + \int_{C_R} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\,dx - \int_{C_\epsilon} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz.\end{aligned}$$

Gainera,

$$\lim_{R\to\infty} \max_{|z|=R} \left| z\,\frac{1-e^{2iz}}{z^2} \right| = \lim_{R\to\infty} \max_{t\in[0,\pi]} \frac{1}{R}(1-e^{-2R\sin t}) \le \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0,$$

beraz,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz = 0.$$

Beste alde batetik, $z_0 = 0$ f-ren polo sinplea denez,

$$\begin{aligned}\int_{C_\epsilon} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz =& \pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1-e^{2iz}}{z^2} = \pi i \lim_{z\to 0} z\frac{1-e^{2iz}}{z^2}\\ =&\pi i \lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2iz}}{z} = \pi i(-2i) = 2\pi.\end{aligned}$$

Orduan, limitera pasatuz,

$$0 = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz = \int_0^\infty \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\,dx + 0 + \int_{-\infty}^0 \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\,dx - 2\pi,$$

eta, parte errealak hartuz,

$$0 = \int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^2}\,dx - 2\pi.$$

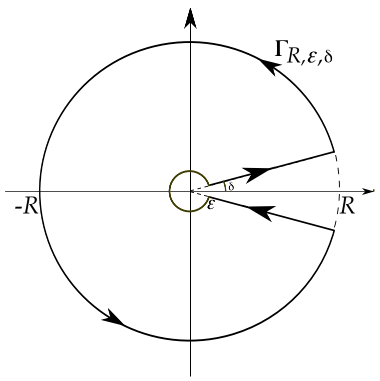
Azkenik, integrakizuna bikoitia denez,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

6.5.4 Funtzio arrazional eta berretura ez-osoen biderkadurak

Izan bitez P, Q polinomioak eta $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Demagun Q-k ez duela erro erreal ez-negatiborik eta $\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{1+a} = \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{1+a} = 0$ direla.

$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} x^a\,dx$ integrala kalkulatzeko $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} z^a$ aldagai konplexuko funtzioa integratuko dugu $\Gamma_{R,\epsilon,\delta}$ bidean. $z^a = e^{a\log z}$ moduan definitzen da, non $\log z = \ln|z| + i\theta(z)$ den, $\theta(z) \in \arg z \cap [0, 2\pi)$ izanik. $\Gamma_{R,\epsilon,\delta}$ bidea irudian agertzen dena da.



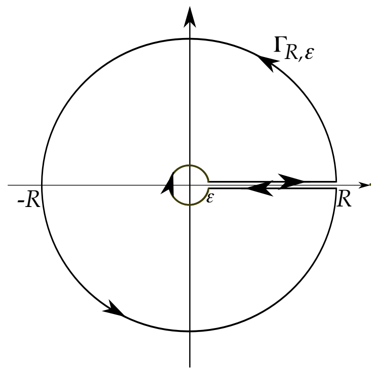
$\Gamma_{R,\epsilon,\delta}$ parametrizatzeko lau zati hartzen dira: bi zirkunferentzien arkuak eta bi zuzenkiak. Zuzenkien kasuan, honako hau da parametrizazio bat:

$$\begin{aligned} L_1(t) =& te^{i\delta}, \quad t \in [\epsilon, R],\\ L_2(t) =& te^{(2\pi-\delta)i}, \quad t \in [\epsilon, R].\end{aligned}$$

Gero, limiteak hartu behar dira $R \to \infty$, $\epsilon \to 0$ eta $\delta \to 0$ eginez.

Erabilera praktikoan $\delta = 0$ hartzen da, eta L_1 zuzenkiko puntuen argumenturako 0 aukeratzen da eta L_2 zuzenkiko puntuen argumenturako, 2π. (Aukera horrek z^a-ren balioan eragiten du.)

Beraz, $\Gamma_{R,\epsilon} = \gamma_1 + \gamma_R - \gamma_2 - \gamma_\epsilon$ bidearen gainean integratzen dugu, non γ_R eta γ_ϵ bideak jatorrian zentratuta dauden eta R eta ϵ erradioak dituzten zirkunferentziak diren, hurrenez hurren, eta $\gamma_1(t) = te^{0i}$, $t \in [\epsilon, R]$, eta $\gamma_2(t) = te^{2\pi i}$, $t \in [\epsilon, R]$ zuzenkiak.



Adibidea. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{x+b}\,dx$, $b > 0$ eta $-1 < a < 0$ izanik.

$F(z) = \dfrac{z^a}{z+b}$ funtzioa integratuko dugu $\Gamma_{R,\epsilon}$ bidean, $z^a = e^{a \log z}$ izanik, non $\log z = \log|z| + i\theta(z)$, $\theta(z) \in \arg z \cap (0, 2\pi)$.

Hondarren teoremaren arabera, $\epsilon < b < R$ badira,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z^a}{z+b}\,dz =& 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-b} \frac{z^a}{z+b} = 2\pi i \lim_{z\to -b}(z+b)\frac{z^a}{z+b}\\ =& 2\pi i(-b)^a = 2\pi i e^{a\log(-b)} = 2\pi i e^{a(\ln b + \pi i)}\\ =& 2\pi i b^a e^{a\pi i}.\end{aligned}$$

Bestalde, bidearen parametrizazioa erabiliz,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z^a}{z+b}\,dz = &\int_\epsilon^R \frac{e^{a(\ln x + 0i)}}{x+b} e^{0i} dx + \int_{\gamma_R} \frac{z^a}{z+b}\,dz\\ &- \int_\epsilon^R \frac{e^{a(\ln x + 2\pi i)}}{xe^{2\pi i} + b} e^{2\pi i} dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{z^a}{z+b}\,dz.\end{aligned}$$

Gainera, $a < 0$ denez,

$$\Big|\int_{\gamma_R} \frac{z^a}{z+b}\,dz\Big| \le \int_{\gamma_R} \Big|\frac{z^a}{z+b}\Big|\,|dz| \le \int_{\gamma_R} \frac{e^{a\ln|z|}}{|z|-b}\,|dz| = \frac{R^a}{R-b} 2\pi R \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Antzera, $a > -1$ denez,

$$\Big|\int_{\gamma_\epsilon} \frac{z^a}{z+b}\,dz\Big| \le \int_{\gamma_\epsilon} \Big|\frac{z^a}{z+b}\Big|\,|dz| \le \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{a\ln|z|}}{b-|z|}\,|dz| = \frac{\epsilon^a}{b-\epsilon} 2\pi\epsilon \to 0 \quad (\epsilon \to 0).$$

Beraz, limiteak hartuz,

$$2\pi i b^a e^{\pi a i} = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z^a}{z+b}\,dz = \int_0^\infty \frac{x^a}{x+b}\,dx - e^{2\pi a i}\int_0^\infty \frac{x^a}{x+b}\,dx.$$

Hau da,

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x+b}\,dx = 2\pi i b^a \frac{e^{\pi a i}}{1 - e^{2\pi a i}} = \frac{2\pi i b^a}{e^{-\pi a i} - e^{\pi a i}} = -\frac{\pi b^a}{\sin(\pi a)}.$$

6.5.5 Funtzio arrazional eta logaritmoen biderkadurak

Izan bitez P eta Q polinomioak, $\deg Q \geq \deg P + 2$, eta $Q(x) \neq 0$, $\forall\, x \geq 0$. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x \, dx$ moduko integralak kalkulatzeko, aurreko kasuan bezala, saia gaitezke $\displaystyle\int_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz$ integral konplexua erabiltzen non $\log z$ $\mathbb{C} - [0,\infty)$ multzoan holomorfoa den logaritmoaren adar bat den, $\log z = \ln|z| + i\theta(z)$, $\theta(z) \in \arg z \cap (0, 2\pi)$. Haatik, bidearen parametrizazioa erabiliz,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz = \int_\epsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x \, dx + \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz \\ - \int_\epsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x + 2\pi i) \, dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz\end{aligned}$$

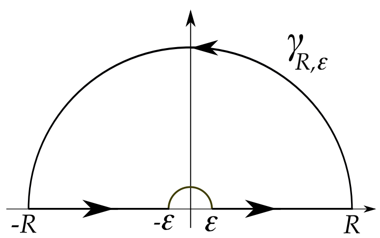
eta limiteak hartzean, kalkulatu nahi dugun integrala desagertzen da kontrako zeinuekin agertzen delako bi integraletan.

Hau da konponbidea: $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \log^2 z$ funtzioa integratzea $\Gamma_{R,\epsilon}$ kurban. Hain zuzen, parametrizazioa erabiltzean,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{P(z)}{Q(z)} \log^2 z \, dz &= \int_\epsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} \ln^2 x \, dx + \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \log^2 z \, dz \\ &\quad - \int_\epsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x + 2\pi i)^2 \, dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} \log^2 z \, dz \\ &= \int_\epsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} \ln^2 x \, dx + \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \log^2 z \, dz \\ &\quad - \int_\epsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln^2 x - 4\pi^2 + 4\pi i \ln x) \, dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} \log^2 z \, dz.\end{aligned}$$

Orain, $\ln^2 x$ desagertu egiten da, baina $\ln x$ oraindik dago integral batean.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ bikoitia bada, badago beste aukera bat: $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \log z$ integra daiteke hurrengo irudiko $\gamma_{R,\epsilon}$ kurban.



Kasu honetan,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz =& \int_{\epsilon}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x \, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz \\
&- \int_{\epsilon}^{R} \frac{P(-x)}{Q(-x)} (\ln x + \pi i) \, e^{\pi i} dx - \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz \\
=& 2 \int_{\epsilon}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x \, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz \\
&+ \int_{\epsilon}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \pi i \, dx - \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z \, dz.
\end{aligned}$$

Adibidea. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+b^2} \, dx$, $b > 0$ izanik.

Ikusi ditugun bi metodoen bidez kalkulatuko dugu integral hori.

(1) Integra dezagun $F(z) = \dfrac{\log^2 z}{z^2+b^2}$ funtzioa $\Gamma_{R,\epsilon}$ bidean. F-k polo sinpleak ditu bi eta $-bi$ puntuetan. Hondarren teoremaren arabera,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{\log^2 z}{z^2+b^2} \, dz =& 2\pi i \Big(\operatorname*{Res}_{z=bi} \frac{\log^2 z}{z^2+b^2} + \operatorname*{Res}_{z=-bi} \frac{\log^2 z}{z^2+b^2} \Big) \\
=& 2\pi i \Big(\frac{\log^2 z}{2z}\Big|_{z=bi} + \frac{\log^2 z}{2z}\Big|_{z=-bi} \Big) \\
=& 2\pi i \Big(\frac{(\ln b + \frac{\pi}{2} i)^2}{2bi} + \frac{(\ln b + \frac{3\pi}{2} i)^2}{-2bi} \Big) \\
=& 2\pi i \frac{(\ln^2 b - \frac{\pi^2}{4} + \pi i \ln b) - (\ln^2 b - \frac{9\pi^2}{4} + 3\pi i \ln b)}{2bi} \\
=& \frac{\pi}{b} (2\pi^2 - 2\pi i \ln b).
\end{aligned}$$

Bestalde,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{\log^2 z}{z^2+b^2} \, dz =& \int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln^2 x}{x^2+b^2} \, dx + \int_{\gamma_R} \frac{\log^2 z}{z^2+b^2} \, dz \\
&- \int_{\epsilon}^{R} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{x^2+b^2} \, dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\log^2 z}{z^2+b^2} \, dz \\
=& \int_{\gamma_R} \frac{\log^2 z}{z^2+b^2} \, dz + \int_{\epsilon}^{R} \frac{4\pi^2}{x^2+b^2} \, dx \\
&- 4\pi i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln x}{x^2+b^2} \, dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\log^2 z}{z^2+b^2} \, dz.
\end{aligned}$$

Gainera,

$$\Big|\int_{\gamma_R}\frac{\log^2 z}{z^2+b^2}dz\Big| \le \int_{\gamma_R}\Big|\frac{\log^2 z}{z^2+b^2}\Big||dz| \le \int_{\gamma_R}\frac{|\ln|z|+i\theta(z)|^2}{|z|^2-b^2}|dz| \le \frac{(\ln R+2\pi)^2}{R^2-b^2}2\pi R,$$

$$\Big|\int_{\gamma_\epsilon}\frac{\log^2 z}{z^2+b^2}dz\Big| \le \int_{\gamma_\epsilon}\Big|\frac{\log^2 z}{z^2+b^2}\Big||dz| \le \int_{\gamma_R}\frac{|\ln|z|+i\theta(z)|^2}{b^2-|z|^2}|dz| \le \frac{(\ln\epsilon+2\pi)^2}{b^2-\epsilon^2}2\pi\epsilon.$$

Beraz,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{\log^2 z}{z^2+b^2}\,dz = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon}\frac{\log^2 z}{z^2+b^2}\,dz = 0,$$

eta, limiteak hartuz goiko berdintzan,

$$\frac{\pi}{b}(2\pi^2-4\pi i\log b) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\int_{\gamma_{R,\epsilon}}\frac{\log^2 z}{z^2+b^2}\,dz = \int_0^\infty\frac{4\pi^2}{x^2+b^2}\,dx - 2\pi i\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+b^2}\,dx.$$

Azkenik, parte irudikariak hartuz,

$$-4\pi\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+b^2}\,dx = -\frac{2\pi^2\ln b}{b} \quad\Longrightarrow\quad \int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi\ln b}{2b}.$$

(2) $\dfrac{1}{x^2+b^2}$ bikoitia denez, $\dfrac{\log z}{z^2+b^2}$ funtzioa beste bide baten gainean integratzea da beste aukera bat, goiko irudiko $\gamma_{R,\epsilon}$ bidean hain zuzen ere. Funtzio horrek ere polo sinpleak ditu bi eta $-bi$ puntuetan, baina orain kurbaren barrualdean bakarrik bi polo sinplea geratzen da. Beraz, hondarren teoremaren arabera,

$$\int_{\gamma_{R,\epsilon}}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=bi}\frac{\log z}{z^2+b^2} = 2\pi i\frac{\log(bi)}{2bi} = \frac{\pi}{b}(\ln b+\frac{\pi}{2}i).$$

Bestalde,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{R,\epsilon}}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz =& \int_\epsilon^R\frac{\log x}{x^2+b^2}\,dx + \int_{\Gamma_R}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz\\ &-\int_\epsilon^R\frac{\ln x+\pi i}{x^2e^{2\pi i}+b^2}\,e^{\pi i}\,dx - \int_{\Gamma_\epsilon}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz\\ =&2\int_\epsilon^R\frac{\ln x}{x^2+b^2}\,dx + \int_{\gamma_R}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz\\ &+\int_\epsilon^R\frac{\pi i}{x^2+b^2}\,dx - \int_{\gamma_\epsilon}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz.\end{aligned}$$

Lehen bezala, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz = 0$ direla frogatzen da, eta, ondorioz, limiteak hartuz,

$$\frac{\pi}{b}(\ln b+\frac{\pi}{2}i) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\int_{\Gamma_{R,\epsilon}}\frac{\log z}{z^2+b^2}\,dz = 2\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+b^2}\,dx + \pi i\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+b^2}.$$

Parte errealak hartuz,

$$2\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{b}\log b \quad\Longrightarrow\quad \int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2b}\ln b.$$

6.6 Zeroak eta poloak kurba baten barruan

Izan bedi $f(z) = (z - z_0)^m \phi(z)$ non ϕ holomorfoa den z_0-n eta $\phi(z_0) \neq 0$, eta $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Orduan, $f'(z)/f(z)$ funtzioak polo sinplea du z_0-n eta

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}; z_0\right) = m.$$

Gogoan izan hipotesia hauen baliokide dela:

- baldin m positiboa bada, f funtzioak zero bat du z_0-n eta m da zero horren multiplizitatea;
- baldin m negatiboa bada, f funtzioak polo bat du z_0-n eta $-m$ da poloaren ordena.

Gogoratu funtzio bat meromorfoa dela D ireki konexuan, D-n dituen puntu singular (ez-gaindigarri) guztiak poloak badira.

6.7 Teorema. *Izan bedi γ kurba sinple itxia D ireki konexuan. Izan bedi f meromorfoa D-n. Demagun f-k ez duela ez zerorik ez polorik γ-ren gainean. Orduan,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = Z - P$$

da, non Z = f-ren zero-kopurua γ-ren barruko aldean eta P = f-ren polo-kopurua γ-ren barruko aldean (zeroak multiplizitatearekin kontatu behar dira eta poloak ordenarekin).

Froga. Hondarren teoremaren ondorio zuzena da, f'/f funtzioaren puntu singularrak f-ren zeroak eta poloak direlako eta horietan duen hondarra goiko formulak ematen duelako. □

Oharra. Teorema horri *argumentuaren printzipioa* ere esaten zaio. Hau da arrazoia. f funtzio meromorfoak ez badu ez zerorik ez polorik γ kurbaren gainean, $f \circ \gamma$ (γ-ren irudia f-ren bidez) jatorritik pasatzen ez den kurba itxia da (ez du zertan sinplea izan, noski). Teoreman agertzen den $Z - P$ zenbakiak neurtzen du kurba horrek zenbat buelta ematen dituen 0-ren inguruan (orientazio positiboak eta negatiboak kontuan izanda). Buelta bakoitzean argumentua 2π handitzen denez, bueltak kontatzea eta argumentua zenbat aldatzen den neurtzea baliokideak dira.

6.8 Teorema (Rouchéren teorema)**.** *Izan bedi γ kurba sinple itxia. Izan bitez f eta g holomorfoak γ-ren gainean eta barruko aldean. Baldin $|f(z)| > |g(z)|$ bada, $z \in \gamma$ guztietarako, f eta $f + g$ funtzioek zero-kopuru bera dute γ-ren barruko aldean (multiplizitatea kontuan izanda).*

Froga. Defini dezagun

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\, dz, \quad t \in [0, 1].$$

Izendatzailea ez da anulatzen γ-n: $|f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$. Orduan, t bakoitzerako $\varphi(t)$ da $f(z) + tg(z)$-ren zero-kopurua γ-ren barruko aldean.

φ jarraitua da $[0, 1]$-en; orduan, $\varphi(t)$ konstantea da, balioak zenbaki osoak direlako. Enuntziatuak dioena $\varphi(0) = \varphi(1)$ da. □

Teorema horren bidez, aljebraren oinarrizko teoremaren beste froga bat eman dezakegu. Izan bedi $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ polinomioa, non $a_n \neq 0$ den. Hartu $f(z) = a_n z^n$ eta $g(z) = P(z) - a_n z^n$, eta hartu γ-rako jatorrian zentratuta dagoen eta R erradioa duen zirkunferentzia. Baldin R handia bada, Rouchéren teoremaren baldintzak betetzen dira. Ondorioz, f eta $f + g = P$ polinomioek zero-kopuru bera dute.

6.7 Ariketak

1. Kalkula itzazu:

   (i) $\operatorname*{Res}_{z=1} \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$. *Em.:* e.

   (ii) $\operatorname*{Res}_{z=1} z e^{\frac{1}{z-1}}$. *Em.:* $3/2$.

   (iii) $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z^2}{\sinh z - \sin z}$. *Em.:* 3.

   (iv) $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{\operatorname{Log}(1+z^2)}{\sin z - z + z^3/6}$. *Em.:* $-400/7$.

2. Kalkula itzazu funtzio hauen hondarrak puntu singular isolatu guztietan:

   (i) $\dfrac{1}{z^3+z}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{1}{z^3+z} = 1$; $\operatorname*{Res}_{z=\pm i} \dfrac{1}{z^3+z} = -\dfrac{1}{2}$.

   (ii) $\dfrac{z^2}{1+z^4}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=e^{\pm\frac{\pi}{4}i}} \dfrac{z^2}{1+z^4} = \dfrac{1\mp i}{4\sqrt{2}}$; $\operatorname*{Res}_{z=e^{\pm\frac{3\pi}{4}i}} \dfrac{z^2}{1+z^4} = -\dfrac{1\pm i}{4\sqrt{2}}$.

   (iii) $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=\pm i} \dfrac{1}{(z^2+1)^3} = \mp\dfrac{3i}{16}$.

   (iv) $\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=1} \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3} = 0$.

   (v) $\dfrac{1}{\sin z^2}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{1}{\sin z^2} = 0$, $\operatorname*{Res}_{z=\pm(i)\sqrt{k\pi}} \dfrac{1}{\sin z^2} = \pm\dfrac{(-1)^k}{2(i)\sqrt{k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$;

   (vi) $\dfrac{1}{e^z+1}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=(2k+1)\pi i} \dfrac{1}{e^z+1} = -1$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

   (vii) $\dfrac{z^3}{z^4-1}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=\pm 1} \dfrac{z^3}{z^4-1} = \operatorname*{Res}_{z=\pm i} \dfrac{z^3}{z^4-1} = \dfrac{1}{4}$

   (viii) $\dfrac{z}{\sin z}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z}{\sin z} = 0$; $\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \dfrac{z}{\sin z} = (-1)^k k\pi$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

   (ix) $\dfrac{1}{1-e^{z^2}}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{1}{1-e^{z^2}} = 0$; $\operatorname*{Res}_{z=(\pm 1 \pm i)\sqrt{k\pi}} \dfrac{1}{1-e^{z^2}} = -\dfrac{1}{2(\pm 1 \pm i)\sqrt{k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$.

   (x) $\dfrac{z^{n-1}}{z^n+a^n}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=ae^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}} \dfrac{z^{n-1}}{z^n+a^n} = \dfrac{1}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

   (xi) $\dfrac{e^{imz}}{(z^2+a^2)^2}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=\pm ai} \dfrac{e^{imz}}{(z^2+a^2)^2} = -\dfrac{e^{\mp ma}(am\pm 1)}{4a^3} i$.

   (xii) $\dfrac{1}{(1+z^2)^n}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=\pm i} \dfrac{1}{(1+z^2)^n} = \mp\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}(2n-1)} i$.

   (xiii) $\sin z \sin \dfrac{1}{z}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=0} \sin z \sin \dfrac{1}{z} = 0$.

(xiv) $\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$ *Em.:* $\operatorname*{Res}_{z=\pm i} \dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2} = -\dfrac{1}{4e}$.

3. Baldin $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 3$ bada, kalkula ezazu $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\tan z/2$. *Em.:* 3/2.

4. Funtzio bat, f, aurkitu behar da datu hauekin:
   a) f-ren puntu singular bakarrak poloak dira: 1 puntua 2 ordenako poloa da eta $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 0$; i puntua polo sinplea da eta $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 10$;
   b) f bornatua da $\{z : |z| > 2\}$ multzoan;
   c) $f(0) = -1 + i$ eta $f(3) = 1 - 2i$.

   Em.: $f(z) = -\dfrac{7+3i}{3} + \dfrac{4-24i}{3}\dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{10}{z-i}$.

5. Kalkula itzazu integral hauek:
   (i) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+2)}$. *Em.:* 0
   (ii) $\displaystyle\int_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z+3}\,dz$. *Em.:* $-i\dfrac{4\pi}{3}\ln 3$
   (iii) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(1+z)}\,dz$. *Em.:* $\dfrac{e-2}{e}\pi i$
   (iv) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2}{\sin^3 z\cos z}\,dz$. *Em.:* $2\pi i$
   (v) $\displaystyle\int_{|z|=2} z^3 \sin\frac{1}{z}\,dz$. *Em.:* 0
   (vi) $\displaystyle\int_{|z|=1/3} (z+1)e^{1/z}\,dz$. *Em.:* $3\pi i$
   (vii) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{ze^{1/z}}{1+z}\,dz$. *Em.:* 0
   (viii) $\displaystyle\int_{|z|=2/3} (\sin\frac{1}{z^2} + e^{z^2}\cos z)\,dz$. *Em.:* 0

6. Kalkula itzazu:
   (i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$. *Em.:* $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
   (ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$, $|a| \neq 1$. *Em.:* $\dfrac{2\pi}{|a^2-1|}$.

7. Kalkula itzazu:
   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ *Em.:* $\sqrt{2}\pi$
   (ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+5)^2}\,dx.$ *Em.:* $-\pi/16$
   (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2},\quad a>0,\ b>0,\ a\neq b.$ *Em.:* $\pi\dfrac{2b^3+a^3-3ab^2}{2ab^3(b^2-a^2)^2}.$

8. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx$, $m,n\in\mathbb{N}$, $m<n$ izanik, kurba hau erabiliz: 0-tik R-ra zuzen errealetik, R-tik $Re^{\pi i/n}$-raino zirkunferentzia baten arkutik, $Re^{\pi i/n}$-tik 0-raino zuzenki batetik.

   Em.: $\dfrac{\pi}{2n\sin(\frac{2m+1}{2n}\pi)}$

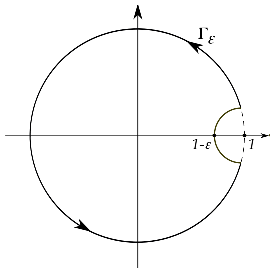
9. Kalkula itzazu integral erreal inpropio hauek hondarrak erabiliz:
   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx.$ *Em.:* $\pi\Big(\dfrac{\cos 1-3\sin 1}{3e^2}\Big)$
   (ii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx,\quad a\geq 0,\ b>0.$ *Em.:* $\dfrac{1+ab}{4b^3e^{ab}}\pi.$
   (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\quad a,b>0,\ a\neq b.$ *Em.:* $\pi\dfrac{b-a+be^{-2a}-ae^{-2b}}{2ab(b^2-a^2)}.$

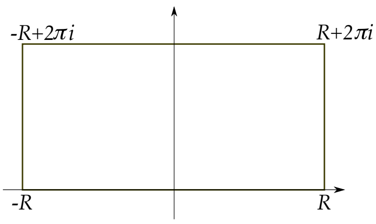
10. Kalkula itzazu:
   (i) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)}\,dx.$ *Em.:* $\pi.$
   (ii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx,\quad a>0,\ b>0,\ a\neq b.$ *Em.:* $\dfrac{\pi(b-a)}{2}.$
   (iii) p.v.$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2-x^2}\,dx,\quad a>0.$ *Em.:* $\dfrac{\pi\sin a}{2a}.$
   (iv) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx.$ *Em.:* $\dfrac{e-1}{2e}\pi$

11. Kalkula itzazu:
   (i) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2+2x+2}\,dx,\quad 0<a<2.$ *Em.:* $\dfrac{\cos\frac{\pi a}{4}-\sin\frac{\pi a}{4}}{\sin \pi a}2^{\frac{a-2}{2}}\pi.$
   (ii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x+2)}\,dx.$ *Em.:* $(\sqrt{2}-1)\pi.$
   (iii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx.$ *Em.:* $\dfrac{\pi^2}{4}.$
   (iv) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+1}\,dx.$ *Em.:* $\dfrac{\pi^3}{8}.$

12. Integra ezazu $f(z) = \dfrac{\mathrm{Log}(1-z)}{z}$ funtzioa beheko ezkerreko irudian ematen den γ_ϵ bidean. $\epsilon \to 0$ eginez eta parte irudikaria hartuz, lor ezazu

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -2\pi \ln 2.$$





13. Kalkula ezazu

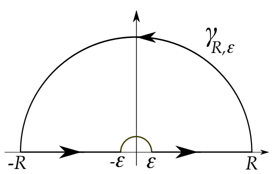
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{(e^x+1)(e^x+2)}\, dx,$$

$0 < a < 2$ izanik, $f(z) = \dfrac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)}$ funtzioa eta goiko eskuineko irudian ematen den γ_R bidea erabiliz eta $R \to \infty$ eginez. *Em.:* $\dfrac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin(\pi a)}$.

14. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\, dx$, $0 < p < 1$. Horretarako, erabil ezazu

$$f(z) = \frac{z^p}{1+z^2}$$

funtzioa non z^p definitzeko $\log z = \ln|z| + i\theta$ hartzen den, $\theta \in \arg z$, $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ izanik. Finka ezazu ϵ txikia eta R handia eta integra ezazu irudian agertzen den $\gamma_{R,\epsilon}$ kurbaren gainean. Egin ezazu gero limitea ϵ 0-rantz eta R ∞-rantz eramanez.



Em.: $\dfrac{\pi}{2\cos(p\pi/2)}$.

15. Hondarren teoria serie batzuen batura kalkultzeko erabil daiteke, problema honetan ikusiko dugun bezala.

   (i) Froga ezazu, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ bada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi a \coth \pi a - 1}{2a^2}$$

   dela. Horretarako, γ_N erpinak $\pm\left(N + \frac{1}{2}\right) \pm \left(N + \frac{1}{2}\right) i$ puntuetan dituen karratua izanik, kalkula ezazu $\displaystyle\int_{\gamma_N} \frac{\cot \pi z}{z^2 + a^2}\, dz$ integrala eta egin $N \to \infty$.

   (ii) Oro har, $f(z)$ funtzio arrazionala bada, $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$ betetzen badu, eta f-ren poloak eta zeroak ez badira zenbaki osoak, froga ezazu

$$\int_{\gamma_N} f(z) \cot \pi z \, dz$$

   integralaren kalkuluaren bidez, formula hau betetzen dela:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) \cot \pi z,$$

   non $z_1, z_2, \ldots, z_k$ f-ren poloak diren.

   (iii) f funtzio ez-negatiboa bada, $\sum (-1)^n f(n)$ moduko serie alternatuetarako $\operatorname{cosec} \pi z$ erabiltzen da $\cot \pi z$ funtzioaren ordez. Kalkula ezazu

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}, \qquad a \notin \mathbb{Z}.$$

$$\textit{Em.:} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \pi^2 \frac{\cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}.$$

16. Kalkula itzazu funtzio hauen hondarrak puntu singular isolatu guztietan, ∞ ere kontuan hartuz:

   (i) $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$; (ii) $\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$; (iii) $z^5 \cos \dfrac{1}{z}$;

   (iv) $\dfrac{z^3}{z^4 - 1}$; (v) $\dfrac{1}{1 - e^{z^2}}$; (vi) $\dfrac{e^{1/z}}{(1+z)z}$.

17. Kalkula itzazu integral konplexu hauek hondarren teorema aplikatuz:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z}\, dz, \qquad \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} z e^{\frac{1}{z-1}}\, dz.$$

18. Froga ezazu 6.6 atalean erabili dugun emaitza $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ funtzioaren hondarretarako. Hau da, $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ bada, kalkula ezazu F-ren z_0 puntuko hondarra kasu hauetan:
    (i) z_0 f funtzioaren ordenako zeroa da.
    (ii) z_0 f funtzioaren m ordenako poloa da.
19. Frogatu $z^5 + 15z + 1 = 0$ ekuazioaren erro guztiak $|z| < 2$ diskoan daudela. Frogatu erro horietatik lau bakarrik daudela $3/2 < |z| < 2$ eraztunean.
20. Frogatu $z^5 - iz^3 + 1$ ekuazioaren erro guztiak $|z| < 2$ diskoan daudela. Zenbat daude lehen koadrantean?

7. Gaia

Transformazio konformeak

7.1 Konformalitatea

Definizioa. Izan bitez Ω eta $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ multzo irekiak. $f\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ bijektiboa bada, eta f eta haren alderantzizkoa $f^{-1}\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ holomorfoak badira, orduan, esaten dugu f Ω-tik $\tilde{\Omega}$-rako *transformazio konformea* dela.

Oharra. f bijektiboa eta holomorfoa bada eta $f'(z) \neq 0$ bada $z \in \Omega$ guztietarako, orduan, f^{-1} ere holomorfoa da.

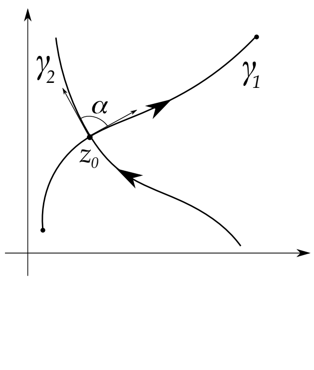
7.1 Teorema. *Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$. f z_0 puntuan holomorfoa bada eta $f'(z_0) \neq 0$, orduan, f-k angeluen magnitudea eta noranzkoa mantentzen ditu, hau da, z_0-tik pasatzen diren bi kurbek z_0-n osatzen duten angelua eta kurba horien irudiek $f(z_0)$ puntuan osatzen dutena berdinak dira.*

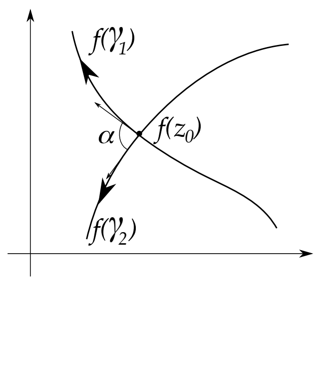
Froga. Izan bedi σ z_0 puntutik pasatzen den kurba bat. Demagun $\sigma(0) = z_0$ dela, eta $\sigma'(0) \neq 0$.

Izan bedi $\tilde{\sigma} = f \circ \sigma$, σ-ren irudia f-ren bidez.

$$\tilde{\sigma}'(0) = f'(\sigma(0))\sigma'(0) = f'(z_0)\sigma'(0).$$

Beraz, σ-ren z_0 puntuko bektore ukitzailea $f'(z_0)$ zenbakiarekin biderkatuz lortzen da $\tilde{\sigma}$ kurbaren $f(z_0)$ puntuko bektore ukitzailea.





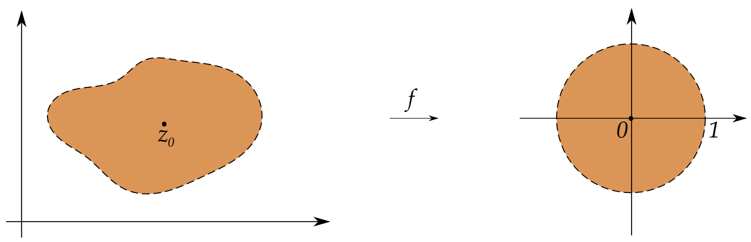
Ondorioz, σ eta ρ z_0 puntutik pasatzen diren bi kurba baldin badira, haien irudien bektore ukitzaileak modu berean lortzen direnez, irudi horiek osatzen duten angelua hasierako kurben bektore ukitzaileek osatzen duten bera izango da. □

Definizioa. Izan bitez $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eta $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$ izanik.

(i) $|f'(z_0)|$ f-ren z_0 puntuko *hedapen-faktorea* da.

(ii) $\operatorname{Arg}(f'(z_0))$ f-ren z_0 puntuko *biraketa-angelua* da.

7.2 Teorema (Riemannen transformazio konformearen teorema)**.** *Izan bitez* $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, *eremu sinpleki konexua, eta* $z_0 \in \Omega$*. Orduan,* $f\colon \Omega \to B(0,1)$ *transformazio konforme bakar bat existitzen da, zeinetarako* $f(z_0) = 0$ *eta* $f'(z_0) > 0$ *diren.*



Oinarrizko funtzio holomorfoak (esponentziala, funtzio trigonometrikoak, Joukowski-ren funtzioa...) transformazio konformeak dira eremu egokiak aukeratzen badira.

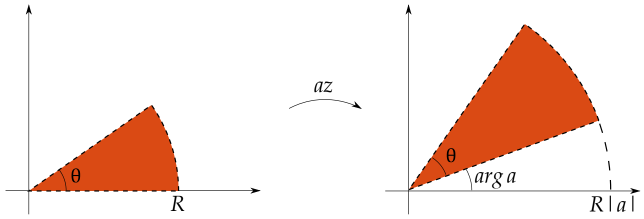
7.2 Polinomioak

Polinomioak funtzio osoak dira. Ikus ditzagun kasu partikular batzuk eta nola transformatzen dituzten zenbait eremu.

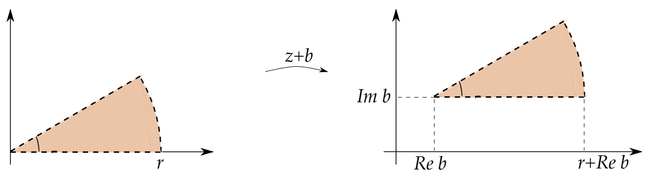
7.2.1 $P(z) = az + b$

$b = 0$ bada, $P(z) = az$; beraz, $|P(z)| = |a||z|$ (dilatazioa) eta $\arg(P(z)) = \operatorname{Arg} a + \arg z$ (biraketa).

Adibidez, jatorrian zentratuta dagoen eta R erradioa duen sektore baten transformazioa honako hau da:



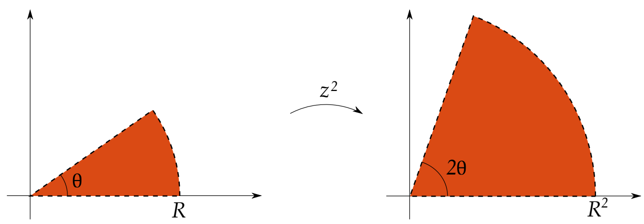
$a = 1$ bada, $P(z) = z + b$ transformazioaren bidez translazio bat gauzatzen da.



Beraz, $P(z) = az + b$ trasformazioak dilatazioa, biraketa eta translazioa egiten ditu.

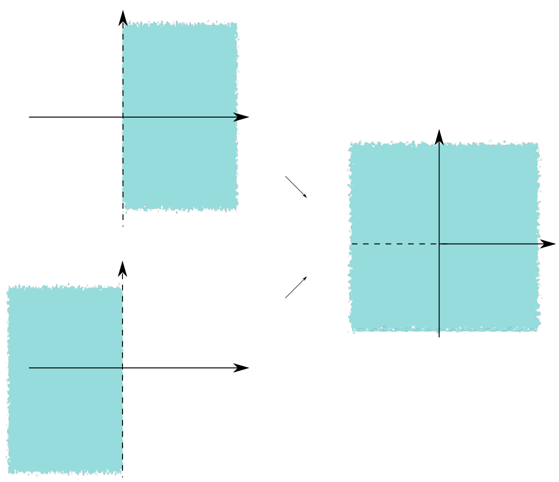
7.2.2 $P(z) = z^2$

$|z^2| = |z|^2$ eta $\operatorname{Arg}(z^2) = 2\operatorname{Arg} z$ dira; beraz, jatorrian zentratutako sektore zirkular bati P aplikatzen badiogu, angeluaren anplitudea bikoizten da eta erradioa handiagoa edo txikiagoa egiten da, 1 baino handiagoa edo txikiagoa den.

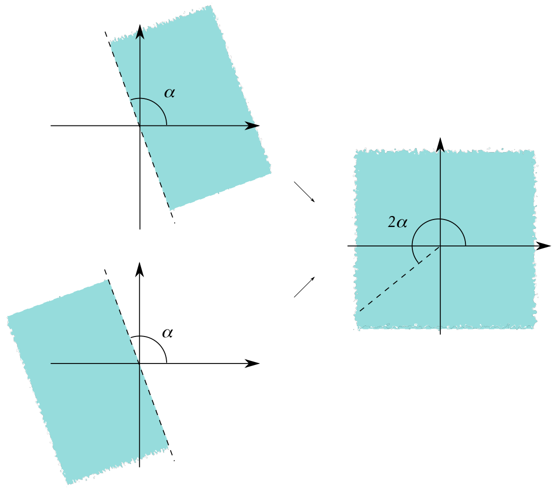


z^2 funtzioa ez da injektiboa. $\Omega^+ = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} z > 0\}$ planoerdiaren irudia plano osoa da, ardatz erreal negatiboa kenduta. Planoerdi horretan $z = r^{i\theta}$, $r \in (0, +\infty)$ eta $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ denez, $|z^2| \in (0, +\infty)$ eta $\operatorname{Arg}(z^2) \in (-\pi, \pi)$.

Baina, $\Omega^- = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} z < 0\}$ planoerdiaren irudia ere $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ da. Kasu honetan, $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$; beraz, $2\theta \in (\pi, 3\pi)$.

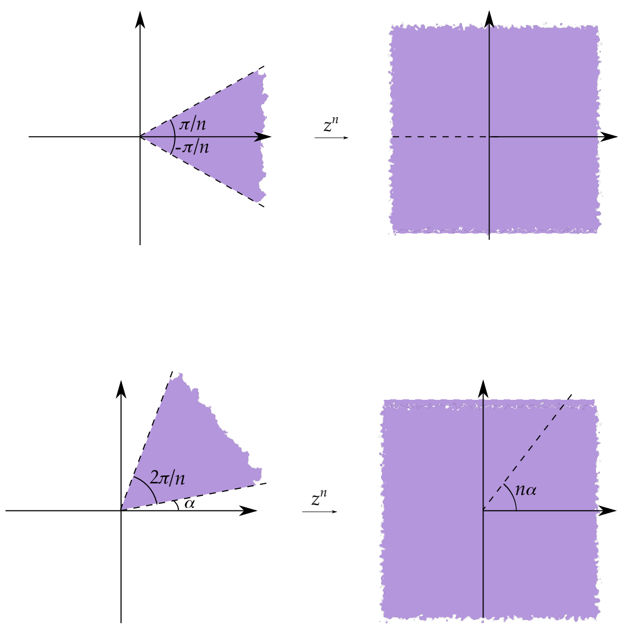


Orokorrago esan daiteke: jatorritik pasatzen den edozein zuzenek definitzen dituen bi planoerdiek irudi bera dute.



7.2.3 $P(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

Aurreko kasuan gertatu denaren antzeko zerbait gertatzen da funtzio horrekin ere. Jatorrian zentratuta dagoen eta $2\pi/n$ anplitudea duen sektore baten irudia plano osoa da, jatorrian hasten den zuzenerdi bat kenduta.



7.3 Funtzio arrazionalak

7.3.1 Transformazio lineal frakzionarioak

Definizioa. Izan bitez $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ izanik. Esaten dugu $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *transformazio lineal frakzionarioa* (TLF), *transformazio bilineala*, *transformazio homografikoa* edo *Moebiusen transformazioa* dela.

$c = 0$ bada, T lehen mailako polinomioa da, funtzio osoa, beraz. $c \neq 0$ bada, T-k polo sinplea du $-d/c$ puntuan eta

$$T'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} - \{-d/c\}.$$

T-ren definizio-eremua eta irudi-multzoa ∞ puntuarekin osatzen baditugu, plano konplexu hedatuan bijekzioa lortzen da. Hots, $c \neq 0$ bada,

$$T(-d/c) = \infty \quad \text{eta} \quad T(\infty) = a/c$$

definituz, eta, $c = 0$ bada,

$$T(\infty) = \infty$$

definituz, orduan, $T\colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ aplikazio bijektiboa da, eta, deribatua anulatzen ez denez, kurben arteko angeluen magnitudea eta noranzkoa mantentzen ditu, hots, aplikazio konformea da.

7.3 Proposizioa. *T eta S TLF badira, orduan, T^{-1} eta $T \circ S$ ere TLF dira.*

Froga. Izan bitez $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ eta $S(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$. $T^{-1}(z) = w$ izendatuz,

$$z = T(w) = \frac{aw+b}{cw+d} \implies (cz-a)w = -dz+b \implies w = T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Hau da, TLF baten alderantzizkoa beste TLF bat da. Bestalde,

$$T \circ S(z) = T(S(z)) = \frac{aS(z)+b}{cS(z)+d} = \frac{a\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + b}{c\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

Beraz, bi TLFren konposizioa beste TLF bat da. □

7.4 Proposizioa. *TLF oro translazioen, biraketen, dilatazioen eta inbertsioaren konposizioa da. (Inbertsioa $1/z$ funtzioa da.)*

Froga. Izan bedi $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - cb \neq 0$ izanik.

- $c = 0$ bada,

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = g \circ f(z)$$

non $f(z) = \frac{a}{d}z$ transformazioak dilatazioa eta biraketa egiten dituen, eta $g(z) = z + \frac{b}{d}$ translazioa den.

- $c \neq 0$ bada,

$$\begin{aligned} T(z) =& \frac{a\left(z + \frac{b}{a}\right)}{c\left(z + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\frac{z + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2\left(z + \frac{d}{c}\right)} \\ =& g_2 \circ f_2 \circ h \circ f_1 \circ g_1(z) \end{aligned}$$

non $g_1(z) = z + \frac{d}{c}$ translazioa den, $f_1(z) = c^2 z$ dilatazioa eta biraketa, $h(z) = 1/z$ inbertsioa, $f_2(z) = (bc - ad)z$ beste dilatazio eta biraketa bat, eta, azkenik, $g_2(z) = \frac{a}{c} + z$ translazioa. $\square$

7.5 Teorema. *Zuzenen eta zirkunferentzien irudiak TLFen bidez zuzenak edo zirkunferentziak dira. Gainera, irudia zuzen bat izan dadin, hasierako zuzenak edo zirkunferentziak transformazioaren polotik pasatu behar du.*

Froga. TLFak translazioen, biraketen, dilatazioen eta inbertsioen konposizioak direnez, frogatu behar dugu horietako transformazio bakoitzak zuzenak eta zirkunferentziak zuzenetara edo zirkunferentzietara eramaten dituela. Argi dago zuzen baten irudia translazio, biraketa edo dilatazio baten bidez beste zuzen bat dela. Halaber, zirkunferentzia baten irudia, hiru transformazio hauen bidez, beste zirkunferentzia bat izango da. Beraz, zuzen bati eta zirkunferentzia bati aplikatzerakoan, inbertsioaren eragina zein den aztertu behar dugu.

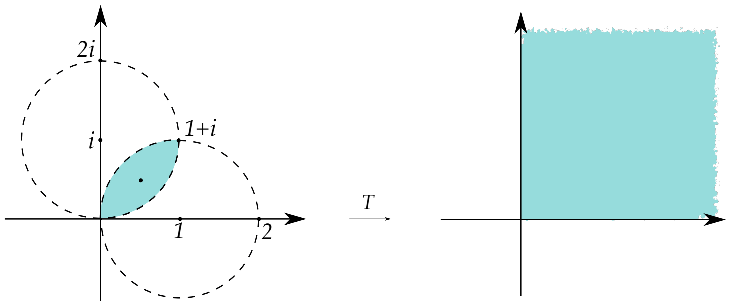
Edozein zirkunferentzia $Az\overline{z} + B\overline{z} + \overline{B}z + C = 0$ moduko ekuazio baten bidez adieraz daiteke, $A \neq 0$, $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ eta $|B|^2 - AC > 0$ izanik. $A = 0$ bada, aurreko ekuazio hori zuzen batena da.

$T(z) = \frac{1}{z}$ da inbertsioa. Orduan, $z = \frac{1}{T(z)} = \frac{1}{w}$; beraz,

$$A\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + B\frac{1}{\overline{w}} + \overline{B}\frac{1}{w} + D = 0 \quad \Longrightarrow \quad A + Bw + \overline{B}\overline{w} + Dw\overline{w} = 0,$$

hau da, $w = T(z)$ ere zirkunferentzia batean dago ($D \neq 0$ bada, hots, hasierako zuzena edo zirkunferentzia jatorritik, $T(z) = 1/z$-ren polotik, pasatzen ez bada), edo zuzen batean ($D = 0$ bada, hots, hasierako zuzena edo zirkunferentzia jatorritik pasatzen bada). $\square$

Adibidea. Aurki dezagun $|z-1|=1$ eta $|z-i|=1$ zirkunferentziek mugatutako eremua lehen koadrantera eramaten duen TLF bat.



Zirkunferentzien puntu komunek, 0 eta $1+i$, lehen koadrantea mugatzen duten zuzenen puntu komunetara joan behar dute. Adibidez, $T(0)=0$ eta $T(1+i)=\infty$. Hau betetzen duen TLF bat, $T(z)=\dfrac{z}{z-(1+i)}$ da.

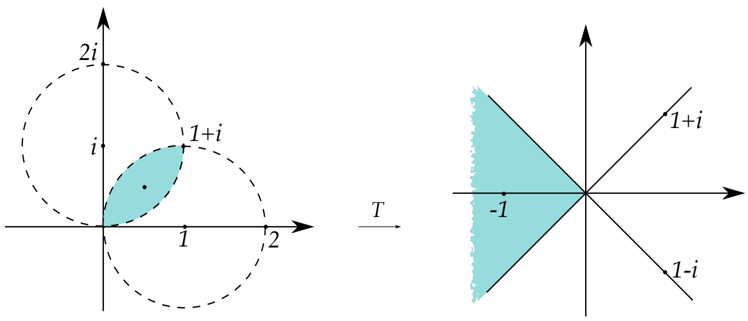
$|z-1|=1$ eta $|z-i|=1$ zirkunferentzien irudiak jatorritik pasatzen diren zuzen perpendikularrak dira, zirkunferentziak jatorrian perpendikularrak direlako. Ikus ditzagun 2 eta $2i$ zirkunferentzien gaineko puntuen irudiak:

$$\begin{aligned} T(2) =& \frac{2}{2-(1+i)} = \frac{2}{1-i} = 1+i, \\ T(2i) =& \frac{2i}{2i-(1+i)} = \frac{2i}{1+i} = 1-i. \end{aligned}$$

Beraz, $|z-1|=1$ zirkunferentziaren irudia lehen koadranteko erdibitzailea da eta $|z-i|=1$ zirkunferentziarena bigarren koadrantekoa. Gainera,

$$T\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\dfrac{1+i}{2}}{\dfrac{1+i}{2}-(1+i)} = -1.$$

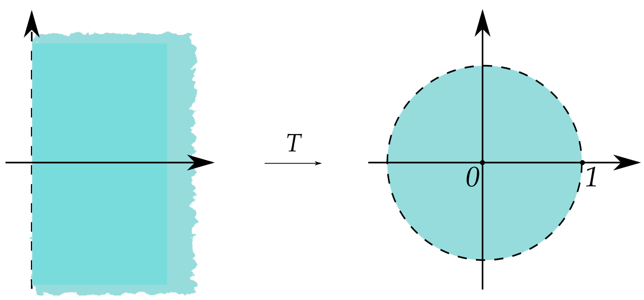
Beraz, ezkerraldeko laurdena da zirkunferentziek mugatzen duten eskualdearen T-ren bidezko irudia.



Biraketa baten bidez, lehen koadrantea lor dezakegu. Beraz, bilatzen dugun TLF bat $\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}z}{z-(1+i)}$ da; edo, $-1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$ denez, beste honek ere egiten du nahi duguna:

$$\tilde{T}(z) = -\frac{(1+i)z}{z-1-i}.$$

Adibidea. Aurki dezagun $\operatorname{Re} z > 0$ planoerdia $|w| < 1$ diskora eramaten duen TLF bat, 1 puntuko irudia 0 izanik.



$1 \to 0$, $0 \to -1$ eta $\infty \to 1$ egiten duen TLF bat $T(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ da. T-ren bidez ardatz erreala ardatz errealera doa, eta ardatz irudikariaren irudia 1 eta -1 puntuetatik pasatzen den zirkunferentzia bat da. Gainera, $z=0$ puntuan ardatzak perpendikularrak direnez, zirkunferentzia hori ardatz errealarekiko perpendikularra da $T(0)=-1$ puntuan. Ondorioz, $|w|=1$ zirkunferentzia dugu, nahi genuen bezala.

7.6 Teorema. *Izan bitez $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z_i \neq z_j$ izanik, $i \neq j$ denean. Orduan existitzen da TLF bakar bat non $T(z_1)=0$, $T(z_2)=1$, $T(z_3)=\infty$.*

Baldin $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ badira,

$$T(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

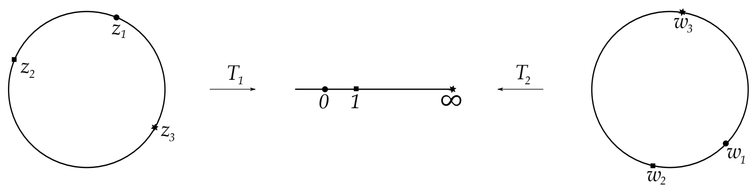
Eta $z_j = \infty$ bada, j baterako,

$$T(z) = \lim_{z_j \to \infty} \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

Adibidez, $z_3 = \infty$ bada, $T(z) = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

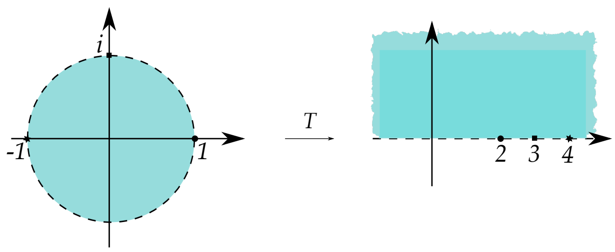
Zirkunferentzia bat edo zuzen bat finkatuta geratzen da hiru puntu emanez. Aurreko teoremaren arabera, C_1 eta C_2 planoko bi zuzen edo zirkunferentzia badira, TLF bat aurki dezakegu, T, zeinetarako $T(C_1)=T(C_2)$ den.

Izan bitez $z_1, z_2, z_3 \in C_1$ eta $w_1, w_2, w_3 \in C_2$. Aurki daitezke bi TLF, T_1 eta T_2, zeinetarako $T_1(z_1)=0$, $T_1(z_2)=1$, $T_1(z_3)=\infty$, eta $T_2(w_1)=0$, $T_2(w_2)=1$, $T_2(w_3)=\infty$ diren.



Orduan, $T = T_2^{-1} \circ T_1$ transformazio lineal frakzionarioak C_1 C_2-ra eramaten du. Hau da, $w = T(z)$ bada, w atera behar da $T_2(w) = T_1(z)$ ekuaziotik.

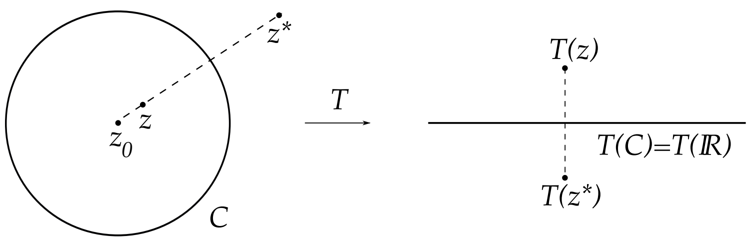
Adibidea. Aurki dezagun 1, i eta -1 puntuak 2, 3 eta 4 puntuetara eramaten dituen TLFa.



$$\frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{i+1}{i-1} = \frac{w-2}{w-4} \cdot \frac{3-4}{3-2} \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{(2-4i)z + (2+4i)}{(1-i)z + (1+i)} = T(z).$$

$|z| < 1$ diskoa goiko planoerdira (eta ez behekora) eramaten du T-k, zeren eta $T(0) = 3 + i$.

Definizioa. Izan bitez $z, z^* \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eta C zirkunferentzia edo zuzena. z eta z^* C-rekiko *simetrikoak* dira $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ espazioan) baldin eta existitzen bada TLF bat, T, zeinetarako $T(C) = \mathbb{R}$ eta $\overline{T(z)} = T(z^*)$ diren. Hau da, $T(z)$ eta $T(z^*)$ simetrikoak dira ardatz errealarekiko.



Oharra. Definizio hori ez da T-ren menpekoa. Izan ere, hau froga daiteke: baldin eta $\tilde{T}$ C ardatz errealera eramaten duen beste TLF bat bada, $\overline{\tilde{T}(z)} = \tilde{T}(z^*)$ da.

Ikus dezagun nola kalkulatu simetrikoak.

(i) Izan bedi C z_0 zentroko eta R erradioko zirkunferentzia. $T(z) = i\dfrac{z-(z_0-R)}{z-(z_0+R)}$ TLFak C $\mathbb{R}$-ra eramaten du. Orduan, z^* z-ren simetrikoa bada C-rekiko (eta $z \neq z_0, \infty$),

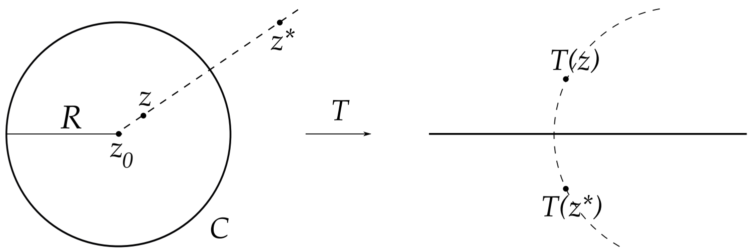
$$\overline{\left(i\frac{z-(z_0-R)}{z-(z_0+R)}\right)} = i\frac{z^*-(z_0-R)}{z^*-(z_0+R)} \quad \Longrightarrow \quad z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z-z_0}}.$$

Hau da, z^* puntuak honako ekuazio hau betetzen du:

$$(z^*-z_0)\overline{(z-z_0)} = R^2.$$

$z = z_0$ bada, $z^* = \infty$, eta $z = \infty$ bada, $z^* = z_0$.

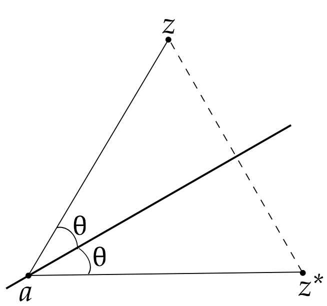
Geometrikoki, $T(z)$ eta $T(z^*)$ ardatz errealarekiko simetrikoak direnez, $T(z)$ eta $T(z^*)$ puntuetatik pasatzen diren zirkunferentzia guztiak ardatz errealarekiko perpendikularrak dira ebaki-puntuan; beraz, z eta z^* puntuetatik pasatzen den zuzena C zirkunferentziaren perpendikularra da, hots, zentrotik pasatzen da. Gainera, $|z^*-z_0| = \dfrac{R^2}{|z-z_0|}$.



(ii) Izan bedi C a puntutik pasatzen den zuzena, ardatz errealarekin osatzen duen angelua θ delarik. Orduan, $T(z) = (z-a)e^{-i\theta}$ TLFak C ardatz errealera eramaten du. z eta z^* C-rekiko simetrikoak badira,

$$\overline{(z-a)e^{-i\theta}} = (z^*-a)e^{-i\theta} \quad \Longrightarrow \quad z^* = a + \overline{(z-a)}e^{2i\theta}.$$

Geometrikoki, z eta z^* puntuetatik pasatzen den zuzena C-rekiko perpendikularra da eta $|z^*-a| = |z-a|$, hau da, z^* z-ren ohiko simetrikoa da C-rekiko.



7.7 Teorema. *TLFek simetria mantentzen dute. Izan bitez C zirkunferentzia edo zuzena, z eta z^* C-rekiko simetrikoak, eta T TLF bat. Orduan, $T(z)$ eta $T(z^*)$ simetrikoak dira $T(C)$-rekiko.*

Adibidea. Izan bedi $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$ izanik. $|z| < 1$ diskoa $|w| < 1$ diskora eramaten duten eta $T(\alpha) = 0$ egiten duren TLFak aurkitu nahi ditugu.

T-k simetria mantentzen duenez α-ren $|z| = 1$ zirkunferentziarekiko simetrikoaren T-ren bidezko irudia 0-ren $|w| = 1$ zirkunferentziarekiko simetrikoa da, ∞ alegia.

$$\alpha^* = 0 + \frac{1^2}{\overline{\alpha}} = \frac{1}{\overline{\alpha}}$$

eta, beraz, $\alpha \to 0$ eta $\dfrac{1}{\overline{\alpha}} \to \infty$, hots,

$$T(z) = \lambda \frac{z-\alpha}{z - \dfrac{1}{\overline{\alpha}}}.$$

T-ek $|z| = 1$ zirkunferentzia jatorrian zentratutako zirkunferentzia batera eramaten du. Guk, zirkunferentzia horren erradioa 1 izatea nahi dugunez, λ parametroa aurkitu behar dugu $|T(1)| = 1$ izan dadin.

$$T(1) = \lambda \frac{1-\alpha}{1 - \dfrac{1}{\overline{\alpha}}} = \lambda\overline{\alpha}\frac{1-\alpha}{\overline{\alpha}-1} \quad \Longrightarrow \quad |T(1)| = |\lambda||\overline{\alpha}| = |\lambda\alpha|.$$

Orduan,

$$T(z) = \frac{1}{|\alpha|} e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z - 1}$$

transformazio lineal frakzionarioek betetzen dituzte eskatzen genituen baldintzak, $\theta \in \mathbb{R}$ edozein izanik.

Adibidea. Aurki ditzagun $\operatorname{Im} z > 0$ planoerdia $|w| < 1$ diskora eramaten duten TLF guztiak.

Izan bedi $z_0 = \alpha + \beta i$ 0-ra doan planoerdiko puntua, $\beta > 0$ izanik. Orduan, $(\alpha + \beta i)^* = \alpha - \beta i$ denez, $T(\alpha - \beta i) = \infty$, hots,

$$T(z) = \lambda \frac{z - (\alpha + \beta i)}{z - (\alpha - \beta i)}.$$

Bestalde, ardatz errealaren irudia $|w| = 1$ zirkunferentzia izatea nahi dugunez, $|T(0)| = 1$ izan behar du:

$$|T(0)| = |\lambda| \left| \frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i} \right| = |\lambda| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = e^{i\theta};$$

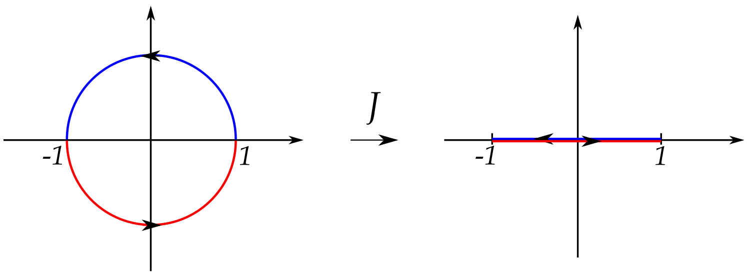
ondorioz,

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha - \beta i}{z - \alpha + \beta i}, \quad \alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R},\ \beta > 0.$$

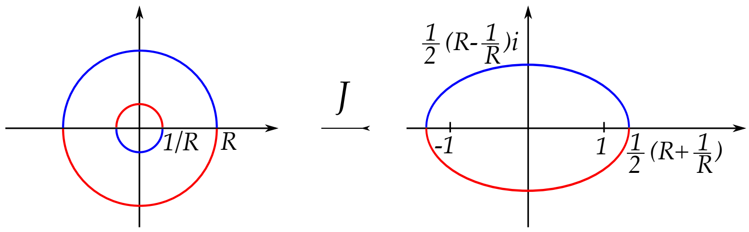
7.3.2 Joukowskiren funtzioa

Joukowskiren funtzioa
$$J(z) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$$
da. J holomorfoa da $\mathbb{C} - \{0\}$ multzoan. Kalkula ditzagun multzo batzuen irudiak J-ren bidez.

- $|z| = 1$ zirkunferentzia: $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, beraz,
$$J(z) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\Big) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta.$$
Balio errealak lortzen ditugu, $[-1, 1]$ tartea, hain zuzen ere. Gainera, balioak bi aldiz errepikatzen dira.



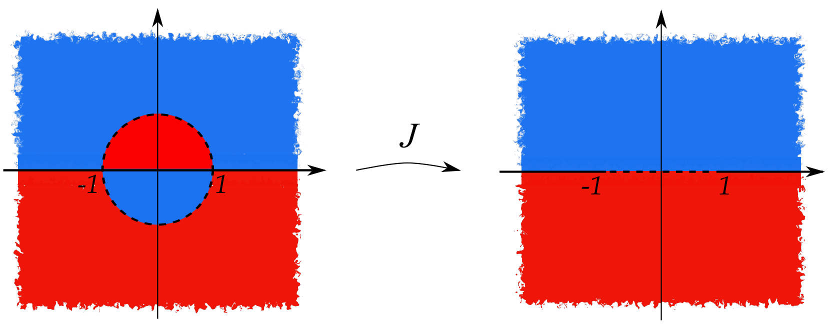
- $|z| = R$ zirkunferentzia, $R > 1$ izanik. Orain, $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$; beraz,
$$J(z) = \frac{1}{2}\Big(Re^{i\theta} + \frac{1}{R}e^{-i\theta}\Big) = \frac{1}{2}\Big(R + \frac{1}{R}\Big)\cos\theta + i\frac{1}{2}\Big(R - \frac{1}{R}\Big)\sin\theta.$$
$J = u + iv$ idatziz,
$$\frac{u^2}{(R + \frac{1}{R})^2} + \frac{v^2}{(R - \frac{1}{R})^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$
hots, $|z| = R$ zirkunferentziaren irudia elipse bat da.
$J(z) = J(\frac{1}{z})$ denez, $|z| = \frac{1}{R}$ zirkunferentziaren J-ren bidezko irudia, aurreko elipse bera da. Parametrizazioari begiratuz, $z = \frac{1}{R}e^{i\theta}$ baldin bada,
$$J(z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R}e^{i\theta} + Re^{-i\theta}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R} + R\Big)\cos\theta + i\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R} - R\Big)\sin\theta.$$
Hala ere, badago desberdintasun bat. $|z| = R$ zirkunferentzian orientazio positiboa hartuz, elipsean ere, orientazio positiboa izango dugu. Aldiz, $|z| = \frac{1}{R}$ zirkunferentzian orientazio positiboa hartuz, haren irudia den elipsean, orientazioa kontrakoa da.



- $[-1,1]$ zuzenkiaren irudia $\mathbb{R}-(-1,1)$ multzoa da eta $\mathbb{R}-(-1,1)$ multzoarena ere bai, zeren eta $x \in \mathbb{R}$ bada, argi dago $J(x) \in \mathbb{R}$ dela eta

$$x < 0 \text{ bada,} \quad J(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \leq -1,$$
$$x > 0 \text{ bada,} \quad J(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1.$$

  Aurreko guztiaren arabera,



7.4 Funtzio esponentziala

Ikus dezagun nola transformatzen dituen funtzio esponentzialak zenbait multzo.

- x_0 puntutik pasatzen den zuzen bertikalaren irudia jatorrian zentratutako zirkunferentzia bat da. $z = x_0 + iy$ moduko puntuak dira zuzen horretakoak, $y \in \mathbb{R}$ delarik; beraz,

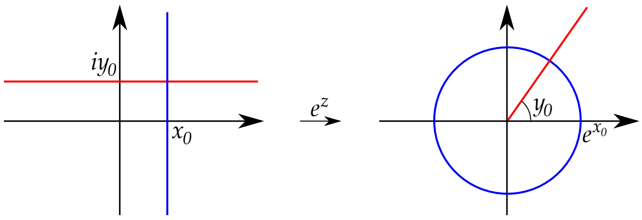
$$e^z = e^{x_0}e^{iy}, \text{ eta } |e^z| = e^{x_0} \text{ konstantea da.}$$

  $y \in \mathbb{R}$ denez, zirkunferentzia infinitu aldiz errepikatzen da.

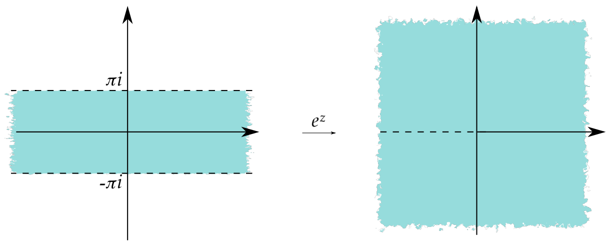
- iy_0 puntutik pasatzen den zuzen horizontalaren irudia, jatorrian hasten den zuzenerdi ireki bat da. Kasu honetan, $z = x + iy_0$ da, $x \in \mathbb{R}$ izanik, beraz,

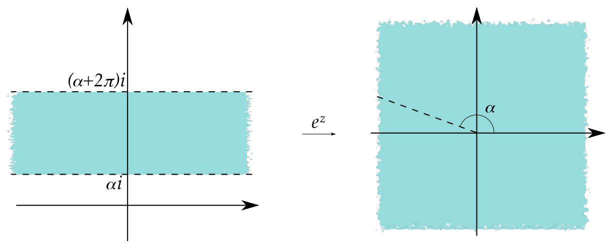
$$e^z = e^x e^{iy_0}.$$

  Orain argumentua konstantea da eta $|e^z| \in (0,\infty)$, hau da, jatorria ez da irudian agertzen.



Aurrekoa kontuan hartuz,





7.5 Funtzio trigonometrikoak

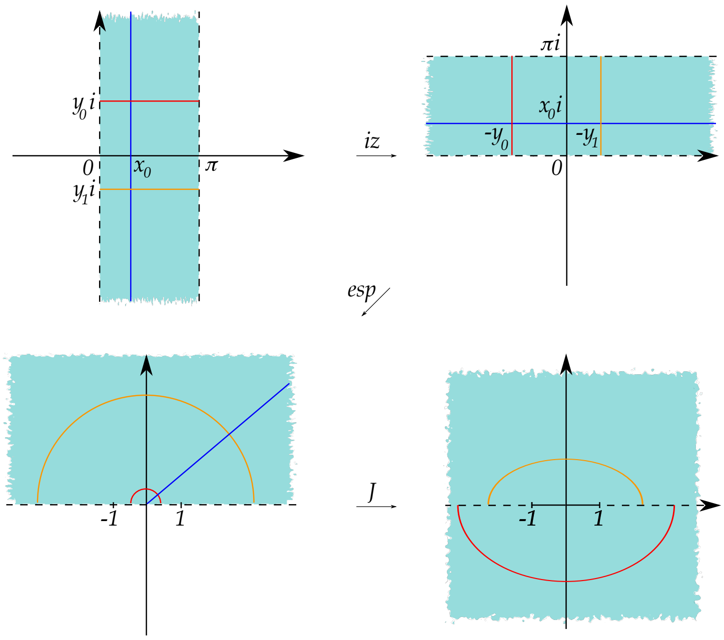
Azter dezagun $\cos z$ funtzioa. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = J(e^{iz})$ denez, J Joukowskiren funtzioa delarik, konposizio baten modura ikus daiteke.

- $y_0 > 0$ bada, $\{z = x + iy_0 : x \in (0, \pi)\}$ zuzenki horizontalaren irudia elipse erdi bat da:

  $$iz = -y_0 + ix \implies e^{iz} = e^{-y_0}e^{ix},\ (e^{-y_0} < 1) \implies J(e^{iz}) \text{ beheko elipse erdi bat.}$$

- Era berean, $y_1 < 0$ bada, $\{z = x + iy_1 : x \in (0, \pi)\}$ zuzenki horizontalaren irudia elipse erdi bat da:

  $$iz = -y_1 + ix \implies e^{iz} = e^{-y_1}e^{ix},\ (e^{-y_1} > 1) \implies J(e^{iz}) \text{ goiko elipse erdi bat.}$$



Antzera gertatzen da sinurako ere:

$$\sin z = \cos\big(\frac{\pi}{2} - z\big) = \cos\big(z - \frac{\pi}{2}\big) = J(e^{i(z-\frac{\pi}{2})}) = J(-ie^{iz}).$$

Orain, irudi berak lortzeko (elipse erdiak), $z = x + iy_0$, y_0 finkoa eta $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hartuko dugu. Baldin $y_0 > 0$ bada, $\frac{\pi}{2} - z = \frac{\pi}{2} - x - iy_0$ dugu, eta $\frac{\pi}{2} - x \in (0, \pi)$. Beraz, irudia goiko elipse erdia da. Baldin $y_0 < 0$ bada, beheko elipse erdia lortzen da.

7.6 Ariketak

1. Aurki itzazu irudi multzoak transformazio eta eremu hauetarako.

   (i) $|z| < 1$ diskoa eta $w = i\dfrac{z-1}{z+1}$.

   (ii) $|\operatorname{Arg} z| < \pi/4$ sektorea eta $w = \dfrac{z}{z-1}$.

   (iii) $0 < \operatorname{Re} z < 1$ banda eta $w = \dfrac{z}{z-1}$.

2. Aurki itzazu $-1,\ i,\ 1+i$ puntuak ematen diren puntuetara eramaten dituzten transformazio lineal frakzionarioak:

   (i) $0,\ 1,\ \infty$ *Em.:* $T(z) = -\dfrac{1-i}{2}\dfrac{z+1}{z-1-i}$.

   (ii) $1,\ \infty,\ 0$ *Em.:* $T(z) = \dfrac{3+i}{5}\dfrac{z-1-i}{z-i}$.

   (iii) $2,\ 3,\ 4$ *Em.:* $T(z) = 4\dfrac{z+2i}{(1-i)z-1+3i}$.

3. $w = \overline{z}$ transformazio lineal frakzionarioa al da?

4. Aurki itzazu $3+4i$ puntuaren puntu simetrikoak hurrengo zirkunferentziekiko:

   (i) $|z| = 1$ *Em.:* $\dfrac{3+4i}{25}$.

   (ii) $|z-1| = 1$ *Em.:* $\dfrac{11+2i}{10}$.

   (iii) $|z-i| = 2$ *Em.:* $\dfrac{2+5i}{3}$.

5. Eraman ezazu zirkulu unitarioa zirkulu berera TLF baten bidez, baldintza honekin: zirkulu barruko α puntuaren irudia 0 da eta $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ puntuaren irudia 1.

   Em. $T(z) = -\dfrac{|\alpha|}{\alpha}\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$.

6. Existitzen al dira $a \in (0,1)$ eta T transformazio lineal frakzionarioa, zeinetarako $1 < |w| < 2$ eraztuna den eskuineko planoerdiari $|z-1| \le a$ zirkulua kenduz lortutako eremuaren T-ren bidezko irudia?

   Em. $a = 4/5$, $T(z) = 2e^{i\theta}\dfrac{5z-3}{5z+3}$ edo $T(z) = e^{i\theta}\dfrac{5z+3}{5z-3}$.

7. Funtzio esponentziala erabiliz, aurki ezazu $|z| < 2$ eta $|z-1| > 1$ baldintzek definitzen duten multzoa goiko planoerdira eramaten duen transformazio konforme bat.

   Em.: $f(z) = e^{\frac{2\pi i z}{z-2}}$.

8. Aurki ezazu $|\operatorname{Re} z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ banda $|\operatorname{Arg} w| < \pi/4$ sektorera eramaten duen transformazio konforme bat.

$$\textit{Em.: } f(z) = e^{-\frac{\pi}{4}i}\sqrt{\sin\frac{\pi z}{2}}.$$

9. Izan bedi $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eremu sinpleki konexua eta izan bedi φ zatika jarraitua $\partial\Omega$ multzoan. Orduan Laplaceren ekuazioaren Dirichleten problemak soluzio bakarra du, hau da, existitzen da Ω-n definitutako u bakar bat zeinetarako

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & \Omega\text{-n}, \\ u = \varphi, & \partial\Omega\text{-n}. \end{cases}$$

$\Omega = \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\}$ bada, orduan,

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-s)^2+y^2}\varphi(s)\,ds,$$

eta $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$ bada, orduan, $X = (x,y) \in \Omega$ eta $\Theta \in \partial\Omega$ idatziz,

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{1-|X|}{|X-\Theta|^2}\varphi(\Theta)\,d\sigma(\Theta).$$

(i) Izan bitez $f = u+iv$ funtzio holomorfoa eta F funtzio harmonikoa. Froga ezazu $(F \circ f)(x,y) = F(u(x,y), v(x,y))$ harmonikoa dela bere definizio-eremuan. Horren ondorioz, propietate hau dugu: izan bitez Ω eta $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ eremu sinpleki konexuak, f Ω-tik $\tilde{\Omega}$-rako transformazio konformea, φ zatika jarraitua $\partial\Omega$-n, eta u eta $\tilde{u}$ problema hauen soluzioak:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \Omega\text{-n}, \\ u = \varphi & \partial\Omega\text{-n}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla^2 \tilde{u} = 0 & \tilde{\Omega}\text{-n}, \\ \tilde{u} = \varphi \circ f^{-1} & \partial\tilde{\Omega}\text{-n}; \end{cases}$$

orduan, $u = \tilde{u} \circ f$.

(ii) Izan bedi $u(x,y)$ tenperatura $(x,y) \in \Omega$ puntuan. Orduan, u harmonikoa da. Aurreko 8. problema erabiliz, esan ezazu nola aurkitu $\Omega = \{z \colon |\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ plakaren tenperatura, alde horizontaleko tenperatura 0° eta alde bertikaletakoa 1° bada.

$$\textit{Em.: } u(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{\cosh\frac{\pi y}{2}\sin\frac{\pi x}{2} - 1}{\sinh\frac{\pi y}{2}\cos\frac{\pi x}{2}} - \arctan\frac{\cosh\frac{\pi y}{2}\sin\frac{\pi x}{2} + 1}{\sinh\frac{\pi y}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}\right) - 1.$$

10. Aurki itzazu ematen diren eremuen irudiak honako transformazio hauen bidez:

(i) $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$, koadrantea eta $T(z) = \dfrac{(1-i)z}{z-i}$ transformazioa.

(ii) $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, zirkuluerdia eta $T(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$ aplikazioa.

(iii) $1 < |z| < 2$ eraztuna eta $T(z) = \dfrac{z}{z - 1}$ transformazioa.

11. Aurki itzazu 0, $1+i$ eta $2i$ puntuak behean ematen diren puntuetara eramaten dituzten transformazio lineal frakzionarioak. Aurki itzazu, halaber, $|z-i| < 1$ diskoaren irudiak lortutako tranformazioen bidez.

    (i) $4,\ 2+2i,\ 0$; (ii) $2,\ 2+2i,\ 4$; (iii) $0,\ \infty,\ 2i$.

12. Aurki itzazu $2+i$ puntuaren puntu simetrikoak $|z| = 1$ eta $|z-i| = 3$ zirkunferentziekiko.

13. Aurki itzazu $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1$ planoerdia $|w| > 1$ eremura eramaten duten transformazio lineal frakzionario guztiak, 2 puntuko irudia ∞ izanik.

14. Aurki ezazu T transformazio lineal frakzionarioa zeinetarako $\operatorname{Im} z > 0$ planoerdiaren irudia $|w| < 1$ zirkulua den eta $T(i) = 0$, $\operatorname{Arg} T'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$ diren.

15. Aurki ezazu $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ zirkunferentzierdia $\operatorname{Im} z > 0$ planoerdira eramaten duen transformazio konforme bat eta azaldu ezazu nola aurkitu tenperatura Ω-ko puntuetan, $[-1, 1]$ segmentuan 0° eta $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, zirkunferentzierdian 1° bada.

16. Aurki ezazu $|z| < 1$ zirkulua $|w-1| < 1$ zirkulura eramaten duen T transformazio lineal frakzionarioa, $T(0) = \dfrac{1}{2}$ eta $T(1) = 0$ izanik.

    Froga ezazu topatu duzun T transformazioaren bidezko ardatz irudikariaren irudia zirkunferentzia bat dela eta topa itzazu haren zentroa eta erradioa.

17. Aurki ezazu beheko planoerdia $4i$ puntuan zentratuta dagoen eta 2 erradioa duen zirkulura eramaten duen T transformazio lineal frakzionarioa, $1-i$ puntuko irudia zirkuluko zentroa izanik eta T-ren deribatua positiboa puntu horretan.

A. Eranskina

Zenbaki konplexuen sorrera

Noiz eta zergatik sortu ziren zenbaki konplexuak matematikan? Bistan da zenbaki negatiboen erro karratuen faltarengatik heldu zirela, baina, orduan, galdera beste era honetara egin dezakegu: noiz eta zergatik nabaritu zuten matematikariek zenbaki negatiboen erro karratuen beharra? Ekuazio aljebraikoen erroen kalkularako formulak bilatzeko ahaleginetan dago erantzuna. Ez askotan esaten edo pentsatzen den moduan bigarren mailako ekuazioetarako, hirugarren mailakoetarako baizik. XVI. mendean gertatu zen hori guztia, aljebrari italiarren eskutik.

A.1 Bigarren mailako ekuazioa

Bistan da lehen mailako ekuazioak ($ax+b=0$, $a\neq 0$) ez duela ebazteko arazorik sortzen, beti du soluzio erreal bat. Bigarren mailako ekuazioa, $ax^2+bx+c=0$, formula ezagunarekin ebazten da:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Zenbaki errealen munduan kokatzen bagara (a,b,c errealak dira eta $a\neq 0$), zer gertatzen da $b^2-4ac<0$ bada? Formulak ez du errorik ematen, egia da, baina hala behar du, ez baitago kasu horretan erro errealik. Hala dela egiaztatzeko nahikoa dugu berdintza hau idaztea:

$$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a^2}.$$

Zenbaki erreal baten karratua positiboa edo zero denez, $4ac-b^2$ positiboa bada, ez dago modurik hor zero lortzeko.

A.2 Hirugarren mailako ekuazioa

Bigarren mailako ekuazioa zelan ebatzi antzinatetik bazekiten ere, hirugarren mailako ekuaziorako formula ez zen XVI. mendera arte heldu. Aurreko mendeetan, saioak izan ziren formula bat bilatzeko, baina erantzun partzialak bakarrik lortu zituzten, ez arrakasta osoa[1].

Aljebrari italiarren artean borrokarako motibo izan zen hirugarren mailako ekuazioaren ebazpidea. Scipione del Ferrok lortu omen zuen formula lehenengoz eta, hura hil ostean, Fiorek Tartagliari erronka bota zion ea ekuazio batzuen erroa lortzeko gauza zen. Tartagliak bere kabuz lortu zuen formula eta erronka irabazi, baina formula isilpean gorde zuen. Cardanori esan zion, ez publikatzeko aginduarekin, baina hark kasu egin ez eta *Ars Magna* liburuan atera zuen (1545). Eztabaida latzak egon ziren matematikari batzuen eta haien jarraitzaileen artean. Zenbait urte geroago Rafael Bombellik *Algebra* liburua argitara eman eta hor, soluziorako formula ez eze, zenbaki konplexuen nolabaiteko agerraldia ere ikus dezakegu.

Ikus dezagun zelan lor daitekeen hirugarren mailako ekuazioaren soluzioak ematen dituen formula hori. Ebatzi beharreko ekuazioa

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

da, $a \neq 0$ izanik. Aldagaia aldatuz ($y = x + b/3a$), bigarren mailako monomioa desagertarazten da, eta, dena a-rekin zatituz, berehala ikusten da nahikoa dela

$$x^3 + px + q = 0 \tag{A.2.1}$$

erako ekuaziorako formula ematea.

Hasteko, egin dezagun (A.2.1) ekuazioan $x = z - p/3z$ aldaketa. Kuboa hartuz eta ekuazioan ordezkatuz,

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

ekuaziora helduko gara. Ekuazio hori

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

moduan idatz daiteke, eta z^3-rako bigarren mailako ekuazioa lortu. Hortik,

$$z_1^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{eta} \quad z_2^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

soluzioak lortzen dira. Baina bigarren mailako ekuaziotik

$$z_1^3 z_2^3 = -\frac{p^3}{27}$$

dugu, edo $z_2 = -p/(3z_1)$. Hortaz, $x = z_1 + z_2$ da bilatzen ari garen ekuazioaren soluzioa. Formula batean idatzita,

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{A.2.2}$$

[1]Aritu zirenetako bat Omar Khayyam izan zen, Bagdadeko matematikaria eta poeta. Zientzialarien artean matematikak egin zuen ospetsu; letren munduan, ordea, *Rubaiyat* poema bildumaren egile modura ezagutzen dute.

Badugu formula: non dago bada arazoa? Har dezagun Rafael Bombelliren 1572ko *Algebra* liburuan datorren adibide bat,

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Berehala ikusten da $x = 4$ erroa dela. Formula erabiliz,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{A.2.3}$$

Bistan da, beraz, arazo bat dugula: nahiz ekuazioak erro erreal bat (gutxienez) izan, formulak zenbaki negatibo baten erro karratua eskatzen du.

Bombelli konturatu zen

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{eta} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

betetzen direla, eta soilik $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ manipulazioa onartu behar izan zuen horretarako. Benetako zenbaki izaera eman gabe eta modu guztiz sinbolikoan erabilita, berdintza horiek onargarriak dirudite. Bestalde, $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$ dela ere onargarria denez, goiko (A.2.3) formulan ordezkatuz, $x = 4$ soluzioa eskuratzen dugu. Horrek eman zion bidea pentsatzeko halako manipulazio formalak onargarriak zirela soluzioa lortzeko.

Eta ez da kasualitatea: (A.2.1) ekuazioaren erro guztiak errealak badira, (A.2.2) formulako erro karratuaren barruan agertzen den $q^2/4 + p^3/27$ zenbakia negatiboa edo zero da (ekuazioak erro bikoitz bat duenean bakarrik da zero).

Hasieran, $\sqrt{-1}$ horri ez zioten zenbaki izaerarik onartzen ere, sinbolo hutsa zen, manipulatzeko erregela argiak zituena, baina ez zen kalkulatzeko trikimailu bat besterik, nolabait esateko. Hortik, geroak gorde dion *irudikari* izena. Bi mende geroago beste ikuspegi bat sartu zen matematikan, non zenbaki konplexuak balio osoa hartu zuten.

Hala ere, esan behar da formula ez dela oso praktikoa. Bombelliren adibidean erro kubikoa erraz lor daitekeen arren, gehienetan, ia ezinezkoa da halakorik egitea eta, kasu errazetan ere, ez genituzke soluzioak lortuko zuzenean formula aplikatuta.

A.3 Laugarren mailako ekuazioa eta beste kontu batzuk

Hirugarren mailako ekuaziorako formula eskuratuta, laugarren mailako ekuazioa izan zen hurrengo helburua. Hartarako ere XVI. mendeko aljebrari italiarren eskutik heldu zen erantzuna. Ludovico Ferrariri zor diogu ekuazioaren ebazpidea.

Laugarren mailako ekuazioari hirugarren mailako gaia kenduta, aurreko bi kasuetan ikusi dugun moduan, honela geratzen da:

$$x^4 = px^2 + qx + r.$$

Ekuazio hori honela ere idatz daiteke:

$$(x^2+y)^2 = px^2+qx+r+2yx^2+y^2 = (2y+p)x^2+qx+r+y^2, \qquad \text{(A.3.1)}$$

non, oraingoz, y edozein den. Aukera dezagun y azken atala karratu perfektua izan dadin ($(Ax+B)^2$ erakoa, alegia). Horretarako baldintza hau da:

$$q^2-4(2y+p)(r+y^2)=0.$$

Hirugarren mailako ekuazioa dugu y-rako, beraz, y lor daiteke aurreko ataleko formularen bidez. Hori eginda, (A.3.1) bi karraturen berdintza da, eta, erro karratuak hartuta, bigarren mailako ekuazio batera heltzen gara. Praktikoa ez bada ere, bistan da ekuazioaren soluziorako bide bat badugula.

Bosgarren mailako ekuazioetarako formula lortzea zen hurrengo helburua, baina mendeak pasatu ziren eta ez zuen inork halako formularik lortzen. Hala izan behar zuen, XIX. mendean Abelek frogatu baitzuen ezin zela bosgarren mailako ekuaziorako erradikalen bidezko formula bat lortu. Gero, Galoisek ekuazio aljebraikoetarako teoria bat garatu zuen non bereizi egin baitzituen erradikalen bidez ebazkarriak ziren ekuazioak. Baina hori aljebrako gai sakona da eta ezin dezakegu hemen landu.

A.4 Ariketa

1. Froga ezazu hirugarren mailako $x^3+px+q=0$ ekuazioak hiru erro erreal baditu,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\le 0$$

dela. (Har ezazu $q\neq 0$, bestela berehalakoa da.)

(a) Kalkulua erabiltzea da bide bat, $f(x)=x^3+px+q$ funtzioaren grafikoa aztertuz (funtzioaren maximoa eta minimoa kontuan hartuz).

(b) Hau da beste bide bat. Izan bitez α_1,α_2 eta α_3 ekuazioaren erroak. Orduan,

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=0,\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3&=p,\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3&=-q.\end{aligned}$$

Hiru erroetatik bi zeinu berekoak dira; demagun α_1 eta α_2 direla. Baldin $\alpha_1+\alpha_2=S$ eta $\alpha_1\alpha_2=B$ notazioa erabiltzen badugu, $\alpha_3=-S$ da eta

$$B-S^2=p \quad \text{eta} \quad BS=q.$$

Hau da, beraz, frogatu behar duguna:

$$\left(\frac{BS}{2}\right)^2+\left(\frac{B-S^2}{3}\right)^3\le 0.$$

Kontuan izan $B\ge 0$ eta $4B\le S^2$ direla (zergatik?), eta jarri $t=S^2/B$. Orduan, $t\ge 4$ bada, $t^2/4+(1-t)^3/27\le 0$ dela ikusi behar da.

B. Eranskina

Zenbait termino euskaraz, gaztelaniaz eta ingelesez

adar	rama	branch
adar nagusi	rama principal	principal branch
analisi konplexu	análisis complejo	complex analysis
argumentu	argumento	argument
argumentu nagusi	argumento principal	principal argument
batezbestekoaren propietate	propiedad del valor medio	mean value property
behe-limite	límite inferior	lower limit
berretura	potencia	power
berretura-serie	serie de potencias	power series
biraketa-angelu	ángulo de rotación	rotation angle
birparametrizazio	reparametrización	reparametrization
bola	bola	ball
Cauchy-Riemannen baldintzak	condiciones de Cauchy-Riemann	Cauchy-Riemann conditions
deribagarri	derivable	derivable
diferentziagarri	diferenciable	differentiable
disko	disco	disc, disk
distantzia	distancia	distance
eraztun	anillo	annulus
eremu	dominio	domain
erro	raíz	root
n-garren erro	raíz n-ésima	n-th root
forma binomiko	forma binómica	binomial form
forma esponentzial	forma exponencial	exponential form
forma polar	forma polar	polar form
formula integral	fórmula integral	integral formula

funtzio analitiko	función analítica	analytic function
funtzio arrazional	función racional	rational function
funtzio deribagarri	función derivable	derivable function
funtzio diferentziagarri	función diferenciable	differentiable function
funtzio esponentzial	función exponencial	exponential function
funtzio harmoniko	función armónica	harmonic function
funtzio harmoniko konjugatu	función armónica conjugada	conjugate harmonic function
funtzio hiperboliko	función hiperbólica	hyperbolic function
funtzio holomorfo	función holomorfa	holomorphic function
funtzio jarraitu	función continua	continuous function
funtzio meromorfo	función meromorfa	meromorphic function
funtzio oso	función entera	entire function
funtzio trigonometriko	función trigonométrica	trigonometric function
funtzio-segida	sucesión de funciones	function sequence
funtzio-serie	serie de funciones	function series
goi-limite	límite superior	upper limit
hedapen-faktore	factor de expansión	expansion factor
hondar	residuo	residue
inbertsio	inversión	inversion
ingurune	entorno	neighborhood
integral inpropio	integral impropia	improper integral
jatorrizko funtzio	función primitiva	primitive function
katearen erregela	regla de la cadena	chain rule
konbergentzia-erradio	radio de convergencia	radius of convergence
konbergentzia-zirkulu	círculo de convergencia	disc of convergence
konjugatu	conjugado	conjugate
kurba	curva	curve
kurba leuna	curva suave	smooth curve
kurba sinple	curva simple	simple curve
kurba zatika leuna	curva suave a trozos	piecewise smooth curve
laplacear	laplaciano	Laplacian
limite	límite	limit
logaritmo	logaritmo	logarithm
logaritmo nagusi	logaritmo principal	principal logarithm
metatze-puntu	punto de acumulación	limit point
modulu	módulo	module
muga	frontera	boundary
multzo arkuz konexu	conjunto conexo por arcos	arc-connected set
multzo konexu	conjunto conexo	connected set
multzo ireki	conjunto abierto	open set

multzo itxi	conjunto cerrado	closed set
multzo sinpleki konexu	conjunto simplemente conexo	simply connected set
multzo trinko	conjunto compacto	compact set
parte erreal	parte real	real part
parte irudikari	parte imaginaria	imaginary part
plano konplexu	plano complejo	complex plane
polo	polo	pole
poloaren ordena	orden del polo	pole order
proiekzio estereografiko	proyección estereográfica	stereographic projection
puntu erregular	punto regular	regular point
puntu simetriko	punto simétrico	symmetric point
puntu singular	punto singular	singular point
puntu singular esentzial	punto singular esencial	essential singular point
puntu singular gaindigarri	punto singular evitable	removable singular point
puntu singular isolatu	punto singular aislado	isolated singular point
segida	sucesión	sequence
segida konbergente	sucesión convergente	convergent sequence
segida puntuz puntu konbergente	sucesión convergente puntualmente	pointwise convergent sequence
segida uniformeki konbergente	sucesión uniformemente convergente	uniformly convergent sequence
serie	serie	series
serie absolutuki konbergente	serie absolutamente convergente	absolutely convergent series
serie baten batura	suma de una serie	sum of a series
serie dibergente	serie divergente	divergent series
serie konbergente	serie convergente	convergent series
transformazio bilineal	transformación bilineal	bilinear transformation
transformazio konforme	transformación conforme	conformal mapping
transformazio lineal frakzionario	transformación lineal fraccionaria	linear fractional transformation
unitate irudikari	unidad imaginaria	imaginary unit
zenbaki konplexu	número complejo	complex number

Bibliografia

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Variables*, McGraw-Hill, 1978.

[2] E. Aparicio, *Teoría de funciones de variable compleja*, UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua, Bilbo, 1998.

[3] J. W. Brown eta R. V. Churchill, *Variable compleja y aplicaciones*, 7. ed., McGraw-Hill, Madrid, 2007.

[4] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1986.

[5] R. E. Greene eta S. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable: Third Edition*, Graduate Texts in Mathematics, 40. lib., American Mathematical Society, 2006.

[6] N. Levinson eta R. M. Redheffer, *Curso de variable compleja*, Reverté, 1990.

[7] J. E. Marsden eta M. J. Hoffmann, *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Co. USA, 1987.

[8] B. P. Palka, *An introduction to Complex Function Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[9] D. Sarason, *Complex Function Theory*, American Mathematical Society, 2007.

[10] M. R. Spiegel, *Teoría y problemas de variable compleja*, Schaum bilduma, 2. ed., McGraw-Hill, 2011.

[11] E. M. Stein eta R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton University Press, 2003.

[12] I. Stewart eta D. Tall, *Complex analysis*, Cambridge University Press, 1983.

[13] D. C. Ullrich, *Complex Made Simple*, Graduate Texts in Mathematics, 97. lib., American Mathematical Society, 2008.

[14] L. I. Volkovyskii, G. L. Lunts eta I. G. Aramanovich, *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*, Mir, Moscú, 1977.

UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK
MANUALES UNIVERSITARIOS

INFORMAZIOA ETA ESKARIAK • INFORMACIÓN Y PEDIDOS

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU
argitaletxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao
Tfn.: 94 601 2227 • www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea