

Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado
Ingenieritza Elektronikoko Gradua / Grado en Ingeniería Electrónica

Modelado y control de movimiento con atenuación de vibraciones de una estructura flexible

Egilea/Autor/a:
Ander Elejaga Estiballes
Zuzendaria/Director/a:
Ibone Lizarraga, Ibon Sagastabeitia



Índice de contenidos

1	Introducción y objetivos	1
2	Descripción del entorno hardware/software	1
2.1	Mesa sísmica	2
2.1.1	Motor DC	2
2.1.2	Encoder óptico	2
2.1.3	Características técnicas del sistema	3
2.2	Estructura flexible	3
2.2.1	Acelerómetro	4
2.2.2	Características técnicas del sistema	4
2.3	Tarjeta de adquisición	4
2.4	Módulo de potencia	5
2.5	Cables y conexiones	6
2.6	Entorno software	7
3	Modelado matemático del sistema	7
3.1	Modelo matemático del motor DC con carga rígida	7
3.2	Comportamientos no caracterizados	10
3.2.1	Estudio de la fricción y caracterización empírica de la zona muerta	10
3.2.2	Saturación	12
3.2.3	Resonancia	13
3.3	Validación del modelo teórico: Carga rígida	15
3.3.1	Validación en lazo cerrado	15
3.4	Modelado matemático del sistema: Modelo masa-muelle	17
3.5	Validación del modelo teórico: Modelo masa-muelle	20
3.5.1	Validación de $G_{x_1}(s)$	20
3.5.2	Validación de $G_{x_2}(s)$	22
4	Control de posición del sistema	23
4.1	Control PV	23
4.1.1	Diseño y simulación	25
4.1.2	Implementación	27
4.2	Control PV+I	29
4.2.1	Diseño e implementación	29
5	Control de posición del sistema y reducción de las oscilaciones	32
5.1	Filtro notch	32
5.1.1	Diseño y simulación del filtro notch y controlador PV+I	33
5.1.2	Implementación del filtro notch y controlador PV+I	36
5.2	Sistema de control mediante realimentación de variables de estado (LQR)	37
5.2.1	Representación interna del sistema	37
5.2.2	Control por realimentación de variables de estado (LQR) diseño y simulación	40
5.2.3	Diseño y simulación del observador de estados	43
5.2.4	Implementación del regulador realimentado mediante variables observadas	46

6 Conclusiones	48
7 Bibliografía	50

1 Introducción y objetivos

El objetivo principal de este proyecto es el de estudiar la dinámica de un sistema físico compuesto por una estructura flexible movida linealmente por un motor, y desarrollar varios controladores capaces de mejorar las características de dicha dinámica. Para ello, se utilizarán los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera, y en especial, lo aprendido durante el curso de Control Automático I. Por otra parte, se adquirirán conocimientos básicos de representación interna de sistemas y realimentación de variables, así como de programación vía *LabView*. Para ello, será necesario llevar a cabo un trabajo de investigación y documentación con el fin de asentar los conceptos aprendidos hasta el momento, así como de adquirir nuevos conocimientos.

El núcleo del trabajo se ha dividido en tres bloques principales.

El primer bloque se ha dirigido al estudio del sistema físico en sí. En él, se desarrollan diferentes aproximaciones del sistema, y se modeliza matemáticamente cada una de ellas para más tarde, determinar cuan acertadas resultan. La primera aproximación, es la de considerar la estructura flexible descrita en el apartado 2 como una carga rígida movida por el motor. La segunda aproximación, en cambio, intenta caracterizar en cierta medida el carácter oscilatorio de la estructura flexible, utilizando para ello un modelo imaginario masa-muelle. De este modo, en este bloque se trabajan técnicas de modelado matemático, al tiempo que se aprende a lidiar con dinámicas no lineales típicas de los sistemas reales.

El segundo bloque, se centra en el diseño e implementación de controladores de posición precisos y rápidos. Para ello, se ignora el carácter oscilatorio del sistema, utilizando la aproximación de carga rígida para desarrollar dichos controladores. Inicialmente, se diseña un control PV al que más tarde, se le añade un integrador.

El tercer bloque, está dedicado al control y reducción de las oscilaciones de la estructura. Para ello, se utilizan diferentes técnicas de control como la implementación de un filtro rechaza banda y el control mediante realimentación de estados. Para efectuar este último, se desarrollarán competencias en representación interna de sistemas, así como en diseño de reguladores LQR y observadores de estado.

Por último, se analizan los resultados obtenidos y se desarrollan las conclusiones.

2 Descripción del entorno hardware/software

El entorno hardware utilizado en este proyecto se compone por una tarjeta de adquisición de datos, un módulo de potencia, un PC y el sistema mecánico a controlar. Este último, a su vez, está formado por dos partes generales. Por un lado una plataforma diseñada para simular seísmos, y por otro, una estructura flexible sujeta a dicha plataforma.

El software utilizado ha sido *LabView*, aunque se han empleado programas como *Mathematica* y *Matlab* de forma puntual para llevar a cabo ciertos cálculos.

2.1 Mesa sísmica

Se trata de un sistema comercializado por Quanser formado por un soporte y una plataforma móvil de acero inoxidable [1]. Dicha plataforma se desliza a través de dos guías por medio de cojinetes lineales de bolas, que son los encargados de reducir la fricción entre la plataforma y el soporte. Del mismo modo, el movimiento es generado por un motor DC de alta calidad capaz de generar niveles de torque suficientes como para acelerar masas de 5kg a $9,81\text{m/s}^2$. Este movimiento, es transmitido a la plataforma por medio de un sistema de transmisión piñón-cremallera el cual dispone de un rango máximo de desplazamiento de 4 cm. Adicionalmente, la plataforma también consta de un sistema de medición de posición constituido por un encoder óptico. En la figura 2.1 y la tabla 2.1 se muestran las vistas frontales y traseras del sistema, así como la nomenclatura de los componentes del mismo.



Figura 2.1: vista frontal (a) y trasera (b) de la plataforma sísmica.

Nº	Descripción	Nº	Descripción
1	Soporte	2	Plataforma
3	Motor DC	4	Piñón del motor
5	Cremallera	6	Guía lineal
7	Cojinete lineal de bolas	8	Encoder óptico de alta resolución
9	Conector para el encoder	10	Conector para el motor

Tabla 2.1: componentes de la plataforma sísmica.

2.1.1 Motor DC

El motor utilizado por Quanser para mover este sistema, es un motor de bajo desplazamiento y alto torque diseñado y comercializado por la marca Pittman. Más concretamente, se trata de un motor **Pittman Express 1404S005**. Las especificaciones técnicas del dispositivo se recogen en la tabla 2.2. Cabe mencionar que con el ánimo de proteger la integridad de los cepillos del motor, se ha limitado el ancho de banda de todas las señales entrantes a 50Hz.

2.1.2 Encoder óptico

La medición de la posición de la plataforma móvil se lleva a cabo mediante un encoder óptico digital de cuadratura. Es por esto que las medidas de posición obtenidas son siempre relativas a la posición inicial de la estructura. Dicho sensor va montado en la parte trasera del motor DC, tal y como se muestra en la figura 2.1b, componente 8. El modelo específico del encoder es **US Digital E3-2048-250-H** y sus características están recogidas en la tabla 2.2.

2.1.3 Características técnicas del sistema

En la tabla 2.2 se muestran las características y parámetros de mayor interés del sistema. Muchos de ellos serán utilizados en apartados posteriores para llevar a cabo el modelado matemático del mismo.

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
Motor DC			
τ_{max}	Torque máximo	1,4	N m
k_m	Constante de torque	0,0612	N m
k_b	Constante de fuerza contra-electromotriz	0,0612	V s/rad
I_{max}	Corriente máxima	22,9	A
R_m	Resistencia de la armadura del motor	1,5	Ω
L_m	Inductancia de la armadura del motor	1,6	mH
J_m	Momento de inercia del motor	$2,64 \cdot 10^{-5}$	Kg m ²
Plataforma móvil			
Δx	Rango de desplazamiento	0,04	m
m_1	Masa de la plataforma móvil	1,5	kg
	Huecos de la cremallera	0,033	m/diente
r_p	Radio interno del piñón	$6,35 \cdot 10^{-3}$	m
	Número de dientes del piñón	12	
Encoder óptico			
R	Resolución	8192	Cuentas/rev
S_e	Sensibilidad	4,87	μm
	Tipo	TTL	

Tabla 2.2: Parámetro generales de la plataforma sísmica.

2.2 Estructura flexible

Se trata de una estructura flexible, comercializada por Quanser [2], anclada verticalmente a la mesa descrita en el apartado anterior por medio de tornillos. En este caso particular, no dispone de ningún tipo de elemento móvil controlable por lo que se trata de un elemento pasivo. Consta de un acelerómetro que proporciona medidas de la aceleración de la superficie superior de la estructura.



Figura 2.2: Estructura flexible.

Nº	Descripción
18	Láminas flexibles de acero
19	Superficie inferior
20	Superficie superior
21	Acelerómetro
22	Conexión al acelerómetro

Tabla 2.3: Componentes de la estructura flexible

2.2.1 Acelerómetro

La superficie superior de la estructura está equipada con un acelerómetro capacitivo DC mono chip con condicionamiento de señal y un rango dinámico que va desde -5g hasta 5g. Está calibrado por el fabricante para que genere 1 Volt por cada g de aceleración medida.

El acelerómetro tiene la capacidad de medir aceleraciones tanto estáticas como dinámicas, y está montado de manera que su eje sensible sea longitudinal a la estructura.

2.2.2 Características técnicas de la estructura

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
Estructura flexible			
l	Anchura de la estructura flexible	0,32	m
h	Altura de la estructura flexible	0,5	m
d	Profundidad de la estructura flexible	0,11	m
m_2	Masa de la estructura flexible	1,6	kg
Plataforma móvil			
S_a	Sensibilidad del acelerómetro	9,81	m/s ² V

Tabla 2.4: Parámetros generales de la estructura flexible.

2.3 Tarjeta de adquisición

La tarjeta de adquisición utilizada en este proyecto, ha sido la **Q2-USB** [3] de Quanser. Este elemento se encarga de crear una conexión entre el sistema físico a controlar y el PC con el que se desarrollan los controladores vía software. Para ello, consta de un conversor analógico digital capaz de digitalizar las señales analógicas que recibe de sensores analógicos externos, y así poder enviárselas al PC. Del mismo modo, también consta de un conversor digital analógico, para que las señales de control digitales generadas por el software, puedan ser convertidas a analógico y enviadas al motor. En la figura 2.3 se muestra una imagen de la tarjeta con cada una de sus salidas y entradas.



Figura 2.3: tarjeta de adquisición Q2-USB.

Nº	Descripción	Nº	Descripción
1	Puerto mini USB	2	Puertos de entrada de encoders
3	Puertos de salida analógica	4	Puertos de entrada analógica
5	LED de estado	6	Puerto de salida/entrada digital
7	Terminal de tierra		

Tabla 2.5: Entradas y salidas de la tarjeta de adquisición Q2-USB.

En la tabla 2.6, se recogen las características técnicas de mayor interés de las entradas y salidas analógicas de la tarjeta.

Carac. de las entradas analógicas	Valor	Carac. de las salidas analógicas	Valor
Resolución	12 bits	Resolución	12 bits
Voltaje máximo de salida	$\pm 10V$	Voltaje máximo de salida	$\pm 10V$
Impedancia de entrada	10M Ω	Intensidad máxima	20mA
Tiempo de conversión	250ns	Ritmo de subida	3,5V/ μs
		No linealidad	± 1 LSB
		Tiempo de conversión	10 μs
		Carga máxima	2k Ω
		Impedancia de la salida DC	0,5 Ω

Tabla 2.6: Características de las salidas y entradas analógicas de la tarjeta de adquisición Q2-USB

Cabe mencionar que la velocidad de conversión eficaz viene limitada por la velocidad de comunicación de la conexión USB (125 μs).

2.4 Módulo de potencia

El módulo de potencia utilizado en este proyecto, es el **UPM2405** (universal power module) [4] comercializado por Quanser. En la figura 2.4 se muestra una imagen detallada de las conexiones de las que dispone.



Figura 2.4: Panel de conexiones frontal del UPM2405.

La función principal para la que se ha empleado este dispositivo, es la de proporcionar la potencia suficiente a la señal de control para que sea capaz de mover el motor del sistema. Cabe recordar que dicha señal, se genera mediante software en el PC, para después pasar por el convertor digital-analógico de la tarjeta de adquisición y enviarse al motor. Teniendo en cuenta que la intensidad máxima de la salida analógica de la tarjeta de adquisición es de 20mA (ver tabla 2.6), esta señal de control no sería capaz de proporcionar la potencia suficiente al motor como para moverse. Es por esto, que es necesario hacerla pasar primero por el módulo de potencia expuesto en este apartado.

Para ello, se conecta la salida analógica de la tarjeta de adquisición con la entrada “from D/A” del módulo de potencia. Al mismo tiempo, se saca la señal de control amplificada por la salida “to Load” y se lleva hasta el motor.

Cabe mencionar que entre las conexiones “from D/A” y “to load”, este dispositivo consta de un amplificador operacional en configuración de amplificador no inversor cuya ganancia de

voltaje es $1 + \frac{R_1}{R_f}$. El valor de dichas resistencias viene determinado por el cabezal del cable DIN conectado a la salida “to load”. De este modo, es posible cambiar la ganancia del amplificador en función del cable utilizado. En este caso, se ha utilizado un cable que ofreciese ganancia unitaria ($R_f \gg R_1$).

También es importante resaltar que la intensidad máxima que puede ofrecer este amplificador es de 5A, y que además, se satura a partir de los ± 12 V.

2.5 Cables y conexiones

En este apartado se describen las conexiones realizadas para el montaje del sistema completo, así como los cables utilizados.

Para empezar, la conexión entre el PC y la tarjeta de adquisición de datos se ha llevado a cabo mediante un cable con cabezales USB y mini USB 2.0. A través de esta conexión full-duplex, el PC envía a la TAD la señal de control digital generada mediante software. Del mismo modo, recibe información digitalizada del sistema como las señales de los sensores. La tarjeta de adquisición por su parte, se ha conectado a la unidad de potencia mediante un cable con cabezales RCA y DIN de 6 pines. Mediante este enlace, la tarjeta de adquisición envía la señal de control analógica a la unidad de potencia, para que esta la amplifique. Dicha señal amplificada, es enviada más tarde al motor mediante un cable DIN con cabezales de 6 y 4 pines. Los sensores de la estructura, por su parte, están conectados a la tarjeta de adquisición de datos. El encoder del motor, se ha conectado de forma directa mediante un cable DIN de 5 pines. El acelerómetro en cambio, debido a la falta de los cables necesarios, ha sido conectado primero con la entrada “S3” de la unidad de potencia mediante un cable mini DIN de 6 pines, para más tarde, sacar la señal por la salida “to A/D” y llevarla a la entrada analógica de la TAD mediante un cable con cabezales RCA y DIN de 5 pines.

En la siguiente imagen se muestra un esquema detallado de las conexiones del sistema, así como de los cabezales de los cables utilizados.

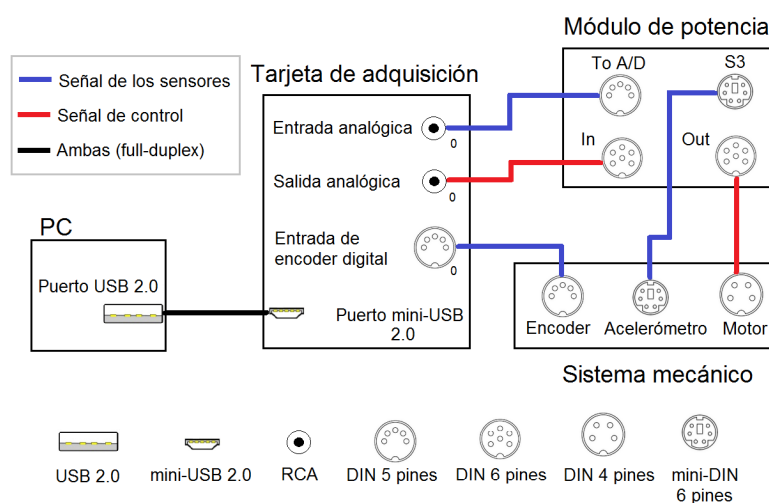


Figura 2.5: Esquema de conexionado del sistema.

2.5 Entorno software

Como se ha comentado con anterioridad, la herramienta software principal utilizada en este proyecto ha sido *LabView* [5]. Mediante dicho software, se han diseñado e implementado diferentes controladores, así como simulado un gran número de sistemas hipotéticos. Además, se ha utilizado para adquirir y procesar las señales de entrada de la tarjeta de adquisición.

Para facilitar la comunicación entre software y hardware, y el proceso de diseño de los controladores, se ha utilizado el módulo RCP (Rapid Control Prototyping), proporcionado por Quanser. Dicho módulo, consta de varias funciones compatibles con *Labview* que facilitan el proceso de lectura de las señales de entrada, y escritura en las conexiones de salida, y permite trabajar a un nivel de programación funcional.

Cabe mencionar, que el uso de este módulo, conlleva la utilización del módulo de *LabView*, "Control Design and Simulation", el cual a su vez, consta de un gran número de funciones y utilidades que facilitan el diseño e implementación de controladores digitales.

Una de las más reseñables, es el "Control and simulation loop". Este ciclo especial, junto con otras funciones que ofrece el módulo, da la posibilidad de diseñar e implementar el controlador como si de un sistema continuo se tratara. A la hora de ejecutar el programa, el "Control and Simulation loop" automáticamente calcula una aproximación discreta del controlador continuo diseñado. Es por esto, que a lo largo de todo este proyecto, los cálculos que se realizan estarán dirigidos al diseño de controladores continuos, ya que son más fáciles de implementar y de diseñar que los discretos.

3 Modelado matemático del sistema

3.1 Modelo matemático de motor DC con carga rígida

Como primera aproximación para elaborar el control de posición del sistema, se considerará la estructura flexible como una carga rígida conectada al motor mediante un sistema de piñón-cremallera. Más tarde, se contemplarán las oscilaciones creadas por el sistema como perturbaciones que sufre el mismo y se intentarán contrarrestar mediante diferentes técnicas de control como la implementación de un filtro notch.

De este modo, se procede a desarrollar un modelo matemático que represente la dinámica del motor DC considerando que está conectado a una carga rígida. Para ello, se comienza por definir la ecuación eléctrica del motor.

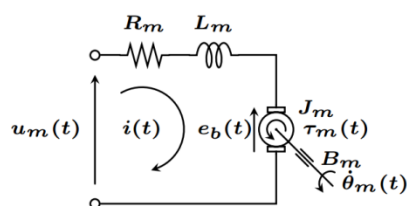


Figura3.1: Esquema eléctrico del motor DC

Aplicando la ley de Kirchhoff, al esquema del motor DC que se muestra en la figura 3.1, se obtiene lo siguiente:

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} + e_b(t) \quad (3.1)$$

Siendo $u_m(t)$ la tensión de entrada al motor, $i(t)$ la intensidad que circula por el mismo, $e_b(t)$ la fuerza contra-electromotriz y R_m y L_m la Resistencia terminal e inductancia del motor respectivamente.

En este caso, es posible simplificar la ecuación utilizando el método de eliminación de constante eléctrica del motor [6], ya que L_m es considerablemente más pequeña que R_m . De este modo, la ecuación eléctrica queda definida como:

$$u_m(t) = R_m i(t) + e_b(t) \quad (3.2)$$

Por otro lado, se puede definir la ecuación mecánica del sistema como:

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + \tau_f(t) + \tau_c(t) \quad (3.3)$$

Siendo $\tau_m(t)$ el par entregado por el motor, J_m el momento de inercia del motor, $\ddot{\theta}_m(t)$ la aceleración angular del eje, $\tau_c(t)$ el par necesario para mover la carga y $\tau_f(t)$ el par de fricción. Este último, deriva de las diferentes fricciones que actúan sobre el sistema físico, pero para el modelado simplificado del motor, solo se tendrá en cuenta la fricción viscosa. El par generado por dicha fricción se describe de la siguiente manera:

$$\tau_{fv}(t) = B'_m \dot{\theta}_m(t) \quad (3.4)$$

Siendo B'_m el coeficiente de fricción viscosa correspondiente al motor expresado en $\frac{kg \cdot m^2}{s}$.

Cabe mencionar que en el apartado 3.2.1 se analizan más a fondo las fricciones que actúan sobre el sistema, estudiando así los efectos no lineales que generan sobre la dinámica.

Por otro lado, para calcular el par necesario para mover la carga, $\tau_c(t)$, se aplica la segunda ley de Newton sobre la carga, como puede observarse en la figura 3.2 :

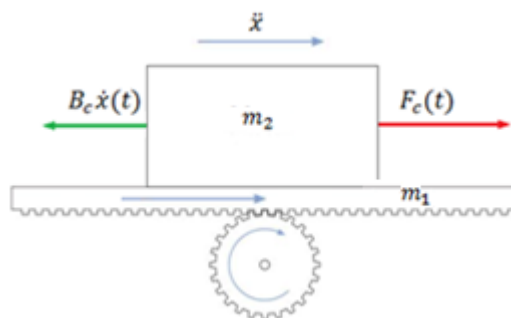


Figura 3.2: Diagrama de fuerzas que actúan solo sobre la carga

De este modo, las fuerzas actuantes cumplen la siguiente ecuación:

$$F_c(t) = (m_2 + m_1)\ddot{x}(t) + B_c\dot{x}(t) \quad (3.5)$$

Siendo F_c la fuerza ejercida por el motor sobre la carga, m_2 la masa de la estructura flexible, m_1 la masa de la plataforma, B_c el coeficiente de fricción viscosa correspondiente a la carga expresado en $\frac{kg}{s}$, y \ddot{x} y \dot{x} la aceleración y velocidad lineal de la carga respectivamente.

A partir de este punto, se definirá la masa general de la carga como $M_c = m_2 + m_1$.

Traduciendo la fuerza ejercida sobre la carga (3.5) a par motor, y expresando la ecuación en magnitudes angulares, se obtiene lo siguiente:

$$\tau_c(t) = r_p^2 M_c \ddot{\theta}_m(t) + r_p^2 B_c \dot{\theta}_m(t) \quad (3.6)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (3.6) y (3.4) en (3.3), queda determinada la ecuación mecánica del sistema como:

$$\tau_m(t) = (J_m + r_p^2 M_c) \ddot{\theta}_m(t) + (B'_m + r_p^2 B_c) \dot{\theta}_m(t) \quad (3.7)$$

Con el objetivo de compactar la expresión, se definen dos nuevos constantes, el momento de inercia equivalente J_{eq} y el coeficiente de fricción viscosa equivalente B_{eq} .

$$J_{eq} = J_m + r_p^2 M_c \quad B_{eq} = \frac{B'_m}{r_p^2} + B_c \quad (3.8)$$

Así pues, incluyendo dichos coeficientes en la ecuación (3.7) y recuperando la ecuación eléctrica (3.2) calculada en el apartado anterior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u_m(t) = R_m i(t) + e_b(t) \quad (3.9)$$

$$\tau_m(t) = J_{eq} \ddot{\theta}_m(t) + r_p^2 B_{eq} \dot{\theta}_m(t) \quad (3.10)$$

A partir de este punto, se considerará que el motor DC satisface las siguientes relaciones de acople electromagnético:

$$e_b(t) = k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (3.11)$$

$$\tau_m(t) = k_m i(t) \quad (3.12)$$

Donde k_b es la constante de fuerza contra-electromotriz y k_m la constante de par del motor. Ambos constantes son iguales cuando se expresan en unidades del mismo sistema de unidades, y representan la eficiencia del motor en convertir energía eléctrica en energía mecánica.

Así pues, sustituyendo las ecuaciones (3.11) y (3.12) en (3.9) y (3.10) respectivamente, se obtiene:

$$u_m(t) = R_m i(t) + k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (3.13)$$

$$k_m i(t) = J_{eq} \ddot{\theta}_m(t) + r_p^2 B_{eq} \dot{\theta}_m(t) \quad (3.14)$$

Por último, después de aplicar la transformada de Laplace bajo condiciones iniciales nulas sobre (3.13) y (3.14), se procede a resolver el sistema de ecuaciones resultante en busca de las funciones de transferencia más significativas. De este modo, la función de transferencia que relaciona la posición angular del rotor y la tensión en los bornes del motor es:

$$G_{\theta_m}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{U_m(s)} = \frac{k_m}{s(R_m J_{eq} s + R_m r_p^2 B_{eq} + K_b K_m)} \quad (3.15)$$

Dicha ecuación en desplazamiento lineal se traduce como:

$$G_x(s) = \frac{X(s)}{U_m(s)} = \frac{r_p k_m}{s(R_m J_{eq} s + R_m r_p^2 B_{eq} + K_b K_m)} \quad (3.16)$$

Recordando que bajo condiciones iniciales nulas se cumple que $G_{\dot{x}}(s) = sG_x(s)$, se obtiene la función de transferencia que relaciona la velocidad lineal con el voltaje del motor.

$$G_{\dot{x}}(s) = \frac{\dot{X}(s)}{U_m(s)} = \frac{r_p k_m}{R_m J_{eq} s + R_m r_p^2 B_{eq} + K_b K_m} \quad (3.17)$$

Manipulando un poco dicha expresión y sustituyendo los parámetros por los valores que proporciona el fabricante (apartados 2.1-2.2), se obtiene que:

$$G_{\dot{x}}(s) = \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{0,089}{0,052s + 1} \quad (3.18)$$

3.2 Comportamientos no caracterizados

En este apartado se estudian varios efectos, tanto lineales como no lineales, que no han sido caracterizados en el modelo matemático de carga rígida.

3.2.1 Estudio de la fricción y caracterización empírica de la zona muerta del motor

Para representar las diferentes fricciones que actúan en un sistema físico, a menudo se utilizan modelos de fricción simplificados. En el modelo clásico de fricción CVS (Coulomb plus viscous plus static friction) se contemplan tres fuentes diferentes de fricción, de las cuales derivan tres

componentes de par de fricción: El par de fricción viscosa, estática y de Coulomb, τ_{fV}, τ_{fS} y τ_{fC} respectivamente.

$$\tau_f(t) = \tau_{fV}(t) + \tau_{fC}(t) + \tau_{fS}(t) \quad (3.19)$$

Dichos términos se describen de la siguiente manera [7]:

$$\tau_{fV}(t) = B'_m \dot{\theta}_m(t) \quad (3.20)$$

$$\tau_{fC}(t) = \tau_C \text{sgn}(\dot{\theta}_m(t)) \quad (3.21)$$

$$\tau_{fS}(t) = \begin{cases} k_m i(t) - \tau_m(t), & k_m |i(t)| \leq \tau_S, \quad \dot{\theta}_m(t) = \ddot{\theta}_m(t) = 0 \\ \tau_S \text{sgn}(i(t)) - \tau_m(t) - J_m \ddot{\theta}_m(t), & k_m |i(t)| > \tau_S, \quad \dot{\theta}_m(t) = 0, \ddot{\theta}_m(t) \neq 0 \\ 0, & \dot{\theta}_m(t) \neq 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Siendo τ_S el coeficiente de fricción estática y τ_C el coeficiente de fricción de Coulomb.

En el modelado matemático del motor DC, solo se tiene en cuenta el término de par de fricción viscosa, ya que los otros dos, al ser funciones no lineales, presentan dificultades para trabajar con ellos de forma analítica. Aún así, conviene analizarlos con el fin de comprender los posibles comportamientos no caracterizados que pueda tener el motor.

En lo que sigue, se analizarán las fuerzas de fricción, ya que mantienen una relación directa con los pares de fricción (en este caso, $\tau = r_p F$, siendo r_p el radio del piñón).

Por un lado, la fricción de Coulomb (F_C) es una fuerza de magnitud constante que se opone al movimiento de giro del eje. Está generada por las interacciones entre las superficies móviles en contacto. Dicha fuerza se ve representada en la figura 3.3 en función de la velocidad, y toma el valor de F_C , siendo éste el coeficiente de fricción de Coulomb, expresado en Newtons.

Por otro lado, la fricción viscosa (F_V) es una fuerza que se opone al movimiento, que a diferencia de la fricción de Coulomb, es linealmente proporcional a la velocidad. Se produce cuando un cuerpo se desplaza a través de un fluido (en este caso en aire) a causa de la resistencia que los átomos de ese fluido oponen al movimiento del cuerpo. Añadiendo dicha fuerza al diagrama de la figura 3.3, se obtiene la figura 3.4.

La fricción estática actúa cuando el eje del motor está inmóvil o cuando hay un cambio en el sentido de giro del eje del motor, como se puede apreciar en la ecuación (3.22). De esta manera, sumando dicha fuerza al modelo de fricción expuesto en la figura 3.4, tenemos que:

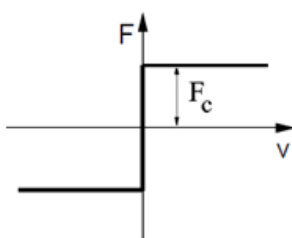


figura 3.3: Fricción de Coulomb en función de la velocidad.

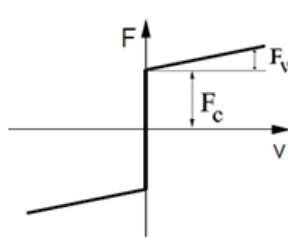


figura 3.4: Fricción viscosa y de Coulomb en función de la velocidad.

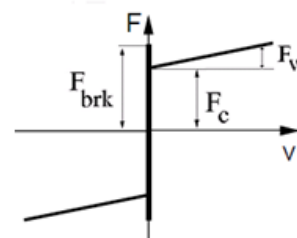


figura 3.5: Fricción viscosa, estática y de Coulomb en función de la velocidad.

Observando este último gráfico, se puede apreciar a simple vista como la fuerza de fricción tiene un pico cuando la velocidad es nula, debido a la fricción estática. Trasladando esta idea al sistema mecánico que nos atañe, se puede concluir que para que el eje del motor empiece a moverse, la fuerza generada por el motor tendrá que ser superior al valor F_{brk} expuesto en la figura 3.5 y por lo tanto, para que el eje comience a moverse, tendrá que existir una tensión mínima entre los bornes del motor, denominada tensión de arranque (break-awayvoltage). A la franja de voltajes en la que el motor no es capaz de mover la carga se la denomina zona muerta.

Al haber despreciado tanto la fricción estática como la de Coulomb a la hora de modelar el sistema, el modelo matemático conseguido en el apartado 3.1 no predice dicho comportamiento. Según éste, el motor empieza a moverse desde que la diferencia de potencial entre los bornes del motor es mayor a 0. Es por eso, que conviene caracterizar la zona muerta del motor empíricamente para determinar si tendrá un papel decisivo en la dinámica del sistema, o es posible despreciarla.

Para ello, se ha aplicado una señal de tipo rampa al motor, con una pendiente de 0,2 V/s. Este proceso se ha repetido varias veces con señales de pendiente tanto positiva como negativa (para mover la estructura tanto hacia delante como hacia detrás).

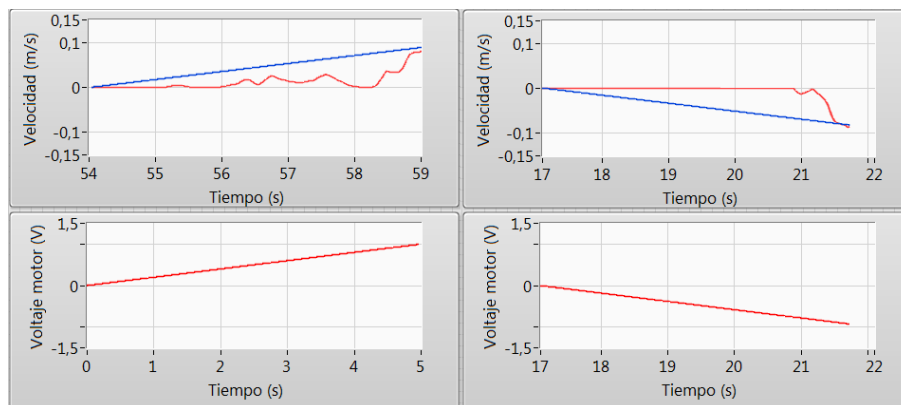


Figura 3.6: Respuesta del sistema frente a entrada rampa de 0,2V/s de pendiente (gráficos de la izq.) y -0,2V/s de pendiente (gráfico de la dcha).

Como se puede apreciar en la figura 3.6, la zona muerta del motor cuando la estructura se mueve hacia la izquierda (voltajes negativos) es de aproximadamente -0,8V. En cambio, cuando la estructura se mueve hacia la derecha (voltajes positivos) la zona muerta es de 0,9V. Esta diferencia se debe entre otras cosas a asimetrías tanto en el comportamiento del motor como en la geometría de la cremallera en la que engrana el piñón. Cabe mencionar que esta medida se llevó a cabo sin conectar los cables del acelerómetro, con lo que el efecto del peso de los mismos queda descartado.

3.2.2 Saturación

En cuanto a la saturación, hay varios elementos en el sistema que pueden limitar la magnitud de las señales de voltaje de entrada que aseguren un funcionamiento lineal. Es importante trabajar siempre por debajo de dichos valores, ya que este comportamiento de saturación no ha sido caracterizado en el modelo matemático que se va a utilizar.

Por un lado, el motor de la mesa sísmica tiene una tensión nominal de 24V. Por otra parte, el módulo de potencia (con ganancia unitaria) está provisto de una tensión de alimentación de $\pm 12V$ y en consecuencia, no puede entregar señales de salida fuera de ese rango. De todas formas la tarjeta de adquisición tiene una salida analógica máxima de $\pm 10V$, que es la señal que tiene como entrada la etapa de potencia. Es por esto que el elemento limitante es la propia tarjeta de adquisición. Cabe mencionar que Quanser proporciona un bloque de *LabView* llamado *IP02_Modeling_IO* que es en el que se han basado los diferentes bloques creados tanto para recibir las señales de entrada de la tarjeta como para llevar señales creadas por software a la salida de la misma. Dicho bloque, tiene una saturación interna que limita las señales de salida superiores a $\pm 10V$, para asegurar un correcto funcionamiento del sistema.

Para caracterizar en cierto modo este comportamiento, se ha añadido una saturación de $\pm 10V$ delante del bloque de *labview* que describe el funcionamiento lineal del sistema.

3.2.3 Resonancia

A pesar de que en una primera instancia se haya considerado la estructura AMD como una carga rígida, es imposible despreciar las oscilaciones generadas debido a la geometría y composición de dicha estructura. Estas oscilaciones tienen un efecto en la dinámica del sistema que no ha sido caracterizado en el primer modelo matemático propuesto.

Aunque no se han tenido en cuenta dichas oscilaciones por el momento, conviene caracterizar ciertos parámetros de la resonancia, ya que serán necesarios en pasos posteriores como la implementación del filtro notch. Estos parámetros son la frecuencia natural (f_n) y el amortiguamiento (γ).

Para ello, se ha llevado a cabo un procedimiento experimental en el que manteniendo fija la posición de la plataforma inferior de la estructura, se ha aplicado manualmente un empuje en la parte superior de la misma. Después, mediante el acelerómetro del que dispone la estructura flexible, se ha medido la aceleración de la plataforma superior para más tarde, procesar los datos y calcular tanto la FFT como la envolvente. La medición y el procesado de datos se han llevado a cabo mediante *LabView*.

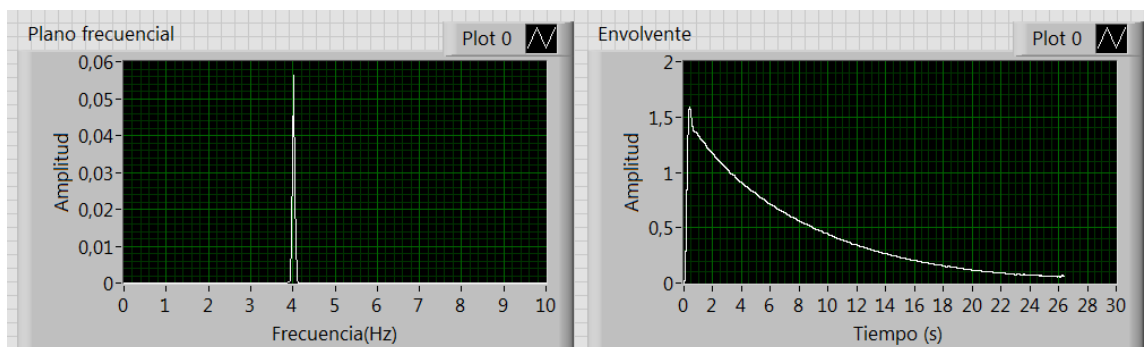


Figura 3.7 : En el gráfico izquierdo se muestran las componentes frecuenciales de la señal de aceleración medida y en el derecho la envolvente a la que sigue dicha señal.

Del gráfico de la FFT se obtiene que $f_n = 4 \text{ Hz}$, o lo que es lo mismo, $\omega_n = 25,133 \text{ rad/s}$. Para calcular el amortiguamiento, se utilizará una aproximación en la que la estructura flexible

se considera un sistema masa-muelle. En este caso particular en el que la plataforma inferior de la estructura está fija, el sistema físico a estudiar queda descrito de la siguiente manera:

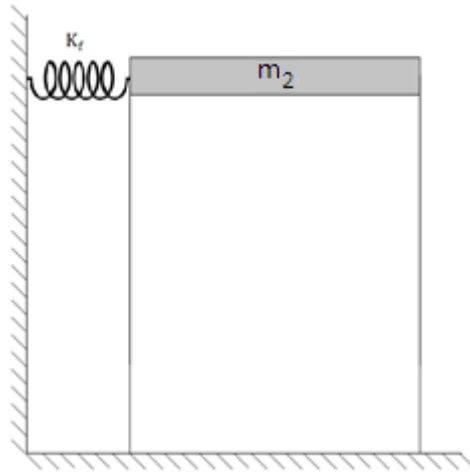


Figura 3.8 : Caso particular del modelo masa muelle: plataforma inferior fija.

De este modo se considerará que el carácter oscilatorio del sistema es causado únicamente por el muelle imaginario de constante elástica K_f mostrado en la figura 3.8. Así pues, se tiene que el sistema es un oscilador armónico amortiguado que se rige por la siguiente ecuación de evolución temporal:

$$\ddot{x}(t) = C_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_n t + \varphi_0) \quad (3.23)$$

donde:

$$\gamma = \frac{B_c}{2m_2} \quad \omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_f}{m_2}} \quad (3.24)$$

Siendo C_0 y φ_0 constantes determinadas por las condiciones iniciales, B_c el coeficiente de fricción viscosa causado por el rozamiento con el aire (Kg/s), K_f el coeficiente elástico del muelle imaginario, m_2 la masa de la estructura, ω_n y ω_0 la frecuencia natural y armónica respectivamente, expresadas en rad/s y $\ddot{x}(t)$ la aceleración de la plataforma superior.

Así pues, la dinámica de la aceleración medida empíricamente queda aproximadamente modelada con la ecuación (3.23), y en conclusión, la envolvente tiene que tener la forma de $f(t) = C_0 e^{-\gamma t}$. Teniendo esto en cuenta y utilizando los datos de la envolvente medida, se ha llevado a cabo un ajuste [8] mediante el programa *Mathematica* [9] para aproximar el valor de la constante γ . Cabe mencionar que el método utilizado para conseguir los valores de la envolvente (transformada de Hilbert [10]) no es fiable en los extremos de la medición, como se puede observar en la figura 3.7. Por eso, antes de introducir los datos en el programa *Mathematica* se han procesado manualmente eliminando los valores correspondientes a los primeros y últimos segundos de medición. Aun así, se han utilizado alrededor de 30000 muestras para llevar a cabo el ajuste.

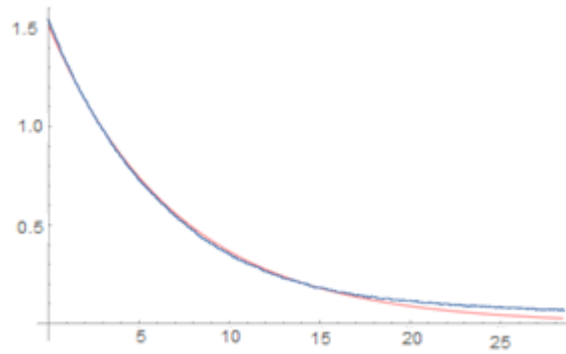


Figura 3.9: Ajuste de la envolvente. Datos empíricos en azul y función calculada con el “Mathematica” en rojo.

Como se puede observar en el gráfico superior, el comportamiento de la estructura flexible es relativamente parecido al de un oscilador armónico amortiguado cuando la amplitud de las oscilaciones es grande. No obstante, a medida que las oscilaciones se van amortiguando, la estructura real pierde menos energía de la que perdería un oscilador armónico amortiguado, y en consecuencia las oscilaciones se mantienen durante más tiempo. Aún así, se dará la aproximación como válida por el momento.

El ajuste calculado por el programa *Mathematica* es $f(t) = 1,516e^{-0,14184t}$ con lo que $\gamma \approx 0,142rad/s$. Sustituyendo dicho valor en las ecuaciones expuestas en (3.24) se obtiene que $B_c = 0,454kg/s$ y $\omega_0 \approx \omega_n = 25,133rad/s$. Del mismo modo, sustituyendo este último valor en la última ecuación de (3.24), se calcula que $K_f = 1010,7N/m$, consiguiendo así todos los parámetros necesarios para describir la resonancia.

3.3 Validación del modelo teórico: Carga rígida

Una vez se ha modelado matemáticamente la dinámica aproximada del sistema, y se han estudiado los posibles comportamientos no caracterizados, se ha procedido a validar el modelo conseguido. Para ello, se ha comparado el comportamiento real del sistema, con el predicho por el modelo teórico.

3.3.1 Validación en lazo cerrado

Antes de nada, cabe mencionar que inicialmente la validación se llevó a cabo en lazo abierto, estudiando la respuesta en velocidad del sistema y comparándola con la predicha por la ecuación (3.18). El problema con la validación en lazo abierto, es que en ella, se considera que la ganancia del sistema está perfectamente definida por K cuando en realidad, debido a las fricciones estáticas y de Coulomb no consideradas, la ganancia real del sistema es menor de la que predice el modelo. En este caso particular, como los voltajes de entrada al motor fueron de 0,9V (no pueden ser mayores ya que el piñón se sale de la cremallera), se estaba evaluando la respuesta del sistema en una zona lo suficientemente cerca de la zona muerta como para que las fricciones anteriormente mencionadas influyan demasiado en la dinámica y hagan que la validación no sea correcta. Los valores ajustados de K y τ obtenidos mediante la validación en lazo abierto fueron $\tau = 0,055$ $K = 0,055$.

Para evitar el problema anteriormente mencionado, se analizará la posición del sistema en lazo cerrado. El sistema a estudiar es el siguiente (se ha incluido empíricamente un control proporcional para acelerar la dinámica del sistema, siempre teniendo en cuenta que según el criterio de Routh-Hurwitz, se tiene que cumplir que $K_p > 0$ para que el sistema sea estable):

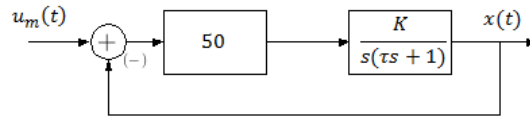


Figura 3.10: Esquema de bloques del sistema a validar

Del mismo modo, la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_{x_{LC}}(s) = \frac{50}{\frac{\tau}{K}s^2 + \frac{1}{K}s + 50} \quad (3.25)$$

Como se puede observar, en este caso la ganancia del sistema es completamente independiente del factor K . De este modo, toda diferencia de ganancia entre el modelo matemático y el real se podrá atribuir a comportamientos no caracterizados como la zona muerta del motor. Esto nos da la opción de primero corregir empíricamente la ganancia, y más tarde ajustar independientemente el valor de K . Además, al ser un sistema retroalimentado, la señal que llega al motor es una señal de error de entorno a los 3V (figura 3.11), alejándose así de la zona muerta y minimizando su efecto en la dinámica.

Mediante *LabView*, se ha comparado el comportamiento del sistema en lazo cerrado con el predicho por la ecuación (3.25). Frente a una referencia cuadrada de 0,2Hz y 15mm de amplitud, se ha conseguido la siguiente respuesta:

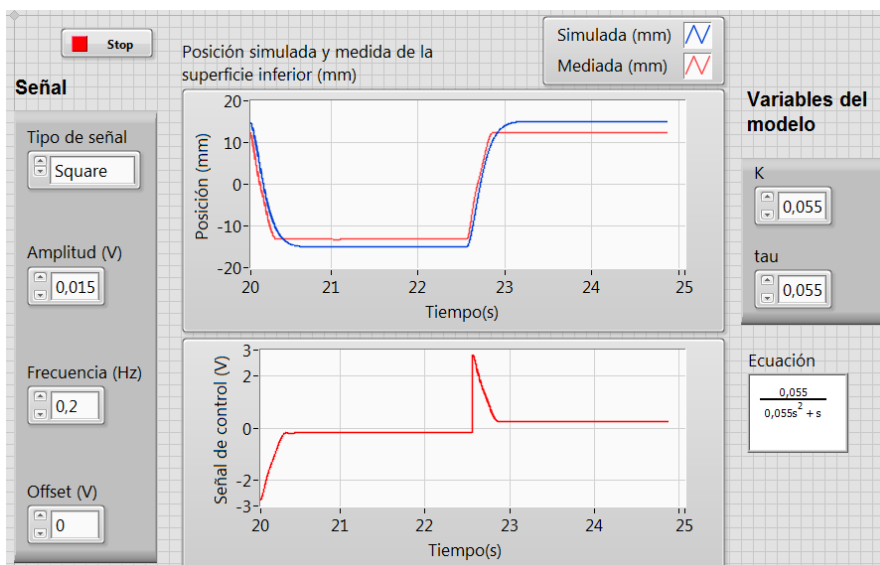


Figura 3.11: Panel frontal del programa utilizado para la validación en lazo cerrado del modelo matemático de carga rígida. El gráfico superior muestra la posición real y teórica de la estructura y el inferior la señal de voltaje de entrada al motor.

Como la ganancia del sistema es completamente independiente de los parámetros de la función de transferencia, es posible utilizar el bloque de *LabView* "zona muerta" para caracterizar empíricamente dicho comportamiento y corregir así la diferencia entre ganancias. Cabe mencionar que dicha zona muerta varía en función de la posición inicial de la estructura, pero oscila siempre en el rango de 0,6V-0,9V.

Una vez corregida dicha zona muerta, se ha procedido a ajustar los parámetros τ y K para hacer coincidir las dos curvas obteniendo que $\tau = 0,056$ y $K = 0,075$.

En el gráfico de la izquierda de la siguiente imagen, se muestra la comparación entre la dinámica simulada y real del sistema después de corregir la zona muerta, pero antes de ajustar los parámetros de la función de transferencia. En el gráfico de la derecha en cambio, se muestra la comparación entre dinámica simulada y real, después de haber ajustado tanto la zona muerta como los parámetros de la función de transferencia.

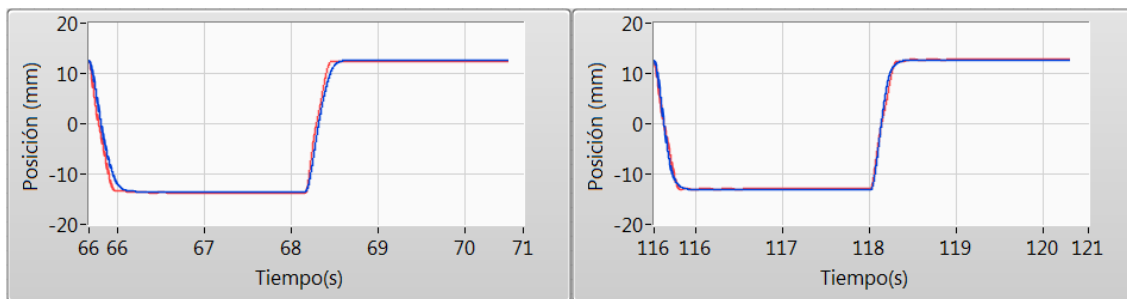


Figura 3.12: Comparativa entre posición teórica y real después de caracterizar la zona muerta empíricamente

Figura 3.13: Comparativa entre posición teórica y real después de caracterizar la zona muerta empíricamente y ajustar los parámetros τ y K .

Como se puede observar, el valor de K real es más cercano al calculado teóricamente en un principio. De este modo, se demuestra que para este caso en particular, la validación en lazo cerrado es más apropiada, obteniendo que la función de transferencia aproximada del sistema lineal es:

$$G_x(s) = \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{0,075}{0,056s + 1} \quad (3.26)$$

3.4 Modelado matemático del sistema: Modelo masa-muelle

Para la segunda fase del trabajo, en la que se intentará controlar y reducir las oscilaciones de la plataforma superior de la estructura, es necesario conseguir una nueva función de transferencia en la que quede caracterizada la resonancia del sistema. Para ello, y debido a la complejidad de la dinámica real de la estructura, se ha optado por utilizar la aproximación masa-muelle ya utilizada en el apartado 3.2.3.

En esta aproximación, se divide la masa total de la estructura en dos. Por un lado la masa de la plataforma (m_1) y por otro, la masa de la estructura en sí (m_2).

Para representar el carácter oscilatorio del sistema, dichas masas se conectan mediante un muelle imaginario de constante elástica K_f , siendo éste la única fuente de resonancia. Así pues, el sistema a estudiar queda representado mediante la figura 3.14 expuesta a continuación.

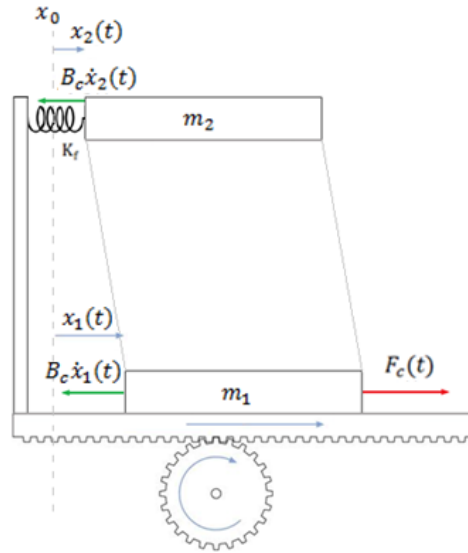


Figura 3.14: Diagrama de fuerzas que actúan sobre el modelo aproximado masa-muelle.

Para conseguir las ecuaciones de evolución temporal tanto de la superficie superior como de la base de la estructura, se ha optado por resolver el sistema mediante mecánica analítica [11].

Así pues, el primer paso ha sido el de plantear el Lagrangiano, que no es más que la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema:

$$\mathcal{L} = T - V$$

La energía cinética total es igual a la suma de los aportes tanto de las dos masas como del motor. La energía potencial, por su parte, es la almacenada en el muelle imaginario. Cabe mencionar que la deformación del muelle imaginario es $x_1(t) - x_2(t)$ y la energía cinética del motor se define como:

$$T_m(t) = \frac{1}{2}J_m\omega^2(t) = \frac{1}{2}\frac{J_m}{r_p^2}\dot{x}_1^2(t) \quad (3.27)$$

Siendo r_p el radio del piñón, J_m el momento de inercia del rotor y $\omega(t)$ su velocidad angular.

Así pues, el Lagrangiano queda definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(t) + \frac{1}{2}\frac{J_m}{r_p^2}\dot{x}_1^2(t) - \frac{1}{2}k_f[x_1(t) - x_2(t)]^2 \quad (3.28)$$

El siguiente paso es el de enunciar las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = Q_{x_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = Q_{x_2} \end{cases} \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta que Q_{x_1} y Q_{x_2} son las fuerzas externas que actúan sobre la dinámica de m_1 y m_2 respectivamente, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} \left(m_1 + \frac{J_m}{r_p^2} \right) \ddot{x}_1(t) + k_f [x_1(t) - x_2(t)] = F_m(t) - \left(B_c + \frac{B'_m}{r_p^2} \right) \dot{x}_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - k_f [x_1(t) - x_2(t)] = -B_c \dot{x}_2(t) \end{cases} \quad (3.30)$$

Notar que Q_{x_1} es igual a la fuerza total ejercida por el motor menos la fuerza de fricción viscosa generada tanto por la masa 1 como por el rotor. Del mismo modo, Q_{x_2} es igual a la fuerza de fricción viscosa que sufre la masa 2.

Además, recordando la igualdad establecida en la ecuación (3.8), a partir de ahora el término $B_c + \frac{B'_m}{r_p^2}$ será expresado como B_{eq} .

Para poder operar con el sistema de ecuaciones diferenciales más fácilmente, se le ha aplicado la transformada de Laplace bajo condiciones iniciales nulas, obteniendo que:

$$\begin{cases} \left(m_1 + \frac{J_m}{r_p^2} \right) s^2 X_1(s) + k_f [X_1(s) - X_2(s)] = F_m(s) - B_{eq} s X_1(s) \\ m_2 s^2 X_2(s) - k_f [X_1(s) - X_2(s)] = -B_c s X_2(s) \end{cases} \quad (3.31)$$

De la segunda ecuación de (3.31) se consigue la expresión de $X_2(s)$ en función de $X_1(s)$:

$$X_2(s) = \frac{k_f}{m_2 s^2 + B_c s + k_f} X_1(s) \quad (3.32)$$

Sustituyendo la ecuación (3.32) en la primera ecuación del sistema (3.31), se obtiene una ecuación solamente en función de $X_1(s)$ y $F_m(s)$:

$$\left(m_1 + \frac{J_m}{r_p^2} \right) s^2 X_1(s) + k_f \left(\frac{m_2 s^2 + B_c s}{m_2 s^2 + B_c s + k_f} \right) X_1(s) + B_{eq} s X_1(s) = F_m(s) \quad (3.33)$$

Además, de las transformadas de Laplace de (3.12) y (3.13) se conoce que:

$$\begin{cases} \tau_m(s) = k_m I(s) \\ U_m(s) = R_m I(s) + s k_b \Theta(s) \end{cases} \quad (3.34)$$

Recordando que en este caso particular $F_m(s) = r_p \tau_m(s)$ y $X_1(s) = r_p \Theta(s)$, resolviendo el sistema de ecuaciones (3.34) se puede calcular que:

$$F_m(s) = \frac{k_m}{R_m r_p} U_m(s) - \frac{k_b k_m}{R_m r_p^2} s X_1(s) \quad (3.35)$$

Por último, sustituyendo la expresión para $F_m(s)$ recién conseguida en la ecuación (3.33) y operando, se obtiene la función de transferencia del sistema (aproximación masa-muelle).

$$G_{x_1}(s) = \frac{X_1(s)}{U_m(s)} = \frac{\frac{k_m}{R_m r_p}}{\left(m_1 + \frac{J_m}{r_p^2}\right) s^2 + (B_{eq} + \frac{k_b k_m}{R_m r_p^2}) s + k_f \left(\frac{m_2 s^2 + B_c s}{m_2 s^2 + B_c s + k_f}\right)} \quad (3.36)$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de los parámetros que proporciona el fabricante (tablas 2.2 y 2.4), así como los calculados en el apartado 3.2.3, se obtiene que la función de transferencia que relaciona la posición de la plataforma inferior con el voltaje entre los bornes del motor es la siguiente:

$$G_{x_1}(s) = \frac{X_1(s)}{U_m(s)} = \frac{2,98(s^2 + 0,284s + 631,712)}{s(s + 24,110)(s^2 + 9,546s + 879,911)} \quad (3.37)$$

Para obtener la función de transferencia que relaciona la posición de la plataforma superior con el voltaje entre los bornes del motor, basta con utilizar la relación obtenida en la ecuación (3.34) con la ecuación (3.37):

$$G_{x_2}(s) = \frac{X_2(s)}{U_m(s)} = \frac{1881,3}{s(s + 24,110)(s^2 + 9,546s + 879,911)} \quad (3.38)$$

3.5 Validación del modelo teórico: modelo masa-muelle

Al igual que en el caso anterior, se procederá a validar las funciones de transferencia conseguidas en el apartado 3.5. Para ello, se ha comparado el comportamiento real del sistema, con el predicho por el modelo teórico masa-muelle. Cabe mencionar que en este caso son dos las funciones de transferencia a validar. Por un lado, la que describe la dinámica de la plataforma inferior de la estructura en función del voltaje que le llega al motor, y por otro, la que describe la dinámica de la plataforma superior. Además, dado que las funciones de transferencia a analizar son más complejas que la validada en el apartado 3.4, no será posible ajustar los parámetros de dichas funciones con exactitud, a excepción de la ganancia.

3.5.1 Validación de $G_{x_1}(s)$

Antes de nada, conviene darse cuenta de las similitudes entre la función de transferencia conseguida en el apartado 3.1, en el que se consideraba la estructura como una carga rígida, y

la función de transferencia que se está analizando, en la que se caracteriza la resonancia de la estructura.

En esencia, son la misma función de transferencia, solo que en este caso, aparece una pareja de polos complejos conjugados, y otra de ceros complejos conjugados. Estos elementos son los que caracterizan el carácter oscilatorio de la estructura, ya que añaden a la dinámica una resonancia-anti resonancia.

En conclusión, en este apartado se intentará comprobar la validez de la dinámica que aportan dichos elementos (la pareja de polos y ceros complejos conjugados) ya que el resto de la dinámica ya se validó en el apartado 3.4.

Así pues, se ha decidido validar el modelo utilizando la función de transferencia que relaciona la velocidad con el voltaje entre los bornes del motor (3.39), en lazo abierto, ya que es el caso en el que más se acusan las oscilaciones de la plataforma inferior.

$$G_{\dot{x}_1}(s) = \frac{\dot{X}_1(s)}{U_m(s)} = \frac{2,98(s^2 + 0,284s + 631,712)}{(s + 24,110)(s^2 + 9,546s + 879,911)} \quad (3.39)$$

Para ello, se ha utilizado el programa de *LabView* ya empleado en el apartado 3.3, solo que esta vez, con la ecuación (3.39). Mediante dicho programa, se ha simulado la respuesta teórica del sistema frente a una señal cuadrada de entrada de 1 voltio de amplitud y un hercio de frecuencia. Simultáneamente, se ha aplicado dicha señal en el sistema real, pudiendo medir así su respuesta. En la figura 3.15 se muestra la comparación entre respuesta real y simulada tras haber ajustado la ganancia de $G_{\dot{x}_1}(s)$ (se redujo la ganancia en un 40%).

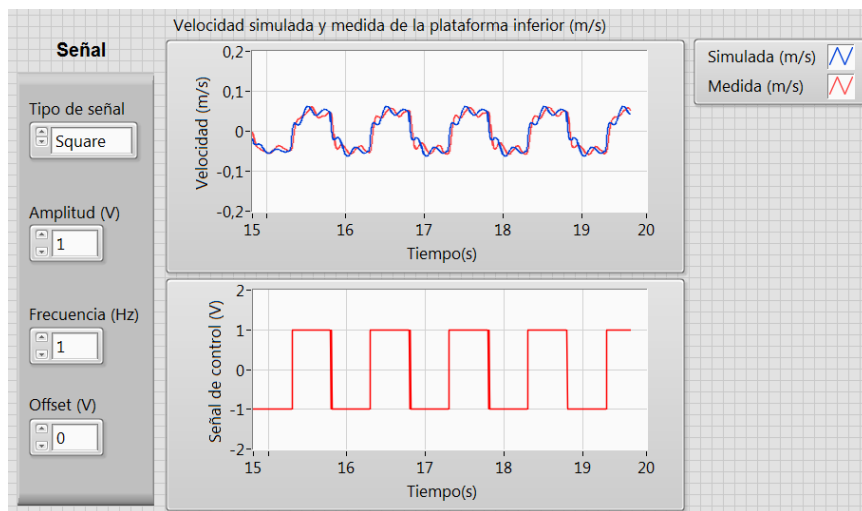


Figura 3.15 : Panel frontal del programa utilizado para la validación en lazo abierto del modelo matemático masa-muelle. El gráfico superior muestra la velocidad real y teórica de la estructura y el inferior la señal de voltaje de entrada.

Como se puede observar en la figura 3.15, el modelo teórico masa-muelle, supone una mejora considerable respecto al de carga rígida. Conviene recordar que al igual que ocurrió con la validación en lazo abierto del modelo de carga rígida, en este caso, la ganancia real del sistema

queda enmascarada por los efectos de la zona muerta del motor. Aun así, del apartado 3.3.1 se conoce que la ganancia real es de aproximadamente 0,075.

3.5.2 Validación de $G_{x_2}(s)$

En este apartado se lleva a cabo la validación de la función de transferencia que predice la dinámica de la plataforma superior en función de la entrada de voltaje al motor. El primer obstáculo que surge, es que la plataforma superior de la estructura no dispone de sensores que midan la posición, sino de un acelerómetro. Es por esto que para poder validar $G_{x_2}(s)$, primero se ha tenido que calcular la función de transferencia que relacione la aceleración de la plataforma superior con el voltaje de entrada al motor. De este modo, al ser capaces de medir la aceleración, es posible comparar la respuesta en aceleración real y simulada de la estructura.

Recordando que bajo condiciones iniciales nulas $G_{\ddot{x}_2}(s) = s^2 G_{x_2}(s)$, se obtiene que $G_{\ddot{x}_2}(s)$ se define de la siguiente manera:

$$G_{\ddot{x}_2}(s) = \frac{\ddot{X}_2(s)}{U_m(s)} = \frac{1881,3s}{(s + 24,110)(s^2 + 9,546s + 879,911)} \quad (3.40)$$

Para llevar a cabo la validación, se ha utilizado el mismo programa de *LabView* empleado en el apartado anterior, solo que esta vez se ha simulado la ecuación (3.40) y se ha medido la aceleración de la superficie superior mediante el acelerómetro ahí situado.

En la figura 3.16 se observa la comparación entre la aceleración real medida, y la predicha por la ecuación (3.40), en respuesta a una señal de entrada cuadrada de 1 voltio de amplitud y 1 hertzio de frecuencia.

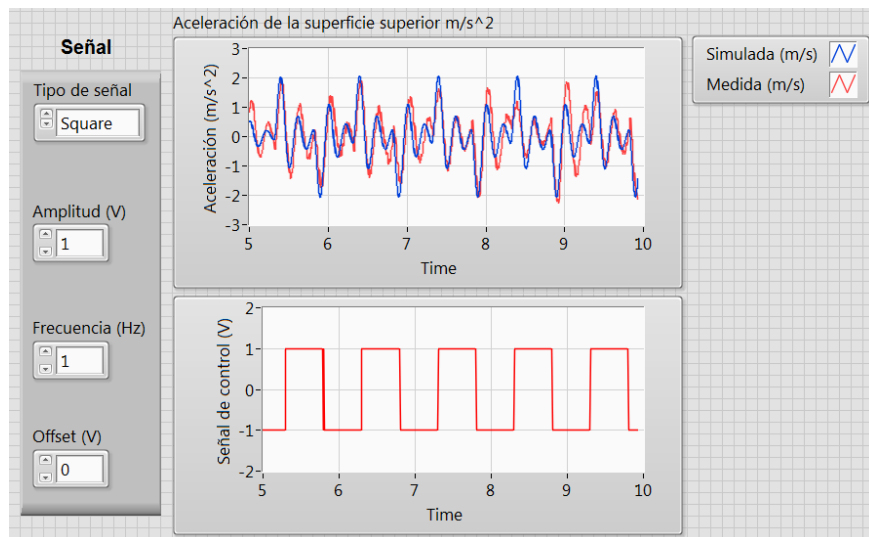


Figura 3.16: Panel frontal del programa utilizado para la validación en lazo abierto del modelo matemático masa-muelle. El gráfico superior muestra la aceleración real y teórica de la superficie superior estructura y el inferior la señal de voltaje de entrada.

Observando la figura 3.16, se puede concluir que la función de transferencia $G_{\ddot{x}_2}(s)$ es una aproximación más que aceptable del sistema real, y por lo tanto, $G_{x_2}(s)$ también lo es.

Cabe mencionar que se llevó a cabo un ajuste en la ganancia de $G_{\ddot{x}_2}(s)$ para que coincidiese con la aceleración real (se disminuyó en un 30% la ganancia). Aun así, la frecuencia y el amortiguamiento de las oscilaciones simuladas por la función de transferencia teórica son bastante acertados.

4 Control de posición del sistema

En este apartado, se llevará a cabo un control de posición del sistema, decidiendo especificaciones de la dinámica, tales como el tiempo de pico, el error en régimen estacionario, el rebose etc. y desarrollando diferentes modelos de controlador que hagan cumplir dichas especificaciones.

Con el fin de facilitar el diseño de los controladores, en esta primera fase se trabajará sobre el modelo matemático simplificado que contempla la estructura flexible como una carga rígida (capítulo 3.1).

Además, en este apartado no se tomará ninguna medida activa para reducir las inevitables oscilaciones de la plataforma superior de la estructura. Todos los esfuerzos se centrarán en desarrollar un correcto control de posición de la superficie inferior.

Así pues, teniendo en cuenta que bajo condiciones iniciales nulas $G_{\dot{x}}(s) = sG_x(s)$, se tomará como planta la siguiente función de transferencia, que relaciona el voltaje entre los bornes del motor con la posición de la estructura:

$$G_x(s) = \frac{0,075}{s(0,056s + 1)} \quad (4.1)$$

Como se puede observar, se trata de una función de transferencia de segundo orden con un polo en el origen.

4.1 Control PV

El controlador inicial elegido para este sistema es el control PV, ya que es el propuesto por el fabricante Quanser.

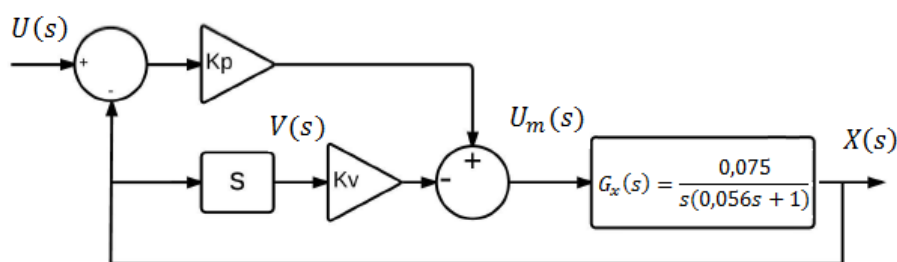


Figura 4.1 : Diagrama de bloques del sistema con un controlador PV

Se trata de un sistema con realimentación negativa en el que la acción de control consta de una parte proporcional a la diferencia entre la posición de la estructura y la referencia, y otra parte proporcional a la velocidad de la estructura.

Resolviendo el diagrama de bloques de la figura 4.1, se obtiene que la función de transferencia en lazo cerrado de la planta con el control PV es la siguiente:

$$G_{x_{PV}} = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1,339K_p}{s^2 + (17,857 + 1,339K_v)s + 1,339K_p} \quad (4.2)$$

Como se puede observar, es una función de transferencia de segundo que se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.3)$$

Donde ω_n es la frecuencia natural del sistema y δ el amortiguamiento. Siendo en este caso particular:

$$\omega_n = \sqrt{1,339K_p} \quad (4.4)$$

$$\delta = \frac{17,857 + 1,339K_v}{2\sqrt{1,339K_p}} \quad (4.5)$$

Así pues, la respuesta temporal del sistema está en función de la frecuencia natural y del amortiguamiento, o lo que es lo mismo, de la posición de los polos en el plano s, ya que:

$$s_i = \omega_n(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}) \quad (4.6)$$

Mientras el sistema sea estable, la respuesta frente a una entrada escalón es la siguiente:

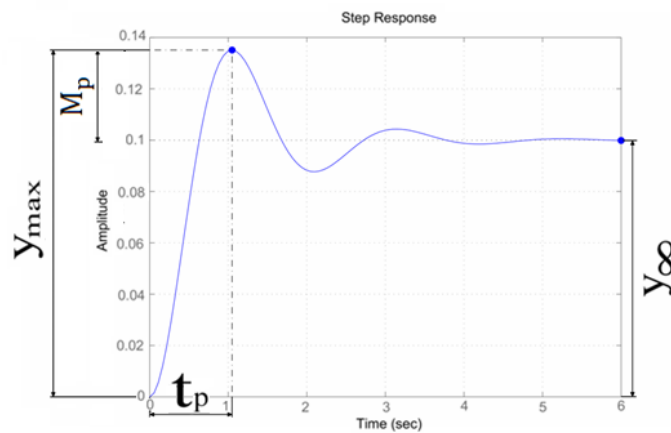


Figura 4.2 : Respuesta tipo de un sistema de segundo orden frente a una señal de entrada escalón.

Parámetros importantes que describen de forma cualitativa la respuesta del sistema frente a una entrada escalón, son el tiempo de pico (t_p) y la sobre oscilación ($M_p(\%)$) entre otros. Por un lado, el tiempo de pico determina el tiempo que transcurre desde que el sistema recibe la señal de entrada escalón ($t = t_0$) hasta que la respuesta del mismo alcanza su primer máximo de oscilación. Por otro lado, la sobre oscilación se define como la diferencia relativa, en tanto por ciento, entre el máximo valor de pico de la respuesta y el valor que alcanza en régimen permanente.

En un sistema de segundo orden, dichos parámetros están directamente relacionados con el amortiguamiento y la frecuencia natural del mismo mediante las siguientes relaciones:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (4.7)$$

$$M_p(\%) = 100 \exp \frac{-\pi \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \quad (4.8)$$

4.1.1 Diseño y simulación

El primer paso para diseñar el controlador, es fijar las especificaciones mínimas que la dinámica del sistema tendrá que cumplir. Dichas especificaciones varían según la función que se le quiera dar tanto al controlador como al sistema que se va a controlar.

En este caso, el objetivo es mover una estructura que debido a su geometría, tiende a oscilar. Es por esto, que el controlador se ha diseñado de tal manera que indirectamente, ayude a disminuir dichas oscilaciones. Para ello, se ha elegido un tiempo de pico algo superior a lo que habitualmente se buscaría al diseñar un control para este tipo de sistema, $t_p = 0,45s$. De éste modo la dinámica es lo suficientemente rápida como para ofrecer una buena respuesta frente a las señales que se le van a aplicar, pero lo suficientemente lenta como para no excitar demasiado la resonancia del sistema. Del mismo modo, se ha determinado que el rebose tiene que ser pequeño por las mismas razones anteriormente mencionadas, $M_p(\%) = 0,1$. Otro parámetro importante a la hora de describir una dinámica, es el error en régimen estacionario. En éste caso, se quiere que dicho error frente a una entrada escalón sea nulo.

Antes de nada, conviene estudiar la estabilidad del sistema en función de los parámetros K_p y K_v . Según el criterio de RouthHurwitz, este sistema en particular será estable en lazo cerrado, siempre y cuando se cumpla que:

$$K_p > 0 \quad \text{y} \quad K_v > -13.336$$

A continuación, se procede a calcular los valores de K_p y K_v necesarios para que el sistema cumpla con las especificaciones mínimas. Sustituyendo los valores de dichas especificaciones en las ecuaciones (4.7) y (4.8) y resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$\omega_n = 16,863 \quad \text{y} \quad \delta = 0,91.$$

Sustituyendo estos últimos datos en las ecuaciones (4.4) y (4.5), se calcula que los valores de K_p y K_v para que el sistema cumpla las especificaciones deseadas son:

$$K_p = 212,368 \quad \text{y} \quad K_v = 9.584$$

Como se puede observar, dichos valores cumplen con las condiciones de estabilidad anteriormente calculadas, y por tanto, el sistema será estable en lazo cerrado.

Una vez determinadas las ganancias del controlador, se pasa a analizar el error en estado estacionario. Dicho error, está definido como la diferencia entre la entrada $r(t)$ y la salida $y(t)$ del sistema cuando el tiempo tiende a infinito. Es decir, cuando el sistema ha alcanzado el régimen estacionario. Es posible demostrar que el error estacionario en el plano de Laplace frente a una entrada $R(s)$ es el siguiente:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \{R(s)s[1 - G_{x_{pv}}(s)]\} \quad (4.9)$$

Así pues, para calcular el error en régimen estacionario del sistema frente a una señal de entrada escalón, basta con sustituir dicha entrada en la ecuación superior.

$$r(t) = A\theta_0(t) \rightarrow R(s) = \mathcal{L}[r(t)] = \frac{A}{s} \quad (4.10)$$

Siendo A la amplitud de la señal escalón, y $\theta_0(t)$ la función escalón de Heaviside.

Sustituyendo dicha $R(s)$ y la función de transferencia (4.2) en la ecuación (4.9) y resolviendo el límite, se obtiene que el error en régimen estacionario del sistema frente a una entrada escalón es nulo.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[A \frac{s^2 + (17,857 + 1,339K_v)s}{s^2 + (17,857 + 1,339K_v)s + 1,339K_p} \right] = 0 \quad (4.11)$$

Cabe mencionar que dicho cálculo se ha llevado a cabo utilizando la función de transferencia teórica que no es más que una aproximación del sistema real. Es por esto, que efectos no caracterizados como la zona muerta del motor pueden hacer que el error real frente a una entrada escalón no sea nulo.

Por otro lado, se ha decidido no estudiar el error frente a una entrada rampa, ya que debido a las características del sistema (cremallera de tan solo 4cm y zona muerta de entorno a los 0,9V) se ha considerado que no es viable la utilización de este tipo de señales de entrada para este sistema en concreto.

Así pues, se da por finalizado el diseño inicial del controlador. El siguiente paso antes de llevar a la práctica el control, es efectuar una simulación para cerciorarnos de que efectivamente se cumplen las especificaciones anteriormente fijadas, y de que la magnitud de la señal de control no es exagerada. Para ello, se ha utilizado un programa de *LabView* en el que es posible simular la respuesta del sistema, con el controlador aplicado, frente a diferentes tipos de

entrada, para más tarde representar dicha respuesta gráficamente. Se ha aplicado en el sistema una referencia cuadrada de 0,5Hz y 15mm de amplitud obteniendo así la siguiente respuesta.

Nota: Debido a la fuerte dependencia de la zona muerta respecto a la posición inicial de la estructura, no ha sido incluido su efecto en ninguna simulación.

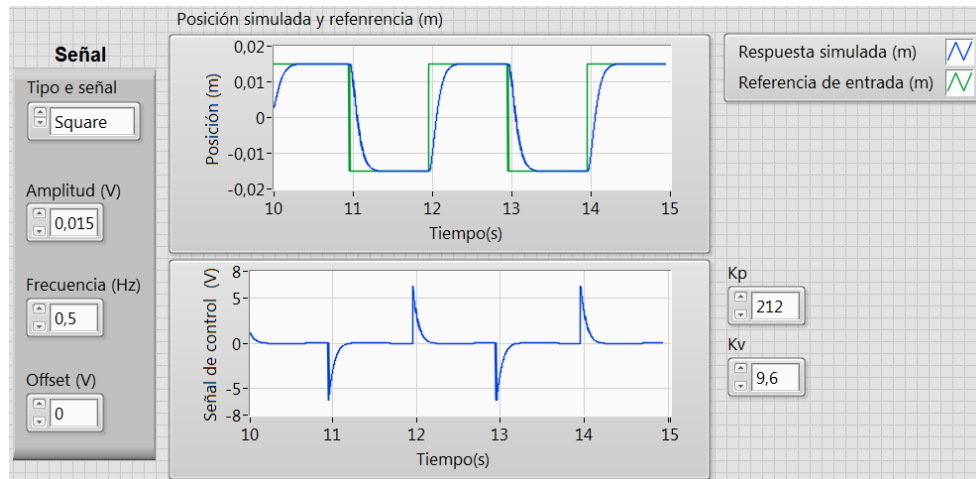


Figura 4.3: Panel frontal del IV utilizado. En el gráfico superior se representan superpuestas la señal de entrada al sistema (rojo) y la respuesta simulada en posición de la estructura (azul). En el gráfico inferior se representa la señal de control simulada.

Analizando los gráficos superiores (figura 4.3), se puede observar como el controlador cumple con las expectativas, ya que consigue alterar la dinámica de la estructura (al menos en simulación) para hacerla relativamente lenta y sin rebose. Otro punto importante, es que para mover el sistema 3cm (prácticamente la totalidad de la cremallera disponible) el motor nunca recibe voltajes superiores a 7V, de manera que la saturación no debería suponer ninguna traba en un principio.

En cuanto a las especificaciones, se ha realizado una medición mediante cursores sobre el gráfico superior de la figura 4.3, consiguiendo así los siguientes valores

$$t_p = 0,449s \quad M_p = 0,067\% \quad e_{ss} = 0$$

Dado que se cumplen las especificaciones, se da por bueno el diseño del controlador y queda listo para su implementación en el sistema real.

4.1.2 Implementación

Una vez conseguida la dinámica deseada en la fase de diseño y simulación, el siguiente paso es la implementación del controlador en el sistema real. Para ello, se ha diseñado un nuevo programa de *LabView*, partiendo del utilizado en el apartado anterior. Este nuevo VI, además de simular la respuesta de la planta teórica frente a diferentes entradas, también le aplica el controlador al sistema real y mide su respuesta frente a las mismas entradas. Dando así la posibilidad de comparar en tiempo real la respuesta simulada con la real.

Así pues, se ha aplicado en el sistema una referencia cuadrada de 10mm de amplitud y 0,2Hz de frecuencia con el propósito de medir la repuesta de la estructura. Los datos obtenidos se recogen en el siguiente gráfico:

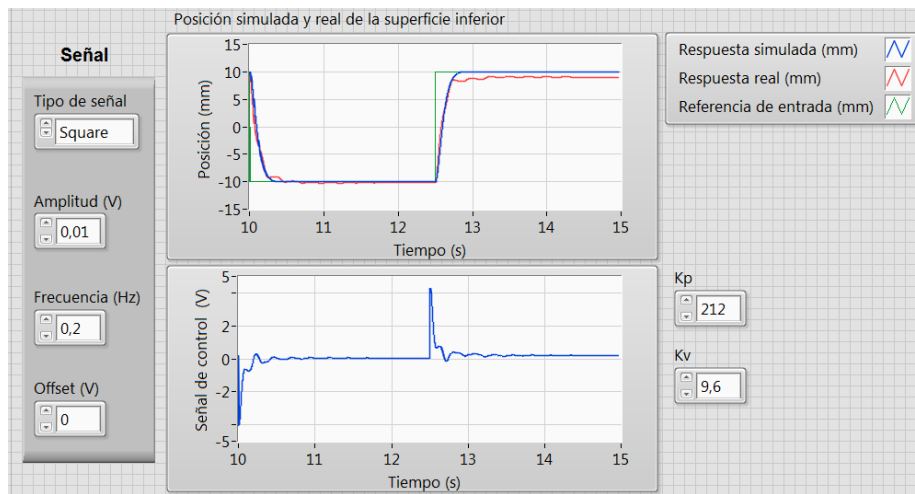


Figura 4.4: Panel frontal del IV utilizado. En el gráfico superior se representan superpuestas la respuesta del sistema real (rojo) y la respuesta simulada (azul). En el gráfico inferior se presenta la señal de control.

Hay un par de puntos que conviene analizar antes de comenzar con la validación del diseño del controlador.

Por un lado, como se puede observar en la figura 4.4, la resonancia de la estructura está presente en su dinámica, haciendo que la posición de la plataforma inferior oscile entorno a su valor de régimen estacionario. Aún así, dichas oscilaciones no suponen más de un 5% de error frente al valor final y en consecuencia pueden ser despreciadas.

Por otro lado, salta a la vista que el error en régimen estacionario no es nulo. Esto se debe entre otras cosas a que las fricciones estáticas y de Coulomb que no se han caracterizado a la hora de modelar matemáticamente el sistema, están teniendo un papel importante en la dinámica del mismo. Además se puede observar que dicho error no es simétrico, ya que es diferente cuando la estructura se mueve hacia la derecha o hacia la izquierda. Este efecto se puede deber a asimetrías en el comportamiento del motor, a asimetrías en la geometría del sistema piñón-cremallera o a otros efectos no lineales como el peso de los cables de los sensores etc. También cabe mencionar que según las repetidas mediciones efectuadas, este error es muy dependiente de la posición inicial de la estructura en la cremallera y de la cantidad de distancia que se desplaza, llegando en según qué casos a suponer un 15% del valor final de régimen estacionario.

En lo que respecta al rebose, es un poco superior al esperado, ya que llega a valores de 0,3%. Esto se debe a las oscilaciones anteriormente mencionadas.

Por último, no tiene mucho sentido analizar el tiempo de pico, ya que queda enmascarado por estas mismas oscilaciones. Aún así, se puede observar a simple vista que la respuesta temporal de la estructura es igual de rápida que la simulada. Las características aproximadas de la dinámica del sistema son:

$$t_p = 0,7s \quad M_p = 0,3\% \quad e_{ss} \leq 15\%$$

En conclusión, se puede considerar que el controlador cumple con las especificaciones, dentro de un margen de error aceptable. Aun así, el error en régimen estacionario es demasiado "aleatorio" y grande en según qué casos, y es por eso que se intentará reducir en siguientes diseños de controladores.

4.2 Control PV+I

Se ha comprobado en el apartado anterior que uno de los mayores inconvenientes de la utilización del control PV sobre la estructura con la que se está trabajando, es que debido a la no caracterizada zona muerta del motor, el error en régimen estacionario no es nulo. Esto puede resultar un problema dependiendo de la aplicación específica que se le quiera dar a la estructura. Es por esto que se ha diseñado un nuevo controlador que permita que el error en régimen estacionario sea nulo, intentando mantener, dentro de lo posible, las características que nos ofrecía el anterior control PV. Así pues, se ha optado por la suma de un integrador al controlador del que se disponía, consiguiendo un sistema descrito por el diagrama de bloques expuesto en la figura 4.5.

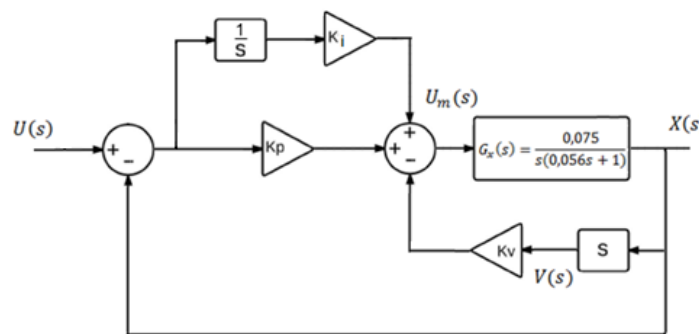


Figura 4.5: Diagrama de bloques del sistema con un controlador PV+I

Resolviendo dicho diagrama, se obtiene que la función de transferencia en lazo cerrado del sistema con el controlador PV+I aplicado, es una función de tercer orden con un cero:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1,339(k_i + k_p s)}{s^3 + (17,857 + 1,339k_v)s^2 + 1,339k_p s + 1,339k_i} \quad (4.12)$$

4.2.1 Diseño e implementación

Para poder diseñar un sistema que solucione el problema del error de régimen estacionario no nulo, antes de nada es necesario entender el origen de dicho efecto. El control PV se basa en realimentar negativamente tanto la posición de la estructura como su velocidad, generando así una señal de error que es la que actúa sobre el motor. Dicha señal de error es igual a cero cuando la posición de la estructura es la misma que la de la referencia, y cuando su velocidad es nula. Siempre y cuando esta señal no sea nula, existirá un voltaje actuando sobre el motor, que moverá la estructura generando que dicha señal tienda siempre a cero. El problema de contar con un motor con zona muerta, es que si la señal de error es lo suficientemente

pequeña como para no superar dicha zona muerta, no será capaz de mover el motor, y por ende no se podrá corregir dicho error.

La función del integrador es la de ir integrando en el tiempo la diferencia entre la posición real de la estructura y la referencia. Así, aunque la señal de error en un primer instante no sea capaz de superar la zona muerta del motor, gracias al integrador, dicha señal ira incrementándose con el tiempo hasta ser capaz de mover el motor, y de este modo, corregir cualquier error de régimen estacionario, por pequeño que fuera. La velocidad a la que se incrementa la señal de error a causa del integrador, viene determinada por el coeficiente k_i .

Así pues, se necesita un valor de k_i lo suficientemente grande como para corregir el mínimo error de régimen estacionario que se dé, en un tiempo viable. Se ha determinado que para que dicho tiempo de corrección sea aceptable, no puede superar los 2 segundos.

Es importante no olvidar que las causas que dan origen a este comportamiento (fricción estática, de Coulomb etc.) no están caracterizadas en la función de transferencia de la que disponemos. Por eso, no será posible calcular el valor de k_i analíticamente, ni por medio de simulaciones, ya que según la función de transferencia utilizada, dicho error de régimen estacionario no existe. Es por esto, que el diseño y la implementación del controlador se llevarán a cabo simultáneamente, siempre partiendo del diseño del controlador PV anteriormente conseguido y respetando los límites de estabilidad fijados por el criterio de Routh Hurwitz (para $k_v = 9,6$ y $k_p = 212$, $k_i < 6506$).

Así pues, se ha desarrollado un nuevo programa de *LabView* en el que se añade un integrador al controlador PV del que ya se dispone, y se ha implementado el controlador.

Para determinar el valor de k_i se ha comenzado por fijar los parámetros k_v y k_p del controlador en los mismos valores que en el caso del controlador PV ($k_v = 9,6$ y $k_p = 212$), y el valor de k_i en cero. De este modo, se parte desde el caso anterior en el que solo se dispone de un control PV. Después, se ha ido incrementando el valor de k_i , analizando el tiempo necesitado por el integrador para corregir el error de régimen estacionario. De este modo, se ha determinado empíricamente que el valor de k_i necesario para que el integrador corrija el error de régimen estacionario en un tiempo aceptable ($<2s$) es de 450 ($k_i = 450$).

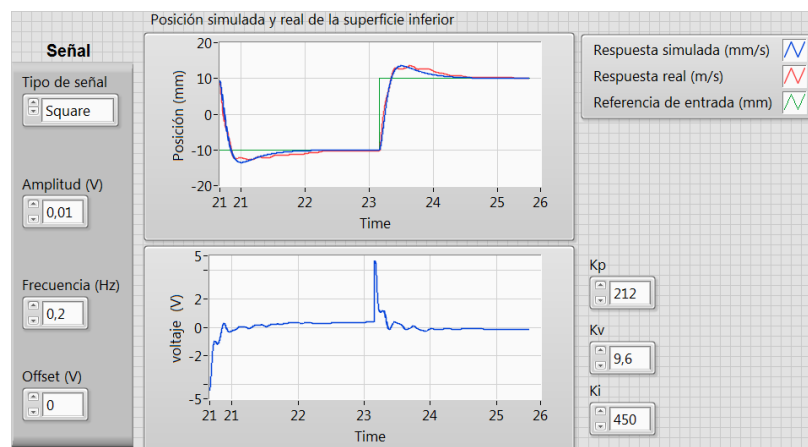


Figura 4.6: Panel frontal del IV utilizado. En el gráfico superior se representan superpuestas la respuesta del sistema real (rojo) y la de la simulación (azul). En el gráfico inferior se presenta la señal de control.

Como se puede apreciar en la figura 4.6, la implementación del integrador en el anterior control PV ha corregido el error de régimen estacionario, pero también ha modificado la dinámica del sistema, proporcionándole un mayor rebose y un tiempo de establecimiento más largo. Como consecuencia de esto también se percibe un pequeño aumento en las oscilaciones de la estructura. Así pues, las características más descriptivas de la dinámica del sistema son el rebose y el tiempo de establecimiento:

$$M_p(\%) = 11\% \quad t_s = 2s \quad e_{ss} = 0$$

En conclusión, para poder eliminar el error de régimen estacionario en un tiempo aceptable, ha sido necesario sacrificar ciertas características deseables del anterior controlador PV como la velocidad a la que conseguía establecerse o el poco rebose que tenía. Aún así, para determinadas aplicaciones, este controlador puede resultar más apropiado que el PV.

A continuación, con la intención de estudiar un poco más en profundidad el efecto del integrador, se calculará un contorno de las raíces en función del parámetro k_i para analizar así la dinámica de los polos y los ceros del sistema en función de dicho parámetro.

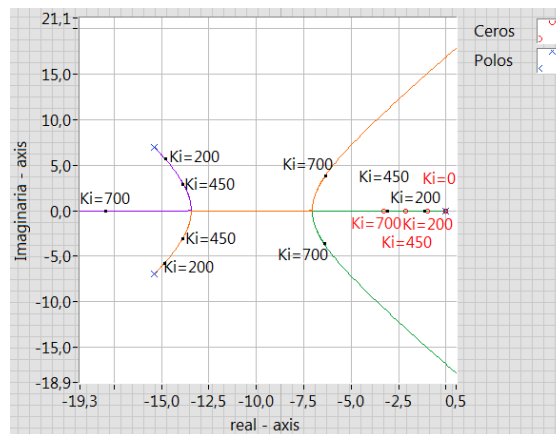


Figura 4.7: Contorno de las raíces del sistema con el controlador PV+I aplicado, en función del parámetro k_i . Nota: El cero se mueve por el eje x a una velocidad constante de $-1/212$.

Como se puede observar en la figura 4.7, en un primer instante cuando $k_i = 0$, se parte de un sistema con 2 polos complejos conjugados y un polo y un cero en el origen. Debido a esta cancelación entre el polo y el cero del origen, la dinámica del sistema queda definida por la posición de los 2 polos conjugados. Es importante recordar que dicha posición es la conseguida en el apartado 4.1.1, donde se diseñó el controlador PV.

A medida que se va incrementando k_i , el polo del sistema que partía del origen, se aleja a una velocidad superior que el cero con el que se anulaba. En consecuencia, dicho cero va ganando dominancia, ya que se mantiene relativamente cerca del origen y ya no es anulado por el polo. Por otro lado, la pareja de polos conjugados se desplaza hacia el eje x, para luego seguir la ruta que se observa en la figura 4.7.

En conclusión, a medida que k_i se incrementa, la parte imaginaria de los polos complejos conjugados decrece, incrementando así el coeficiente de amortiguamiento de los mismos y en principio reduciendo el posible rebose. El problema está en que al mismo tiempo que esto

ocurre, aparecen un polo y un cero reales cerca del origen mucho más dominantes. Es por esto que la dinámica del sistema pasa a ser la suma de los aportes tanto del polo y cero reales como de los polos conjugados. Así, cuanto más grande es el valor de k_i , más se separan el cero y el polo reales entre sí. Como el cero se aleja del origen más despacio, se convierte en el más dominante y es el responsable de que cada vez haya más rebose. También cabe mencionar que a partir de $k_i > 550$, aparece una nueva pareja de polos complejos conjugados mucho más cerca del origen que la anterior. A medida que k_i aumenta, la parte imaginaria de estos polos tiende al infinito, confiriendo al sistema un carácter más oscilatorio. Además, se mueven hacia la mitad derecha del plano, contribuyendo así a la desestabilización del sistema.

5 Control de posición del sistema y reducción de las oscilaciones

Hasta el momento, todos los esfuerzos se han volcado en el diseño de un controlador que ofreciese buenas características a la hora de mover la estructura, despreciando cualquier oscilación que esto pudiera generar en la misma.

En este apartado, se intentará controlar y reducir notablemente dichas oscilaciones sin comprometer demasiado el control de posición hasta el momento conseguido. Así pues, se utilizarán distintas técnicas para llevar a cabo dicho objetivo.

5.1 Filtro notch

La primera técnica utilizada, es la implementación de un filtro rechaza banda en línea con el motor. La idea general de esto es que antes de que la señal de realimentación llegue al motor, se filtren todas las componentes frecuenciales que puedan excitar la resonancia de la estructura.

Para desarrollar la idea un poco más en profundidad, se estudiará conceptualmente la respuesta en frecuencia del sistema (con y sin resonancia) y se analizará el efecto que tiene en ella la suma de un filtro notch.

Como ya se calculó en el apartado 3.1 la función de transferencia que relaciona la velocidad de la estructura (si esta fuera rígida) en función del voltaje de entrada al motor es la siguiente:

$$G_x(s) = \frac{0,089}{0,052s + 1}$$

Nota: No se ha utilizado la función de transferencia ajustada empíricamente ya que lo único que se quiere en este apartado es conocer conceptualmente la respuesta en frecuencia del sistema.

Del mismo modo, para el modelo masa-muelle en el que se caracteriza de forma aproximada la resonancia del sistema, esa misma función de transferencia se representa de la siguiente manera (ecuación 3.39):

$$G_{\dot{x}_1}(s) = \frac{\dot{X}_1(s)}{U_m(s)} = \frac{2,98(s^2 + 0,284s + 631,712)}{(s + 24,110)(s^2 + 9,546s + 879,911)}$$

Dibujando el diagrama de Bode de dichas funciones, se obtiene lo siguiente:

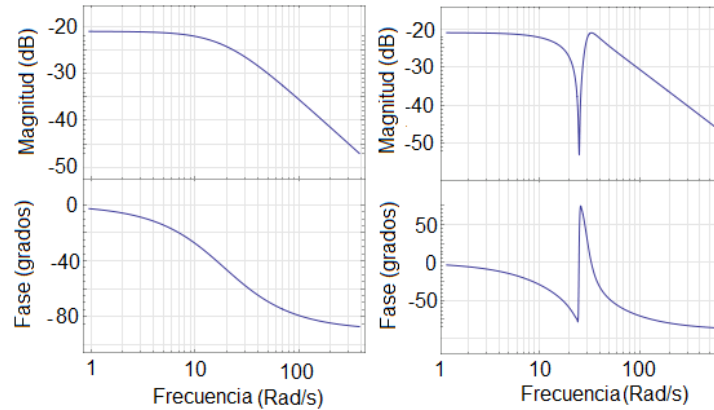


Figura 5.1: Diagrama de Bode de las ecuaciones 3.18 y 3.39 por orden de izquierda a derecha.

Observando la figura 5.1, se pueden apreciar las similitudes entre la función de transferencia en la que se considera la estructura como una carga rígida, y la función en la que se caracteriza la resonancia. Básicamente tienen la misma respuesta frecuencial, solo que en esta última, aparece una anti resonancia alrededor de los 25 rad/s, generada por la pareja de ceros complejos conjugados, y un pico de resonancia alrededor de los 30 rad/s a causa de la pareja de polos complejos conjugados.

La idea es contrarrestar el pico de resonancia que genera las oscilaciones mediante la implementación de un filtro rechaza banda. De este modo, se creará un nuevo sistema compuesto por el filtro más el sistema original, al que más tarde se le podrán aplicar los controladores utilizados hasta el momento. La respuesta en frecuencia de este nuevo sistema, será la suma de las respuestas de los dos elementos del mismo (el filtro y el sistema original). De este modo, se diseñará el filtro con la frecuencia y profundidad justa para que al sumarlo al sistema original, la respuesta en frecuencia que se consiga se asemeje a la de un sistema con carga rígida (figura 5.1, el primer Bode de amplitud).

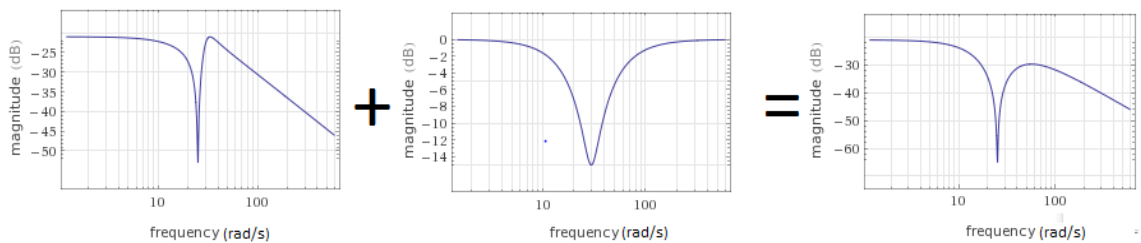


Figura 5.2: Ejemplo del efecto que surte un filtro notch en la respuesta frecuencial de un sistema con resonancia.

En conclusión, de este modo se deberían poder reducir las oscilaciones en la dinámica de la plataforma inferior. Además, como estas oscilaciones están estrechamente relacionadas con

las que sufre la plataforma superior, al reducir unas, las otras también deberían de verse reducidas.

5.1.1 Diseño y simulación del filtro notch y controlador PV+I

Para realizar el diseño desde el punto de vista frecuencial, antes de nada conviene conocer la función de transferencia de un filtro rechaza banda. Ésta se compone de dos polos y dos ceros que resuenan a la misma frecuencia:

$$G_n(s) = \frac{s^2 + 2\delta_a\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\delta_b\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.1)$$

Así pues, el filtro estará centrado en ω_n y la profundidad del mismo vendrá determinada por la relación δ_a/δ_b [12].

Para diseñar un primer modelo de filtro, es necesario conocer la frecuencia natural del sistema y cuanta atenuación hace falta para contrarrestar la resonancia.

De la ecuación 3.39 se deduce que la pareja de polos que produce la resonancia es la siguiente:

$$s^2 + 9,546s + 879,911$$

De modo que la frecuencia natural a la que resuena la estructura es $\omega_n = 29,66 \text{ rad/s}$.

Para determinar la profundidad del filtro, se quiere conocer el efecto de la pareja de polos complejos conjugados en el plano de frecuencias. De este modo, se podrá diseñar un filtro lo suficientemente profundo como para contrarrestar dicho efecto. Cabe recordar, que la función de transferencia (3.39) tiene una pareja de ceros complejos conjugados que crea una anti resonancia muy cerca del pico de resonancia. Es por esto que dicho pico queda parcialmente enmascarado. Para poder analizar las dimensiones de la resonancia, se ha convertido el coeficiente de amortiguamiento de los ceros resonantes a 1. De este modo, se consigue eliminar la anti resonancia de la función de transferencia. Más tarde, se ha dibujado el diagrama de Bode (magnitud) de dicha función y se ha comparado con el comportamiento que debería tener si no hubiera resonancia. Como lo que se quiere conseguir mediante el filtro notch es anular la pareja de polos resonantes, la diferencia en amplitud entre las dos respuestas a la frecuencia $\omega_n = 29,66 \text{ rad/s}$ será la profundidad necesaria del filtro.

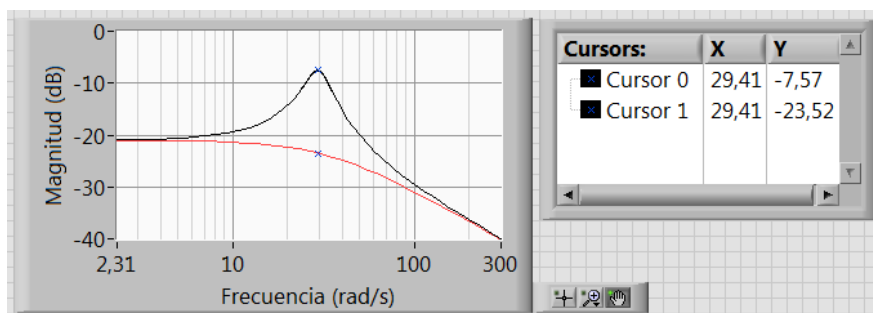


Figura 5.3: Comparación gráfica entre el diagrama de Bode (magnitud) de la función de transferencia del sistema sin la resonancia, y el de la misma función sin resonancia ni anti resonancia.

Queda definida la atenuación máxima del filtro en -16dB.

Así pues, una vez conocida la información necesaria, se ha procedido a diseñar el filtro. Primero, se han colocado los ceros del mismo de manera que anulen los polos resonantes de la función de transferencia del sistema. Cabe mencionar, que aunque matemáticamente parezca posible la compensación completa polo-cero, en la realidad muy rara vez ocurre, ya que las funciones de transferencia que describen los sistemas son meras aproximaciones, los componentes eléctricos utilizados para crear los controladores no tienen el valor exacto necesario etc. Aun así, al colocar los ceros cerca de los polos resonantes del sistema, se consigue una compensación parcial. De este modo, el filtro toma la siguiente forma:

$$G_n(s) = \frac{s^2 + 9,546s + 879,911}{s^2 + 2\delta_b\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.2)$$

Como ya se conoce la frecuencia en la que tiene que estar centrado el filtro, solo queda fijar el valor de δ_b . Para ello, de la ecuación (5.2) se calcula que el valor de $\delta_a = 0,161$. Conociendo que la relación $\frac{\delta_a}{\delta_b} = -16dB = 0,158$ se calcula que $\delta_b = 1,019$ y en conclusión, el filtro queda definido como:

$$G_n(s) = \frac{s^2 + 9,546s + 879,911}{s^2 + 60,453s + 879,911} \quad (5.3)$$

Una vez se ha conseguido un primer prototipo del filtro, se ha procedido a analizar el efecto del mismo al aplicárselo al sistema. Para ello se ha creado un nuevo programa en el que se genera una señal de entrada cuadrada. Para poder llevar a cabo la comparación, dicha señal ha sido llevada a la entrada de un bloque de *LabView* en el que mediante la función (3.39) se simula la dinámica de la superficie inferior de la estructura. Paralelamente, esa misma señal se ha hecho pasar por el filtro (5.3) y se ha vuelto a inyectar en el bloque anteriormente mencionado. La respuesta generada por estos dos casos se representa en el primer gráfico de la figura 5.4. Simultáneamente, se ha llevado a cabo el mismo proceso solo que esta vez los bloques de *LabView* simulaban la dinámica de la plataforma superior. La respuesta de estos se representa en el segundo gráfico de la figura 5.4.



Figura 5.4: Comparación entre la dinámica simulada de la plataforma con y sin el filtro notch aplicado.

Como se puede observar, el filtro notch diseñado, consigue atenuar en gran medida las oscilaciones de la estructura sin prácticamente alterar la dinámica general de la misma.

Debido a que la dinámica general del nuevo sistema es muy similar a la del sistema original, se decide utilizar el mismo controlador PV+I diseñado en el apartado 4.2, con la esperanza de que la dinámica resultante no varíe demasiado en comparación con la obtenida en dicho apartado. De este modo, el sistema a estudiar queda definido por el siguiente diagrama de bloques:

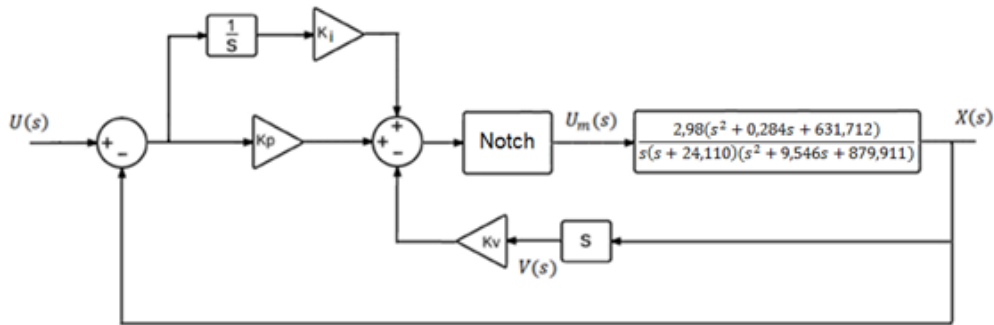


Figura 5.4: Diagrama de bloques del sistema con el filtro aplicado y un controlador PV+I.

Antes de implementar el controlador y el filtro en el sistema real, se lleva a cabo una simulación basada en la función de transferencia descrita en la ecuación (3.37). De esta manera, se puede adquirir una idea de cómo afecta la implementación del filtro en la dinámica que se consiguió en el apartado 4.2.

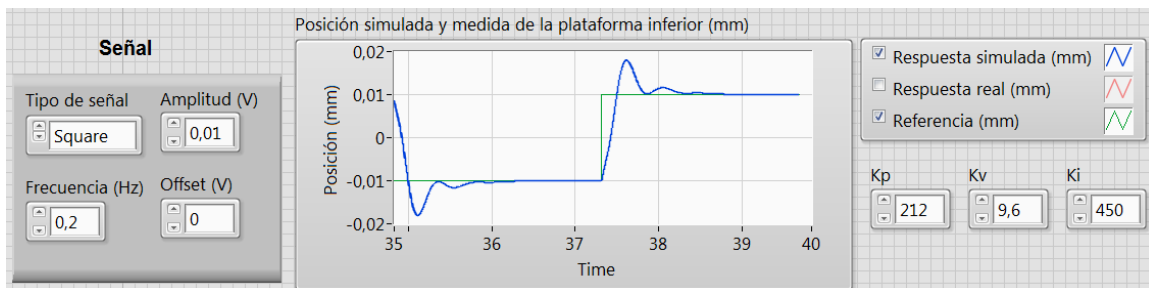


Figura 5.5: Simulación de la dinámica del sistema con el filtro notch y el controlador PV+I aplicado.

Como se puede observar, la dinámica conseguida es bastante parecida a la que ya se obtuvo en el apartado 4.2. Aun así, se ha detectado un aumento en el rebose, que ya empieza a ser demasiado alto como para dar por bueno el diseño.

Teniendo en cuenta que el parámetro k_v es utilizado en los controles PV para reducir el rebose, se ha ajustado empíricamente dicho parámetro hasta conseguir una simulación con un rebose aceptable (10%). Los parámetros del controlador resultantes son los siguientes:

$$k_i = 450 \quad k_v = 20 \quad k_p = 212$$

5.1.2 Implementación del filtro notch y controlador PV+I

Antes de nada, se ha ajustado empíricamente la profundidad del filtro para conseguir así una reducción óptima de las oscilaciones. Para ello, se ha diseñado un nuevo VI en el que se

implementa el diagrama expuesto en la figura 5.4 sobre el sistema real. Mediante dicho programa, se ha inyectado en el sistema una referencia de posición cuadrada con el objetivo de mover la estructura. Al contrario que en los casos anteriores, esta vez se ha medido la aceleración de la plataforma superior, ya que es donde más acusadas son las oscilaciones. De este modo, se han implementado filtros con diferentes profundidades, obteniendo los resultados expresados en la figura 5.6.

Cabe mencionar que este ajuste se ha llevado a cabo sobre el sistema real ya que la aproximación masa-muelle utilizada en el apartado 3.4 no describe por completo el carácter oscilatorio de la estructura. Es por esto que a pesar de que en la simulación las oscilaciones se han neutralizado por completo, en la realidad es necesario el ajuste del filtro para poder reducir las oscilaciones al máximo.

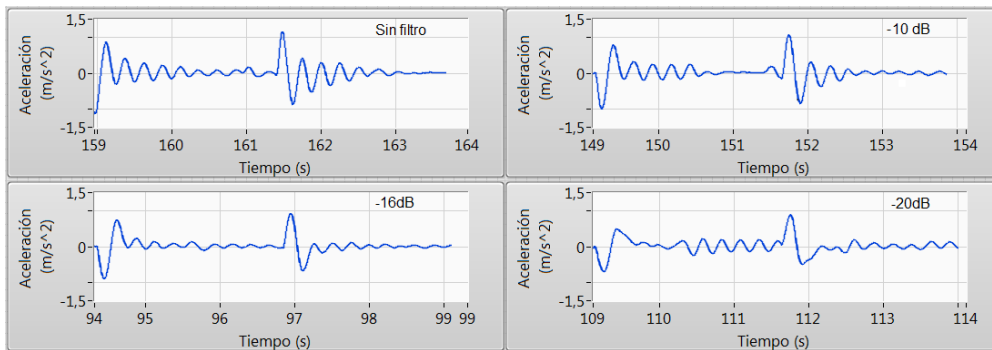


Figura 5.6: Aceleración de la superficie superior de la estructura bajo la influencia de diferentes filtros.

Se observa en la figura 5.6 que la atenuación óptima del filtro está en torno a los -16dB.

De este modo, con los valores del filtro y del controlador actualizados, se obtiene la dinámica expuesta en la figura 5.7:

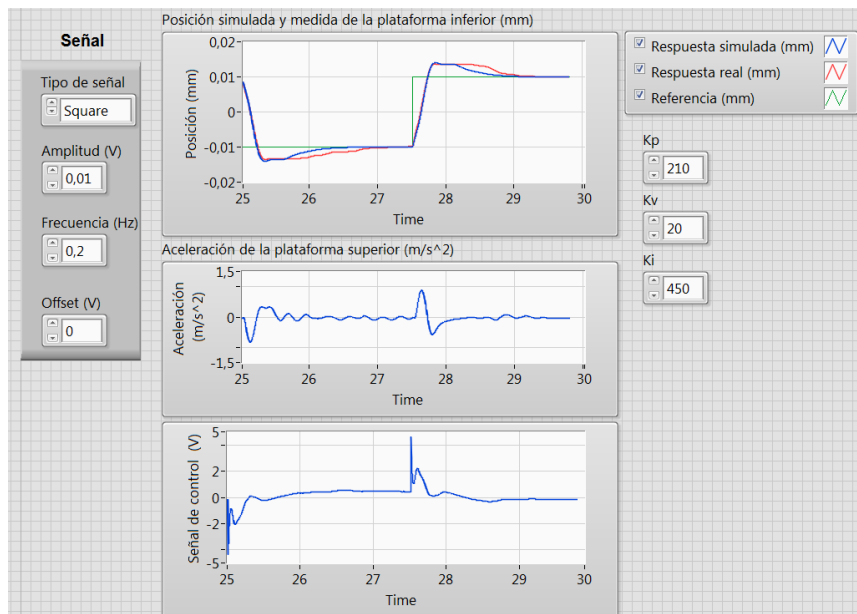


Figura 5.7: Dinámica de la estructura con el filtro notch y el controlador PV+I aplicado. En el primer gráfico se expone la posición de la plataforma inferior y en el segundo la aceleración de la plataforma superior.

Analizando la figura 5.7 se llega a la conclusión de que se ha conseguido un controlador de posición de prestaciones similares al que se diseñó en el apartado 4.2, pero que además reduce las oscilaciones tanto en la plataforma inferior como en la superior. Las características temporales más significativas del controlador son las siguientes:

$$M_p(\%) = 12\% \quad t_s = 2,5s \quad e_{ss} = 0$$

5.2 Sistema de control mediante realimentación de variables de estado (LQR)

Para llevar a cabo un control basado en variables de estado, primero, es necesario desarrollar una representación interna del sistema.

5.2.1 Representación interna del sistema.

Hasta el momento, el sistema con el que se ha trabajado ha sido descrito mediante sus funciones de transferencia. Dichas funciones relacionan la entrada de voltaje al motor con la posición y aceleración de la estructura a controlar. El problema de este tipo de representación es que solo sirve para sistemas lineales SISO, y que además, no proporciona información de lo que pasa dentro del sistema.

En la representación interna, se describe el sistema dinámico en el espacio de estados [13]. Para ello, se define la dinámica de sus variables de estado $\bar{x}(t)$, y se representan en forma matricial de la siguiente manera, siendo $\bar{u}(t)$ las entradas al sistema:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \quad (5.4)$$

Las variables de estado son el subconjunto más pequeño de variables de un sistema que pueden representar su estado dinámico completo en un determinado instante.

Del mismo modo, las salidas del sistema se representan matricialmente así:

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \quad (5.5)$$

En conclusión, se puede describir la planta en forma de diagrama de bloques de la siguiente manera:

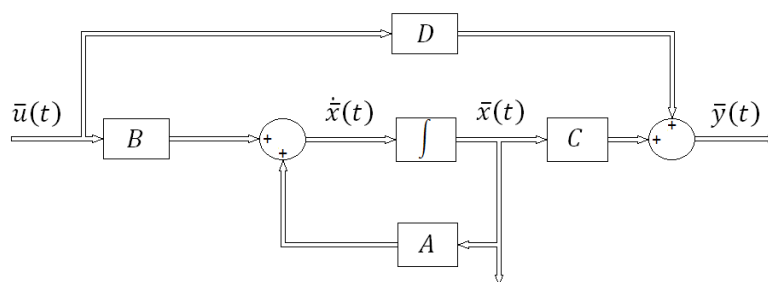


Figura 5.8: Diagrama de bloques de la representación interna de un sistema.

Este tipo de representación otorga una descripción mucho más detallada del sistema, ya que describe la dinámica de cada una de las variables de estado del mismo. Esto proporciona información de lo que pasa dentro del sistema entre otras muchas ventajas.

Así pues, se procede a conseguir la representación interna del sistema a analizar. Para ello, se aprovecharán los resultados obtenidos en los capítulos en los que se llevó a cabo la representación externa del sistema. De la ecuación (3.35) se deduce que:

$$F_m(t) = \frac{k_m}{R_m r_p} u_m(t) - \frac{k_b k_m}{R_m r_p^2} \dot{x}_1(t) \quad (5.6)$$

Sustituyendo dicha expresión para $F_m(t)$ en el sistema de ecuaciones (3.30) y operando para despejar $\ddot{x}_1(t)$ y $\ddot{x}_2(t)$ se obtiene lo siguiente (Nota: recordar que $B_c + \frac{B'_m}{r_p^2} = B_{eq}$):

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\frac{\frac{k_m k_b}{R_m r_p^2} + B_{eq}}{m_1 + \frac{J_m}{r_p^2}} \dot{x}_1(t) + \frac{k_f}{m_1 + \frac{J_m}{r_p^2}} [x_2(t) - x_1(t)] + \frac{k_m}{R_m r_p \left(m_1 + \frac{J_m}{r_p^2}\right)} u_m(t) \\ \ddot{x}_2(t) = -\frac{B_c}{m_2} \dot{x}_2(t) + \frac{k_f}{m_2} [x_1(t) - x_2(t)] \end{cases} \quad (5.7)$$

Observando este sistema de ecuaciones, se define el vector de estados del sistema como:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

De este modo, sustituyendo los valores de los parámetros proporcionados por el fabricante (tabla 2.2 y 2.4) y los conseguidos en el apartado 3.2.3 en la ecuación (5.7), se obtiene lo siguiente. Conviene recordar que en el apartado 3.5.1 y 3.5.2 se observó que la ganancia de las funciones de transferencia del sistema era un 30% más grande que la ganancia del sistema real. Para reflejar dicho ajuste en la expresión matricial, se ha multiplicado la matriz B por 0,7.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -469,063 & 469,063 & -3338 & 0 \\ 631,6875 & -631,6875 & 0 & -0,3125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,087 \\ 0 \end{pmatrix} u_m(t) \quad (5.8)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 631,6875 & -631,6875 & 0 & -0,3125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_m(t) \quad (5.9)$$

Así pues, las ecuaciones (5.8) y (5.9) son las que representan el sistema de forma externa.

Antes de comenzar con el diseño del controlador, conviene analizar si el sistema es observable y controlable.

Se dice que un sistema es observable cuando mediante únicamente la medida de las entradas y las salidas del mismo, se es capaz de determinar el valor del vector de estados. Esta condición, matemáticamente se traduce en lo siguiente [14] (siendo n el número de variables de estado)

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (5.10)$$

Del mismo modo, se dice que un sistema es controlable cuando existe una señal de control continua a trozos capaz de llevar el sistema a cualquier estado finito, en un tiempo también finito. Esta condición matemáticamente es expresada de la siguiente manera [15]:

$$\text{Rango}(B \mid AB \mid AB^2 \dots AB^{n-1}) = n \quad (5.11)$$

En este caso, el sistema es tanto observable como controlable.

5.2.2 Control por realimentación de variables de estado (LQR), diseño y simulación

La técnica utilizada, se basa en un control proporcional, en el que lo que se realimenta son las variables de estado del sistema. Este control proporcional permite dar prioridad al control de la variable que se desee, otorgando así mucha más libertad a la hora de diseñar el controlador. De este modo, el sistema realimentado puede ser expresado mediante el siguiente diagrama de bloques.

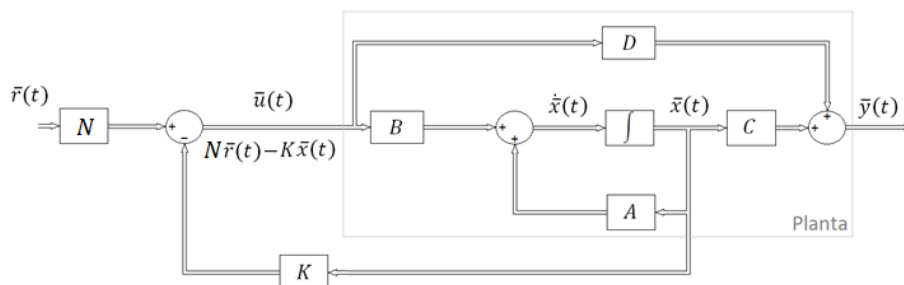


Figura 5.9: Diagrama de bloques de un sistema descrito por representación interna al que se le aplica un regulador (realimentación de variables de estado).

Como se puede observar en la figura 5.9, al aplicar la realimentación, la señal de entrada a la planta $\bar{u}(t)$ pasa a ser $N\bar{r}(t) - K\bar{x}(t)$, siendo $\bar{r}(t)$ la referencia proporcionada desde el exterior y N una matriz pensada para conseguir ganancia unitaria. Sustituyendo esta nueva

señal de control en la ecuación (5.4) y creando un sistema de ecuaciones con la ecuación (5.5), se obtiene lo siguiente (Nota: para este caso particular, se ha definido $D=0$):

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B[N\bar{r}(t) - K\bar{x}(t)] \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \end{cases} \quad (5.12)$$

Aplicando la transformada de Laplace sobre condiciones iniciales nulas al sistema (5.7), se consigue el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{cases} s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) - BK\bar{X}(s) + BN\bar{R}(s) \\ \bar{Y}(s) = C\bar{X}(s) \end{cases} \quad (5.13)$$

Resolviendo dicho sistema en busca de la relación entre $\bar{Y}(s)$ y $\bar{R}(s)$, es posible calcular las funciones de transferencia en lazo cerrado del sistema completo:

$$G_{LC}(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{R}(s)} = C[(sI - (A - BK))^{-1}BN] = \frac{C[(sI - (A - BK))^*BN]}{|sI - (A - BK)|} \quad (5.14)$$

De este modo, se puede deducir que los autovalores de la matriz $A - BK$ son los polos del sistema en lazo cerrado. Así pues, mediante la elección de la matriz de realimentación K , es posible colocar dichos polos en cualquier punto del plano complejo, pudiendo conseguir así, en teoría, cualquier dinámica deseada.

Hay varias técnicas para llevar a cabo la elección de la matriz K , o lo que es lo mismo, de diseñar el controlador del sistema. Una de las más utilizadas, es la de la colocación de polos. En dicha técnica, primero se identifica la posición que deben tener los polos para conseguir una determinada dinámica en el sistema. Una vez se conoce la posición deseada de los polos, y teniendo en mente que dichas posiciones son iguales a los autovalores de la matriz $A - BK$, se calculan los parámetros de la matriz de realimentación K .

A pesar de ser una técnica muy potente, ya que como se ha comentado anteriormente, permite conseguir prácticamente cualquier dinámica deseada, también conlleva diferentes desventajas. Por un lado, cuando el sistema con el que se trabaja es relativamente complejo, con más de dos polos y ceros, la relación entre la posición de dichos elementos y la respuesta temporal del sistema no es para nada intuitiva. Por otro lado, aun siendo cierto que es posible conseguir cualquier dinámica deseada mediante la colocación de polos, conviene no olvidar que cuanto más exigente es una dinámica, más grande será la señal de control necesaria para conseguirla. El problema de la técnica de colocación de polos es que no existe relación trivial entre la posición de los polos y la magnitud de la señal de control. Es por esto que puede darse el caso en el que se diseñe un controlador para conseguir una dinámica determinada, pero que después, el hardware del que se dispone no sea capaz de generar la señal de control necesaria.

Con el ánimo de evitar dichas desventajas, el diseño del regulador, y en conclusión, el cálculo de la matriz de realimentación se llevará a cabo mediante la técnica LQR (linear quadratic regulator). Esta técnica consta de un algoritmo matemático que calcula el valor de K a raíz de minimizar la función de esfuerzo (5.15) expuesta a continuación.

$$J = \int_0^{\infty} [\bar{x}^*(t)Q\bar{x}(t) + \bar{u}^*(t)R\bar{u}(t)]dt \quad (5.15)$$

En este caso, Q es una matriz definida positiva de dimensiones 4x4 que, por motivos de simplicidad, será diagonal. Por otro lado, R es un escalar positivo. Cumpliéndose estas condiciones, se asegura que el sistema sea estable en lazo cerrado [16].

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix} \quad R = r_1$$

Del mismo modo, $\bar{x}(t)$ es el vector de estados al que el algoritmo LQR intenta llevar a la referencia lo más eficientemente posible. $\bar{u}(t)$ por su parte, es la señal de control resultante que le llega al motor.

El diseño del controlador utilizando esta técnica, se llevará a cabo mediante el ajuste de las matrices Q y R. Analizando un poco más detenidamente la ecuación (5.15), es fácil darse cuenta de que cuanto más grande sea el parámetro de Q correspondiente a una variable de estado, más grande será el aporte de esfuerzo de dicha variable en la ecuación (5.15). Como el algoritmo LQR lo que intenta es minimizar el valor de dicha ecuación, priorizará las variables con parámetros de Q relativamente más altos, llevándolos antes a la referencia (lo mismo ocurre con los parámetros de R). De este modo, esta técnica permite al diseñador desarrollar un controlador basándose en el sentido físico de los parámetros de Q y R (cuanto más alto sea el parámetro de Q correspondiente a una variable de estado, antes tenderá a la referencia dicha variable).

El proceso habitual de diseño, es un proceso iterativo llevado a cabo mediante la simulación del sistema bajo los efectos del controlador. Se alteran los valores de Q y R hasta conseguir la respuesta deseada del sistema, para luego, mediante diferentes técnicas poder calcular la matriz de realimentación K que corresponda a esa dinámica.

Así pues, se ha procedido a diseñar el controlador para el sistema que nos atañe. Para ello, se ha diseñado un programa con el que simular la respuesta del sistema con el regulador aplicado. Dicho programa permite cambiar los valores de Q y R y analizar la respuesta del sistema en tiempo real, pudiendo además calcular automáticamente la matriz K que corresponde a cada caso.

Para empezar con el diseño, se les ha dado valores a los parámetros de Q y R de manera que todas las variables de estado y la señal de control tuvieran el mismo aporte de esfuerzo en la ecuación (5.15), y en conclusión, la misma "importancia". Una buena manera de hacer esto es analizar el rango en el que se puede mover cada una de las variables de estado, así como la señal de control y después, asignarle a cada parámetro de Q y R el siguiente valor:

$$q_i = \frac{1}{\text{rango de } x_i^2} \quad r_i = \frac{1}{\text{rango de } u_i^2}$$

De este modo, se consigue que el aporte de esfuerzo de cada variable en la ecuación (5.15) sea proporcional, y oscile entre 0 y 1. Así pues, se ha comenzado la simulación con las siguientes matrices:

$$Q = \begin{pmatrix} 625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad R = 0,01$$

Partiendo de este punto, se han cambiado los parámetros de Q y R buscando reducir las oscilaciones de la plataforma superior e intentando utilizar la totalidad del rango de voltaje disponible para generar la señal de control. De este modo, se les ha dado mayor importancia a los valores de q_2 y q_4 ya que son los parámetros que multiplican la posición y velocidad de la superficie superior. Así, se consigue que dichas variables de estado tiendan más rápido hacia sus referencias (ó 0) y en conclusión se reduzcan las oscilaciones. Cabe mencionar que los valores de q_1 y q_3 son lo suficientemente altos como para conseguir un buen control de posición. Por otro lado, la única referencia que se le aplica al sistema es la de la posición de la plataforma inferior, de modo que la matriz N es en realidad un escalar de valor $k_1 + k_2$, siendo estos los primeros dos elementos del vector K. El controlador final así como la dinámica que consigue se muestran en la figura 5.10.

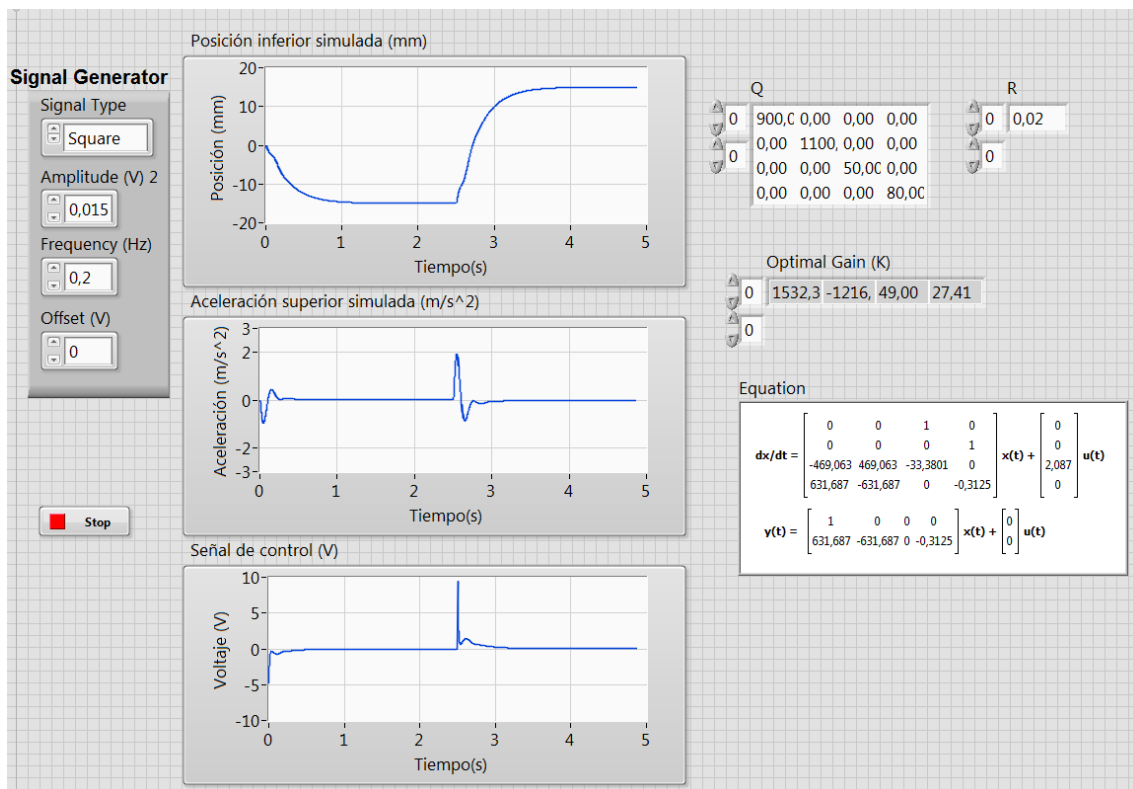


Figura 5.10: Dinámica generada por el regulador LQR.

Así pues, la matriz de realimentación que corresponde a este controlador es

$$\bar{K} = (1544,93 \quad -1228,70 \quad 49,22 \quad 29,14)$$

Y en conclusión, los polos en lazo cerrado del sistema se encuentran en

$$s_1 = -3,75 \quad s_2 = -106,07 \quad s_{3,4} = -13,30 \pm 29,49j$$

5.2.3 Diseño y simulación del observador de estados

Una vez diseñado el controlador, es fácil darse cuenta de que para llevar a cabo su implementación, es necesario conocer, en todo momento, los valores de las variables de estado del sistema, ya que son las que se realimentan para efectuar el control. Esto constituye un problema ya que en el caso de la estructura con la que se está trabajando, los sensores de la misma solo proporcionan información sobre una de las variables (posición de la plataforma inferior). Cabe mencionar, que también se dispone de la medición de la aceleración de la plataforma superior, que es la derivada de otra de las variables del sistema.

Debido a que las mediciones que proporcionan los sensores son relativamente ruidosas, en especial la del acelerómetro, se ha determinado inviable la obtención de las variables de estado mediante la derivación/integración de dichas mediciones. Así pues, teniendo en cuenta que el sistema es observable (ecuación 5.10), se ha optado por diseñar un observador de estados de orden completo para conseguir las variables de las que no se dispone.

El observador de estados es un sistema de control retroalimentado capaz de estimar el valor de las variables de estado del sistema que está observando. Para ello, se le proporciona el modelo matemático del sistema, y las entradas y salidas del mismo. De este modo, mediante la entrada real del sistema y el modelo matemático, el observador es capaz de obtener una estimación de la salida real del sistema, así como de sus variables de estado. Después, comparando la salida estimada del sistema con la salida real, y a partir de ese error, es capaz de corregir los valores de las variables de estado estimadas para que converjan hacia los valores reales.

De este modo, el sistema queda definido por el siguiente diagrama de bloques.

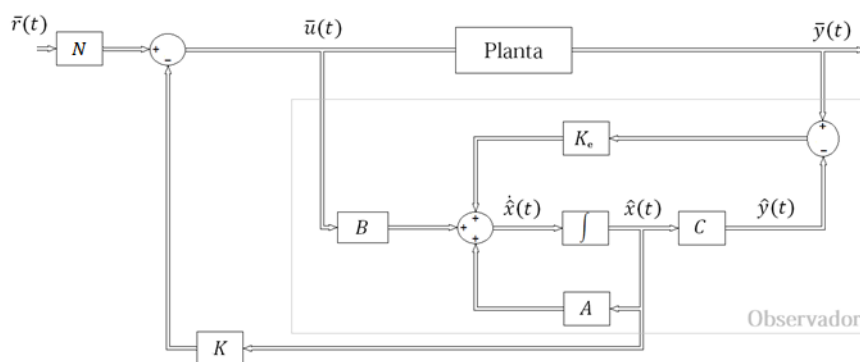


Figura 5.11: Diagrama de bloques del controlador con el observador aplicado a un sistema.

El proceso de diseño del observador se basa en elegir una matriz de realimentación K_e adecuada para conseguir que la dinámica del vector de error sea más rápida que la del sistema en sí. De este modo, el observador será capaz de hacer que el error en la estimación de las variables de estado tienda a cero mucho más rápido que la velocidad a la que varían las variables en sí.

Es posible demostrar que los polos en lazo cerrado de un sistema controlado por un regulador realimentado mediante variables de estado observadas, son la suma de los polos que introduce el regulador, más los que introduce el observador [17]. Así pues, antes de nada es necesario conocer cuáles son los polos que introduce el observador. De este modo, se podrá elegir una matriz de realimentación K_e mediante la cual situar dichos polos más dentro en el semiplano complejo izquierdo que los polos del sistema.

Definiendo la dinámica de un sistema estándar como:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \end{cases} \quad (5.16)$$

Es posible definir un observador de estados genérico como [18]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\bar{u}(t) + K_e[\bar{y}(t) - C\hat{x}(t)] \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.17)$$

Siendo $K_e[\bar{y}(t) - C\hat{x}(t)]$ un término de corrección que contiene la diferencia entre la salida real y aproximada del sistema.

Del mismo modo, es posible obtener la dinámica del error en la estimación del vector de estados, restando la dinámica del vector de estados estimado (5.17) a la dinámica del vector de estados real (5.16) y teniendo en cuenta que $\bar{y}(t) = C\bar{x}(t)$.

$$\dot{\bar{x}}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = A[\bar{x}(t) - \hat{x}(t)] + K_e C[\bar{x}(t) - \hat{x}(t)] \quad (5.18)$$

Si definimos el error como $\bar{e}_x(t) = \bar{x}(t) - \hat{x}(t)$ se obtiene la siguiente dinámica:

$$\dot{\bar{e}}_x(t) = (A - K_e C)\bar{e}_x(t) \quad (5.19)$$

De esta última ecuación se deduce que la dinámica del vector de error viene determinada por los valores propios de la matriz $A - K_e C$, o lo que es lo mismo, que la posición de los polos que introduce el observador viene determinada por dichos auto valores.

El siguiente paso, es el de determinar los valores de K_e tal que la matriz $A - K_e C$ tenga los valores propios necesarios para generar una dinámica apropiada para el vector de error. Para ello, se resolverá el siguiente sistema dual, que se corresponde con un problema de ubicación de polos.

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}(t) = A^*\bar{z}(t) + C^*\bar{v}(t) \\ \bar{n}(t) = B^*\bar{z}(t) \end{cases} \quad (5.20)$$

Donde la señal de control es generada por una realimentación de estados:

$$\bar{v}(t) = -K_0\bar{z}(t) + \bar{r}'(t) \quad (5.21)$$

Se elegirá una matriz K_0 para este problema dual, de manera que los polos en lazo cerrado de este sistema coincidan con los deseados para el observador. De este modo, se sabe que los valores propios de la matriz $A^* - C^*K_0$ tienen que ser iguales a los polos deseados para el observador.

Teniendo en cuenta la posición de los polos conseguidos en el diseño del LQR (capítulo 5.2.2), se determina que una buena posición para los polos del observador es la siguiente:

$$s_1 = -50 \quad s_2 = -150 \quad s_{3,4} = -100 \pm 100j$$

Utilizando la función "Place" [19] del programa *Matlab* [20], se calcula automáticamente la matriz K_0 necesaria para que se cumpla dicha colocación de polos.

$$K_0 = \begin{pmatrix} 229,42 & 189,14 & 1964,8 & 14572 \\ -0,1207 & -0,3230 & -0,3535 & -29,1641 \end{pmatrix}$$

Considerando que los valores característicos de $A^* - C^*K_0$ y $A - K_0^*C$ son iguales, se tiene que:

$$|sI - (A^* - C^*K_0)| = |sI - (A - K_0^*C)| \quad (5.22)$$

Si comparamos el polinomio característico $|sI - (A - K_0^*C)|$ con el de el sistema observador, $|sI - (A - K_e C)|$, es fácil identificar que $K_0^* = K_e$. De este modo,

$$K_e = \begin{pmatrix} 229,42 & -0,1207 \\ 189,14 & -0,3230 \\ 1964,8 & -0,3535 \\ 14572 & -29,1641 \end{pmatrix}$$

Para cerciorar el correcto diseño del observador, se ha simulado mediante *LabView* el sistema completo (LQR realimentado con variables de estado observadas, figura 5.11), y se ha analizado la velocidad a la que las variables de estado estimadas convergen hacia el valor real.

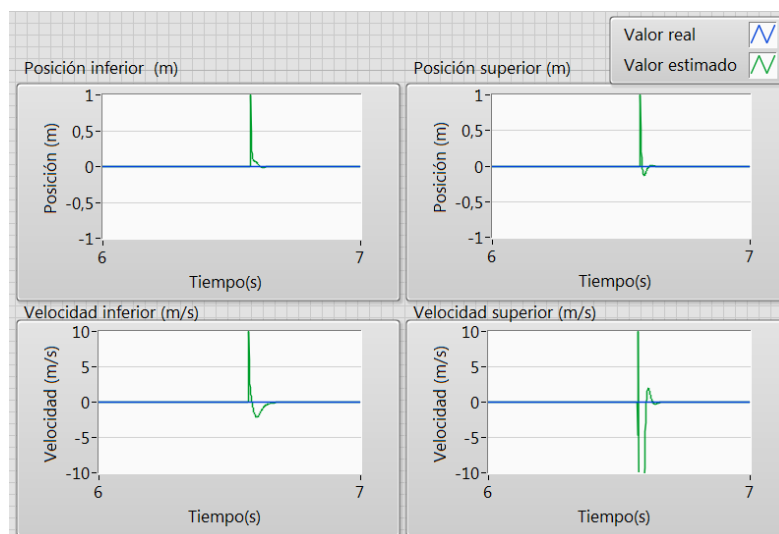


Figura 5.11: Convergencia de las variables de estado estimadas hacia sus valores reales.

Como se puede observar, la dinámica de dichos errores es mucho más rápida que la del sistema en sí, y en conclusión, se da por bueno el diseño del observador y queda listo para su implementación.

5.2.4 Implementación del regulador realimentado mediante variables observadas

Así pues, mediante *LabView*, se ha implementado sobre el sistema real el controlador anteriormente diseñado, consiguiendo el resultado expuesto a en la figura 5.12.

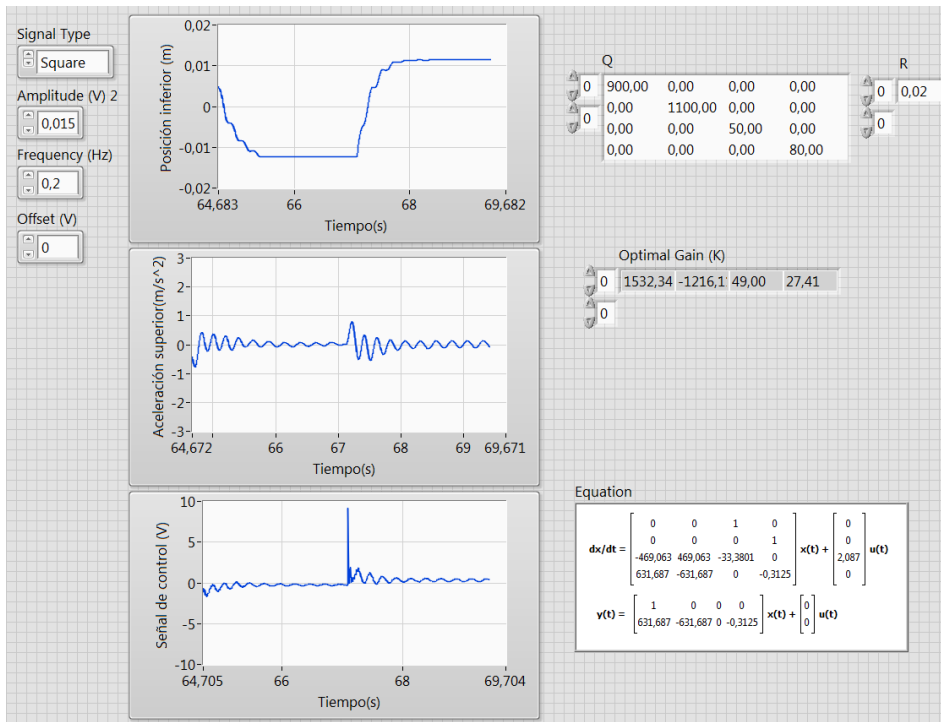


Figura 5.12: Dinámica del sistema con el controlador LQR realimentado mediante variables de estado observadas.

Como se puede observar en la figura 5.12, el controlador en la práctica no consigue generar la misma dinámica que en la simulación. A pesar de que el control de posición de la superficie inferior sí que cumple relativamente bien con las características temporales deseadas, se puede observar como el error de régimen estacionario frente a una referencia cuadrada es de aproximadamente un 20%. Además, en cuanto a la aceleración de la superficie superior se refiere, es fácil comprobar que no se consigue la disminución de las oscilaciones que la simulación preveía. Las características temporales que el controlador consigue son:

$$M_p(\%) = 0,2\% \quad t_s = 0,4s \quad e_{ss} = 22\%$$

Las diferencias entre la simulación, y el resultado obtenido en la implementación, pueden deberse a varios motivos.

Cabe recordar que la zona muerta de este sistema en particular, es relativamente alta (0,8V-0,9V). Como esta característica del sistema no está reflejada en el modelo matemático sobre el que se han diseñado los controladores, las señales de control generadas no tienen en cuenta

dicha zona muerta. Esto puede dar paso a que, por un lado, la señal de control sea menor a lo que en realidad hace falta para mover la estructura de “a” a “b”, generando así un error en régimen estacionario. Además, el controlador no es capaz de corregir dicho error ya que al no contar con un término integrador, la señal de control generada por dicho error estacionario es inferior a la zona muerta del motor. Esto también puede ser un motivo para que el controlador no pueda corregir las oscilaciones cuando estas son pequeñas. En el caso de este controlador, las oscilaciones de la superficie superior generan una señal de control que intenta que dichas oscilaciones tiendan a 0. Al igual que en el caso anterior, cuando estas oscilaciones no son muy grandes, la señal de control generada es pequeña y no consigue superar la zona muerta del motor.

Otra posible razón por la que la realidad difiere tanto de la simulación, es la diferencia entre el modelo real y el modelo matemático. Cabe recordar que dicho modelo matemático se calculó a partir de una aproximación masa-muelle que no describe por completo el carácter oscilatorio del sistema. Esto toma mayor importancia en este caso, ya que al no disponer de las variables de estado del sistema, han tenido que ser estimadas mediante un observador de estados que utiliza dicho modelo matemático.

Por último, también se contempla la posibilidad de que el procesador del ordenador mediante el que se ha implementado el controlador no sea lo suficientemente rápido. Conviene no olvidarse de que el “control and simulation loop” utilizado a la hora de crear el controlador, nos permite diseñar como si de un controlador continuo se tratara, pero en realidad no lo es. Esto significa que a la hora de ejecutar el controlador, el ordenador tiene que calcular un aproximación discreta del controlador, implementarla etc. Este incremento en el requerimiento de cálculo, puede llevar a que el procesador se retrase a la hora de calcular la señal de control, generandola a destiempo.

6 Conclusiones

Como colofón, se procederá a recopilar las conclusiones obtenidas en cada apartado, para más tarde, efectuar un análisis más global.

El primer paso llevado a cabo, ha sido el del modelado matemático. Se ha trabajado con dos aproximaciones diferentes del mismo sistema, siendo las dos igual de útiles. Por un lado, la aproximación más simple en la que se toma la estructura flexible como una carga rígida, ha permitido facilitar el proceso de diseño de los controladores, ya que la función de transferencia obtenida mediante esta aproximación, es de orden 2. Además, a pesar de no caracterizar el carácter oscilatorio del sistema, sí describe la dinámica general con relativo acierto. La aproximación masa-muelle, por su parte, añade información sobre el carácter oscilatorio del sistema, y ha sido útil a la hora de diseñar controladores para disminuir dichas oscilaciones.

Por otro lado, también se han analizado experimentalmente diferentes dinámicas no lineales del sistema como la zona muerta o la saturación del motor. De este modo, a pesar de no poder caracterizarlas matemáticamente, ha sido posible identificar los efectos de dichas dinámicas a

la hora de implementar los controladores. Cabe mencionar, que la zona muerta ha sido la más conflictiva de todas ellas, por razones que se mencionarán más adelante.

Una vez obtenidos los modelos matemáticos, se ha comenzado por desarrollar controladores para conseguir un buen control de posición, sin reparar en las oscilaciones del sistema.

El primer controlador desarrollado (control PV), ofrece buenas características temporales, ya que no tiene apenas rebose y su tiempo de establecimiento es bajo (ver tabla 6.1). El principal problema está en que como la zona muerta no está caracterizada, la señal de control inicial generada por este controlador es más pequeña de la necesaria. Esto conlleva que la estructura se mueva menos de lo debido y que en conclusión se dé un error de régimen estacionario. Además, como la señal de control generada por dicho error estacionario es inferior a la zona muerta del motor, el controlador no es capaz de corregir dicho error. Cabe mencionar que este efecto empeora cuanto más pequeña sea la distancia que se mueve la estructura.

Para intentar solucionar los inconvenientes que produce la zona muerta, se ha añadido un integrador al controlador anterior. De este modo, a pesar de que la señal de control inicial también sea más pequeña que la necesaria para mover la estructura de “a” a “b”, esta vez, la señal de control posterior generada por el error de posición irá incrementándose gracias al integrador, consiguiendo así acabar sobrepasando la zona muerta. Cabe mencionar, que el proceso de diseño de este controlador no ha sido muy ortodoxo, ya que a riesgo de modificar la dinámica ofrecida por el control PV, se ha priorizado que el tiempo que tarda el controlador en corregir el error de régimen estacionario sea pequeño. En conclusión, se ha conseguido corregir el error de régimen estacionario en un tiempo relativamente pequeño, a cambio de adquirir una dinámica con mayor rebose (ver tabla 6.1)

En la siguiente fase del proyecto, se ha intentado mejorar los anteriores controladores, intentando reducir las oscilaciones de la estructura al tiempo que se ejerce un control de posición.

La primera técnica utilizada ha sido la implementación de un filtro rechaza banda centrado en la frecuencia de oscilación de la estructura, para después, volver a aplicarle el controlador PV+I. Una vez ajustados los parámetros del controlador para reducir el rebose de este nuevo sistema, se ha conseguido un control de posición de características muy parecidas a las conseguidas con el controlador PV+I, que además, reduce en gran medida las oscilaciones de la estructura.

Por último, se ha desarrollado un controlador LQR basado en realimentación de estados. Para ello, ha sido necesario enunciar la representación interna del sistema y diseñar un observador de estados. De las simulaciones de dicho controlador se ha comprobado que este tipo de técnica ofrece un control mucho más potente que los anteriores, ya que brinda la posibilidad de priorizar la variable del sistema que más se quiere controlar. Del mismo modo, se ha reconocido que se trata de un controlador más complejo que los anteriores, ya que requiere que los valores de las variables de estado del sistema se conozcan en todo momento. Debido a la falta de sensores en el sistema con el que se ha trabajado, ha sido necesario el diseño de un observador de estados que estimase dichos valores. Este hecho junto con el inconveniente de

la zona muerta y otros problemas, ha hecho que la implementación del controlador fuera más difícil de lo previsto, no consiguiendo los resultados deseados.

A continuación, en la tabla 6.1, se recogen los resultados obtenidos de cada controlador.

Controlador	t_s (s)	M_p (%)	e_{ss} (%)	Mejora de oscilaciones
PV	0,7	0,3	15	nula
PV+I	2	11	0	nula
PV+I+notch	2,5	12	0	notable
LQR	0,4	0,2	22	ligera

Tabla 6.1: Características temporales de las dinámicas conseguidas con cada controlador.

En conclusión, se puede considerar que el controlador más completo es el conseguido mediante el filtro notch, ya que consigue un error de estado estacionario nulo, manteniendo las características temporales de la dinámica en valores aceptables y reduciendo al mismo tiempo las oscilaciones.

Cabe mencionar, que el regulador LQR es un controlador mucho más robusto que ofrece más flexibilidad en el proceso de diseño. Aun así, al ser una técnica más compleja, su implementación requiere de mayor preparación y estudio.

Una posible mejora para el regulador LQR diseñado en el apartado 5.2.2, sería la implementación de un integrador. De este modo, podría ser posible eliminar el error en régimen estacionario. Otra posibilidad sería la de añadir el filtro notch diseñado en el apartado 5.1.1 en la cadena directa del sistema. De este modo podrían reducirse aún más las oscilaciones de la plataforma superior.

7. Bibliografía

- [1] *Shake table I reference manual*, Quanser consulting inc., Markham, ON, pp. 1-17.
- [2] *AMD-1 User manual*, Quanser consulting inc., Markham, ON, pp. 4-10.
- [3] *Q2-USB Data Acquisition Board User manual*, Quanser consulting inc., Markham, ON, 2012.
- [4] *Universal Power Module. 1503, 1506, 2405, 2405-PWM User manual*, Quanser consulting inc., Markham, ON.
- [5] National Instrument, co., *LabView*, Versión 2014, Austin, TX (2017).
- [6] F. Monasterio-Huelín. (2016, febrero, 6). Motor DC, etapa de potencia y PWM. Disponible: http://www.robolabo.etsit.upm.es/asignaturas/seco/apuntes/motor_dc.pdf
- [7] H. Olsson et al. (1997), *Friction Models and Friction Compensation* [online]. Disponible FTP: cats-fs.rpi.edu Directorio: ~wenj/ECSE446S06 Archivo: astrom_friction.pdf

-
- [8] W. G. Mitchener. *Curve fitting How-to*. [online]. Disponible FTP:mitchenerg.people.cofc.edu Directorio: MathematicaHowTo Archivo:CurveFittingHowTo.pdf
- [9] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Versión 11.1, Champaign, IL (2017).
- [10] M. Klingspor. (2015, noviembre, 19). Hilbert transform: Mathematical theory and applications to signal processing. Disponible: <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:872439/FULLTEXT02.pdf>
- [11] J. M. Aguirregabiria, "mekanika analitikoa" en *mekanika klasikoa, 1ª ed., Leioa, Esp.: servicio editorial de la universidad del País Vasco, 2004, ch. 6, pp. 191-241*.
- [12] Farid Golnaraghi y Benjamin C. Kuo, "design of control syst." en *Automat. Control syst., 9ª ed., Hoboken, NJ: J. Wiley & Sons, Inc., 2010, ch. 9, sec. 8, pp. 580-588*.
- [13] K. Ogata, "Math. Modeling of Control syst." En *Modern Control Eng.*, 5ª ed., New Jersey: Pearson Education, Inc., 2010, ch. 2, sec. 4, pp. 29-35.
- [14] K. Ogata, "Control Syst. Anal. in State Space" En *Modern Control Eng.*, 5ª ed., New Jersey: Pearson Education, Inc., 2010, ch. 9, sec. 7, pp. 682-688.
- [15] K. Ogata, "Control Syst. Anal. in State Space" En *Modern Control Eng.*, 5ª ed., New Jersey: Pearson Education, Inc., 2010, ch. 9, sec. 6, pp. 675-682.
- [16] K. Ogata, "Control Syst. Design in State Space" En *Modern Control Eng.*, 5ª ed., New Jersey: Pearson Education, Inc., 2010, ch. 10, sec. 8, pp. 793-806.
- [17] K. Ogata, "Control Syst. Design in State Space" En *Modern Control Eng.*, 5ª ed., New Jersey: Pearson Education, Inc., 2010, ch. 10, sec. 6, pp. 778-786.
- [18] P.R. Oliva, "Observador con convergencia en el tiempo fijo para sistemas lineales multivariados", Tesis M.S., Dept. electron., UNAM, México D.F., 2016.
- [19] K. Ogata, "Control Syst. Design in State Space" En *Modern Control Eng.*, 5ª ed., New Jersey: Pearson Education, Inc., 2010, ch. 10, sec. 3, pp. 735-739.
- [20] The MathWorks, inc., *MATLAB*, Versión 9.2, Natick, MA (2017).