



Gradu Amaierako Lana
Fisika Gradua

Zonbien Epidemia Hego Euskal Herrian

Epidemiologiako eredu matematikoen aplikazioa

Egilea:
Andoni Olarra de la Cruz
Zuzendariak:
Iñigo Etxebarria Alzaga eta Hegoi Manzano Moro

© 2015 "izen abizenak" ezarriz babez zaitezke edo
Lizentzia CC batekin babestu:
<http://es.creativecommons.org/blog/licencias/>

Gaien Aurkibidea

| | |
|---|-----------|
| Sarrera | 1 |
| 1 Oinarri Teorikoa | 3 |
| 1.1 Kontzeptu orokorrak | 3 |
| 1.2 SZR eredia | 5 |
| 1.3 Metodo estokastikoa | 6 |
| 2 Oinarri praktikoa | 8 |
| 2.1 Programa nagusiaren xehetasunak | 8 |
| 2.2 Eremu geografikoaren diskretizazioa eta hasierako populazio- dentsitatearen matrizea | 10 |
| 2.3 Denboraren implementazioa | 12 |
| 2.4 Ereduaren parametroen kalkulua | 13 |
| 3 Emaidzen interpretazioa | 15 |
| 3.1 Bilbotik hasitako epidemia | 16 |
| 3.2 Iruñatik hasitako epidemia | 22 |
| 3.3 Epidemia-eboluzioaren simetriaren azterketa | 27 |
| 4 Ondorioak | 30 |
| Bibliografia | 33 |

Sarrera

Gaur egun matematikak ezagutza-arlo desberdinetan erabiltzen dira. Gauzak horrela, matematika aplikatua erabiltzeak zientziaren adar desberdinen arteko elkarlana eragin du. Horren adibide da epidemiologia. Epidemiologia eredueta sistema biologikoen dinamikak eta eredu matematikoak konbinatzen baitira, gaixotasunen agerraldiak aurreratzeko eta kontrolatzeko helburuarekin.

Epidemiologian epidemia baten eboluzioa aztertzen da denboran zehar, epidemiaren jokaera aurreratzeko. Era honetan, gaixotasunari aurrea hartzeko egitasmoak garatzeko aukera dago, besteak beste, txertatzea. Honetaz gain, epidemiologiak zenbat pertsona salbatu eta hilko diren aurreikusteko edota momentu jakin batean infektatuta dagoen eta ez dagoen jende kopurua zehazteko xedea du. Epidemiologia eredu azpimagarri-
netariko bat, Ronald Rossek garatutakoa da¹ [2]. Lan honetan, zientzialari eskoziarrak malaria moskitoekin erlazionatu zituen, eta moskitoen desagertzeak gaixotasunarena ere suposatuko lukeela adierazi zuen. Honela malaria kontrolatu ahal izan zen. Honengatik 1902an Medikuntzako Nobel saria eman zioten.

Epidemiak gizakien beldur handienetakoak izan dira, jende asko hiltzen zelako horien ondorioz. Izurriaren edo koleraren agerraldiak aldaketa demografiko handiak ekarri zituen, hildakoen kopurua horren handia izateagatik [2]. Gaur egun, epidemiek garrantzi handia izaten jarraitzen dute. Herrialde garatuengatik, bi arrazoiengatik gehienbat: alde batetik, gaixotasun berrien agerraldiengatik, 2009an A gripearekin gertatutakoa izan daiteke horren adibide, eta bestetik, desagertu gabeko edo kontrolatu gabeko gaixotasunak egoteagatik, esaterako HIESA bezalako gaixotasunengatik. Herrialde azpigaratuengatik, ordea, baliabiderik ez izateagatik, herrialde garatuengatik desagerturik edo kontrolaturik dauden gaixotasunek eraginda pertsona askok bizia galtzen dute; malaria, kolera edo tifusa azpimarra daitezke. Mendebaldeko herrialdeek, herrialde hauekiko duten ardura historikoa nahikoa beharko luke izan ikerketa epidemiologikoekin buru belarri ekiteko.

Lan honetan zombien agerraldi hipotetiko bat aztertuko da. Epidemiologian adi-

¹Aipatu behar da, Laveran-ek 1877an intsektuak malariaren eramalaileak izan zitezkeen aldeko frogak aurkeztu zituela. R. Rossek frogak horiek abiapuntu bezala hartu zituen bere lanerako. Esandakoa [3] erreferentzian ikus daiteke.

tuak direnak, gizakiei eragiten dieten gaixotasun tradizioaletan zentratu izan dira, baina azkenaldian, geroz eta gehiago dira, zombien kaso hipotetikoak erabiltzen ari direnak. Lehenengotarikoa [5] artikulua da. Ordutik, beste lan interesgarri asko argitaratu dira². Zombien azterketak, eredu epidemiologikoak garatzeko bereziki aproposak dira. Adibidez, agertu gabe dauden gaixotasunentzako ereduak gara daitezke zombien ereduekin. Honela, gerora ager daitezkeen gaixotasunetarako ereduak garaturik egon daitezke baldin eta zombiei esleitutako definizioak eta gaixotasunak bateragarriak bada. Esaterako, zombiak hil ostean biziberri daitezkeela suposatzen bada, garatutako ereduak ez litzateke baliogarria izango sendabiderik ez duten gaixotasunetarako, beraz, gaixotasunari hobeto egokitzen zaion eredu bat bilatu beharko litzateke. Halaber, zombien epidemia aukera aproposa izan daiteke epidemiologia modernoko metodologia aurkezteko, zombien ikerketa batek duen deigarritasuna aprobetsatuta.

Esan behara dago, erreztasun kontuengatik, eremu geografikoa fokalizatua egotea erabaki dela. Horregatik, Hego Euskal Herrira murriztuko da ikertuko den lurraldea. Hego Euskal Herria aukeratu izanak ez du inongo arrazoirik, ausazko erabakia izan da. Aurrera egin baino lehenago argitu nahi da garatutako ereduak aukeratu ez den beste herrialdeetarako ere baliogarria dela. Aztertu nahi den eremu geografikoa diskretizatu eta bertako dentsitate populazioaren inguruko informazioa eskuratu beharko litzateke.

Lan honek bi erreferentzia nagusi izan ditu. Alde batetik, informazio teorikoa [2] lanekoa erabili da gehienbat. Bertan eredu epidemiologiko ezberdinenak aztertzen dira eta gaixotasun tradizioaletara aplikatu. Beste aldetik, atal praktikoa [1] artikuluan oinarritu da. Bigarren lan honetan zombien epidemia bat simulatzen da Estatu Batuetan, SZR eredu epidemiologikoaz eta metodo estokastikoaz baliatuz.

Helburu bezala epidemiologia eredu bat inplementatzea markatuko da. Hori lortutakoan, Hego Euskal Herriko zombi epidemia bat simulatu, epidemia arriskutsu bilaka daitezkeen momentua identifikatzen saiatuko da eta epidemiaren simetriaz eztabaidatuko da.

²Bibliografian aurki daitezke zenbait artikulua interesgarri. Esaterako bibliografiako [4] erreferentzian azaltzen dena azpimarra daiteke. Artikulu horrek gizarteko iritzi difusioak simulatzeko eredu bat garatzeko helburua du. Horretarako, zombi eredu batez baliatzen dira.

Kapitulua 1

Oinarri Teorikoa

Atal honetan programa inplementatzeko beharrezkoa izan den teoria garatuko da, ezinbestekoa delako programa ulertaraztea oinarri teoriko bat azaldu ez bada.

Lehenengo zati honetan kontzeptu orokorrak, SZR eredia eta metodo estokastikoa azalduko dira. Garrantzitsuak diren zenbait ezaugarri ere, laneko zati honetan aurkituko dira. Besteak beste, zonbi epidemia honen transmisio moduz eztabaidatuko da. Azkenik azaldu nahi da, SZR eredia eta metodo estokastikoa erabili izana, hauek azaltzearekin batera justifikatuko dela.

1.1 Kontzeptu orokorrak

Birusa transmititzeko modua, gaixotasunaren araberakoa izango da. Hiru modu desberdin bereizten dira. Lehenengoa espezie berdinekoak diren norbanakoen arteko kontaktu zuzenaren bidez. HIESA era honetan transmititzen da. Bigarrena, ingurumenaren bidez, esaterako kolera kutsatzen den bezala. Azkenengoa, hasiera batean agenteen bidez infektatzen da populazioaren parte bat, eta gero espezie berdinekoen arteko kutsadura ematen da. Adibidez, Moskito talde batek populazioaren zati bati malaria transmititzen dio, eta gero pertsonen artean hedatzen da gaixotasuna. Adibide honetan Moskitoa da agentea [2]. Eredua partikular honetan, birusa lehenengo moduan transmititzen dela suposatuko da.

Epidemia batean, norbanako bakoitzak momentu jakin batean duen egoera desberdinak bereizten dira. Aztergai den gaixotasunaren ezaugarrien araberakoa izango da, garatutako erudian erabili beharreko egoera motak. Egoera orokorrenak hurrengoak

dira¹:

- *S*: Infektatu gabeko populazioa. Infektaturik ez dagoen arren, birusa erantsi dakioko.
- *E*: Infektaturik dagoen baina kutsatu ezin duen populazioa.
- *I*: Infektaturik dagoen eta kutsa dezakeen populazioa. Bere kabuz osatzen da.
- *R*: Birusa jasan dezakeen populazioa.
- *M*: Inmunea den populazioa.

Oraintsu azaldutako egoera bakoitza molda daiteke ikertzen ari den gaixotasunari hobe egokitzeko. Esan bezala, zonbi eta gizakiei esleitutako ezaugarriak beharrezkoak dira, erabili beharreko egoerak zehazteko. Gauzak horrela, ezaugarriok hurrengoak dira:

- Gizakia hiltzen denean zonbi bilakatuko da, nahiz eta heriotzaren arrazoiak zonbiekin zer ikusirik ez izan.
- Zonbiak desagertarazteko modu bakarra, zonbiak hil eginez izango da. Zonbi bat hilik dagoenean, ez du berriro zonbi edo gizaki bilakatzeko erarik izango. Hau da, hildako populazioak ez du beste egoera batera aldatzeko aukerarik izango.
- Gizakia zonbi bilakatzen den momentutik ez du aukerarik izango berriro gizaki bilakatzeko.
- Gizakien artean ez da existituko zonbien birusa jasan dezakeen populaziorik.
- Zonbi guztiek kutsatzeko ahalmena izango dute.
- Zonbiek mugitzeko gaitasuna izango dute.
- Gizakiek ez dute mugitzeko gaitasunik izango.

Ezaugarrietatik ikusten da hiru populazio bereizten direla; gizakiak, zonbiak eta hilik dauden zonbiak. Gizakiek ez dute mugitzeko gaitasunik izango, lan honen helburuetariko bat epidemia arriskutsu bilaka daitekeen momentua identifikatzea da eta. Honetarako, epidemiaren azterketa gizakien lekualdatzeak normaltasun egoera batean kokatu nahi dira. Hau da, eremu geografikoa eskualdeka banatuko da², eskualde bakoitzak 30 km² dituelarik. Egunetik egunera egiten diren desplazamenduak tarte honetan

¹Egoera orokor hauek [2] lanean definitzen dira. Badira beste batzuk definitzen dituztenak. Lan teorikoa arestian aipatutako artikuluan oinarritu denez, egoera hauek errespetatzea erabaki da.

²Eremu geografikoaren banaketa metodo estokastikoa azaltzerakoan argituko bada ere, ezinbestekoa da orain aipatzea gizakien mugikortasun ezari buruz esan beharrekoa esateko.

mantentzen direla suposatuko da, eta luzeagoak direnak ez dira kontuan hartuko. Hala eta guztiz ere, lekualdatze gehienak tarte horretan gertatzen dira, beraz, kontuan hartzen ez direnak gutxiengo bat izanik, ez dute eragin estadistikorik izango.

Laugarren eta bosgarren puntuetatik zuzenean ondorioztatzen da E eta M egoerak baztertu behar direla. Gizaki kantitatea S egoerak ordezkatzeko du. Birusa jasan dezakeen populazio bakarra, zonbi hildakoak izango dira. Hau da, populazio hori ez da beste edozein egoeratarik aldatuko. Beraz, hil den zonbien kopurua R ikurrarekin adieraziko da. Zonbi kantitatea adierazteko ikur bakarra geratzen da, I egoera hain zuzen ere. Kontua da, zonbiek bere kabuz osatzeko gaitasunik ez dutenez, hirugarren puntuan argitzen den bezala, egoera moldatu beharra dagoela. Egoera berria I letrarekin barik Z letrarekin adieraziko da, eta infektaturik dagoen, kutsa dezakeen baina bere kabuz senda ezin den populazio kantitatea adieraziko du. Beraz, lan honetan erabiliko den eredu epidemiologikoa SZR izango da.

1.2 SZR eredua

Aipatu bezala SZR ereduan hiru egoera posible daude; S , Z eta R . S egoerak infektaturik ez dagoen gizaki kopurua ordezkatzeko du, Z egoerak zonbi kopurua eta azkenik, R egoerak hil den zonbien kopurua. Beraz, bi trantsizio posible defini daitezke; gizakia zonbi bihurtzea eta gizakiak zonbia hiltzea. Trantsiziook gobernatzen dituzten bi parametroak β eta κ ikurrekin adierazten dira, non κ gizaki batek zonbi bat hiltzeko ratioa den eta β zonbi batek gizakia zonbi bilakatzeko ratioa den. Lan honetan ez da gizakia zonbi bilakatzeko edota gizakiak zonbia hiltzeko arrazoen inguruan eztabaidatuko, nahiz eta lan hau egiterako orduan erabilitako artikulu askotan arrazoen inguruan eztabaidatzen den. Helburuek ez dute horren beharrik, hortaz, β eta κ parametroak kalkulatzeko dira (aurrerago azalduko da zelan) eta trantsizioak, edozein modutan gertatzen direla, posibleak direla suposatuko da. Zonbien fluxuarekin lotutako hirugarren parametro bat definitzen da, eta μ ikurrarekin adierazten da.



Irudia 1.1: Ereduaren dinamika laburbiltzen duen diagrama.

Bibliografian ikus daitekeen moduan, eta emaitzetan ere frogatuko da, zonbi epidemia bat denbora eskala laburrean gertatzen da, horrexegatik ez dira kontuan hartuko jaiotze/hiltze tasak, ezta imigrazio/emigrazio tasak ere. Hau da, zonbi epidemia hasten denetik, populazioa konstantetzat hartuko da.

Lan honetan, trantsizioekin gertatzen den bezala, ez da zonbien agerraldiaren arrazoiengatik inguruan eztabaidatuko. Agertzea gertatzen dela suposatuko da, beste barik. Zonbien mugikortasunak, SZR -ren dinamikak deskribatzen dituzten ekuazio diferentzial klasikoak zertxobait aldatzen ditu. Gauzak horrela ekuazioak

$$\dot{S}_i = -\beta S_i Z_i \quad (1.1)$$

$$\dot{Z}_i = (\beta - \kappa) S_i Z_i \quad (1.2)$$

$$\dot{R}_i = \kappa S_i Z_i \quad (1.3)$$

mantentzen direlarik,

$$\dot{Z}_i = \mu \sum_j Z_j - \mu Z_i \quad (1.4)$$

ekuazio gehitzen da, non i eta j azpiindizeek eremu geografikoko eskualdeei egiten dieten erreferentzia.

Nabarmendu behar da, iterazio hauek egoera bakoitzaren dentsitatearen menpekoak direla. Honen arrazoia, transmiziorako moduan aurkitzen da, transmiziorako birusaren eta gizakien arteko kontaktu zuzena egon behar izatean, hain zuzen ere.

1.3 Metodo estokastikoa

Zonbien epidemia aztertzeke bi modu daude; alde batetik zonbi eta gizaki populazioak aldagai jarraitu bezala kontsideratzen, eta bestetik, populaziook aldagai diskretuak direla suposatzen. Hots, populazioa jarraitua dela esaten dugunean egoera bakoitzaren parte diren norbanakoak multzo bat bailiran tratatzen dira, kasu diskretuan ordea, norbanako bakar edo norbanakoen azpitalde bakoitza erabiltzen da azterketa egiteko. Lehenengo kasuan dinamika, ekuazio diferentzial bidez adierazten da. Bigarrean berriz, epidemiaren dinamika prozesu estokastikoen bidez aztertzen da. Populazioak jarraituak direla suposatzen denean, dinamika determinista baten azterketa egiten ari da, diskretuan ordea, ez-determinista. Lan honetan metodo estokastikoa erabiliko da, markatutako helburuak betetzeko egokiago delakoan. Horretarako aztergai den eremu geografikoa 38×50 dimentsioko matrize batean diskretizatuko da. Gauzak horrela, Hego Euskal Herria 1900 azpieskualdetan banatuko da, 30 km^2 -takoa bakoitza, eta azpieskualdez azpieskualde aztertu beharko da zonbi eta gizakien arteko elkarrekintza eta zonbien mugikortasuna.

Epidemia aztertzeke bi moduen arteko desberdintasun nagusia ausazko fluktuazioak kontsideratzean datza. Hau da, metodo deterministan fluktuaziook kontsideratzen ez diren bitartean, ez-deterministan kontuan hartzen dira. Honen ondorioak aurkezteko,

$\alpha = \frac{\kappa}{\beta}$ definitu behar da. $\alpha < 1$ denean, metodo deterministan, amaierako egoeran zonbiak baino ez dira geratuko. Beste aldetik, $\alpha > 1$ denean, gizakiak zonbiak baino eraginkorragoak izanik, amaierako egoeran gizakiak egotea espero daiteke. Hala eta guztiz ere, zonbi nahikoak badaude hasierako egoeran, amaierako egoeran zonbiak egoteko aukera dago³. Metodo estokastikoan ordea, $\alpha > 1$ edo $\alpha < 1$ izan, ez dago auresaterik amaierako populazioan zein egoerak dominatuko duen. Beste desberdintasun nabari bat hurrengoa da. Populazioak aldagai jarraitutzat hartzen direnean, zonbiek (gizakiek) amaierako egoeran dominatuz gero, gizaki (zonbi) guztiak hiltzen dira. Diskretutzat hartuz gero, berriz, gizakiek (zonbiek) epidemia kontrolatzen badute ere, zonbiak (gizakiak) izaten jarraitzeko posibilitatea dago. Honetaz gain, esan beharra dago, metodo estokastikoan momentu bakoitzeko populazio dentsitateen informazioa eskura daitekeela. Metodo deterministan, aldiz, hasierako eta amaierako dentsitateak baino ezin dira lortu. Gainera, eremu geografikoa diskretizatua dagoenez, dentsitateak ez dira Hego Euskal Herria multzo bakar bat bailitzan irakurriko. Horrela balitz, dentsitate bakarra egongo litzateke (eredu deterministan hau gertatzen da). Eredu honetan, berriz, 1900 dentsitate desberdin daude, tokian tokikoak. Azkenengo bi ezaugarriengatik, metodo estokastikoak aukera interesgarriak eskeintzen ditu epidemia aztertzerako orduan, aurrerago ikusiko den bezala.

Metodo estokastikoan ekuazio diferentzialekin lan egingo ez bada ere, zonbi eta gizakien arteko elkarrekintza eta zonbien mugikortasuna aztertzeko baliogarriak izango dira. Hauek esango baitute zein modutan gertatzen den bai zonbien fluxua, baita bi egoeren arteko elkarrekintza ere. Hau da, ez da ekuazio diferentzialik askatuko, baina azpieskualde bakoitzean aztertu beharreko elkarrekintza eta fluxua ekuazio diferentzialetatik irakurriko da.

Orain arte laneko oinarri teorikoa azaldu da. Programa garatzeko ezinbestekoak diren kontzeptu orokorrak, SZR eredia eta metodo estokastikoa ondo ulertu behar dira, hauek baitira lanaren zimenduak. Hurrengo ataletan programaren implementazioa zelan egin den ikusiko da eta emaitzei buruz ere hitz egingo da.

³[1] artikuloan frogatzen da.

Kapitulua 2

Oinarri praktikoa

Sarreran esan den moduan, atal praktikoak [1] artikulua izan du oinarri, baina artikulua izanik, luzeera murrizteko erreferentzia izan da. Hortaz, artikuluan azaldutako metodologian oinarrituta, zelan inplementatzea izan da lan honen erronkeetariko bat, bertan azaltzen ez baita. Beraz, atal honetan programaren inplementazioa zelan egin den azalduko da.

Hala ere, [1] artikuluan esaten diren kontu batzuekin desadostasunak sortu dira. Aurrerago azalduko dira zeintzuk izan diren desadostasun horiek.

Lanerako Fortran eta Mathematica programak erabili dira. Programa nagusia, Fortran lengoia idatzi da, eta Mathematica erabili da populazioen dentsitateak irudikatze eta Hego Euskal Herriko mapa batetik epidemia hasi aurretiko gizakien populazioa kalkulatzeko, programa honek erreztasun handiak eskeintzen baititu bi kalkulo hauetarako. Atal honetan programa nagusiaren xehetasunak, eremu geografikoaren diskretizazioa, denboraren inplementazioa eta ereduaren paremetroen kalkulua zelan egin den azalduko da.

2.1 Programa nagusiaren xehetasunak

Bereiztu diren hiru elkarrekintzen probabilitateak eremu geografikoko 1900 eskualdeetan kalkulatu behar dira. Gauzak horrela eskualde bakoitzean hiru probabilitate desberdindu dira, beraz, guztira 5700 probabilitate daude. Gizaki batek zonbi bat hiltzeko duen probabilitatea kalkulatzeko, eskualde horretan dauden zonbi eta gizaki kopuruak biderkatu behar dira β parametroarekin batera. Antzekoa da zonbi batek gizakia hiltzeko duen probabilitatea kalkulatzeko, aurreko eragiketako populazio berdina biderkatuko dira κ parametroarekin batera. Azkenik, zonbien fluxuarekin lotutako parametroa lortzeko, eskualde bakoitzeko zonbi populazioa μ parametroarekin biderka-

tuko da. Aurrerago hitz egingo da denboraren implementazioari buruz, hala ere, denboraren implementazioarekin zer ikusia duen eta [6] artikuluan aurkezten den Gillespie's First Reaction metodoa aurreratu behar da iterazio bakoitzean zein ekintza burutuko den zehazteko. Hiru ekuazio hauetan laburbiltzen dira azpieskualde bakoitzean gerta daitezkeen ekintzak,

$$(S_{i,j}, Z_{i,j}, H_{i,j}) \xrightarrow{\beta S_{i,j} Z_{i,j}} (S_{i,j} - a, Z_{i,j} + a, R_{i,j}) \quad (2.1)$$

$$(S_{i,j}, Z_{i,j}, H_{i,j}) \xrightarrow{\kappa S_{i,j} Z_{i,j}} (S_{i,j}, Z_{i,j} - a, R_{i,j} + a) \quad (2.2)$$

$$(S_{i,j}, Z_{i,j}, H_{i,j}) \xrightarrow{\mu Z_{i,j}} (S_{i,j}, Z_{i,j} - a, R_{i,j}) \quad (2.3)$$

non i eta j indizeek eskualde zehatz baten koordenatuak adierazteko balio duten eta a hizkiak egoeraz aldatzen den populazio kantitateari egiten dion erreferentzia. 2.1 ekuazioa, zonbiek gizakiak hiltzen dituztenekoa da. Hau balitz gertatuko litzatekeen ekintza, hildako gizakiak zonbi bihurtuko lirateke eta gizakiak hil aurretiko eskualdean geratuko lirateke. 2.2 ekuazioa, aldiz, gizakiek zonbiak hiltzen dituztenekoa da. Burutuko litzatekeen ekintza azkenengo hau balitz, hil diren zonbi kantitatea R egoerara aldatuko litzateke, berriro ere, zonbiek elkarrekintza aurretik zuten eskualdea mantenduz.

2.3 ekuazioan, zonbien fluxuarekin lotuta dagoena, i eta j koordenatuetako zonbi populazioa jaisten dela ikusten da. Mugitutako zonbiak, dauden eskualdetik aldame-neko batera mugituko dira. Hau da, zonbiak gora, behera, ezkerrera edo eskuinera aldatuko dira, diagonalean dauden eskualdeetara mugitzeko gaitasuna baztertuz. Mugikortasuna balitz gertatuko litzatekeen ekintza, lauetako zein eskualdeetara aldatuko diren jakiteko, zenbaki aleatorio batez baliatuko da. Zenbaki aleatorio hori, 0tik 1era doana, lehenengo laurdenean aurkitzen bada, gora joango da, bigarreanean badago, behera, hirugarrenean ezkerrera eta, azkenik, laugarren laurdenean egotekotan, eskuinera. Esan beharra dago, eremu geografikoa 38×50 dimentsioko matrize batean banandu bada ere, populazio bakoitza adierazteko matrizeak 39×51 dimentsiokoak direla. Horrela, eremu geografikoko muturretan aurkitzen diren zonbiek ez dute arazorik izango posibleak diren lau eskualdeetatik, edozeinetara aldatzeko. 38×50 -ekoak balira, muturretan dauden zonbien mugikortasuna implementatzeko murrizketak ezarri beharko lirateke, ahalegin konputazionala handituz. Gainera, zonbiren bat gehitutako zonalde batera lekualdatuko balitz, ez luke eragin estadistikorik izango gerora begira, hauek zonbi gutxi batzuekin beteta leudekeelako. Horrela, aztertu beharreko hiru probabilitatetatik bi nuluak lirateke. Hirugarren probabilitateak ere, zonbien fluxuarenak, hain zuzen ere, ez luke eragin estadistikorik izango, horren probabilitate txikia izanik, ez litzatekeelako sekula, Gillespie's First Reaction metodoaren arabera, burutuko den ekintza izango, horren pisu probabilistiko txikia izateagatik.

Ikusi den moduan, iterazio bakoitzean populazioen dentsitateak aldatzen dira. Iterazioak behin eta berriro errepikatu behar dira, 10000 iteraziotik behin dentsitateak

gordez, harik eta epidemia bukatutzat jo arte. Lan honetan, $2,52 \times 10^7$ iterazio burutu dira eta eremu geografiko osoan dauden zonbiak, gizakiak, hil diren zonbiak¹ eta denbora 1000 iteraziotik behin gorde dira. Eremu geografiko osoan dauden populazioen kantitateak, denbora eta populazio dentsitateak ez dira iterazio guztietan gorde, horrek suposatuko lukeen ahalegin konputazionala aurresteke. Programa bost biderez exekutatu da epidemiaren eboluzioaren azterketa estadiskoa egin ahal izateko. [1] artikuluan Estatu Batuetan zonbien epidemia hipotetiko bat aztertzen da. Hasierako egoeran, zonbiak Estatu Batuetako zonalde geografikotik banandurik daudela suposatzen da. Lan honetan, aldiz, zonbiak hasierako egoeran eremu geografiko konkretu batean fokalizaturik egotea erabaki da. Eredu honek ordezkaturiko lituzkeen gaixotasunek eremu jakin batetik hasten dira. Horregatik, egokiagoa dela uste da lan honetan erabiltzen den zonbien kokapenari dagokion hasierako baldintza.

2.2 Eremu geografikoaren diskretizazioa eta hasierako populazio-dentsitatearen matrizea

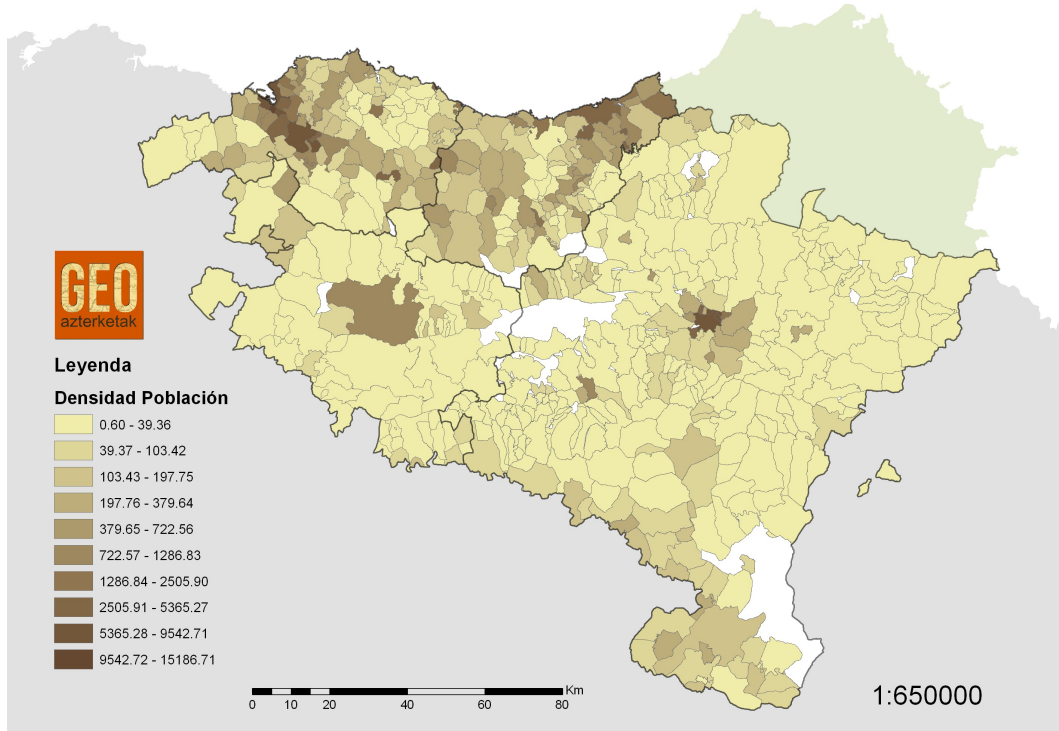
Eremu geografikoaren diskretizaziorako, Hego Euskal Herriaren mapa politikoa behar da. Lan honetan 2.1 irudiak eskeintzen duena erabiliko da. Irudi horretan *RGB* kolore-eredua² erabiltzen da, zeinek hiru kolore primariotatik (gorria, urdina eta berdea) beste kolore guztiak ateratzen dituen. Hau da, 2.1 irudian hiru koloreko eskala erabiltzen da irudiari kolorea emateko.

Aztergai den eremu geografikoa ez den beste guztia Gimp programa erabilita ezabatu ondoren, Mathematica programak eskeintzen duen color convert funtzioa erabili da, irudia *RGB* kolore-eredutik, gris eskala batera aldatzeko. Hots, hiru koloretako eskala batetik kolore bakarreko eskala batera aldatu da irudia, zuriei 1 zenbakia esleituz eta beltzei 0, gainontzeko koloreei iluntasunaren arabera tarte horretako zenbaki bat esleitu zaielarik. Honen ondoren, Gimp programarekin irudiaren bereizmena jaitsi da irudia 1900 (38×50 dimentsioko matrize batetan) pixeletan banandu ahal izateko eta pixel bakoitzari dagokion kolore-zenbakia fitxategi batean gorde da.

Kolore-zenbaki bakoitzak eskualde bakoitzeko gizaki populazioa adierazten du, baina zenbakiok Hego Euskal Herriko populazio dentsitateekin bateragarriak izateko eskalatu behar dira. Mapako legenda begiraturaz gero, ikusiko da populazio dentsitateen tarteak ez direla konstante mantentzen. Lan honetan, tarte batetik bestera aldaketa 2^x funtzio exponenzialarekin adierazi dira, mapako legendan aurkezten diren tarteak mo-

¹Desberdindu behar da datu hau populazioen dentsitatearengandik. Datu hau zenbaki bat da, dentsitateak 39×51 dimentsioko matrizeak diren bitartean.

²Irudiak editatzeko Gimp programatik irakurri da zein kolore-eredu erabiltzen duen irudiak.



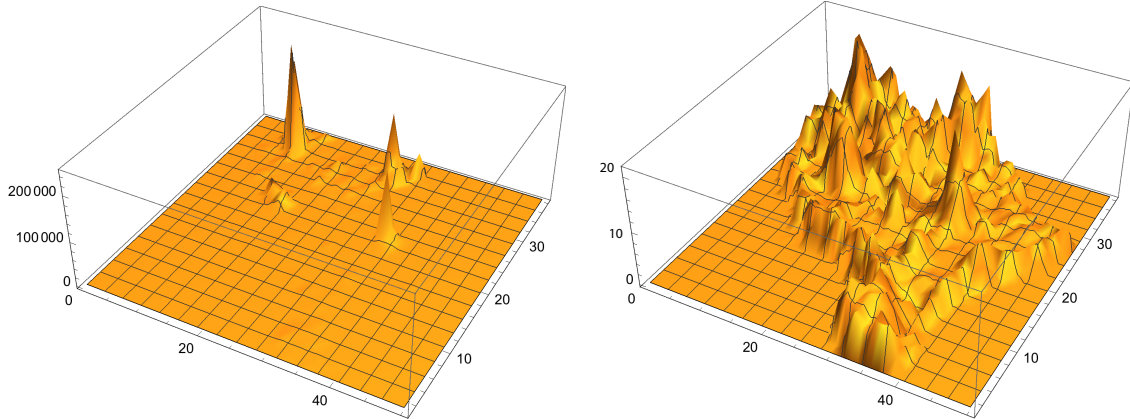
Irudia 2.1: Hego Euskal Herriko mapa politikoa. [7] web orrialdetik atera da.

du honetara ondoen egokitzen direlakoan. Azkenengo hau ezinbestekoa da gris-eskalan dauden zenbaki-koloreak aztergai den populazioarekiko eskalatu ahal izateko. Hortaz,

$$f(x) = \sigma 2^{(1-x)\delta} \quad (2.4)$$

funtzioa erabili da horretarako, non σ eta δ eskalaketarako bi parametro diren eta x pixel bakoitzetik irakurritako zenbaki-kolorea. Garrantzitsua da argitzea zergatik jartzen den 2.4 ekuazioan $(1-x)$, eta ez bakarrik x . Gorago esan bezala, kolore zuria 1 zenbakiarekin adierazten da, eta beltzak 0ekin. Mapako zona ilunetan biztanle gehien dagoen tokiak dira, eta zuriak zona jendegabetuenak. Irudikatzerako orduan, x mantenduko balitz, ez litzateke populazio dentsitateen irudikapena egiten egongo, alderantzizkoa baizik. Horregatik azaltzen da $(1-x)$. Bi aldagai erabili dira eskalake-ta egiteko; Hego Euskal Herriko eta Bilboko³ biztanleria kopurua. Honela, σ eta δ -ri balioak eman zaizkio $f(x)$ -ek itzulitako balioak eta bi aldagaion datu erreala bateragarriak izan diren arte. $\sigma = 57$ eta $\delta = 19.4$ balioekin, Hego Euskal Herriko biztanleria $2,83 \times 10^6$ pertsonakoa atera da, datu erreala $2,829790 \times 10^6$ ekoa delarik, eta Bilboko biztanleria dentsitatea 8330 biztanle/km² lortu da, datu erreala $8331,11$ biztanle/km²-koa izanik. Datuok bateragarritzat hartu dira, beraz, gainontzeko eskuade guztia σ eta δ horiekin eskalatu dira, epidemia hasi aurretiko gizakien populazio dentsitatea lortuz.

³Bilbo erabili da hiriburu jendeztatuen izateagatik.



(a) Hego Euskal Herriko populazio dentsitatea. (b) Hego Euskal Herriko populazio dentsitatea eskala logaritmikoan.

Irudia 2.2: Eskala logaritmikoak distantziak laburtzen dituenaz, eskuinaldeko irudian, Hego Euskal Herriko itxura desberdintzen da.

2.3 Denboraren implementazioa

Esan bezala, denboraren implementazioa [6] lanetik aterako da. Bertan, erreakzio kimikoak aztertzen dira, baina erreakzioetan parte hartzen duten sujetu kimiko bakoitzek, modu desberdinak dituzte erreakzionatzeko. Hau implementatzeko metodo estokastikoa aurkezten dute aproposenatzat, sujetu kimiko bakoitza beste guztiekin erreakzionatzeko modu guztiak ebaluatuz eta First Reation Method-en arabera iterazio bakoitzean gauzatuko den ekintza erabakitzen da. Lan honetan zonbien epidemia aztertzeke eta [6] erreferentzian erreakzio kimikoak ebaluatzeko filosofia berdina izanik, zilegia da bertan azaltzen den First Reation Method-a erabiltzea denbora implementatzeko eta iterazio bakoitzean aurrera egingo duen ekintza zehazteko. Formalki, First Reaction Method-aren algoritmoa hurrengoa da:

- $t \leftarrow 0$ denborari dagokion molekula kopurua finkatu.
- a_i probabilitate funtzioa kalkulatu i guztietarako.
- i bakoitzerako, τ_i denbora atera a_i parametroa duen distribuzio exponentzialetik.
- μ errakzioari dagokion τ_μ identifikatu, zeina τ_i guztietatik txikiena den.

- τ -ri τ_μ balioa esleitu.
- μ erreakzioa dela eta molekulek izan dituzten aldaketak eguneratu.
- $t = t + \tau$ finkatu eta bigarren puntura joan.

Lan honetan zonbiek gizakiak hiltzeko probabilitatea, gizakiek zonbia hiltzeko probabilitatea eta zonbiak mugitzeko probabilitatea kalkulatu da eskualde bakoitzean. Hasierako dentsitate populazioa finkaturik dagoela, probabilitate bakoitzari lotutako denbora bat kalkulatu da. Denbora gutxien behar duen ekintzak egingo du aurrera. Dentsitate populazioak aldatu beharko dira, aurrera egin duen ekintzaren arabera. Probabilitate bakoitzari lotutako denbora kalkulatzeko, hirugarren puntuan ikus daitekeen moduan, distribuzio exponentziala erabiliko da. [8] erreferentzian ikusten da distribuzio exponentzialaren arabera

$$\tau = -\frac{\ln(U)}{\lambda} \quad (2.5)$$

dela, non U zenbaki aleatorio bat den eta λ kalkulatuak probabilitateak diren. Honela lortzen da epidemiaren eboluzioa.

2.4 Ereduaren parametroen kalkulua

Mugikortasunarekin lotutako parametroa, μ parametroa, kalkulatzeko suposatuko da zonbiek metro bat mugitzeko segundu bat behar dutela. 2.1 atalean azaldu bezala, zonbiak mugitzerako orduan ondoz ondo edozein lau eskualdeetara aldatzeko probabilitatea dute, lau probabilitateak berdinak izanik. Gauzak horrela, [1] artikuluan esaten denaren arabera, zonbi bat beste eskualde batera mugitzeko probabilitatea

$$\frac{1}{4} \frac{Z}{L^2} Lv \Delta t \quad (2.6)$$

da. 2.6 ekuaziotik irakur daiteke μ -ren balioa, μ -k zonbi batek duen lekualdatzeko probabilitatea denbora unitateeko adierazten baitu. Hortaz, $\mu = \frac{1}{4} Lv$ dugu, non L eskualde bakoitzari dagokion aldea den. Eskualde bakoitza 30 km^2 -koa izanik, $L = 5,477 \text{ km}$ da.

β parametroa eskualde bakoitzean dauden gizaki kopuruaren arabera da. Hau da, erabaki behar da eskualde batean dauden zer gizaki kantitatetik behera zonbiei mugitzea komeniko zaien epidemia handitzeko. Erabakia eredu bakoitzaren arabera da, edo ordezkatu nahi den gaixotasunaren arabera. Lan honetan, balio hori

25 pertsona/km²-koa dela suposatu da. Beraz, eskualde bakoitzean 750 pertsona egon behar dute gutxienez zonbiak gizakia hiltzeko probabilitatea, zonbia mugitzeko probabilitatea baino handiago izan dadin. Gauzak horrela, [1] artikuluan aurkezten den hurrengo formulatik β atera ahalko da

$$4\mu = N\beta \quad (2.7)$$

κ parametroa kalkulatzeko [9] artikuluan ematen den $\alpha = \frac{\kappa}{\beta} = 0.8$ balioa erabili da. Hots, zonbiak gizakia baino 1.25 aldiz efektiboagoak direla suposatzen da. Artikulu horretan, α parametroaren kalkulua zonbiei buruzko pelikulen azterketatik ateratzen da.

| Parametroak | Balioak |
|-------------|----------------------------------|
| β | $2,92 \times 10^{-4}$ pertsona/h |
| α | 0.8 |
| κ | $2,33 \times 10^{-4}$ pertsona/h |
| μ | 0.0547 h^{-1} |

Taula 2.1: Hego Euskal Herriko Zonbien epidemia simulatzeko erabili diren parametroak. Zelan kalkulatu diren goian azaltzen da.

[1] artikuluan 2.1 taulan dauden parametroen unitateak txarto emanda daude. μ parametroaren unitateak h bezala finkatzen dira eta β eta κ -renak $h/\text{pertsona}$ -ko bezala. Unitate hauek ez datoz bat 1.1 atalean emandako parametroen definizioekin, bai ordea, 2.1 taulan eman direnekin. Esan beharra dago, 1.1 atalean ematen diren parametroen definizioak [1] artikulutik atera direla. Beraz, koherentzia eza igertzen da parametroak definitzeko eraren eta esleitzen zaizkien unitateen artean.

Kapitulua 3

Emaitzen interpretazioa

Lan honetan bi epidemia simulatuko dira. Bata Bilbotik hasitakoa eta bestea Iruñatik. Emaitzei erreparatuta zonbi epidemiak, erabiltzen diren parametroekin, denbora eskala laburrean gertatzen direla frogatu nahi da. Bestalde, ikusiko da hil diren zombien populazioa gehiengoa izango dela, eta biztanle kopuruak epidemiaren eboluzioan duen eraginaz eztabaidatuko da. Azkenik, bi epidemiak konparatuz epidemien eboluzioen simetria aztertuko da.

Epidemiak bi hiriburu horietatik hasteak ez du inongo arrazoi berezirik. Markatu diren helburuentzako ez da garrantzitsua epidemia hastapenaren leku geografikoa. Horregatik bi hiriburu horiek ausaz aukeratu dira. Lagungarria izango delakoan, Iruñatik eta Bilbotik Hego Euskal Herriko lau hiribuetara dagoen distantziak emango da hurrengo taulan.

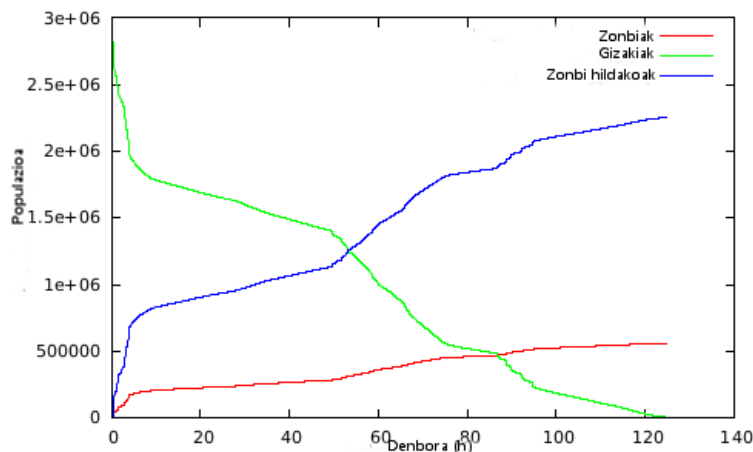
| | Iruña | Bilbo | Donostia | Gasteiz |
|-------|--------|--------|----------|---------|
| Iruña | 0 | 116,26 | 62,57 | 84,73 |
| Bilbo | 116,26 | 0 | 77,52 | 49,46 |

Taula 3.1: Iruñatik eta Bilbotik gainontzeko hiriburuetara dagoen distantzia kilometrotan. Hiriburuen arteko distantziak lerro zuzenak hartuta neurtu dira. Datu hauek [10] erreferentziatik atera dira.

3.1 Bilbotik hasitako epidemia

Hasierako egoeran hogei zombi daude Bilbon¹. Hogeizate erabaki da, zombi bakar batekin epidemia zabaldu aurretik desagertzeko probabilitatea handia da eta.

1.2 atalean jaiotze/hiltze tasak baztertu dira. 3.1 irudian ikusten da epidemiaren eboluzioak 120 ordu behar dituela bukatzeko, hau da, bost egun. Beraz, jaiotze/hiltze tasak baztertu izana egokitzat har daiteke, denbora tarte horretan ez lukeelako eragin estadistikorik izango. Argi dago, eredian zombien epidemia barik gaixotasun tradizionalak erabiltzerakoan, parametroak aldatu behar direla. Aztergai den eritasunaren ezaugarrien arabera finkatu beharko dira. Gauzak horrela, gerta daiteke epidemiaren eboluzioa denbora tarte zabalagoan gertatzea. Denbora tarte horiek nahiko zabalak balira, komenigarria litzateke jaiotze/hiltze tasok kontuan hartzea, eragin estadistikoa eduki dezaketelako.



Irudia 3.1: Bilbotik hasitako zombi epidemia laburbiltzen duen grafikoa. Bost exekuzioen arteko bataz besteko emaitza da. Gorriz zombi kantitatea, berdez gizaki kantitatea eta urdinez hil diren zombien kantitatea adierazten da.

3.2 taulan zenbait aldiunetan egoera bakoitzean dagoen kantitate kopurua adierazten da dagozkien erroreekin batera. Ikus daitekeen moduan erroreak handiak dira. Horiek txikitzeke programa gehiagotan exekutatu beharko litzateke. Lan honetan ez

¹Bilbotik hasi dela esaten denean, Bilbo ordezkatuko lukeen pixelari buruz ari gara. Gerta daiteke, pixel horrek hiri osoa bere osotasunean ordezkatzea, baina erreferentzia bezala erabili da baino ez. Aurrerago, Hego Euskal Herriko zonalde geografiko konkretuez aritzen denean, kontuan hartu behar da, horiek ordezkatuko lituzketen pixelari buruz ari dela.

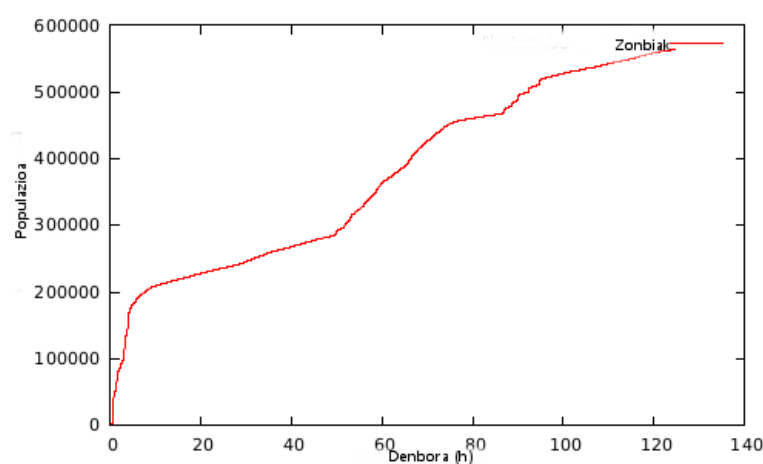
da horrelakorik egin denbora falta dela eta.

| Denbora (h) | Zonbi kopurua | Gizaki kopurua | Hildako zonbien kopurua |
|-------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | $5,17 \times 10^4 (7 \times 10^2)$ | $2,572 \times 10^6 (1 \times 10^3)$ | $2,03 \times 10^5 (1 \times 10^3)$ |
| 45 | $2,78 \times 10^5 (1 \times 10^3)$ | $1,443 \times 10^6 (1 \times 10^3)$ | $1,105 \times 10^6 (2 \times 10^3)$ |
| 90 | $4,93 \times 10^5 (8 \times 10^3)$ | $3,6 \times 10^5 (4 \times 10^4)$ | $1,97 \times 10^6 (3 \times 10^4)$ |

Taula 3.2: Zenbait aldiunetako zonbien, gizakien eta zonbi hildakoen kantitatea. Parentesi artean errorea dago.

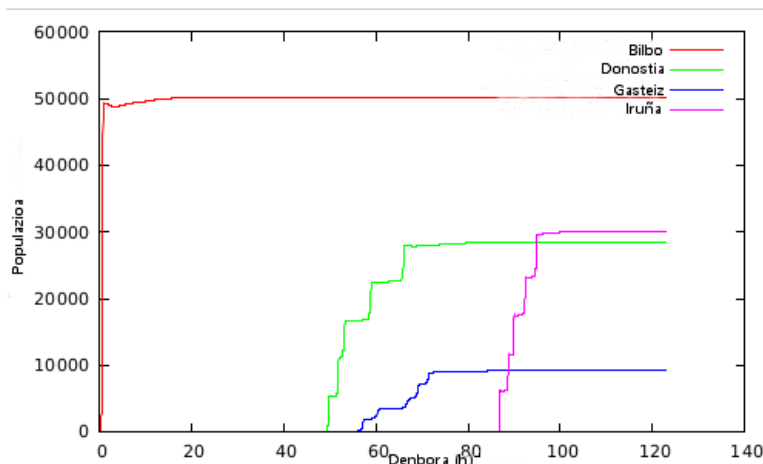
Esan bezala, amaieran zonbi hildakoena da populazio altuena. Zonbi hildakoen egoeratik beste bi egoeretara aldatzeko aukerarik ez dago. Beste bi egoeretan trantsizioak egoteagatik, eta egoera honetan ez egoteagatik, logikoa da hau lortzea. Gertaera hau bibliografiako beste lan guztietan ere azaltzen da.

3.1 irudian malda handiagoko hiru momentu desberdindu daitezke, 0-5, 50-75 eta 85-95 ordu tartetan hain zuzen ere. Eskala horretan, zonbi kopurua adierazten duen eboluzioan ezin daitezke horren ondo desberdindu hiru malda horiek.



Irudia 3.2: Bilbotik hasi diren zonbien eboluzioa laburbiltzen duen grafikoa.

3.2 irudian zonbien eboluzioa baino ez da irudikatu. Eskala horretan hobeto desberdintzen dira oraintsu aipatutako malda horiek. Esan bezala hiru egoeretarako malda handitzen da denbora tarte berdinetarako. Hau espero zitekeen gauza bat da. Beheko irudian ikus daiteke denbora tarte horietan zonbiak hiriburuetara sartzen direneko uneak direla. Hiriburuak zonalde jendeztatuagoak direnez handitzen da malda une horietan.



Irudia 3.3: Hego Euskal Herriko hiriburuetan dagoen zombi populazioa une bakoitzean.

3.3 grafikoan Hego Euskal Herriko hiriburueta zombiak heltzen diren aldiuneak bereiz daitezke. Hartzekoa da Donostiara Gasteizera baino arinago heltzea birusa, Donostia Gasteiz baino urrunago dagoelako Bilbotik, 3.1 taulan adierazi bezala. Hori azaltzeko kontuan hartu behar da Bilbotik Donostiarako tartean, Bilbotik Gasteizera dagoen tartean baino pertsona gehiago bizi direla, 2.1 irudian, era kualitatiboan bada ere, ikus daitezkeen moduan. Gauzak horrela, baieztatu daitezke, epidemia hau bezala transmititzen diren gaixotasunen eboluzio abiadurarako, distantzia bezain garrantzitsua dela tartean bizi den pertsona kantitatea.

Fenomeno hau 3.2 irudian ere ikus daitezke. Lehen nabarmendutako hiru maldeetatik lehenengoa eta azkenengoa konparatuz gero, ikusten da lehenengoaren malda hirugarrenarena baino handiago dela. Lehenengo malda zombiak Bilbon daudenekoa da, hirugarrena aldiz, Iruñan daudenekoa. Beraz, malda handiagoa izateagatik, arinago hedatzen dira Bilbon Iruñan baino. Jakinaenez Bilbon Iruñan baino biztanle gehiago bizi dira². Hemen berriro ere antzematen da populazio kantitateak epidemiarren eboluzioan duen garrantzia.

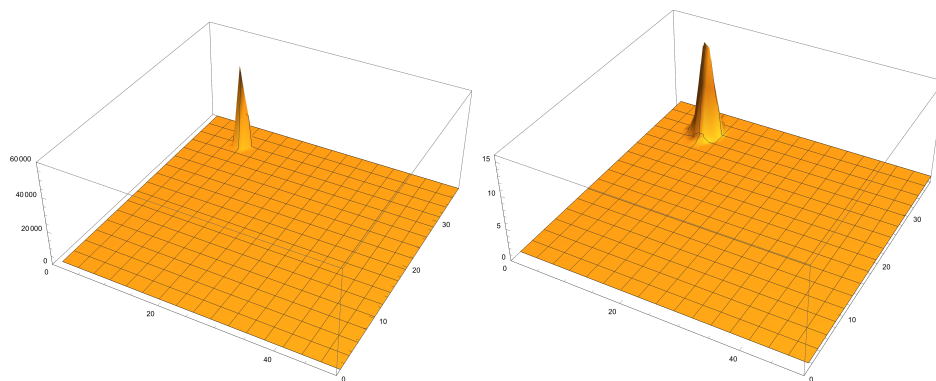
Epidemien eboluzioan populazio kantitateak eragina izatea ez da hartzekoa. Baina ez zen espero epidemia Bilbotik Donostiara, Bilbotik Gasteizera baino arinago hedatzeko besteko eragina izatea.

Lehen nabarmendutako hiru maldak zombiak hiriburueta sartzen direneko uneekin erlazionatu dira. Lau hiriburu egonda ere, hiru tarte baino ez dira bereizten zeinetan malda handiagoa den. Honen arrazoiak hurrengoa da: Donostiara heldutako zombiak

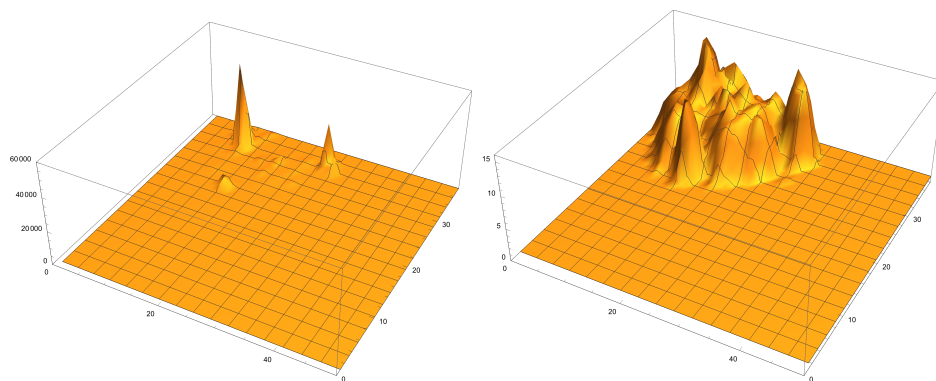
²Bilbok 345141 biztanle ditu, eta Iruñak 201311. Bilbori dagokion datua [11] erreferentziatik atera da eta Iruñari dagokiona [12] erreferentziatik.

bertako biztanle guztiak infektatu baino lehenago, beste zonbi talde bat Gasteizera sartu da eta, halatan, Gasteizi dagokion tartea Donostiari dagokionaren jarraipena da. Zonbiek Donostiako biztanle guztiak infektatu baino arinago Gasteizera ere sartzen direla [3.3](#) irudian ikus daiteke.

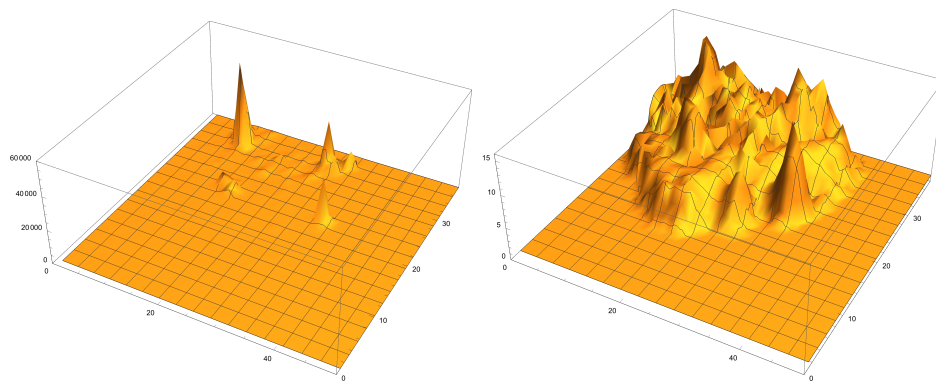
Hurrengo orrialdean zenbait momentutan zonbien eta gizakien populazio dentsitateak irudikatuko dira eboluzioa zein modutan gertatzen den ikusteko.



(a) 3 ordu igaro ondoren zonbien populazioa. (b) 3 ordu igaro ondoren zonbien populazioa eskala logaritmikoan.

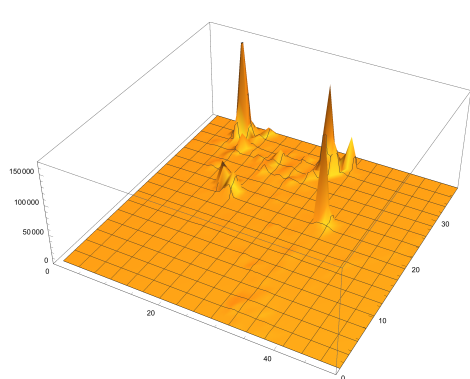


(c) 60 ordu igaro ondoren zonbien populazioa. (d) 60 ordu igaro ondoren zonbien populazioa eskala logaritmikoan.

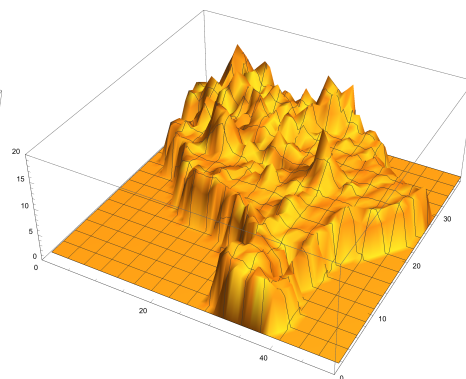


(e) 90 ordu igaro ondoren zonbien populazioa. (f) 90 ordu igaro ondoren zonbien populazioa eskala logaritmikoan.

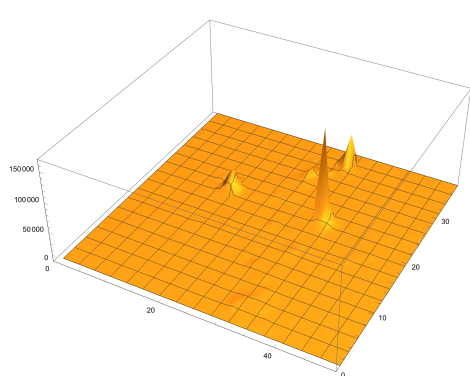
Irudia 3.4: Zonbien eboluzioa zenbait aldiunetan.



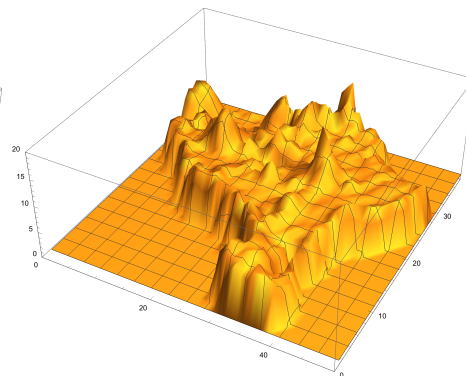
(a) 3 ordu igaro ondoren gizakien populazioa.



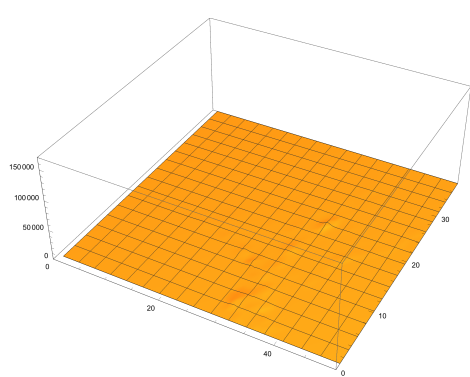
(b) 3 ordu igaro ondoren gizakien populazioa eskala logaritmikoan.



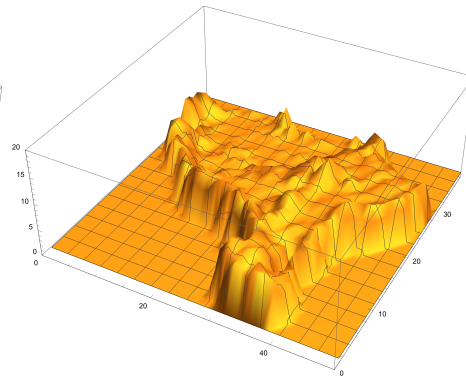
(c) 60 ordu igaro ondoren gizakien populazioa.



(d) 60 ordu igaro ondoren gizakien populazioa eskala logaritmikoan.



(e) 90 ordu igaro ondoren gizakien populazioa.

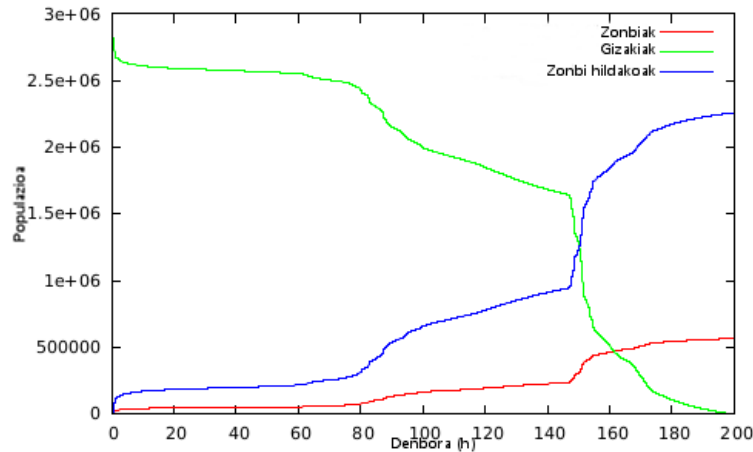


(f) 90 ordu igaro ondoren gizakien populazioa eskala logaritmikoan.

Irudia 3.5: Gizakien eboluzioa zenbait momentutan.

3.2 Iruñatik hasitako epidemia

Bigarren simulazio honetan epidemiaren eboluzioaren hasieran Iruñan hogeitazonbi daudela suposatuko da, β , κ eta μ parametroak aurreko simulazioan erabilitakoak izanda.



Irudia 3.6: Iruñatik hasitako zombi epidemia laburbiltzen duen grafikoa. Bost exekuzioen arteko bataz besteko emaitza da. Gorriz zombi kantitatea, berdez gizaki kantitatea eta urdinez hil diren zombien kantitatea adierazten da.

Berriro ere 3.3 taulan zenbait aldiuneri dagokion zombi, gizaki eta zombi hildakoen kantitateak emango dira, dagozkien erroreekin batera. Goiko irudiari erreparatuta,

| Denbora (h) | Zonbiak | Gizakiak | Hildako zombiak |
|-------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | $2,5 \times 10^4 (2 \times 10^3)$ | $2,7 \times 10^6 (2 \times 10^4)$ | $9,9 \times 10^4 (3 \times 10^3)$ |
| 45 | $1,7 \times 10^5 (1 \times 10^4)$ | $2 \times 10^6 (5 \times 10^4)$ | $6,6 \times 10^5 (4 \times 10^4)$ |
| 90 | $5,66 \times 10^5 (3 \times 10^3)$ | $3,79 \times 10^3 (1 \times 10^3)$ | $2,257 \times 10^6 (7 \times 10^3)$ |

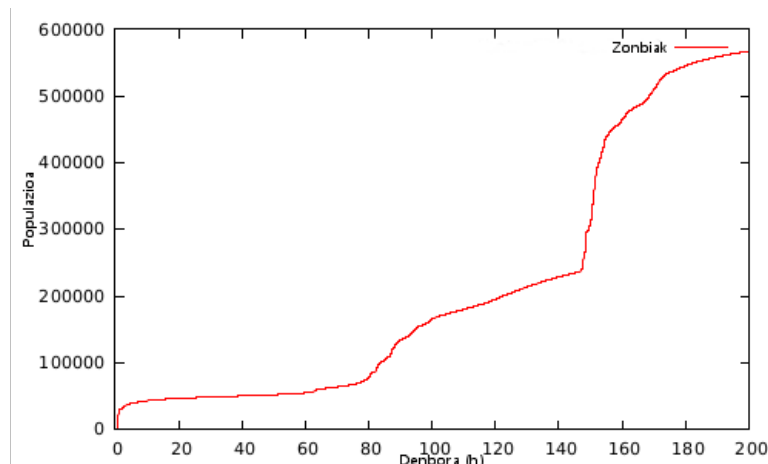
Taula 3.3: Zenbait aldiunetako zombien, gizakien eta zombi hildakoen kantitatea. Parentesi artean errorea dago.

ikusten da bigarren eboluzio honek 200 ordu behar dituela gizaki guztiekin akabatze-ko, lehenengo simulazioan 120 ordu behar zituelarik. Lehen esan den bezala, epidemiak hedatzeko abiaduran eragin nabarmena du tartean bizi den biztanle kopuruak. 2.1 irudian ikusten da Iruña inguruan, Bilbo inguruan baino biztanle gutxiago bizi dela. Horregatik bigarren simulazio honek 80 ordu gehiago behar ditu gizaki guztiak

infektatzeko. Hortaz, ondoriozta daiteke epidemiak hedatzeko behar duen denbora bi aldagaien menpekoea dela. Alde batetik, birusaren eta gizakien parametroena, eta bestetik, epidemia hasi deneko eremu geografikoaren inguruan bizi den pertsona kopuruarena. Lehenengo menpekotasunak, birusaren eta gizakiaren ezaugarriekin du zer ikusia, eta aztergai den gaixotasunaren arabera finkatu behar dira parametro horiek. Azpimarratutako lehenengo menpekotasuna tribialtzat jo daiteke. Ez ordea, bigarrena. Menpekotasun hau ez litzatekeelako 1.1 atalean aurkeztutako transmititzeko beste bi moduentzako guztiz baliogarria izango. Esaterako, aire bidez transmititzen diren gaixotasunek ingurua isolatua bada ere, beste zonalde batzuetara bidaia dezaketelako.

Bigarren simulazio honek aurrekoak baino 80 ordu gehiago behar baditu hedatzeko, esan beharra dago, bigarren simulazio honetan ere frogatzen da 1.2 atalean jaiotze/hiltze tasak baztertu izana zuzena dela simulazio honetarako, azken batean, gutxi gora behera 8 eguneko denbora tartean jaiotze/hiltze tasek ez baitute eragin estadistikorik.

Amaierako populazioei dagokionez, berriro ere ikusten da amaieran zombi hildakoen dela populazio altuena. Hau gertatzearen arrazoa aurreko epidemia aztertu denean eman da, beraz, ez da berriro errepikatuko. Hala eta guztiz ere, azpimarratu nahi da honek duen garrantzia. Gorago esan bezala, bibliografian aurkitzen diren zombiei buruzko ikerketa epidemiologiko guztietan, amaierako populazioan zombi hildakoen da handiena. Lan honetan bigarrenaz ikusi da fenomeno hau. Honenbestez baieztatu daiteke lan honetan garatutako ereduak, kuestio honi dagokionez behintzat, bibliografiako lanetan garatutako ereduarekin bateragarria dela.

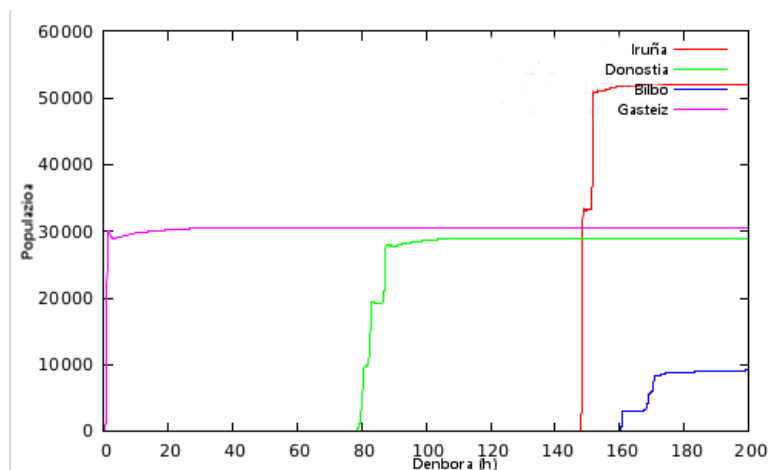


Irudia 3.7: Iruñatik hasi diren zombien eboluzioa laburbiltzen duen grafikoa.

3.6 irudian lau tarte bereizten dira zeinetan malda handitzen den, 0-2, 80-100, 145-

155 eta 170-175 ordu tartean hain zuzen ere. Aurreko simulazioan ikasi den bezala, tartek handitzearen arrazoia zonbiak hiriburuetara sartzen diren uneekin erlazionatuta daude. Bigarren simulazio honetan zonbiak hiriburu bakoitzera banan banan sartzen dira, aurreko simulazioan ez bezala. 3.6 irudian zonbien eboluzioa deskribatzen duen kurban malda aldaketok ondo bereizten ez direnez, eskala handiegia izateagatik grafiko horretan, zonbien eboluzioa deskribatzen duen kurba isolaturik ematen da 3.7 irudian, aldaketok nabari ahal izateko.

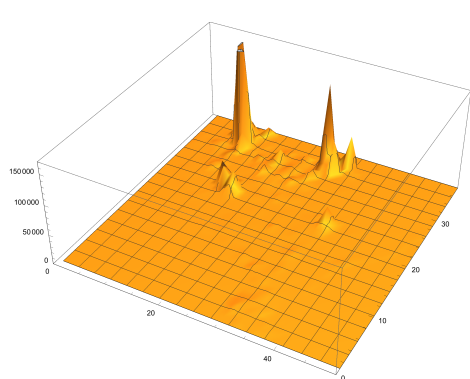
Iruñatik gainontzeko hiriburuetara heltzeko beharrezkoa duten denbora zehazteko 3.12 grafikoa irudikatu da. Grafiko honetan ikusten da zonbiak Donostiara helduko direla aurrena. 3.1 taulan adierazten da Iruñatik Donostia dagoela gertuen. 2.1 maparen arabera, Iruñatik Donostiarako edo Gasteizerako bideen artean, ez da antzematen bide bakoitzean bizi den dentsitate-populazio desberdintasun handirik dagoela. Hortaz, Donostia Gasteiz baino hurbilago egonik, espero zitekeen emaitza lortzen da. Baina Bilbora Gasteizera baino arinago heltzea ez zen inolaz ere espero, 3.1 taulan adierazten den bezala, Bilbo eta Iruña arteko distantzia, Gasteiz eta Iruña artean dagoena baino askoz handiagoa baita.



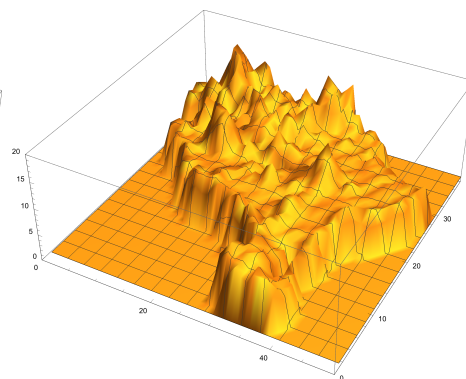
Irudia 3.8: Hego Euskal Herriko hiriburuetan dagoen zonbi populazioa une bakoitzean.

3.10 irudian ikus daiteke, zonbiak Bilbora kostaldetik heltzen direla. Hemen berriro antzematen da epidemia-eboluzioan bidean bizi den biztanle kopuruak zein garrantzitsua den, 2.1 mapan ikusten baita, Donostia eta Bilbo arteko tartea, Iruña eta Gasteiz artekoa baino jendetsuagoa dela. Iruñatik Bilbora, Iruñatik Gasteizera baino denbora gutxiago behar izatea, Bilbotik Donostiara, Bilbotik Gasteizera baino denbora gutxiago behar izatea baino harrigarriagoa da, bigarren kasuan hiriburu arteko distantzia diferentzia lehenengo kasuan baino handiagoa baita.

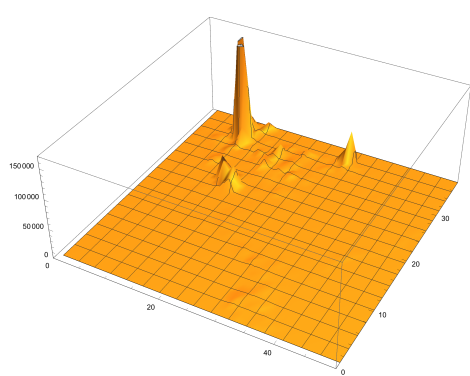
Jarraian Iruñatik hasitako epidemia irudikatzen duten zenbait grafiko emango dira.



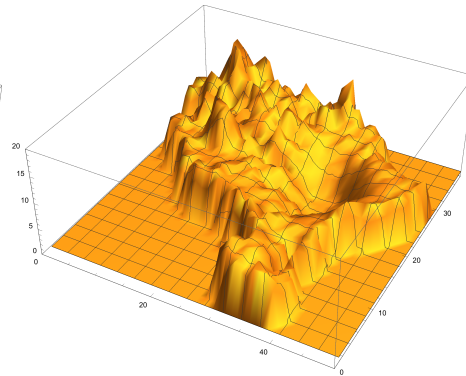
(a) 2 ordu igaro ondoren gizakien populazioa.



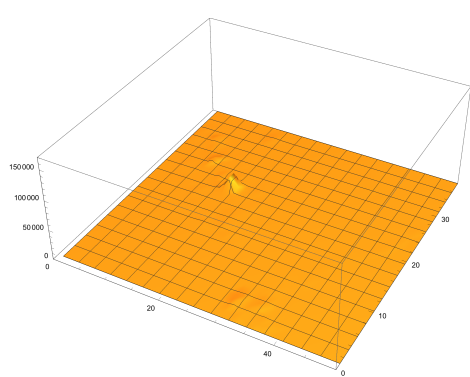
(b) 2 ordu igaro ondoren gizakienien populazioa eskala logaritmikoan.



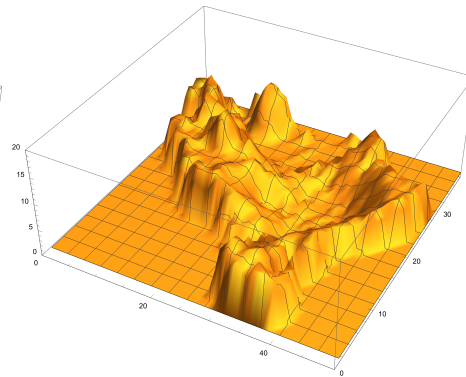
(c) 90 ordu igaro ondoren gizakien populazioa.



(d) 90 ordu igaro ondoren gizakien populazioa eskala logaritmikoan.

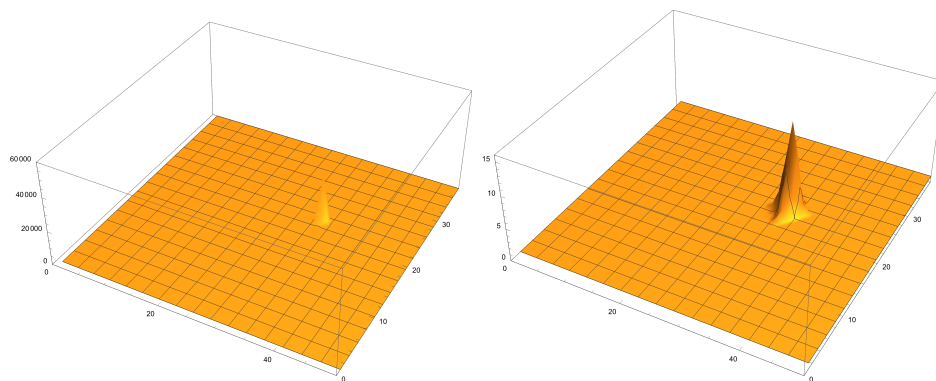


(e) 170 ordu igaro ondoren gizakien populazioa.

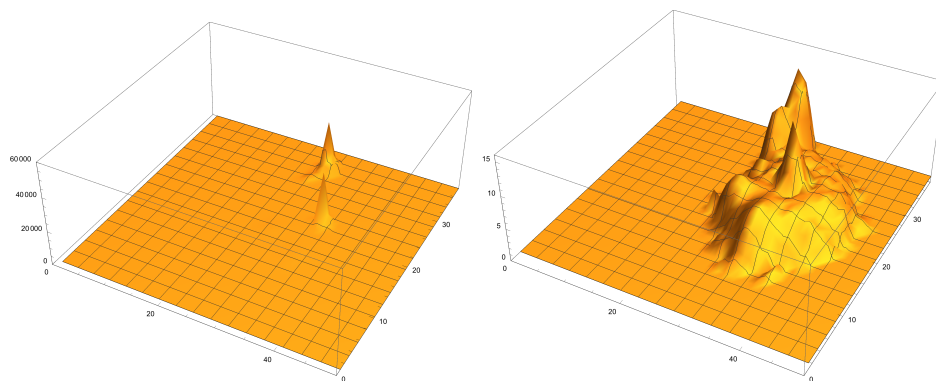


(f) 170 ordu igaro ondoren gizakien populazioa eskala logaritmikoan.

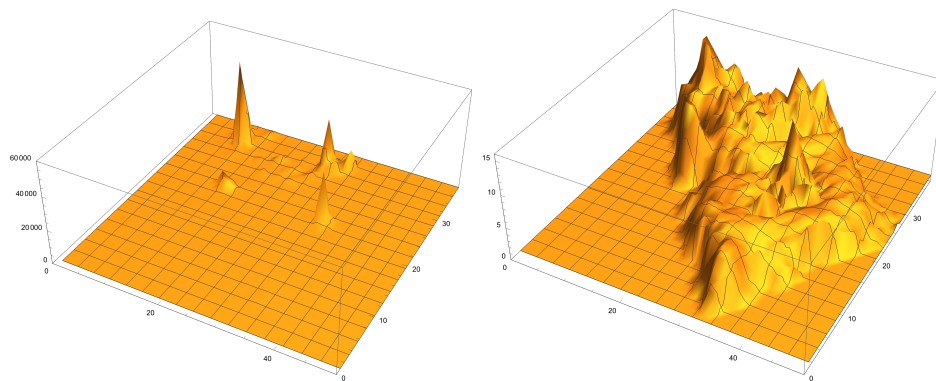
Irudia 3.9: Gizakien eboluzioa zenbait aldiunetan.



(a) 2 ordu igaro ondoren zonbien populazioa. (b) 2 ordu igaro ondoren zonbien populazioa eskala logaritmikoan.



(c) 90 ordu igaro ondoren zonbien populazioa. (d) 90 ordu igaro ondoren zonbien populazioa eskala logaritmikoan.



(e) 170 ordu igaro ondoren zonbien populazioa. (f) 170 ordu igaro ondoren zonbien populazioa eskala logaritmikoan.

Irudia 3.10: Zonbien eboluzioa zenbait aldiunetan.

3.3 Epidemia-eboluzioaren simetriaren azterketa

Atal honetan epidemia eboluzioa simetrikoa den aztertu nahi da. Horretarako Iruñatik hasitako eta Bilbotik hasitako simulazioak konparatuko dira. 3.2 atalean bi simulazioen arteko desberdintasun batzuk aurkitu dira. Desberdintasun horiek direla eta, epidemiak guztiz simetrikoak ez direla frogatu da. Hala eta guztiz ere, bi simulazioetan lortutako emaitzak alderatuko dira epidemia eboluzioaren zein ezaugarri konstante dirauen jakiteko.

Bilbotik hasitako epidemia aztertzeo programa bost biderrez exekutatu da, azkenengo emaitza lortutako emaitza bakoitzaren batz bestekoa izanik. Berdina egin da Iruñatik hasitako epidemia azterketan. Bi simulazioentzako, exekutututako programa bakoitzean $2,52 \times 10^7$ iterazio burutu dira.

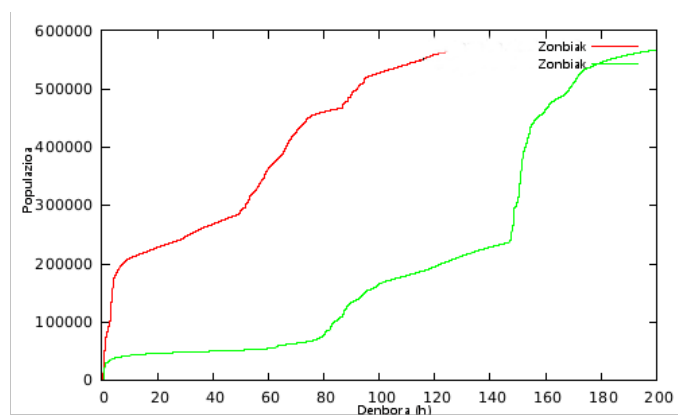
Epidemiak iraun bitartean egoera bakoitzean dagoen populazio kantitatea adierazten duen fitxategitik irakur daiteke amaierako unean geratutako zonbi, gizaki eta hildako zonbien kantitatea. Gauzak horrela, Bilbotik hasitako epidemiarentzako $t=124$ ordu denean, hau da, epidemia amaitutzat jo denean, 563769 zonbi, 8141 gizaki eta 2254729 zonbi hildako daude. Iruñatik hasitakoan, ordea, epidemia amaitu dela ihardetsi denean, hots, $t=199$ ordu pasatu ondoren, 566326 zonbi, 3790 gizaki eta 2256522 zonbi hildako daude. Emaitzotatik ageri da iterazio kopuru berdina izanda, amaierako unean egoera bakoitzean geratutako populazio-kantitatea magnitude orden berdinekoa dela bi simulazioentzako.

Honezkero nabarmendu da bi simulazioen artean 80 orduko desberdintasuna dagoela epidemia bukatutzat jotzeko. 2.3 atalean azaldu bezala, denboraren eboluzioa gerta daitezkeen ekintzen probabilitateetatik lortzen da. Gerta daitezkeen ekintzak, gizakiak zonbiak hiltzea, zonbiak gizaki talde bat zonbi bilakatzea eta zonbiak mugitzea dira. Ekintzon probabilitateak tokian-tokiko egoera bakoitzaren dentsitate populazioekin erlazionatuta daude, lehen azaldu bezala. Bi simulazioak toki desberdinetatik hasi direnez, eta Hego Euskal Herriko dentsitate-populazioa simetrikoa ez denez, normala da bi simulazioen artean denbora diferentzia bat somatzea.

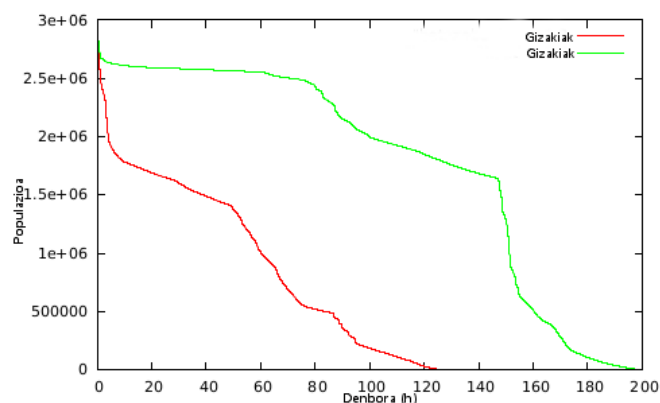
3.1 taulan ikusten da Bilbo eta Donostia artean 77,52 kilometroko tartea dagoela Iruñatik hasitakoan, Iruña eta Donostia artean, aldiz, 62,57 kilometro. 3.3 eta 3.12 grafikoen arabera, Bilbotik hasitako epidemiak Iruñatik hasitakoak baino 30 ordu gutxiago behar ditu Donostiara heltzeko. Beste behin, tarteko bidean dagoen populazio-dentsitatearen eragina agertzen da, 2.1 mapan azaltzen baita Bilbo eta Donostia arteko tartea Iruña eta Donostiako tartea baino jendeztatuago dagoela.

Jarraian, bi simulazioetan egoera bakoitzak epidemia iraun bitartean izandako ebo-

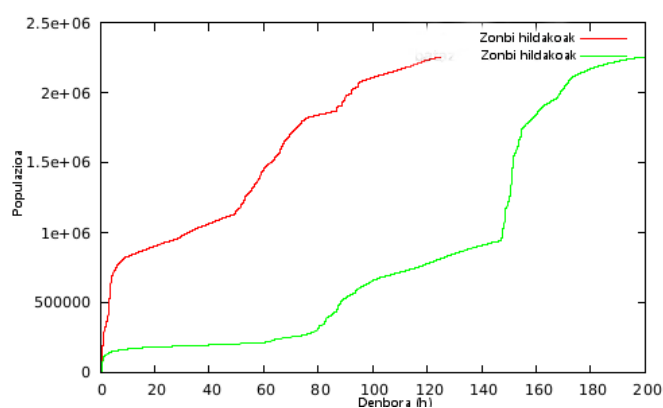
luzioa konparatzeko hurrengo grafikoak irudikatu dira.



(a) Zonbien eboluzioa. Gorriz Bilbotik hasitako epidemia. Berdez Iruñatik hasitakoa.



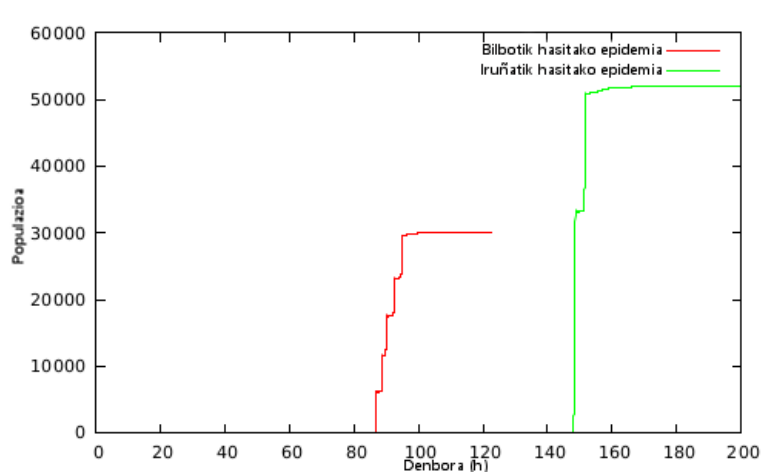
(b) Gizakien eboluzioa. Gorriz Bilbotik hasitako epidemia. Berdez Iruñatik hasitakoa.



(c) Zonbien hildakoen eboluzioa. Gorriz Bilbotik hasitako epidemia. Berdez Iruñatik hasitakoa.

Irudia 3.11: Bi simulazioen emaitzak alderatzeko grafikoak.

Gorritz bilbotik hasitako epidemia adierazten da eta berdez Iruñatik hasitakoa. Esan bezala, lehenengo eta hirugarren grafikoak zonbien eta zombi hildakoen dinamika deskribatzen dute, eta bigarren grafikoak gizakiena. Parametroek eta hastapen baldintzen lehenengo eta hirugarren grafikoak kurba positiboko eboluzioa izatea baldintzatzen dute, eta alderantziz bigarrenarekin. Hau da, aukeratutako parametroekin eta hasieran hogeiz zombiak hiribururen batean egoteagatik, amaierako egoeran zombiek gizakiak gaindituko dituzte indibiduo kopuruan. 3.11 irudian, lehenengo eta hirugarren grafikoetan kurba gorria berdearen gainetik ikusten da. Jakinaenez, Bilbon Iruñan baino populazio-dentsitate handiago dagoenez, normala da kurba gorria berdearen gainetik ikustea lehenengo eta hirugarren grafikoan eta behetik bigarrenetan, dentsitate-populazioak epidemia eboluzioaren abiadura duen eragin zuzena dela eta. Horretaz gain, hiru grafikoetako eboluzioak desberdinak dira bi simulazioentzako. Ez da harrizko emaitza, azken finean, epidemiak hiriburu desberdinetan hasten baitira, eta Hego Euskal Herriko populazio dentsitatea eta eremu geografikoa simetrikoa ez denez, ezin daitezke kurba berdinak espero.



Irudia 3.12: Hego Euskal Herriko hiriburuetan dagoen zombi populazioa une bakoitzean.

3.12 irudian Bilbotik hasitako epidemiak Iruñara heltzeko behar duen denbora eta Iruñatik hasitako epidemiak Bilbora heltzeko behar duen denbora irakur daitezke. Gorritz, Bilbotik hasitako epidemia adierazten da, eta berdez Iruñatik hasitakoa. Ikusten da bi simulazioek denbora desberdina behar dutela bigarren hiriburura heltzeko, bigarren hiriburua lehenengo kasurako Iruña eta bigarrenareako Bilbo bada ere. Hamaikagarrenez, Bilbon hasitako epidemiak denbora gutxiago beharko du, Bilbon Iruñan baino biztanle gehiago bizitzeaz gain, Bilboko ingurua ez dagoelako Iruñakoa bezain isolatua, 2.1 irudian ikus daitekeen moduan. Beste behin, epidemia-eboluzioaren abiadura populazio dentsitateak duen garrantzia ikusten da.

Kapitulua 4

Ondorioak

Lan honen helburua Hego Euskal Herrian zombien epidemia bat simulatzea izan da, epidemia hedapenaren azterketa bat egiteko, epidemia hedapenaren simetria aztertze-ko eta epidemia arriskutsu bilaka daitekeen aldiunea zehazteko.

Aztertutako guztiarekin ikusi da epidemia eboluzioak ez direla simetrikoak. Sorrera desberdina duten bi epidemia simetrikoak izango dira, eremu geografikoa eta bertako populazio-dentsitatea simetrikoak direnean. Hala eta guztiz ere, azpimarratu nahi da, asimetria guztiak egonda ere, exekutututako bi simulazioetako amaierako egoeren magnitude ordenak berdinak izan direla. Beraz, baieztatu daiteke birus batentzat hasierako baldintza antzekoak dituzten epidemia sorrera guztientzako amaierako egoera antzekoak lortuko direla, epidemia bukatu baino arinago deuseztatzen ez bada. Azkenengo hau garrantzizkoa izan daiteke birus baten agerraldiak aurrekaririk balu beste herrialderen batean. Herrialde horretako amaierako egoerak zelakoak izan diren ikus daitekeelako, eta birus agerraldiaren larritasuna neurtu. Birusa agertu den herrialdea eta birusa jasan duen herrialdea geroz eta antzekoagoak izan, orduan eta fidagarriagoak izango dira konparaketatik egindako irakurketak. Eremu geografikoaren itxura eta dentsitate-populazioak garrantzizkoak direla ikusi bada ere, ezin daiteke ahaztu herrialde bakoitzak dituen baliabideak kontuan hartzea. Dena den, herrialde garatuagoa izateagatik, ez du zertan arriskua horrenbeste murriztu. Horren adibide da 2015ean ebola Españara heldu zenekoa. Birusak bestelako ondorio larririk ekarri ez bazituen ere, nahiko muturrera dauden neurriak hartu behar izan ziren eta.

Alde batetik, epidemia arriskutsu bilakatzen da birusa zona jendeztatuenetara heltzen denean, birusaren eboluzioak aurrera egiteko probabilitateak bertan handitzen direlako. Geroz eta pertsona gehiago orduan eta jende gehiago dago infektatzeko. Gaixotasun tradizioaletarako ere azkenengo hori gertatzen dela intuitiboa da. Jendeztatuak diren eremuetatik hasitako epidemiek, oso jendeztatuak ez diren eremuetatik hasitako epidemiek baino probabilitate handiago dute aurrera egiteko. Birusak transmititzeko duen modua edozein dela ere, infektaturiko gizakiak birusaren eramaile izateagatik, infektaturik eta osasuntsu dauden norbanako desberdinen arteko kontaktu handiagoa dago hiriburuetatik hasitako epidemietan hiriburuetatik hasten ez direnekin konpa-

ratuz, jende gehiago bizi delako hiriburuetan. Infektatuta eta infektatuta ez dauden norbanako desberdinen arteko kontaktuak infektatzeko probabilitatea handitzen du. Egia da hiriburuetan gainontzeko zonaldeetan baino osasun zentro garatuagoak izaten direla, eta osasun zentro hauek epidemia hasi eta berehala deuseztatzeko gai izan daitezke. Hala eta guztiz ere, herrialde garatuetan, zona ez jendeztatuetatik hiriburuetara ailegatzeko baliabide arinak daude, beraz, ez da uste eremu hauetatik hasitako epidemiak arriskutsuak direla baldin eta osasun zentroak epidemiarekin akabatzeko gai baldin badira. Herrialde azpigaratuetan, aldiz, normalean ez dituzte izaten ezta birus ohikoekin ere akabatzeko osasun zentrotik. Bestalde, ikusi da isolatuago dauden eremuetatik gehiago kostatzen zaiola birusari aurrera egitea. Birus tradizionaletan ere hau antzematen da. Orainsu esan bezala, infektaturik eta infektatu gabekoen arteko kontaktu zuzenak birusaren trasmizioaren probabilitatea handitzen du. Gauzak horrela, geroz eta isolatuago egon birusa, orduan eta gutxiago izango dira birusak aurrera egiteko dituen probabilitateak. Esan beharra dago, epidemia kontrolatu aurretiko uneetan, infektaturik dagoen populazioa berrogeialdian izatea neurri ohikoak direla, birusa isolatzeko asmoarekin.

Ikusten da lortutako emaitzak eta errealitatean gertatzen dena, bateragarriak direla. Hau da, lortutako emaitzetan epidemiak normalean izaten dituzten eboluzioak eta jarrerak antzeman dira. Honek fidagarritasun bat ematen dio lan honetan garatutako ereduari.

Garatutako ereduaren erabilitako egoera kopurua ez litzateke bat etorriko Hego Euskal Herriko testuinguruarekin, bertako azpiegiturak, osasunari dagokionez, aurreratuegiak baitira lanean desberdindutako hiru egoerak baino ez izateko. Hego Euskal Herrian gaixotasun tradizionalak ordezkatzeko, ereduaren beste egoera bat gehitu beharko litzateke gutxienez; infektatuta dagoen eta kutsatu ezin duen populazioa, hain justu. Hemen prebentzio sistemak garatzeko dagoen gaitasunarekin eta hauek zabaltzeko dauden baliabideekin, ezinbestekoa da laugarren egoera hori gehitzea, hauen bidez kutsadura murriztu edo deuseztatzen da eta. Dena den, herrialde azpigaratueterako, aproposagoa litzateke, ez baitituzte osasun sistema aurreraturik, eta herrialde askotan, ezta osasun sistemarik ere. Hala ere, ordezkatu nahi den gaixotasunaren arabera gehitu beharko lirateke beharrezkoak liratekeen egoerak, baina esan bezala, herrialde garatuetan gorago aurkeztutako laugarren egoera hori egotea ezinbestekoa da.

Azkenik, komentatu behar da ordezkatu nahi den gaixotasunaren arabera finkatu beharko liratekeela ereduaren erabilitako parametroak, eta besteren bat behar izatekotan gehitu beharko litzatekeela, baina aldatok ez lukete programa osoa berregin behar izatea suposatuko.

Eredu honetan, zonbien epidemia bat simulatu da, eredu orokor bat sortzeko asmoz. Orokorra izateagatik, ezin du adibide partikular bakoitza ordezkatu, baina eredu hau moldatuz edozein gaixotasuni egoki lekiokoen ereduak sor daitezke, ikusi den moduan,

eredu honetan epidemiak duen eboluzioaren ezaugarriak eta gaixotasun tradizionalak dituzten ezaugarriak bateragarriak baitira. Hala eta guztiz ere, onartu behar da lan honek mugak dituela. Esaterako ez da eztabaidatu aztertutako birusa ez bezala transmititzen diren gaixotasunek eragindako egoera desberdinen arteko trantsizioak zelan inplementa daitezkeen. Zonbien epidemia aztertzer mugatu da lan honetan, eta edozein gaixotasun tradizional ordezkatzeko egin beharreko aldaketez ez da batere jardun. Aldaketon inguruko azterketa, inbestigazioan aritzeko gai handizalea izan daiteke, baina, baita interesgarria ere.

Bibliografía

- [1] Alexander A. Alemi, Mattheu Biebaum, Chistopher R. Myers and James P. Sethna, You can run, you can hide: The epidemiology and statistical mechanics of zombies, *physical review e* **92**, 052801 (2015).
- [2] Diego de Pereda Sebastián, Modelización matemática de la difusión de una epidemia de peste porcina entre granjas, Proyecto Fin de Máster en Investigación Matemática, 2010, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.
- [3] <http://www.historiadelamedicina.org/ross.htm>.
- [4] R. Hochreiter and C. Waldhauser, Zombie Politics: Evolutionary Algorithms to Counteract the Spread of Negative Opinions, [arXiv:1401.6420v1](https://arxiv.org/abs/1401.6420v1).
- [5] P. Munz, I. Hudea, J. Imad, and R. J. Smith, When zombies attack!: Mathematical modeling of an outbreak of zombie infection, *Infect. Dis. Model. Res. Prog.* **4**, 133 (2009).
- [6] Michael A. Gibson and Jehoshua Bruck, Efficient Exact Stochastic Simulation of Chemical Systems with Many Species and Many Channels, *J. Phys. Chem. A* **104**, 1876 (2000)
- [7] <https://geoazterketak.wordpress.com/2014/06/26/analisis-de-la-poblacion-del-pais-vasco-y-navarra/>.
- [8] https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution
- [9] C. Witkowski and B. Blais, Bayesian analysis of epidemicszombies, influenza, and other diseases, [arXiv:1311.6376](https://arxiv.org/abs/1311.6376).
- [10] <https://www.distanciasentreciudades.com>.
- [11] <https://es.wikipedia.org/wiki/Bilbao>.
- [12] <https://es.wikipedia.org/wiki/Pamplona>.