

MODELADO PARA ESTRATEGIAS DE CONTROL DE ROBOTS PARALELOS FLEXIBLES

*Tesis doctoral dirigida por los drs.:
Itziar Cabanes y Asier Zubizarreta*

Marzo 2018

PABLO BENGEOA GANADO



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

MODELADO PARA ESTRATEGIAS DE CONTROL DE ROBOTS PARALELOS FLEXIBLES

*Tesis doctoral dirigida por los drs.:
Itziar Cabanes y Asier Zubizarreta*

Marzo 2018



PABLO BENGOA GANADO

Estar escribiendo estas líneas supone llegar al final de una etapa. Todos, y por supuesto yo no soy una excepción, tendemos a hacer valoraciones cuando acaban las diferentes etapas de la vida. Es por ello que mientras modifico los últimos detalles de este documento, me afloran diferentes sentimientos vividos en estos intensos cuatro años.

Recuerdo que una vez tomada la decisión de realizar la tesis doctoral, mis esfuerzos se orientaron a encontrar la temática que abordase mejor mis inquietudes tecnológicas, ya que entendía que eso era lo más importante en una tesis. A día de hoy, con mi experiencia, me he dado cuenta que por encima del tema a abordar está ser dirigido por los directores apropiados y, sin duda, yo he tenido la suerte de tenerlos.

Ambos han creado un equipo humano increíble, donde prima el optimismo y el buen rollo. Y es que no podía ser de otra forma teniendo a Itziar en el equipo. “La amatxu” del equipo. Optimista donde las haya, siempre es capaz de dar la vuelta a cualquier situación adversa y hacernos sacar una sonrisa. Maestra en las relaciones públicas y en burocracia ha hecho de cada trámite burocrático, simplemente eso, un trámite. Por todo ello, MUCHAS GRACIAS ITZIAR.

Si la energía del equipo es Itziar, el motor (eléctrico, por supuesto) es Asier. Dominador del arte de las ciencias, solo él es capaz de desatascar cualquier problema técnico de un simple vistazo. Con una paciencia inaudita, es capaz de encontrar y solucionar cualquier fallo al instante, por muy escondido que éste esté entre una maraña de ecuaciones casi incomprensibles. ASIER, MUCHAS GRACIAS por tu dedicación y paciencia.

Siguiendo con el símil automovilístico, de poco vale tener energía y potencia si no tienes forma de transmitirla al suelo. Pero para eso también he tenido ayuda. En primer lugar Aitziber. Compañera en este viaje de principio a fin. Compañera de batallas y psicóloga a partes iguales. MILA ESKER AITZIBER por todos los buenos momentos.

En segundo lugar a mis compañeros de aventuras Sara, Rafa y Marcelo. Se suele decir que nadie es capaz de entender a un doctorando mejor que otro doctorando. No sé si ellos habrán llegado a entenderme en algún momento pero, por lo menos,

si que han conseguido sacarme muchos buenos momentos. GRACIAS SARA por dejarnos descubrir que debajo de ese armazón de hierro también hay un corazón sensible (aunque solo sea para los animalitos). GRACIAS RAFA por aguantarme en cada comida, y hacer de mi un poco más friki, si cabe. Y GRACIAS MARCELO por cada visita, por enseñarnos a ver la vida con otro ritmo y que se pueden tener Jet Lags de más de tres semanas.

En tercer lugar mi familia, porque no todo en esta vida es trabajo. Quiero agradecer a mis padres y a mi hermana por apoyarme siempre en esta aventura. Por estar a mi lado e inculcarme valores de trabajo y perseverancia para conseguir los objetivos que me pongo. MILA ESKER AITA, AMA ETA ELENA. No quiero olvidarme de ti, Maitane. Por tu paciencia, por saber comprenderme en los días buenos y no tan buenos. Por sacarme una sonrisa en cada ocasión. Por todo ello y mucho más, MILA ESKER MAITANE.

Por último quiero acordarme de mis amigos, en ocasiones los grandes damnificados cuando el tiempo apremiaba. MILA ESKER por vuestra paciencia.

Para acabar estas líneas, quiero agradecer a todos los miembros del laboratorio y el departamento toda su ayuda. Especialmente a Charles, siempre dispuesto a transmitirme sus conocimientos en mecánica y su experiencia en la flexibilidad de materiales.

Esta etapa esta llegando a su fin, pero si una época se acaba otra comienza. Sin embargo, para este nuevo viaje, y gracias a todos vosotros, dispongo de una maleta llena de lecciones aprendidas y buenos recuerdos.

Agradecimientos	a
Índice general	c
Nomenclatura	e
1 Introducción	1
1.1. Motivación del trabajo	1
1.2. Objetivos de la tesis	8
1.3. Estructura de la tesis	9
2 Estado del Arte	11
2.1. Introducción	11
2.2. Modelado	15
2.2.1. Modelos oscilantes continuos: Modelo Analítico	18
2.2.2. Métodos de Aproximación	25
2.2.3. Metodologías de Modelado Flexible	33
2.3. Control	34
2.3.1. Estrategias de control para robots flexibles	36
2.3.2. Estrategias de control para robots paralelos	49
2.3.3. Conclusiones	59
3 Desarrollo del Modelo	67
3.1. Introducción	67
3.2. Fundamentos del Método	69
3.3. Consideraciones Previas: Orientación y Velocidades Angulares	70
3.4. Metodología del Modelo Dinámico	73
3.4.1. Problema Cinemático	75
3.4.2. Problema Dinámico	84
3.4.3. Consideraciones Adicionales	93

3.5.	Ejemplos de validación	94
3.5.1.	Caso de estudio I: Robot Sheffield	95
3.5.2.	Caso de estudio II: Robot Delta	105
3.6.	Conclusiones	138
4	Desarrollo del Estimador de Variables Flexibles	141
4.1.	Introducción	141
4.2.	Desarrollo Teórico del Estimador de las deformaciones de los eslabones flexibles	143
4.2.1.	Fundamentos del Estimador	143
4.2.2.	Análisis Modal de un Eslabón Flexible	145
4.3.	Validación	147
4.3.1.	Validación mediante movimiento simétrico a lo largo del eje z	148
4.3.2.	Validación mediante movimientos complejos	163
4.4.	Conclusiones	179
5	Control de Par Computado	181
5.1.	Introducción	181
5.1.1.	Control en espacio articular vs Control en espacio cartesiano	182
5.2.	Control de Par Computado para Robots Flexibles	183
5.2.1.	Control de Par Computado Clásico	183
5.2.2.	CTC en el espacio articular	183
5.2.3.	Definición del Control de Par Computado para Robots Flexibles	185
5.3.	Implementación en simulación del Controlador CTC para robots Flexibles	188
5.4.	Conclusiones	190
6	Conclusiones y líneas futuras	193
6.1.	Conclusiones	193
6.1.1.	Aportaciones en el área del modelado	195
6.1.2.	Aportaciones en el estimador cinemático	196
6.1.3.	Aportaciones en el área de control	197
6.2.	Líneas Futuras	198
	Índice de tablas	201
	Índice de figuras	202
	Referencias	209

Acrónimos

- AFLC Adaptive Fuzzy Logic Control, Control Adaptativo de Lógica Fuzzy.
- AMM Assumed Modes Method, Método de Modos Asumidos.
- ANN Artificial Neural Networks, Redes Neuronales Artificiales.
- BC Boundary Condition, Condiciones de Contorno.
- CTC Computed Torque Control, Control de Par Computado.
- DDM Direct Dynamic Model, Modelo Dinámico Directo.
- DKM Direct Kinematic Model, Modelo Cinemático Directo
- DSF Direct Strain Feedback Control, Control por Realimentación Directa del Esfuerzo.
- EPAF End-Point Acceleration Feedback Control, Control por Realimentación de la Aceleración del Extremo.
- FEM Finite Element Method, Método de Elementos Finitos.
- FOC Fractional Order Control, Control de Orden Fraccionario.
- GCIS Grupo de Control e Integración de Sistemas.
- GDL Grados De Libertad.
- GPC Generalised Predictive Control, Control Predictivo Generalizado.
- IDM Inverse Dynamic Model, Modelo Dinámico Inverso.
- IKM Inverse Kinematic Model, Modelo Cinemático Inverso

- IMSAC Independent Modal Space Adaptive Control, Control Adaptativo del Espacio Modal Independiente.
- IRC Integral Resonant Control, Control Resonante Integral.
- LQR Linear Quadratic Regulator, Regulador Lineal Cuadrático.
- LVF Linear Velocity Feedback Control, Control por Realimentación Lineal de Velocidad.
- MIMO Multiple Input Multiple Output, Multi Entrada Multi Salida.
- MPC Model-Based Predictive Control, Control Predictivo Basado en Modelo.
- NASA National Aeronautics and Space Administration, Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio.
- NPF Negative Position Feedback Control o Control de Realimentación de Posición Negativa.
- NPID Non-linear Proportional Integral Derivative Controller, Controlador Proporcional Integrativo Derivativo No-lineal.
- N-R Método iterativo de Newton-Raphson.
- ODE Ordinary Differential Equation, Ecuación Diferencial Ordinaria.
- OTPC Optimal Trajectory Planning Control, Control de Planificación Óptima de Trayectorias.
- PDE Partial Differential Equations, Ecuaciones en Derivadas Parciales.
- PD Control Proporcional Derivativo.
- PID Control Proporcional Integrativo Derivativo.
- PKR Parallel Kinematic Robot, Robot de Cinemática Paralela.
- PPF Positive Position Feedback Control, Control de Realimentación de Posición Positiva.
- PTC Passive Theorem Control, Teorema de Control Pasivo.
- RPY Roll-Pitch-Yaw, Balanceo-Guiñada-Cabeceo.
- TCP *Tool Centre Point*, punto a controlar en el extremo final de mecanismo o robot ya que es donde irá adosada la herramienta que permitirá al robot efectuar su tarea.
- TTS Two-Time Scale Control, Control mediante Doble Escala de Tiempo.
- UPV-EHU Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.

Matrices y Vectores

ω	Vector de velocidad angular de la plataforma móvil respecto del sistema fijo.	\mathbb{R}^3
$\dot{\omega}$	Vector de aceleración angular de la plataforma móvil respecto del sistema fijo.	\mathbb{R}^3
ω_f	Vector de frecuencias naturales.	$\mathbb{R}^{n_{f_{ij}} \times 1}$
ω_p	Vector de velocidad angular de la plataforma móvil respecto al sistema de referencia asociado a ella misma.	\mathbb{R}^3
$\tilde{\omega}$	Matriz antisimétrica asociada al vector ω .	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$
$\dot{\psi}_x$	Vector de velocidades de las orientaciones del sistema de referencia móvil asociado a la plataforma móvil respecto del sistema de referencia fijo.	\mathbb{R}^3
$\ddot{\psi}_x$	Vector de aceleración de la orientación de la plataforma asociado al sistema de referencia móvil respecto del fijo.	\mathbb{R}^3
ψ_x	Termino de orientación del sistema de referencia móvil respecto del sistema de referencia fijo.	\mathbb{R}^3
τ	Vector de pares o fuerzas a aplicar en los accionamientos ligados a las articulaciones activas.	$\mathbb{R}^{n \times 1}$
\mathbf{a}	Vector de aceleraciones del punto \mathbf{P} compuesto por los términos de aceleración lineal y de orientación.	$\mathbb{R}^{n_{GD} \times 1}$
$\mathbf{A}_b^{b-1_i}$	Matriz de transformación homogénea rígida desde las coordenadas $X_{b-1_i}, Y_{b-1_i}, Z_{b-1_i}$ al sistema de referencia $X_{b_i}, Y_{b_i}, Z_{b_i}$.	$\mathbb{R}^{4 \times 1}$
$\mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$	Termino o matriz de Coriolis.	$\mathbb{R}^{n \times n}$
$\mathbf{D}(\mathbf{q})$	Matriz de inercia del sistema, simétrica y definida positiva.	$\mathbb{R}^{n \times n}$
$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$	Matriz estimada de inercia del sistema para aplicar en el lazo <i>feed-forward</i> o prealimentado.	$\mathbb{R}^{n \times n}$
\mathbf{e}	Vector de errores de seguimiento de las posiciones articulares.	$\mathbb{R}^{n \times n}$
\mathbf{E}	Matriz de relación entre la velocidad angular de la plataforma móvil, ω_p , y las derivadas de los ángulos de Euler, $\dot{\psi}_x$.	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$
$\mathbf{E}_b^{b-1_i}$	Matriz de transformación asociada a la deformación del eslabón b con respecto a $b - 1$ de la cadena cinemática i bajo la suposición de deformaciones pequeñas.	$\mathbb{R}^{4 \times 1}$

$\ddot{\mathbf{E}}$	Matriz de relación entre el vector de aceleración angular de la plataforma móvil, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_p$, y la segunda derivada de los ángulos de Euler, $\ddot{\boldsymbol{\psi}}_x$.	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$
$\dot{\mathbf{e}}$	Vector de errores de seguimiento de las velocidades articulares.	$\mathbb{R}^{n \times n}$
\mathbf{g}	Vector de la aceleración de la gravedad.	$\mathbb{R}^{n \times 1}$
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	Término de gravedad del modelo dinámico.	$\mathbb{R}^{n \times 1}$
\mathbf{h}	Matriz que agrupa los componentes no lineales de fricción, gravedad, Coriolis y rigidez (para el caso de los robots flexibles).	$\mathbb{R}^{n \times n}$
$\widehat{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$	Matriz estimada que agrupa los componentes no lineales de fricción, gravedad, Coriolis y rigidez (para el caso de los robots flexibles) para aplicar en el lazo <i>feed-forward</i> o prealimentado.	$\mathbb{R}^{n \times n}$
\mathbf{J}_i	Link Jacobian Matrices, Jacobiana de las cadenas serie.	$\mathbb{R}^{n_r \times n}$
$\dot{\mathbf{J}}_i$	Jacobiana de Aceleración asociada a las cadenas serie.	$\mathbb{R}^{n_r \times n}$
\mathbf{J}_p	Jacobianas de la plataforma.	$\mathbb{R}^{n_d \times n_r}$
$\dot{\mathbf{J}}_p$	Jacobiana de aceleración de la plataforma.	$\mathbb{R}^{n_d \times n_r}$
\mathbf{J}_{q_i}	Jacobiana flexible de la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_d \times n_{f_i}}$
\mathbf{J}_{q_i}	Jacobiana articular de la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_d \times [n_r + n_{f_i}]}$
$\mathbf{J}_{q_i}^\dagger$	Jacobiana articular pseudoinversa por la derecha de la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{[n_r + n_{f_i}] \times n_d}$
$\mathbf{J}_{q_i}^\ddagger$	Jacobiana articular pseudoinversa por la izquierda de la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{[n_r + n_{f_i}] \times n_d}$
\mathbf{J}_{q_r}	Jacobianas de las variables articulares rígidas.	$\mathbb{R}^{n_r \times n}$
$\dot{\mathbf{J}}_{q_r}$	Jacobianas de aceleración asociada a las variables articulares rígidas.	$\mathbb{R}^{n_r \times n}$
$\mathbf{J}_{q_{r_i}}$	Jacobiana articular rígida de la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_d \times n_r}$
$\dot{\mathbf{J}}_{q_{r_i}}$	Jacobiana de aceleración asociada a las articulaciones rígidas de la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_d \times n_r}$
\mathbf{J}_{x_i}	Jacobiana espacial de la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_d \times n}$
$\dot{\mathbf{J}}_{x_i}$	Jacobiana de aceleración asociada a las variables espaciales de la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_d \times n}$
$\mathbf{M}_x(\mathbf{x})$	Matriz de inercia de la plataforma móvil, simétrica y positiva definida.	$\mathbb{R}^{n \times n}$

$\mathbf{p}_{b-1}^{0_i}$	Vector de posición del extremo del link anterior obtenido a partir de la matriz de transformación $\mathbf{T}_{b-1}^{0_i}$ asociada a las variables flexibles de la cadena cinemática i .	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$
\mathbf{q}_r	Término de posición asociado a las coordenadas cartesianas del punto \mathbf{P} .	\mathbb{R}^3
\mathbf{q}	Vector de coordenadas articulares del robot, de dimensión igual a los n grados de libertad de éste.	$\mathbb{R}^{n_q \times 1}$
\mathbf{q}_f	Vector de variables flexibles.	$\mathbb{R}^{n_{q_f} \times 1}$
\mathbf{q}_r	Vector de variables rígidas.	$\mathbb{R}^{n_{q_r} \times 1}$
\mathbf{q}_a	Subconjunto de coordenadas actuadas articulares, $\mathbf{q}_a \in \mathbf{q}$.	$\mathbb{R}^{n_{q_a} \times 1}$
\mathbf{q}_{f_i}	Vector de variables flexibles asociada a la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_{f_i}}$
\mathbf{q}_i	Vector de coordenadas articulares asociadas a la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_{q_i}}$
\mathbf{q}_{na}	Vector de variables no actuadas.	$\mathbb{R}^{n_{q_{na}}}$
\mathbf{q}_{na_i}	Vector de variables articulares pasivas rígidas asociada a la cadena serie i .	$\mathbb{R}^{n_{q_{na_i}}}$
r	Vector de posición definido en coordenadas inerciales.	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$
$\widehat{\mathbf{R}}_b^{0_i}$	Matriz de rotación del eslabón b definido por la matriz de rotación $\widehat{\mathbf{T}}_b^{0_i}$ asociada a las variables rígidas de la cadena cinemática i .	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$
r_{b_i}	Vector de posición del eslabón b de la cadena cinemática i definido en coordenadas móviles.	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$
\mathbf{R}_p	Matriz de rotación de la plataforma móvil respecto del sistema de referencia fijo.	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$
$\dot{\mathbf{R}}_p$	Derivada de la matriz de rotación de la plataforma móvil respecto del sistema de referencia fijo.	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$
\mathbf{T}	Matriz de transformación o Jacobiana que relaciona las derivadas de todas las variables rígidas $\dot{\mathbf{q}}_r$ con las de las variables actuadas $\dot{\mathbf{q}}_a$.	$\mathbb{R}^{n_r \times n_{q_a}}$
$\mathbf{T}_{b-1}^{0_i}$	Matriz de transformación entre el eslabón $b - 1$ y el origen \mathbf{O} asociada a las variables flexibles de la cadena cinemática i .	$\mathbb{R}^{4 \times 1}$
$\mathbf{T}_{b-1}^{0_i}$	Matriz de transformación entre el eslabón $b - 1$ y el origen \mathbf{O} asociada a las variables rígidas de la cadena cinemática i .	$\mathbb{R}^{4 \times 1}$
\mathbf{T}_R	Matriz que relaciona el vector de velocidades \mathbf{v} y la derivada del vector de coordenadas de salida $\dot{\mathbf{x}}$.	$\mathbb{R}^{6 \times 6}$

\mathbf{v}	Vector de velocidades del punto P compuesto por las derivadas de los términos de posición \mathbf{P}_x y orientación $\boldsymbol{\psi}_x$.	$\mathbb{R}^{n_{GDL}}$
\mathbf{x}	Localización del TCP, coordenadas de salida o coordenadas de operación (<i>task coordinates</i>).	\mathbb{R}^n
$\dot{\mathbf{x}}$	Vector de velocidad del TCP.	\mathbb{R}^n
$\ddot{\mathbf{x}}$	Vector de aceleraciones del TCP.	\mathbb{R}^n
$\mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}}}$	Vector propio n_{GDL} .	$\mathbb{R}^{n_{GDL} \times 1}$

Funciones y Símbolos

δ	Símbolo para denotar la primera variación, o cambio virtual, de la variable entre corchetes.
ϕ_k^u	Función admisible descrito mediante el uso de los Polinomios de Hermite definido en el eje local u .
ϕ_k^v	Función admisible descrito mediante el uso de los Polinomios de Hermite definido en el eje local v .
ϕ_k^w	Función admisible descrito mediante el uso de los Polinomios de Hermite definido en el eje local w .
$\psi_i(x)$	Función admisible. Función espacial de los modelos de series distribuidas.
\mathcal{L}	Función Lagrangiana del robot.
\mathcal{L}_{MP}	Contribución de la plataforma móvil en la función Lagrangiana del robot.
\mathcal{L}_s	Contribución de las cadenas serie en la función Lagrangiana del robot.
\mathcal{L}_{s_i}	Contribución de la cadena serie i en la función Lagrangiana del robot.
$q_i(t)$	Función temporal de amplitud de los modelos de series distribuidas
\mathcal{T}	Energía cinética.
\mathcal{T}_{bj_i}	Contribución de cada elemento b de cada eslabón de la cadena cinemática i en la energía cinética.
\mathcal{T}_{MP}	Contribución de la plataforma móvil en la energía cinética.
\mathcal{T}_{s_i}	Contribución de cada eslabón de la cadena cinemática i en la energía cinética.

- $u_{bj_i}(x, t)$ Deformación causadas por el elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i en el eje local u .
- \mathcal{V} Energía potencial.
- $v_{bj_i}(x, t)$ Deformación causadas por el elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i en el eje local v .
- \mathcal{V}_{bj_i} Contribución de cada elemento b de cada eslabón de la cadena cinemática i en la energía potencial.
- $\mathcal{V}_{e_{bj_i}}$ Componente de elasticidad de la energía potencial de cada elemento b de cada eslabón de la cadena cinemática i .
- $\mathcal{V}_{g_{bj_i}}$ Componente de gravedad de la energía potencial de cada elemento b de cada eslabón de la cadena cinemática i .
- \mathcal{V}_{MP} Contribución de la plataforma móvil en la energía potencial.
- \mathcal{V}_{s_i} Contribución de cada eslabón de la cadena cinemática i en la energía potencial.
- $w_{bj_i}(x, t)$ Deformación causadas por el elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i en el eje local w .

Parámetros y Variables

$\epsilon_{n_{GDL}}$	Movimiento modal n_{GDL} .	
μ	Ángulo Yaw o de Euler respecto del eje z del sistema de referencia fijo.	rad
$\dot{\mu}$	Derivada del ángulo Yaw o de Euler respecto del eje z del sistema de referencia fijo.	rad/s
ω_x	Componente x de la velocidad angular de la plataforma móvil.	rad/s
ω_y	Componente y de la velocidad angular de la plataforma móvil.	rad/s
ω_z	Componente z de la velocidad angular de la plataforma móvil.	rad/s
ρ	Densidad de masa.	kg ³ /m
θ	Ángulo Roll o de Euler respecto del eje x del sistema de referencia fijo.	rad
$\dot{\theta}$	Derivada del ángulo Roll o de Euler respecto del eje x del sistema de referencia fijo.	rad/s
ξ	Ángulo Pitch o de Euler respecto del eje y del sistema de referencia fijo.	rad

$\dot{\xi}$	Derivada del ángulo Pitch o de Euler respecto del eje y del sistema de referencia fijo.	rad/s
\mathcal{A}	Área.	m ²
b	Identificador de cada eslabón.	
\mathcal{E}	Módulo de elasticidad longitudinal, o módulo de Young.	Pa
$h_{b,2j_i}$	Pendiente de la flexión en el nodo común con $(j - 1)$ y j del eslabón b de la cadena cinemática i .	
$h_{b,2j+1_i}$	Desplazamiento de la flexión en el extremo del elemento y j del eslabón b de la cadena cinemática i .	m
$h_{b,2j-1_i}$	Desplazamiento de la flexión en el nodo común con $(j - 1)$ y j del eslabón b de la cadena cinemática i .	m
$h_{b,2j+2_i}$	Pendiente de la flexión en el extremo del elemento y j del eslabón b de la cadena cinemática i .	
$h_{b,2j_{max_i}+1_i}^u$	Desplazamientos de flexión en el sistema de referencia local u en el nodo del extremo (j_{max_i}) de la cadena cinemática i .	m
$h_{b,2j_{max_i}+1_i}^v$	Desplazamientos de flexión en el sistema de referencia local v en el nodo del extremo (j_{max_i}) de la cadena cinemática i .	m
$h_{b,2j_{max_i}+1_i}^w$	Desplazamientos de flexión en el sistema de referencia local w en el nodo del extremo (j_{max_i}) de la cadena cinemática i .	m
$h_{b,2j_{max_i}+2_i}^u$	Pendiente de la flexión en el sistema de referencia local u en el nodo del extremo (j_{max_i}) de la cadena cinemática i .	
$h_{b,2j_{max_i}+2_i}^v$	Pendiente de la flexión en el sistema de referencia local v en el nodo del extremo (j_{max_i}) de la cadena cinemática i .	
$h_{b,2j_{max_i}+2_i}^w$	Pendiente de la flexión en el sistema de referencia local w en el nodo del extremo (j_{max_i}) de la cadena cinemática i .	
I	Segundo momento de inercia de la sección transversal de la viga.	kg m ²
i	Identificador de la cadena serie, $i = 1 \dots n$.	
$I_{bj_i}^x$	Momento de inercia asociados al eje x del elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i .	kg m ²
$I_{bj_i}^y$	Momento de inercia asociados al eje y del elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i .	kg m ²
$I_{bj_i}^z$	Momento de inercia asociados al eje z del elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i .	kg m ²
I_c	Inercia centroidal de la carga situada en la plataforma móvil.	kg m ²

I_p	Inercia centroidal de la plataforma móvil.	kg m ²
j	Identificador del elemento que compone el eslabón b de la cadena cinemática i .	
K	Energía cinética.	J
l_{b_j}	Longitud del elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i .	m
m	Número de eslabones por cadena cinemática.	
m_c	Masa de la carga situada en la plataforma móvil.	kg
m_p	Masa de la plataforma móvil.	kg
N	Número de términos utilizados para la aproximación.	
n	Número de grados de libertad rígidos de un robot. En caso de ser totalmente paralelo, el número de GDL rígidos coincide con el número de cadenas cinemáticas que unen la base y la plataforma móvil.	
n_a	Número de variables articulares activas de un robot.	
n_{b_i}	Número de elementos que componen el eslabón b de la cadena cinemática i .	
n_d	indica la dimensión del espacio vectorial, siendo $n_d = 2$ si se trabaja en el plano y $n_d = 3$ en el espacio.	
n_f	Número total de variables flexibles del robot.	
n_{f_i}	Número de variables flexibles existentes en la cadena serie i .	
n_q	Número de variables articulares de un robot.	
n_r	Número de restricciones rígidas a las que está sometido el robot.	
n_{r_i}	Número de variables articulares rígidas existentes en la cadena serie i .	
q_{a_i}	Variable articular activa asociada a la cadena serie i .	rad o m
t	Tiempo, variable temporal.	s
t_1	Tiempo de inicio.	s
t_2	Tiempo final.	s
U	Energía potencial.	J
$u(x, t)$	Deformación de la viga en el punto x en el instante t .	m

$w(x, t)$	Desplazamiento transversal.	m
\mathcal{W}_{nc}	Trabajo virtual realizado por las fuerzas no conservativas.	J
x	Distancia, variable espacial.	m



1.1. Motivación del trabajo

Desde que se comenzase a utilizar a comienzos de los 60, la robótica industrial se ha consolidado como una piedra angular dentro de la producción industrial en masa, ya que ha permitido reducir los tiempos de ciclo, al mismo tiempo que incrementar la productividad y la calidad del producto final. Si bien es cierto que la industria automovilística ha sido el consumidor principal de la robótica industrial, en la última década se ha experimentado un incremento del interés en áreas tan dispares como la industria alimentaria, farmacéutica, médica o agrícola entre otras.

Los robots industriales son mecanismos que actúan sobre el proceso de producción de forma autónoma, los cuales se caracterizan por dos atributos principales: la multifuncionalidad y la programabilidad. Esto es, por una parte, un robot es un mecanismo versátil, que puede ejecutar diferentes tipos de tareas de forma autónoma. Por otro, estas tareas se pueden ejecutar cambiando el programa del robot sin modificar

su hardware. Ambas características son indispensables en una industria que busca ser flexible en su producción, lo que ha llevado al éxito de estos mecanismos.

En la misma línea, en la actualidad, debido a la globalización en la que esta sumergida la industria, ésta demanda productos de mayor calidad y menores tiempos de producción para mantenerse competitivos. Por lo tanto, para satisfacer dichos requerimientos, se requiere de robots de gran precisión y rapidez. Sin embargo, en los robots utilizados normalmente por la industria, denominados robots serie (Figura 1.1a), el incremento de la velocidad implica, normalmente, una reducción de precisión. Esto se debe a su estructura serie, ya que este tipo de robots concatenan sus diferentes eslabones mediante articulaciones actuadas, generando una única cadena cinemática. Estas articulaciones permiten un movimiento relativo entre los elementos que los unen, dotando así de movilidad al conjunto del robot. Debido a esta estructura serie, los actuadores están localizados, en la gran mayoría de los casos, en las propias articulaciones, incrementando la inercia del sistema y reduciendo su capacidad de aceleración. Además, la propia estructura serie de este tipo de robots hace que los errores de posicionamiento de cada articulación sean propagados desde la base hacia el elemento terminal, donde se encuentra el *Tool Centre Point* (TCP), reduciendo así su precisión.



(a) Robot serie de 6 GDL.



(b) Robot Paralelo Delta.

Figura 1.1: Robot serie (a) cortesía de KUKA Robotics Corporation y robot paralelo (b) cortesía de ABB Flexible Automation.

Por su parte, a diferencia de los serie, los Robots de Cinemática Paralela (PKR), Figura 1.1b, disponen de varias cadenas cinemáticas que conectan una base fija y una plataforma móvil, en la cual se sitúa el TCP. Esta estructura permite distribuir la carga entre los diferentes brazos, proporcionando una mayor rigidez al conjunto del robot, así como la compensación de errores entre los diferentes brazos. Adicionalmente, en la mayoría de las estructuras paralelas existe la posibilidad de situar todos los actuadores en la base fija del mecanismo, reduciendo así la masa móvil, y por consiguiente, favoreciendo las operaciones del robot a alta velocidad. Es por todo ello que, los PKR

tienen un mejor rendimiento en términos de precisión, consumo energético y eficiencia de trabajo [42] (Tabla 1.1). Por lo tanto, cuando se requiere rapidez y alta precisión, los Robots de Cinemática Paralela se perfilan como la mejor opción [149].

Características	Robot Serie	Robot Paralelo
Tipo de Manipulador:	Lazo abierto.	Lazo cerrado.
Elemento Terminal:	Extremo del elemento.	Plataforma.
Descripción Natural:	Espacio Articular.	Espacio Cartesiano.
Actuadores:	En cada Eslabón.	Normalmente en la Base Fija.
Fuerzas Inerciales:	Altas.	Bajas.
Rigidez:	Baja.	Alta.
Propiedad Principal:	Destreza.	Velocidad.
Calculo de la Cinemática Directa:	Directa.	Compleja.
Calculo de la Cinemática Inversa:	Compleja.	Directa.
Singularidades:	Extremos del espacio de trabajo.	Dentro del espacio de trabajo.
Aplicaciones:	Amplio rango de movimientos.	Precisión, rapidez, manipulación de grandes cargas y/o fuerzas de interacción.
Consideraciones de Diseño:	Fuerza, rigidez y robustez ante fallos de precisión debidas a la carga.	La estructura, el espacio de trabajo, singularidades e interferencias entre eslabones.

Tabla 1.1: Diferencias entre los Manipuladores Series y los Paralelos.

Por su parte, la necesidad constante de mantenerse competitivos, ha llevado a los fabricantes a tratar de lograr mayor productividad a un menor coste. Para ello, estos

han tratado de disminuir la masa móvil de los robots reduciendo la sección transversal de sus eslabones, con el objetivo de reducir los consumos energéticos y permitir el uso de actuadores menos potentes, disminuyendo así los costes de mantenimiento y fabricación de los robots. Sin embargo, la reducción de la sección transversal junto con las altas aceleraciones requeridas en aplicaciones de ciclo corto, han derivado en cierto grado de deformación elástica en los eslabones [42]. Estas deformaciones pueden tener gran influencia tanto en la dinámica como en la cinemática de los robots, pudiendo causar errores substanciales en el control de movimiento. Por lo tanto, la suposición generalizada subyacente de que los manipuladores están compuestos por eslabones infinitamente rígidos, no es una consideración válida a la hora de diseñar controladores basados en modelo para aplicaciones de alta inercia y/o con grandes fuerzas de interacción. Es decir, para aplicaciones de alto rendimiento, como las que se tratan en este trabajo, es necesario analizar el robot como un manipulador flexible.

La flexibilidad en la robótica: articulaciones flexibles vs eslabones flexibles

Desde el punto de vista científico, un robot o manipulador flexible se define como aquel que incluye algún elemento con cierto grado de flexibilidad, siendo la flexibilidad la propiedad mecánica de una pieza de deformarse de forma elástica debido a un par o fuerza [69]. En la práctica, la flexibilidad mecánica en los manipuladores está presente por dos razones principales, [199]: a) El uso de elementos de transmisión complejos que generan flexibilidad en las articulaciones (véase Figura 1.2a) o b) el uso de materiales ligeros y diseños esbeltos que producen flexibilidad distribuida a lo largo del eslabón (véase Figura 1.2b).

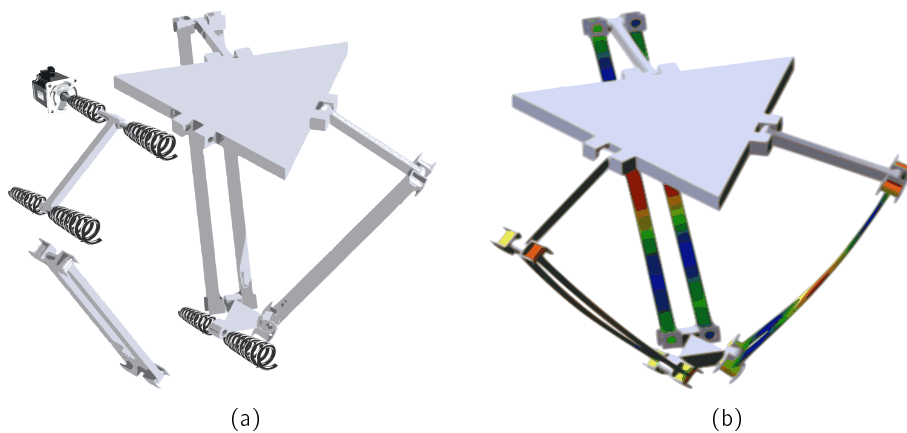
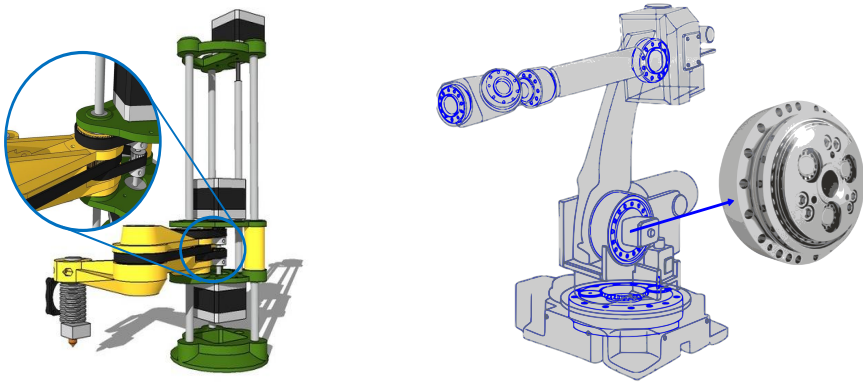


Figura 1.2: Esquema de manipulador con articulaciones flexibles (a) y eslabones flexibles (b).

La primera de las razones expuestas define la **flexibilidad en las articulaciones** de los manipuladores, considerando rígidos los eslabones que las unen [84, 224, 252]. La presencia de flexibilidad en las articulaciones en los robots industriales es común a

la hora de utilizar elementos de transmisión/reducción del movimientos como correas (véase en el robot SCARA, Figura 1.3a), cables, *Harmonic drive*, reductor cicloidal (véase Figura 1.3b), etc. El propósito de estos componentes es tanto permitir instalar los actuadores cerca de la base para mejorar la eficiencia dinámica como garantizar ratios de reducción elevados. Sin embargo, cuando estos componentes están sujetos a fuerzas/pares, éstos elementos son intrínsecamente flexibles, ya que se exponen a torsiones que provocan una variación entre el ángulo de salida y el ángulo de movimiento del actuador. Es por ello que, este tipo de flexibilidad sólo se experimenta en aquellos actuadores rotacionales, y nunca en los prismáticos.



(a) Robot SCARA con correas de transmisión. (b) Robot de 6GDL con reductora cicloidal.

Figura 1.3: Esquema de manipuladores con articulaciones flexibles debido a correas de transmisión (a) y reductora cicloidal (b).

A la hora de ser modelada, la desviación generada por este fenómeno, puede concentrarse en las articulaciones del robot, limitando así la complejidad asociada a la ecuación de movimiento. Comparando dicho modelo con su homólogo rígido, el modelo dinámico del robot con articulaciones flexibles (y eslabones rígidos) requiere del doble de variables generalizadas para caracterizar por completo la configuraciones de todos los elementos que constituyen el brazo (motores y eslabones).

La segunda de las razones, por su parte, aborda los manipuladores con **flexibilidad en los eslabones**, considerando rígidas las uniones entre ellos [29, 103, 186]. Esta flexibilidad estudia la deformación de cada eslabón, la cual provoca variaciones tanto en la posición como en la orientación del extremo (véase Figura 1.4). Dichas desviaciones se deben tanto a las fuerzas y/o pares a las que está sometido cada eslabón como a las aceleraciones sufridas.

La consideración de la flexibilidad en los eslabones hacen del modelo dinámico un sistema distribuido cuyos movimientos están definidos tanto por las variables rígidas \mathbf{q}_r (aquellas variables que monitorizan el movimiento de las articulaciones), como por las variables flexibles \mathbf{q}_f (aquellas variables que definen el movimiento elástico de los eslabones). Los sistemas distribuidos se rigen por Ecuaciones en Derivadas Parciales

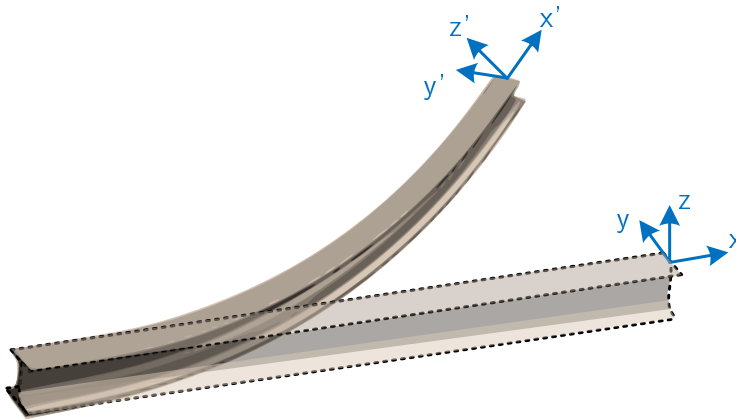


Figura 1.4: Ejemplo de viga deformada con variación tanto en posición como en orientación del extremo.

(PDE), las cuales, teóricamente, tienen infinitos grados de libertad. Por lo tanto, calcular la solución exacta del modelo flexible no es factible para aplicaciones de control [30, 197], ya que se requerirían infinitos sensores y/o estimadores para su implementación. Es por ello que, es necesario discretizar el modelo basándose en los métodos de aproximación.

Con todo ello, al igual que en el caso de los robots con articulaciones flexibles, el modelo dinámico de un manipulador con eslabones flexibles requiere de un número mayor de variables generalizadas en comparación con su homólogo rígido. Sin embargo, desde el punto de vista de control, las propiedades resultantes del modelo con eslabones flexibles o con articulaciones flexibles son muy diferentes. Esto se debe, principalmente, a que las variables actuadas del controlador están limitadas a las articulaciones activas del robot, pese a que, en el caso de los manipuladores con eslabones flexibles, las desviaciones se dan a lo largo del eslabón. Es por ello que, el control de manipuladores con eslabones flexibles es un problema sustancialmente más complejo que el de la flexibilidad en las articulaciones [69].

Flexibilidad en los eslabones: ventajas e inconvenientes

A la hora de analizar la problemática de flexibilidad de los eslabones, ésta se presenta, principalmente, en dos escenarios diferentes:

1. **En Régimen Transitorio:** Durante el transitorio se crean oscilaciones muy poco amortiguadas que aumentan el tiempo de establecimiento considerablemente. A modo de ejemplo, se estima que son necesarias varias horas para amortiguar por debajo de 2,5cm las oscilaciones del ensamblador *Shuttle Flight* de la Estación Internacional [62].
2. **En Régimen Permanente:** Las deformaciones producidas por las fuerzas, prin-

principalmente la fuerza gravitatoria, producen desviaciones en la posición y/u orientación final del extremo del robot, generando errores permanentes en la estimación del TCP.

Como consecuencia de ello, la flexibilidad se ha considerado tradicionalmente como un problema. Es por ello que sus efectos se han intentado minimizar mediante estrategias de control. Fruto de estos trabajos se han desarrollado algunos prototipos con fines industriales. Dichos prototipos abarcan desde manipuladores de un solo elemento [99] hasta brazos con múltiples eslabones que trabajan en el espacio tridimensional [158]. Sin embargo, los trabajos experimentales se limitan, en gran medida, a manipuladores de un solo elemento. Esto se debe a la complejidad que supone los sistemas de múltiples eslabones, ya que se incrementan los grados de libertad y de las interrelaciones entre los movimientos y sus deformaciones [222].

Adicionalmente, en los últimos años han surgido otros enfoques donde se aborda la flexibilidad como una propiedad mecánica ventajosa, ya que estos robots ofrecen varios beneficios sobre sus homólogos rígidos. Entre los beneficios existentes destacan: a) una respuesta del sistema más rápida, b) un menor consumo energético, c) unos actuadores relativamente menores para los mismo tiempos de ciclo y d) una menor masa del sistema completo. En definitiva, se reduce el coste del sistema completo [222] al mismo tiempo que se aumenta la seguridad debido a la reducción de la masa móvil. Todas estas ventajas han impulsado a la creación de nuevas líneas de investigación en la robótica, impensables con los robots rígidos convencionales, tales como:

- **Facilitar las tareas de ensamblado:** La flexibilidad del manipulador puede permitir que el ensamblado de las piezas se realice de forma mucho más suave y precisa, evitando golpear y marcar las piezas debido a pequeñas imprecisiones, las cuales pueden ser contrarrestadas por la flexibilidad del manipulador [76].
- **Control de situaciones de colisión:** Dentro de la robótica, una de las líneas que más investigadores esta atrayendo en los últimos años es la cooperación entre robot y humano. En dicha línea, es de vital importancia evitar las situaciones de colisión. La flexibilidad permite amortiguar los efectos de la colisión e incluso detectarla [77].
- **Creación de nueva sensórica:** Basándose en la naturaleza, se han desarrollado sensores donde se aprovecha la elasticidad de los elementos para detectar objetos, de la misma forma que lo hacen los insectos con las antenas o los gatos con sus bigotes [192, 74].
- **Reducción de vibraciones:** En aplicaciones de manipuladores móviles (robots móviles sobre el que se instalan un manipulador), se utiliza la flexibilidad de los eslabones para contrarrestar las oscilaciones introducidas debidas a las irregularidades de la superficie (baches, rugosidades...) o la propia tracción (inercias, aceleraciones bruscas, etc) [123].

- **Aplicaciones médicas:** Bajo el mismo concepto que el anterior, la flexibilidad de los materiales puede ser utilizada en pacientes con Parkinson o enfermedades similares para reducir las oscilaciones producidas por la enfermedad aumentando calidad de vida de los pacientes [136].

1.2. Objetivos de la tesis

El principal objetivo de la presente tesis doctoral es mejorar la precisión de los robots paralelos para aplicaciones de alta capacidad dinámica incluso en presencia de deformaciones en los eslabones. Para ello se requerirá definir un esquema de control avanzado basado en modelo que permita incrementar la eficiencia dinámica de los robots paralelos a alta velocidad y dinámica. Evidentemente, para la definición de este control basado en modelo se requerirá el cálculo del modelo dinámico del robot de tal forma que se considere explícitamente la deformación de sus eslabones, lo que requerirá la modificación de la metodología de cálculo de modelos dinámicos en robots paralelos. Además, estas deformaciones requerirán ser medidas de forma rápida y precisa, sin que con ello se disminuyan las capacidades dinámicas del robot. Por último, tanto los modelos dinámicos como los estimadores desarrollados tendrán que ser validados experimentalmente, lo que requerirá el diseño de una plataforma de validación adecuada a las necesidades que plantean los robots paralelos.

En base a estas observaciones y con el fin de lograr el objetivo principal, se plantean tres objetivos parciales,

- Extender la metodología de cálculo del modelo dinámico de robot paralelos con el fin de considerar las deformaciones de los eslabones. Para ello se deberá definir una metodología general, la cual pueda ser utilizada independientemente de la flexibilidad de los eslabones. Es decir, que dicha metodología podrá ser aplicable tanto a robots con eslabones rígidos, flexibles o una combinación de ambos.
- Desarrollar un estimador de la deformación de los eslabones que permita conocer la deformación de éstos de forma precisa y con un coste computacional mínimo. Además, y para favorecer su implementación en la robótica industrial, el coste económico deberá de ser reducido.
- Definir estrategias de control avanzado basadas en el anterior modelo dinámico adecuadas a las características específicas de los robots paralelos teniendo en cuenta la flexibilidad de (parte de) sus eslabones.

Estos tres objetivos conforman los tres ejes o bloques principales de la tesis y su definición deriva directamente del objetivo principal.

1.3. Estructura de la tesis

La siguiente tesis se estructura en 6 capítulos principales. En el primero de ellos, Capítulo 2, se realiza un detallado estudio del arte donde se ponen en valor las diferentes contribuciones realizadas hasta la fecha.

A partir de dicho análisis se definen las directrices a seguir en cada uno de los tres capítulos siguientes. Cada uno de estos capítulos hace referencia directa a cada uno de los objetivos definidos en la sección anterior. De este modo, en el primero de ellos, Capítulo 3, se abordará el modelado dinámico de robots paralelos flexibles. A partir del análisis de las aproximaciones más extendidas en los robots paralelos realizado en el Capítulo 2, en este capítulo se plantea la extensión de la metodología de modelado dinámico de robots paralelos de forma que se pueda definir el modelo en función de cualquier configuración de eslabones rígidos o flexibles. Esta metodología es validada posteriormente tanto en simulación, mediante softwares Multibody, como mediante prototipos reales.

El segundo de los objetivos definidos, el desarrollo de un estimador para la medición de las deformaciones de los eslabones flexibles, se aborda en el Capítulo 4. En él se analizan las diferentes alternativas existentes en la actualidad, resaltando las bondades y deficiencias de cada una de ellas. A partir de dicho estudio, en el capítulo se desarrolla un estimador que mide con mínimos recursos computacionales la deformación de los eslabones a partir del análisis modal con la medida de un encóder rotacional. El estimador desarrollado ha sido validado tanto en simulación como experimentalmente sobre un Robot Delta comercial.

El último de los objetivos definidos, el control avanzado de robots paralelos flexibles basados en modelo, se abordará en el Capítulo 5. En él, a partir del análisis de las estrategias de control aplicada tanto a mecanismos flexibles como a robots paralelos realizado en el Capítulo 2, se define una estrategia de control basada en el Control de Par Computado (CTC) para robots flexibles. Esta estrategia avanzada ha sido validada mediante cosimulación utilizando el software comercial MSC.Adams de cálculo multibody, en el que es posible integrar cálculos de Nastran en elementos finitos.

Por último, en el capítulo final se resumen las conclusiones principales del trabajo y se proponen una serie de líneas futuras de investigación.



2.1. Introducción

En los últimos años se ha producido un notable incremento del interés por los robots paralelos, tanto por parte de los fabricantes de robots como de los investigadores y el entorno industrial en general. Como se ha mencionado anteriormente, su estructura, aunque compleja, aporta, frente a los manipuladores series: a) una mayor rigidez, b) un notable incremento de la relación carga/masa, c) la posibilidad de colocar los actuadores en la base del robot reduciendo así la masa móvil y d) la posibilidad de compensar los errores de posicionamiento entre las diversas cadenas cinemáticas.

Sin embargo, a pesar de que en la robótica serie existe una amplia bibliografía en el área del control, incluyendo numerosos libros donde se abordan las principales aportaciones en el área, en el ámbito de la robótica paralela el control ha sido un aspecto apenas explorado hasta hace unos años. La escasez de trabajos en el área de control de robots paralelos tiene su origen en tres principales causas: la propia

comunidad investigadora, que hasta hace unos años estaba compuesta en su mayoría por investigadores del área de la mecánica, cuyos esfuerzos se centraban en la síntesis y el análisis cinemático; la complejidad mecánica de los robots paralelos, que se traduce en un alto coste computacional a la hora de calcular su modelo cinemático y dinámico; y, por último, la errónea percepción de una parte de la comunidad investigadora que considera los robots paralelos una extensión de los serie, lo que provoca, como detalla Merlet en [148], que los controladores importados de la robótica serie no extraigan todo el potencial de los robots paralelos.

Debido a estos tres factores, se pueden encontrar pocos trabajos donde traten específicamente el control de los robots paralelos. Entre los existentes, éstos se pueden clasificar en dos grandes grupos: aquellos con un enfoque monoarticular, en el que cada articulación es controlada de forma independiente al resto, o, aquellas con un enfoque multiarticular donde el robot se controla como una entidad, requiriendo para ello de su modelo dinámico.

El conjunto de controladores monoarticulares es el más sencillo de implementar, ya que se utilizan con leyes de control sencillas, las cuales no requieren de un modelado dinámico previo. Entre ellos destaca la utilización de un control PID (Control Proporcional Integrativo Derivativo) por cada articulación. Esta estrategia ha demostrado ofrecer resultados aceptables en aquellas aplicaciones en las que los requisitos de velocidad y precisión son bajos y en las que la dinámica del propio robot no influya de forma notable en el proceso [104, 130, 12].

Sin embargo, aunque sencillo, el controlador monoarticular basado en un controlador PID simple no ofrece buenos resultados cuando los requisitos de las tareas a realizar combinan precisión y velocidad, o cuando la propia dinámica del robot influye notablemente en el proceso. Con el fin de mejorar la respuesta de los controladores monoarticulares, algunos autores han propuesto modificaciones sobre el esquema de PID simple. Entre estas mejoras destaca la utilización del modelo de la articulación en el lazo de prealimentación [33], la inclusión de un lazo adicional de realimentación de la aceleración [43], la utilización de esquemas de compensación del término gravitatorio para reducir errores de posicionamiento [80, 81], controles de acoplamiento cruzado para reducir el efecto del acoplamiento entre articulaciones [207], técnicas de control robusto [92] o la utilización de PID's no lineales (NPID) [206]. En general, estas aproximaciones consiguen reducir los errores respecto al PID tradicional, mejorando la respuesta dinámica del robot.

A pesar de las mejoras propuestas en el esquema monoarticular, este tipo de esquemas no resulta adecuado para aquellas tareas de alto rendimiento y alta capacidad dinámica. En estas aplicaciones, la influencia del movimiento del mecanismo es mucho mayor debido al movimiento y a la interacción del mecanismo con el entorno, y por lo tanto, esta debe de ser compensada dinámicamente. Para ello, se hace uso de controladores avanzados basados en modelo, cuya implementación es más compleja y costosa.

La implementación de estos controladores requiere, por lo tanto, de un modelo dinámico adecuado que ha de ser calculado previamente y después integrado en la ley de control. En la robótica paralela no existe un método sistemático de cálculo

para éste, aunque diversos trabajos [53, 118, 26, 2, 10] puntualizan que la aproximación más eficiente para su cálculo es la separación del robot en dos subsistemas, la plataforma móvil, cuyo modelo se ha de definir en las variables de salida, y las cadenas serie, cuyo modelo se ha de definir en términos de las coordenadas articulares. El cálculo del modelo analítico se realiza, por lo general, en base a tres grandes formulaciones: la formulación de Newton-Euler [53, 91, 116, 118], la aproximación Lagrangiana [128, 25] y la utilización del Principio de los Trabajos Virtuales [227]. Todas estas aproximaciones, aunque toman diferentes caminos para calcular el modelo, permiten llegar a la misma expresión compacta. De igual modo, toman como partida la consideración de que los elementos que componen el robot son sólidos rígidos no deformables.

Pese a que el rendimiento de los controladores basados en el modelo de sólido rígido ofrecen una mejora sustancial respecto de los esquemas monoarticulares, la consideración de elementos indeformables en el robot es una hipótesis que difiere de la realidad en ciertas aplicaciones de alta capacidad dinámica. Ejemplo de ello son los robots de Pick-and-Place, cuyas altas aceleraciones y velocidades hacen que los eslabones se deformen, reduciendo así la precisión del robot. De igual manera, este fenómeno puede producirse igualmente en aquellas aplicaciones en las que los robots esta sometidos a vibraciones o grandes cargas.

Sin embargo, comparándolos con el número de trabajos que abarcan el modelado y control de robots paralelos de elementos rígidos, los trabajos que han abordado el problema de la elasticidad en los eslabones de los manipuladores paralelos son escasos. Esto es debido, principalmente, a la complejidad y coste computacional que conllevan los manipuladores paralelos [66], estando los estudios de modelado flexible limitados, prácticamente, a la robótica serie.

Los comienzos del estudio de la flexibilidad en la robótica datan de la década de los 70-80. Estos trabajos fueron motivados por la necesidad de la NASA (Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio) de construir manipuladores espaciales más ligeros, con el objetivo de reducir los costes de lanzamiento del programa del transbordador espacial, *Space Shuttle Programme*¹. En ellos se enfrentaron al reto de incluir el comportamiento elástico dentro de las ecuaciones dinámicas de los manipuladores, para, posteriormente, aplicarlos en controladores basados en modelo para aplicaciones de *tracking* y suspensión de vibraciones.

Motivados por dicha necesidad, a lo largo de los años 80 y 90, se publicaron una gran cantidad de trabajos donde se abordaba la problemática del modelado flexible (aplicada a manipuladores series), a partir de los cuales se definieron los principales métodos de modelado. Gran parte de las contribuciones realizadas en esta época, se detallan en el extenso trabajo bibliográfico realizado por Dwivedy en [66]. Por su parte, a partir de la década de los 90, la mayoría de los trabajos presentados dentro de la temática de los manipuladores flexibles abordaban la problemática del control

¹Parte de los frutos obtenidos en dichos trabajos fueron implementados en el diseño de *Canadarm*, [85, 102, 189], un manipulador remoto de 15,3m de largo, 408kg de peso y con una capacidad de carga de 29.500kg cuya misión era la reparación en el transbordador espacial.

[24, 120], pero una vez más limitándose a la robótica serie.

De hecho, la revisión de la literatura científica [191, 69] indica que más del 85 % de los trabajos existentes se centra en robots de un Grado De Libertad (GDL), un 10 % en los robots de dos Grados De Libertad, y, por lo tanto, muy pocos trabajos sobre robots con tres o más GDL. La falta de trabajos de investigación es, si cabe, más evidente a la hora de acotar la búsqueda a manipuladores paralelos flexibles, los cuales no ha sido abordados hasta los últimos años, existiendo muy pocos trabajos, en los que predomina el análisis de robots planares.

Esto se debe, principalmente, a que el modelado y la implementación experimental de manipuladores flexibles de un GDL es más sencillo y no requiere analizar la configuración de los eslabones, que es necesario en las aplicaciones multi-eslabón. Además los manipuladores de un GDL mantienen la linealidad de las ecuaciones para deformaciones pequeñas, sin perder por ello los conceptos principales de la flexibilidad.

Con todo ello, el objetivo de este trabajo es determinar una metodología que permita el modelado dinámico de robots paralelos considerando sus eslabones, o al menos parte de ellos, flexibles para posteriormente utilizar éste en técnicas de control avanzado basadas en modelo. Para ello, este capítulo se divide en dos grandes bloques.

En el primer bloque se analizan las aproximaciones y formulaciones más interesantes utilizadas en el modelado dinámico de robots con eslabones flexibles, haciendo hincapié en las características propias de los robots paralelos y las aplicaciones de alto rendimiento, tales como:

- Formulaciones definidas mediante matrices basadas en la energía, lo que permitiría eliminar los cálculos intermedios.
- Expresiones a partir de las cual se pueda deducir fácilmente el problema inverso/directo. Esto, permitiría obtener un modelo directo del robot que pueda ser validado en simulación y un modelo inverso adecuado para la realización de controladores basados en modelo.
- Modelos de bajo coste computacional que permitan su implementación en controladores de Tiempo Real sin perder precisión en el modelo.

En base a las conclusiones obtenidas de este análisis se podrán definir en capítulos posteriores una serie de pautas que permitan definir de forma natural y eficiente un modelo dinámico flexible automatizable para robots paralelos. Si dicho modelo es preciso, éste podrá ser utilizado tanto para simulación, donde se analiza el comportamiento del robot, como para control, el cual, como se ha comentado anteriormente, se implementa para mejorar la respuesta dinámica del mecanismo.

En el segundo de los bloques, por otro lado, se analizan las estrategias de control más utilizadas tanto en la robótica flexible como en la robótica paralela, haciendo principal hincapié en las características y ventajas de cada una de ellas. A partir de dicho estudio, en los capítulos siguientes se implementará una estrategia de control avanzada basada en el modelo donde ésta contemple los aspectos de elasticidad mencionados.

2.2. Modelado

El primer paso para el cálculo del modelo de un robot consiste en determinar las ecuaciones que rigen el movimiento del mismo. Para ello, es necesario relacionar matemáticamente el movimiento relativo entre los diferentes elementos que componen el robot, definido por las variables articulares, con el movimiento del elemento terminal, caracterizado por las variables de salida o de operación. Al conjunto de ecuaciones que relaciona ambos grupos de variables se denomina modelo cinemático del robot.

Por otro lado, el movimiento del robot se consigue introduciendo actuadores en ciertas articulaciones del robot. Estos actuadores, en general motores eléctricos o actuadores hidráulicos/neumáticos, aplican fuerzas o pares en las articulaciones que se propagan por la estructura, generando su movimiento. Al conjunto de ecuaciones que relaciona el movimiento del robot con las fuerzas o pares aplicados para lograr dicho movimiento se denomina dinámica del robot y se caracteriza matemáticamente mediante el modelo dinámico.

Es evidente que para el cálculo de la dinámica es necesario hacer un análisis previo de la cinemática, es decir, se requiere conocer cuales son las expresiones que relacionan el movimiento de las diferentes partes del mecanismo para poder calcular cual es el efecto de las fuerzas y pares aplicados por los actuadores en el robot. Esto se debe a que la dinámica es la extensión natural de la cinemática y heredará sus características, incluyendo su problemática. Por lo tanto, la dinámica de un sistema no se puede resolver sin haber considerado primero su cinemática.

Sin embargo, en el ámbito de la robótica, el modelado dinámico se presenta como uno de los aspectos más complejos, lo que ha provocado que muchos autores lo hayan obviado. Pese a ello, el modelado dinámico se presenta como un elemento necesario para:

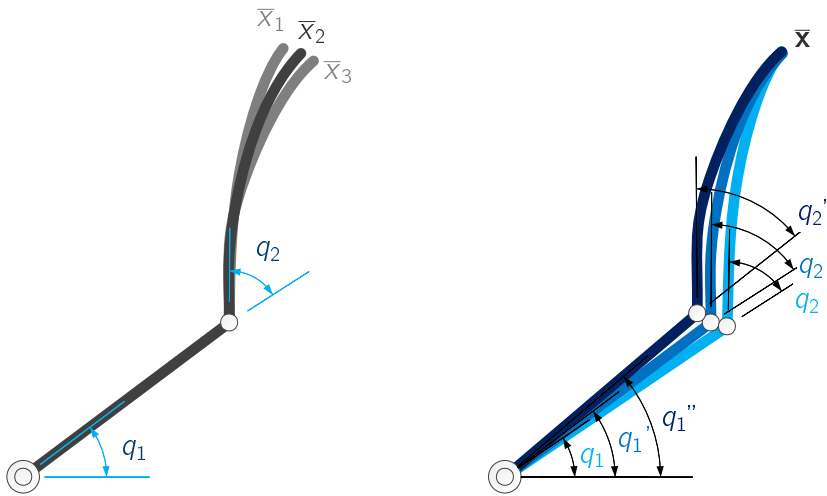
- Simular el comportamiento dinámico del robot.
- Dimensionar correctamente la estructura mecánica y los actuadores del robot.
- Implementar controladores eficaces capaces de cumplir requisitos exigentes tanto de velocidad como de precisión.

Por ello, el análisis y caracterización del comportamiento dinámico de un robot es un paso necesario para todas aquellas aplicaciones robóticas que requieran de movimientos rápidos y alta precisión.

El problema cinemático en robots flexibles

En el caso de la robótica flexible, la caracterización del comportamiento dinámico es fundamental a la hora de abordar también la propia cinemática, ya que en estos robots, al contrario que sus homólogos rígidos, el modelo cinemático y el modelo dinámico están acoplados, por lo que no se entiende uno sin el otro. Este fenómeno se aprecia de forma gráfica en la Figura 2.1. En ella, se expone claramente como para una configuración de articulaciones rígidas \mathbf{q}_r dada, el Modelo Cinemático Directo,

DKM, admite múltiples posiciones posibles del TCP (Figura 2.1a). De igual manera, para una posición del TCP conocida, el Modelo Cinemático Inverso, IKM, admite múltiples configuraciones de las variables articulares $\mathbf{q}(\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_f)$ (Figura 2.1b). Esto se debe a que la deformación de los eslabones está producida por pequeñas **oscilaciones** que varían en el tiempo, por lo que se puede afirmar que el problema cinemático de los robots manipuladores con eslabones flexibles presenta, intrínsecamente, una evolución dinámica.



(a) Manipulador flexible con la misma configuración de articulaciones rígidas $\mathbf{q}_r(q_1, q_2)$ pero múltiples posiciones del TCP.

(b) Manipulador flexible con la misma posición y orientación del TCP pero diferente configuración de variables rígidas $\mathbf{q}_r(q_1, q_2)$.

Figura 2.1: Esquema de manipuladores con eslabones flexibles donde se aprecia que el modelo dinámico y cinemático están acoplados ya que el problema cinemático directo (a) y inverso (b) pueden tener diferentes soluciones.

El problema dinámico en robots flexibles

Tal y como sucede en el modelado cinemático, la respuesta dinámica puede estar definida ante dos situaciones: que el movimiento del robot, su respuesta cinemática, sea conocida e interese calcular los pares o fuerzas necesarios para lograr dicho movimiento; o que, por el contrario, las fuerzas y pares sean conocidos e interese determinar cómo se mueve el robot. La primera situación, denominada problema dinámico inverso, se resuelve utilizando el Modelo Dinámico Inverso o IDM, mientras que la segunda, denominada problema dinámico directo, se resuelve mediante el Modelo Dinámico Directo o DDM.

En general, el Modelo Dinámico Directo se utiliza para simular la dinámica del robot real, dado que permite determinar el movimiento del robot a partir de entradas de fuerza y par en sus articulaciones activas o actuadas. El Modelo Dinámico Inverso, por su parte, tiene su principal aplicación en la realización de controladores basados en técnicas de diseño de control avanzado (estrategia de Par Computado o Computed Torque Control (CTC), estrategias basadas en Control Predictivo (MPC), etc), ya que permite obtener los esfuerzos necesarios para lograr un determinado movimiento del robot.

En la robótica rígida, el cálculo del modelo dinámico ha sido extensamente estudiado, existiendo formulaciones generalizadas aplicables a cualquier robot rígido, ya sea serie o paralelo. En la literatura [228, Cap 9], [17, Cap 5] se presentan las dos principales formulación matemáticas para definir el modelo. La primera se denomina **formulación de Newton-Euler** y para su cálculo se consideran todos los esfuerzos existentes en las uniones de los elementos, siendo muy eficiente para su aplicación en algoritmos recursivos. La segunda, por el contrario, se denomina **formulación de Lagrange**, y plantea una formulación basada en el estudio energético. Usando cualquiera de las dos formulaciones, es posible obtener el modelo dinámico de cualquier robot en su forma estructurada, tal que,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (2.1)$$

donde,

- \mathbf{q} es el vector de coordenadas articulares del robot, de dimensión igual a los n grados de libertad de éste.
- $\mathbf{D}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del sistema, simétrica y positiva definida.
- $\mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas de Coriolis.
- $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el término de gravedad del modelo dinámico.
- $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de pares o fuerzas a aplicar en los accionamientos ligados a las articulaciones activas.

En la robótica flexible, por su parte, el número de estudios en el ámbito de la dinámica y el control de manipuladores es mucho menor en comparación con la robótica rígida. Pese a ello, las metodologías propuesta son, en la gran mayoría de los casos, homólogas a la de los manipuladores rígidos.

En la robótica flexible, a la hora de evaluar los requerimientos de modelado del sistema, independientemente de la formulación elegida, el análisis energético de de cada uno de los componentes es de gran utilidad. Los eslabones rígidos almacenan energía cinética debido al movimiento de sus inercias y energía potencial debido a la posición de éstos en el campo gravitacional. Los eslabones flexibles, por su parte, no solo almacenan energía debido a estos dos efectos, sino que la energía potencial tiene un segundo componente, el cual es debido a la deformación (ya sea de sus eslabones o debido a la flexibilidad en las articulaciones).

En lo que concierne a los eslabones, estos pueden estar sujetos a esfuerzos de flexión, torsión, cizalladura, tracción y/o compresión (véase Figura 2.2). Sin embargo, no todos ellos tienen la misma repercusión en el balance energético. La torsión de un eslabón, por ejemplo, almacena energía potencial elástica pero poca energía cinética, debido al bajo momento de inercia que tienen las vigas respecto al eje longitudinal, por lo que ésta puede ser representada de forma fidedigna mediante muelle sin masas. La tracción y la compresión, por su parte, almacenan muy poca energía potencial debido a la alta rigidez de compresión de los eslabones, por lo que el esfuerzo generado por la compresión es despreciable en la mayoría de los casos. Por último, al estar los eslabones sometidos a esfuerzos de flexión, almacenan tanto energía potencial elástica debido a las deformaciones, como, energía cinética debido a las velocidades de deformación.

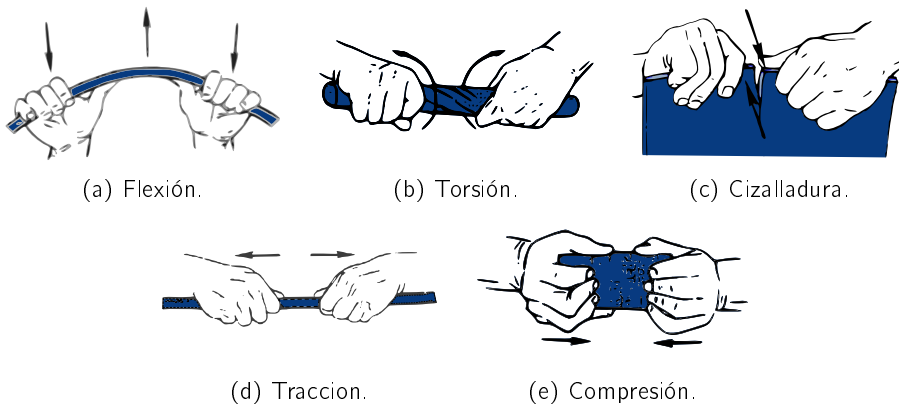


Figura 2.2: Ejemplos de los diferentes tipos de esfuerzo a los que se puede someter un eslabón: (a) Flexión, (b) Torsión, (c) Cizalladura, (d) Tracción y (e) Compresión.

Además, en función de las características mecánicas y geométricas de los eslabones, la aportación de cada uno de estos esfuerzos pueden ser diferente pudiendo llegar a ser residual. Teniendo esto en cuenta, a la hora de definir la dinámica de cada eslabón, se debe llegar a un compromiso entre la precisión y la sencillez del modelo, ya que estos modelos son altamente complejos. Analizando la literatura existente, la gran mayoría de los trabajos en este área se pueden clasificar, principalmente, en dos variantes de los denominadas **Modelos Analíticos**: la Teoría de Euler-Benoulli y la Teoría de Timoshenko. En el siguiente capítulo se detallarán estas soluciones.

2.2.1. Modelos oscilantes continuos: Modelo Analítico

Sistemas Oscilantes Discretos y Sistemas Oscilantes Continuos

En ingeniería, se denomina oscilación a cualquier movimiento repetido de un lado a otro en torno a una posición de equilibrio, o posición central. Sin embargo, desde el

punto de vista matemático, los sistemas oscilantes se clasifican en dos categorías, en función de su naturaleza oscilante: los sistemas oscilantes discretos y los sistemas oscilantes continuos.

Los sistemas oscilantes discretos, como el representado en la Figura 2.3a, son los sistemas oscilantes que están formados por cuerpos infinitamente rígidos. Estos, son aquellos cuerpos que no sufren deformaciones por efecto de fuerzas externas, es decir, que están compuestos por un conjunto de partículas cuyas posiciones relativas no varían. Estos cuerpos se modelan mediante ecuaciones del tipo Eq. (2.2), denominadas Ecuación Diferencial Ordinaria (ODE). Este tipo de ecuaciones se caracteriza por estar definidas mediante una única variable t , la cual es temporal. Además, su respuesta temporal, cuya resolución no presenta ninguna dificultad a día de hoy por estar ampliamente abordada en la literatura, queda completamente definida mediante las condiciones iniciales del sistema.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{K} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{G} = \mathbf{F}(\mathbf{t}) \quad (2.2)$$

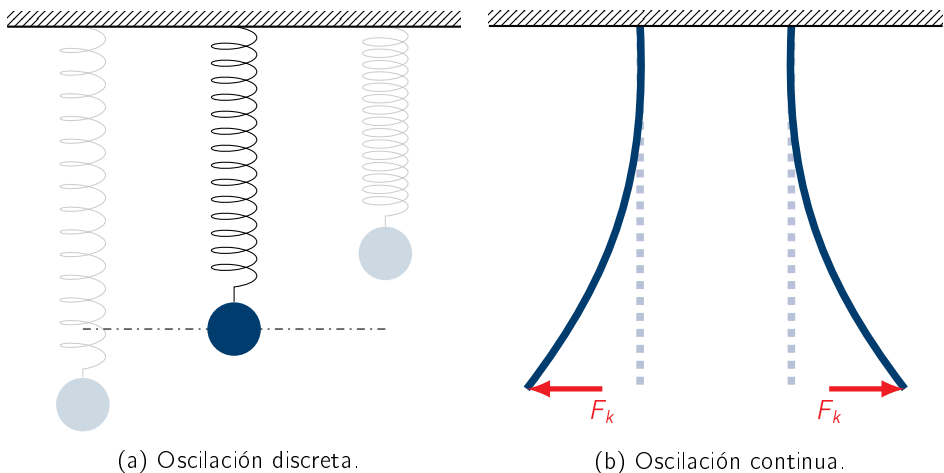


Figura 2.3: Ejemplos de los diferentes tipos de oscilaciones existentes: (a) oscilación discreta, (b) oscilación continua.

Sin embargo, las estructuras físicas reales no son absolutamente rígidas ya que éstas se deforman, en mayor o menor medida, bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellas. Por lo tanto, existen sistemas oscilantes cuyo comportamiento no pueden ser aproximado al de un cuerpo infinitamente rígido, ya que, la variación que sufren las partículas que los forman no son despreciables. Este tipo de sistemas, entre los que se encuentran las vibraciones o torsiones, se conocen como **sistemas oscilantes continuos**. La respuesta de estos sistemas, a diferencia de los sistemas oscilantes discretos, dependen tanto de una variable temporal t como de una variable espacial x , la cual representa la posición del punto cuyo comportamiento se quiere representar en el sistema. Además de estas variables, la respuesta queda completamente definida

con la introducción de las Condiciones de Contorno, BC, del sistema. Por lo tanto, este tipo de sistemas se definen matemáticamente mediante Ecuaciones en Derivadas Parciales (PDE). La resolución de este tipo de sistemas oscilantes, resulta matemáticamente mucho más complejos que los sistemas discretos (los cuales son descritos mediante ecuaciones ODE), por lo que su respuesta dinámica sigue siendo una línea de investigación abierta entre la comunidad científica. Es en este ámbito en el que se engloba la problemática asociada a los robots paralelos flexibles.

2.2.1.1. Principio Extendido de Hamilton

En la literatura existen diferentes métodos para obtener el modelo matemático de los sistemas oscilantes continuos. Todos ellos enuncian la ecuación de movimiento del sistema. Sin embargo, ninguno, a excepción del Principio Extendido de Hamilton, definen, también, de forma directa las Condiciones de Contorno (BC). Éstas resultan imprescindibles a la hora de obtener la respuesta dinámica del sistema. Es por ello que el **Principio Extendido de Hamilton** se presenta como el método más completo, ya que permite obtener de una manera sistemática, rigurosa y eficaz tanto las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico de los elementos estructurales como las condiciones de contorno que las restringen.

El Principio Extendido de Hamilton [96, 97] utiliza el concepto de desplazamientos virtuales para definir la respuesta dinámica del sistema. La Figura 2.4 muestra una viga en voladizo con un cambio de configuración virtual $\delta w(x, t)$. Los desplazamientos virtuales de la configuración deben satisfacer todas las condiciones de contorno. Por otro lado, el Principio de Hamilton asume que la configuración se encuentra completamente definida en los momentos t_1 y t_2 . Para el caso de una viga en voladizo con su otro extremo simplemente apoyado, véase Figure 2.4, implica que $\delta w(x, t_1) = \delta w(x, t_2) = 0$.

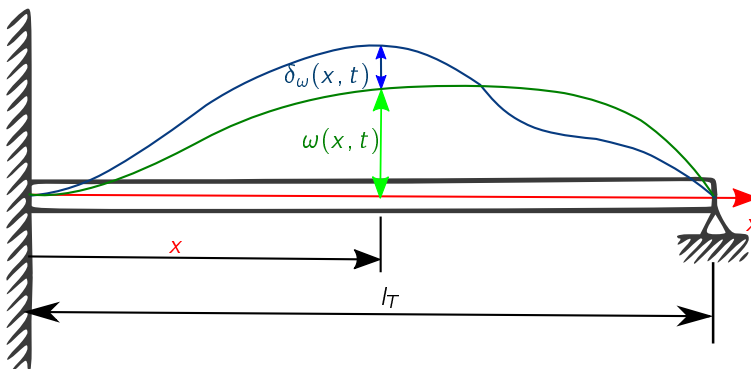


Figura 2.4: Desplazamiento virtual de una viga voladizo.

El Principio Extendido de Hamilton se define según la expresión (2.3):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{W}_{nc} dt = 0 \tag{2.3}$$

donde,

- K es la energía cinética total del sistema.
- U es la energía potencial total del sistema, incluyendo la energía potencial debido a las fuerzas conservativas externas.
- \mathcal{W}_{nc} es el trabajo virtual realizado por las fuerzas no conservativas, incluyendo las fuerzas de amortiguamiento y las fuerzas no contempladas en U .
- $\delta[\cdot]$ es el símbolo para denotar la primera variación, o cambio virtual, de la variable entre corchetes.
- t_1, t_2 son los tiempos de inicio y fin donde se pretende obtener la respuesta del sistema.

Debido a su complejidad, a la hora de definir el modelo de los eslabones flexibles de cualquier manipulador, hay que tomar ciertas consideraciones. Normalmente, se asume que la deformación a la que están sujetos los eslabones es pequeña respecto a los movimientos de la configuración rígida, lo que permite utilizar la Teoría Lineal de Elasticidad.

Teoría de Vigas

El modelado de los eslabones se puede realizar, igualmente, considerando diferentes deformaciones (flexión, cizalladura, torsión,...). En la literatura, existen diferentes teorías desarrolladas para el modelado de vigas y sus deformaciones, cuyos modelos pueden ser usados para modelar los eslabones del robot. En la Tabla 2.1 se hace una comparativa de los tipos de esfuerzo que contemplan cuatro de las diferentes teorías existentes (la teoría de Euler-Bernoulli [219], de Rayleigh [205], de Shear [1] y la de Timoshenko [220]).

Modelo viga	Flexión	Cizalladura	Inercia rotacional
Euler-Bernoulli	✓	✗	✗
Rayleigh	✓	✗	✓
Shear	✓	✓	✗
Timoshenko	✓	✓	✓

Tabla 2.1: Comparativa de las deformaciones que contemplan las diferentes teorías de vigas.

Pese a ser innumerables las teorías existentes, a la hora de modelar manipuladores, el modelo analítico de éstos suelen reducirse, en la extensa mayoría de los casos, a

dos: la teoría de viga Euler-Bernoulli [219] y la de Timoshenko [220]. Esto es debido a que éstas se rigen por las suposiciones básicas definidas por la **Teoría de Vigas** para la flexión simple. A partir de esta Teoría, se define un sistema de coordenadas en que el eje X es siempre tangente al eje baricéntrico de la viga, y los ejes Y y Z coinciden con los ejes principales de inercia (véase Figura 2.5).

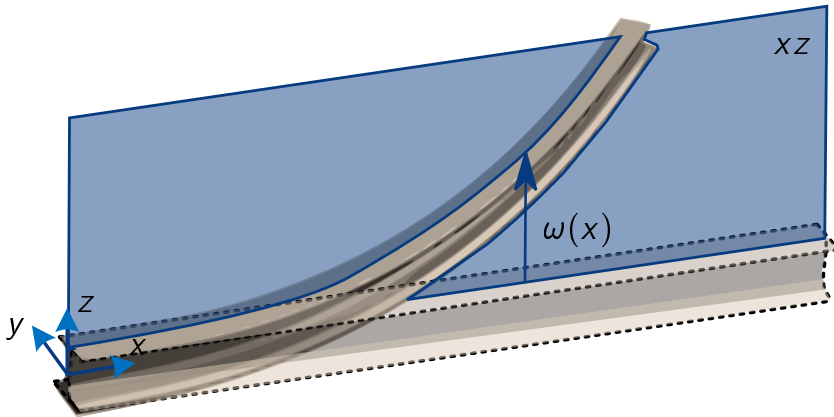


Figura 2.5: Sistema de coordenadas de las vigas según los criterios de las Teoría Lineal de Elasticidad y su plano de flexión.

Bajo esta notación, las suposiciones básicas enunciadas por la **Teoría de Vigas** para la flexión simple en el plano XZ son:

1. **Hipótesis de comportamiento elástico.** El material de la viga es elástico lineal, con módulo de Young \mathcal{E} y coeficiente de Poisson despreciable.
2. **Hipótesis de la flecha vertical.** El desplazamiento vertical w de los puntos que se encuentran sobre la sección transversal del elemento en una posición x , son pequeños e iguales a los desplazamientos del eje de la viga.
3. **Hipótesis de la fibra neutra.** Los puntos de la fibra neutra sólo sufren desplazamiento vertical y giro: $u(x, 0) = 0$.
4. **Hipótesis de tensión nula.** La tensión perpendicular a la fibra neutra se anula: $\sigma_{zz} = 0$.

La combinación de las hipótesis (1)-(4) juntas definen la **Teoría de Timoshenko**. Esta teoría considera que las sección transversal de la viga en cualquier posición x permanece plana pero no necesariamente ortogonal al eje neutro del mismo, Figura 2.6a. Esto supone la presencia de tensiones cortantes o cizalladura en la sección de la viga ($\gamma_{xz} \neq 0$), ya que se considera la inercia de rotación. Esta suposición es idónea para vigas de gran canto [216]. Sin embargo, este tipo de vigas, con una baja relación longitud/altura, tienden a ser completamente rígidas [21, 155, 30]. Por su parte, a

medida que la relación longitud/altura aumenta, las secciones transversales tienden a mantenerse perpendiculares ($\gamma_{xz} \approx 0$), minimizando los esfuerzos debido a cizalladura (véase Figura 2.6b). Bajo esta suposición se define la **teoría de Euler-Bernoulli**, una teoría más simple que la de Timoshenko pero que proporciona resultados similares ante vigas con alta relación longitud/altura.

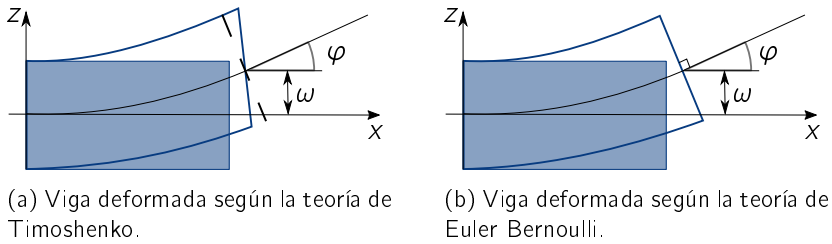


Figura 2.6: Deformación de una viga de Euler-Bernoulli (b) comparada con la de Timoshenko (a).

Por lo tanto, y como se puede apreciar en la literatura, la gran mayoría de los trabajos en robótica flexible se decanta por la teoría de Euler-Bernoulli, ya que, como el grosor de los eslabones es mucho menor que su longitud, ofrece una respuesta fiel pese a su simplicidad. Aplicando las suposiciones definidas por la teoría de Euler-Bernoulli a las ecuaciones Hamiltonianas, Eq. (2.3), se obtiene la ecuación de movimiento de una viga, la cual se define mediante la Eq. (2.4),

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + \frac{\mathcal{E} l}{\rho \mathcal{A}} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) = 0 \quad (2.4)$$

donde,

- \mathcal{E} es el módulo de elasticidad longitudinal, o módulo de Young.
- l es el segundo momento de inercia de la sección transversal de la viga.
- ρ es la densidad de la viga.
- \mathcal{A} es el área de la viga.
- $u(x, t)$ es la deformación de la viga en el punto x en el instante t .

Condiciones de contorno y dinámica del eslabón

Por otro lado, las condiciones de contorno son dependientes de la aplicación concreta y pueden catalogarse en dos grupos: las condiciones geométricas y las condiciones forzadas. Las condiciones geométricas son aquellas que describen a la geometría de los extremos del sistema. Por lo tanto hacen referencia a la posición y la velocidad de los extremos. Las condiciones forzadas, en cambio, hacen referencia a las fuerzas y momentos a los que están expuestos estos extremos.

Teniendo en cuenta que la ecuación diferencial definida por la teoría de Euler-Bernoulli es de cuarto orden, Eq. (2.4), el sistema queda totalmente definido mediante cuatro condiciones de contorno, una condición geométrica y una forzada por cada extremo. En la Tabla 2.2 se presentan las condiciones de contorno más comunes en función de su disposición, representando a w el desplazamiento vertical en el extremo de la viga, w' a la pendiente de éste, M al momento al que esta sometido el extremo y V a la fuerza de corte a la que esta sometido el extremo.




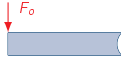
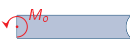
Representación del extremo	Condición de Contorno
 Extremo libre	$V = 0$ $M = 0$
 Extremo empotrado	$w = 0$ $w' = 0$
 Extremo apoyado	$w = 0$ $M = 0$
 Extremo sometido a una Fuerza F_o	$V = F_o$ $M = 0$
 Extremo sometido a un Momento M_o	$V = 0$ $M = -M_o$

Tabla 2.2: Tabla resumen de las Condiciones de Contorno más típicas.

Una vez definidas las condiciones de contorno, la dinámica del eslabón queda completamente formulada mediante el uso de Ecuaciones en Derivadas Parciales. La resolución de las Ecuaciones en Derivadas Parciales es compleja tanto desde el punto de vista analítico como desde el punto de vista computacional, ya que las PDE dan como resultado modelos de infinitos modos de vibración. Por un lado, las soluciones exactas son deseables, ya que éstas proporcionan un conocimiento numérico del sistema a partir de las frecuencias naturales y de los modos. Sin embargo, por el otro, la solución de las Ecuaciones Diferenciales Parciales definen sistemas infinito-dimensional, cuyo uso no es factible en aplicaciones de control avanzado basado en modelo [30, 197], ya que requiere retroalimentar un número infinito de estados. Por lo tanto, con el fin de utilizar el modelo en aplicaciones de control, es necesario utilizar ecuaciones de movimiento de dimensión finita, por lo que se requiere reducir el número de modos de vibración mediante la utilización de técnicas de aproximación. En la siguiente sección se definen los modelos de aproximación más utilizados en la literatura, haciendo especial hincapié en sus ventajas e inconvenientes.

2.2.2. Métodos de Aproximación

Los métodos de aproximación permiten representar sistemas de forma inexacta, aunque suficientemente fiel como para seguir siendo útiles. En el modelado de la robótica flexible, por ejemplo, éstos hacen uso de la discretización espacial, siendo el **Método de Parámetros Concentrados**, el **Método de Modos Asumidos** y el **Método de Elementos Finitos** los métodos más utilizados.

Estos tres métodos aproximan la dinámica de las estructuras flexibles, tales como, los eslabones flexibles de los manipuladores paralelos, (descritas por PDE) utilizando ecuaciones lineales, finito-dimensionales y temporalmente continuas de movimiento (descritas mediante ODE). Sin embargo, tanto la forma de discretizarlas como el concepto detrás de ésta, son completamente diferentes. El Método de Parámetros Concentrados, por ejemplo, se presenta como la aproximación más sencilla, aunque la que peor precisión ofrece. En ella, los eslabones flexibles son discretizados en pequeños subconjuntos rígidos, los cuales están virtualmente unidos mediante articulaciones flexibles. El Método de Modos Asumidos (AMM) y el Método de Elementos Finitos (FEM) son métodos matemáticamente más elaborados y de una mayor precisión. El AMM, por ejemplo, modela la elasticidad definiéndola mediante una serie finita de funciones espaciales y temporales. Es por ello que esta aproximación se presenta como una aproximación realmente útil en aquellos problemas donde la geometría es suficientemente simple como para poder definir un conjunto global de funciones admisibles suficientemente precisas. Por último, el FEM combina en cierta forma los conceptos de los dos anteriores, ya que discretiza el eslabón en pequeños subconjuntos que modela mediante un conjunto finito de funciones espaciales y temporales. Es por ello que este método de modelado es fácilmente aplicable a geometrías arbitrarias, ya que, independientemente de la geometría, siempre se define mediante las mismas funciones admisibles.

Para analizar las ventajas y desventajas de cada uno de dichos métodos, estos se analizarán en profundidad en las siguientes secciones.

2.2.2.1. Modelo de Parámetros Concentrados

Con frecuencia, cuando se modelan matemáticamente sistemas reales se utilizan suposiciones ideales (masas puntuales, sistemas no-inerciales...), mediante las cuales se considera que los valores que determinan las características físicas de los objetos se encuentran concentrados en un punto. Estas entidades reciben el nombre de elementos de parámetros concentrados. Su uso, pese a no ajustarse a la naturaleza distribuida de los sistemas reales, esta ampliamente expandido por la facilidad con la que se implementan.

Es por ello que el Método de Parámetros Concentrados es el método más sencillo para obtener la solución aproximada de un sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales, [147, 183]. Mediante su uso, el sistema real (sistema espacialmente distribuido) es modelado mediante una concatenación de elementos rígidos concentrados, los cuales tienen un comportamiento similar al sistema que se quiere modelar.

Para la mayoría de casos, éste es un proceso heurístico. A modo de ejemplo, una viga en voladizo como la que se ve en la Figura 2.3b. Puede ser discretizada mediante un número finito de elementos (parámetros del sistema), cuyas masas están concentradas en sus centros de gravedad (aproximación de los sólidos rígidos). Cada uno de estos elementos se pueden interconectar entre si mediante muelles, como se muestra en la Figura 2.7, o mediante amortiguadores, en función del movimiento al que esté sometido el eslabón flexible. Por lo tanto, las técnicas de parámetros concentrados recurren a la intuición física, por lo que suelen ser fáciles de entender.

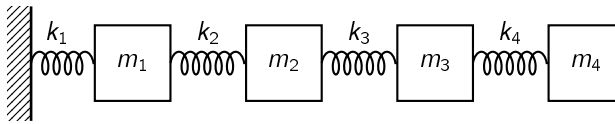


Figura 2.7: Ejemplo de la representación de una viga en voladizo mediante el Modelo de Parámetros Concentrados.

Desde una perspectiva matemática, este método reduce las PDE del sistema (dimensión infinita) a un conjunto de ODEs de parámetros rígidos (dimensión finita), cuyas soluciones son ampliamente conocidas.

En la literatura existen varios autores que utilizan esta aproximación a la hora de modelar sus manipuladores flexibles. Entre los trabajos existentes, se encuentran diferentes variantes, entre las que destacan: **el método de parámetros concentrados usando coeficientes de influencia**, y **el método de Holzer**. En el primero de los métodos, la masa se modela concentrada en puntos discretos, haciendo que la matriz de masas sea diagonal. Sin embargo, las propiedades de rigidez son consideradas de manera "exacta" mediante los coeficientes de influencia de la flexibilidad, siendo esta una versión discretizada del problema de valores propios en forma integral. Si bien es cierto que, al menos en teoría, este método es aplicable a cualquier tipo de sistema, en la práctica, se aplica, principalmente, para sistemas de rigidez no uniformemente distribuida, condiciones de contorno complejas y/o para problemas bi/tri-dimensionales.

Entre la literatura existente donde se utiliza esta variante, destacan trabajos como el de Zhu et al. en [249], donde emplea un modelo concentrado usando coeficientes de influencia para simular el control de *tracking* de un manipulador de un solo elemento. Khalil y Gautier [115], por el contrario, lo utilizan para modelar sistemas mecánicos flexibles. Rabound et al. en [182], por su parte, estudia la estabilidad de las vigas en voladizo muy flexibles para demostrar la existencia de múltiples soluciones de equilibrio bajo unas condiciones de carga concretas. Mientras, Nissing en [161] estudia el uso de un muelle junto a un amortiguador para disminuir las vibraciones en un manipulador flexible de un elemento utilizando este método, Saravaro y Lamancusa en [188] lo utilizan para considerar el diseño estructural óptimo para manipuladores robóticos con composite de fibra reforzada.

Por otro lado, en el método de Holzer, tanto la masa como la rigidez se consideran concentradas, es decir, la masa se concentra en un punto de los elementos y el resto

del segmento se asume que carece de masa y que tiene una rigidez uniforme. En esta vertiente, la computación de las frecuencias y de los modos de vibraciones se pueden obtener de forma sistemática mediante matrices de transferencia. Si bien este método fue desarrollado para vibraciones torsionales de ejes, a día de hoy su uso se ha expandido tanto a vibraciones axiales como a vibraciones transversales, gracias a la extensión del método realizada por Myklestad en [157]. Dicha extensión, pese a parecer natural, no es trivial, siendo prueba irrefutable de ello el hecho de que tuvieron que transcurrir más de 20 años para ser enunciada. Para ello, Myklestad propuso una solución del problema en forma tabular, basado en ciertas fórmulas recursivas. Thomson [217], por su parte, modificó la expresión de forma que permitiese resolver el problema en forma matricial, evitando así introducir el concepto de *station* y *field transfer function*. Posteriormente, en [173], Pestel y Leckie aplicaron este concepto a un gran número de problemas. Del mismo modo, Konno y Uchiyama en [124] hace uso del método de Holzer (Myklestad) para modelar diferentes manipuladores flexibles y comparar los resultados obtenidos con los obtenidos mediante el modelo rígido de los mismos. Por su parte, Ding Xilun desarrolló un nuevo método basado en el método de Holzer para el modelado de manipuladores flexibles, denominado Ding-Holzer [239]. Este método mejora alguna de las carencias existentes en el método de parámetros concentrados de Holzer. Esta modificación permite modelar dinámicamente, tanto manipuladores de un solo elemento [194] como de múltiples elementos [194, 193, 59, 194].

Pese a que el método de parámetros concentrados es una propuesta sencilla, los resultados obtenidos mediante su aplicación demuestran que el método no es lo suficientemente preciso para manejar las no-linealidades y la complejidad de la dinámica de los manipuladores robóticos flexibles [121, 115, 72], por lo que este método no ha sido ampliamente utilizado para el modelado de este tipo de robots.

2.2.2.2. Método de Modos Asumidos

Como se ha comentado con anterioridad, los sistemas físicos reales no son concentrados, sino que distribuidos. Es por ello que, aquellas aproximaciones que consideran los sistemas como tal, se les denominan Modelos de Series Distribuidas. Estos se caracterizan por representar los sistemas de forma muy precisa a la vez de compleja. Sin embargo, al contrario que el Método de Parámetros Concentrados cuya falta de rigor matemático dificulta poder garantizar la convergencia del método [147], los modelos basados en los métodos de series distribuidas son formulaciones que por definición garantizan su convergencia.

En la literatura se pueden encontrar diferentes estrategias de Modelos de Series Distribuidas. Sin embargo, el Método de Modos Asumidos, se presenta como el más utilizado en aplicaciones de robot flexibles con eslabones flexibles. En este método, la deformación de las estructuras elásticas flexibles se modelan mediante una serie finita de funciones espaciales y funciones temporales de amplitud que están multiplicadas entre sí [143, 145, 146, 109, 51],

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) q_i(t) \quad (2.5)$$

donde $u(x, t)$ es la deformación de la viga en el punto x en el instante t , $\psi_i(x)$ es la función espacial i denominada función admisible, N es el número de términos utilizados para la aproximación y $q_i(t)$ es la función temporal de amplitud encargada de modelar la evolución temporal de las amplitudes.

Pese a que la elección de las funciones temporales de amplitud no conlleva mayor dificultad, la elección de las “mejores” o más “apropiadas” funciones admisibles, no es un problema completamente resuelto aún [30, 22]. A la hora de modelar, estas funciones son elegidas de forma que sean un conjunto linealmente independiente que modelen la estructura flexible completa cumpliendo, al menos, las condiciones de contorno geométricas y siendo diferenciables, al menos, la mitad de veces que el orden del sistema. Sin embargo, encontrar estas funciones no es un problema trivial, siendo el gran problema del AMM. A pesar de que las mejores funciones admisibles son generalmente los vectores característicos del sistema (no solo satisfacen todas las condiciones de contorno, sino que también las rigurosas ecuaciones diferenciales espaciales resultantes de la separación de variables), éstos no son siempre posibles de obtener. Esto se debe a que se necesita resolver de forma exacta las PDE para obtener sus vectores propios, pero, obviamente, esto resulta imposible de llevar a cabo para estructuras complicadas, ya que, aunque se obtenga la resolución analítica de la PDE, se requiere limitar el número de vectores propios, lo que provoca errores aritméticos no siempre despreciables. Por lo tanto, no existe una forma estipulada para definir qué conjunto de modos asumidos debe ser utilizado.

Por otro lado, los modos naturales dependen de varios parámetros del ensamblaje del sistema robótico, tales como la inercia o la masa de la carga del sistema. Sin embargo, resulta razonable suponer que la inercia de los eslabones de los manipuladores flexibles es pequeña en comparación con la inercia de los ejes que las interconectan [56], por lo que para aquellos eslabones con un ratio de inercia viga respecto a la inercia eje pequeño, las condiciones de contorno “empotrada-libre” aproximan la flexibilidad del extremo controlado con cierta exactitud [98, 16]. Es por ello que normalmente se asume que el extremo más alejado a la base es “libre” de condiciones forzadas [201, 235, 246, 214]. Por el contrario, considerar las condiciones de contorno “masa” en dicho extremo permite tener en cuenta el momento y la fuerza de pandeo debido a los siguientes eslabones y de la carga del manipulador [135, 162, 30, 56]. Sin embargo, esta consideración hace que en ocasiones la ecuación de frecuencia del sistema “empotrado-masa” sea dependiente del tiempo, haciendo que la solución tenga que ser obtenida mediante algoritmos de análisis numérico recursivos o mediante tablas predefinidas (*Look-up tables*) [135]. La primera de las opciones incrementa considerablemente el coste computacional, mientras que la segunda requiere un gran espacio de memoria para una precisión dada.

Pese a las complicaciones existentes para la definición de las funciones admisibles, en la literatura se encuentran trabajos como [86], donde se utiliza el Método de

Modos Asumidos expandido para obtener la ecuación dinámica de un manipulador flexible. En [198], por su parte, se desarrolla el modelo no lineal de un manipulador flexible de dos elementos mediante las ecuaciones de Lagrange asociadas al Método de Modos Asumidos. Subudhi y Morris en [208], por su parte, presentan una técnica de modelado dinámico de un manipulador de varios eslabones flexibles y articulaciones flexibles combinando la formulación de Euler-Lagrange con el Método de Modos Asumidos. Korayem et al. [95] combina la formulación Euler-Lagrange con el AMM para obtener la ecuación de movimiento de un manipulador móvil flexible considerando un sólo modo (una función espacial y una función temporal) por eslabón.

Por lo tanto, el Método de Modos Asumidos tiene muchas ventajas sobre otras técnicas de aproximación, aunque también tiene grandes desventajas. Muchas de sus limitaciones pueden ser atribuidas al hecho de que las funciones admisibles son globales. Por su parte, el Método de Elementos Finitos, analizado en la Sección 2.2.2.3, define sus funciones admisibles de forma local, lo que permite deshacerse de estas limitaciones.

2.2.2.3. Método de Elementos Finitos

En la sección anterior se ha analizado el Método de Modos Asumidos. En ella se describe como definir una función admisible global que permita modelar un eslabón flexible de forma precisa. Además, pese a encontrar un conjunto de funciones admisibles, en caso de modificar la estructura (incluso siendo aparentemente modificaciones irrelevantes como aumentar la carga del robot) estas funciones necesitan ser redefinidas. Por lo tanto, especialmente ante estructuras de geometrías complejas o cambiantes, se requiere de una técnica de modelado más general. Es por ello que el Método de Elementos Finitos (FEM), se presenta como una adecuada alternativa.

Desde el punto de vista teórico, el FEM se define de la misma manera que el AMM, siendo la mayor diferencia la naturaleza de las funciones admisibles. Mientras AMM utiliza funciones admisibles globales (definidas a lo largo de todo el elemento elástico), FEM usa funciones admisibles locales (definidas a lo largo de cada subdominio que compone el elemento elástico), denominadas funciones de interpolación, véase Fig. 2.8. Esta diferencia, pese a ser mínima, tiene una gran repercusión y es la razón del éxito del Método de Elementos Finitos [222]. Por un lado, porque le permite analizar sistemas de geometría irregular y/o sistemas con una distribución de parámetros muy compleja y, por otro lado, porque le permite lidiar fácilmente con condiciones no-lineales [46]. Además, debido a que los elementos en los que está dividido el eslabón son, por lo general, pequeños, no se requieren de polinomios interpoladores de orden superior para garantizar buenas estimaciones del movimiento. Es por ello que pueden ser asignadas funciones de interpolación concretas para determinadas clases de sistemas, una clara ventaja sobre el AMM donde la generación de funciones admisibles requieren de experiencia e ingenio. Otro aspecto importante a tener en cuenta es que todo el proceso de discretización espacial de los elementos finitos recae sobre un sencillo código computacional. Esto incluye la generación de la malla, la computación de los elementos de la matriz de masas, la matriz de rigidez, el vector

de fuerza de los nodos y el ensamblaje de todos los elementos numéricos de los nodos en el modelo global.

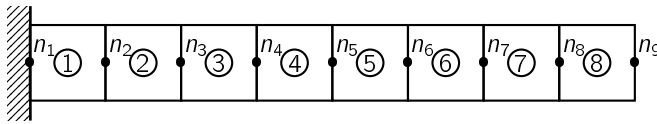


Figura 2.8: Ejemplo de la representación de una viga en voladizo mediante el Método de Elementos Finitos.

En el Método de Elementos Finitos, las deformaciones de los manipuladores flexibles se estudian asumiendo que el movimiento del cuerpo rígido es conocido. De forma que, posteriormente, la deformación elástica se superpone a dicho movimiento [251, 79, 108]. Sin embargo, el uso del Método de Elementos Finitos para analizar la flexibilidad provoca, generalmente, matrices de rigidez sobrestimadas, especialmente en problemas complejos. A su vez, debido al gran número de ecuaciones del espacio de estados resultantes, el coste computacional de la simulación numérica puede ser elevado [222].

Generalmente, los investigadores utilizan la combinación de la viga Euler-Bernoulli o viga Timoshenko con múltiples nodos y las funciones Lagrangianas para obtener el modelo en elementos finitos del sistema. El número de nodos puede ser escogido en función de la condición de precisión. Sin embargo, el aumento del número de nodos puede extender la matriz de rigidez, complicando y alargando las ecuaciones. Por lo tanto, la selección correcta del número de nodos es de gran importancia en este método [110, 34].

El FEM se ha utilizado ampliamente para la obtención de las ecuaciones de movimiento de los brazos robóticos elásticos. En [247], por ejemplo, se utiliza la teoría de la viga de Timoshenko y el Método de Elementos Finitos para la obtención de las ecuaciones dinámicas de un manipulador cooperativo planar de un grado de libertad en coordenadas absolutas. Mahamed y Tokhi [151], por su parte, obtienen el modelo dinámico de un manipulador flexible de un elemento mediante el Método de Elementos Finitos y posteriormente hacen el estudio de estrategias de control *feedforwards* para controlar las vibraciones. Del mismo modo, el Método de Elementos Finitos es utilizado en [245] para describir la dinámica del sistema y computar la carga máxima de un manipulador flexible con cinemática redundante. Posteriormente, el problema se formula para encontrar la trayectoria óptima y la carga máxima para un movimiento punto a punto concreto. Korayem et al. utilizan el FEM y la teoría de control óptimo para la planificación de trayectorias de un manipulador flexible en [125]. En dicho trabajo, el Método de Elementos Finitos se utiliza para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema, para posteriormente resolver el problema de planificación mediante el método de soluciones indirectas propio del control óptimo. El mismo autor, en [126] presenta un análisis comparativo entre el Método de Modos Asumidos y Método de Elementos Finitos para el modelado dinámico de manipuladores flexibles sobre plataformas móviles. En dicho trabajo se formulan las ecuaciones dinámicas de

un manipulador de dos elementos flexibles mediante ambos métodos comparando las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos a partir de las simulaciones numéricas realizadas. En él, se ensalza la capacidad del FEM para trabajar con condiciones no lineales. Sin embargo, el autor puntualiza que para resolver un sistema grande de ecuaciones diferenciales, el Método de Elementos Finitos requiere definir muchas condiciones de contorno, que pueden ser, en ciertos casos, difíciles de definir.

2.2.2.4. Comparativa entre el Método de Modos Asumidos y el Método de Elementos Finitos

La gran mayoría de las referencias en robótica flexible se decantan por el Método de Modos Asumidos o por el de Método de Elementos Finitos, siendo numerosos los trabajos donde se aplica una de estas dos técnicas de aproximación. Sin embargo, no son numerosos los trabajos donde se comparen las características de ambos métodos para el modelado de manipuladores flexibles [216, 126, 23]. En este apartado se pretende comparar los resultados de ambos métodos (ver resumen en Tabla 2.3).

Comparación del fundamento del método

En ambos métodos de aproximación la deformación flexible esta representada mediante una combinación lineal de funciones espaciales, denominadas funciones admisibles, y funciones temporales. En el Método de Modos Asumidos, estas funciones admisibles son globales debido a que están definidas a lo largo de la dimensión completa de la barra, generalmente, mediante funciones trigonométricas. Esto hace que el calculo de las matrices de masa y rigidez sea más complicado. Por lo tanto, la obtención de la solución cerrada de un manipulador flexible con geometría compleja, puede no ser factible. Sin embargo, el hecho de que las funciones sean ortogonales simplifica el número de términos de la matriz de masas y rigidez, haciendo que estas sean diagonales [216]. Por último, debido a que las funciones admisibles son globales, la convergencia monotónica de su solución esta garantizada [145].

Por otro lado, en el Método de Elementos Finitos las funciones admisibles son locales, es decir, están definidas a lo largo de un pequeño subdominio del eslabón. Éstas son de tipo polinomial, lo que hace que sea más sencillo trabajar con ellas. Es por ello que obtener la solución cerrada es sencillo incluso en aquellos manipuladores flexibles con geometrías complejas [216]. Además, el Método de Elementos Finitos permite extender el modelo en lazo cerrado [212, 107], sin que ello conlleve un gran esfuerzo. Por su parte, las funciones admisibles suelen ser siempre las mismas, independientemente de la aplicación y para todos los elementos. Sin embargo, debido a que la interpolación de las funciones admisibles no son globales, no es posible garantizar la convergencia monotónica de su solución [145].

Comparación de las principales complejidades

En cuanto a las desventajas de cada método, en el caso del Método de Modos Asumidos destaca que la ecuación de frecuencia puede convertirse en dependiente del tiempo, especialmente cuando se utiliza las condiciones de contorno de “empotrado-

masa". Aunque este aspecto haya sido ignorado por ciertos autores [56, 214], despreciar los términos dependientes del tiempo puede conllevar a funciones de modos imprecisas y frecuencias naturales sobreestimadas [216].

En el caso del Método de Elementos Finitos para la aproximación del modelo puede conllevar la sobrestimación de la matriz de rigidez [145]. Dicha sobrestimación puede llegar a producir que el lazo cerrado del sistema sea inestable cuando se utiliza una acción de control basada en modelo. Para evitar esto, en [216] se define un lema que determina la tolerancia del error máxima aceptable para garantizar la estabilidad del lazo cerrado del sistema del manipulador original.

Número de nodos Vs número de elementos

Por otro lado, una de las grandes discusiones a la hora de aplicar cualquiera de los métodos recae sobre el número de modos (en el caso del Método de Modos Asumidos) o elementos (en el caso del Método de Elementos Finitos) requeridos a la hora de aproximar el modelo dinámico. Diversos autores [98, 201, 30] han sugerido que sólo los primeros modos son necesarios, justificando que 1) a mayor frecuencia menor amplitud de los modos y 2) las frecuencias altas no pueden ser adquiridas ni por los sensores ni por los actuadores [39] debido a sus anchos de banda. Por otro lado, en [229] se afirma que para manipuladores robóticos, un número pequeño de modos (dos o tres) son suficientes para determinar la dinámica de la flexibilidad. Además, en [178] se demuestra como es posible obtener con una precisión aceptable los primeros m modos vibratorios mediante un modelo definido por FEM de m elementos descritos mediante funciones polinomiales de mínimo orden, por ejemplo funciones cúbicas [145].

Comparativa de Coste Computacional

En cuanto al coste computacional se refiere, [216] demuestra que bajo la misma formulación de Euler-Lagrange se requiere menos operaciones matemáticas para la obtención de la matriz de inercias mediante el Método de Elementos Finitos que mediante el Método de Modos Asumidos. Esto se debe, principalmente, al cálculo de las matrices de transformación que define la deformación de los eslabones. En el AMM, el cálculo de estas matrices de transformación se obtiene mediante la suma de la contribución que tiene la evolución del extremo del eslabón, tanto en posición como en orientación, para cada uno de los modos. En el FEM, por el contrario, el desplazamiento y orientación del extremo del eslabón está definido, simplemente, por los desplazamientos y rotaciones nodales del eslabón. Esta diferencia computacional es todavía mayor cuando se considera una carga en el Método de Modos Asumidos, ya que hay que recalcular las ecuaciones en cada iteración.

Por otro lado, el número de ecuaciones diferenciales a resolver es mayor en el Método de Elementos Finitos. Por lo tanto, el tiempo de CPU requerido para la simulación numérica es mayor en FEM comparándolo con AMM. Sin embargo, en dicho trabajo afirman que en aplicaciones de Tiempo Real, el tiempo destinado a la simulación numérica es menor que el destinado al cómputo de sumas y multiplica-

ciones. Por lo que, siendo el número de sumas y multiplicaciones significativamente menor, el Método de Elementos Finitos es más apropiado para implementaciones en Tiempo Real de controladores avanzados basado en modelo.

Con todo ello, se concluyen que bajo la formulación de Euler-Lagrange, el Método de Modos Asumidos resulta más recomendable para la discretización de manipuladores de un eslabón de sección transversal constante. Por el contrario, el Método de Elementos Finitos resulta más apropiado para eslabones de secciones transversales no-uniformes y/o sistemas multieslabón, ya que resulta más sencillo de modelar y computacionalmente más eficiente.

Características Método de Modos Asumidos		Método de Elementos Finitos
Funciones Admisibles:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Funciones definidas globalmente sobre todo el dominio. ■ Funciones trigonométricas complicadas. ■ Difícil de elegir (especialmente en estructuras de geometría compleja). 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Funciones definidas localmente sobre subdominios pequeños. ■ Polinomios simples de bajo orden. ■ Siempre las mismas funciones, independientemente de la geometría.
Orden del Sistema:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Sistema de orden bajo (generalmente). 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Sistema de orden alto.
Características de Matrices:	<ul style="list-style-type: none"> ■ M y K, generalmente, muy acopladas. ■ Generalmente poco dispersa. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ M y K dispersa. ■ Las variables son coordenadas físicas.
Aplicaciones:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Útil para geometrías simples. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Aplicable a cualquier tipo de geometrías.
Cambio de Geometría:	<ul style="list-style-type: none"> ■ Se requieren un nuevo conjunto de funciones. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Se utilizan las mismas funciones.

Tabla 2.3: Diferencia entre el Método de Modos Asumidos y el Método de Elementos Finitos.

2.2.3. Metodologías de Modelado Flexible

A partir de todo lo anteriormente expuesto, en la literatura se pueden encontrar diferentes propuestas para modelar los elementos flexibles. En los primeros trabajos,

los cuales datan de la década de los 80, las propuestas presentadas estaban centradas en la robótica serie. Sin embargo, es en la última década cuando empiezan a aparecer propuestas para los robots paralelos flexibles. Además, la gran mayoría de ellos están orientados a manipuladores planares (lo que implican pocos GDL y menor complejidad). Muestra de ello es [176], donde presentan el análisis dinámico de un robot paralelo planar con eslabones flexibles modelado mediante FEM. Del mismo modo, en [111] se presenta una ecuación de movimiento completamente acoplada para un robot 3-PRR en la que se considera la flexibilidad estructural del eslabón intermedio.

En cuanto a los manipuladores paralelos de tres dimensiones, la complejidad de sus ecuaciones han limitado las propuestas presentadas. Pashkevich et al. en [169], por ejemplo, presenta un método de modelado de la rigidez para los manipuladores paralelos sobre restringidos con eslabones flexibles. Posteriormente, dicho desarrollo es validado tanto en el robot planar 3-PRP como en el tridimensional 3-PUU. Rognant et al., por su parte, presenta en [185] un procedimiento sistemático de modelado para manipuladores con todos sus eslabones flexibles, basado en el Método de Elementos Finitos, el cual es validado en un manipulador Delta.

Pese a que la gran mayoría de los trabajos presentados utilizan FEM como método de aproximación, en [35] se presenta una metodología recursiva para el cálculo analítico del modelo dinámico basado en el Método de Modos Asumidos. En este trabajo, Briot y Khalil proponen un algoritmo basado en la formulación de Newton-Euler, la cual se valida en un robot planar. Por su parte, en [67] se utiliza la formulación Euler-Lagrange aplicada al AMM para implementarse sobre un manipulador 3-RPR planar con eslabones flexibles.

Pese al incremento de trabajos en el campo de la robótica paralela flexibles en los últimos años, ninguno de los trabajos propuestos presenta un procedimiento unificado donde se consideren tanto los eslabones flexibles como los rígidos. Por lo tanto, uno de los objetivos de esta tesis es presentar una metodología que permita modelar la dinámica de cualquier manipulador paralelo considerando tanto los eslabones flexibles como los rígidos.

Del mismo modo, otro de los grandes objetivos de esta tesis es definir un controlador capaz de seguir la trayectoria definida a la vez que reduce, o idealmente elimina, las vibraciones debidas a la flexibilidad de los eslabones que componen el manipuladores. Este controlador, además, debe ser capaz de extraer toda la potencial de los robots paralelos. Para ello, en la siguiente Sección se analiza en detalle los trabajos presentados en torno al control de manipuladores flexibles en general y paralelos en particular.

2.3. Control

Los robots industriales tienen como principal función actuar sobre el proceso de producción de una u otra forma. Esto es, desde el punto de vista de la automatización, los robots tienen como función el ejercer como actuador sobre un proceso determinado, con el fin de que el proceso evolucione de cierta forma preestablecida.

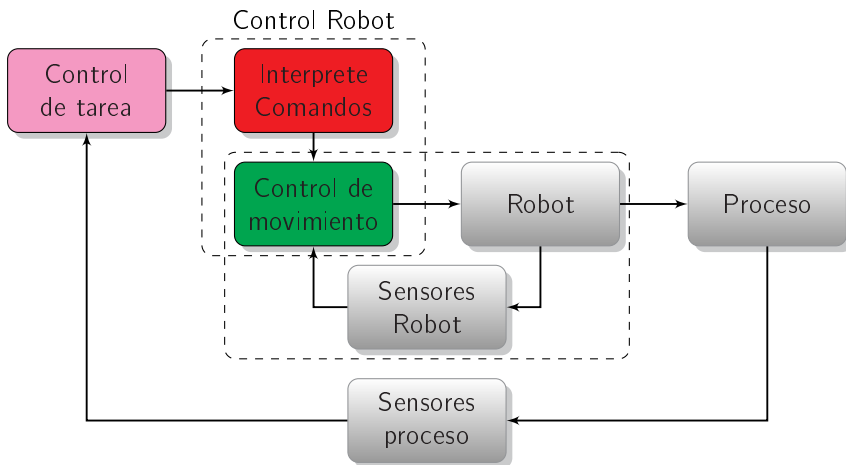


Figura 2.9: Control de robots industriales.

Por ello, a la hora de implementar un robot industrial en un proceso, el esquema de control se presenta dividido en dos niveles (Figura 2.9). En el nivel superior, se ejecuta el control de la tarea (bloque rosa), cuyo objetivo es lograr el cumplimiento de una determinada tarea establecida por el usuario. Para lograr este objetivo, el nivel superior capta información del estado del proceso mediante una serie de sensores externos, y los combina con las restricciones impuestas al sistema, así como las consignas deseadas para éste. Utilizando esta información, el nivel superior generará un plan de acción que permitirá ejecutar la tarea encomendada.

Este plan de acción se compondrá de un conjunto de instrucciones de alto nivel que definirán la forma en la que el robot ha de interactuar con el proceso para lograr ejecutar la tarea asignada.

La traducción de las instrucciones de alto nivel se realiza mediante el propio controlador del robot, situado en un nivel inferior. Este controlador presenta una estructura jerárquica, dividida, a su vez, en dos niveles. El nivel superior del controlador del robot (bloque rojo) se encarga de interpretar las instrucciones del plan y traducirlas a referencias de movimiento, mientras que el nivel inferior del controlador (bloque verde), utilizará la información obtenida por los sensores internos del robot para aplicar una determinada estrategia de control que logre seguir dicha referencia.

Es evidente que cada nivel de control ha de realizar su tarea de forma correcta para lograr que el proceso evolucione de forma deseada, por lo que todos los niveles son esenciales. Sin embargo, cabe destacar que a diferencia de los controles de alto nivel, como el control de tarea o el intérprete de comandos, la definición y estructura del control de movimiento del robot depende, en gran medida, de las características de la estructura mecánica de éste. Por ello, el ámbito de esta tesis se enfoca en este nivel del controlador, esto es, en la definición de la estrategia de control adecuada para permitir que el robot, en el ámbito de la tesis el robot paralelo flexible, se mueva

según lo determinado por un nivel superior de control.

Adicionalmente, cabe destacar que las estrategias a implementar a nivel de control de movimiento pueden ser varias en función del tipo de tarea que el robot vaya a realizar. De este modo, se habla de Control de Posición, cuando las variables a controlar están asociadas a la posición del robot; Control de Fuerza, cuando se desea que el robot interactúe con el entorno aplicando fuerzas y pares determinados; y Control Híbrido, en el que se combinan los dos anteriores. El contenido de esta tesis se limita únicamente al Control en Posición, dado que las plataformas robóticas paralelas tienen como principal campo de aplicación tareas de Pick-and-Place y tareas de seguimiento de trayectoria. De hecho, uno de los mayores desafíos actuales en la robótica flexible es el control de seguimiento de trayectorias del TCP, ya que se deben compensar las deformaciones y vibraciones introducidas por la flexibilidad de los elementos para poder satisfacer los requerimientos de precisión.

Por lo tanto, en adelante, a la hora de referirse al control de robots paralelos, ya sea flexibles o rígidos, se estará haciendo referencia al nivel de control de movimiento de la Figura 2.9 (bloque verde), que será implementado mediante un Control de Posición. Para poder analizar la problemática específica de este área, en este apartado se realizará un breve análisis introductorio a las diferentes aproximaciones de control que diversos autores han aplicado tanto a la robótica flexible en general, sección 2.3.1 como a la robótica paralela, sección 2.3.2.

2.3.1. Estrategias de control para robots flexibles

En el apartado anterior se ha descrito como el comportamiento dinámico de los manipuladores flexibles está compuesto por la combinación de la dinámica debida al cuerpo rígido y la dinámica debida a la flexibilidad del eslabón. Por lo tanto, las estrategias de control de los manipuladores flexibles tienen como objetivo el control de ambas dinámicas, es decir, satisfacer tanto la consigna de seguimiento de trayectoria (dinámica debido al sólido rígido) como la eliminación de las vibraciones u oscilaciones derivadas de la flexibilidad de los eslabones (dinámica debido a la flexibilidad).

Para lograr satisfacer estos objetivos en la literatura se pueden encontrar diversas estrategias, las cuales se pueden agrupar en dos grandes categorías: las estrategias basadas en técnicas de control pasivo y las estrategias basadas en técnicas de control activo. Los controladores de una y otra categoría se diferencian, principalmente, por la forma en que abordan la eliminación de las vibraciones. Mientras los controladores englobados en la primera categoría hacen uso de las propiedades de absorción de los materiales, los que se encuentran dentro de la segunda utilizan el principio de interferencia de ondas, es decir, generan de modo artificial interferencias para contrarrestar las perturbaciones indeseadas del sistema debido a la flexibilidad de los eslabones y así lograr reducir, o idealmente eliminar, las vibraciones del extremo del robot o TCP.

Sin embargo, dado el gran número de trabajos existentes en la literatura, especialmente de estrategias de control activo, esta división no resulta lo suficientemente selectiva para abordar cada tipo de controlador. Es por ello que, basándose en la

naturaleza de cada uno de ellos, los métodos de control más utilizados han sido clasificados siguiendo el esquema de la Figura 2.10.

Tipos de Controladores:

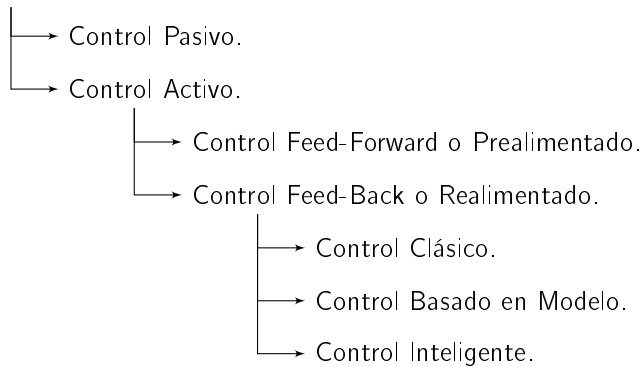


Figura 2.10: Esquema de tipo de controladores.

A continuación se presentan cada uno de estos métodos, haciendo especial hincapié en la metodología y la perspectiva utilizada en cada uno de ellos, citando para ello, los trabajos más representativos.

2.3.1.1. Control Pasivo

Como bien se ha dicho, los **Controladores Pasivos (PTC)** utiliza las propiedades de amortiguamiento de ciertos materiales, como por ejemplo la viscoelasticidad, para incrementar la absorción de las vibraciones debidas a la flexibilidad, ya que estos materiales permiten modificar parámetros físicos de los manipuladores flexibles. Su fácil implementación hace que su uso sea simple a la vez que robusto ante cambios en la dinámica del brazo. Sin embargo, en la literatura existente se ha demostrado que el control pasivo, en solitario, no es suficiente para hacer frente a las vibraciones debidas a las deformaciones elásticas de los manipuladores flexibles [31]. Además, estudios más recientes, [73], afirman que este tipo de estrategias ralentizan el movimiento de los eslabones, considerándose, en cierta medida, menos efectivos que los activos [73]. Es por todo ello que esta técnica de control suele encontrarse combinada con técnicas de Control Activo.

Muestra de ello es, por ejemplo, [134], donde se propone un controlador Proporcional Derivativo (PD) basado en el PTC para el control de un manipulador flexible de un grado de libertad. Sin embargo, en dicho trabajo se aprecia como esta estrategia es muy sensible a la fricción del sistema [134], siendo este su mayor inconveniente. Para tratar de hacer frente a esta limitación, en [187] se presenta una mejora basada en el estudio de la dinámica del brazo. En [172], por su parte, se propone un PTC acompañado de dos lazos en cascada para el control de un manipulador flexible. El lazo interior, compuesto por un controlador de posición, depende únicamente en la

dinámica del motor, mientras que el lazo exterior se encarga de la eliminación de vibraciones. Sin embargo, dicho trabajo experimenta con la alta sensibilidad a las frecuencias bajas, lo que limita su implementación.

Pese a su simplicidad y robustez, la mayoría de los trabajos científicos se han decantado por la utilización de técnicas de control activo a la hora de enfrentarse a las deformaciones de los manipuladores flexibles.

2.3.1.2. Control Activo

El Control Activo trata de eliminar las vibraciones modificando activamente las consignas de los actuadores. De esta forma, se introducen modificaciones en la consigna de movimiento de éstos, de forma que las nuevas consignas contrarrestan las perturbaciones generadas por las deformaciones de los elementos flexibles.

Entre las diferentes estrategias existentes en la literatura actual, se puede observar que el cálculo de dichas modificaciones, y por consiguiente las nuevas consignas, se realiza gracias a los datos obtenidos por: 1) la predicción de la respuesta del sistema definida por el Modelo Dinámico Inverso, o 2) a partir de las medidas de los diferentes sensores del sistema. Es por ello que, las estrategias activas pueden ser catalogadas en función de esta característica. Por lo tanto, las estrategias de control que carecen de datos realimentados, se denominan controladores Prealimentados (*Feed-Forward Controllers*), mientras que las que se realimentan de la variable de salida se denominan controladores realimentados o *Feed-Back Controllers*.

Controladores Feed-Forward

En las técnicas de Control Feed-Forward o Prealimentado aplicadas a la eliminación de vibraciones definen la consigna de control considerando las propiedades físicas y mecánicas del sistema, de forma que la respuesta de los modos de vibración dominantes se reduzca o, idealmente, se elimine. Esta estrategia, por lo tanto, no requiere del uso de ninguna realimentación sensorial para controlar las vibraciones, haciendo de ésta una técnica más económica que aquellas estrategias realimentadas. Sin embargo, los controladores Feed-Forward no son capaces de actuar ante perturbaciones, incertidumbres del sistema o variaciones en la carga, ya que no tienen medios para conocer el estado actual del sistema.

En la literatura, pese a no ser muchos, se pueden encontrar trabajos como [168], donde se desarrolla un controlador *Feed-Forward* para minimizar las vibraciones residuales de un manipulador de dos eslabones flexibles. En dicho trabajo, Park utiliza una técnica de diseño de trayectorias donde se combinan las series de Fourier y las funciones polinómicas. De esta forma, la trayectoria deseada es diseñada de forma optimizada para conseguir una vibración residual mínima. En [4], por el contrario, se utiliza un controlador prealimentado para el generador de trayectorias para un manipulador flexible de dos grados de libertad bajo grandes deformaciones. En este trabajo, la consigna de posición esta dividida en dos. Por un lado, el perfil de la consigna de los ángulos de las articulaciones, la cual se define mediante funciones de segmentación cúbica. Por el otro, el cálculo de la trayectoria ideal que minimiza las vibraciones

en el TCP, el cual es calculado mediante técnicas de optimización por enjambre de partículas. Otros autores, por su parte, proponen controladores *Feed-Forward* para la definición de métodos de planificación de trayectorias aplicados al control de seguimiento de un robot flexible. Prueba de ello es [45], donde hacen uso de técnicas basadas en las dinámicas singularmente perturbadas para gobernar un manipulador flexible de un solo grado de libertad.

Controladores Feed-Back

La gran mayoría de los trabajos que abordan esta problemática utilizan sensores y/o estimadores de estados para conocer la deformación en cada instante, y de esa forma, tratar de reducir las vibraciones del sistema. Este tipo de controladores están diseñados para ser robustos ante cierto grado de incertidumbre en el modelo así como ante perturbaciones externas. Su robustez ha hecho de estas técnicas las grandes dominadoras a lo largo de la historia de la Teoría de Control.

A continuación se analizarán los controladores *Feed-Forward* clasificándolos en función de los tres periodos.

Estrategías de Control Clásico: En la actualidad, pese a lo antiguo de las técnicas del Control Clásico, siguen siendo estrategias muy utilizadas en todo tipo de aplicaciones industriales, gracias a sus buenos resultados a la vez que su facilidad a la hora de ser implementados. Por lo tanto, también han sido muy utilizadas en los manipuladores robóticos, tanto rígidos como flexibles.

Este tipo de técnicas, como se ha detallado, vienen definidas por la realimentación sensorial de diferentes estados del sistema. Sin embargo, no todos los autores realimentan los mismos estados, generando así diferentes estrategias de control.

La **Realimentación de Posición Positiva (PPF)** y la **Realimentación de Posición Negativa (NPF)**, por ejemplo, son estrategias de control en donde se hace uso de la deformación de los eslabones para reducir la vibración multi-modal de las vigas poco amortiguadas [122]. Si bien, el método de realimentación de posición positiva es bien conocida, la versión negativa, NPF, no ha sido tan utilizada en aplicaciones de estructuras flexibles [122]. Estas estrategias, siendo estrategias de control activo, destacan por ser capaces de adaptarse a pequeñas variaciones o incertidumbres del modelo [238]. A su vez, tanto PPF como NPF son metodologías efectivas a la hora de eliminar el modo de vibración de las estructuras flexibles sin que el movimiento de referencia se vea afectado [181]. Sin embargo, para que esta cancelación de las vibraciones sea exitosa, es necesario conocer con exactitud la frecuencia natural del sistema o que ésta no varíe con el tiempo [181], ya que la sintonización se hace de forma que la frecuencia del compensador sea igual o lo más cercana posible a la frecuencia natural del sistema.

Song et al. en [203] hace uso del control PPF para la eliminación de vibraciones de una viga de aluminio cuyo movimiento se mide mediante sensores piezoeléctricos y medidores de desplazamiento láseres. En [195] el control por realimentación de posición positiva se utiliza para el control de giro y vibraciones de un manipulador

flexible de un grado de libertad. En [181], por su parte, se combina un control de realimentación mediante un acelerómetro con un controlador PPF para eliminar las vibraciones de un manipulador de un eslabón con la articulación y el eslabón flexibles. En dicho trabajo, Qiu utiliza la estrategia de control para eliminar las vibraciones producidas tanto por el par del motor como por las perturbaciones externas, tales como las derivadas de la carga. Orszulik et al., por su parte, propone en [164] un PPF adaptativo para la eliminación de vibraciones de un manipulador flexible de un GDL con una pareja de sensor/actuador piezoeléctricos. Además, esta propuesta actualiza en Tiempo Real las dos primeras frecuencias naturales de la estructura mediante el uso de un estimador de parámetros adaptativo basado en mínimos cuadrados recursivos, lo que permite eliminar las vibraciones del TCP sin conocer de ante mano las frecuencias naturales del sistema.

Otros autores, en cambio, son más partidarios de realimentar la velocidad de las deformaciones. Así, el **Control por Realimentación Lineal de Velocidad (LVF)** proporciona amortiguamiento efectivo al mismo tiempo que garantizan la estabilidad del sistema en lazo cerrado debido al efecto *spillover*, [211]. Sin embargo, este tipo de controladores requieren del uso de un diferenciador, algo que no es posible en sistemas con un ancho de banda grande. Por otro lado, el controlador por Realimentación Lineal de Velocidad genera un esfuerzo de control muy alto sobre todas las frecuencias del ancho de banda, reduciendo la vida útil de los actuadores [211].

En la literatura, Sun et al. lo aplica a un manipulador de un único eslabón gobernado por un actuador piezoeléctrico. En dicho trabajo, los autores demuestran que el controlador LVF para transductores piezoeléctricos distribuidos es, condicionalmente estable, ya que estos sólo pueden situarse en puntos donde la curvatura del eslabón no interfiera con la dominancia del transductor. Posteriormente, Gurses et al. en [94] extendió este trabajo, combinando la estrategia definida en [211] con un Proporcional Derivativo (PD) para paliar los problemas de estabilidad expuestos en [211].

Del mismo modo, existen ciertos autores que se decantan por sensorizar la aceleración del extremo del elemento flexible. Esta estrategia de control, denominada **Control por Realimentación de la Aceleración del Extremo (EPAF)** ha sido ampliamente utilizada en investigaciones de las últimas dos décadas debido a la buena tasa de reducción de vibraciones de altas frecuencias. Sin embargo, ésta no está teniendo tanto protagonismo en las aplicaciones de robótica flexible. Esto se debe, principalmente, a que la realimentación de alta frecuencia introduce un alto retardo en la fase del sistema en lazo cerrado, lo que dificulta su implementación experimental.

Muestra de ello es el trabajo [180] donde Qiu et al. diseñan un sensor de aceleración del extremo basado en el control realimentado proporcional para una viga en voladizo con un actuador piezoeléctrico. En dicho trabajo, el autor compara la estrategia desarrollada con el control deslizante, concluyendo que ambos métodos eliminan las vibraciones. Sin embargo en la experimentación, el método deslizante ofrecía mejores tasas de eliminación. Por su parte, en [9] se presenta una viga en voladizo inteligente cuyas vibraciones forzadas son eliminadas por un controlador EPAF. En él, An et al. demuestra que considerando las perturbaciones externas el controlador mejora su rendimiento.

Pese a que existen autores que se decantan por simplificar el número de sensores, la gran mayoría de los trabajos existentes dentro de las estrategias de Control Clásico apuestan por realimentar tanto la posición, como la velocidad y/o la aceleración del elemento flexible para evaluar el error respecto a la referencia deseada. Esta estrategia, denominada **Control Proporcional Integrativo Derivativo (PID)**, es la más extendida, tanto por su simplicidad estructural como por su fiabilidad y aplicabilidad en la gran mayoría de las aplicaciones existentes [129].

En el ámbito de la robótica flexible, también ha sido una técnica ampliamente extendida. En [129], por ejemplo, se desarrolla un PID basado en $H-\infty$ para el control de posición del TCP en un manipulador flexible de un grado de libertad. Sin embargo, esta estrategia requiere de un controlador $H-\infty$ de, al menos, mismo orden que el sistema a controlar, requiriendo de una alta carga computacional lo que dificulta su implementación en aplicaciones de Tiempo Real. Es por ello que en [129] se presenta un controlador $H-\infty$ de orden reducido donde las frecuencias altas no están contempladas y son tratadas como incertidumbres del sistema. Por otro lado, en [230] se presenta un controlador PID con Realimentación Directa del Esfuerzo (DSF) para un manipulador de un solo grado de libertad. En este trabajo, Tumari et al. comparan los resultados obtenidos con un PID con y sin Realimentación Directa del Esfuerzo, resaltando los resultados obtenidos con la estrategia presentada reducen mejor el error en el régimen continuo en comparación con el algoritmo sin DSF.

Si bien la realimentación de la posición, velocidad y/o aceleración de los elementos flexibles parecen la información más relevante a la hora de minimizar las vibraciones, éstas no suelen ser fáciles de medir directamente. Sin embargo, se ha demostrado que el esfuerzo al que está sometido la barra es directamente proporcional a la deformación que sufre el elemento. Es por ello, que apoyados en esta propiedad mecánica, ciertos autores han utilizado el **Control por Realimentación Directa del Esfuerzo (DSF)**, utilizando la información del esfuerzo a lo largo de este para controlar la deformación del eslabón. Esta estrategia de control, la cual está basada en el uso de galgas extensiométricas, se caracteriza por ser simple de implementar a la vez que precisa e insensible ante cambios en la carga. Sin embargo, el hecho de utilizar galgas como sensor de medida, hacen que sea una estrategia altamente sensible al ruido.

En los últimos años, estos trabajos se han centrado principalmente en fusionar esta técnica con otras para mejorar las prestaciones del controlador. En [71] se propone una estrategia de control utilizando galgas extensiométricas para gobernar un brazo robótico flexible de un eslabón expuesto a cargas variables. El controlador presentado consiste en dos lazos en cascada donde el lazo interno controla la dinámica del motor mediante un controlador PD, mientras que el lazo externo controla la trayectoria del TCP cancelando sus vibraciones gracias a las medidas de deformación obtenidas mediante las galgas extensiométricas situadas en la base del eslabón flexible. En dicho trabajo, Feliu et al. demuestran la robustez del controlador ante variaciones de carga, así como ante errores de estimación de parámetros.

Otros autores emplean el **Control Repetitivo** (*Repetitive control*) tratando de garantizar que el error de seguimiento sea cero en el régimen estacionario ante referencias periódicas, anulando, para ello, cualquier perturbación periódica existente.

Para ello, utiliza los datos de error anteriores para modificar las consignas futuras. Sin embargo, aún siendo un controlador simple y fácil de sintonizar, no es capaz de adaptarse a las variaciones de carga del manipulador, algo imprescindible en aplicaciones de robótica.

Green y Sasiadek presentan en [87] un controlador que combina el Control Repetitivo y la Lógica Borrosa para controlar un manipulador de dos eslabones flexibles, el cual repite iterativamente la trayectoria de control hasta que los efectos de la flexibilidad se cancelan. Para evitar la necesidad de repetir iterativamente las trayectorias, en [73] se presenta un sistema de control para un único eslabón flexible basado en Control Repetitivo pero que cancela las vibraciones después de la ejecución de cada movimiento. El sistema presentado está compuesto por dos subsistemas: el primero de ellos, está sintonizado para garantizar la estabilidad y la rápida respuesta del extremo. El segundo, en el cual se encuentra el control repetitivo, se encarga de cancelar las vibraciones de alto orden en el régimen estacionario.

Del mismo modo, el **Control Resonante Integral (IRC)** utiliza la respuesta frecuencial como herramienta para minimizar las vibraciones de los eslabones flexibles. El IRC es esencialmente un sistema de control clásico integral con retroalimentación positiva y pérdidas [152] cuyos polos del sistema se alejan del eje imaginario mediante el incremento la ganancia integral. El impacto que logra sobre los primeros modos de vibración del sistema y su relativa simplicidad de implementación en comparación con los sistemas de control moderno, destacan como sus grandes virtudes. Sin embargo, también presenta una buena controlabilidad sobre múltiples modos de vibración, permitiendo conseguir respuestas más rápidas y una mayor estabilidad en el sistema. Para lograr esta respuesta, el controlador debe ser sintonizado de forma que se aproxime a un diferenciador de un ancho de banda estrecho, situado sobre la frecuencias de resonancia de la estructura [140]. Es por ello que este controlador ha sido propuesto en la última década como una alternativa sencilla, económica y eficiente para el control de vibraciones en sistemas flexibles. Sin embargo, la dificultad de sintonización es el mayor de sus *handicap*, ya que no existen métodos suficientemente estandarizados.

Precisamente este último trabajo, [140], declara ser el primer trabajo donde se implementa el controlador Resonante Integral en un manipulador flexible de un eslabón. En él se presenta una estrategia donde se amortiguan los modos de resonancia mediante la realimentación del ángulo de la articulación. Esta estrategia se presenta como un algoritmo compuesto por dos lazos: el interior implementa el controlador de resonancia donde se eliminan las vibraciones debidas a la flexibilidad del eslabón. El lazo exterior, por el contrario, utiliza un controlador integral para controlar la posición del extremo del eslabón mediante la medición de la deformación y ángulo del dicho punto. Pereira et al. en [171], por ejemplo, hace uso de las ventajas en la metodología del control pasivo implementado en [172], el cual lo combina con un controlador IRC logrando atenuar los problemas de estabilidad existentes. Posteriormente, en [170], también utilizan el Control Resonante Integral para gobernar un manipulador flexible de un grado de libertad. Sin embargo, los autores proponen un lazo interior para robustecer el ángulo de la articulación ante la fricción, y un lazo exterior donde, utilizando un controlador IRC, se amortiguan las vibraciones debidas

a dinámicas no modeladas.

Otra vertiente, aunque poco extendida, es la modelar ciertos sistemas, entre ellos los robots flexibles, mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias con derivadas de orden no entero. Por lo tanto, el uso de estas ecuaciones implican el uso de **Controladores de Orden Fraccionario (FOC)**: Este tipo de controladores son especialmente atractivos ya que mejoran las propiedades de robustez gracias a que las respuestas de frecuencia de los sistemas basados en este tipo de estrategias disfrutan de márgenes de fase constantes, incluso en aplicaciones con cargas variables y perturbaciones [153].

En [153] Monje et al. implementa sobre un manipulador flexible de carga variable un controlador Derivativo de Orden Fraccionario. Dicho controlador se presenta modificado para asemejarlo a la estructura de un controlador Integrador de Orden Fraccionario. Para su implementación, los autores definen una estrategia basada en tres lazos de control anidados. En el lazo interior se controla la posición del motor mediante un PD tradicional, en el lazo intermedio se reduce el orden del sistema a un doble integrador y por último, en el lazo externo se utiliza un controlador Derivativo de Orden Fraccionario para desacoplar el sobrepasamiento y la variación de la carga.

Otra estrategia empleada en manipuladores flexibles que sigue la pauta de “divide y vencerás” es la del **Control mediante Doble Escala de Tiempo (TTS)**. Esta estrategia divide la respuesta dinámica del sistema en dos lazos concatenados, dando a cada uno de ellos un objetivo a controlar, por un lado el control del sólido rígido, asociado a una dinámica lenta, y por el otro el control de las oscilaciones debidas a la flexibilidad de los eslabones, asociada a dinámicas más rápidas.

Basándose en este principio, Bascetta y Rocco en [20] presentan un controlador de Doble Escala de Tiempo para gobernar un manipulador flexible de un grado de libertad sensorizado con una cámara en el TCP. Para ello, el lazo rápido se encarga de estabilizar las oscilaciones dinámicas debidas a la flexibilidad mediante el uso de galgas, mientras que el lazo lento utiliza las imágenes obtenidas por la cámara para garantizar que se alcanza la posición de referencia. En [240], al igual que en el trabajo anterior, también se realiza un seguimiento de trayectoria mediante el uso de Control TTS en una viga flexible. Sin embargo, en [240] implementan un controlador LQR para el lazo lento y un control deslizante modificado para el lazo rápido. Estos controladores se han validado tanto para entradas de tipo escalón como para tipo rampa, concluyendo que el controlador es capaz de seguir sin oscilaciones a una referencia de tipo rampa, y con oscilaciones mínimas en el régimen permanente para el caso de la entrada escalón.

Controladores basados en Modelo: Después de la segunda guerra mundial se desarrollaron nuevas estrategias de control, las cuales estaban fundamentadas en el cálculo matricial, definiendo así una nueva era, denominada la Teoría de Control Moderna.

Gracias al cálculo matricial, las nuevas técnicas de control permitieron introducir el Modelo Dinámico Inverso dentro de la ley de control, naciendo así los **Controladores Avanzados Basados en Modelo**. Estas técnicas han resultado muy útiles en

aquellas aplicaciones donde las diferentes entradas del sistema están dinámicamente acopladas, como es el caso de los manipuladores robóticos.

Una de las estrategias basadas en modelo más utilizadas en la robótica es el **Control por Par Computado (CTC)**. Esta estrategia de control utiliza el modelo dinámico inverso del manipulador para compensar la dinámica no lineal del sistema. Además, esta compensación se realiza en un bucle de realimentación, lo que permite linealizar y desacoplar la dinámica resultante. Estos atributos, pese al incremento del coste computacional, han hecho que su uso se haya extendido a todo tipo de manipuladores, entre lo que se encuentran aquellos con eslabones flexibles.

En [57] se estudia la estabilidad del CTC en los robots flexibles en función de la variable de salida. Dicho estudio es aplicado en un manipulador de un solo elemento basado en un modelo lagrangiano no lineal, del cual se concluye que: a) si la variable de salida está definida por la posición articular, la dinámica asociada será asintóticamente estable en forma local, y por consiguiente, la solución de la dinámica interna está acotada [114, pág 219, lema 5.4] y b) si la variable de salida esta definida por la posición del TCP, la estabilidad de la dinámica interna en el punto de equilibrio no esta asegurada, pudiendo desestabilizar la dinámica interna debido a acciones de control fuera de los limites acotados (*finite time escape phenomenon*).

Por esta razón, el Control de Par Computado se ha utilizado, principalmente, para el problema de control de seguimiento de trayectoria realimentando la posición y velocidad angular de las articulaciones activas. Sin embargo, de esta manera las oscilaciones del extremo del eslabón no están directamente representadas. Para hacer frente a este problema, una solución consiste en incluir la velocidad lineal elástica a la ley de control anterior [201]. De esta manera se amortiguan eficientemente las oscilaciones del extremo del eslabón, a costa de perder precisión en el seguimiento de trayectoria. Por otro lado, a la hora de calcular el modelo inverso se requieren medir y/o estimar las coordenadas de elasticidad. Para ello algunos autores utilizan galgas u observadores [15], sin embargo, la estimación de dichas coordenadas puede resultar computacionalmente muy costosa, por ello en [55] se propone implementar la dinámica flexible en el calculo "off-line" asociado con la trayectoria deseada. Posteriormente estos pares son comparados con la señal realimentada y a partir de dicho error se calcula la ley de control final.

En esta misma línea (de utilizar las trayectorias para predefinir el comportamiento del manipulador), se puede hablar del **Control Predictivo**. Algunos investigadores han utilizado estrategias predictivas clásicas (no óptimas) [112, 215] para el control de vibraciones de manipuladores flexibles, mientras que otros se han decantado por estrategias predictivas modernas basadas en la optimización [106], denominas Control Predictivo basado en Modelo (MPC) [106, 154, 190]. El MPC utiliza el modelo del sistema para predecir su comportamiento en el futuro y, en función de este comportamiento, calcular la señal de control que minimiza tanto el esfuerzo de control como el error de trayectoria. Esta estrategia de control permite, además, la inclusión explícita de restricciones, retardos y/o no linealidades en éste proceso de minimización [138, 213, 41], lo que lo convierte en una aproximación con un gran potencial para su aplicación a sistemas reales, dado que considera las propias limitaciones del

sistema.

Dado el potencial que ofrece el control predictivo, y el MPC en especial, algunos autores han aplicado esta estrategia a los robots flexibles. Entre ellos destaca el trabajo de Abdolvand y Fatehi en [3]. En este trabajo se presenta un controlador predictivo multivariable para la eliminación de las vibraciones de un manipulador flexibles con actuador piezoelectrico. Abdolvand y Fatehi combinan el Principio de Euler Lagrange y el Método de Elementos Finitos para definir la dinámica del sistema para, posteriormente, analizar la fuerza aplicada sobre la estructura calculando su influencia en el actuador. En [14], por su parte, se propone un controlador MPC multivariable asociado a un filtro de Kalman para el control de vibraciones de un manipulador flexible de un solo elemento. En dicho trabajo, no sólo validan los resultados obtenidos sino que remarcan la importancia de predecir la vibración del eslabón teniendo en cuenta las no linealidades del sistema. En [236], por el contrario, obtienen un Modelo Predictivo lineal simplificado a partir de la dinámica de un manipulador flexible. La linealización de dicho modelo permite a los autores utilizar dicho modelo en aplicaciones de Tiempo Real aplicadas a manipuladores flexibles de un grado de libertad.

Dentro de la literatura de la Teoría de Control existe un enfoque diferente, el cual se basa en encontrar una ley de control que minimice la suma de los esfuerzos de control y las desviaciones de la señal de salida de su valor deseado. Este problema se conoce como el de Control Óptimo. Entre los controladores óptimos uno de los más utilizados es el **Regulador Lineal Cuadrático**, más conocido por el acrónimo **LQR**. El control LQR, es un método de control óptimo con el cual se asegura la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a través de ganancias de realimentación. Este método busca minimizar una función de coste, la cual, se puede definir como el sumatorio de desviaciones de los valores reales medidos respecto a los deseados; de esta manera, lo que se pretende es encontrar aquellas ganancias del controlador que minimizan las desviaciones no deseadas. Sin embargo, estas estrategias de control son altamente dependientes del modelo, por lo que no son muy robustas ante errores de modelado [140].

Pese a ello, los controladores LQR han sido utilizados satisfactoriamente para la eliminación de vibraciones en los manipuladores flexibles. Entre los diferentes trabajos existentes en la literatura se pueden encontrar tanto soluciones basadas en estimadores del tipo filtro de Kalman [61] como soluciones donde se combinan con otras estrategias, como, por ejemplo, con modos deslizantes [68] o con PID [5], por citar algunos. En la misma línea, tanto en [7] como en [8], se presentan sendas comparativas entre la estrategia de control LQR en combinación con PID y la estrategia de control LQR con Control Prealimentado. En dichos trabajos, ambos controladores híbridos han sido sintonizados para controlar las vibraciones del TCP de un manipulador flexible de un solo grado de libertad. A partir de los resultados presentados por Ahmad, se concluye que, en la eliminación de vibraciones en el TCP, la estrategia LQR con Control Prealimentado presenta mejores resultados que la estrategia híbrida LQR+PID, pese a que esta última tiene una velocidad de respuesta ligeramente inferior.

Del mismo modo, dentro de la robótica, aunque menos extendida, existe otra

estrategia de Control Óptima muy utilizada, denominada **Control de Planificación Óptima de Trayectorias (OTPC)**. Este controlador está compuesto por un sistema de ecuaciones diferenciales que definen las trayectorias de las variables de control con el objetivo de minimizar las vibraciones debidas a la flexibilidad de los eslabones. Es por ello que el OTPC es una estrategia realmente poderosa siempre y cuando se defina adecuadamente tanto la acción de medida como el modelo.

Heidari et al., por ejemplo, aplica en [100] el OTPC para el control punto a punto de un manipulador flexible de un grado de libertad optimizando su trayectoria para minimizar las vibraciones. Para ello, a la hora de definir las condiciones de optimización, los autores hacen uso del principio de minimización de Pontryagin.

Uno de los factores más importantes a la hora de implementar controles multiarticulares como el CTC, MPC... es la obtención del modelo dinámico. En general, obtener un modelo dinámico preciso es una tarea compleja tanto en el proceso de cálculo como en el de identificación de parámetros. En muchas ocasiones, los modelos se simplifican, dejando de lado fenómenos físicos difíciles de identificar. Esto hace que en la práctica, el modelo dinámico que implementan las estrategias de control presenten ciertas incertidumbres, lo que supone un decremento en la eficiencia de los controladores.

Las técnicas de **Control Adaptativo** se presentan como una solución a esta problemática. Este tipo de control permite estimar en línea los valores reales de los parámetros dinámicos que componen el modelo del robot, pudiendo corregir valores erróneamente identificados o identificar aquellos que son desconocidos. Para ello los parámetros del robot a identificar han de estar considerados explícitamente en el modelo, esto es, han de ser incertidumbres estructuradas.

Con el fin de realizar la adaptación de los parámetros del modelo hacia sus valores reales, las estrategias de control adaptativo requieren el cálculo de una matriz de regresión. Esta matriz se obtiene manipulando el modelo dinámico del robot con el fin de obtener una expresión lineal respecto a los parámetros del sistema que posteriormente se someterán al proceso de adaptación.

Con todo ello, el Control Adaptativo ha sido ampliamente utilizado en aplicaciones de robótica flexible. En [60], por ejemplo, se presenta el diseño de un control óptimo no lineal con modelo adaptativo interno para un manipulador de dos grados de libertad. El modelo interno se sintoniza adaptándose a las perturbaciones sin perder por ello robustez en la estabilidad. Ma y Ghasemi-Nejhad, por su parte, proponen una comparación en [137] entre el Control Adaptativo de Lógica Fuzzy (AFLC) y un Control Adaptativo del Espacio Modal Independiente (IMSAC) para el control de movimiento de un manipulador de un grado de libertad gobernado por actuadores piezoeléctricos con zona muerta. En dicho trabajo, ambas estrategias se componen de dos lazos de control, un lazo exterior donde se implementa un control de posición y un lazo interior con un controlador para la eliminación de las vibraciones. A partir de los resultados obtenidos en [137], se concluye que la estrategia basada en AFLC reduce el efecto de la zona muerta, minimizando así el error de posición en régimen permanente. El IMSAC, por el contrario, aumenta el amortiguamiento por diez en los dos modos del manipulador eliminando así las vibraciones. En [209], por su parte,

se propone un controlador adaptativo neurofuzzy para manipuladores robóticos de dos grados de libertad, permitiendo tener una mejor sintonización de los parámetros adaptativos. Sin embargo, esta estrategia requiere, para su uso en entrenamientos offline, de datos obtenidos previamente de la relación entre la entrada y la salida del sistema. En los mismos términos, en [177] se implementa un control adaptativo con capacidad de aprendizaje para el control de trayectoria de un manipulador de dos grados de libertad sujeto a cargas variables, ofreciendo mejores resultados que el control adaptativo directo no lineal o que el AFLC.

Otra de las alternativas existentes para afrontar el problema de la incertidumbre en el modelado es la utilización del **Control Robusto**. Estos controladores presentan un enfoque diferente al de los controladores adaptativos. Mientras que éstos últimos utilizan algoritmos de adaptación que reducen paulatinamente las incertidumbres del modelo, las técnicas de control robusto utilizan el modelo con incertidumbres y fuerzan al sistema a cumplir ciertas especificaciones a pesar de dichas incertidumbres.

Aprovechando esta cualidad, este controlador también ha sido ampliamente utilizado en la robótica flexible. En [52], por ejemplo, se presenta un controlador Robusto para el control de manipuladores flexibles con cargas variables, parámetros de modelado cambiantes e incertidumbres de modelado. Para asegurar la robustez, los autores apuestan por un controlador $H-\infty$ cuya solución solución óptima se obtiene mediante técnicas de Algoritmos Genéticos.

Técnicas de Control Inteligente Las estrategias analizadas hasta ahora, tratan la información desde un nivel numérico, es decir, mediante el uso de ecuaciones matemáticas deterministas sin hacer una interpretación cognitiva de la información. Eso hace, sin embargo, que en ciertas ocasiones se requiera la supervisión de un ser humano. Ante este escenario, la Teoría de Control se ha aliado con las técnicas de Inteligencia Artificial para definir una nueva generación de controladores, denominada **Control Inteligente**. Este termino se utiliza para hacer referencia a un control en el que las actividades con cierto grado de abstracción tienen especial importancia. Esto permite a las estrategias de control resolver problemas inabordables por los métodos anteriormente citados, ya sea por su complejidad o por el desconocimiento del proceso.

En control de manipuladores flexibles, como problema de control complejo que es, no ha sido indiferente a la emersión de los Controladores Inteligentes. Entre las aplicaciones más destacadas de la literatura se pueden encontrar trabajos donde se utilizan Redes Neuronales Artificiales y Controladores por Lógica Fuzzy o borrosa.

Las **Redes Neuronales Artificiales (ANN)**: son un modelo computacional basado en un gran conjunto de unidades neuronales simples (neuronas artificiales), de forma aproximadamente análoga al comportamiento observado en los axones de las neuronas en los cerebros biológicos. Esto les hace ser un método relativamente rápido para modelar sistemas y/o desarrollar controladores sin tener ningún conocimiento de la dinámica del sistema, necesitando únicamente información de la relación entre las entradas y las salidas del sistema, datos que se utilizan para el entrenamiento de dicha red. Por lo tanto, las redes neuronales se presentan como una poderosa herramienta

para definir sistemas dinámicos complejos o desconocidos. Sin embargo, este método requiere de un periodo de aprendizaje que cuyos costes en términos de tiempo y computación son muy altos.

Entre los trabajos existentes se encuentra [119], donde se aplican las Redes Neuronales Artificiales para el control de un manipulador flexible de un grado de libertad utilizando estrategias de dinámica inversa. Para el entrenamiento de la ANN, esta estrategia se nutre de las señales realimentadas del error, por lo que este se ejecuta del mismo modo que un controlador *feedforward*. En [210], por el contrario, se presenta un escenario de control híbrido en el que se utiliza un controlador neuro $H-\infty$ con perturbación singular para el control de un manipulador con eslabones y articulaciones flexibles. Dicha estrategia esta compuesta por una Red Neuronal Artificial encargada de controlar el subsistema de dinámica lenta mientras que el control $H-\infty$ controla el subsistema de las vibraciones. Uno de los problemas reportados en la literatura a la hora de entrenar una ANN no lineal MIMO (Multi Entrada Multi Salida) es que si la región de entrada es demasiado grande, el tiempo de entrenamiento se incrementa significativamente y los resultados de entrenamiento no son lo suficientemente buenos. Es por ello que, De Almeida Neto et al. en [54] confirma la posibilidad de utilizar múltiples ANN para el control de posición del TCP de un manipulador flexibles mejorando los resultados de entrenamiento.

Mientras las Redes Neuronales Artificiales son capaces de tomar decisiones a partir del conocimiento adquirido en los entrenamientos, el **Control por Lógica Fuzzy** utiliza la experiencia del ser humano para generar un razonamiento que permite la toma de decisiones mediante la formulación de reglas. Es por ello que, tanto para definir las variables de control como para formular las reglas que calcularan la ley de control en cada instante, se requiere del conocimiento del proceso. Es por ello, esta estrategia ha sido utilizada en diferentes aplicaciones de control de manipuladores flexibles, como por ejemplo en [32]. Sin embargo, para evitar este problema, en numerosas ocasiones se utiliza la Lógica Fuzzy en combinación con estrategias adaptativas, denominadas Controlador de Lógica Borrosa Adaptativa (AFLC). Éstas, se caracterizan, o bien por modificar las reglas formuladas o bien por ir cambiando el controlador Fuzzy en función de las necesidades.

En [131] por ejemplo, se propone un control basado en la Lógica Fuzzy con capacidad de aprendizaje para el control de seguimiento y eliminación de vibraciones en un manipulador flexible de un GDL. En este trabajo, la ley de control de la Lógica Fuzzy con aprendizaje se alimenta del error del ciclo anterior mediante una estructura *feedforward* a un controlador PD. Otros autores, por el contrario, se inclinan más por las ventajas de la combinación de la Lógica Fuzzy con las Redes Neuronales tales como [218] que utiliza el control neurofuzzy adaptativo para el control de manipuladores flexibles.

El análisis de la literatura de los controladores utilizados en la robótica flexible ha demostrado que, pese a ser numerosos los trabajos donde se aborda el control de los manipuladores flexibles, la gran mayoría de estos están orientados a manipuladores de un solo eslabón. Pese a ser cierto que en los manipuladores de un eslabón flexible permiten conocer la problemática existente en el modelado y control de manipula-

dores flexibles, los manipuladores de múltiples eslabones lidian con una complejidad mucho mayor debida, principalmente, a tres razones: a) al movimiento de los eslabones debido a la flexibilidad, b) la dependencia geométrica de la dinámica y c) el alto número de GDL del modelo. Por lo tanto, desde éste punto de vista, se pueden diferenciar dos categorías: 1) los manipuladores de un solo eslabón, los cuales pueden ser modelados de forma precisa mediante técnicas basadas en dinámicas lineales, y 2) los manipuladores de múltiples eslabones, los cuales requieren modelos más precisos donde se tienen en cuenta las no lineales que rigen sus respectivas dinámicas. Es por ello que, por lo general, el problema de control de manipuladores flexibles de un grado de libertad bajo deformaciones pequeñas está, para la mayoría de los casos, resuelto. Por el contrario, en el caso general donde se lidia con manipuladores de múltiples eslabones, su control está aún por resolver debido a su complejidad.

2.3.2. Estrategias de control para robots paralelos

Ante la falta de trabajos que aborden los manipuladores flexibles con múltiples eslabones, y en especial manipuladores paralelos, en la presente sección se aborda una síntesis de los antecedentes bibliográficos en el ámbito del control en los robots paralelos rígidos, para, posteriormente, estudiar su posible adaptación a sus homólogos flexibles. Sin embargo, tal y como sucede en la dinámica, el control de posición de la robótica paralela rígida es un campo mucho menos explorado que el de la robótica serie, donde existe una gran bibliografía, incluyendo numerosos libros que resumen las principales aportaciones en este campo [10, 17, 50, 117, 163, 228].

En primer lugar, se debe destacar que, pese al creciente interés en la última década, el control de la robótica paralela no se ha abordado tanto como el control de su homólogo serie. Esta escasez de trabajos en el área de control de robots paralelos, tanto rígidos como flexibles, tiene su origen en tres principales causas o factores. El primero de ellos está relacionado con la propia comunidad investigadora, compuesta en su mayor parte por investigadores del área de la mecánica y el análisis de estructuras, que, evidentemente, han abordado las áreas puramente mecánicas de la robótica, como la cinemática, la dinámica, la síntesis y el análisis en detrimento de otras como el control. Esta tendencia se ha reducido en los últimos años, con la introducción de investigadores de otras disciplinas, como la automática y la electrónica, abordando áreas como el control, menos explorada hasta la fecha. Adicionalmente, cabe recordar que aunque los robots paralelos son anteriores a los serie, la disciplina que los estudia es relativamente reciente, de modo que, aunque los avances han sido notables, todavía queda mucho por hacer en prácticamente todas las áreas.

El segundo factor está relacionado con la alta complejidad mecánica que presentan los robots paralelos en general. Esta complejidad estructural deriva en una cinemática compleja y, por extensión, de una dinámica compleja. Este factor conlleva, en la mayoría de ocasiones, un coste computacional elevado del modelo dinámico del robot, dado que para calcularlo, tal y como se ha visto en el sección anterior, se requiere resolver las relaciones cinemáticas entre las diferentes variables del mecanismo. El coste computacional del cálculo del modelo dinámico de robots paralelos ha supues-

to un importante escollo a la hora de implementar y estudiar controles avanzados en robótica paralela, de modo que muchos investigadores han preferido centrar sus esfuerzos en estudiar formulaciones para el cálculo eficiente del modelo dinámico y cinemático, dejando de lado el ámbito de su implementación en una estrategia de control.

Por último, el tercer factor se deriva de la errónea percepción que una parte de la comunidad investigadora tiene respecto a los robots paralelos, considerándolos una extensión de los serie, y trasladando las estrategias existentes para este tipo de robots directamente a los robots paralelos sin considerar las características específicas y singulares de estos mecanismos. Esto provoca que, tal y como detalla Merlet en [148], los controladores importados de la robótica serie no permitan, en muchas ocasiones, el obtener todo el potencial de los robots paralelos.

Debido a estos tres factores, se pueden encontrar pocos trabajos que traten específicamente sobre el control de robots paralelos, y prácticamente ninguno que traten sobre robots paralelos flexibles. En la mayoría de los casos, además, las estrategias propuestas están directamente importadas de la robótica serie, pudiendo clasificarlas, al igual que sucede en estos últimos robots, en dos grandes grupos: aquellas aproximaciones de control local, en el que cada articulación se controla de forma independiente al resto, y las que presentan un enfoque multiarticular, en el que existe un control centralizado que considera las relaciones entre todas las articulaciones. Es más, existen numerosos trabajos que aunque aluden al término control, se enfocan en la presentación de una determinada estructura mecánica cuyo control se implementa mediante PIDs simples, con el único objetivo de demostrar las virtudes cinemáticas o estructurales de dicha arquitectura.

2.3.2.1. Control Local o Monoarticular

El Control Local o Control Monoarticular es la aproximación más sencilla de control de un robot, dado que las estrategias que agrupa considerarán éste como un conjunto de subsistemas desacoplados, asignando un lazo de control a cada una de las articulaciones activas del robot. En robótica serie, éste tipo de control permite que las articulaciones se puedan mover libremente independientemente del movimiento del resto. Este comportamiento, sin embargo, no es posible en robótica paralela, dado que el movimiento de los elementos está limitado por las restricciones cinemáticas que definen el mecanismo. Por lo tanto, en robótica paralela, la referencia de posición del extremo, x_d , de cualquier estrategia de control local siempre ha de tener en cuenta la cinemática del robot, para garantizar el cumplimiento de las limitaciones cinemáticas del mecanismo (véase la Figura 2.11 para el esquema general de un robot de n grados de libertad). Es por ello que, en algunos trabajos bibliográficos, esta aproximación toma el nombre de control cinemático.

PID

Entre las técnicas de control local que se abordan en la literatura, la más sencilla es la aplicación de un sencillo control PID por cada articulación del robot a controlar.

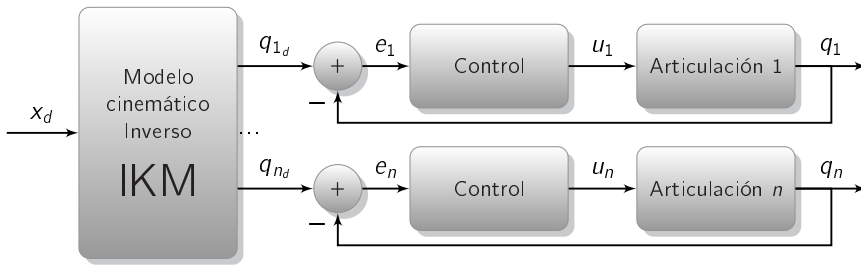


Figura 2.11: Control Cinemático de Robots Paralelos de n GDL o genérico.

Este control está ampliamente extendido en la industria y su señal de control u se calcula en base a la adición de un término proporcional (K_p , K_d , K_i) al error actual del sistema (e), a la derivada de dicho error (\dot{e}), es decir, su variación, y a su integral, o el error acumulado, respectivamente:

$$u = K_p e + K_d \dot{e} + K_i \int e dt \tag{2.6}$$

Debido a la sencillez de implementación de este controlador, el esquema de control local basado en PID está ampliamente extendido, siendo utilizado muchas veces como primera aproximación en el control de un robot paralelo, como es el caso de [204] y [104], donde el principal objetivo no es el estudio del control y su rendimiento, sino la validación y el análisis de la estructura mecánica propuesta, el Isoglide 3 y la USP, respectivamente.

Adicionalmente, y aunque este esquema no es adecuado para aplicaciones que exijan tanto velocidad como precisión, este control sí proporciona resultados aceptables cuando la precisión no es un factor crítico. Este es el caso del control de plataformas paralelas hidráulicas y neumáticas destinadas a manipular grandes cargas, entre las que destaca la plataforma Gough-Stewart [130]. En este trabajo, Li y Salcudean utilizan esta plataforma como simulador de movimientos, controlando cada actuador hidráulico mediante un control proporcional simple y obteniendo errores del orden del centímetro a la hora de transportar una carga de 140Kg.

De igual modo, en el trabajo presentado por Williams II y Joshi [237] se evalúa el uso de actuadores neumáticos en un prototipo de robot 3-RPR. Los actuadores son controlados mediante un control tipo PD, obteniendo errores considerados como aceptables para los autores, aunque la magnitud de éstos no son especificados en el artículo.

PD con Compensación de Gravedad

Aunque el control local basado en PID es una alternativa simple y rápida para mover cualquier tipo de robot, es evidente que su rendimiento de control es pobre en aplicaciones de cierta velocidad y precisión, como las que se abordan en esta tesis. La pérdida de rendimiento viene causada, en parte, por el efecto del acoplamiento

entre articulaciones, que hace que el movimiento de cada elemento del robot provoque interferencias en el movimiento del resto. Por lo tanto, a la hora de diseñar el control para una articulación i , se puede considerar que el movimiento del resto del mecanismo es una perturbación que afecta a la salida de la articulación i a controlar.

Con el fin de reducir el efecto de esta perturbación y mejorar así el rendimiento del controlador local, los autores han propuesto diversas alternativas, entre las que destacan el PD con compensación de gravedad. En robots serie, es sabido que gran parte de los errores estáticos de posicionamiento del TCP se deben a los términos de gravedad. Con el fin de reducirlos o compensarlos, una técnica muy extendida es la utilización de lazos locales de control basados en controladores PD a los que se suma un término para compensar el término de gravedad $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ del modelo dinámico descrito en la Eq. 2.1.

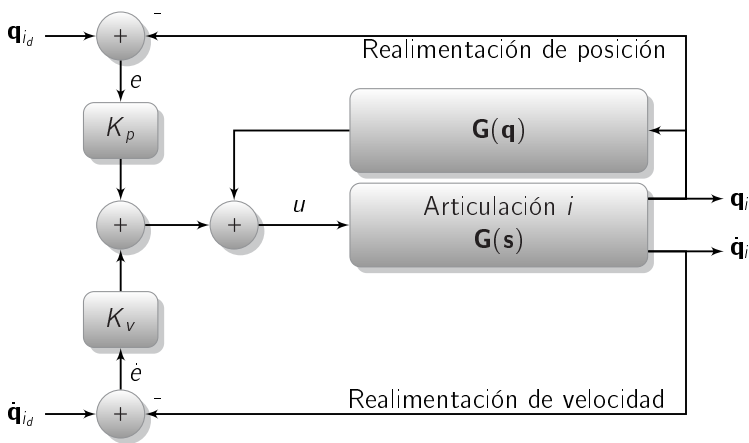


Figura 2.12: Control PD con compensación de gravedad.

De este modo, si el modelo es exacto, las fuerzas y pares debidos a la gravedad son calculados y compensados por el término de gravedad del modelo, mientras que el lazo de control local basado en PD se utiliza para realizar el seguimiento de trayectoria y el rechazo de las perturbaciones debidas al resto de la dinámica del robot (Figura 2.12). Nótese que el cálculo del vector de gravedad $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es relativamente sencillo y puede ser obtenido derivando la energía potencial del sistema.

Siendo una de las aproximaciones de control local más populares en robótica serie, no es de extrañar que algunos autores hayan aplicado esta estrategia de control a la robótica paralela. Yang et al. en [241], por ejemplo, lo aplican a una plataforma Gough-Stewart electrohidráulica con el fin de mejorar el seguimiento de trayectoria y reducir el error estático con respecto al control PID simple que se ha analizado en la sección anterior. Los experimentos realizados confirman que bajo las mismas condiciones, el control PD con compensación de gravedad es capaz de reducir en un 50 % los errores de posicionamiento estático respecto a su homólogo sin compensación.

La inclusión del término de compensación de gravedad calculado con la posición actual del robot, tal y como sucede en el trabajo de Yang et al., requiere, sin embargo, de la resolución de la cinemática directa del robot. Esto es debido a que, tal y como se ha detallado en la sección 2.2, el vector de gravedad $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ está definido, en general, tanto en términos de las variables articulares del robot (activas y pasivas), como de las variables de salida \mathbf{x} . Por lo tanto, su cálculo requiere la utilización del modelo cinemático que relaciona estas variables, cuya resolución requiere métodos iterativos.

Para evitar el sobre coste computacional debido al cálculo del modelo cinemático directo, una solución adoptada es la de calcular la compensación de gravedad utilizando la trayectoria nominal, es decir, la de referencia, que es conocida a priori. Esta aproximación es válida si el control está sintonizado para que los errores de seguimiento de trayectoria sean reducidos y permite que la compensación sea calculada *off-line*, reduciendo notablemente el coste computacional de la aproximación en tiempo de ejecución.

Esta idea es recogida por Gunawardana y Ghorbel en [90] y Ghorbel et al. en [80, 82] donde se aplica la estrategia de control PD con compensación de gravedad precalculada en base al modelo dinámico obtenido en [81] para el robot 5R. El estudio realizado por los autores se centra en validar el modelo dinámico obtenido mediante la comparación de los resultados experimentales y de simulación. Por ello los autores no ofrecen ninguna medida cuantitativa de la mejora que supone la utilización de este esquema, dado que no se compara con ningún otro.

Otra aproximación interesante del control PD con compensación de gravedad es la planteada por Su et al. en [207], en la que se aborda el problema de la sincronización entre actuadores. Tal y como se ha detallado anteriormente, cuando se aplica control de articulación independiente a un robot, el movimiento del resto de articulaciones afecta al lazo local en forma de perturbación, generando errores. Para compensarlos, los autores añaden al control PD de compensación de gravedad un término adicional que penaliza los errores de sincronización. Este esquema demuestra mejorar los resultados del PD con compensación de gravedad, reduciendo el error de seguimiento máximo del orden de 0.5 a 0.3 mm.

2.3.2.2. Control Multiarticular

El control local ofrece una solución simple y rápida para aplicaciones en las que se requiere un bajo coste computacional y baja precisión, sacrificando así el rendimiento de control en favor de una implementación más simple y rápida. Esta aproximación, sin embargo, no es adecuada cuando se desea que el robot presente cierta precisión a la hora de operar a alta velocidad, teniendo que optar por controladores más complejos.

El control multiarticular presenta un enfoque global en comparación al control local. Esto es, mientras que en este último cada articulación se considera por separado y el acoplamiento entre ellas se modeliza como una perturbación, las técnicas de control multiarticular consideran el robot como un único ente, controlando todas las articulaciones a la vez.

Este enfoque permite obtener mejores resultados, dado que se elimina la problemática asociada al acoplamiento entre actuadores. Por ello estas estrategias resultan idóneas para aquellas aplicaciones en las que se ha de combinar precisión y velocidad, dado que los errores de seguimiento de trayectoria se pueden reducir notablemente en comparación con las estrategias de control local.

Sin embargo, la mejora de rendimiento de control de los esquemas multiarticulares es debida a la utilización del modelo dinámico del robot en el lazo de control. Esto incrementa notablemente el coste computacional de la estrategia de control, ya de por si elevada; factor clave para su implementación en tiempo real. Es más, en robótica paralela, la obtención de un modelo dinámico preciso es una tarea compleja (especialmente en la robótica paralela flexible), por lo que, en general, el modelo implementado presentará errores, reduciendo la eficiencia del controlador. Ambas problemáticas se presentan como el mayor inconveniente que los ingenieros de control han de abordar a la hora de implementar este tipo de control en los robots paralelos.

Al igual que sucede en el control local, muchas de las estrategias de control multiarticlar propuestas en robótica paralela se basan en aquellas propuestas realizadas anteriormente para robots serie. A continuación se presentarán algunas de las estrategias más interesantes en éste área que han sido aplicadas a la robótica paralela.

Prealimentación no lineal

Una de las aproximaciones más simples que se pueden implementar utilizando el modelo dinámico de un robot es la introducción de la dinámica inversa del robot en un lazo de prealimentación o *feedforward*. Este lazo permite compensar la dinámica del sistema (Figura 2.13), mientras que un lazo de realimentación, controlado por un PID, corrige las desviaciones entre el modelo y la realidad, así como los efectos de las posibles perturbaciones.

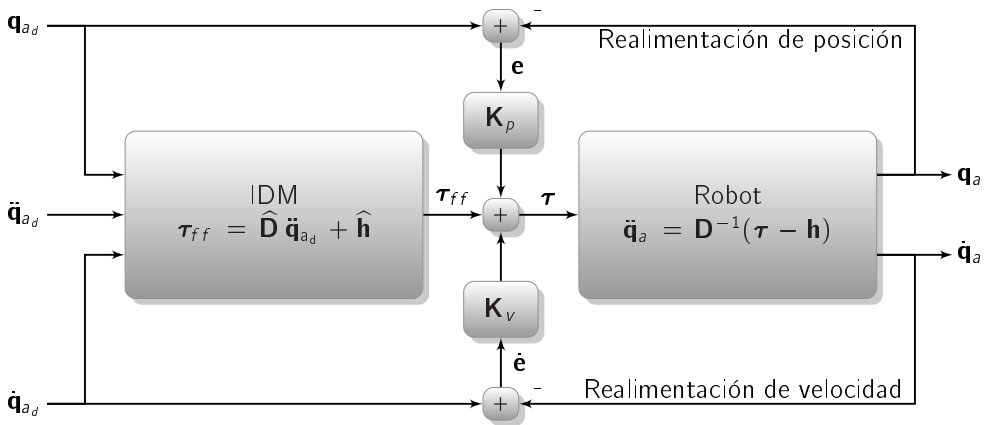


Figura 2.13: Control de Prealimentación No Lineal.

Tal y como se ha definido en la sección 2.2, la dinámica de un robot paralelo se puede definir en forma compacta en términos de las variables articulares activas o actuadas \mathbf{q}_a como,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.7)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de fuerzas o pares a aplicar por los actuadores, $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia, simétrica y positiva definida, y $\mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$, agrupa los componentes no lineales de fricción, gravedad, Coriolis y rigidez (para el caso de los robots flexibles). El modelo está definido en función de las variables articulares del robot \mathbf{q} , las coordenadas de salida \mathbf{x} y el subconjunto de coordenadas actuadas articulares $\mathbf{q}_a \in \mathbf{q}$.

Si se denota $\widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$ y $\widehat{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ a las matrices dinámicas estimadas que se implementarán en el lazo de prealimentación, la ley de control queda definida como,

$$\boldsymbol{\tau} = \widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{x}_d, \mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_{a_d} + \widehat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_d, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{x}}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) + \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} \quad (2.8)$$

donde $\mathbf{e} = \mathbf{q}_{a_d} - \mathbf{q}_a$ es el vector de errores de seguimiento de posiciones articulares y $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}}_{a_d} - \dot{\mathbf{q}}_a$ el vector de errores de las velocidades articulares. El subíndice ${}_d$ denota la trayectoria deseada o de referencia de una variable o vector de variables.

Nótese que en este esquema de control la compensación de la dinámica se realiza en base a las posiciones, velocidades y aceleraciones de referencia, de modo que la compensación puede ser calculada *a priori* reduciendo significativamente el coste computacional de la estrategia de control.

Sin embargo, tal y como se demuestra en [113, Cap 12], la estabilidad de este esquema de control se garantiza con ganancias grandes que hacen que los errores de seguimiento sean suficientemente pequeños. Es decir, si \mathbf{e} y $\dot{\mathbf{e}}$ son muy pequeños, entonces las posiciones de referencia y las reales serán similares, de forma que la mayor parte de la dinámica del robot se compensará. De no ser así, el lazo de prealimentación no compensará correctamente la dinámica del robot (Eq. 2.7) y se reducirá la efectividad del control. Este hecho es enfatizado por Paccot et al. en [166], donde se añade que, en la práctica, este esquema no es aplicable a la robótica paralela salvo en aplicaciones de baja velocidad. Por lo tanto, aunque permite un bajo coste computacional, es difícil cumplir con las condiciones necesarias para lograr que esta estrategia tenga un buen comportamiento a altas velocidades.

Estrategias similares a la planteada en la Figura 2.13 han sido aplicadas al control de robots paralelos. Denkena et al., en [58] determinan que la inclusión del lazo de prealimentación no lineal permite reducir hasta en un factor de 10 los errores máximos de seguimiento articulares en el robot paralelo PaLiDA. Una conclusión similar es obtenida por Zhu et al. [250], que afirman poder obtener un error de seguimiento de 100 μm en el robot Tau utilizando esta técnica.

Una mejora de este esquema es la propuesta por Chin et al. en [44]. En este trabajo se presenta una estrategia de control mixta que combina un esquema con prealimentación multiarticular y un control de acoplamiento cruzado cross-coupling que compensa las perturbaciones no compensadas por el lazo de prealimentación. Los ensayos realizados demuestran que el esquema propuesto presenta hasta un 20 % de

reducción en el error de seguimiento de trayectoria en comparación con esquemas monoarticulares sin prealimentación y el esquema de prealimentación multiarticular clásico.

Control de Par Computado

El Control de Par Computado o Computed Torque Control (CTC) es una de las estrategias de control multiarticular más utilizadas en los robots serie. Al igual que el esquema de prealimentación no lineal, el CTC se basa en el modelo dinámico inverso del robot para compensar la dinámica no lineal del sistema. Sin embargo, esta compensación, a diferencia del esquema anterior, se realiza en un bucle de realimentación, lo que permite, si el modelo es preciso, la linealización y desacoplo de la dinámica resultante (Figura 2.14). Como contrapartida, sin embargo, el esquema propuesto presenta un mayor coste computacional, dado que la compensación no puede ser precalculada offline.

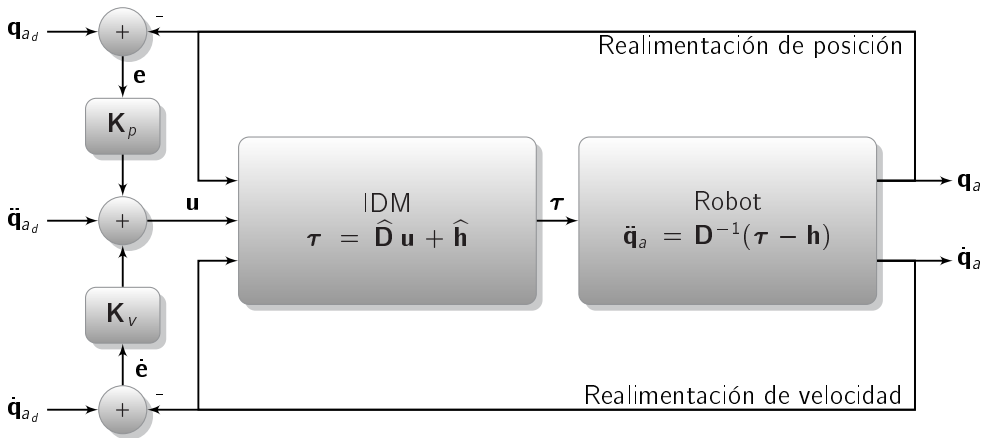


Figura 2.14: Control de Par Computado (CTC).

Tal y como se ha detallado en el bloque dedicado a la dinámica, ésta toma la forma descrita en la Eq. 2.7. En base a este modelo, es posible definir la ley de control asociada al CTC [117, Sec 14.4.2] como,

$$\tau = \hat{D}(x, q) u + \hat{h}(x, q, \dot{x}, \dot{q}) \quad (2.9)$$

donde $u = \ddot{q}_{a,d} + K_p e + K_v \dot{e}$ es la señal de control, $e = q_{a,d} - q_a$ es el vector de errores de seguimiento de las posiciones articulares, $\dot{e} = \dot{q}_{a,d} - \dot{q}_a$ es el vector de errores de las velocidades, K_p y K_v son las matrices de ganancias de posición y velocidad y \hat{D} y \hat{h} son la matriz de inercia y el vector de términos no lineales del modelo dinámico estimado del robot.

Si se introduce la ley de control Eq. 2.9 en la ecuación dinámica del robot Eq. 2.7 se obtiene la respuesta dinámica del sistema controlado,

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}) = \widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \mathbf{u} + \widehat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.10)$$

En el caso en el que el modelo dinámico del robot es perfecto se cumple que $\mathbf{D} = \widehat{\mathbf{D}}$ y $\mathbf{h} = \widehat{\mathbf{h}}$ y si el robot no está en una posición singular la ecuación anterior se reduce a,

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_a \quad (2.11)$$

esto es, el sistema linealizado queda reducido a un sistema de n integradores dobles, siendo n el número de grados de libertad del robot. Dado que \mathbf{u} contiene un término derivativo y otro proporcional, la dinámica de la planta linealizada resultante puede ser modificada sintonizando adecuadamente las ganancias \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v .

Introduciendo la definición de \mathbf{u} en Eq. 2.10 y operando, se obtiene la dinámica asociada al error de seguimiento de trayectoria,

$$\mathbf{0} = \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} \quad (2.12)$$

que es independientemente de la trayectoria y la dinámica del robot. Es más, la ecuación Eq. 2.12 representa un sistema de segundo orden, cuya respuesta temporal puede ser modificada variando las ganancias \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v . De este modo, es posible fijar una respuesta temporal arbitraria dentro de las posibilidades del mecanismo.

Nótese, sin embargo, que en el caso general no será posible definir un modelo perfecto. En ese caso, existirá una pequeña perturbación asociada a la diferencia entre el modelo y la realidad, que el controlador PD implementado tendrá que rechazar. Si el modelo es suficientemente preciso, esta perturbación será mínima y el rendimiento del controlador no se verá afectado.

Por lo tanto, en comparación con el esquema de prealimentación no lineal descrito anteriormente, el CTC se presenta como un esquema más robusto y con mejores prestaciones, tal y como demuestran analítica y experimentalmente Paccot et al. en [166]. Para la realización de los experimentos se utiliza la plataforma Isoglide-4, en la que se comparan los errores medios obtenidos a la hora de ejecutar una trayectoria de referencia implementando un control local basado en PID, un esquema multiarticular de prealimentación no lineal y el CTC. Los resultados muestran que el CTC reduce el error de seguimiento de trayectoria como mínimo en un factor de 10, permitiendo obtener errores máximos del orden de $100 \mu m$ incluso a altas velocidades.

Conclusiones similares se encuentran en diversos trabajos que comparan los esquemas de control local y el CTC para diversas plataformas, como es el caso de Codourey [47] en la plataforma Delta, Yen y Lai [244] para el robot CPM y Callegari et al. [36] para la plataforma 3-RCC. De igual modo, trabajos como el de Yang et al. [243] demuestran experimentalmente la eficiencia del CTC, obteniendo errores del orden de μm en un robot 5R.

A pesar de que el CTC se presenta como una de las aproximaciones más populares en robótica, algunos autores han intentado mejorar sus capacidades mediante diversas técnicas. Por ejemplo, en el trabajo de Yang et al. [242] se complementa el

CTC tradicional con una red neuronal que modifica las ganancias del CTC de forma adaptativa, con el fin de mejorar el seguimiento de trayectoria. La aproximación es validada en un robot paralelo 5R, obteniendo un error de seguimiento de trayectoria de cerca del 0.3 % en el caso propuesto frente al 1 % obtenido mediante un PID. Shang y Cong [196], por otra parte, sustituyen el PD lineal que incorpora el CTC por su variante no lineal, permitiendo reducir el error de tracking respecto al CTC convencional en aproximadamente un 10 %.

En resumen, se puede afirmar que el CTC, siendo una de las técnicas de control más populares en robótica serie, es una de las mejores alternativas de control para robótica paralela, debido a su gran rendimiento en tareas que requieran alta velocidad y precisión. Como contrapartida, sin embargo, cabe destacar el incremento en el coste computacional que conlleva, así como la necesidad de un modelo dinámico preciso, cuyo cálculo e identificación de parámetros no es una tarea trivial.

Control Predictivo

Sin embargo, otros autores han tratado de mejorar su rendimiento ayudándose para ello del hecho de que la trayectoria deseada es conocida. Por lo tanto, estos autores la han utilizado para predecir el comportamiento del robot, mediante el uso del Control Predictivo. Según Camacho y Bordons, en [37, 38], el control predictivo es un conjunto de métodos de control basados en modelo que permiten calcular una señal de control óptima minimizando una función objetivo basada en la predicción del comportamiento del sistema.

En esencia, el control predictivo utiliza el modelo del sistema para predecir su comportamiento en el futuro y, en función de este comportamiento, calcula una señal de control que minimiza tanto el esfuerzo de control como el error de trayectoria. El control permite, además, la inclusión explícita de restricciones en éste proceso de minimización, lo que lo convierte en una aproximación con un gran potencial para su aplicación a sistemas reales, dado que considera las propias limitaciones del sistema.

Dado el potencial que ofrece el control predictivo, algunos autores han aplicado esta estrategia a los robots paralelos. Entre ellos destacan los trabajos de Vivas y Poignet [232, 234, 233], en los que se aplica el control predictivo funcional (PFC) al robot paralelo H4. Para evitar trabajar con el modelo no lineal del robot, los autores proponen linealizarlo y desacoplarlo utilizando el modelo dinámico inverso del robot (Fig. 2.15), de forma similar a lo que se plantea en un esquema CTC. De este modo, si el modelo es perfecto, el sistema resultante es un doble integrador. Utilizando la realimentación de velocidad y posición, y sintonizando adecuadamente las ganancias K_p y K_v , los autores obtienen una dinámica lineal equivalente a un sistema de segundo orden.

Utilizando este modelo linealizado por realimentación, es posible aplicar las técnicas de Control Predictivo Lineal, cuya resolución en ausencia de restricciones es analítica. De este modo, se solventa el problema del coste computacional asociado al control predictivo no lineal. Los autores comparan el esquema de control predictivo con el CTC, obteniendo una reducción del 20 % del error máximo [232, 234, 233].

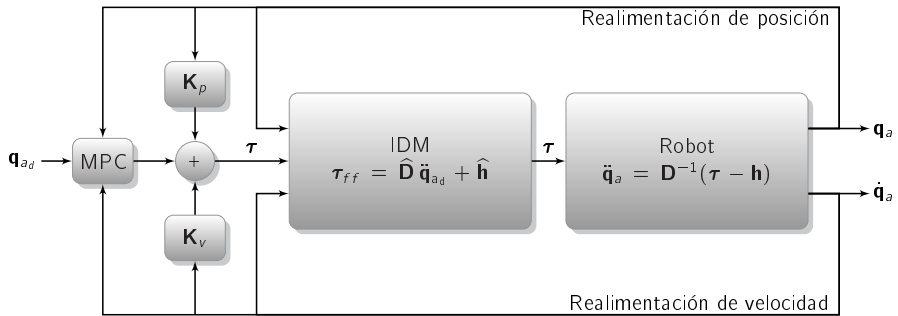


Figura 2.15: MPC y linealización mediante realimentación no lineal.

Duchaine y otros [65] proponen otra alternativa para reducir el coste computacional, basado en incluir explícitamente el modelo dinámico directo $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h})$ del robot en la función de coste. Para evitar la utilización de algoritmos de integración que permitan obtener la predicción de la posición \mathbf{q} a partir del modelo del robot, se considera que la aceleración es constante en todo el horizonte de predicción, de modo que se pueden aplicar las leyes del movimiento uniformemente acelerado. De igual manera, los autores consideran que los términos no lineales del modelo \mathbf{h} permanecen constantes durante el horizonte de predicción, lo que permite obtener una función de coste que es lineal respecto de la señal de control. Por último, para que la minimización de la función de coste tenga solución analítica, se elimina la ponderación de la señal de control. La ley de control obtenida no exige el cálculo de la inversa de la matriz de inercia, lo que reduce sustancialmente el esfuerzo de control. La formulación propuesta se aplica a un robot paralelo accionado por cable, permitiendo reducir en 0.05 rad el error máximo de seguimiento de trayectoria respecto a un esquema de control local basado en PID.

En resumen, se puede considerar al control predictivo como una aproximación con un gran potencial, dado que permite obtener una señal de control óptima y, adicionalmente, incluir restricciones en el propio controlador, lo que, en el caso de robots paralelos, resulta interesante para acotar las regiones de trabajo no singulares. Sin embargo, su mayor contrapartida es el coste computacional que conlleva su aplicación si se considera directamente la dinámica no lineal del sistema. Este problema es, aún, más relevante en la robótica flexible, donde su modelo dinámico es más complejo y computacionalmente ostensiblemente más costoso

2.3.3. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se ha tratado de presentar una visión general de la literatura científica sobre la robótica flexible en general, abordando tanto el modelo dinámico como las estrategias de control de los manipuladores flexibles, haciendo principal hincapié en los manipuladores paralelos. Para ello, este capítulo se ha dividido en dos grandes partes: el análisis de los trabajos relacionados con el estudio dinámico

de los manipuladores y la recopilación de los controladores presentados para la eliminación de vibraciones. En la **primera parte del capítulo se han abordado diferentes conceptos a tener en cuenta a la hora de modelar los manipuladores flexibles**. Entre ellos, se ha hecho especial hincapié en **la necesidad de utilizar métodos de aproximación discretos a la hora de generar modelos dinámicos** para su posterior uso en controladores avanzados. De igual modo, **los dos principales métodos de aproximación, el Método de Modos Asumidos y el Método de Elementos Finitos han sido comparados, analizando las ventajas y desventajas de ambos**. A partir de este estudio, se concluye que, para aplicaciones multieslabón altamente acoplados como el caso de los robots paralelos flexibles, **el FEM es más sencillo de aplicar a la vez que requiere de menos coste computacional**. Sin embargo, al analizar los trabajos existentes a día de hoy, se aprecia como **el número de trabajos decreta exponencialmente a medida que crecen los GDL, reduciéndose considerablemente para el caso de la robótica paralela flexible, los cuales se limitan, en muchos casos, a la robótica planar**. Además, en este estudio se ha detectado que **no existen metodologías de modelado donde se aborde la problemática de forma independiente de la rigidez de los eslabones**. Es decir, no se han encontrado propuestas donde se defina una única metodología global valida tanto para eslabones rígidos como flexibles, y aplicable a robots paralelos.

En la segunda parte del capítulo, por su parte, se ha analizado los diferentes controladores aplicados al control de posición de los manipuladores flexibles, demostrado que, pese a ser numerosos los trabajos donde se aborda el control de los manipuladores flexibles, **la gran mayoría de estos están orientados, una vez más, a manipuladores de un solo eslabón**. La dificultad añadida en el movimiento de los eslabones debido a la flexibilidad, la dependencia geométrica de la dinámica y el alto número de GDL del modelo, ha hecho que, pese a que el control de manipuladores de un solo elemento está, en la mayoría de los casos resuelto, **en el caso de los manipuladores de múltiples eslabones, su control esté aún por resolver**.

Para este ultimo caso, y analizando los trabajos expuestos (véase Tabla 2.4), se observa como **se han obtenido buenos resultados mediante técnicas basadas en modelo**, ya sea mediante el uso de controladores con Prealimentación, *Feed-Forward*, o mediante controladores avanzados basados en modelo. Esto se debe a que se antoja difícil (sino imposible en ciertas ocasiones) sintonizar los controladores de las estrategias monoarticulares, debido a la complejidad de sus dinámicas altamente acopladas. Por el contrario, **las Leyes de Control que hacen uso del modelo dinámico inverso, permiten ser computadas y generalizadas más fácilmente para el caso general de manipuladores de múltiples eslabones**. Sin embargo, **el principal defecto de este tipo de técnicas de control puede resultar su falta de robustez ante dinámicas no modeladas o variaciones paramétricas del modelo**, como podría ser los cambios en el peso de la carga a manipular por el robot. Por esta razón, muchos trabajos se han dedicado a la desarrollar Leyes de Control más robustas, ya sea mediante la realimentación de ciertos estados sensorizados o mediante propuestas de Modelos Prealimentados Adaptativos.

Por otro lado, debido a la **falta de trabajos de control en la robótica paralela**

flexible, en la última parte de este capítulo se han analizado diferentes estrategias de control utilizadas en la robótica paralela. Estas se han clasificado principalmente en dos grandes categorías: las Estrategias de Control Locales o Monoarticulares y las Estrategias de Control Multiarticulares. Sin embargo, mientras el **Control Local** (equivalente a las estrategias flexibles basadas en la Teoría de Control Clásica) se presenta como un **solución simple y rápida para aplicaciones de bajo coste computacional**, el **Control Multiarticular** (equivalente a las estrategias flexibles basadas en modelo) **se presenta un enfoque global, ya que permite controlar todas las articulaciones a la vez**. Este enfoque le permite obtener **mejores resultados, dado que el controlador tiene en cuenta todos los acoplamientos existentes entre actuadores**, resultando **idóneas para el tipo de aplicaciones tratadas en esta tesis doctoral**, donde se combinan precisión, velocidad y altas inercias. Sin embargo, estas estrategias de control **tienen un incremento considerable del coste computacional**, respecto de sus homólogos Monoarticulares, ya que requieren en el lazo de control de la utilización del modelo dinámico del robot.

El elevado coste computacional del lazo de control supone, en ciertos casos, un problema a la hora de implementar estrategias de control Multiarticulares sobre robots paralelos rígidos. **En la robótica flexible**, por su parte, siendo ésta **computacionalmente más costosa**, este problema se agudiza en mayor medida. Es por ello que, si bien es cierto que en la literatura rígida se pueden encontrar diversas estrategias Multiarticuladas (el control Prealimentado no lineal, el Control de Par Computado, Control Predictivo, etc), **la aplicación experimental en Tiempo Real de muchas de ellas sobre manipuladores flexibles puede estar muy limitado por el elevado coste computacional**.

Por lo tanto, **el Control de Par Computado**, se presenta como una **estrategia de control ideal para su implementación en robótica paralela flexible**. Dado que esta estrategia está consolidada como una estrategia de control donde **confluyen las ventajas del Control Prealimentado a la hora de predecir la dinámica del robot y la robustez del Control en Lazo Cerrado**. Todo ello, **sin suponer costes computacionales tan elevados como otras técnicas más complejas**, tales como el Control Predictivo. Por ello, **en la presente tesis se propondrá un desarrollo basado en este controlador, para lo que el primer paso será el obtener un modelo adecuado que considere la dinámica tanto rígida como flexible de los manipuladores flexibles**.

Estrategias de control	Controlador	Ventajas y desventajas	Ref.
Pasivos	PTC	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Estructura Simple. ■ Robusta ante cambios en la dinámica del eslabón. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Control de posición del eslabón lento. ■ No muy efectivo. ■ Sensible a la fricción de las articulaciones. 	[172][134] [187][75]
Control en Lazo abierto	Feed Forward	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Económico ya que no se requieren sensores. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ No responde ante perturbaciones o variaciones de la carga. ■ No puede ignorar las no linealidades geométricas. 	[4][168] [45]
Control Clásico	PPF/NPF	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Se adapta a los cambios del sistema. ■ Efectivo suprimiendo vibraciones. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ La frecuencia no debe variar en el tiempo. ■ Se requiere un controlador de segundo orden para amortiguar cada modo de resonancia, por lo que para múltiples modos se requieren controladores de alto orden. ■ Difícil de sintonizar cuando hay que controlar más de un modo. 	[238][181] [122][203] [195][164]
	LVF	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Garantiza la estabilidad incondicional del sistema en lazo cerrado. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Requiere utilizar un diferenciador. ■ Se requiere un alto esfuerzo de control sobre todas las frecuencias. 	[211][94] [93]

Tabla 2.4 (Continuación)

Estrategias de control	Controlador	Ventajas y desventajas	Ref.
	EPAF	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Buena tasa de reducción de vibraciones debido a una realimentación de alta frecuencia. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Retardo de fase debido al retardo en la realimentación. 	[180][9]
	PID	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Estructuralmente simple. ■ Fiable. ■ Aplicable ante cualquier situación. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ No se puede adaptar a cambios de proceso y requiere resintonizarse. 	[129][230]
	DSF	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Fácil de implementar. ■ Buena estimación de la deformación del extremo. ■ Insensible a cambios en la carga. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Solo puede medir información local del eslabón. ■ Sensible al ruidos. 	[71]
	Repetitivo	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Error cero en régimen permanente del seguimiento de trayectorias. ■ Rechaza perturbaciones periódicas. ■ Simple. ■ Fácil de sintonizar. ■ Puede cancelar vibraciones rápidamente. ■ Solo necesita realimentación del motor o del par. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ No se puede adaptar a cambios de carga en el robot. 	[87][73]

Tabla 2.4 (Continuación)

Estrategias de control	Controlador	Ventajas y desventajas	Ref.
	IRC	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Capaz de amortiguar vibraciones de alta resonancia. ■ Posicionamiento del extremo preciso y elimina las vibraciones. ■ Estructura Simple. ■ Capaz de conseguir amortiguar varios modos. ■ Garantiza la estabilidad en lazo cerrado incluso en presencia de dinámicas anchos de banda no modelados. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ La respuesta no se atenúa a altas frecuencias. ■ La sintonización de la ganancia integral y el termino <i>feed-through</i> requiere del método de prueba y error. 	<p>[171][140] [168][11] [172][170]</p>
	FOC	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Respuesta robusta a variaciones de la carga. ■ Elimina los efectos de las perturbaciones. ■ En cada iteración de control pondera todos los efectos anteriores. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Solo puede utilizarse con sistemas lineales de coeficientes constantes. 	[153]
	TTS	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Capacidad de seguir la referencia eliminando las oscilaciones no deseadas. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Se requieren muchos sensores. ■ Mayor número de subsistemas de control. 	[20][240]

Tabla 2.4 (Continuación)

Estrategias de control	Controlador	Ventajas y desventajas	Ref.
Basado en Modelo	CTC	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Linealización entrada salida del sistema. ■ Fácil de implementar a partir del modelo. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Coste computacional alto. 	[57][114] [55][201] [15]
	Predictivo	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Aborda problemas de subimpulso de los sistemas de fase no mínima. ■ Se pueden definir restricciones, y abordar sistemas con no linealidades y retardos. ■ Ofrece una respuesta robusta. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ No es capaz de ofrecer una respuesta rápida y estable. ■ Coste computacional alto. 	[14][236] [150][231] [106][112] [215][154] [190][138] [213][41] [3][142][139]
	LQR	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Gracias al principio de separación, se pueden diseñar el estimador y la realimentación por separado. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Ley de control complicada. ■ No es robusto ante imprecisiones del modelo, 	[61][68] [5][7][8]
	OTPC	<p>Ventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Herramienta potente para crear trayectorias óptimas mediante medidores de comportamiento. <p>Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Dependencia del compensador y del control de realimentación para lidiar con comportamientos no modelados. ■ El error de posicionamiento puede provocar tiempos de establecimiento largos. 	[100]

Tabla 2.4 (Continuación)

Estrategias de control	Controlador	Ventajas y desventajas	Ref.
	Adaptativo	Ventajas <ul style="list-style-type: none"> ■ Diseñado para controlar cargas variables y perturbaciones no modeladas. Desventajas <ul style="list-style-type: none"> ■ Sobresintonización de ganancias. 	[133][137] [177][60] [209]
	Robusto	Ventajas <ul style="list-style-type: none"> ■ Diseñado para controlar con cargas y parámetros de modelado variables. Desventajas <ul style="list-style-type: none"> ■ Para eliminar el ruido hay que conocer éste a la hora de diseñarlo. ■ Amplificación del ruido no modelado. 	[52]
Inteligente	ANN	Ventajas <ul style="list-style-type: none"> ■ Método rápido de diseñar un controlador sin conocer el modelo. ■ Herramienta potente para trabajar con sistemas matemáticamente no definidos. Desventajas <ul style="list-style-type: none"> ■ Necesita de entrenamiento supervisado offline que es computacionalmente complejo y costoso. ■ Pocos datos de entrenamiento, pueden generar un modelo inexacto. 	[54][119] [83][210]
	Fuzzy	Ventajas <ul style="list-style-type: none"> ■ No requiere modelos precisos. ■ Fácil de diseñar e implementar. ■ No se requiere ser especialista para diseñar y ejecutar el controlador. ■ Controlador no lineal. Desventajas <ul style="list-style-type: none"> ■ Difícil de elegir los parámetros de control debido a la falta de conocimiento del sistema. ■ Puede comportarse inadecuadamente cuando los parámetros del sistema varían significativamente e impredeciblemente. 	[6][132] [32][131] [218]

Tabla 2.4: Controladores de manipuladores flexibles: ventajas y desventajas.

3

Desarrollo del Modelo



3.1. Introducción

El modelado dinámico se presenta como un paso fundamental en el desarrollo de controladores avanzados que permitan extraer todo el potencial de los robots paralelos flexibles, lo que engloba uno de los principales objetivos de esta tesis.

Es más, el procedimiento del cálculo del modelo dinámico es uno de los elementos que más influencia tiene en el rendimiento de un algoritmo de control avanzado. Es por ello que es necesario adecuar el cálculo del modelo a las necesidades que requerirá el controlador a implementar. Por lo tanto, en el caso de estudio de esta tesis, esto implica que el modelo dinámico debe de ser capaz de contemplar explícitamente la deformación de los eslabones.

Con el fin de poder abordar el cálculo del modelo flexible, en el capítulo anterior se ha realizado un análisis de los trabajos en este área, concluyendo que el modelo puede ser definido, principalmente, mediante dos métodos de aproximación: el Méto-

do de Modos Asumidos y el Método de Elementos Finitos. Sin embargo, ninguna de las propuestas analizadas presenta una metodología general que considere indistintamente el modelo de los eslabones rígidos, flexibles o una combinación de ambos en un mismo eslabón. Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es extender la metodología de modelado existente de robots paralelos [253], de forma que los modelos calculados puedan seguir una misma metodología independientemente de si los elementos que los componen son rígidos, flexibles o, incluso, una combinación de elementos flexibles y rígidos en un mismo eslabón. Este modelo debe presentar las siguientes características:

- Modelo adaptable: El modelo ha de estar definido en función de las variables activas y, en caso de considerar las deformaciones de los elementos, las variables flexibles.
- Modelo estructurado y paralelizable.
- Obtención sistematizada del modelo.

Por lo tanto, para llevar a cabo los desarrollos de esta tarea, se requiere, en primer lugar, seleccionar la formulación base para el cálculo del modelo. Aunque cualquiera de las tres grandes formulaciones existentes (la formulación de Newton-Euler, la formulación Lagrangiana y el Principio de Trabajos Virtuales) es válida para calcular el modelo, la formulación Lagrangiana se presenta como la más adecuada para obtener un modelo dinámico que presente las características anteriormente definidas. Por una parte, permite definir el modelo en función de cualquier conjunto de variables. Adicionalmente, el modelo puede ser obtenido directamente de forma estructurada. Por último, el proceso de modelado es fácilmente sistematizable y automatizable a partir de la definición de las ecuaciones energéticas del robot, pudiendo ser derivado, de forma sencilla, utilizando programas de cálculo simbólico.

En segundo lugar, entre los dos métodos de aproximación más utilizados, tal y como se ha concluido en el capítulo anterior, el FEM es el método que permite definir un modelo flexible de forma compacta y estructurada. Además, tal y como se ha demostrado en trabajos previos, el método posibilita sistematizar el modelado, haciendo este proceso computacionalmente más eficiente, favoreciendo así su implementación en controladores en Tiempo Real.

Por lo tanto, en este capítulo se detalla **una metodología** para la obtención del **modelo dinámico de robots** totalmente **paralelos con eslabones** tanto **rígidos** como **flexibles** basada en la **formulación Lagrangiana y el Método de Elementos Finitos**. Esta formulación permite al diseñador calcular el modelo dinámico de forma sencilla, estructurada, compacta y automatizable en función de las variables articulares y, en caso de haberlas, las variables flexibles.

3.2. Fundamentos del Método

La metodología presentada en este capítulo es una extensión de la existente, la cual permite la posibilidad de definir el modelo en tanto en función de las variables rígidas como de las flexibles. Para ello, el método propuesto se basa en cuatro pilares principales:

1. El Método de Elementos Finitos, que permite definir la deformación de los elementos flexibles mediante funciones polinómicas de bajo grado.
2. La formulación Lagrangiana, que permite definir el modelo en función de cualquier conjunto de variables.
3. La separación en subsistemas, que permite el cálculo del modelo dinámico de la forma más natural, pudiendo definir cada componente tanto en coordenadas espaciales como articulares en función de su naturaleza.
4. La utilización de matrices de transformación para definir el modelo en diferentes conjuntos de coordenadas, como se detalla en los trabajos de Nakamura [159], Murray y Lovell [156] y Ghorbel et al. [80, 82, 81, 90].

Partiendo de estos cuatro pilares, es posible utilizar la formulación de Lagrange y el FEM para que, siguiendo ciertas pautas, se pueda obtener un modelo dinámico independientemente de si los elementos que forma el sistema son rígidos, flexibles o una combinación de ambos en un mismo eslabón. Nótese, que este último punto no ha sido abordado todavía, tal y como se concluye del análisis realizado en el capítulo anterior. Por lo tanto, este punto constituye una de las aportaciones más importantes de esta tesis.

Adicionalmente, es importante destacar que la metodología planteada tiene como objeto de aplicación un subconjunto de los robots totalmente paralelos, los robots totalmente paralelos, a los que pertenecen muchas de las estructuras paralelas más populares y de mayor éxito en la literatura, tales como la plataforma Gough-Stewart o la Delta. Adicionalmente, se considerará que las cadenas cinemáticas que unen la base con la plataforma son estructuralmente idénticas, pudiendo variar en su parametrización. La razón de esta limitación no es otra que la de acotar el trabajo a realizar, dado que la implementación de este modelo se realizará sobre un prototipo real que pertenece a esta familia, el robot Delta.

Por último, enfatizar que la metodología propuesta no considera la fricción. El modelado de la fricción es complejo, siendo más compleja aún su identificación, de modo que, en general, no se ha considerado la fricción en los modelos dinámicos presentados en esta tesis. En cualquier caso, de ser necesaria la inclusión de un término de fricción, éste puede ser añadido a posteriori al modelo dinámico.

3.3. Consideraciones Previas: Orientación y Velocidades Angulares

Antes de proceder a la definición del método para el cálculo del modelo dinámico de robots paralelos flexibles es necesario detallar primero algunos aspectos importantes relacionados con la orientación de los robots.

Tal y como se ha detallado en el capítulo anterior, la forma más natural para el cálculo del modelo dinámico de robots paralelos es la separación de éste en dos subsistemas: la plataforma móvil y las cadenas serie que unen ésta a la base. De este modo, la dinámica de la plataforma se calcula en función de las coordenadas de salida, mientras que la dinámica del subsistema de cadenas serie se define en función de las variables articulares y, en caso de haberlas, de las variables de deformación de éstas.

Si se considera el caso de un robot no redundante, en general, éste dispondrá como máximo de 6 grados de libertad rígidos, de modo que las coordenadas de salida \mathbf{x} se compondrán de un término de posición asociado a las coordenadas cartesianas del punto $\mathbf{P}_x = [x \ y \ z]^T$ y un término de orientación $\boldsymbol{\psi}_x$ del sistema de referencia móvil asociado a la plataforma móvil respecto del sistema de referencia fijo situado en la base del robot,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \boldsymbol{\psi}_x \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde, el vector de orientación está compuesto por tres ángulos de Euler $\boldsymbol{\psi}_x = [\theta \ \xi \ \mu]^T$, de modo que las coordenadas de salida \mathbf{x} se describen como,

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \theta \ \xi \ \mu]^T \quad (3.2)$$

Nótese, sin embargo, que la elección de los ángulos de Euler utilizados para la definición de la orientación es arbitrario. Esto es, dependiendo de la notación de ángulos de Euler escogida, este vector, así como su derivada, será diferente. Es más, tal como se detalla en [17] y [10], la derivada del vector de coordenadas de salida \mathbf{x} sólo tiene significado físico para los términos de traslación, dado que la derivada de los ángulos de Euler no es, salvo en contadas ocasiones, la velocidad angular de la plataforma móvil $\boldsymbol{\omega}$. Esto es,

$$\boldsymbol{\psi}_x \neq \boldsymbol{\omega} \quad (3.3)$$

Esta puntualización no es trivial, dado que las ecuaciones de movimiento asociadas a la rotación de sólidos rígidos se definen en función de la velocidad $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ del sólido, y no respecto a las derivadas de los ángulos de Euler $\boldsymbol{\psi}_x$. Por lo tanto, para poder definir correctamente el modelo dinámico es necesario obtener la relación entre ambas variables.

Relación entre la velocidad angular de la plataforma móvil y las derivadas de los ángulos de Euler

La relación entre las derivadas de los ángulos de Euler $\dot{\psi}_x = [\dot{\theta} \ \dot{\xi} \ \dot{\mu}]^T$ y la velocidad angular del sistema de referencia móvil respecto del sistema de referencia fijo $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ está dada por [17]:

$$\tilde{\omega} = \dot{\mathbf{R}}_p \mathbf{R}_p^T \quad (3.4)$$

donde, $\mathbf{R}_p(\theta, \xi, \mu)$ es la matriz de rotación que define la orientación de la plataforma móvil del robot respecto del sistema de referencia fijo, $\dot{\mathbf{R}}_p(\psi_x, \dot{\psi}_x)$ es la derivada de la matriz de rotación y $\tilde{\omega}$ es la matriz antisimétrica asociada al vector ω ,

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

En base a la Eq. (3.4), el cálculo de la velocidad angular de la plataforma ω en función de las derivadas de los ángulos de Euler $\dot{\psi}_x$ se puede realizar derivando directamente la matriz de rotación, lo que puede resultar laborioso.

Por ello, otra alternativa consiste en calcular la relación entre ω y $\dot{\psi}_x$ en base al cálculo de la velocidad angular de la plataforma móvil respecto al sistema de referencia asociado a ella misma ω_p . Dado que ω_p es la proyección de ω en el sistema de referencia móvil, se cumple que,

$$\omega = \mathbf{R}_p \omega_p \leftrightarrow \tilde{\omega} = \mathbf{R}_p \tilde{\omega}_p \mathbf{R}_p^T \quad (3.6)$$

El cálculo de ω_p se realiza en base a las sucesivas proyecciones que sufre el vector de velocidades y que dependen de los ángulos de Euler escogidos. Con el fin de ilustrar el proceso, se detalla, a continuación, el proceso de cálculo.

Supóngase que se han escogido los ángulos de Euler RPY (Roll-Pitch-Yaw). Para obtener la orientación de cualquier vector, se plantea la siguiente secuencia: Inicialmente, se rota un ángulo θ respecto del eje x del sistema de referencia fijo, después se rota un ángulo ξ respecto del eje y del sistema de referencia fijo y, por último, se rota μ en el eje z del sistema de referencia fijo.

Con el fin de hallar ω_p , se ha de aplicar este razonamiento a las velocidades. Por lo tanto, inicialmente, se aplica un giro θ a velocidad $\dot{\theta}$ respecto del eje x del sistema de referencia fijo, que, en ese instante coincide con el eje u del sistema de referencia móvil (Fig. 3.1a), de modo que la velocidad de giro en el sistema de referencia móvil será la misma que en el sistema de referencia fijo $[\dot{\theta} \ 0 \ 0]^T$.

Tras realizar el primer giro (roll) se aplica un giro ξ (pitch) a velocidad $\dot{\xi}$ en torno al eje fijo y (Fig. 3.1b). Sin embargo, la plataforma móvil ya está girada un ángulo en torno al eje x fijo (roll), de modo que se utilizará la matriz de rotación asociada a este giro para proyectar el vector de velocidad de giro $[0 \ \dot{\xi} \ 0]^T$ en el sistema de referencia móvil.

Por último, el sistema de referencia móvil es girado en torno al eje fijo z un ángulo de μ (yaw) a velocidad $\dot{\mu}$ (Fig. 3.1c). Al igual que en el caso anterior, dado que la

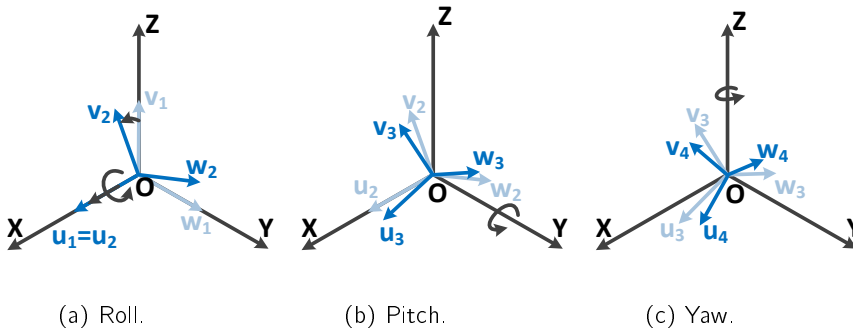


Figura 3.1: Ángulos de Euler a Roll, b Pitch y c Yaw y sus derivadas.

orientación de la plataforma en este instante depende de los ángulos de roll y pitch, la velocidad de giro $[0 \ 0 \ \dot{\mu}]^T$ tendrá que ser proyectada utilizando las matrices de rotación asociadas a los dos giros anteriores para obtener la velocidad definida en el sistema de referencia móvil.

De este modo, en base a este ejemplo, la velocidad angular de la plataforma quedará definida,

$$\begin{aligned}
 \omega_p &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_x^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\xi} \\ 0 \end{bmatrix} + (\mathbf{R}_y \mathbf{R}_x)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \xi \\ 0 & \cos \theta & \cos \xi \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \xi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \quad (3.7) \\
 &= \mathbf{E} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \psi_x
 \end{aligned}$$

Combinando esta expresión con la Eq. (3.6), se puede calcular la relación entre ω y ψ_x de forma directa,

$$\omega = \mathbf{R}_p \mathbf{E} \psi_x \quad (3.8)$$

De este modo, si se define un vector de velocidad \mathbf{v} tal que

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}_x \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

entonces la relación entre $\dot{\mathbf{x}}$ y \mathbf{v} está dada por

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_R \dot{\mathbf{x}} \quad (3.10)$$

donde \mathbf{T}_R es la matriz que relaciona \mathbf{v} , que contiene la velocidad angular de la plataforma móvil $\boldsymbol{\omega}$ y la derivada del vector de coordenadas de salida $\dot{\mathbf{x}}$. Esta relación será de gran importancia a la hora de calcular el modelo dinámico de ciertos mecanismos, tal y como se ilustrará en la siguiente sección.

Relación entre la aceleración angular de la plataforma móvil y las segundas derivadas de los ángulos de Euler

La relación entre las segundas derivadas de los ángulos de Euler $\ddot{\boldsymbol{\psi}}_x$ y la aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ de la plataforma móvil respecto del sistema de referencia fijo se obtiene derivando las expresiones obtenidas anteriormente.

De este modo, derivando la Eq. (3.10),

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_R \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{T}}_R \dot{\mathbf{x}} \quad (3.11)$$

donde en el caso de que \mathbf{E} sea la del ejemplo anterior,

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\xi} \cos \xi \\ 0 & -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\xi} \sin \theta \sin \xi + \dot{\theta} \cos \xi \cos \theta \\ 0 & -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\xi} \cos \theta \cos \xi + \dot{\theta} \cos \xi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

y \mathbf{a} es la derivada de la velocidad \mathbf{v} ,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_x \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Las Eqs. (3.10) y (3.11) relacionan las derivadas de los ángulos de Euler utilizados para definir la orientación de la plataforma móvil y la velocidad y aceleración angular de ésta. Estas relaciones son necesarias para definir el modelo dinámico, dado que las ecuaciones de movimiento de la plataforma móvil se definen en términos de la velocidad y aceleración angular, mientras que el modelo se definirá en función de las derivadas de los ángulos de Euler. Por ello, en la siguiente sección se utilizarán estas expresiones para definir correctamente el modelo.

3.4. Metodología del Modelo Dinámico

La metodología de cálculo del modelo dinámico de robots paralelos sigue unas pautas establecidas por las propias características de estos mecanismos. De este modo, es bien sabido que para resolver el problema dinámico de forma compacta, han de calcularse primero las relaciones cinemáticas entre los diferentes grupos de variables que definirán el modelo dinámico. Una vez obtenidas estas relaciones, se introducirán en las ecuaciones de movimiento dinámico de cada uno de los elementos del robot para conformar el modelo completo de éste.

Esta metodología está ampliamente extendida en la literatura, por lo tanto, el objetivo de esta sección no es la redefinición de la metodología, sino la extensión de

la misma para que permita definir modelos teniendo en cuenta las deformaciones de los eslabones que componen el robot.

Subsistemas del robot paralelo y sus coordenadas naturales

Supóngase un robot totalmente paralelo no redundante, es decir, que dispone de $n \leq 6$ grados de libertad rígidos e igual número de cadenas serie que unen la plataforma móvil a la base, disponiendo de una articulación activa por cadena cinemática de modo que $n_a = n$.

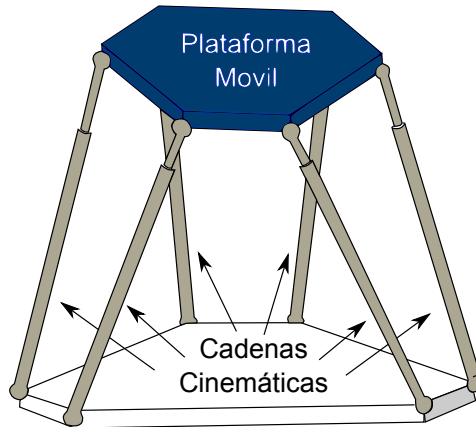


Figura 3.2: Subsistemas del Robot Paralelo.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la forma más natural de calcular el modelo dinámico de los robots paralelos es la separación del mismo en dos subsistemas: la plataforma móvil (en azul en la Fig. 3.2) y las cadenas serie que la unen a la base fija (en gris en la Fig. 3.2). El modelo de cada subsistema puede ser calculado de forma sencilla utilizando sus coordenadas naturales. Esto es, el modelo dinámico de la plataforma móvil se definirá en función de las coordenadas de salida que definen la posición y orientación del elemento terminal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, mientras que el modelo de las cadenas serie se calculará en función las variables articulares $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_a}$.

Por otra parte, es bien sabido que en los robots paralelos, a diferencia de los serie, no todas las variables articulares están actuadas. Por lo tanto, para una correcta definición del modelo, el conjunto de variables articulares \mathbf{q} se divide en tres subconjuntos: por un lado, el conjunto de las variables articulares actuadas \mathbf{q}_a ; por otro, el asociado a las variables articulares no actuadas \mathbf{q}_{na} y por último, las variables flexibles \mathbf{q}_f , las cuales se presentan debido a la deformación de los eslabones, por lo que éstas no están presentes en aquellos robots rígidos.

La aparición de las variables flexibles en el modelo dinámico del robot incrementa notablemente la complejidad del mismo, dado que el valor de éstas no es conocido y su estimación no se puede abordar directamente a partir del modelo cinemático del robot.

Por ello, la principal aportación de este apartado es la consideración de dichas deformaciones en el modelo dinámico, de modo que exista información acerca de su estado y sea directamente tratada por la ley de control. Por lo tanto, en esta sección se considera que al conjunto de variables articulares no actuadas \mathbf{q}_{na} se le suma otro subconjunto igualmente pasivo pero que define la deformación en los eslabones flexibles \mathbf{q}_f .

Con el fin de facilitar la lectura de las siguientes secciones, la división de variables y su nomenclatura se resume a continuación (Fig. 3.3),

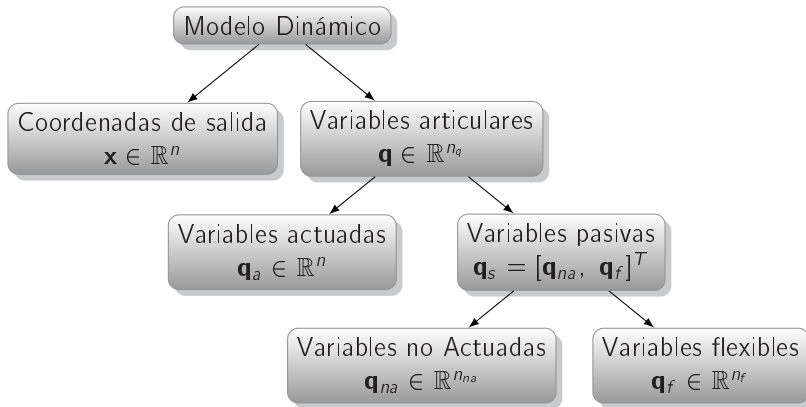


Figura 3.3: División de variables para el modelado dinámico de robots paralelos.

Metodología

Tras haber definido los diferentes conjuntos de variables a utilizar para el cálculo del modelo dinámico del robot paralelo, se puede proceder al cálculo del mismo. Para ello, tal y como se ha detallado anteriormente, existe una metodología preestablecida y ampliamente aceptada que marca las pautas o pasos a seguir para el cálculo del modelo. Esta metodología se resume en la Fig. 3.4 y se considerará una guía para el cálculo del modelo dinámico de robots paralelos, ya sean rígidos, flexibles o estructuras donde se combinan elementos rígidos y flexibles.

En las siguientes secciones se irán detallado, de forma genérica los diferentes pasos que la metodología define, con el fin de calcular un modelo dinámico que considere la información de las deformaciones contenida en \mathbf{q}_f .

3.4.1. Problema Cinemático

El primer paso para poder calcular el modelo dinámico de un robot paralelo consiste en la resolución del problema cinemático, el cual proporcionará las relaciones entre las diferentes variables que definen el modelo dinámico. Estas relaciones se obtienen mediante la manipulación y derivación de las ecuaciones de cierre del mecanismo, tal y como se detalla en la presente sección.

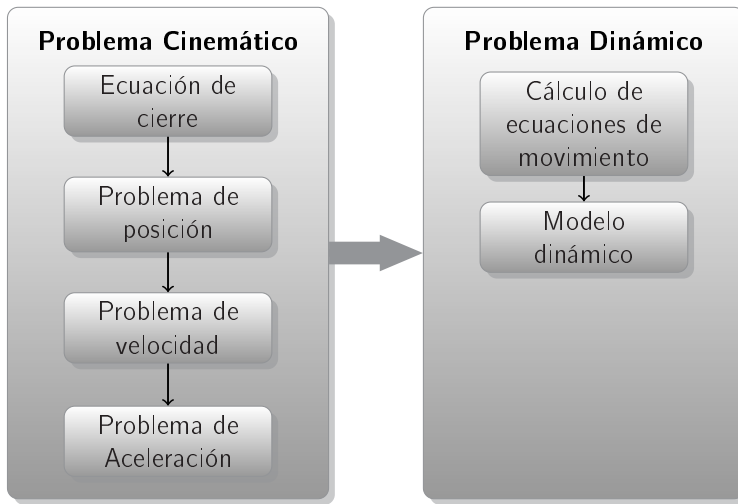


Figura 3.4: División de variables para el modelado dinámico de robots paralelos.

3.4.1.1. Ecuaciones de cierre

Las ecuaciones de cierre de un mecanismo se obtienen planteando las ecuaciones vectoriales asociadas a cada cadena cinemática y permiten relacionar todas las variables cinemáticas que se utilizan para modelar el mecanismo. Estas ecuaciones, además, modelan las restricciones que mantienen unidos los diferentes subsistemas del mecanismo.

Nótese que debido a que el método propuesto plantea la separación del robot en dos subsistemas (la plataforma móvil y las cadenas serie que la unen a la base), la definición de las ecuaciones de cierre del robot se harán siguiendo esta misma filosofía. Evidentemente, esto provoca que las variables articulares asociadas a los puntos de unión entre la plataforma móvil y las cadenas serie no sean consideradas en el modelo dinámico ni cinemático.

En un robot totalmente paralelo de n grados de libertad rígidos existirán, por lo tanto, n cadenas cinemáticas que unen la base y la plataforma móvil. Por lo tanto, la ecuación vectorial de cierre asociada a la cadena serie i se definirá en base al conjunto de vectores que unen la posición del punto \mathbf{P}_x de la plataforma móvil al origen \mathbf{O} a través de la cadena serie i (Fig. 3.5), esto es,

$$\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_{1i}} + \overrightarrow{B_{1i}B_{2i}} + \dots + \overrightarrow{B_{(b-1)i}B_{bi}} + \overrightarrow{B_{bi}C_i} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{P_xC_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

que se puede reescribir como,

$$\Gamma_i(\mathbf{x}, q_{a_i}, q_{na_i}, q_{f_i}) = \mathbf{0}_{n_d \times 1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

donde n_r define el número de restricciones rígidas a las que está sometido el sistema, que en el caso de que el robot sea totalmente paralelo, toma el valor $n_r = n_d \cdot n$ y $n_f = n_{f_i} \cdot n$ define el número de variables flexibles definido en el modelo.

Las relaciones de posición, velocidad y aceleración, y por consiguiente las Jacobianas asociadas, se derivan de la manipulación matemática de esta ecuación de cierre. Por lo tanto, su correcta definición es vital. Adicionalmente, es importante destacar que, debido a la filosofía utilizada para la definición de las ecuaciones de cierre, los dos conjuntos de coordenadas \mathbf{x} y \mathbf{q} se encuentran desacoplados, tal y como se observa en la Eq. (3.17), lo que permitirá definir de forma sencilla las relaciones cinemáticas entre ambos tipos de coordenadas.

3.4.1.2. Problema de Posición

Los problemas de posición directo e inverso pueden ser fácilmente resueltos utilizando las ecuaciones de cierre (3.17).

Problema de Posición Inverso o Inverse Kinematic Problem (IKP)

El IKP permite calcular el valor de las variables articulares actuadas \mathbf{q}_a en función del valor de las coordenadas de salida \mathbf{x} y, en caso de haberlas, las variables flexibles \mathbf{q}_f .

En general, en robótica paralela este cálculo es relativamente sencillo y no plantea excesivas complicaciones. Nótese que una vez definidas las coordenadas de salida \mathbf{x} , los puntos C_i quedan definidos tal y como se muestra en la Fig. 3.5. El procedimiento habitual para la resolución del problema cinemático inverso es la suma de restricciones de distancia a las ecuaciones de cierre de cada cadena cinemática, de forma que la ecuación vectorial se transforme en una ecuación escalar, tal que,

$$f_i(\mathbf{x}, q_{a_i}, q_{f_i}) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

y a partir de la cual es posible hallar el valor de la variable articular actuada asociada a cada cadena cinemática q_{a_i} en función de \mathbf{x} y \mathbf{q}_f . Nótese que dado que cada cadena cinemática dispone únicamente una variable articular actuada, las n ecuaciones (3.18) están desacopladas entre ellas, siendo posible despejar q_{a_i} en función de \mathbf{x} y \mathbf{q}_f .

Problema de Posición de las articulaciones no actuadas

Tal y como se ha detallado anteriormente, el modelo dinámico también queda definido en función de las variables articulares no actuadas \mathbf{q}_{na} , de modo que su valor tendrá que ser calculado en función de las coordenadas de salida \mathbf{x} , las variables articulares actuadas \mathbf{q}_a y las variables flexibles \mathbf{q}_f .

Las relaciones entre estas variables se extraen mediante la manipulación de las ecuaciones de cierre asociadas a cada cadena cinemática i , Eq. (3.15). Por lo tanto, el objetivo es el lograr una expresión que permita el cálculo de cada una de las variables articulares no actuadas $q_{na_{b_i}}$ asociadas a la cadena cinemática i en función de la variable articular actuada q_{a_i} , las variables flexibles \mathbf{q}_f y las coordenadas de salida \mathbf{x} ,

$$g_{ij}(q_a, \mathbf{q}_f, \mathbf{x}, q_{na_{bi}}) = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad b = 1 \dots (n_r - 1) \quad (3.19)$$

Nótese que, al igual que sucede en la Eq. (3.18), cada ecuación (3.19) hace referencia a una sólo articulación no actuada $q_{na_{bi}}$, lo que hace que estas ecuaciones estén desacopladas entre sí.

Problema de Posición Directo o Direct Kinematic Problem (DKP)

El DKP posibilita calcular las coordenadas de salida \mathbf{x} en función del valor de las variables articulares conocidas, que en el caso rígido, son las variables articulares activas \mathbf{q}_a y el caso flexible, tanto las variables activas como las flexibles \mathbf{q}_f .

En robótica paralela, al contrario de lo que sucede en robótica serie, el DKP es el problema de posición que plantea mayor dificultad [149]. En general, el DKP no dispone de una solución analítica, salvo en casos relativamente simples y arquitecturas diseñadas con tal fin, lo que requiere del uso de métodos iterativos como el de Newton-Raphson (N-R).

El objetivo, en el caso genérico, es determinar, la localización del TCP conocidas las variables activas \mathbf{q}_a y las flexibles \mathbf{q}_f . Para ello, se agrupan los dos conjuntos de relaciones de posición definidos en las Eqs. (3.18) y (3.19) en un vector de funciones \mathbf{F} .

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} [f_i(\mathbf{x}, q_{a_i}, q_f)]_{i=1, \dots, n} \\ [g_{bi}(q_a, \mathbf{q}_f, \mathbf{x}, q_{na_{bi}})]_{i=1, \dots, n, \quad b=1 \dots (n_r - 1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{n_q \times 1} \quad (3.20)$$

que relaciona todas las coordenadas entre sí, tanto las variables articulares \mathbf{q} como las coordenadas de salida \mathbf{x} .

3.4.1.3. Problema de Velocidad

Las relaciones de velocidad necesarias para el cálculo del modelo dinámico se obtienen diferenciando las ecuaciones de cierre y de posición detalladas en las secciones anteriores. Las diferentes relaciones utilizadas en la presente sección, las cuales vienen definidas por la Jacobianas, se ilustran a modo de resumen en la Fig. 3.6

Jacobiana de las cadenas serie (link Jacobian matrices \mathbf{J}_i)

Al igual que las relaciones de posición se derivan a partir de las ecuaciones de cierre asociadas a cada una de las cadenas cinemáticas, las diferentes relaciones de velocidad se obtienen manipulando las Jacobianas asociadas a cada cadena serie i , con $i = 1, \dots, n$.

La Jacobiana asociada a cada cadena serie i , \mathbf{J}_i , relaciona la derivada de las coordenadas de salida $\dot{\mathbf{x}}$ y la derivada de las variables articulares asociadas a la cadena i , $\dot{\mathbf{q}}_i = [\dot{q}_{a_i} \quad \dot{\mathbf{q}}_{na_i} \quad \dot{\mathbf{q}}_f]^T \in \mathbb{R}^{n_{r_i} + n_{f_i}}$. Esta Jacobiana se obtiene derivando respecto del tiempo la ecuación de cierre vectorial Eq. (3.15) asociada a la cadena cinemática i ,

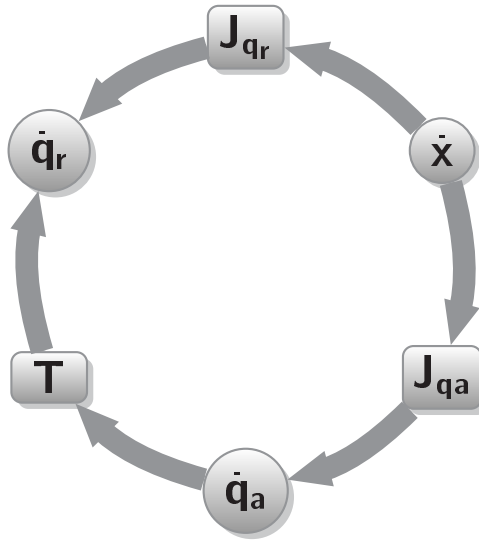


Figura 3.6: Relación entre diferentes tipos de variables.

$$\frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

$$\underbrace{\mathbf{J}_{q_i}}_{n_d \times [n_r + n_{f_i}]} \dot{\mathbf{q}}_i + \underbrace{\mathbf{J}_{x_i}}_{n_d \times n} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

donde, debido a las características impuestas a la clase de robots objeto de estudio, se cumple que $n_d = n_{r_i}$.

Despejando $\dot{\mathbf{q}}_i$, se obtiene la Jacobiana asociada a la cadena cinemática i ,

$$\dot{\mathbf{q}}_i = -\mathbf{J}_{q_i}^{-1} \mathbf{J}_{x_i} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.22)$$

Sin embargo, como se expone en la Eq. (3.21), si la cadena cinemática i está compuesta por algún eslabón flexible, es decir $n_{f_i} \geq 1$, entonces la matriz Jacobiana \mathbf{J}_{q_i} no es cuadrada, y por lo tanto no es invertible. Matemáticamente existe una herramienta denominada matriz pseudoinversa o matriz inversa generalizada de Moore-Penrose, que permite calcular la inversa por la dirección con más elementos de una matriz no cuadrada. Es decir, matemáticamente es posible encontrar una matriz $\mathbf{J}_{q_i}^\dagger$ que garantice $\mathbf{J}_{q_i} \mathbf{J}_{q_i}^\dagger = \mathbf{I}$ pero, sin embargo, $\mathbf{J}_{q_i}^\dagger \mathbf{J}_{q_i} \neq \mathbf{I}$ ya que ésta, al contrario que la matriz inversa, no cumple la propiedad conmutativa. Por lo tanto, **no es posible encontrar** una matriz pseudoinversa por la izquierda, $\mathbf{J}_{q_i}^\ddagger$, que posibilite obtener una relación tal que,

$$\underbrace{\mathbf{J}_{q_i}^\ddagger \mathbf{J}_{q_i}}_{\mathbf{I}_{[n_r + n_{f_i}]}} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_{q_i}^\ddagger \mathbf{J}_{x_i} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.23)$$

Debido a esta situación, se contempla una redefinición de la Eq. (3.21), en la cual se dividen las variables en tres subconjuntos: las variables articulares rígidas, $\dot{\mathbf{q}}_{r_i} = [\dot{q}_{a_i} \ \dot{\mathbf{q}}_{na_i}]^T \in \mathbb{R}^{n_r}$; las variables flexibles, $\mathbf{q}_{f_i} \in \mathbb{R}^{n_{f_i}}$; y las coordenadas de salida, \mathbf{x} , de forma que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{r_i})}{\partial \mathbf{q}_{r_i}} \dot{\mathbf{q}}_{r_i} + \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{r_i})}{\partial \mathbf{q}_{f_i}} \dot{\mathbf{q}}_{f_i} + \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{r_i})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \\ \underbrace{\mathbf{J}_{q_{r_i}}}_{n_d \times n_r} \dot{\mathbf{q}}_{r_i} + \underbrace{\mathbf{J}_{q_{f_i}}}_{n_d \times n_{f_i}} \dot{\mathbf{q}}_{f_i} + \underbrace{\mathbf{J}_{x_i}}_{n_d \times n} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.24)$$

De esta manera, se obtiene una matriz Jacobiana rígida cuadrada, $\mathbf{J}_{q_{r_i}}$, lo que permite despejar $\dot{\mathbf{q}}_{r_i}$ obteniendo así la relación entre los diferentes subconjuntos de variables.

$$\dot{\mathbf{q}}_{r_i} = -\mathbf{J}_{q_{r_i}}^{-1} \left(\mathbf{J}_{q_{f_i}} \dot{\mathbf{q}}_{f_i} + \mathbf{J}_{x_i} \dot{\mathbf{x}} \right) \quad (3.25)$$

Sin embargo, esta relación carece de ciertas ventajas que disfrutaban las relaciones cinemáticas de los robots rígidos:

1. La relación entre las variables rígidas y las coordenadas de salida no es directa, ya que existe otro subconjunto de variables (las variables flexibles).
2. Computacionalmente, se incrementa su coste al introducir una suma y una multiplicación matricial adicional.

Por su parte, bajo la **consideración de pequeñas deformaciones** el movimiento de los eslabones debido a las deformaciones de éstos es pequeño en comparación con el movimiento debido a las variables articulares, $\mathbf{q}_{f_i} \ll \mathbf{q}_{r_i}$. Por lo tanto, en sus respectivas derivadas esta diferencia será mucho mayor, $\dot{\mathbf{q}}_{f_i} \ll \dot{\mathbf{q}}_{r_i}$ y $\ddot{\mathbf{q}}_{f_i} \ll \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}$, por lo que, la Eq. (3.25) puede ser simplificada tal que,

$$\dot{\mathbf{q}}_{r_i} = -\mathbf{J}_{q_{r_i}}^{-1} \left(\underbrace{\mathbf{J}_{q_{f_i}} \dot{\mathbf{q}}_{f_i}}_{\approx 0} + \mathbf{J}_{x_i} \dot{\mathbf{x}} \right) \approx -\mathbf{J}_{q_{r_i}}^{-1} \mathbf{J}_{x_i} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{J}_i}_{n_r \times n} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.26)$$

De esta forma, la Eq. (3.24) se puede reescribir en función de la derivada de las coordenadas de salida $\dot{\mathbf{x}}$ y la derivada de las variables articulares rígidas asociadas a la cadena i , $\dot{\mathbf{q}}_{r_i} = [\dot{q}_{a_i} \ \dot{\mathbf{q}}_{na_i}]^T \in \mathbb{R}^{n_r}$ tal que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{r_i})}{\partial \mathbf{q}_{r_i}} \dot{\mathbf{q}}_{r_i} + \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{r_i})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \\ \underbrace{\mathbf{J}_{q_{r_i}}}_{n_d \times n_r} \dot{\mathbf{q}}_{r_i} + \underbrace{\mathbf{J}_{x_i}}_{n_d \times n} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.27)$$

para posteriormente despejar $\dot{\mathbf{q}}_{r_i}$,

$$\dot{\mathbf{q}}_{r_i} = -\mathbf{J}_{q_{r_i}}^{-1} \mathbf{J}_{x_i} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{J}_i}_{n_r \times n} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.28)$$

obteniendo la Jacobiana asociada a la cadena cinemática i , \mathbf{J}_i , que relaciona el vector de velocidades articulares de dicha cadena y la derivada de las coordenadas de salida $\dot{\mathbf{x}}$.

Jacobianas de las variables articulares \mathbf{J}_{q_r}

Nótese que cada fila de \mathbf{J}_i (Eq. (3.28)) relaciona cada componente de $\dot{\mathbf{q}}_{r_i}$ con las derivadas de las coordenadas de salida $\dot{\mathbf{x}}$, lo que permitirá extraer las diferentes filas de las n Jacobianas \mathbf{J}_i y calcular las Jacobianas que relacionan la velocidad de las variables rígidas $\dot{\mathbf{q}}_r$ con las derivadas de la localización del TCP $\dot{\mathbf{x}}$.

Para ello se definirá $[\mathbf{A}]_k$ como el operador fila, que extrae la fila k de una matriz \mathbf{A} . Aplicando este operador a las Jacobianas de las cadenas serie definidas en la Eq. (3.28) se pueden calcular las Jacobianas asociadas a las variables articulares actuadas, $\dot{\mathbf{q}}_a$, y no actuadas, $\dot{\mathbf{q}}_{na}$,

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_{q_a} \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_{q_a} = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}_1]_1 \\ \vdots \\ [\mathbf{J}_n]_1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3.29)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{na} = \mathbf{J}_{q_{na}} \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_{q_{na}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}_1]_2 \\ \vdots \\ [\mathbf{J}_n]_2 \\ \vdots \\ [\mathbf{J}_1]_{n_r} \\ \vdots \\ [\mathbf{J}_n]_{n_r} \end{bmatrix}_{n_{na} \times n} \quad (3.30)$$

Nótese que debido a que las variables articulares asociadas a cada cadena cinemática i se definen como $\dot{\mathbf{q}}_{r_i} = [\dot{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_{na_i}]^T \in \mathbb{R}^{n_r}$, las expresiones asociadas a las variables articulares activas siempre se extraen de la primera fila de \mathbf{J}_i , mientras que las correspondientes a las no actuadas se extraen de las filas posteriores.

A partir de las Jacobianas (3.29) y (3.30) es posible formular la Jacobiana que relaciona las derivadas de las variables rígidas $\dot{\mathbf{q}}_r$ y la derivada del vector de coordenadas de salida $\dot{\mathbf{x}}$, conociendo la deformación, \mathbf{q}_f , tal que,

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q_a} \\ \mathbf{J}_{q_{na}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Jacobiana de la plataforma \mathbf{J}_p

La Jacobiana de la plataforma relaciona las derivadas de las variables articulares rígidas $\dot{\mathbf{q}}_r$ con la derivada del vector $\dot{\mathbf{x}}$. Por lo tanto, la Jacobiana de la plataforma \mathbf{J}_p se calcula invirtiendo \mathbf{J}_{q_r} , que en el caso general será una matriz rectangular,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{q_r}^\dagger \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{q}}_r \quad (3.32)$$

Matriz de transformación \mathbf{T}

La matriz de transformación \mathbf{T} es una Jacobiana que relaciona las derivadas de todas las variables rígidas $\dot{\mathbf{q}}_r$ con las de las variables actuadas $\dot{\mathbf{q}}_a$.

Esta matriz se utilizará posteriormente para proyectar el modelo dinámico en el espacio actuado, tal y como demostraron Nakamura [159], Murray y Lovell [156] y Ghorbel et al. [80, 82, 81, 90].

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{J}_{q_{na}} \mathbf{J}_{q_a}^{-1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a = \underbrace{\mathbf{T}}_{n_{q_r} \times n} \dot{\mathbf{q}}_a \quad (3.33)$$

3.4.1.4. Problema de Aceleración

Tras calcular las relaciones de velocidad, éstas serán derivadas para obtener las ecuaciones de aceleración que relacionan las aceleraciones de las diferentes variables que compondrán el modelo dinámico.

Jacobiana de aceleración asociada a las cadenas serie $\dot{\mathbf{J}}_i$

Siguiendo el mismo procedimiento definido para el cálculo de \mathbf{J}_i , las Jacobianas de aceleración se obtiene diferenciando ambos miembros de Eq. (3.27),

$$\underbrace{\mathbf{J}_{q_{r_i}}}_{n_d \times n_r} \ddot{\mathbf{q}}_{r_i} + \underbrace{\mathbf{J}_x}_{n_d \times n} \ddot{\mathbf{x}} + \underbrace{\dot{\mathbf{J}}_{q_{r_i}}}_{n_d \times n_r} \dot{\mathbf{q}}_{r_i} + \underbrace{\dot{\mathbf{J}}_x}_{n_d \times n} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n_d \times 1} \quad (3.34)$$

donde, tal y como sucedía en la sección anterior $n_r = n_d$.

Operando en la Eq. (3.34) se puede definir la derivada de la Jacobiana asociada a las cadenas serie $\dot{\mathbf{J}}_i$ para $i = 1, \dots, n$,

$$\dot{\mathbf{J}}_i = -\mathbf{J}_{q_{r_i}}^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_x + \dot{\mathbf{J}}_{q_{r_i}} \mathbf{J}_i) \quad (3.35)$$

Nótese que la derivada de \mathbf{J}_i también puede ser obtenida directamente diferenciando Eq. (3.28) aunque la expresión obtenida en la diferenciación puede ser compleja y difícil de manejar.

Jacobianas de aceleración de las variables articulares rígidas $\dot{\mathbf{J}}_{q_r}$

Mediante un procedimiento idéntico al planteado en la Sección 3.4.1.3, las derivadas temporales de las Eqs. (3.29) y (3.30) pueden ser calculadas.

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_{q_a} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_{q_a} \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_{q_a} = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}_1]_1 \\ \vdots \\ [\mathbf{J}_n]_1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3.36)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{na} = \mathbf{J}_{q_{na}} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_{q_{na}} \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_{q_{na}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}_1]_2 \\ \vdots \\ [\mathbf{J}_n]_2 \\ \vdots \\ [\mathbf{j}_1]_{n_r} \\ \vdots \\ [\mathbf{j}_n]_{n_r} \end{bmatrix}_{n_{na} \times n} \quad (3.37)$$

Combinando las Eqs. (3.36) y (3.37), se obtiene la ecuación que relaciona las aceleraciones de todas las variables articulares $\ddot{\mathbf{q}}_r$ y la segunda derivada del vector de localización del TCP $\ddot{\mathbf{x}}$,

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}_{q_r} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_{q_r} \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_{q_r} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{q_a} \\ \mathbf{j}_{q_{na}} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Jacobiana de aceleración de la plataforma \mathbf{J}_p

La derivada de la Jacobiana de la plataforma se obtiene despejando $\ddot{\mathbf{x}}$ de la Eq. (3.38)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}_{q_r}^\dagger \ddot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{J}}_{q_r}^\dagger \mathbf{j}_{q_r} \mathbf{J}_{q_r}^\dagger \dot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}_p \ddot{\mathbf{q}}_r + \dot{\mathbf{J}}_p \dot{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.4.2. Problema Dinámico

Tras definir las relaciones de posición, velocidad y aceleración entre las diferentes variables que componen el modelo del robot se puede proceder al cálculo del modelo dinámico.

Para ello, se empleará la formulación de Lagrange, que permite la definición del modelo dinámico en función de cualquier conjunto de coordenadas y evita el cálculo de las fuerzas internas entre los elementos del mecanismo. Por ello, el primer paso para el cálculo del modelo dinámico será la definición de la ecuación Lagrangiana, a partir de la cual se podrán derivar las ecuaciones de movimiento del robot.

3.4.2.1. Función Lagrangiana

Tal y como se ha reiterado en este documento, se considerará el robot como la unión de dos subsistemas: la plataforma móvil y las cadenas serie que la unen a la base. Por lo tanto, se puede plantear el cálculo de la función Lagrangiana del robot,

\mathcal{L} , como la suma de las contribuciones de la plataforma móvil, \mathcal{L}_{MP} , y de las cadenas serie, \mathcal{L}_{s_i} , donde $i = 1, \dots, n$.

Nótese que, tal como se ha comentado anteriormente, la forma más natural de calcular la dinámica de la plataforma móvil es la utilización de las coordenadas de salida \mathbf{x} , mientras que en el caso de las cadenas serie, las variables articulares \mathbf{q} es la opción más natural.

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \sum_{b=1}^m \mathcal{L}_{s_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{L}_{MP}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathcal{L}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{L}_{MP}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (3.40)$$

donde m es el número de eslabones por cadena cinemática. Por su parte, cada contribución a la función Lagrangiana del robot \mathcal{L} se calcula como la resta entre la energía cinética \mathcal{T} y potencial \mathcal{V} del sistema considerado,

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} \quad (3.41)$$

Contribución a la función Lagrangiana de la plataforma móvil \mathcal{L}_{MP}

En el caso general, la energía cinética \mathcal{T}_{MP} y potencial \mathcal{V}_{MP} de la plataforma móvil es la de un sólido rígido que se mueve libremente por el espacio.

Por lo tanto, la energía cinética toma la forma,

$$\mathcal{T}_{MP} = \frac{1}{2} \left((m_p + m_c) \dot{\mathbf{p}}_x^T \dot{\mathbf{p}}_x + \boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{I}_p + \mathbf{I}_c) \boldsymbol{\omega} \right) \quad (3.42)$$

donde m_p es la masa de la plataforma móvil e \mathbf{I}_p su inercia centroidal; m_c , \mathbf{I}_c son la masa y la inercia centroidal de la carga situada en el centro de masas de la plataforma móvil; $\dot{\mathbf{p}}_x$ es la velocidad lineal del centro de masas de la plataforma móvil, donde se considerará que está el TCP¹; y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la plataforma en el sistema de referencia fijo (ver Sección 3.3).

Si se define $\mathbf{v} = [\dot{\mathbf{p}}_x \ \boldsymbol{\omega}]^T$, Eq. (3.42) se puede definir como,

$$\mathcal{T}_{MP} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}^T \begin{bmatrix} (m_p + m_c) \mathbf{I}_{n_d} & \mathbf{0}_{n_d \times (n-n_d)} \\ \mathbf{0}_{(n-n_d) \times n_d} & \mathbf{I}_p + \mathbf{I}_c \end{bmatrix} \mathbf{v} \right) \quad (3.43)$$

Nótese que la energía cinética está definida en términos de $\boldsymbol{\omega}$ y no en función de las derivadas de los ángulos de Euler definidos en $\dot{\mathbf{x}}$. Esto es debido a que, tal como se ha detallado en la Sección 3.3, las derivadas de los ángulos de Euler no tienen significado físico y, por lo tanto, no pueden ser utilizadas para definir la dinámica de la plataforma directamente. Sin embargo, a la hora de plantear la trayectoria del TCP, es mucho más cómodo el definir la trayectoria de la localización del TCP en \mathbf{x} y derivar dichas trayectorias numéricamente para obtener así las trayectorias de referencia de velocidad. Por ello, los apartados 3.4.1.3 y 3.4.1.4 recogen las relaciones de velocidad

¹Aunque en el caso general el TCP no tiene por qué estar en el centro de masas de la plataforma del robot, en esta formulación se considerará que así es, dado que los robots objeto de estudio cumplen esta propiedad.

y aceleración en términos de las derivadas primera y segunda de la localización del TCP \mathbf{x} .

Con el fin de definir la Eq. (3.42) en términos de $\dot{\mathbf{x}}$, se utiliza la relación (3.10) definida en la Sección 3.3.

Por lo tanto, introduciendo la Eq. (3.10) en la Eq. (3.43),

$$\mathcal{T}_{MP} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{T}_R^T \begin{bmatrix} (m_p + m_c) \mathbf{I}_{n_d} & \mathbf{0}_{n_d \times (n-n_d)} \\ \mathbf{0}_{(n-n_d) \times n_d} & \mathbf{I}_p + \mathbf{I}_c \end{bmatrix} \mathbf{T}_R \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \underbrace{\mathbf{M}_x(\mathbf{x})}_{n \times n} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.44)$$

donde $\mathbf{M}_x(\mathbf{x})$ es la matriz de inercia de la plataforma móvil, definida en términos de la localización del TCP \mathbf{x} .

La energía potencial de la plataforma no representa ningún problema, dado que se define en función de la posición del TCP \mathbf{p}_x ,

$$\mathcal{V}_{MP} = (m_p + m_c) \mathbf{z} \mathbf{g} \quad (3.45)$$

donde \mathbf{g} es el Vector de la aceleración de la gravedad que coincide con la coordenada y en los robots planares y con la coordenada z en los espaciales.

Contribución a la función Lagrangiana de las cadenas serie \mathcal{L}_s

Debido a que se ha considerado que las cadenas serie que unen la plataforma con la base son estructuralmente idénticas, la estructura de su energía cinética y potencial será similar, de modo que es suficiente con calcular la expresión general de una de las cadenas serie y aplicarla después al resto. La energía cinética \mathcal{T}_{s_i} y potencial \mathcal{V}_{s_i} de cada cadena serie $i = 1, \dots, n$ dependerán de la geometría particular del robot, de la flexibilidad de los eslabones y estarán definidas en función de las coordenadas articulares asociadas a cada cadena serie \mathbf{q}_i .

Para ello a lo largo de esta metodología se considera cada cadena cinemática como un conjunto de eslabones, los cuales pueden ser tanto rígidos como flexibles. Es por ello que previo al análisis energético de cada eslabón, se ha de definir el vector de posición en función del cual se definirán tanto la energía cinética como la potencial de cada elemento.

Por lo tanto, considérese que el eslabón b de la cadena cinemática i está compuesto por n_{b_i} elementos ($j = 1 \dots j_{max}$) de longitud l_{b_j} , cuya posición está descrita por el vector \mathbf{r} definido en el sistema de coordenadas inercial (Fig. 3.7),

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}_{b-1}^{0_i} + \widehat{\mathbf{R}}_b^{0_i} \mathbf{r}_{b_i} \quad (3.46)$$

donde \mathbf{r}_{b_i} es el vector auxiliar de posición definido en el sistema de referencia móvil y el cual se calcula en función de la naturaleza rígida o flexible del eslabón cómo se definirá en la siguiente sección; $\mathbf{p}_{b-1}^{0_i}$ es el vector de posición del extremo del eslabón anterior obtenido a partir de la matriz de transformación $\mathbf{T}_{b-1}^{0_i}$ asociada a las variables flexibles de la cadena cinemática i y $\widehat{\mathbf{R}}_b^{0_i}$ es la matriz de rotación del eslabón b definido

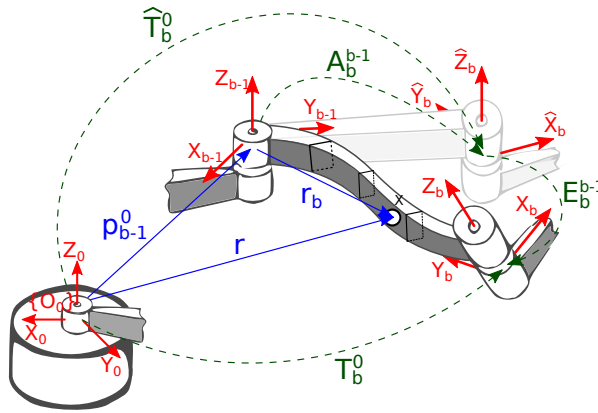


Figura 3.7: Parámetros cinemáticos del eslabón i .

por la matriz de rotación $\widehat{\mathbf{T}}_b^{0_i}$ asociada a las variables rígidas de la cadena cinemática i . Estas matrices de rotación se definen como,

$$\widehat{\mathbf{T}}_{0_i}^b = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}_b^{0_i} & \widehat{\mathbf{p}}_b^{0_i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^{0_i} \mathbf{E}_1^{0_i} \mathbf{A}_2^{1_i} \mathbf{E}_2^{1_i} \dots \mathbf{A}_b^{b-1_i} \quad (3.47)$$

y,

$$\mathbf{T}_0^i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^{0_i} & \mathbf{p}_b^{0_i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^{0_i} \mathbf{E}_1^{0_i} \mathbf{A}_2^{1_i} \mathbf{E}_2^{1_i} \dots \mathbf{A}_b^{b-1_i} \mathbf{E}_b^{b-1_i} \quad (3.48)$$

donde $\mathbf{A}_b^{b-1_i}$ es la matriz de transformación homogénea rígida desde las coordenadas $X_{b-1}, Y_{b-1}, Z_{b-1}$ al sistema de referencia X_b, Y_b, Z_b (Fig. 3.7) y $\mathbf{E}_b^{b-1_i}$ es la matriz de transformación asociada a la deformación del eslabón b con respecto a $b - 1$ de la cadena cinemática i bajo la suposición de deformaciones pequeñas [28] (Fig. 3.8).

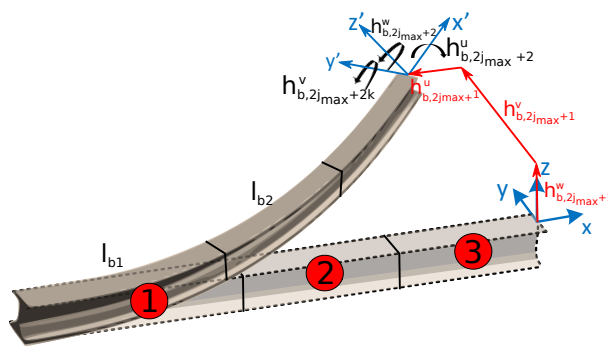


Figura 3.8: Representación gráfica de los parámetros de la matriz de deformación elástica.

$$\mathbf{E}_{b-1}^b = \begin{bmatrix} 1 & -h_{b,2j_{max_i}+2}^W & h_{b,2j_{max_i}+2}^Y & h_{b,2j_{max_i}+1}^U \\ h_{b,2j_{max_i}+2}^W & 1 & -h_{b,2j_{max_i}+2}^U & h_{b,2j_{max_i}+1}^V \\ -h_{b,2j_{max_i}+2}^V & h_{b,2j_{max_i}+2}^U & 1 & h_{b,2j_{max_i}+1}^W \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

donde $h_{b,2j_{max_i}+1}^U$, $h_{b,2j_{max_i}+1}^V$ y $h_{b,2j_{max_i}+1}^W$ son los desplazamientos de flexión en el nodo del extremo (j_{max_i}) de la cadena cinemática i y $h_{b,2j_{max_i}+2}^U$, $h_{b,2j_{max_i}+2}^V$ y $h_{b,2j_{max_i}+2}^W$ son las pendientes de la flexión en el mismo nodo.

Antes del cálculo del modelo dinámico del robot, la posición de cada elemento de cada eslabón ha de ser completamente definida. Para ello, como se ha dicho anteriormente, la posición del vector \mathbf{r}_{b_i} es definida en las siguientes secciones, tanto para eslabones rígidos como para flexibles.

(a) **Vector de Posición \mathbf{r}_{b_i} para eslabones flexibles.**

Si se considera el eslabón b_j flexible, el vector de desplazamiento \mathbf{r}_{b_i} en cualquier punto x del elemento flexible j se define según el Método de Elementos Finitos como,

$$\mathbf{r}_{b_i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} (j-1)l_{b_j} + x_{b_j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_{b_j}(x, t) \\ w_{b_j}(x, t) \end{bmatrix} & \text{Si la articulación} \\ & b_j \text{ es rotativa} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (j-1)l_{b_j} + x_{b_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{b_j}(x, t) \\ v_{b_j}(x, t) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{Si la articulación} \\ & b_j \text{ es prismática} \end{cases} \quad (3.50)$$

donde $u_{b_j}(x, t)$, $v_{b_j}(x, t)$ y $w_{b_j}(x, t)$ son las deformaciones causadas por el elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i definidas en el sistema de referencia locales u , v y w , respectivamente. Nótese que estas deformaciones dependen, no sólo de la variable temporal t , sino que también de la coordenada espacial x , lo que hace que el sistema quede definido mediante una PDE, y por lo tanto, esté definido por infinitos grados de libertad. Basándose en el Método de Elementos Finitos, estas deformaciones pueden describirse mediante el uso de los Polinomios de Hermite $\phi_k(x)$, los cuales se definen como [144, 48],

$$\begin{aligned} u_{ij}(x_{b_j}, t) &= \sum_{k=1}^4 \phi_k^u(x_{b_j}) h_{b,2j-2+k}^u(t) \\ v_{ij}(x_{b_j}, t) &= \sum_{k=1}^4 \phi_k^v(x_{b_j}) h_{b,2j-2+k}^v(t) \\ w_{ij}(x_{b_j}, t) &= \sum_{k=1}^4 \phi_k^w(x_{b_j}) h_{b,2j-2+k}^w(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde $h_{b,2j-1_i}$ y $h_{b,2j_i}$ son el desplazamiento y la pendiente de la flexión en el nodo común con $(j-1)$ y j del eslabón b de la cadena cinemática i , respectivamente; $h_{b,2j+1_i}$ y $h_{b,2j+2_i}$ son el desplazamiento y la pendiente de la flexión en el extremo del elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i , respectivamente y ϕ_k^u , ϕ_k^v y ϕ_k^w se definen como,

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - 3 \frac{x^2}{l_{bji}^2} + 2 \frac{x^3}{l_{bji}^3}, & \phi_2(x) &= x - 2 \frac{x^2}{l_{bji}} + 2 \frac{x^3}{l_{bji}^2} \\ \phi_3(x) &= 3 \frac{x^2}{l_{bji}^2} - 2 \frac{x^3}{l_{bji}^3}, & \phi_4(x) &= - \frac{x^2}{l_{bji}} + 2 \frac{x^3}{l_{bji}^2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

(b) **Vector de Posición \mathbf{r}_{b_i} para eslabones rígidos.**

Los eslabones rígidos, al contrario de los flexibles, no sufren deformaciones. Por lo tanto, la Eq. (3.50) puede simplificarse, ya que las flexiones $u_{bji}(x, t)$, $v_{bji}(x, t)$ y $w_{bji}(x, t)$ son cero. Así, el vector auxiliar de posición definido en el sistema de referencia móvil r_{b_i} se redefine como,

$$\mathbf{r}_{b_i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} (j-1) l_{bji} + x_{bji} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{Si la articulación} \\ & b_i \text{ es rotativa} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (j-1) l_{bji} + x_{bji} \end{bmatrix} & \text{Si la articulación} \\ & b_i \text{ es prismática} \end{cases} \quad (3.53)$$

Además, ante la falta de flexibilidad, la matriz de transformación homogénea causada por la deformación del eslabón b_i , $\mathbf{E}_b^{b-1_i}$ carece de sentido, ya que los desplazamientos y las pendientes debidas a la flexibilidad son nulas, y por tanto, la matriz se simplifica hasta ser una matriz identidad $\mathbf{I}_{4 \times 4}$.

Una vez definido el vector de posición \mathbf{r}_{b_i} de cada elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i , y a partir de las relaciones cinemáticas definidas en la Sección 3.5.2.1, se procede a calcular la energía cinética \mathcal{T} y potencial \mathcal{V} de cada eslabón.

En los eslabones flexibles, la energía potencial \mathcal{V}_{bji} de cada elemento j está compuesta por la combinación de la componente debido a la gravedad $\mathcal{V}_{g_{bji}}$ y una componente debido a la elasticidad $\mathcal{V}_{e_{bji}}$, las cuales se definen como,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{bji} &= \mathcal{V}_{g_{bji}} + \mathcal{V}_{e_{bji}} \\ &= \int_0^{l_{bji}} \rho_{bji} A_{bji} \mathbf{g}^T \mathbf{r} dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_{bji}} \left[E_{bji} l_{bji}^x \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{bji}}{\partial x^2} \right)^2 + E_{bji} l_{bji}^y \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_{bji}}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + E_{bji} l_{bji}^z \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}_{bji}}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx_{ij} \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde ρ_{b_j} es la densidad del material del elemento, A_{b_j} es la sección transversal, \mathbf{g} es el vector de gravedad en el sistema de coordenadas inercial, \mathcal{E}_{b_j} es el módulo de Young y $I_{b_j}^x$, $I_{b_j}^y$ y $I_{b_j}^z$ son los momentos de inercias asociados a los ejes x , y y z del elemento j del eslabón b de la cadena cinemática i .

Por lo tanto, la energía potencial total de cada eslabón, \mathcal{V}_{s_i} viene definido por el sumatorio de los elementos que lo componen, tal que,

$$\mathcal{V}_{s_i} = \sum_{j=1}^{n_{b_i}} \mathcal{V}_{b_j} \quad (3.55)$$

donde n_{b_i} es el número de elementos del eslabón b de la cadena cinemática i .

La energía cinética, por su parte, se define como,

$$\mathcal{T}_{b_j} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{b_j}} \rho_{b_j} A_{b_j} \left[\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right] dx_{ij} \quad (3.56)$$

y de igual modo, la energía cinemática total de cada eslabón es,

$$\mathcal{T}_{s_i} = \sum_{j=1}^{n_{b_i}} \mathcal{T}_{b_j} \quad (3.57)$$

3.4.2.2. Ecuaciones Diferenciales del Movimiento

Utilizando la función Lagrangiana Eq. (3.40), se procede a aplicar la formulación de Lagrange con multiplicadores [228, Cap 10.4]. Nótese que el modelo está definido en función de un total de $n + n_q$ variables de las que sólo n son independientes entre sí. Por ello, para resolver el sistema, se requiere la introducción de n_q multiplicadores de Lagrange λ_j .

- Ecuaciones de movimiento asociadas a los subsistemas serie $k = 1, \dots, n_q$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial q_k} = \sum_{p=1}^{n_q} \lambda_p \frac{\partial \Gamma_p(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i)}{\partial q_k} + \tau_{q_k} \quad (3.58)$$

donde τ_{q_k} es el par o fuerza virtual asociado a la variable articular rígida q_k si todas las variables articulares rígidas estuvieran actuadas, $q_k \in \mathbf{q}_i$ con $i = 1, \dots, n$.

- Ecuaciones de movimiento asociadas a la plataforma móvil $k = 1, \dots, n$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{MP}}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{MP}}{\partial x_k} = \sum_{p=1}^{n_q} \lambda_p \frac{\partial \Gamma_p(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i)}{\partial x_k} + Q_{x_k} \quad (3.59)$$

donde $Q_{x_k} = \mathbf{Q}_x(k)$ son las fuerzas y momentos externos aplicados sobre la plataforma móvil en el sistema de referencia asociado a la misma.

Este sistema de ecuaciones puede reescribirse agrupando los términos para que el primer miembro de las ecuaciones esté estructurado (Eq. (2.2)):

$$\mathbf{D}_a(\mathbf{a}) \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}_a(\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_a \mathbf{a} + \mathbf{G}_a = \mathbf{r} \quad (3.60)$$

donde \mathbf{a} es el vector de variables en las que el modelo está definido y \mathbf{r} representa el miembro de la derecha de las Eqs. (3.58) y (3.59).

Este resultado es fácil de extraer a partir de las componentes energéticas definidas en términos de las coordenadas \mathbf{a} :

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M}(\mathbf{a}) \dot{\mathbf{a}} - \left(\mathbf{G}(\mathbf{a}) \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a}_f^T \mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{a}_f \right) \quad (3.61)$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ es la matriz de masas e inercia que se requiere para la energía cinética; $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ es el vector de gravedad obtenido a partir de la energía potencial gravitacional y $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ es la matriz de rigidez que se obtiene a partir de la energía potencial elástica.

Por lo tanto, se obtiene que,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^o \sum_{b=1}^m \sum_{j=1}^{n_{b_i}} \int_0^{l_{b_i}} m_{b_i} \left[\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right] dx_{b_j} \\ \mathbf{M}(\mathbf{a}) \ddot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{a}) \dot{\mathbf{a}} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^o \sum_{b=1}^m \sum_{j=1}^{n_{b_i}} \int_0^{l_{b_i}} m_{b_i} \left[\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right] dx_{b_j} \right) \\ \mathbf{K}(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^o \sum_{b=1}^m \sum_{j=1}^{n_{b_i}} \int_0^{l_{b_i}} \left[E_{b_j} l_{b_j}^x \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{b_j i}}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + E_{b_j} l_{b_j}^y \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_{b_j i}}{\partial x^2} \right)^2 + E_{b_j} l_{b_j}^z \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}_{b_j i}}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx_{ij} \\ \mathbf{G}(\mathbf{a}) &= - \frac{\partial \mathcal{V}_{g_{b_j i}}}{\partial \mathbf{a}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

de donde se deduce que $\mathbf{D}(\mathbf{a}) = \mathbf{M}(\mathbf{a})$ es el término de inercia, $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ es el término de rigidez, $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ es el término de gravedad y $\mathbf{C}(\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{a}) \dot{\mathbf{a}}$ es el término de Coriolis.

El término de Coriolis puede reescribirse de varias formas, dado que contiene términos cruzados entre las diferentes variables de \mathbf{a} . Una de las formas preferidas en el ámbito de la ingeniería de Control es aquella forma en la que se cumple que $\dot{\mathbf{D}} - 2\mathbf{C}$ es antisimétrica. Este resultado es muy útil para demostrar la convergencia y estabilidad de ciertos algoritmos de control.

Para asegurar esta propiedad, el cálculo de la matriz de Coriolis ha de realizarse en base a la siguiente expresión [127]

$$\mathbf{C}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{a}) + \mathbf{U}_M^T - \mathbf{U}_M] \quad (3.63)$$

donde,

$$\mathbf{U}_M = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}}^T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dot{\mathbf{a}}^T \end{bmatrix}}_{n_a \times (n_a \ n_a)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial M}{\partial a_{n_a}} \end{bmatrix}^T}_{(n_a \ n_a) \times n_a} \quad (3.64)$$

Aplicando este procedimiento a las ecuaciones de movimiento (3.58) y (3.59) se obtiene el sistema de ecuaciones de movimiento que conforma el modelo del robot,

$$\begin{cases} \mathbf{D}_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q\mathbf{q} + \mathbf{G}_q(\mathbf{q}) = \left[\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\tau}_q \\ \mathbf{D}_x(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_x(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{x}} \right] \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}_x \end{cases} \quad (3.65)$$

donde $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_i]_{i=1, \dots, n_r}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange y $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ es la ecuación de cierre vectorial definida en Eq. (3.15).

3.4.2.3. Aplicación de las condiciones de contorno

Una vez los términos articulares se han agrupado creando las diferentes matrices, se definen las condiciones de contorno de cada eslabón flexible. En este proceso se definen la deformación, la pendiente, esfuerzo de corte y el momento flector de cada uno de los extremos de los eslabones rígidos. Por lo tanto, en función de la configuración del eslabón, se definen diferentes condiciones de contorno, tal y como se resume en la Tabla 2.2. A modo de ejemplo, cuando un eslabón trabaja como una viga simplemente apoyada en ambos extremos, tanto la deformación como el momento flector de cada extremo son cero. En el caso de la viga empotrada, sin embargo, en el nodo empotrado la deformación y la pendiente son cero. Una vez enunciadas estas restricciones, éstas son introducidas en el modelo mediante la modificación de las matrices dinámicas del modelo.

3.4.2.4. Modelo dinámico definido en el espacio articular

En primer lugar se despeja el vector de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ de la ecuación asociada a la plataforma móvil y se sustituye la expresión obtenida en las ecuaciones asociadas a las cadenas serie,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_q = & \mathbf{D}_q\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q\mathbf{q} + \mathbf{G}_q - \\ & - \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left[\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right]^\dagger (\mathbf{D}_x\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_x - \mathbf{Q}_x) \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde se puede demostrar que las derivadas parciales de las ecuaciones de restricción $\Gamma_{n_q \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}$, definidas en Eq. (3.15), son iguales a la traspuesta de la Jacobiana de restricciones del robot \mathbf{J}_C .

Diferenciando ambos miembros de Eq. (3.15) respecto del tiempo,

$$\underbrace{\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{x}}}_{n_q \times n} \dot{\mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{q}}}_{n_q \times n_q} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

y despejando $\dot{\mathbf{x}}$ se obtiene la Jacobiana de restricciones \mathbf{J}_C ,

$$\dot{\mathbf{x}} = - \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{x}} \right]^\dagger \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_C \dot{\mathbf{q}} \quad (3.68)$$

Demostrándose el hecho anterior,

$$- \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left[\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]^\dagger = \mathbf{J}_C^T \quad (3.69)$$

Introduciendo la definición de la Jacobiana de restricción \mathbf{J}_C en Eq. (3.66)

$$\boldsymbol{\tau}_q = \mathbf{D}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_C^T \mathbf{D}_x \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_C^T \mathbf{C}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} + \mathbf{G}_q + \mathbf{J}_C^T \mathbf{G}_x - \mathbf{J}_C^T \mathbf{Q}_x \quad (3.70)$$

donde $\boldsymbol{\tau}_q$ es el conjunto de fuerzas/pares virtuales asociadas a todas las coordenadas articulares \mathbf{q} . Esto es, si todas las variables de \mathbf{q} tuvieran asociado un actuador, $\boldsymbol{\tau}_q$ indicaría el par o fuerza a aplicar por dicho actuador. Evidentemente, sólo un subconjunto de variables de \mathbf{q} está actuado, \mathbf{q}_a , por lo que es necesario proyectar este modelo en el espacio actuado utilizando la matriz Jacobiana \mathbf{T} , Eq. (3.33), [159]. Nótese, sin embargo, que tal y como se analiza en la Sección 3.4.1.3, en la Eq. (3.26), las Jacobianas definidas relacionan las variables rígidas $\mathbf{q}_r \in \mathbf{q}$ y las coordenadas espaciales \mathbf{x} . Por lo tanto, el conjunto de fuerzas/pares asociadas a las coordenadas activas \mathbf{q}_a sobre el espacio actuado se obtienen mediante la proyección de las componentes rígidas,

$$\boldsymbol{\tau}_{q_a} = \mathbf{T}^T [\boldsymbol{\tau}_q]_{1\dots q_r} \quad (3.71)$$

3.4.3. Consideraciones Adicionales

Mecanismos sin plataforma

La formulación desarrollada en los apartados previos para calcular la dinámica se aplica a mecanismos totalmente paralelos que dispongan de plataforma, dado que se basa en la separación de ésta del resto del mecanismo. Por ello, con el fin de aplicar el método en el cálculo del modelo dinámico de un mecanismo que carece de plataforma, se puede considerar ésta como una plataforma puntual de masa e inercia nula, en la que se coloca la carga. De este modo, las ecuaciones de la plataforma describirán la dinámica de la carga adosada en la plataforma puntual, en el caso de que ésta exista.

Rango de definición del modelo

El modelo dinámico definido en Eq. (3.70) está definido únicamente cuando las matrices Jacobianas utilizadas para calcularlo no son singulares, situación que se da en posiciones en las que no existan singularidades en el DKP. Éste es un problema general asociado a los robots paralelos. Esto implica que cuando el modelo sea implementado en estrategias de control, se tendrá que definir un área libre de singularidades en el que trabajar, denominado *espacio de trabajo operacional*.

3.5. Ejemplos de validación

El objetivo de esta sección es el de ilustrar mediante ejemplos prácticos la metodología de modelado dinámico propuesta en la sección anterior. Para ello, y con el fin de demostrar la validez de la aproximación propuesta, tras el cálculo del modelo matemático de cada plataforma, éstas serán validadas tanto en simulación, mediante el Software Multibody MSC.Adams, como de forma teórica, en el caso del Robot Sheffield, o experimental, en el caso del Robot Delta.

MSC.Adams es el software de simulación dinámica de sistemas mecánicos más utilizado en la industria, el cual permite evaluar y controlar interacciones complejas entre distintas disciplinas (análisis cinemático, dinámico, estructural, vibraciones, flexibilidad...) optimizando el diseño de los sistemas mecánicos, mejorando su rendimiento, la seguridad y/o confort.

Como la mayoría de los software multibodys, MSC.Adams toma como entrada un conjunto de cuerpos definidos mediante sus características físicas y dinámicas, los cuales interactúan entre sí mediante diferentes conectores y fuerzas de contacto. A partir de ello, el software genera unas relaciones numéricas que describen la dinámica del sistema mecánico, encontrando soluciones a cada paso de simulación.

Por lo tanto, MSC.Adams se presenta como una herramienta extremadamente poderosa, que proporciona al usuario las características suficientes para conocer la respuesta dinámica de cualquier mecanismo de forma extremadamente fiable, ahorrando costes y tiempo en el desarrollo de prototipos o controladores avanzados.

En el ámbito de esta tesis, el software MSC.Adams ha sido de gran utilidad tanto para validar el modelo matemático, como para la correcta sintonización del controlador presentado en el Capítulo 5.

Además de la validación en simulación, los modelos desarrollados a modo de ejemplo han sido validados, también, de forma experimental. En el primer caso, dado que el Robot Sheffield ha sido ampliamente utilizado en la literatura, la validación experimental se ha realizado a partir de los datos publicados en diferentes trabajos científicos. Es por ello que en el transcurso de este trabajo se denominará como validación teórica. En lo que respecta a la validación del Robot Delta, por su parte, los datos se han obtenido experimentalmente de un prototipo comercial, el cual ha sido modificado para aumentar la flexibilidad de parte de sus eslabones.

3.5.1. Caso de estudio I: Robot Sheffield

Los primeros manipuladores flexibles experimentales fueron desarrollados a principios de los años 80, los cuales se centraban, principalmente, en manipuladores de un solo eslabón [39, 99]. Sin embargo, desde entonces, las configuraciones presentadas de los manipuladores de un eslabón flexible no han cambiado mucho. Muestra de ello son dos de los primeros prototipos construidos, el manipulador Sheffield de la Universidad de Sheffield en Reino Unido y el manipulador IST de la Universidad Técnica de Lisboa en Portugal. Desde su construcción, muchos trabajos investigadores han reproducido estas plataformas y las han usado como banco de pruebas en sus publicaciones [223]. En ello ha contribuido el hecho de que tanto los sensores como los actuadores han sufrido un rápido desarrollo en estos años, siendo más sencilla y barata la construcción de este tipo de prototipos [221].

Para la validación de la metodología desarrollada, en primer lugar se ha reproducido el manipulador Sheffield, Fig. 3.9, ya que la simplicidad de este robot permite asentar fácilmente los pasos definidos en ella. Una vez obtenido el modelo matemático, los resultados de éste han sido validados mediante a) la comparación de éstos con los obtenidos en las simulaciones del software comercial Multibody MSC.Adams y b) mediante los datos resultados experimentales publicados con el mismo robot.



Figura 3.9: Foto real del Manipulador Flexible Sheffield, cortesía de la Universidad de Sheffield.

El manipulador Sheffield, cuyas características se resumen en la Tabla 3.1, consta de un eslabón de aluminio (densidad de masa $\rho = 2710 \text{ Kg}/\text{m}^3$ y modulo de Young $\mathcal{E} = 71 \cdot 10^9 \text{ Pa}$) de longitud $L = 0.9 \text{ m}$, anchura 0.019 m y un espesor de 0.0032 m , el cual gira alrededor de un eje cuya inercia es de $I_H = 5.1924 \cdot 10^{-11} \text{ Kg m}^2$. Dicho giro se mide mediante un encóder cuya resolución es de 2048 pulsos por revolución. Además del encóder, el robot dispone de un acelerómetro situado en el extremo final del mecanismo, cuya sensibilidad es de $1.02 \text{ mV}/\text{m s}^2$. Todo ello, tal y como se aprecia en la Fig. 3.9, construido de forma que el eslabón sufra deformaciones en el plano horizontal xy y se mantenga rígido ante deformaciones verticales y torsiones.

Al tratarse de un manipulador de un solo eslabón, las relaciones cinemáticas entre

Parámetros		
Medidas del eslabón	<i>Longitud</i> $A = 0.9\ m$	<i>Area</i> $A = 57.100\ 10^{-6}\ m^2$
Aluminio	$E = 71\ 10^9\ Pa$	$\rho = 2710\ Kg/m^3$
Inercias del sistema	$I_{yy} = 5.253\ 10^{-11}\ m^4$	$I_H = 5.8598\ 10^{-11}\ Kg\ m^2$
Sensores	2048 pulsos/revolución	1.02 $mV/m\ s^2$

Tabla 3.1: Parámetros experimentales del Robot Sheffield

las diferentes variables y sus respectivas Jacobianas carecen de sentido, ya que estas son directas. Por lo tanto, mediante este sencillo ejemplo, se validará, únicamente, la metodología del problema dinámico (Sección 3.4.2). Para ello, y tal y como se estipula en la metodología, en primer lugar se ha definido la matriz de transformación T_1^0 , la cual permite transformar los movimientos definidos en el sistema referencia móvil al sistema de referencia inercial. Nótese que al tratarse de un manipulador que gira entorno al plano xy y que no sufre deformaciones en el eje z , tanto la matriz de transformación como el resto del modelo se definirá únicamente entorno al plano xy .

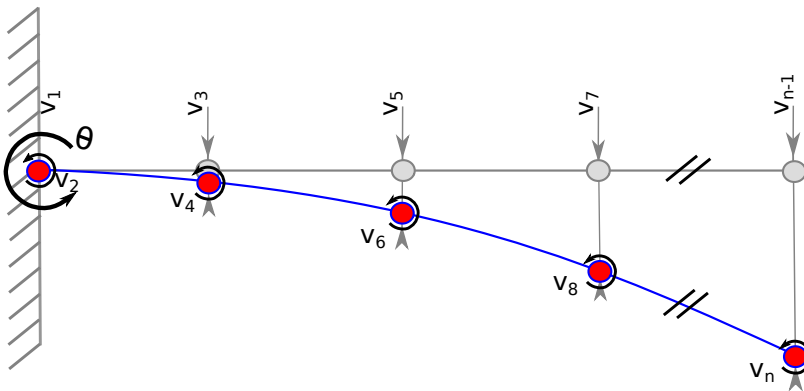


Figura 3.10: Esquema de las variables del modelo del Robot Sheffield.

Teniendo todo ello en cuenta, y basándose en la nomenclatura de la Fig. 3.10, la matriz de transformación T_1^0 se define tal que,

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

donde θ es el ángulo de giro del manipulador.

Una vez definida la matriz de rotación, en segundo lugar se procede al cálculo del vector de posición auxiliar, r_1 , el cual define la posición de cada elemento diferencial j en el sistema de referencia móvil y viene definido por,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} (j-1)l_j \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_j \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

donde v_j es la deformación causada por el elemento j , la cual está definida por las Eqs. (3.52) y (3.51), y l_j es la longitud del elemento j .

Por lo tanto, a partir de la matriz de transformación \mathbf{T}_1^0 y del vector auxiliar \mathbf{r}_1 se obtiene el vector de posición en el sistema de coordenadas inerciales, \mathbf{r} , tal que,

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}_1^0 \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j-1)l_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Tras obtener el vector posición \mathbf{r} , se procede al análisis energético de los elementos que lo componen.

La energía cinética de cada elemento, T_j , se obtiene a partir de la integración de ésta a lo largo de la longitud del elemento j , l_j , de forma que,

$$T_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_j A_j \left[\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right] dx \quad (3.75)$$

la cual, tras manipularla algebraicamente se puede reescribir como,

$$T_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_j \dot{\mathbf{q}} \quad (3.76)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de variables $[\theta, h_{2j-1}^y, h_{2j}^y, h_{2j+1}^y, h_{2j+u}^y \dots h_{2j_{max}+1}^y, h_{2j_{max}+u}^y]$ y \mathbf{M}_j es la matriz de inercia del elemento j , la cual es simétrica y definida positiva y se define tal que,

$$\mathbf{M}_j = \int_0^{l_j} \rho_j A_j \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_j} \right]^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_j} dx \quad (3.77)$$

Analizando la ecuación, se puede generalizar que para cada uno de los elementos j , la matriz de inercias \mathbf{M}_j se define como,

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} M_j(1,1) & M_j(1,2) & M_j(1,3) & M_j(1,4) & M_j(1,5) \\ M_j(2,1) & & & & \\ M_j(3,1) & & & & \\ M_j(4,1) & & & \mathbf{P}_j & \\ M_j(5,1) & & & & \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

donde,

$$\mathbf{P}_j = \frac{\rho_j A_j l_j}{420}, \begin{bmatrix} 156 & 6l_j & 54 & -13l_j \\ 6l_j & 4l_j^2 & -6l_j & -4l_j^2 \\ -12 & -6l_j & 12 & -6l_j \\ 6l_j & 2l_j^2 & -6l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

y,

$$\begin{aligned}
 M_j(1, 1) &= \frac{\rho_j A_j l_j^3}{3} (3j^2 - 3j + 1) + \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{P}_j \boldsymbol{\kappa} \\
 M_j(1, 2) = M_j(2, 1) &= \frac{\rho_j A_j l_j^2}{20} (10j - 7) \\
 M_j(1, 3) = M_j(3, 1) &= \frac{\rho_j A_j l_j^3}{60} (5j - 3) \\
 M_j(1, 4) = M_j(4, 1) &= \frac{\rho_j A_j l_j^2}{20} (10j - 3) \\
 M_j(1, 5) = M_j(5, 1) &= \frac{\rho_j A_j l_j^3}{30} (5j - 2)
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

siendo $\boldsymbol{\kappa} = [h_{2j-1}^y, h_{2j}^y, h_{2j+1}^y, h_{2j+u}^y \dots h_{2j_{max}+1}^y, h_{2j_{max}+u}^y]$ el subconjunto de variables flexibles del sistema.

Por su parte, la energía potencial de cada elemento j , V_j , está descrita únicamente por la componente elástica, ya que, en este caso, y debido a que el manipulador gira en torno al plano horizontal y sin deformaciones verticales, la gravitacional es nula. Por lo tanto, la energía potencial del manipulador se define como,

$$V_j = \frac{1}{2} \int_0^l \mathcal{E}_j l_{yyj} \left[\frac{\partial^2 v_j}{\partial x} \right]^2 dx \tag{3.81}$$

Del mismo modo que con la energía cinética, la expresión obtenida puede ser manipulada algebraicamente hasta obtener,

$$V_j = \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_j^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\kappa}_j \tag{3.82}$$

donde para cada elemento j la matriz \mathbf{K}_j se define como,

$$\mathbf{K}_j(l_j) = \frac{\mathcal{E}_j l_{yyj}}{l_j^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_j & -12 & 6l_j \\ 6l_j & 4l_j^2 & -6l_j & 2l_j^2 \\ -12 & -6l_j & 12 & -6l_j \\ 6l_j & 2l_j^2 & -6l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

Por lo tanto, el cálculo del total de la energía del eslabón (tanto cinética como potencial) es la suma de las energías de cada elemento. Es decir,

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{j=1}^{j_{max}} T_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \\
 V &= \sum_{j=1}^{j_{max}} V_j = \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\kappa}
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

de donde se obtienen las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} del sistema completo y, a partir de ellas, la matriz de Coriolis tal y como se precisa en la Eq. (3.63).

3.5.1.1. Validación del Manipulador Sheffield

Para evaluar la fiabilidad del modelo, la salida de éste se ha comparado tanto con la obtenida mediante el modelo de simulación en MSC.Adams como con la respuesta del sistema teórica publicada en [221]. Para ello, el modelo matemático ha sido desarrollado utilizando tres elementos para definir el eslabón flexible, ya que, tal y como demuestra Tsujisawa en [229], la dinámica de un eslabón puede definirse de forma precisa mediante un número relativamente bajo de modos (dos o tres). Además, según Przemieniecki en [178], los primeros m modos se obtienen con suficiente precisión mediante cualquier modelo de m elementos definido mediante el Método de Elementos Finitos.

Para poder reproducir los ensayos mostrados en la literatura, tanto el modelo matemático como el de simulación se han excitado mediante un par de entrada bang-bang como el que se muestra en la Fig. 3.11, la cual permite al manipulador acelerar durante el periodo de par positivo y decelerar durante el negativo hasta lograr estabilizar el manipulador en una posición de reposo. A lo largo del experimento se han medido tanto el ángulo de giro de la articulación como la posición del extremo del eslabón ante diferentes escenarios de carga, la cual se ha variado en el rango de 0 a 0.1 kg, lo que supone una carga de hasta el 60 % del peso del eslabón.

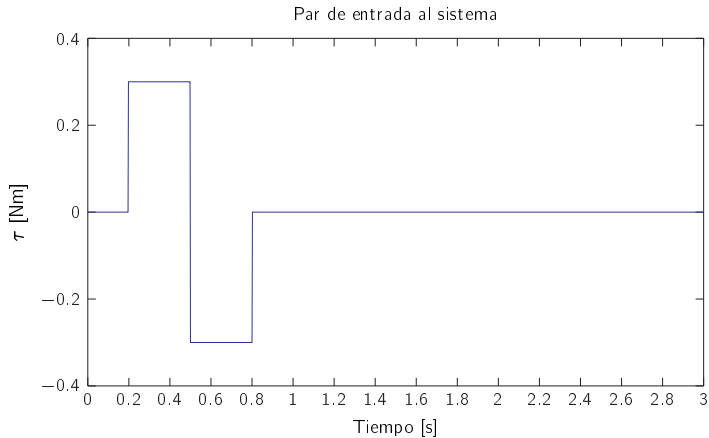


Figura 3.11: Par de excitación para el Manipulador Sheffield.

En primer lugar, los tres modelos a comparar; el modelo matemático presentado en esta tesis, el modelo de simulación desarrollado en MSC.Adams y los datos del prototipo experimental publicados en [221]; han sido expuestos a una carga de 20g en la punta del extremo del eslabón flexible y excitados con el par de entrada definido anteriormente. A partir de dicho experimento, se ha extraído, en primer lugar, la respuesta del ángulo de giro de la articulación del manipulador.

La Fig. 3.12 muestra una comparación entre el ángulo de la articulación obtenido

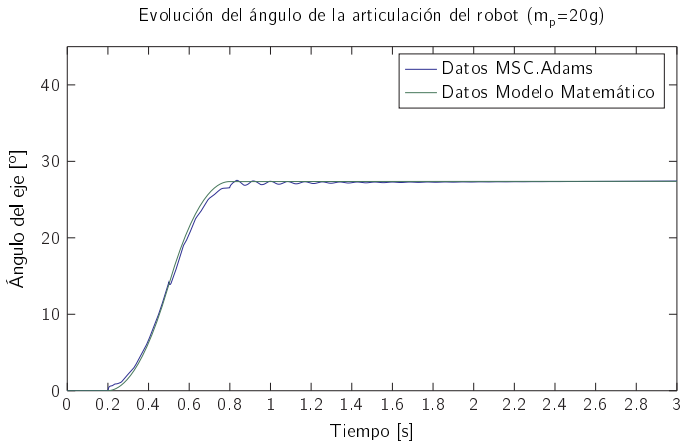


Figura 3.12: Comparativa entre la evolución del ángulo a lo largo del tiempo obtenida mediante MSC.Adams y el modelo matemático cuando la carga en el extremo del manipulador es $m_p = 20g$.

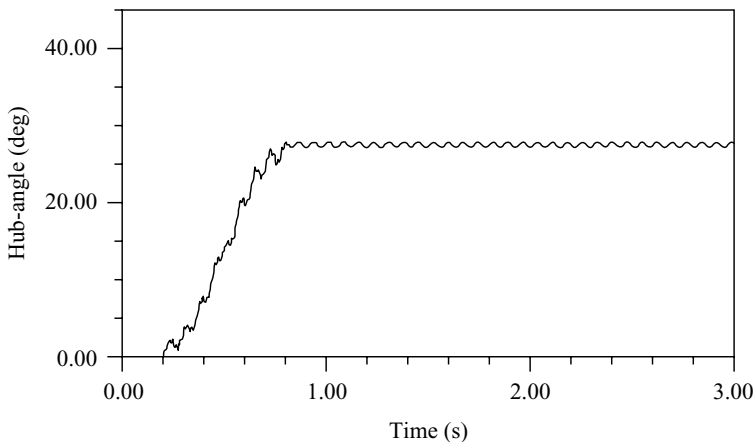


Figura 3.13: Evolución del ángulo a lo largo del tiempo obtenida a partir de los datos experimentales publicados en [221] cuando la carga en el extremo del manipulador es $m_p = 20g$.

mediante el modelo matemático propuesto y el obtenido en las simulaciones realizadas mediante MSC.Adams. En ella, se puede apreciar que el comportamiento general en ambos casos es similar. Sin embargo, se observa que, a comparación con el modelo matemático, en la simulación de MSC.Adams el eslabón sufre mayores vibraciones cuando alcanza la posición de reposo. Pese a ello, una vez transcurrido un periodo transitorio de unos 0.5 s ambos modelos se estabilizan sobre un mismo ángulo de giro.

Son varios los factores que contribuyen a esta ligera diferencia. Mientras el modelo matemático se ha definido basándose en un modelo de orden reducido en el que sólo los tres primeros modos son incluidos, el modelo de MSC.Adams está descrito por un sistema compuesto por miles de elementos infinitesimales. Por otro lado, tanto la torsión y el movimiento vertical, como los modos más altos no se han tenido en cuenta a la hora de desarrollar el modelo matemático, ya que su aportación es muy pequeña en comparación con el aumento de complejidad que constituyen. Sin embargo, los efectos de éstos sí están presentes tanto en las simulaciones de la herramienta multibody como en los sistemas experimentales, Fig. 3.13.

En los datos del prototipo real, por su parte, pese a tener el mismo valor de estabilización, en comparación con los resultados obtenidos tanto en el modelo matemático como en las simulaciones, las vibraciones son ligeramente superiores a lo largo de todo el experimento. Este efecto viene dado, principalmente, por tres fenómenos. En primer lugar, y el más relevante, debido a la flexibilidad en la articulación introducida por la reductora utilizada. En segundo lugar, la precisión del sensor de medida. A esta precisión contribuyen factores como la atenuación del ruido, la sensibilidad o el período de muestreo, entre otros. Por último, las pérdidas por fricción y la dinámica del motor, los cuales pueden llegar a afectar considerablemente en la respuesta del sistema, y las cuales no se contabilizan en los modelos matemáticos y de simulación. Sin embargo, en los tres casos comparados, tal y como se observa en las Fig. 3.12 y Fig. 3.13, la respuesta obtenida es muy similar siendo el ángulo de estabilización en los tres casos 27° ($27,66^\circ$, $27,39^\circ$ y 27° para los resultados de simulación en MSC.Adams, del modelo matemático y los experimentales, respectivamente). Además, se ha de tener en cuenta que estos pequeños factores son insignificantes a la hora de definir un modelo de control, ya que estos suelen estar limitados por los anchos de banda de los sensores y los actuadores utilizados.

Una vez, analizada la respuesta del ángulo de giro, Tokhi y Azad analizan la posición del extremo del manipulador en [221] a partir de los datos obtenidos por el acelerómetro colocado en dicho lugar y bajo las mismas condiciones que en el experimento anterior. Por lo tanto, del mismo modo que con el ángulo de giro, dichos datos han sido reproducidos mediante los modelos matemáticos y experimentales.

En la Fig. 3.14 se puede observar comparativamente la respuesta obtenida mediante el modelo de simulación y el modelo matemático propuesto. Una vez más, al igual que en el caso del ángulo, se puede apreciar un pequeño rizado en el respuesta de las simulaciones en MSC.Adams de entorno a 0,5 s una vez el eslabón ha alcanzado la posición final. Pese al rizado, el cual también está presente en los datos experimentales representados en la Fig. 3.15, los tres modelos tienen una respuesta muy

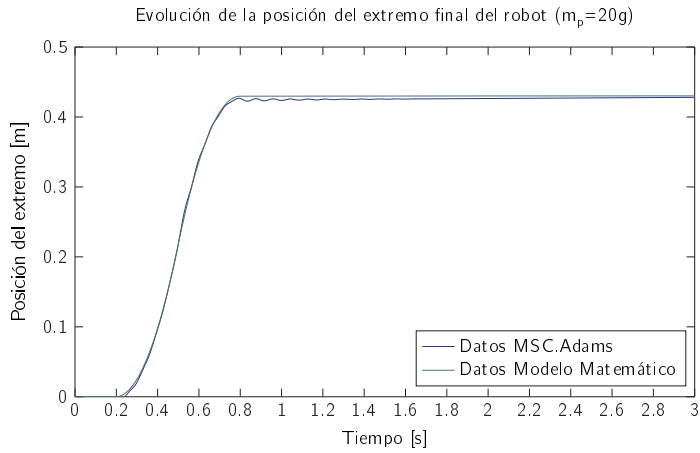


Figura 3.14: Comparativa entre la evolución de la posición del extremo del manipulador a lo largo del tiempo obtenida mediante MSC.Adams y el modelo matemático cuando la carga en el extremo del manipulador es $m_p = 20g$.

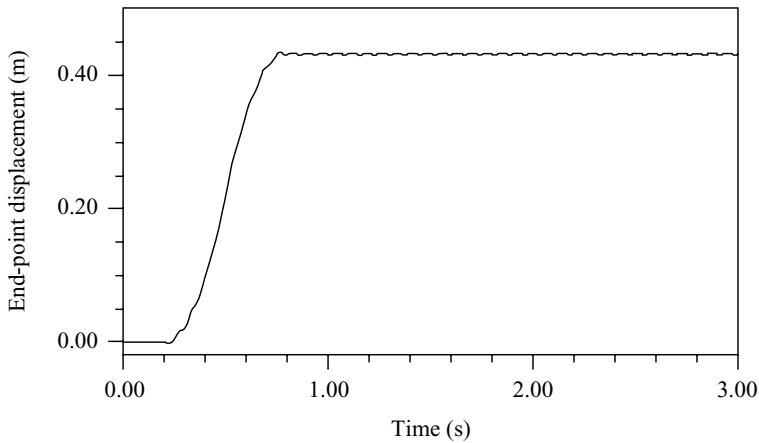


Figura 3.15: Evolución de la posición del extremo del manipulador a lo largo del tiempo obtenida a partir de los datos experimentales publicados en [221] cuando la carga en el extremo del manipulador es $m_p = 20g$.

similar, estabilizándose todos ellos en un mismo valor, $0.43\ m$ ($0.4389\ m$, $0.4303\ m$ y $0.43\ m$ para los resultados de simulación en MSC.Adams, del modelo matemático y los experimentales, respectivamente).

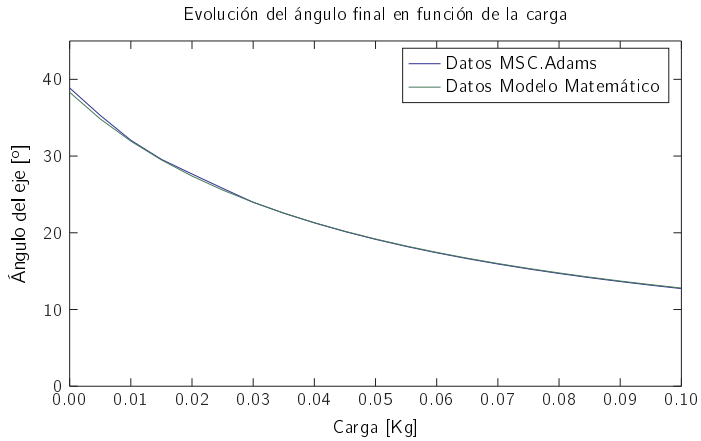


Figura 3.16: Comparativa entre la evolución del ángulo de giro en función de la carga en el extremo obtenida mediante MSC.Adams y el modelo matemático propuesto.

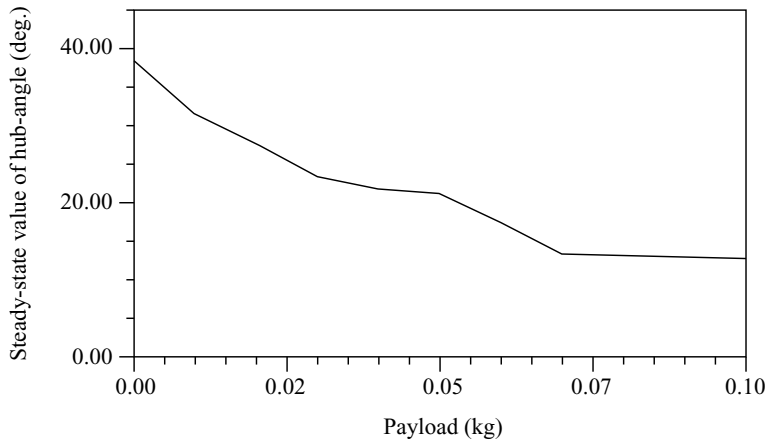


Figura 3.17: Comparativa entre la evolución del ángulo de giro en función de la carga en el extremo obtenida a partir de los datos experimentales publicados en [221].

Para analizar el efecto de la carga sobre la respuesta del sistema, se han graficado los valores de las respuestas del ángulo de giro (Fig. 3.18 y Fig. 3.19) y de la posición

del extremo (Fig. 3.16 y Fig. 3.17) una vez alcanzado el régimen permanente ($t = 5s$) bajo condiciones de diferentes cargas ($[0 - 0.1 \text{ kg}]$).

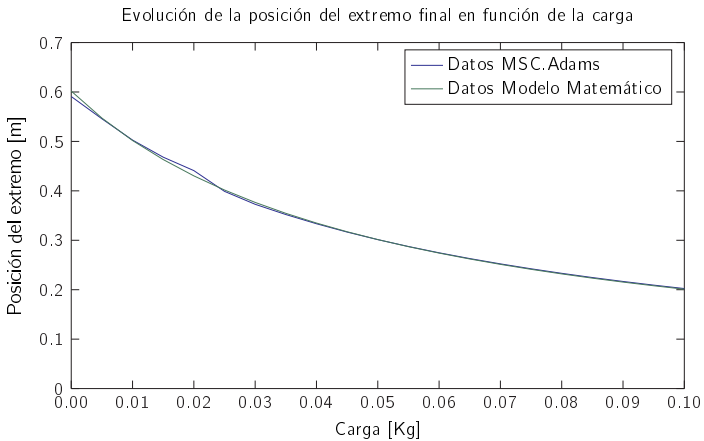


Figura 3.18: Comparativa entre la evolución de la posición del extremo final en función de la carga obtenida mediante MSC.Adams y el modelo matemático.

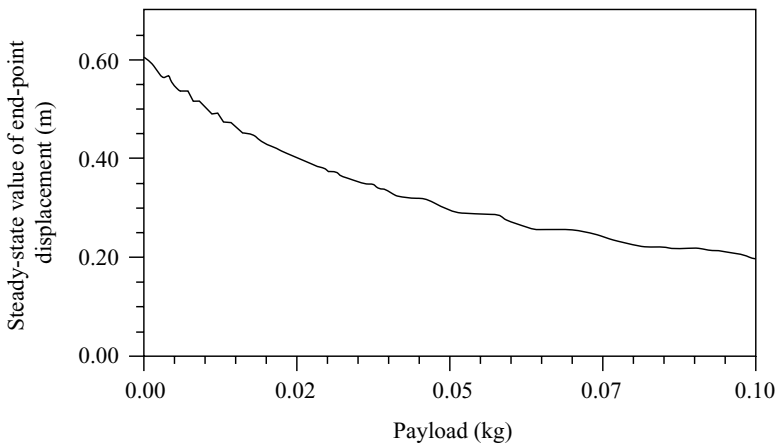


Figura 3.19: Comparativa entre la evolución de la posición del extremo final en función de la carga obtenida a partir de los datos experimentales publicados en [221].

En ambos casos, se puede apreciar como a partir de los tres modelos comparados se obtienen respuestas muy similares. Cabe destacar, que el elevado paso en el barrido de la Fig. 3.19 hace que ésta sea notoriamente más abrupta que el resto. Sin embargo,

se pueden apreciar que los datos obtenidos si son similares. Por su parte, en todos ellos, se aprecia como el aumento de la carga en el eslabón genera una reducción significativa del ángulo de giro, y por consiguiente de la posición del extremo.

En base a estos resultados, es posible afirmar que el modelo dinámico general obtenido en esta sección para el Robot Sheffield proporciona el mismo resultado que el modelo experimental presentado por Tokhi y Azad en [221]. Por lo tanto, los resultados mostrados permiten validar la metodología propuesta aplicada en este caso de estudio al robot Sheffield.

3.5.2. Caso de estudio II: Robot Delta

En los últimos años se ha extendido la utilización de robots paralelos para realizar tareas específicas que aprovechan las ventajas topológicas que presentan estos mecanismos en cuanto a rigidez, velocidad, precisión y masa móvil. Una de las aplicaciones con más éxito es la utilización de estructuras paralelas para tareas de *Pick-and-Place*, permitiendo la operación de cargas de pequeño peso (generalmente inferior al kilogramo), a altas velocidades. Ejemplo de esta tendencia es el robot Delta, uno de los robots paralelos de tres grados de libertad más populares en el ámbito industrial, ya que su estructura liviana le permite tener un rendimiento excelente en aplicaciones con movimientos rápidos, llegando a alcanzar ciclos de hasta 300 repeticiones por minuto.

El robot Delta está compuesto por tres cadenas cinemáticas ($i = 1, 2, 3$) uniformemente distribuidas ($\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2\pi/3$, $\beta_3 = 4\pi/3$) que conectan la base fija con la plataforma móvil. Cada una de estas cadenas está compuesta por un eslabón superior conectado a la base fija mediante un actuador rotativo (q_{a_i} para $i = 1, 2, 3$) y por un paralelogramo articulado que permite el movimiento rotativo pasivo en dos direcciones (γ_i y α_i), como se puede apreciar en la Fig. 3.20. Esta configuración limita el movimiento de la plataforma, y por lo tanto la del TCP, a un movimiento puramente de traslación. Por lo tanto, las coordenadas de salida del vector \mathbf{p}_x están definidas por las variables de posición $\mathbf{p}_x = [x \ y \ z]^T$.

Para el caso de estudio se ha utilizado el robot comercial Omron Mini Delta CR-UGF4MINI-NR, cuyo prototipo está disponible en los laboratorios del Grupo de investigación GCIS. El modelo de dicho robot, cuyos principales parámetros rígidos se resumen en la Tabla 3.2, se ha implementado en el Software Multibody MSC ADAMS.

Sin embargo, los eslabones originales del robot comercial presentan una alta rigidez, produciendo deformaciones no relevantes debido a la baja capacidad de carga del robot (<1 Kg). Por lo tanto, para analizar el efecto de la deformación y poder validar la metodología propuesta, se han reemplazado los eslabones que componen el paralelogramo articulado por pletinas de aluminio AW5083/H111 de 0.003m de espesor y 0.015m de anchura, cuyas características se resumen en la Tabla 3.3.

En las siguientes secciones, el modelo dinámico del robot será calculado siguiendo la metodología detallada en la sección anterior. Para ello, tal y como se ha descrito anteriormente, primero se resolverá el problema cinemático a partir de las ecuaciones de lazo. De ellas, se abordarán los problemas de posición (tanto directo como inverso),

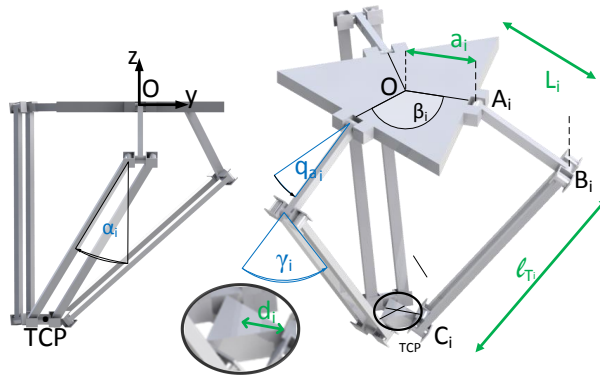


Figura 3.20: Esquema del Robot Delta.

	Longitud (m)	Masa (kg)	Inercia (kg m ²)
Base Fija	$ a_i = 0.100$		
Eslabón Superior L_i	0.150	0.0365	$I_{L_{ixx}} = 2.2781 \cdot 10^{-6}$ $I_{L_{iy y}} = 8.7001 \cdot 10^{-5}$ $I_{L_{izz}} = 8.6422 \cdot 10^{-5}$
Eslabón Inferior l_i	0.400	0.1319	$I_{l_{ixx}} = 2.0023 \cdot 10^{-6}$ $I_{l_{iy y}} = 0.0010$ $I_{l_{izz}} = 0.0010$
Plataforma Móvil	$ d_i = 0.040$	0.1278	$I_{p_{xx}} = 4.6225 \cdot 10^{-5}$ $I_{p_{y y}} = 4.6225 \cdot 10^{-5}$ $I_{p_{zz}} = 9.1472 \cdot 10^{-5}$

Tabla 3.2: Parámetros rígidos del Robot Omron Mini Delta CR-UGD4MINI-NR

Longitud	Anchura	Espesor	Modulo de Young	Densidad de Masa
0.400m	0.015m	0.003m	71GPa	2740Kg/m ³

Tabla 3.3: Propiedades mecánicas del aluminio de las pletinas flexibles.

velocidad y aceleración. Una vez resuelto el problema cinemático, se afrontará el problema dinámico. En primer lugar, se definen las ecuaciones de movimiento a partir de la formulación de Lagrange. Posteriormente, las ecuaciones obtenidas se agruparán proporcionando un sistema de ecuaciones dinámicas estructurado de forma cerrada.

3.5.2.1. Problema Cinemático

Tal y como se ha detallado en la sección anterior, el primer paso para la obtención del modelo de cualquier robot paralelo es resolver el problema cinemático. Mediante este problema se definen las relaciones entre las diferentes variables que relacionan el modelo dinámico, las cuales se obtienen mediante la manipulación de la ecuación de cierre.

3.5.2.2. Ecuación de cierre

Para el calculo de la ecuación de cierre, se define $\mathbf{O}(x, y, z)$ como el origen del sistema de referencia fijo asociado a la plataforma fija de forma triangular. En cada uno de los lados de dicho triángulo y a una distancia a_i de su centro \mathbf{O} se sitúan los puntos \mathbf{A}_i , los cuales albergan cada una de las articulaciones activas q_{a_i} . Éstas son las encargadas de hacer girar los eslabones

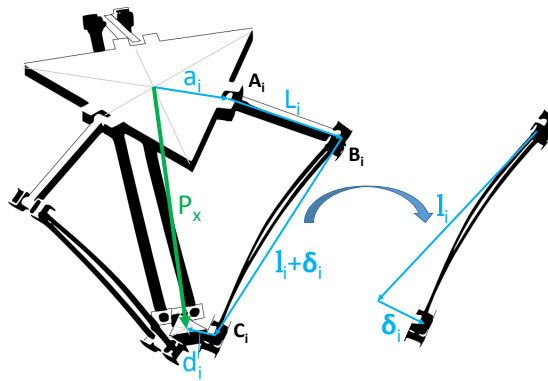


Figura 3.21: Ecuación de lazo de la cadena cinemática i .

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{L}_i(\mathbf{q}) + [\mathbf{l}_i(\mathbf{q}) + \delta_i(\mathbf{q})] - \mathbf{d}_i - \mathbf{p}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{\Gamma}_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (3.85)$$

donde $[\mathbf{a}_i]_{3 \times 1}$ es un vector constante que define la geometría de la plataforma fija con respecto al sistema de referencia fijo; \mathbf{L}_i es el vector que define cada uno de los eslabones superiores en términos de las variables actuadas asociadas a cada cadena serie q_{a_i} ; $\delta_i(\mathbf{q}_i) = [h_{b,2j_{max_i}+1_i}^u \quad h_{b,2j_{max_i}+1_i}^v \quad h_{b,2j_{max_i}+1_i}^w]^T$ es el vector que define la deformación en el extremo de los eslabones inferiores considerando que los eslabones que componen cada paralelogramo se deforman de igual manera; $[\mathbf{d}_i]_{3 \times 1}$ es un vector constante que define la geometría de la plataforma móvil en el sistema de referencia móvil; $\mathbf{p}_x = [x \quad y \quad z]^T$ son las coordenadas Cartesianas de la plataforma móvil \mathbf{P} , en la cual se sitúa el TCP, y \mathbf{l}_i es el vector que determina la posición del eslabón inferior en términos de las articulaciones no actuadas $\mathbf{q}_{na_i} = [\gamma_i \quad \alpha_i]^T$ (Fig. 3.20).

$$\mathbf{a}_i = a_i \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) \\ \sin(\beta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_i = L_i \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) \cos(q_{a_i}) \\ \sin(\beta_i) \cos(q_{a_i}) \\ -\sin(q_{a_i}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} d_i \cos(\beta_i) \\ d_i \sin(\beta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$[\mathbf{l}_i(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\delta}_i(\mathbf{q})] = l_i \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) \cos(q_{a_i} + \gamma_i) \cos(\alpha_i) - \sin(\beta_i) \sin(\alpha_i) \\ \sin(\beta_i) \cos(q_{a_i} + \gamma_i) \cos(\alpha_i) - \cos(\beta_i) \sin(\alpha_i) \\ -\sin(q_{a_i} + \gamma_i) \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Combinando las ecuaciones de las tres cadenas cinemáticas se obtiene el sistema de ecuaciones de restricción del mecanismo,

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i) = [\boldsymbol{\Gamma}_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i)]_{i=1..3} = \mathbf{0}_{n \times 1} \quad (3.88)$$

donde $n = (n_{q_r} + n_{q_f})$ es el número de variables del sistema, siendo $n_{q_r} = n_{q_a} + n_{q_{na}} = 3 + 6 = 9$ el número de variables rígidas (actuadas y no actuadas) y n_{q_f} el número de variables flexibles (Fig. 3.25).

3.5.2.3. Problema de Posición

Suponiendo que las variables flexibles, q_f , son conocidas, el Problema Cinemático Inverso define los valores de las variables activas, \mathbf{q}_a , en términos de unas coordenadas de salida \mathbf{x} concretas. Por lo tanto, si la posición del TCP, \mathbf{x} , es conocida, la posición cartesiana de los puntos $\mathbf{C}_i = \mathbf{p}_x + \mathbf{d}_i$ puede ser directamente calculada, ya que la plataforma móvil es considerada indeformable. De la misma manera, como la posición de los puntos \mathbf{A}_i es fija, ésta también es conocida. Por lo tanto, las coordenadas cartesianas del punto \mathbf{B}_i pueden ser estimadas mediante el cálculo de la intersección entre la circunferencia descrita por el movimiento de \mathbf{L}_i , cuyo movimiento está definido en términos de las articulaciones actuadas \mathbf{q}_{a_i} , y la esfera definida por el movimiento del paralelogramo articulado \mathbf{l}_i , cuyo movimiento está definido por las variables no actuadas $\mathbf{q}_{na_i} = [\gamma_i, \alpha_i]^T$ (Fig. 3.22).

$$\left. \begin{aligned} (B_{x_i} - A_{x_i})^2 + (B_{y_i} - A_{y_i})^2 + (B_{z_i} - A_{z_i})^2 &= \mathbf{L}_i^2 \\ (B_{x_i} - C_{x_i})^2 + (B_{y_i} - C_{y_i})^2 + (B_{z_i} - C_{z_i})^2 &= (\mathbf{l}_i + \boldsymbol{\delta}_i)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

donde los subíndices $[\cdot]_x$, $[\cdot]_y$ y $[\cdot]_z$ hacen referencia a las coordenadas cartesianas x , y y z , respectivamente.

Una vez estimadas las coordenadas del punto \mathbf{B}_i , el vector \mathbf{l}_i puede ser calculado ($\mathbf{l}_i = \mathbf{B}_i - \mathbf{C}_i$) y por tanto, obtener directamente las variables articulares rígidas $\mathbf{q}_i = [\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_{na}]^T$ considerando la Eq. (3.87).

Por su parte, el Problema Cinemático Directo (DKP) permite calcular la posición del TCP, \mathbf{p}_x , en término de todas las variables conocidas (variables activas, \mathbf{q}_a , y las variables flexibles, q_f). Para ello, una vez más, se calcula la posición de los puntos \mathbf{B}_i , $i = 1 \cdots 3$ mediante la Eq. (3.90),

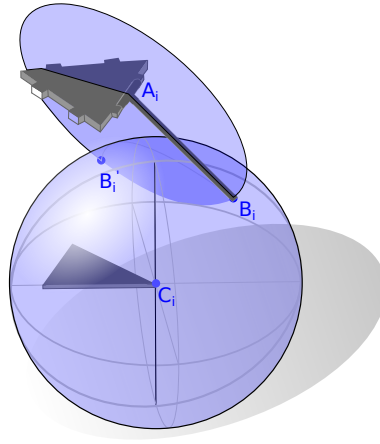


Figura 3.22: Intersección entre circunferencia descrita por el movimiento de L_i y la esfera definida por el movimiento del paralelogramo articulado I_i para el cálculo del Problema Cinemático Inverso.

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{L}_i \quad (3.90)$$

Una vez calculadas las coordenadas Cartesianas del punto \mathbf{B}_i , se calculan las coordenadas espaciales \mathbf{x} definiendo el siguiente sistema de restricción de distancias,

$$\left[\|\mathbf{l}_i\|^2 - (\mathbf{l}_i + \boldsymbol{\delta}_i)^2 \right]_{i=1,2,3} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (3.91)$$

el cual puede ser reformulado como (Fig. 3.23),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{l}_i\|^2 - & \left[\left(B_{x_i} - h_{b,2j_{max_i}+1}^u - d_{x_i} - p_{x_x} \right)^2 + \right. \\ & + \left(B_{y_i} - h_{b,2j_{max_i}+1}^v - d_{y_i} - p_{x_y} \right)^2 + \\ & \left. + \left(B_{z_i} - h_{b,2j_{max_i}+1}^w - d_{z_i} - p_{x_z} \right)^2 \right] = \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (3.92)$$

3.5.2.4. Problema de Velocidad

Las relaciones de velocidad que se utilizan en el desarrollo del modelo se obtienen mediante la derivación de la ecuación de cierre del sistema, Eq. (3.85), respecto del tiempo. A partir de esta derivada se obtiene la Jacobiana asociada a cada cadena cinemática, \mathbf{J}_i , que relaciona la derivada de las coordenadas espaciales, $\dot{\mathbf{x}}$, y la de las variables asociadas a cada cadena cinemática, $\dot{\mathbf{q}}_i$.

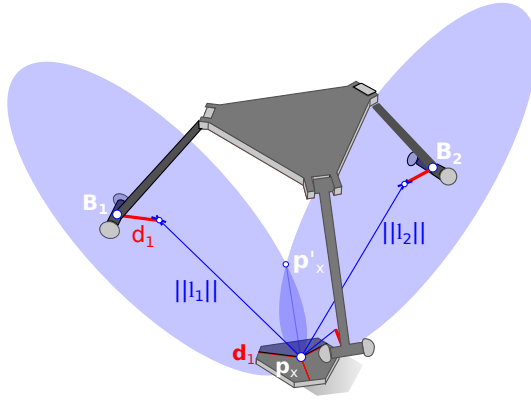


Figura 3.23: Intersección de las tres esferas descritas por el movimiento de l_i para el calculo del problema cinemático directo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_i(x, \mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial \Gamma_i(x, \mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{J}_{\mathbf{x}_i} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Como se puede observar Eq. (3.85), cada una de las ecuaciones de cierre está definida por las coordenadas de salida que definen la posición del TCP, \mathbf{p}_x ; las variables articulares rígidas, $\mathbf{q}_r = [\mathbf{q}_a \quad \boldsymbol{\gamma} \quad \boldsymbol{\alpha}]^T$, y por la variable flexible que define la deformación en el nodo más lejano a la base del último elemento (j_{max_i}) del eslabón inferior (l_i), $\boldsymbol{\delta}$. Por lo tanto, el número de las variables articulares, $n_r + n_{f_i}$, y el número de coordenadas de salida, n , no son las mismas, ya que $n_{f_i} > 0$. Es por ello que, tal y como se ha analizado en la Sección 3.4.1.3, la Jacobiana asociada a la cadena cinemática no es invertible. Para solventar este problema matemático, se aplica la consideración de pequeñas deformaciones. Por lo tanto, el valor de $\boldsymbol{\delta}$ varía poco y, por consiguiente, su primera y segunda derivada pueden considerarse constantes. Por lo tanto, a la hora de definir el problema de velocidad, solo se consideran las variables articulares rígidas $\dot{\mathbf{q}}_r$, siendo las Jacobianas asociadas a cada cadena cinemática definidas como,

$$\dot{\mathbf{q}}_r = -\mathbf{J}_{\mathbf{q}_r}^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{x}_i} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{x}} \quad (3.94)$$

Sustituyendo las expresiones de las Eqs. (3.86) y (3.87), se obtiene $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_i}$,

$$\mathbf{J}_{q_{r_i}} = \begin{bmatrix} \delta_i c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - L_i c(\beta_i) s(q_{a_i}) - l_i c(\alpha_i) c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \\ \delta_i s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - L_i s(\beta_i) s(q_{a_i}) - l_i c(\alpha_i) s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \\ -\delta_i s(q_{a_i} + \gamma_i) - L_i c(q_{a_i}) - l_i c(\alpha_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) \\ \delta_i c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - l_i c(\alpha_i) c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \\ \delta_i s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - l_i c(\alpha_i) s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \\ -\delta_i s(q_{a_i} + \gamma_i) - l_i c(\alpha_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) \\ -l_i [s(\alpha_i) c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) + c(\alpha_i) s(\beta_i)] \\ -l_i [s(\alpha_i) s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - c(\alpha_i) c(\beta_i)] \\ l_i s(\alpha_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

y \mathbf{J}_{x_i} ,

$$\mathbf{J}_{x_i} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

donde $i = 1, 2, 3$ y $s(\cdot)$ y $c(\cdot)$ son dos operadores definidos como $\sin(\cdot)$ y $\cos(\cdot)$, respectivamente.

A partir de estas dos Jacobianas (Eq. (3.95) y Eq. (3.96)) y siguiendo las relaciones definidas en las Secciones 3.4.1.3, se obtienen el resto de relaciones de velocidad.

3.5.2.5. Problema de aceleración

Del mismo modo que las relaciones de velocidad, las relaciones de aceleración se pueden obtener mediante la derivada respecto del tiempo de las ecuaciones de velocidad obtenidas en la sección anterior. Por lo tanto, derivando la Eq. (3.94).

$$\mathbf{J}_{q_{r_i}} \ddot{\mathbf{q}}_{r_i} + \mathbf{J}_{x_i} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_{q_{r_i}} \dot{\mathbf{q}}_{r_i} + \dot{\mathbf{J}}_{x_i} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (3.97)$$

Reorganizando los términos de la Eq. (3.97) y considerando los términos de la Eq. (3.94), se obtiene la derivada de la Jacobiana asociada a la cadena cinemática i , $i = 1, 2, 3$, como,

$$\dot{\mathbf{J}}_i = -\mathbf{J}_{q_{r_i}}^{-1} \left(\dot{\mathbf{J}}_{x_i} + \dot{\mathbf{J}}_{q_{r_i}} \mathbf{J}_i \right) \quad (3.98)$$

donde $\dot{\mathbf{J}}_{x_i}$ es una matriz nula de 3×3 y $\dot{\mathbf{J}}_{q_{r_i}}$ se define como,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(1, 1) = & \dot{\delta}_i c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - \dot{\gamma}_i [\delta_i c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + l_i c(\alpha_i) c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & - \dot{q}_{a_i} [\delta_i c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + L_i c(\beta_i) c(q_{a_i}) + l_i c(\alpha_i) c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & + \dot{\alpha}_i l_i s(\alpha_i) c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(1, 2) = & \dot{\delta}_i c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - \dot{\gamma}_i [\delta_i c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + l_i c(\alpha_i) c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & + \dot{q}_{a_i} [\delta_i c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + l_i c(\alpha_i) c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & + \dot{\alpha}_i l_i s(\alpha_i) c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(1, 3) = & \dot{\gamma}_i l_i s(\alpha_i) c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + \dot{q}_{a_i} l_i s(\alpha_i) c(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \\ & + \dot{\alpha}_i l_i [s(\alpha_i) s(\beta_i) - c(\alpha_i) c(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(2, 1) = & \dot{\delta}_i s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - \dot{\gamma}_i [\delta_i s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + l_i c(\alpha_i) s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & - \dot{q}_{a_i} [\delta_i s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + L_i s(\beta_i) c(q_{a_i}) + l_i c(\alpha_i) s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & + \dot{\alpha}_i l_i s(\alpha_i) s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(2, 2) = & \dot{\delta}_i s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) - \dot{\gamma}_i [\delta_i s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + l_i c(\alpha_i) s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & - \dot{q}_{a_i} [\delta_i s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + l_i c(\alpha_i) s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & + \dot{\alpha}_i l_i s(\alpha_i) s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(2, 3) = & \dot{\gamma}_i l_i s(\alpha_i) s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) + \dot{q}_{a_i} l_i s(\alpha_i) s(\beta_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \\ & - \dot{\alpha}_i l_i [s(\alpha_i) c(\beta_i) + c(\alpha_i) s(\beta_i) c(q_{a_i} + \gamma_i)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(3, 1) = & -\dot{\delta}_i s(q_{a_i} + \gamma_i) - \dot{\gamma}_i [\delta_i c(q_{a_i} + \gamma_i) - l_i c(\alpha_i) s(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & + \dot{q}_{a_i} [-\delta_i c(q_{a_i} + \gamma_i) + L_i s(q_{a_i}) + l_i c(\alpha_i) s(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & + \dot{\alpha}_i l_i s(\alpha_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(3, 2) = & -\dot{\delta}_i s(q_{a_i} + \gamma_i) - \dot{\gamma}_i [\delta_i c(q_{a_i} + \gamma_i) - l_i c(\alpha_i) s(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & - \dot{q}_{a_i} [\delta_i c(q_{a_i} + \gamma_i) - l_i c(\alpha_i) s(q_{a_i} + \gamma_i)] \\ & + \dot{\alpha}_i l_i s(\alpha_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{q_i}(3, 3) = & \dot{\gamma}_i l_i s(\alpha_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) + \dot{q}_{a_i} l_i s(\alpha_i) c(q_{a_i} + \gamma_i) \\ & + \dot{\alpha}_i l_i c(\alpha_i) s(q_{a_i} + \gamma_i) \end{aligned} \tag{3.99}$$

A partir de estas Jacobianas (Eq. (3.99), Eq. (3.95) y Eq. (3.96)) y siguiendo las relaciones definidas en la Sección 3.4.1.4, se obtienen el resto de relaciones de aceleración.

3.5.2.6. Problema Dinámico

Una vez resuelto el problema cinemático, se procede al cálculo del problema dinámico. Para ello, tal y como se ha desarrollado en el procedimiento propuesto en la sección anterior, se ha utilizado la formulación Lagrangiana, la cual permite definir el modelo dinámico en base a cualquier conjunto de variables y evitar el cálculo de las fuerzas internas.

3.5.2.7. Análisis energético de la plataforma móvil

El manipulador Delta es un mecanismo paralelo diseñado para movimientos puramente de traslación. Sin embargo, debido a la flexibilidad de los eslabones inferiores, la plataforma móvil puede estar sujeta a rotaciones. Pese a ello, considerando la suposición de pequeñas deformaciones, las rotaciones que sufre la plataforma son prácticamente despreciables, y por consiguiente su velocidad angular puede ser considerada cero, $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Por lo tanto, la componente cinemática de la contribución de la plataforma móvil se simplifica a,

$$T_{mp} = \frac{1}{2} (m_p + m_c) \dot{\mathbf{p}}_x^T \dot{\mathbf{p}}_x \quad (3.100)$$

donde m_p es la masa de la plataforma móvil y \mathbf{I}_p su inercia y m_c y \mathbf{I}_c son la masa y la inercia de la carga colocada en el centro de la plataforma, respectivamente.

Por su parte, la componente potencial de la plataforma móvil se define como,

$$V_{mp} = (m_p + m_l) \mathbf{g} \mathbf{p}_x \quad (3.101)$$

donde \mathbf{g} es el vector de gravedad y \mathbf{p}_x es el vector de posición del TCP.

3.5.2.8. Análisis energético de la cadena cinemática

La metodología para el cálculo de las energías cinéticas y potencial de las cadenas cinemáticas se basa en la metodología expuesta en las secciones anteriores. Para ello, en primer lugar se ha de calcular el vector de posición \mathbf{r} (Eq. (3.46)). Nótese, que para el caso de estudio que se está proponiendo en esta sección, los eslabones superiores están considerados rígidos, mientras que los inferiores están sujetos a deformaciones. Por lo tanto, en esta sección cada eslabón será considerado por separado.

Eslabones superiores

Siendo los eslabones superiores rígidos, el vector de posición \mathbf{r} se define siguiendo la Eq. (3.53). Para ello, en primer lugar hay que definir las matrices de transformación

\mathbf{T}_i^0 y $\hat{\mathbf{T}}_i^0$, las cuales se definen en base a los sistemas de referencia definidos en la Fig. 3.24.

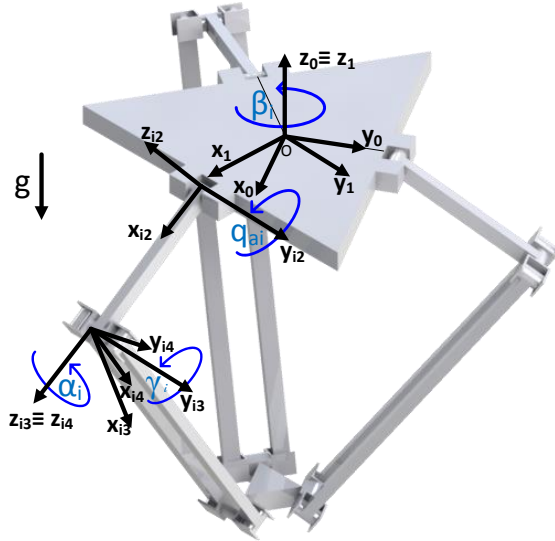


Figura 3.24: Cálculo de la posición geométrica del punto \mathbf{B}_j .

De esta manera, las matrices de transformación que relacionan el sistema de referencia inercial y la base del primer eslabón de la cadena cinemática i se define como,

$$\hat{\mathbf{T}}_2^{0_i} = \mathbf{T}_2^{0_i} = \begin{bmatrix} c(\beta_i) c(q_{a_i}) & -s(\beta_i) & c(\beta_i) s(q_{a_i}) & a_i c(\beta_i) \\ s(\beta_i) c(q_{a_i}) & c(\beta_i) & s(\beta_i) s(q_{a_i}) & a_i s(\beta_i) \\ -s(q_{a_i}) & 0 & c(q_{a_i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Una vez definidas las matrices de transformación, se puede calcular la expresión de la energía cinética, Eq. (3.56), basándose en la definición del vector de posición auxiliar rígido definido (Eq. 3.53),

$$\mathbf{r}_{1_i} = \begin{bmatrix} x_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Por lo tanto, la energía cinética del eslabón superior se define como,

$$T_{1_i} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \rho A_{1_i} \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dx = \frac{1}{6} \rho A_{1_i} L_i^3 \dot{q}_{a_i}^2 \quad (3.104)$$

Finalmente, se procede al cálculo de la energía potencial del eslabón superior. Al tratarse de eslabones rígidos, la energía potencial solo contempla la componente gravitacional, ya que la componente elástica definida en la Eq. (3.54) se considera nula. Por lo que la expresión se define como,

$$V_{1i} = \int_0^{L_i} \rho A_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{r} dx = -\frac{1}{2} \rho A_{1i} g L_i^2 \sin(q_{a_i}) \quad (3.105)$$

Eslabones inferiores

Los eslabones inferiores, por su parte, se han definido como flexibles. Por lo tanto, siguiendo la metodología propuesta, en primer lugar se calculan las matrices de transformación, tanto la rígida T_4^{0i} como la flexible \widehat{T}_4^{0i} .

Sin embargo, como el eslabón anterior en la cadena cinemática, el eslabón superior, es rígido, la matriz asociada a la deformación, E_4^{0i} , esta simplificada a una matriz de identidad 4x4, y por consiguiente tanto T_4^{0i} como \widehat{T}_4^{0i} se definen como (Fig. 3.7),

$$\widehat{T}_4^{0i} = T_4^{0i} = \begin{bmatrix} c\beta_i c\alpha_i c(q_{a_i} + \gamma_i) - s\beta_i s\alpha_i & -c\beta_i s\alpha_i c(q_{a_i} + \gamma_i) - s\beta_i c\alpha_i \\ s\beta_i c\alpha_i c(q_{a_i} + \gamma_i) + c\beta_i s\alpha_i & -s\beta_i s\alpha_i c(q_{a_i} + \gamma_i) + c\beta_i c\alpha_i \\ -c\alpha_i s(q_{a_i} + \gamma_i) & c(q_{a_i} + \gamma_i) \\ 0 & 0 \\ c\beta_i s(q_{a_i} + \gamma_i) & c\beta_i (L_i c(q_{a_i}) + a_i) \\ s\beta_i s(q_{a_i} + \gamma_i) & s\beta_i (L_i c(q_{a_i}) + a_i) \\ c(q_{a_i} + \gamma_i) & -L_i s(q_{a_i}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

de donde se obtiene la matriz de rotación \widehat{R}_4^{0i} y el vector de la posición del punto final del eslabón anterior, \mathbf{p}_2^{0i} , siguiendo las Eqs. (3.47) y (3.48).

Como se ha detallado anteriormente, los eslabones que componen el paralelogramo articulado han sido sustituidos por pletinas de aluminio, para aumentar el efecto de la deformación en los eslabones. Estas pletinas son mucho más largas (0.4m) y anchas (0.015m) que altas (0.003m). Por lo tanto, las deformaciones en el eje z, es decir $w_{2j_i}(x, t)$ son mucho mayores (en torno a 30 veces mayores según las simulaciones en MSC.Adams) a las que están sometidos los ejes x e y. Por lo tanto, para simplificar el modelo, se asume que las deformaciones a las que están sometidos los eslabones inferiores están limitadas al eje z, simplificando el vector de posición auxiliar definido en la Eq. (3.50) a,

$$\mathbf{r}_{2i} = \begin{bmatrix} (j-1) l_{2j_i} + x_{2j_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{2j_i}(x, t) \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

donde $w_{2j_i}(x, t)$ esta definido en la Eq. (3.52).

Nótese que según el Método de Elementos Finitos se requiere definir el número de elementos por eslabón flexible. En este sentido, Tsujisawa sugiere en [229] que para los robots manipuladores un número pequeño de modos (dos o tres) eran suficientes para representar la dinámica de los eslabones flexibles. Además, según Przemieniecki en [178], los primeros m modos de vibración se obtienen con suficiente precisión a partir de un modelo FEM de m elementos. Por lo tanto, para el caso de estudio del Robot Delta se han utilizado modelos FEM de tres elementos ($j = 1..3$), definiendo ocho GDL flexibles para cada elemento ($\mathbf{q}_f = [h_{21}^w, h_{22}^w, \dots, h_{28}^w]^T$), tal y como se aprecia en la Fig. 3.25.

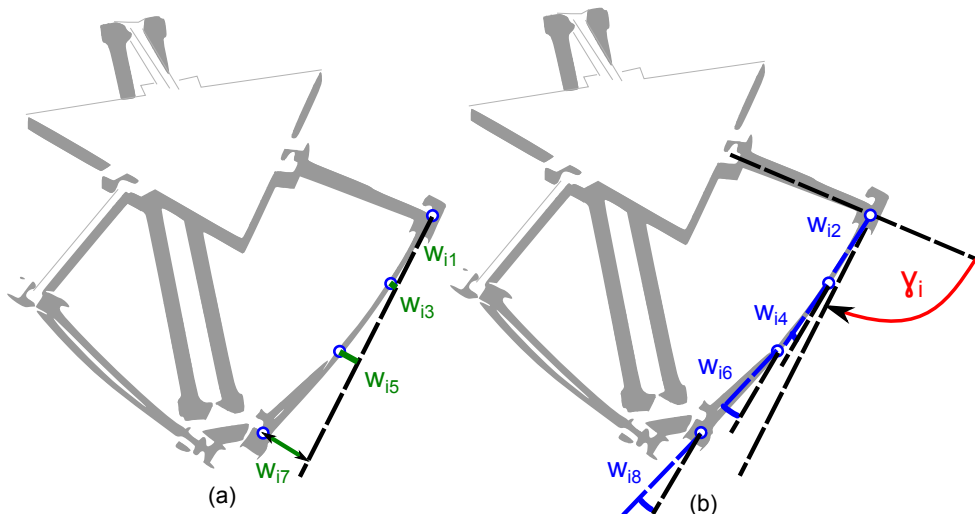


Figura 3.25: Grados de libertad flexibles: a) Distancia de la deformación y b) Pendiente de la deformación.

Una vez definidas las matrices de transformación y los vectores de posición auxiliares, la energía potencial y cinética de los eslabones flexibles se calcula utilizando la Eq. (3.54) y la Eq. (3.56), respectivamente.

3.5.2.9. Ecuaciones de movimiento del Robot Delta

Una vez obtenidas las expresiones de energía de cada subsistema, se puede calcular la ecuación de movimiento asociado a cada subsistema (plataforma móvil y cadenas cinemáticas) aplicando la Formulación de Lagrange [228].

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} + \mathbf{G}_q &= \left[\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\tau}_q \\
 \mathbf{M}_x \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_x &= \left[\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}_x
 \end{aligned}
 \tag{3.108}$$

donde el subíndice q hace referencia a las matrices que definen las ecuaciones de movimiento de las cadenas cinemáticas y las cuales están definidas por las variables articulares (tanto rígidas como flexibles); el subíndice x hace referencia a las matrices que modelan la ecuación de movimiento de la plataforma móvil, definida mediante coordenadas espaciales; λ es el vector de multiplicadores de Lagrange y $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ es la ecuación de cierre definida en la Eq.(3.85).

Para poder resolver el sistema de la Eq. (3.108), se tienen que definir las Condiciones de Contorno (BC) de cada eslabón flexible. Para ello es sabido que el número de BC necesarios para resolver la ecuación diferencial es el mismo que el orden de ésta. Por lo tanto, como los eslabones flexibles están modelados mediante la Teoría de Euler Bernoulli, la cual se define mediante una ecuación diferencial de cuarto orden, se requieren cuatro Condiciones de Contorno por cada eslabón flexible para poder resolver la ecuación de movimiento del robot.

Según la literatura existente, se pueden aplicar diferentes BC en función de la configuraciones de los elementos. Las Condiciones de Contorno asociadas a vigas simplemente apoyadas en ambos extremos, por ejemplo, se han utilizado para el control de posición del TCP de robots [13], ya que son fáciles de implementar. Las BC asociadas a ambos extremos libres, por el contrario, se han implementado para variables de movimientos rígidos [18]. Por último, otros autores, han considerado los eslabones flexibles como vigas empotradas, demostrando que esta suposición simplifica las medidas de las variables articulares y el cálculo de los pares requeridos [28, 235].

Por su parte, basándose en los resultados experimentados recogidos en [98] y en [16], si el ratio entre la inercia de la viga y el eje es muy pequeño (al menos diez veces más pequeño), las Condiciones de Contorno asociadas a la viga empotrada ofrecen mejores resultados que los asociados a la viga con ambos extremos libres. Por lo tanto, para el caso de estudio analizado, se han utilizado las Condiciones de Contorno asociadas a la viga empotrada:

- La base del eslabón no sufre desplazamiento debido a la flexión: $w_{21_i}(0, t) = 0$.
- El eslabón no sufre deformación en su base, por lo que la derivada de ésta será cero en dicho punto: $\frac{\partial w_{21_i}(0, t)}{\partial x} = 0$.
- El extremo final del eslabón no sufre momento flector: $\frac{\partial^2 w_{27_i}(l_i, t)}{\partial x^2} = 0$.
- No se ejercen fuerzas cortantes en el extremo final del eslabón: $\frac{\partial^3 w_{27_i}(l_i, t)}{\partial x^3} = 0$.

Si las Condiciones de contorno se introducen al modelo de los eslabones flexibles,

- Si $w_{21_i}(0, t) = 0$, entonces $w_{21_1} = w_{21_2} = w_{21_3} = 0$.
- Si $\frac{\partial w_{21_i}}{\partial x} = 0$, entonces $w_{22_1} = w_{22_2} = w_{22_3} = 0$.

por lo tanto, las filas y columnas asociadas a las variables $w_{j1} = w_{22_i} = 0$ de las matrices dinámicas \mathbf{M}_q , \mathbf{C}_q , \mathbf{K}_q y \mathbf{G}_q para $i = 1, 2, 3$ pueden ser eliminadas.

Una vez introducidas las Condiciones de Contorno en las ecuaciones de movimiento, y manipulando la Eq. (3.108) se pueden obtener el modelo dinámico del robot de forma cerrada. Por lo tanto, si se combinan ambas ecuaciones y se eliminan los Multiplicadores de Lagrange λ , se obtiene,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} + \mathbf{G}_q - \\ & - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]^\dagger (\mathbf{M}_x \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_x - \mathbf{Q}_x) \end{aligned} \quad (3.109)$$

donde la derivada parcial de la ecuación de cierre puede ser calculada según la Eq. (3.69), reescribiendo la Eq. (3.109) como,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} + \mathbf{G}_q - \\ & - \mathbf{J}_q^\dagger (\mathbf{M}_x \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_x - \mathbf{Q}_x) \end{aligned} \quad (3.110)$$

3.5.2.10. Validación en Simulación

En esta sección, se analiza la precisión del modelo flexible del Robot Delta desarrollado en el apartado anterior. Para ello, se ha validado el Modelo Dinámico Inverso comparando los pares estimados en la Eq. (3.110) con los obtenidos mediante el Software Mutibody MSC.Adams.

En dicha validación, el Robot Delta, cuyos parámetros principales están resumidos en las Tablas 3.2 y 3.3, se ha excitado mediante frecuencias no simétricas que abarcan todo el espectro frecuencial en el que puede trabajar el robot. Para ello, se han aplicado movimientos sinusoidales de diferentes frecuencias a cada una de las articulaciones actuadas, tal que,

$$q_1 = 0.5 \sin(2 \pi \omega_{q_1} t) \quad q_2 = 0.5 \sin(2 \pi \omega_{q_2} t) \quad q_3 = 0.5 \sin(2 \pi \omega_{q_3} t) \quad (3.111)$$

donde las frecuencias vienen definidas por $\omega_{q_1} = 3 \text{ rad/s}$, $\omega_{q_2} = 0.753 \text{ rad/s}$, $\omega_{q_3} = 1.23 \text{ rad/s}$ y t es el tiempo, el cual está definido entre 0 y 5s con un tiempo de muestreo de $T_s = 10^{-5} \text{ s}$.

A partir de la simulación del modelo en MSC.Adams, se obtienen tanto la posición, velocidad y aceleración de cada una de las variables del modelo (\mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$) como el par requerido para obtener el movimiento en las articulaciones ($\boldsymbol{\tau}_{medido}$). Una vez obtenidos todos los datos, el Modelo Dinámico Inverso desarrollado en el apartado anterior se alimenta de ellos para estimar matemáticamente el par ($\boldsymbol{\tau}_{estimada}$), tal y como se observa en la Fig. 3.26.

El software Multibody MSC.Adams, entre otras muchas opciones, permite sensorizar cualquier elemento, pudiendo obtener una gran variedad de señales, tales como su posición, velocidad, aceleración, fuerzas soportadas, etc. Por lo tanto, aprovechando que se dispone de todos los datos cinemáticos del robot, en primer lugar se han

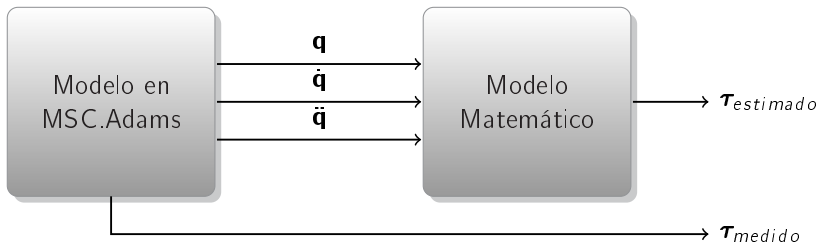


Figura 3.26: Diagrama de bloques del proceso de validación del modelo dinámico del robot Delta.

validado las relaciones de velocidad y aceleración definidas mediante las diferentes Jacobianas desarrolladas en las Sección 3.5.2.1. Para ello, se han estimado diferentes velocidades y aceleración a partir de otras conocidas para posteriormente comparar gráficamente las estimaciones con los datos de obtenidos mediante MSC.Adams.

Validación de J_{q_r} : Problema de velocidad inverso

En la Sección 3.4.1.3, la primera matriz definida es la Jacobiana de las variables articulares, J_{q_r} . Ésta, permite obtener las derivadas de las variables rígidas, \dot{q}_r , a partir del vector de velocidad de las coordenadas de salidas, \mathbf{x} . Por lo tanto, a partir de las velocidades de la plataforma móvil medidos por los sensores implementados en MSC.Adams se han estimado las velocidades angulares de las articulaciones activas, \dot{q}_a . Una vez estimadas las velocidades angulares, éstas son comparadas en la Fig. 3.27 con las señales medidas mediante MSC.Adams.

Tal y como se puede apreciar, la estimación que se ha obtenido es altamente precisa, ofreciendo un error máximo de 0,0108 rad/s, 0,0103 rad/s y 0,0104 rad/s para cada cadena cinemática $i = 1, 2$ y 3, respectivamente; lo que supone un error máximo porcentual del 0,0571 %, 0,0728 % y 0,0459 %. Sin embargo, el error medio baja al 0,0169 %, 0,0248 % y 0,0129 %, ya que éste está en torno a 0,0030 rad/s (0,0032 rad/s, 0,0035 rad/s y 0,0029 rad/s, respectivamente).

Del mismo modo, y a partir de la misma Jacobiana, se pueden obtener las velocidades angulares de las variables no actuadas o pasivas, $\dot{\gamma}$ y $\dot{\alpha}$.

En la Fig. 3.28 se puede observar como, al igual que en el caso de la velocidad angular de las articulaciones actuadas, la velocidad de las articulaciones pasivas $\dot{\gamma}$, $\dot{\gamma}$, se estima con gran precisión, siendo el error medio de 0,0363 rad/s, 0,0325 rad/s y 0,0490 rad/s, para cada cadena cinemática $i = 1, 2$ y 3, lo que significa un 0,2175 %, 0,2033 % y un 0,2674 % de la amplitud máxima. De la misma forma, los errores máximos están limitados a 0,4 rad/s, lo que supone un 2 % de la amplitud de la señal.

Las últimas variables articulares (pasivas), α , también se han comparado, obteniendo resultados igualmente buenos como se puede apreciar en la Fig. 3.29. En ella se puede ver como la estimación tiene un error máximo del 0,0281 %, 0,0313 % y 0,0257 % respectivamente en cada pata/cadena cinemática (0,0038 rad/s, 0,0048

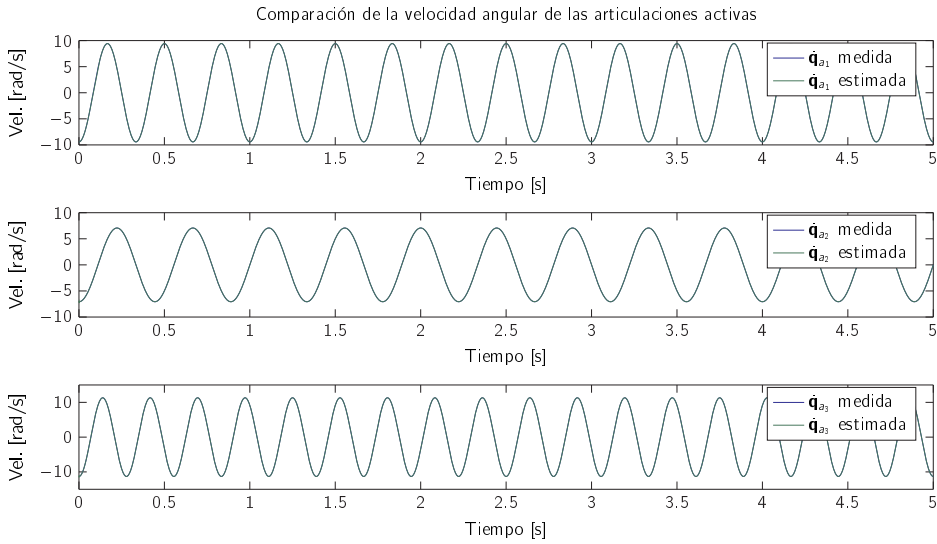


Figura 3.27: Comparación de la evolución de la velocidad articular de la cadena cinemática 1, 2 y 3 medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.

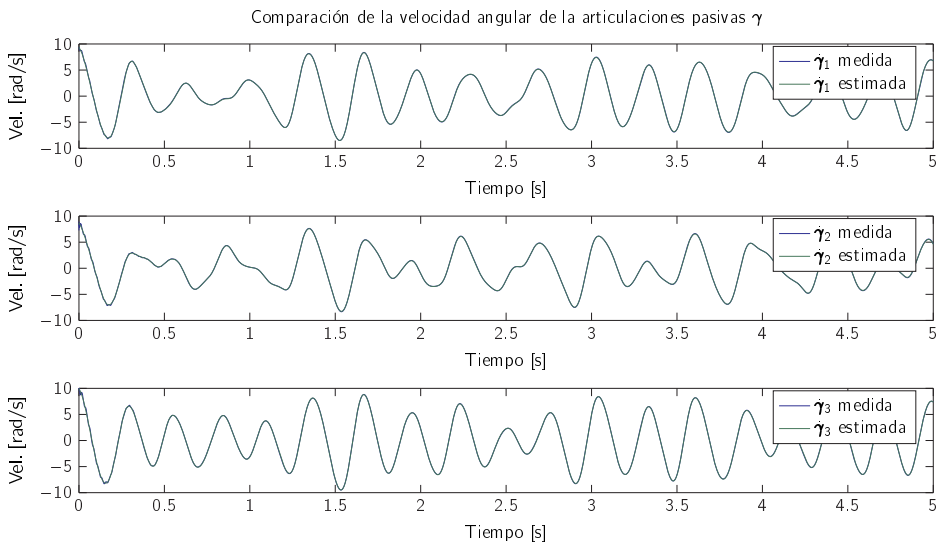


Figura 3.28: Comparación de la evolución de la velocidad angular de γ medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables de las cadenas cinemáticas (o patas) 1, 2 y 3, respectivamente.

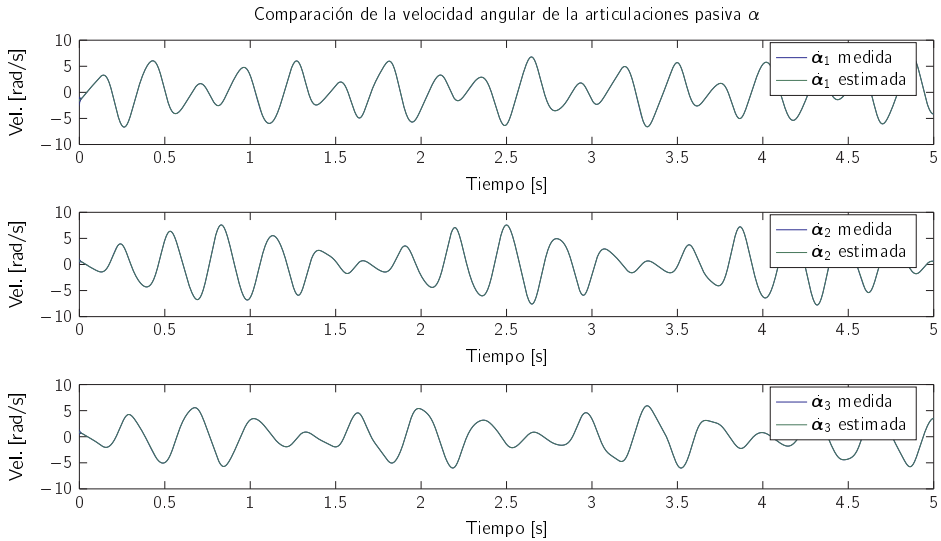


Figura 3.29: Comparación de la evolución de la velocidad angular de α_i medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.

rad/s y $0,0031 rad/s$) y medio del $0,0094\%$, $0,0091\%$ y $0,0073\%$ ($0,0013 rad/s$, $0,0014 rad/s$ y $0,0009 rad/s$) para cada una de las cadenas cinemáticas $i = 1, 2$ y 3 , respectivamente.

En las Tablas 3.4 y 3.5 se exponen de forma resumida los errores entre ambos modelos (simulado en Adams y el analítico propuesto) tanto en valor absoluto (Tabla 3.4) como en valor porcentual (Tabla 3.5). Como se puede apreciar, en todos los casos la estimación es muy precisa siendo el error medio inferior a $0,05 rad/s$. Sin embargo, se observa que el mayor error medio se produce a la hora de estimar la velocidad de las variables pasivas γ , siendo éste del orden de diez veces mayor que el error medio de estimación de las otras dos variables. Este incremento del error se debe, principalmente, a la aproximación rígida efectuada en la Eq. (3.26).

Validación de J_p : Problema de Velocidad directo

Una vez definidas y validadas las Jacobianas de las variables articulares, la metodología propuesta estipula el cálculo de la Jacobiana de la plataforma, J_p . Esta Jacobiana, al contrario que la de las variables articulares, estima la velocidad de las coordenadas de salida, $\dot{\mathbf{x}}$, a partir de la velocidad de las variables articulares actuadas, $\dot{\mathbf{q}}_a$.

Por lo tanto, para su validación, se han tomado las aceleraciones angulares de las articulaciones activas y se ha procedido a estimar las velocidades lineales de la plataforma. Siguiendo el procedimiento utilizado para la validación de las Jacobianas de las variables articulares, en la Fig. 3.30 se puede comparar la señal estimada con la obtenida a partir de la medición realizada en MSC.Adams.

	Cadena	$\dot{\mathbf{q}}_a$ [rad/s]	$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ [rad/s]	$\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ [rad/s]
Error Máximo	$i = 1$	0,0108	0,2568	0,0038
	$i = 2$	0,0103	0,3037	0,0048
	$i = 3$	0,0104	0,4144	0,0031
Error Medio	$i = 1$	0,0032	0,0377	0,0013
	$i = 2$	0,0035	0,0325	0,0014
	$i = 3$	0,0029	0,0490	0,0009

Tabla 3.4: Tabla resumen de los errores en la estimación de las velocidades de las variables articulares.

	Cadena	$\dot{\mathbf{q}}_a$ [%]	$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ [%]	$\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ [%]
Error Máximo	$i = 1$	0,0571	1,5212	0,0281
	$i = 2$	0,0728	1,9006	0,0313
	$i = 3$	0,0459	2,2615	0,0257
Error Medio	$i = 1$	0,0169	0,2152	0,0094
	$i = 2$	0,0248	0,2033	0,0091
	$i = 3$	0,0129	0,2674	0,0073

Tabla 3.5: Tabla resumen de los errores porcentuales respecto de la amplitud máxima en la estimación de las velocidades de las variables articulares.

Como se puede observar, una vez más la estimación realizada es altamente precisa, con un error máximo de $0,0008 \text{ m/s}$, $0,0009 \text{ m/s}$ y $0,0015 \text{ m/s}$ ($0,0129 \%$, $0,0175 \%$ y $0,0526 \%$ de la amplitud) para cada cadena cinemática $i = 1, 2$ y 3 , respectivamente. El error medio, por su parte, se reduce a $0,0002101 \text{ m/s}$, $0,0002383 \text{ m/s}$, $0,0004417 \text{ m/s}$, lo que significa un error medio porcentual del $0,0036 \%$, $0,0044 \%$ y $0,0155 \%$ de la amplitud.

Validación del problema de aceleración

Tras el problema de velocidad, la metodología aborda el problema de aceleración, para el cual se derivan las Jacobianas utilizadas anteriormente. A partir de dichas derivadas se pueden obtener nuevas matrices que relacionan las aceleraciones de las diferentes variables. Por lo tanto, bajo el mismo procedimiento, se pueden comparar las aceleraciones angulares de las articulaciones estimadas a partir de las aceleraciones de la plataforma y las aceleraciones medidas mediante MSC.Adams, tal y como se aprecia en las Fig. 3.31, 3.32 y 3.33.

Una vez más, se puede observar que en todos los casos la estimación es precisa. En las Tablas 3.6 y 3.7 se muestran los errores máximos y medios para cada una de las variables tanto en valor absoluto como porcentual. Comparando ambas tablas con las Tablas 3.4 y 3.5, se puede apreciar como, si bien el error ha aumentado en

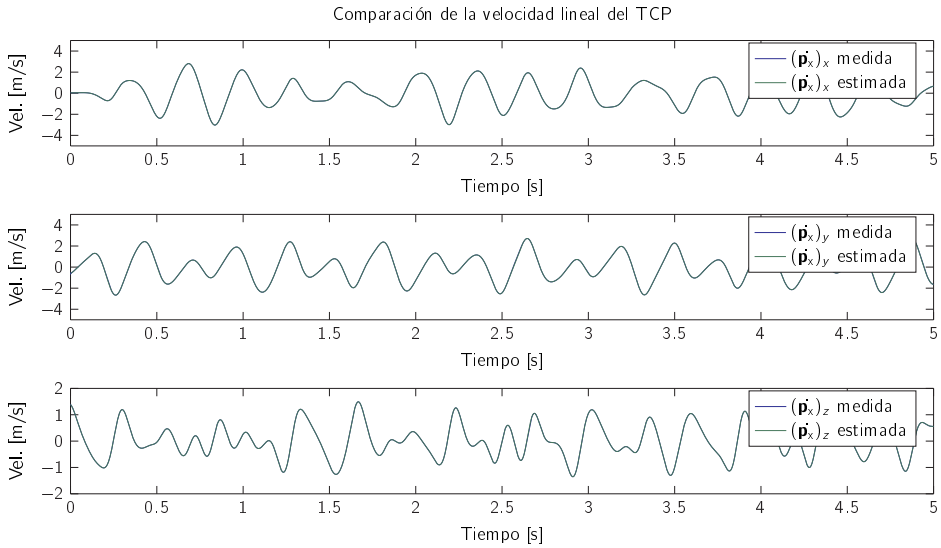


Figura 3.30: Comparación de la evolución de la velocidad lineal del TCP medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.

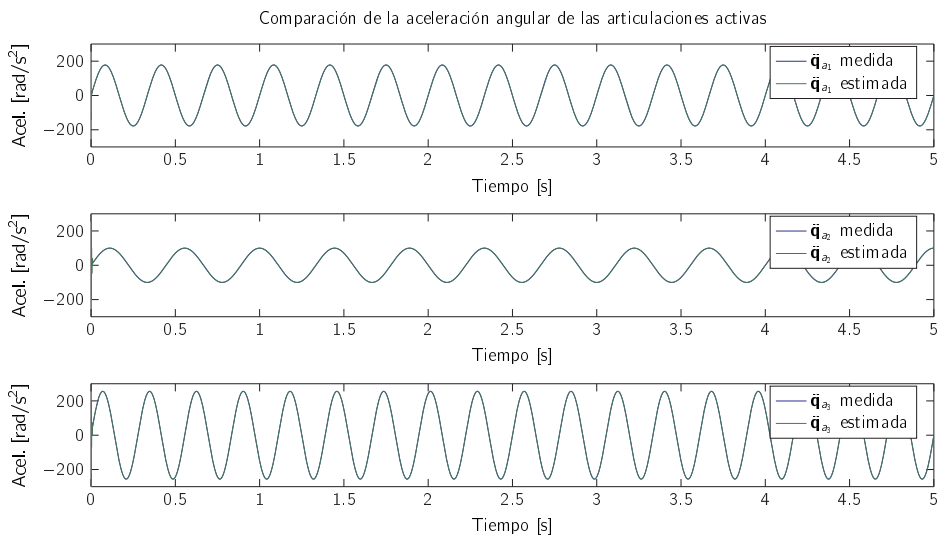


Figura 3.31: Comparación de la evolución de las aceleraciones articulares actuadas medidas y las estimadas mediante las Jacobianas de las variables articulares.

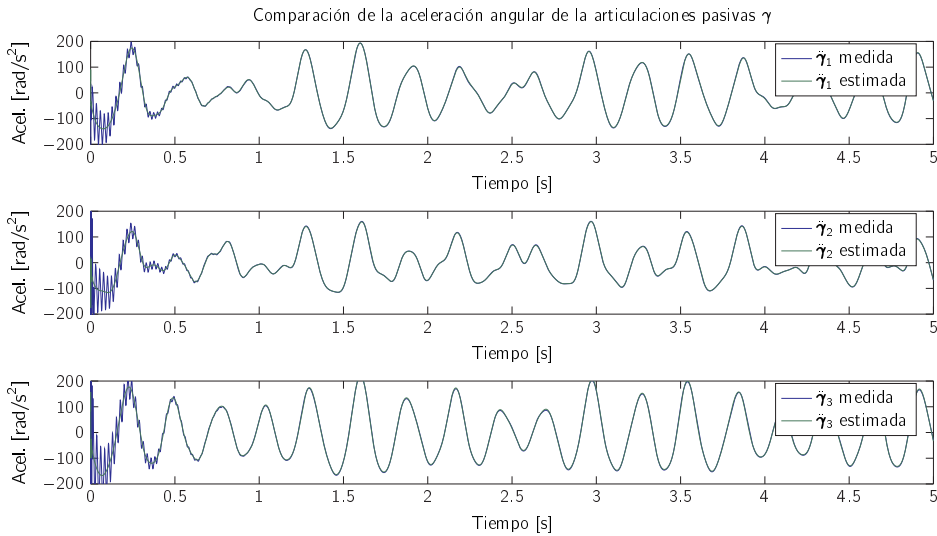


Figura 3.32: Comparación de la evolución de la aceleración articular pasiva γ de cada cadena cinemática del Delta medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.

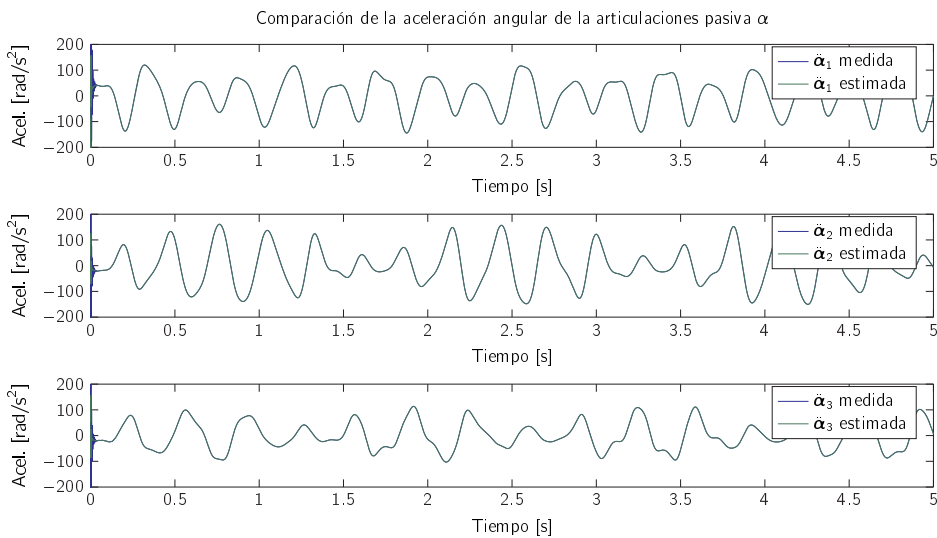


Figura 3.33: Comparación de la evolución de aceleración articular pasiva α de cada cadena cinemática del Delta medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.

la estimación de las aceleraciones, porcentualmente éste se mantiene en el mismo orden de magnitud que en el caso de la estimación de velocidades. En el caso de la aceleración, al igual que en el de velocidad, la estimación de la aceleración de la variable articular γ , es entorno a un orden de magnitud mayor que el resto de variables. Pese a ello, dicho error no deja de ser poco significativo ya que éste no alcanza el 0.5 % en el peor de los casos.

	Cadena	$\dot{\mathbf{q}}_a [rad/s^2]$	$\dot{\gamma} [rad/s^2]$	$\dot{\alpha} [rad/s^2]$
Error Máximo	$i = 1$	0,4687	3,5791	0,2519
	$i = 2$	0,4573	2,9842	0,1785
	$i = 3$	0,4391	4,8598	0,2194
Error Medio	$i = 1$	0,1645	1,2059	0,0461
	$i = 2$	0,1653	0,9097	0,0456
	$i = 3$	0,1514	1,9358	0,0429

Tabla 3.6: Tabla resumen de los errores en la estimación de las aceleraciones de las variables articulares.

	Cadena	$\dot{\mathbf{q}}_a [\%]$	$\dot{\gamma} [\%]$	$\dot{\alpha} [\%]$
Error Máximo	$i = 1$	0,1319	1,0769	0,0964
	$i = 2$	0,2288	1,0805	0,0571
	$i = 3$	0,0858	1,2608	0,1008
Error Medio	$i = 1$	0,0463	0,3628	0,0177
	$i = 2$	0,0827	0,3294	0,0146
	$i = 3$	0,0296	0,5022	0,0197

Tabla 3.7: Tabla resumen de los errores porcentuales respecto a la amplitud máxima en la estimación de las aceleraciones de las variables articulares.

Validación de la Jacobiana de aceleración de la plataforma

Por último, y para finalizar la validación del problema cinemático, se ha procedido a la validación de la Jacobiana de aceleración de la plataforma. Esta Jacobiana permite estimar las aceleraciones de la plataforma a partir de las aceleraciones de las variables articulares activas.

En la Fig. 3.34 se puede apreciar la validez de dicha estimación, donde los errores máximos (0,0547 m/s^2 , 0,0605 y 0,0702) no llegan al 0,1 % de la amplitud y los errores medios se reducen al 0,0130 %, 0,0145 % y 0,0332 % de la amplitud.

Validación del modelo dinámico

Tras la validación del problema cinemático, se procede a validar el problema dinámico,

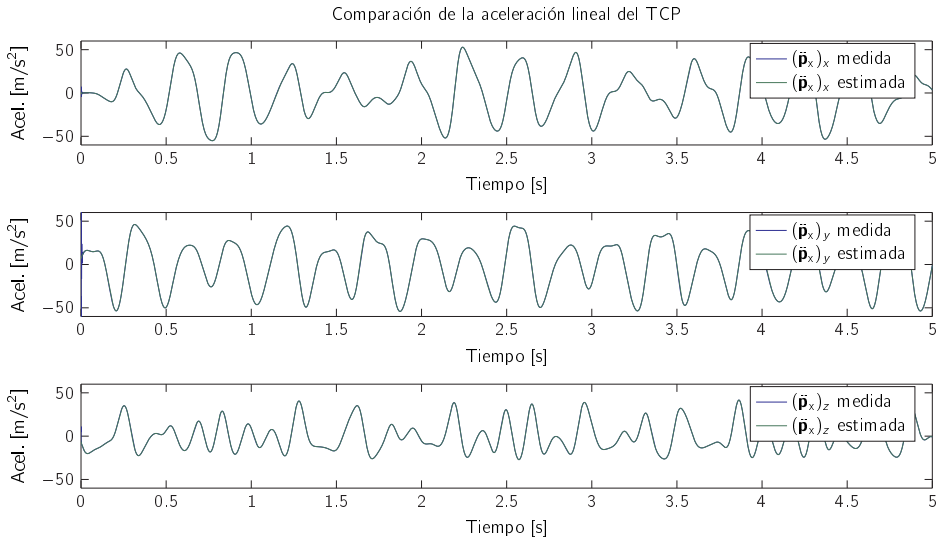


Figura 3.34: Comparación de la evolución de la aceleración lineal del TCP medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.

tal y como detalla la metodología presentada. Para ello, se ha utilizado la trayectoria descrita en la Eq. (3.111), y se aplicará diferentes cargas a la plataforma móvil del Robot Delta.

En primer lugar, se ha definido un escenario en donde el robot trabaja en ausencia de carga. Ante dicho escenario, y siguiendo el procedimiento descrito por la Fig. 3.4, se han comparado los pares estimados mediante el modelo dinámico y los pares medidos a partir del software Multibody MSC.Adams. Para ello, ambas señales se han graficado conjuntamente en la Fig. 3.35.

Tal y como se aprecia en la Fig. 3.35, el modelo desarrollado es capaz de estimar de forma precisa la dinámica del sistema. En la Fig. 3.36, por su parte, se ha graficado el error entre ambas señales. En ella se aprecia como el error máximo para cada una de las cadenas cinemáticas $i = 1, 2$ y 3 es $0,258 Nm$, $0,2251 Nm$ y $0,2937 Nm$, respectivamente; lo que significa un error del $4,07\%$, $4,801\%$ y $3,772\%$ de cada amplitud. Sin embargo, el error medio de estimación baja en torno al 1% ($0,8197\%$, $1,075\%$ y $1,7085\%$, respectivamente) del rango del par, siendo el error error cuadrático medio (RMS) es inferior al $1,85\%$ ($1,706\%$, $1,846\%$ y $1,748\%$, respectivamente).

En el segundo escenario definido, al Robot Delta se le aplica una carga en la plataforma móvil de $2,5 Kg$. Mediante esta carga, pese a ser demasiado alta para las especificaciones del robot comercial ($< 1 Kg$), se pretende demostrar el rango de validez del modelo desarrollado. Por lo tanto, de la misma manera que en el escenario anterior, las señales de par estimado y medido se han comparado graficamente en la Fig. 3.37

En este caso, tal y como sucedía en el escenario anterior, se aprecia como el

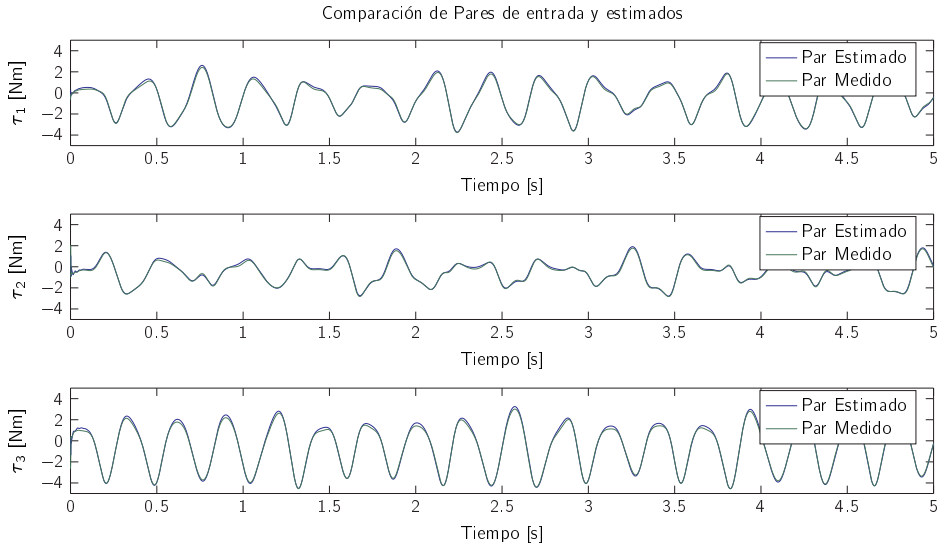


Figura 3.35: Comparación de la respuesta del par obtenida sin carga adicional a partir del modelo matemático y el software de simulación MSC.Adams.

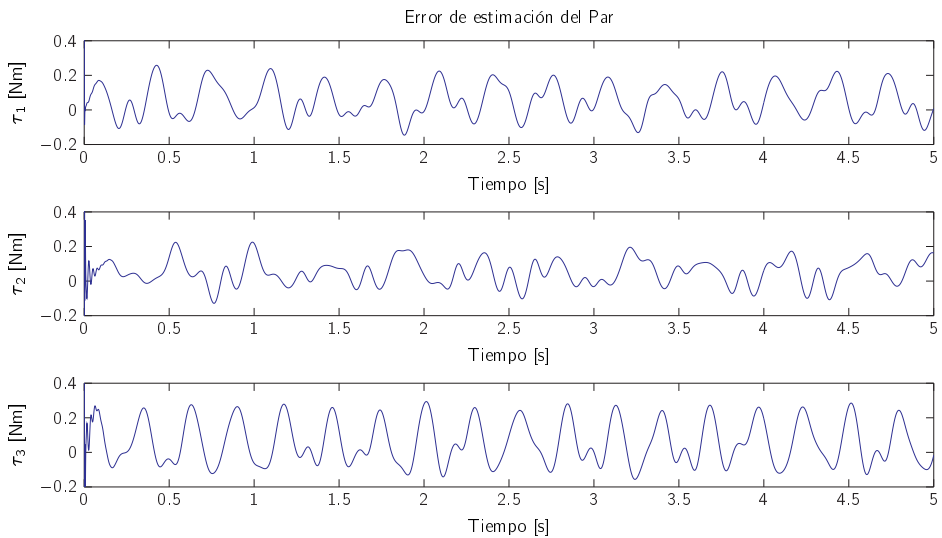


Figura 3.36: Error de estimación del par sin carga adicional mediante el modelo matemático en comparación con los datos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams.

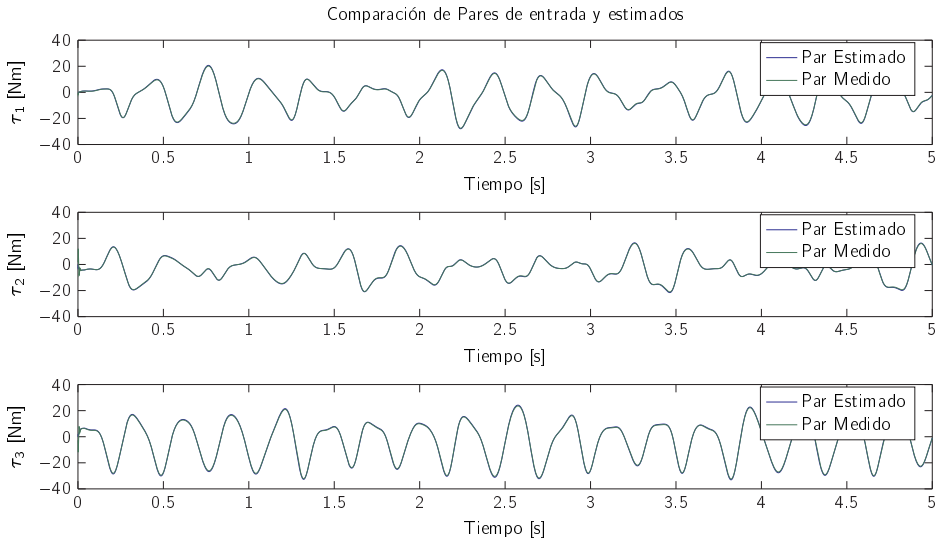


Figura 3.37: Comparación de la respuesta del par obtenida con 2,5 kg de carga adicional a partir del modelo matemático y el software de simulación MSC.Adams.

comportamiento dinámico se reproduce de manera fiel, con un error máximo inferior a 0.4 Nm (0.3778 Nm, 0.3248 Nm y 0.3923 Nm, respectivamente), lo que significa un 0.7918 %, 0.8671 % y 0.6975 % de la amplitud del par, como se observa en la Fig. 3.38. Por su parte, comparándolo con los resultados anteriores se aprecia que el error medio es, si cabe, menor, ya que éste es inferior al 0.12 % (0.1018 %, 0.1138 % y 0.1032 % para las cadenas cinemáticas $i = 1, 2$ y 3 , respectivamente). Del mismo modo, el valor RMS del error, el cual es 0.2977 %, 0.3167 % y 0.3107 %, respectivamente, también es comparativamente menor que el obtenido en el experimento sin carga.

En resumen, los resultados analizados concluyen que el modelo dinámico del robot Delta, cuyas 3 cadenas cinemáticas están formadas por elementos flexibles (inferiores) y rígidos (superiores), tiene un error por debajo del 0.4 N con carga y 0.3 N sin carga. De esta forma se aprecia que el rango de validez del modelo es muy superior a los límites de potencia de los actuadores del robot.

Validación del modelo dinámico en presencia de carga

Una vez validado el modelo dinámico se ha realizado un barrido donde se analiza la evolución del error porcentual en función de la carga aplicada a la plataforma. Para dicho barrido, se han adquirido los datos para cargas comprendidas entre los 0 Kg y los 2.5 Kg, con un paso de 0.05kg.

Como se puede apreciar en las Fig. 3.39, 3.40 y 3.41, tanto el error máximo como el error medio y error cuadrático medio se reducen exponencialmente. Esto se debe a

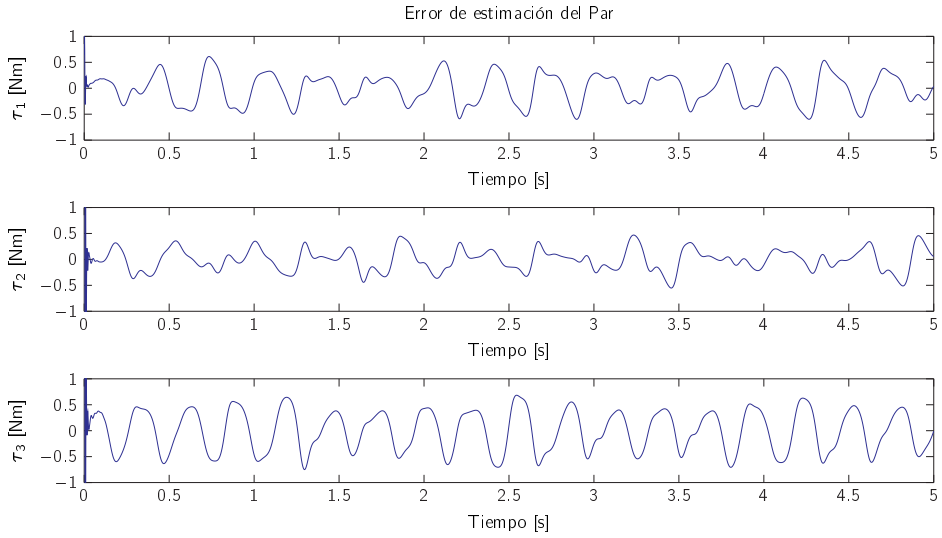


Figura 3.38: Error de estimación del par con 2,5kg de carga adicional mediante el modelo matemático en comparación con los datos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams.

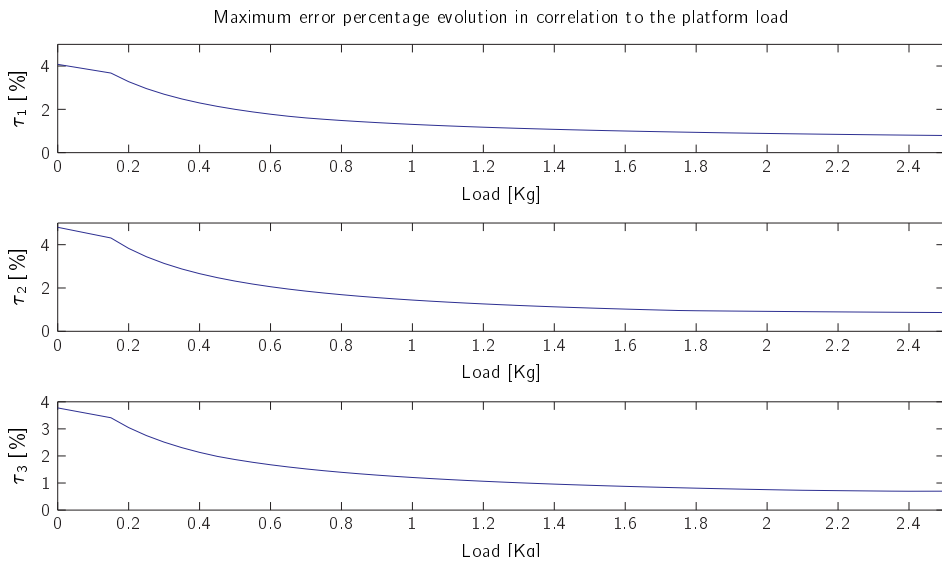


Figura 3.39: Evolución del error máximo de estimación en función de la carga aplicada a la plataforma el Robot Delta.

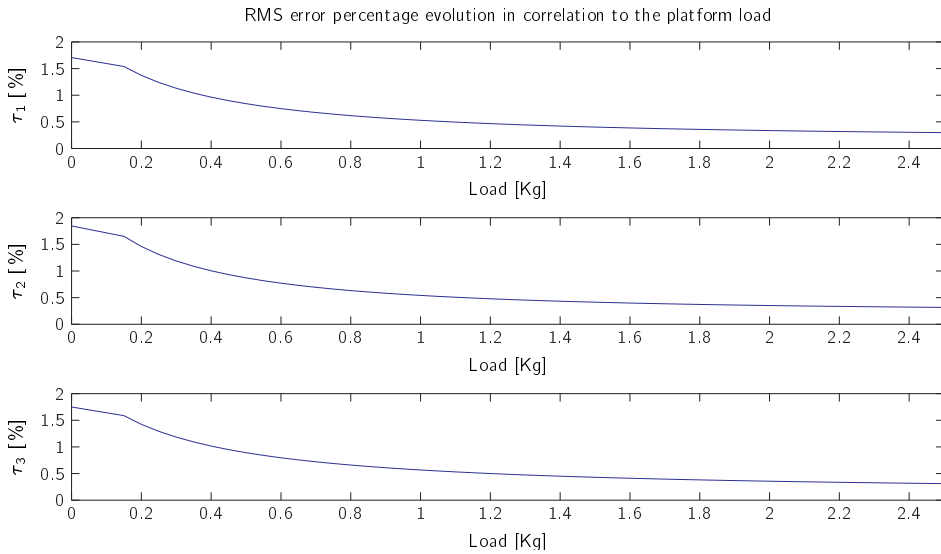


Figura 3.40: Evolución del error rms de estimación en función de la carga aplicada a la plataforma el Robot Delta.

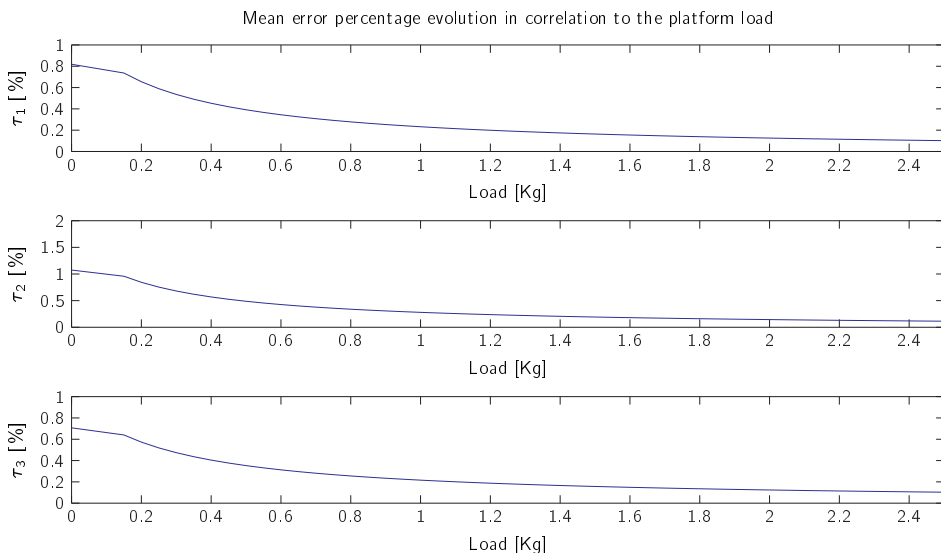


Figura 3.41: Evolución del error medio de estimación en función de la carga aplicada a la plataforma el Robot Delta.

que la estimación del par tiene un pequeño error a la hora de estimar la componente de gravedad, el cual pierde importancia a medida que se aumenta la carga externa.

3.5.2.11. Validación experimental

Una vez validado el modelo matemático mediante su comparación con MSC.Adams, éste ha sido validado, también, contra un prototipo real. Para ello, se han utilizado los datos obtenidos mediante ensayos con el robot comercial Omron Mini Delta CR-UGD4MINI-NR propiedad del Grupo de Control e Integración de Sistemas (GCIS) de la Escuela Ingeniería de Bilbao de la Universidad del País Vasco (UPV-EHU). A dicho robot, tal y como se ha mencionado anteriormente, se le han sustituido los eslabones inferiores de fibra de carbono por unos de aluminio AW5083/H111 (cuyas características han sido definidas en la Tabla 3.3) con la intención de enfatizar los efectos flexibles de dichos eslabones.

A su vez, para disponer de los datos necesarios, el robot ha sido convenientemente sensorizado de forma que los datos obtenidos pudieran ser utilizados por el modelo matemático, y poder así validar el modelo siguiendo el esquema utilizado en la Fig. 3.26. Por lo tanto, en primer lugar, se ha utilizado la sensórica ya instalada en el modelo comercial, mediante la cual se han obtenido los pares de entrada (τ_{medida}) y las posiciones de las articulaciones activas (\mathbf{q}_a). Ambas señales, han sido enviadas desde el controlador del robot (NJ Controller) hasta el PC de adquisición de datos siguiendo el protocolo Ethernet-IP. Además, a partir de la primera y segunda derivada de la posición de las articulaciones activas, se han obtenido tanto las velocidades como las aceleraciones de las articulaciones activas, $\dot{\mathbf{q}}_a$ y $\ddot{\mathbf{q}}_a$, respectivamente.

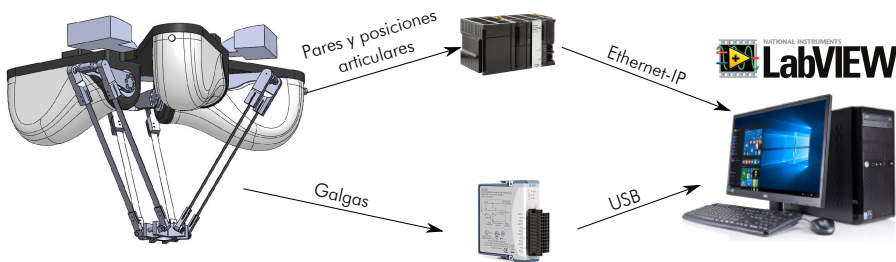


Figura 3.42: Esquema del conexionado para la validación experimental del modelo dinámico.

Por otro lado, para poder medir las deformaciones en los eslabones inferiores, se han utilizado galgas extensiométricas. Los datos obtenidos a partir de ellas han sido capturados en tiempo real mediante la tarjeta de adquisición de datos NI 9235. Dicha tarjeta, haciendo uso de un cuarto de puente de Wheatstone, obtiene una variación de impedancia a partir de la elongación de las galgas, la cual permite, tal y como

expone [89], obtener tanto las deformaciones como sus pendientes en los diferentes puntos medidos del eslabón.

Todos los datos adquiridos (pares, posiciones de las articulaciones, y datos de las galgas) han sido guardados con un periodo de muestreo de $10ms$ para su posterior procesamiento mediante el software de adquisición de datos NI LabVIEW. Por lo tanto, el esquema de adquisición de datos utilizado se puede ver de forma gráfica en la Fig. 3.42.

Con la intención de abordar la mayor casuística posible, se han definido diferentes trayectorias del TCP del robot, mediante las cuales se ha validado el modelo matemático. En primer lugar, se han definido movimientos a lo largo de cada una de los tres ejes de del robot por separado (en este documento solo se analiza la trayectoria en el eje y ya que el resto son equivalentes). Posteriormente, se han realizado movimientos más complejos en donde se han combinado traslaciones en los tres ejes simultáneamente. Dichos movimientos aleatorios se han agrupado tanto en trayectorias circulares (paralelos al plano xy 0 con traslación en el eje z) como en movimientos propios de aplicaciones de *pick & place*. Cada uno estas trayectorias, a su vez, se han realizado a diferentes velocidades, desde las maximas velocidades admitidas por el robot hasta velocidades muy inferiores a las que utilizan los robots deltas en la mayoría de aplicaciones. Validando así el modelo en todo el rango de frecuencias.

Siendo el objetivo de este apartado la validación del modelo y no el estudio exhaustivo del comportamiento del robot para cada uno de los casos de estudios planteados, en las siguientes líneas se ha analizado un caso de cada grupo en detalle. Posteriormente, a la hora de extraer conclusiones se presentaran los datos obtenidos en el resto de ensayos en forma de tabla.

Trayectoria a lo largo del eje y y a alta velocidad

En el primer caso de estudio se ha comparado el comportamiento del modelo matemático contra los datos experimentales obtenidos en la plataforma real ante una trayectoria horizontal a lo largo del eje y del robot.

Para ello, mediante el controlador de posición rígido existente en el propio robot comercial, se han programado un movimiento lineal a lo largo del eje y . Dicho desplazamiento se ha realizado con un tiempo de ciclo de $200ms$.

Cabe destacar que, como se aprecia en la Fig. 3.24, el eje y del robot, a diferencia del eje x , no esta alineada con ninguna de las cadenas cinemáticas, lo que hace que la deformación de los eslabones flexibles no este distribuida uniformemente entre los eslabones.

Una vez definida la trayectoria ha realizar, el modelo se ha validado siguiendo el procedimiento descrito por la Fig. 3.26. En la Fig. 3.43 se han graficado conjuntamente los pares medidos en el prototipo y los estimados por el modelo dinámico a partir de las medidas experimentales adquiridas ($\ddot{q}_a, \dot{q}_a, q_a, u, \dot{u}, \ddot{u}$). En ella se aprecia como el modelo matemático estima fielmente la dinámica de los pares de cada una de las articulaciones activas.

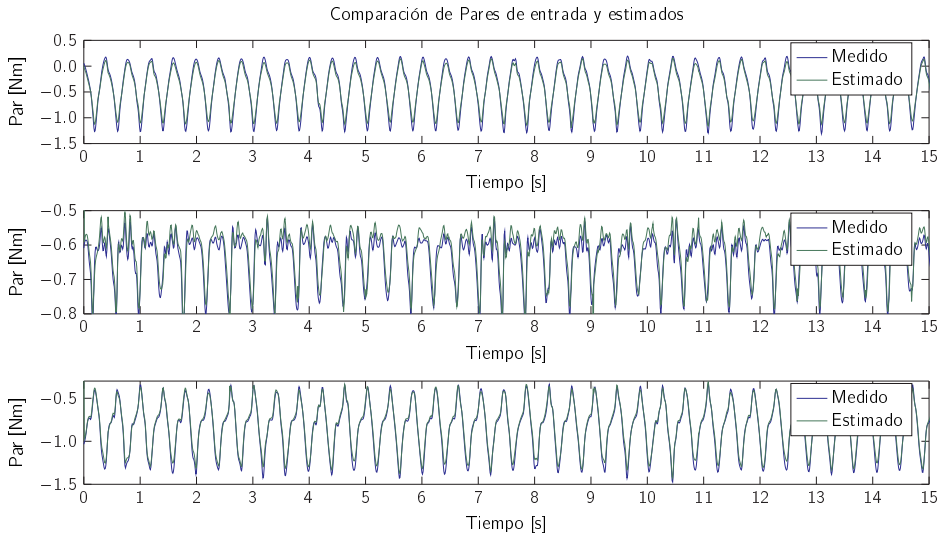


Figura 3.43: Comparación de la respuesta del par para una trayectoria a lo largo del eje y obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.

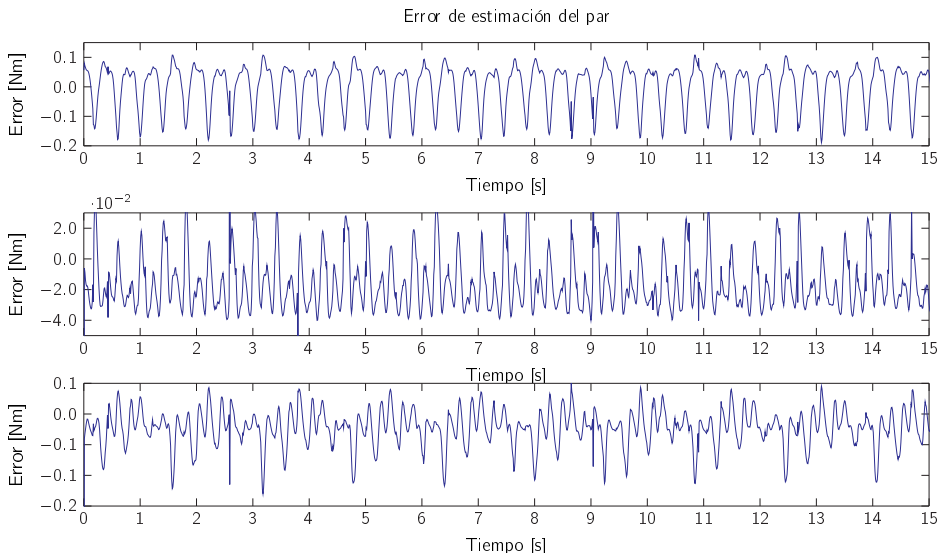


Figura 3.44: Error de estimación para una trayectoria a lo largo del eje y obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.

En la Fig. 3.44, por su parte, se muestra el error de estimación entre ambas señales. En ella se aprecia como el error de estimación máximo de los pares no sobrepasa los $0,0897Nm$, $0,0247Nm$ y $0,0267Nm$, para cada una de las cadenas cinemáticas $i = 1, 2$ y 3 . Estos errores suponen un $7,8\%$, $7,05\%$ y $2,96\%$ del rango del par de cada uno de los pares de cada cadena cinemática, respectivamente.

Trayectoria circular en el plano xy mientras se desplaza en el eje z

Del mismo modo que se ha realizado con la trayectoria en el eje y , también se ha analizado la respuesta del sistema para una trayectoria circular en el plano xy combinada con un desplazamiento en el eje z , tal y como se aprecia en la Fig. 3.45. Mediante este movimiento se pretende demostrar la validez del modelo en cualquier posición dentro del espacio de trabajo del robot.

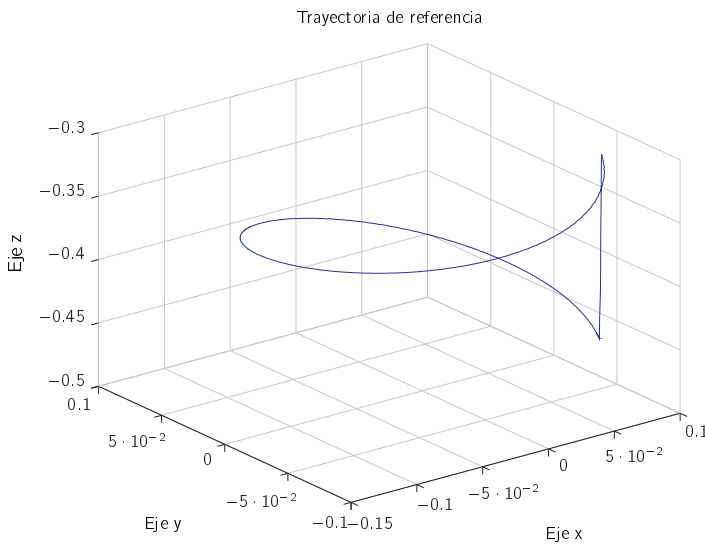


Figura 3.45: Representación tridimensional de la trayectoria circular con desplazamiento vertical realizada por el prototipo real.

En la Fig. 3.46, se puede comparar gráficamente la evolución dinámica de cada uno de los pares medidos en el prototipo, así como los estimados mediante el modelo desarrollado. En dicha comparación se puede apreciar que en ambos casos, la dinámica es muy similar.

En la Fig. 3.47 se analiza el error entre ambas señales. En ella que se aprecia como el error máximo es menor a $0,0074Nm$, $0,0082Nm$ y $0,0048Nm$; lo que supone $1,23\%$, $0,91\%$ y $0,69\%$ del rango máximo del par, respectivamente. Errores muy inferiores a los obtenidos en el caso de estudio anterior. Esto se debe a que esta trayectoria es mucho menos abrupta que la analizada anteriormente.

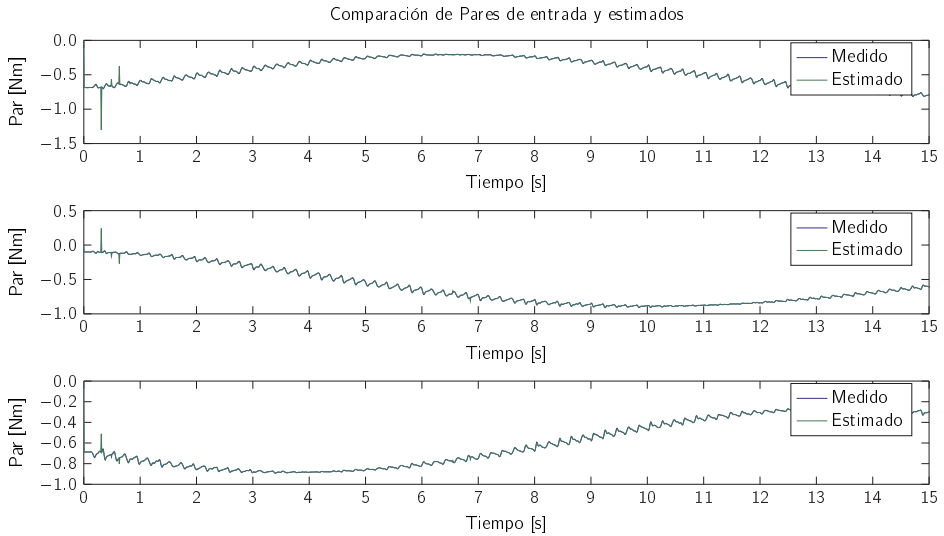


Figura 3.46: Comparación de la respuesta del par para una trayectoria circular con desplazamiento vertical obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.

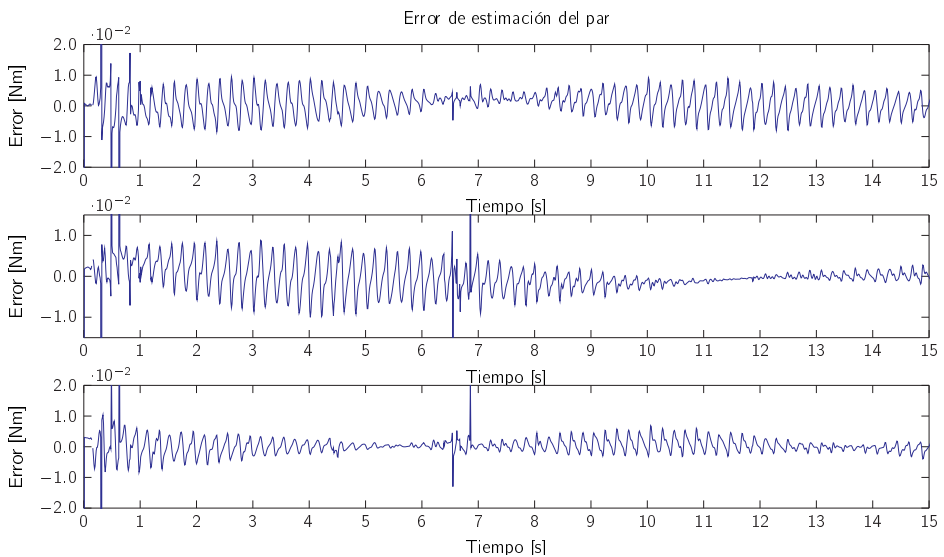


Figura 3.47: Error de estimación para una trayectoria circular con desplazamiento vertical obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.

Trayectoria pick & place a velocidad rápida

Finalmente, teniendo en cuenta que una de las aplicaciones principales de los robots paralelos, y en especial de los robots delta, es el pick & place, se ha validado el modelo mediante una trayectoria que simule una aplicación de este tipo. Para ello se ha hecho uso de una trayectoria (véase 3.48) mediante la cual se apilan de pequeños cubos de madera situados en diferentes puntos de la base de trabajo. Dicha trayectoria simula ciclos de trabajo pick & place, los cuales están compuestos por una sucesión de movimientos, los cuales han sido programados para que tengan un tiempo de 500ms.

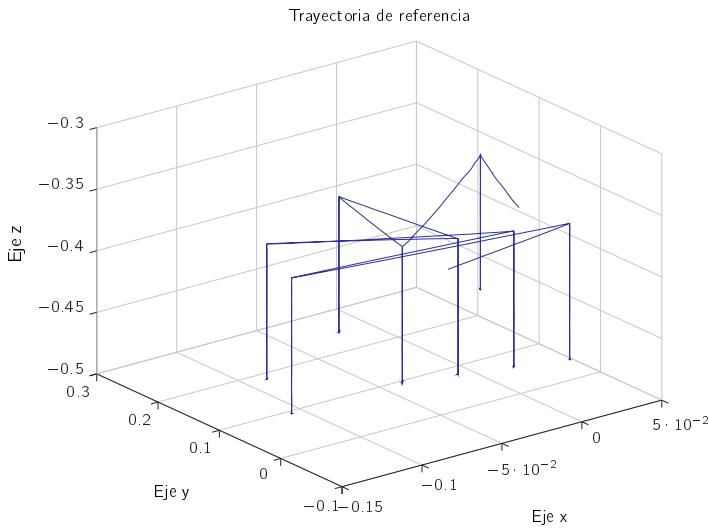


Figura 3.48: Representación tridimensional de la trayectoria de pick & place realizada por el prototipo real.

Una vez más, al igual que en los casos anteriores, se puede apreciar como la dinámica del modelo estimado representa de forma fiel la realizada por el prototipo (Fig. 3.49). Cabe destacar, sin embargo, que se aprecian ciertos puntos falsos a lo largo de la señal de estimación. Estos se deben a errores de integración y falsas medidas del sistema. Estos puntos aislados, normales en las estimaciones, pueden ser fácilmente omitidos mediante el uso de filtros pasobajos.

Pese a ello, el error de estimación, tal y como se aprecia en la Fig. 3.49, es menor a 0,0250 Nm, 0,0424 y 0,0272 siendo su valor inferior al 3,57 %, 7,06 % y 2,72 % de la amplitud del movimiento de cada cadena cinemática $i = 1, 2$ y 3 , respectivamente.

En base a estos resultados, es posible afirmar que el modelo dinámico desarrollado para la plataforma Delta flexible y sus respectivos problemas cinemáticos proporciona el mismo resultado que aquellos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams y están dentro de unos errores de estimación aceptables en compara-

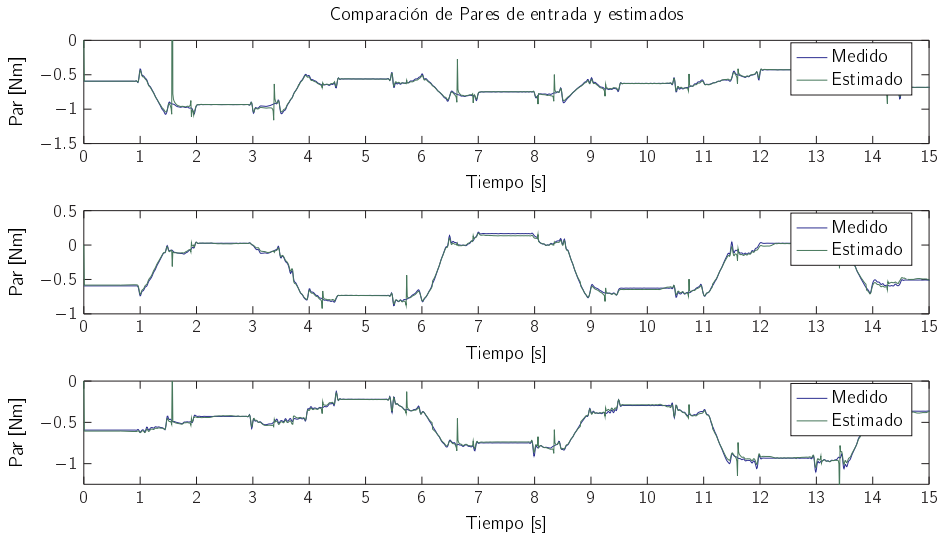


Figura 3.49: Comparación de la respuesta del par para una trayectoria de pick & place obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.

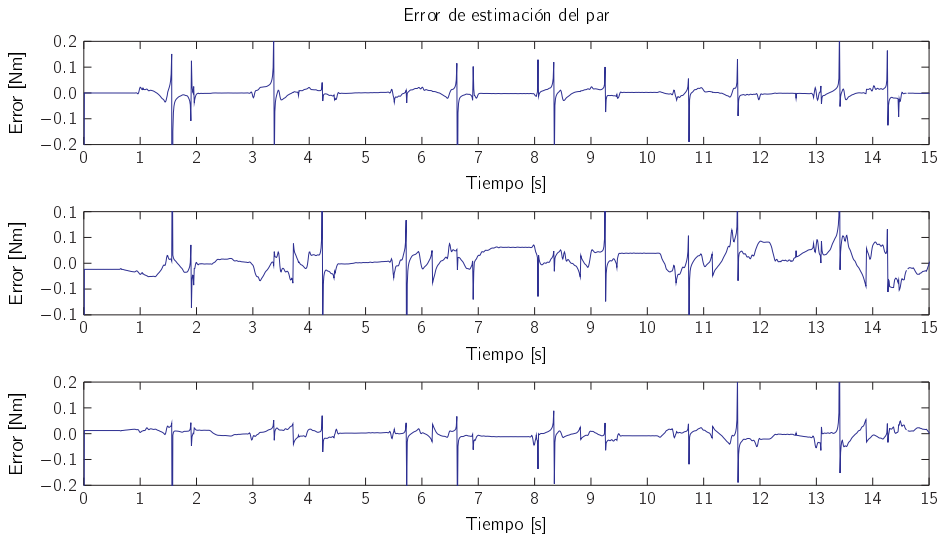


Figura 3.50: Error de estimación para una trayectoria de pick & place obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.

ción con los obtenidos en el prototipo real.

3.6. Conclusiones

En este capítulo se ha definido una metodología unificada basada en el método de elementos finitos para el cálculo del modelo dinámico de los robots paralelos. Dicha metodología se define independientemente de la rigidez de los eslabones, característica no abordada anteriormente en la literatura. Para su validación dicha metodología ha sido aplicada a dos plataformas: el Manipulador Sheffield y el robot Delta.

En la primera de ellas, se ha tratado de replicar el trabajo presentado en [221] con el robot de un grado de libertad Manipulador Sheffield. Dicho robot, tomado en numerosos trabajos como robot de referencia a la hora de proponer nuevas estrategias de modelado flexible, esta constituido por un eslabón flexible que roto al rededor del único grado de libertad que dispone.

Dicho robot ha sido modelado dinámicamente siguiendo la metodología propuesta y los resultados obtenidos han sido validados mediante el software de simulación Multibody MSC.Adams y mediante los resultados presentado por Tokhi y Azad [221].

Los resultados demuestran que el modelo propuesto garantiza una adecuada precisión en un gran rango de cargas $[0 - 0,1kg]$. Dicha precisión no solo se observa durante el régimen permanente sino que la dinámica de los tres casos convergen tanto en el régimen permanente como en el transitorio con errores mínimos. Mediante estos resultados, queda validada la parte flexible de la metodología presentado.

El segundo caso de estudio, aborda el modelado de un robot Delta donde se combinan tanto eslabones rígidos como flexibles. Para ello, a partir de los datos mecánicos y geométricos obtenidos del prototipo comercial Robot Omron Mini Delta CR-UGD4MINI-NR se ha abordado el problema cinemático y dinámico de su modelado siguiendo la metodología presentada. Además, y para enfatizar la componente flexible de los eslabones inferiores, estos han sido sustituidos por pletinas de aluminio de 3mm de grosor.

El modelo resultante ha sido validado primero mediante simulaciones en el software comercial MSC.Adams. A partir de los datos obtenidos del modelo desarrollado en MSC.Adams se ha validado todo el problema cinemático, con errores medios inferiores al 0,4% de la sus respectivas amplitudes. Por otro lado, también ha permitido hacer un estudio del rango de cargas en el que la metodología del modelo dinámico resultaba valida. A partir de dicho estudio, no solo se validaba el problema dinámico sino que se ha comprobado que éste es valido en un rango mucho mayor $[0 - 2,5kg]$ que el definido por la limitación de par de los motores $[0 - 1kg]$.

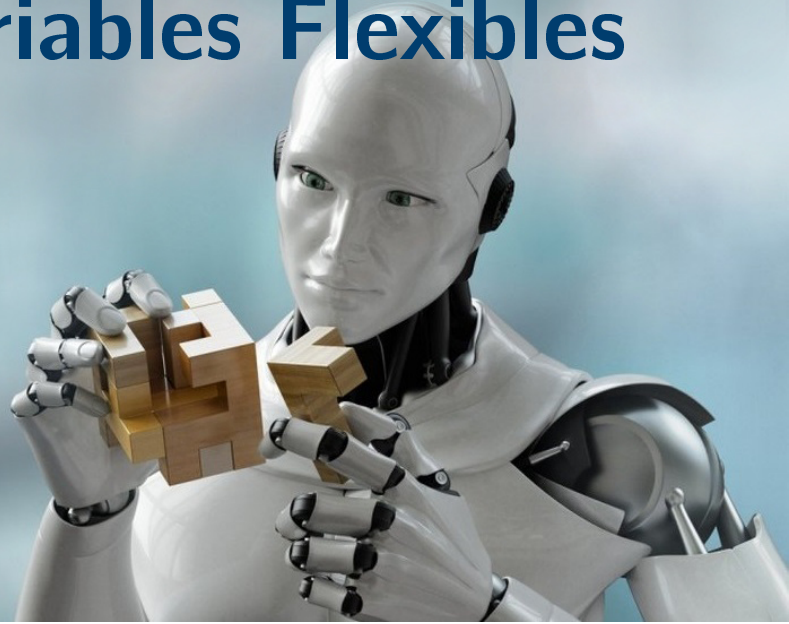
Adicionalmente, el modelo desarrollado ha sido comparado con los datos obtenidos en un robot Delta comercial. Para ello, se ha requerido sensorizar dicho prototipo y realizar una interfaz que permitiese la comunicación y la adquisición de los datos en tiempo real.

Aunque los errores obtenidos son ligeramente superiores a los obtenidos contra la simulación estos están dentro de limites asumibles por el controlador, ya que estos

no sobrepasan, en el peor de los casos, el 7 % de error máximo. Para dicho análisis se han utilizado diferentes trayectorias a partir de las cuales se ha comprobado que cuanto mas abrupta es la trayectoria, mayor es el error máximo. Pese a ello, cabe tener en cuenta que en el caso de la validación mediante prototipo real no solo se computan los errores debidos a la metodología sino que entran en juego factores como errores de estimación de la cinemática, errores de adquisición de datos, errores de tolerancias, resoluciones, etc.

Por lo tanto, teniendo todo ello en cuenta, se puede dar por validado la metodología presentada, la cual tiene se define independientemente de la rigidez de los eslabones, característica que no se había abordado en la literatura.

Desarrollo del Estimador de Variables Flexibles



4.1. Introducción

En el capítulo anterior se ha validado la metodología de modelado propuesta. Para ello, en dicho capítulo se ha dado por hecho que la deformación en los eslabones flexibles era conocida. Sin embargo, medir la deformación no es tarea trivial.

En la robótica rígida, la localización del TCP de los robots paralelos se determina mediante el Modelo Cinemático Directo. Éste permite calcular la trayectoria en el espacio operacional $\mathbf{x}(t)$ a partir de cualquier trayectoria articular $\mathbf{q}(t)$, es decir, $\mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{x}(t)$; siendo éste un modelo imprescindible a la hora de definir el control de un manipulador paralelo.

En la robótica flexible, por el contrario, la ecuación cinemática directa que rige el movimiento de los eslabones flexibles tiene múltiples soluciones, ya que la deformación de los eslabones permite más de una posición y orientación de la garra para una configuración articular \mathbf{q} dada (Fig. 2.1a)[200].

Por lo tanto, y como se ha definido en el Capítulo 3, el Modelo Cinemático Directo se define en términos de las variables de movimiento rígidas \mathbf{q}_r y las variables flexibles \mathbf{q}_f que modelan la deformación de los eslabones flexibles,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_f) \quad (4.1)$$

Sin embargo, mientras las variables rígidas son fácilmente medibles mediante el uso de sensores de posición en las articulaciones, la medida de las variables flexibles no es una tarea trivial.

Es por ello que se ha tratado de medir la deformación debida a la flexibilidad de los eslabones considerando diferentes tipos de sensores [120]. Entre ellos, uno de los que mejores resultados ofrece es el uso de la visión artificial, la cual se ha utilizado tanto para determinar la localización del TCP [63, 64, 132] como para su calibración [225, 160]. La implementación de controladores basados en visión o *visual servoing* permite controlar directamente la posición del TCP del robot sin el uso de estimadores [49]. Sin embargo, la mayoría de los procedimientos basados en esta técnica requieren del cálculo tanto de la Jacobiana de la imagen como de la del robot a la hora de mapear la velocidad de la garra y las imágenes [105]. En la robótica flexible, sin embargo, estas Jacobianas requieren de la información de las variables flexibles [174], por lo que sigue siendo necesaria su medida [89]. Del mismo modo, la visión artificial también ha sido utilizada para medir la deformación de cada uno de los eslabones [63, 64]. Sin embargo, esta propuesta requiere de una cámara por elemento flexible, incrementando así notablemente el coste económico total del robot. Además, pese a la precisión de los datos obtenidos, su uso está limitado por el rango de visión de la cámara, los efectos de la obstrucción visual, la baja frecuencia de muestreo y el coste computacional requerido para el procesamiento de imágenes.

Para hacer frente a las limitaciones de los sistemas de visión, sensores más convencionales, como los acelerómetros o las galgas extensiométricas, han sido ampliamente utilizadas en la literatura. Los acelerómetros, por ejemplo, se suelen colocar en las puntas de los elementos flexibles, cuyas medidas son utilizados en el control de vibraciones, donde se trata de estabilizar las oscilaciones del TCP debidas a la flexibilidad [184]. Además, como la aceleración de los extremos está compuesta por la componente de aceleración del movimiento del sólido rígido y de la componente de las vibraciones debidas a la flexibilidad, el uso de acelerómetros permite estimar la posición del TCP, siempre y cuando el movimiento de las articulaciones este sensorizado [88]. Sin embargo, esta propuesta es altamente sensible a los ruidos, ya que requiere de una doble integración de la señal de aceleración, llegando a acumular un alto porcentaje de error [63].

Por otro lado, las galgas extensiométricas han sido ampliamente utilizadas para la medida de las deformaciones locales en diferentes puntos del eslabón. Feliu et al., por ejemplo, propone en [70] el uso de galgas extensiométricas para aplicaciones de control situados al inicio de los eslabones flexibles de un manipulador de tres grados de libertad flexibles. Piedboeuf en [175], por su parte, propone un algoritmo de interpolación para determinar la posición y orientación de una viga flexible a partir

de las medidas de un número finito de galgas. En [89], en cambio, las medidas de las galgas se utilizan para verificar las relaciones cinemáticas tridimensionales de una viga flexible sujeta tanto a pandeo como a torsión.

Por lo tanto, las galgas extensiométricas se presentan como una alternativa atractiva ya que sólo requieren del conocimiento de los parámetros geométricos del eslabón para estimar su deformación. Sin embargo, las galgas son sensibles a las variaciones de temperatura, al ruido [19] y a las interferencias electromagnéticas [63, 64].

Por todo ello, la medida de las deformaciones flexibles no es un problema trivial, ni siquiera mediante el uso de sensoría adicional. Es por ello que otros autores se han decantado por técnicas de fusión de sensores. En [248], por ejemplo, se propone el uso de acelerómetros y encoders en combinación con un observador de perturbaciones para compensar las no linealidades de las deformaciones. En [101], por su parte, se decanta por el uso de un filtro de Kalman para procesar la información de los acelerómetros y encoders para la estimación de la cinemática directa de un robot de 6GDL. Sin embargo, pese a las mejoras introducidas en la precisión de las medidas, las técnicas de fusión requieren de altas cargas computacionales [226], dificultando su implementabilidad en Tiempo Real.

Ante esta falta de soluciones prácticas para medir e implementar la información de las deformaciones en este capítulo se presenta un estimador de variables flexibles novedoso, basado en un sólo encoder de alta resolución y un modelo matemático basado en el análisis modal por eslabón flexible. Esta propuesta permitirá abordar de forma precisa de la posición y orientación del TCP de los robots paralelos flexibles. Además, su cálculo tiene un coste computacional mínimo, aportando una ventaja significativa sobre los métodos anteriormente citados a la hora de implementarlos en Tiempo Real.

4.2. Desarrollo Teórico del Estimador de las deformaciones de los eslabones flexibles

4.2.1. Fundamentos del Estimador

El análisis modal es una herramienta matemática que representa los patrones de movimiento con la que se mueven todos los Grados De Libertad de un sistema en función de su frecuencia. Por lo tanto, el análisis modal proporciona la relación cinemática entre cada uno de los GDL a partir de las características dinámicas del sistema, tales como la masa, inercia, la estructura o las condiciones de contorno. Además, el movimiento general del sistema está compuesto por una superposición de sus modos normales, siendo todos ellos ortogonales entre sí, por lo que la excitación de uno de los modos no afecta al resto. Por lo tanto, considerando un modo en particular y midiendo uno de los GDL que lo componen, es posible estimar el movimiento modal de todos los GDL \mathbf{q} ,

$$\mathbf{q} = \sum_{n_{GDL}=1}^n \mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}}} \epsilon_{n_{GDL}} \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}}}$ es el vector propio n_{GDL} y $\epsilon_{n_{GDL}}$ es el movimiento modal n_{GDL} , [141].

Por su parte, diferentes autores [202, 98, 30] han sugerido que es suficiente con considerar solo los primeros modos y despreciar las frecuencias más altas, ya que los términos de amplitud relacionadas con ellas son mucho más pequeñas en comparación con las de los primeros modos. Además, debido a las propiedades de amortiguamiento de los materiales, las vibraciones de las frecuencias más altas son amortiguadas más rápidamente que las de las frecuencias más bajas [216]. Por otro lado, en las aplicaciones de control de manipuladores flexibles, el ancho de banda de las frecuencias de trabajo está limitada tanto por los actuadores como por la aplicación en sí. Es por ello que, debido a la rigidez con la que se construyen los robots, normalmente la segunda frecuencia de resonancia se encuentra fuera del ancho de banda de trabajo. Por lo tanto, la deformación de los eslabones pueden ser estimadas considerando sólo el modo asociado a la primera frecuencia natural del sistema. De esta forma, la Eq. (4.2) se puede simplificar a,

$$\mathbf{q} = \sum_{n_{GDL}=1}^n \mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}}} \epsilon_{n_{GDL}} \approx \mathbf{X}_1 \epsilon_1 \quad (4.3)$$

Considerando todo lo anterior, la deformación final del eslabón puede estimarse mediante la medida de un único sensor apropiadamente situado y el modelo matemático obtenido mediante el análisis modal del sistema.

Sin embargo, si el análisis modal se realiza al manipulador entero, la respuesta modal es altamente dependiente de la configuración del robot en cada momento. Por lo tanto, sería necesario calcular el análisis modal en cada iteración. Si el eslabón flexible se considera como sistema independiente, en cambio, la relación que define el movimiento entre los GDL flexibles del eslabón $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{f_{ij}}$ se mantiene constante para cada modo, independientemente de la posición del robot, permitiendo que el estimador tenga un coste computacional mínimo sin perder, por ello, precisión alguna.

Considérese, por ejemplo, el ejemplo de la Fig. 4.1, donde el eslabón flexible b está conectado a dos eslabones rígidos (a , c) mediante articulaciones rotacionales. Si consideramos que el eslabón flexible está modelado mediante el Método de Elementos Finitos y bajo la Teoría de Vigas de Euler-Bernoulli, se puede definir la variable q_{f_s} como la pendiente de la deformación del eslabón flexible b en su extremo. Por lo que, introduciendo un encóder de alta resolución que mida esta deformación angular e introduciéndola en Eq. (4.3), donde $\epsilon_1 = q_{f_s}$, se puede estimar la deformación total del eslabón, incluyendo el desplazamiento en el extremo q_{f_d} , el cual es necesario para calcular la estimación de la posición del TCP del robot flexible.

Este estimador ofrece diversas ventajas sobre las propuestas anteriores. En primer lugar, las relaciones obtenidas en el análisis modal, $\mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}ij}}$, son constantes para cada modo, permitiendo estimar con un bajo coste computacional las deformaciones

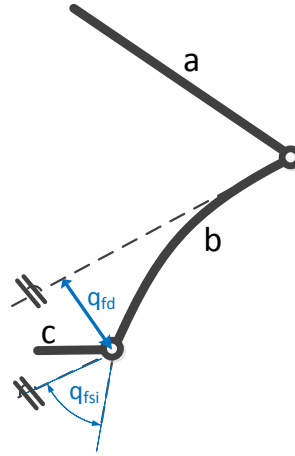


Figura 4.1: Esquema del eslabón flexible (b) conectado a dos eslabones rígidos (a, c) mediante articulaciones rotacionales.

del eslabón, ya que se ha considerado cada eslabón flexible como un sistema independiente. En segundo lugar, al igual que dichas relaciones, las que definen sus diferentes derivadas son igualmente constantes, definiéndose estas mediante la Eq. (4.4). Por último, asumiendo pequeñas deformaciones, el estimador ofrece precisión suficiente para las aplicaciones de control.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_{f_{ij}} &= \sum_{n_{GDL}=1}^n \mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}ij}} \epsilon_{n_{GDL}ij} \approx \mathbf{X}_{ei g_{s_{ij}}} \epsilon_{1_{ij}} \\
 \dot{\mathbf{q}}_{f_{ij}} &= \sum_{n_{GDL}=1}^n \mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}ij}} \dot{\epsilon}_{n_{GDL}ij} \approx \mathbf{X}_{ei g_{s_{ij}}} \dot{\epsilon}_{1_{ij}} \\
 \ddot{\mathbf{q}}_{f_{ij}} &= \sum_{n_{GDL}=1}^n \mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}ij}} \ddot{\epsilon}_{n_{GDL}ij} \approx \mathbf{X}_{ei g_{s_{ij}}} \ddot{\epsilon}_{1_{ij}}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nótese que en el estimador propuesto, los modos normales de cada eslabón son independientes a la configuración del manipulador, y únicamente dependientes de las propiedades mecánicas de los eslabones y la discretización realizada mediante FEM, lo que permite calcular los vectores propios, $\mathbf{X}_{ei g_{n_{GDL}ij}}$, *off-line*, reduciendo enormemente el tiempo de cómputo para la estimaciones de las deformaciones.

4.2.2. Análisis Modal de un Eslabón Flexible

El análisis modal necesario para definir el vector propio de los eslabones flexibles se realiza a partir de las matrices de inercia $(\mathbf{M}_{f_{ij}})_{BC}$ y rigidez $(\mathbf{K}_{f_{ij}})_{BC}$ desarrolladas en el Capítulo 3. Para ello, se utiliza una versión simplificada de la ecuación de movimiento del eslabón a analizar, donde las cargas y el efecto de Coriolis son despreciados,

$$(\mathbf{M}_{f_{ij}})_{BC} \ddot{\mathbf{q}}_{f_{ij}} + (\mathbf{K}_{f_{ij}})_{BC} \mathbf{q}_{f_{ij}} = 0 \quad (4.5)$$

Para la resolución de la Eq. (4.5), se propone una solución armónica que cumpla la estructura,

$$\mathbf{q}_{f_{ij}} = \mathbf{X}_{eig} \sin(\boldsymbol{\omega}_f t) \quad (4.6)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_f$ representa el vector de frecuencias naturales.

Esta solución armónica, no solo representa una solución numérica a la Eq. (4.5), sino que ofrece una interpretación física. De esta manera, la solución armónica define la forma en que los GDL del eslabón se deforman y la relación entre ellos. Por lo tanto, para un modo dado, la configuración estructural no varía durante el movimiento, simplemente varía su amplitud, permitiendo relacionar los efectos de la flexibilidad en cada GDL a partir de la medida de uno de ellos. Este concepto es la base conceptual de este estimador.

Por lo tanto, sustituyendo la Eq. (4.6) en la Eq. (4.5), se obtiene,

$$-\boldsymbol{\omega}_f^2 (\mathbf{M}_{f_{ij}})_{BC} \mathbf{X}_{eig} \sin(\boldsymbol{\omega}_f t) + (\mathbf{K}_{f_{ij}})_{BC} \mathbf{X}_{eig} \sin(\boldsymbol{\omega}_f t) = 0 \quad (4.7)$$

la cual puede ser simplificada hasta obtener,

$$((\mathbf{K}_{f_{ij}})_{BC} - \boldsymbol{\omega}_f^2 (\mathbf{M}_{f_{ij}})_{BC}) \mathbf{X}_{eig} = 0 \quad (4.8)$$

La Eq. (4.8), denominada ecuación de valores propios, es un conjunto de ecuaciones algebraicas homogéneas para los componentes de los vectores propios, los cuales forman la base del problema de valores propios. Este tipo de ecuaciones son conocidas bajo la estructura,

$$(\mathbf{A}_{eig} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X}_{eig} = 0 \quad (4.9)$$

donde \mathbf{A}_{eig} es una matriz cuadrada, λ son los valores propios, \mathbf{I} es la matriz identidad del mismo tamaño que \mathbf{A}_{eig} y \mathbf{X}_{eig} es el vector propio.

En el análisis estructural de los eslabones de un robot, al igual que en muchas otras estructuras mecánicas, el uso de las matrices generalizadas de inercia $(\mathbf{M}_{f_{ij}})_{BC}$ y de rigidez $(\mathbf{K}_{f_{ij}})_{BC}$ dan a la solución del problema de ecuaciones de valores propios otro significado físico, ya que los valores propios obtenidos se corresponden con las frecuencias naturales de los eslabones ($\lambda = \boldsymbol{\omega}_f^2$) y los vectores propios \mathbf{X} a la forma modal del sistema.

Mediante la resolución de la Eq. (4.8), matemáticamente se presentan dos posibles soluciones:

1. Si el $\det((\mathbf{K}_{f_{ij}})_{BC} - \boldsymbol{\omega}_f^2 (\mathbf{M}_{f_{ij}})_{BC}) \neq 0$, entonces la solución es

$$\mathbf{X}_{eig} = 0 \quad (4.10)$$

Esta es una solución trivial, la cual no aporta ninguna información desde el punto de vista físico, ya que representa el caso de falta de movimiento.

2. Si $\mathbf{X}_{eig} \neq 0$, la solución del problema de valores propios se reduce a la resolución de la ecuación,

$$\det \left((\mathbf{K}_{f_{ij}})_{BC} - \omega_f^2 (\mathbf{M}_{f_{ij}})_{BC} \right) = 0 \quad (4.11)$$

siendo sólo cero el determinante definido en Eq. (4.11) bajo un conjunto discreto de valores propios $\omega_{f_{ij}}^2$. Además, a partir del valor de $\omega_{f_{ij}}^2$, se puede definir un vector propio $\mathbf{X}_{eig_{ij}}$ que satisfaga la Eq. (4.8). Por lo tanto, la Eq. (4.8) puede reescribirse como,

$$\left((\mathbf{K}_{f_{ij}})_{BC} - \omega_{f_{ij}}^2 (\mathbf{M}_{f_{ij}})_{BC} \right) \mathbf{X}_{eig_{ij}} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \dots n_{DOF_{max}} \quad (4.12)$$

donde el número de valores y vectores propios $n_{DOF_{max}}$ es igual al número de GDL discretos que tiene el eslabón. Además, el valor propio ij , $\omega_{f_{ij}}^2$ está relacionado con la frecuencia natural ij , f_{ij} , por la expresión

$$f_{ij} = \frac{\omega_{f_{ij}}}{2\pi} \quad (4.13)$$

Por lo tanto, mediante la resolución de la Eq. (4.12) se calcula el vector propio \mathbf{X}_{eig_i} , el cual, representa la relación entre los GDL flexibles del eslabón analizado, tal y como se ha definido en la Eq. (4.4). Además, como se ha mencionado en el procedimiento propuesto del estimador cinemático (sección anterior) el cálculo de dichos vectores propios puede realizarse *off-line*, ya que las matrices de inercia y rigidez de cada eslabón no son dependientes de la posición del robot. De esta forma, una vez calculados los vectores propios, si se mide uno de los GDL, el resto pueden ser directamente estimados.

Por tanto, es de resaltar la sencillez del procedimiento y la eficiencia computacional que hace de él un procedimiento computacionalmente muy eficiente y, como se demostrará en la siguiente sección, preciso a la hora de estimar las deformaciones de los eslabones flexibles.

4.3. Validación

Una vez definido el desarrollo del estimador, en esta sección se procede a su validación. Para ello, se utilizarán los datos obtenidos a partir de las simulaciones realizadas mediante el software Multibody MSC.Adams del modelo del robot Delta descrito en el Capítulo 3, y datos obtenidos en la validación experimental con el prototipo detallados en las Secciones 3.5.2.10 y 3.5.2.11. En ellas se somete al robot virtual (ADAMS) a dos tipos de trayectorias diferentes: un movimiento lineal sobre el eje z, Sección 4.3.1, y un movimiento aleatorio donde se excita un rango mayor de frecuencias, Sección 4.3.2.

4.3.1. Validación mediante movimiento simétrico a lo largo del eje z

4.3.1.1. Validación en simulación

Para analizar el comportamiento de los eslabones flexibles y validar el desarrollo propuesto, en primer lugar se ha definido una trayectoria simétrica a lo largo del eje vertical z. Para ello, el modelo se ha excitado mediante un movimiento sinusoidal simétrico en sus tres articulaciones actuadas q_{a_i} . Dicho movimiento se define por,

$$q_{a_1} = q_{a_2} = q_{a_3} = 0.15 - 0.1 \sin(6 \pi t) \quad (4.14)$$

Estimación de la deformación en el eslabón

En primer lugar, se ha analizado la capacidad de estimar la deformación de los elementos flexibles del robot a partir de las medidas de los encoders situados en la articulación entre el eslabón flexible y el TCP, véase Fig 4.2. Basándose en la definición del FEM, cada eslabón flexible está compuesto por cierto número de nodos (en el caso estudiado es de cuatro), cada uno de los cuales están compuestos por dos GDL, el desplazamiento debido a la flexión y la pendiente de la deformación. Por lo tanto, para analizar la precisión del estimador, se comparan las estimaciones de cada GDL con las medidas obtenidas mediante el Software Multibody MSC.Adams. Además, como se ha expuesto anteriormente, el estimador desarrollado no solo es capaz de estimar la posición y orientación de los GDL, sino que también sus velocidades y aceleraciones 3.25. Por lo tanto, la precisión del estimador se analizará en posición, velocidad y aceleración.

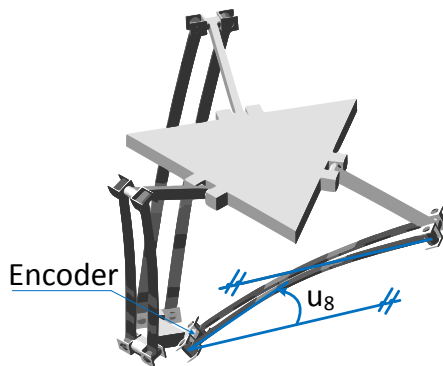


Figura 4.2: Representación del ángulo medido y la posición del encoder rotacional.

Por lo tanto, debido a la simetría del movimiento de entrada, la respuesta de los eslabones flexibles es similar, y por consiguiente, en este documento solo se representa el comportamiento de las variables asociadas a la cadena cinemática $i = 1$, siendo las conclusiones obtenidas directamente extensibles al resto de cadenas cinemáticas.

En la Fig. 4.4 se comparan la evolución de las deformaciones de los diferentes GDL del eslabón flexible de la cadena cinemática $i = 1$ obtenidas tanto mediante la simulación de MSC.Adams (Medida) como mediante la estimación de los mismos (Estimada). Como se puede apreciar en dicha figura, los datos obtenidos a partir del estimador presentado se ajustan de forma fiel a la respuesta obtenida por el software de simulación MSC.Adams, tanto en amplitud como en forma.

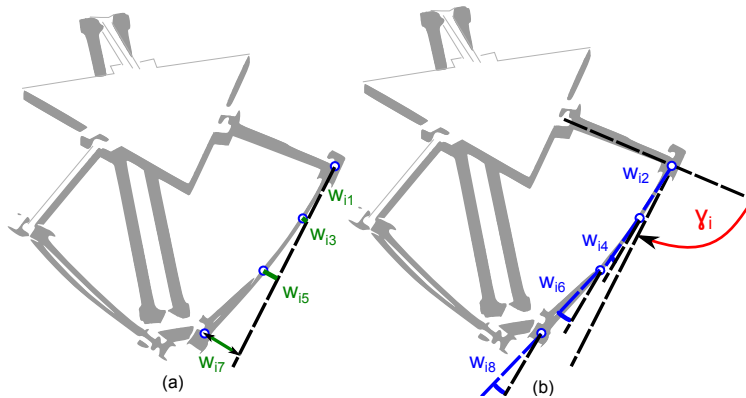


Figura 4.3: Grados de libertad de un eslabón flexible: a) Distancia de la deformación y b) Pendiente de la deformación.

En la Fig. 4.5, por su parte, se muestra el error entre ambas señales para cada uno de los nodos definidos en la Fig. 4.3. Como se ha justificado en el Capítulo 3, las condiciones de contorno del modelo “viga empotrada” son las más óptimas a la hora de definir los eslabones flexibles de este tipo de aplicaciones. Este modelo define que tanto la deformación como su pendiente en el primer nodo es nula. De hecho, en la Fig. 4.4 se puede apreciar como tanto en la estimación como en la medida, la deformación en este punto es nula. En el resto de nodos el error máximo de estimación es del orden de micrometros, $1\mu m$ en el nodo w_{13} , $4\mu m$ en el nodo w_{15} y $5\mu m$ en el nodo w_{17} , significando un 5%, 4% y 2% del rango de movimientos simulados, respectivamente.

Del mismo modo que se ha realizado para las deformaciones, en la Fig. 4.6 se compara gráficamente la evolución de la pendiente en los diferentes nodos que componen el eslabón flexible. En ella, se aprecia como de nuevo, la estimación es precisa a lo largo de toda la simulación. Cabe destacar que, tal y como se ha apuntado anteriormente, debido al modelo de viga elegido, la pendiente del primer nodo, w_{12} , es nula. Del mismo modo, se puede apreciar como las medidas obtenidas a partir de las simulaciones de MSC.Adams también constatan esta afirmación, ya que la pendiente medida es inferior a $10^{-15} m$.

En la Fig. 4.7, por su parte, se muestra el error para cada una de las pendientes de los nodos que forma el eslabón flexible de la cadena cinemática $i = 1$. Destacar, que la pendiente del nodo más alejado a la base, w_{18} , es la variable medida y a partir

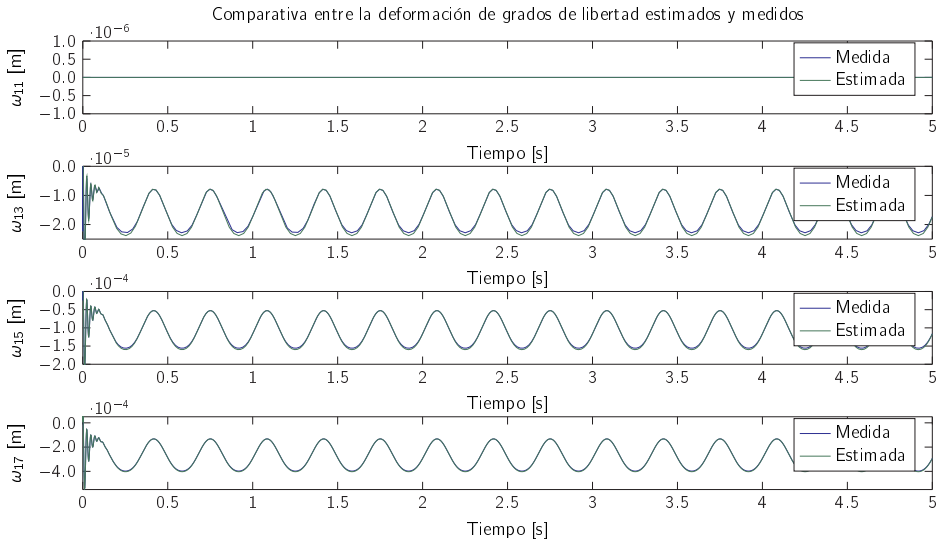


Figura 4.4: Comparativa entre la evolución de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.

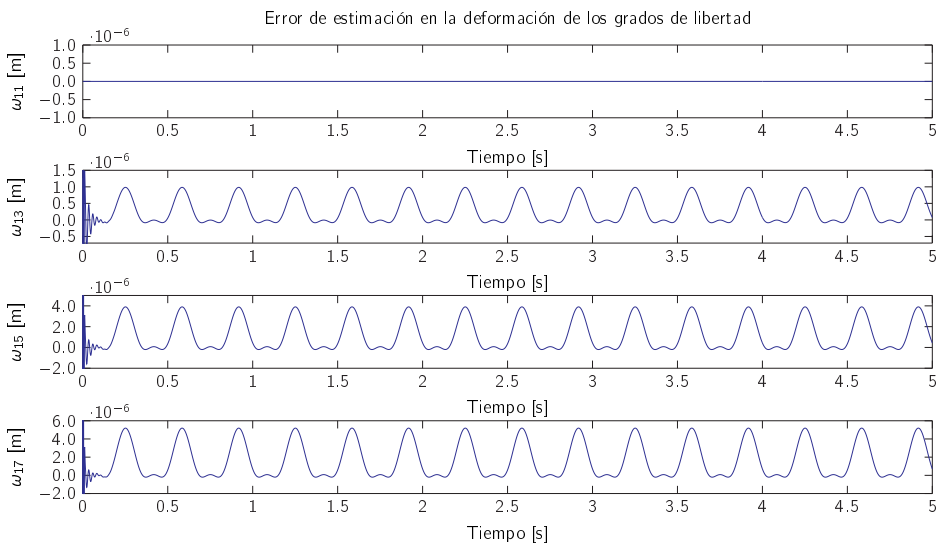


Figura 4.5: Error de estimación de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

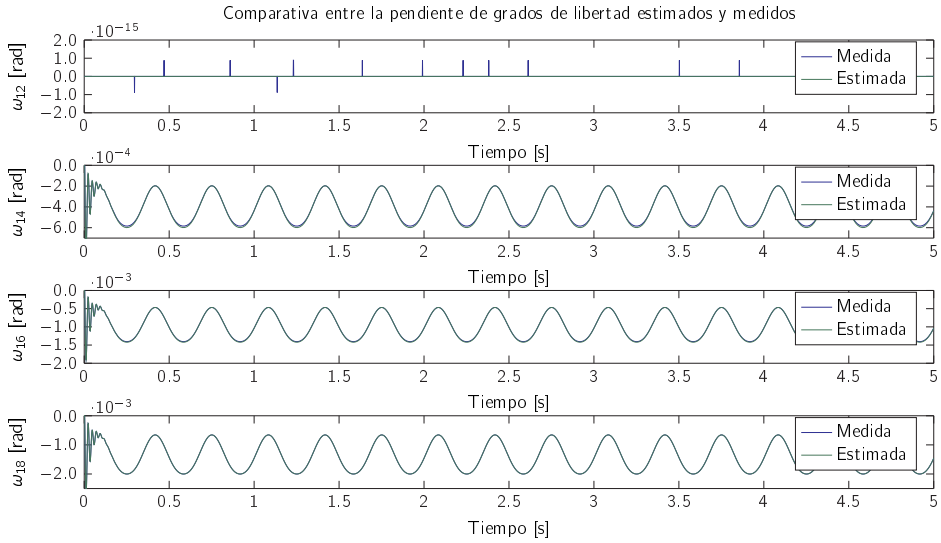


Figura 4.6: Comparativa entre la evolución de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.

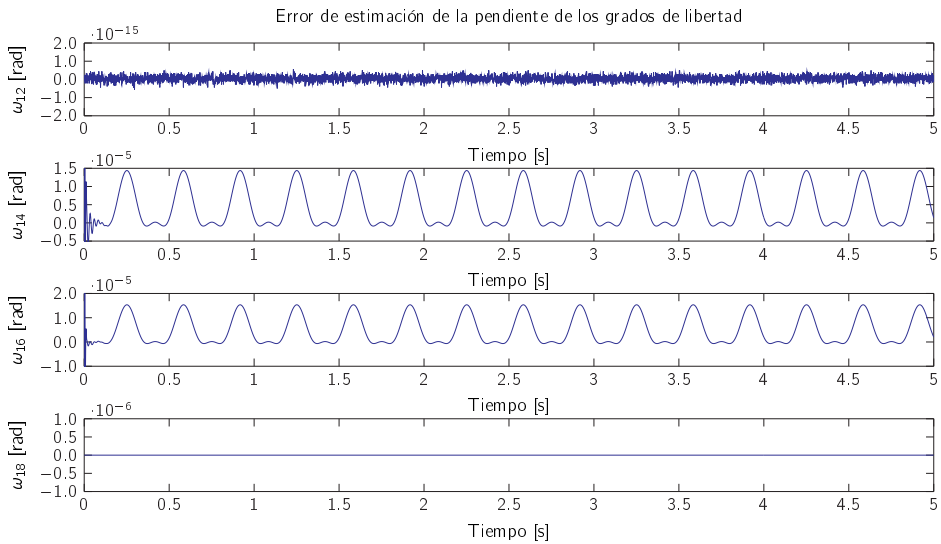


Figura 4.7: Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

de la cual se estiman el resto de variables flexibles. Es por ello que, en el caso de la pendiente de dicho nodo, no hay error de estimación. Por último, el máximo error de estimación de la pendiente en los nodos dos y tres son $15\mu rad$ para ambos casos, lo que supone un error del 3,75 % para la variable ω_{14} y un error del 0,67 % para la variable ω_{16} .

Como se ha mencionado, el estimador cinemático propuesto no solo es capaz de estimar la deformación y las pendientes en los diferentes nodos de los eslabones flexibles, sino que también es capaz de estimar la velocidad y la aceleración de cada una de ellas. Para ello, sólo se requiere la medida de la velocidad/aceleración de la pendiente de nodo medido, $\dot{\omega}_{18}$. Posteriormente, ésta es multiplicada por el vector propio, $\mathbf{X}_{1_{eig}}$ para estimar el resto de velocidades/aceleraciones.

A partir de este principio, en la Fig. 4.8 se comparan los resultados obtenidos en simulación y mediante el estimador desarrollado. En ella se puede apreciar como, después de un transitorio de entorno $50ms$, la estimación es precisa.

En la Fig. 4.9 se muestra gráficamente el error entre ambas señales, cuyo máximo, una vez pasado el periodo transitorio, es del orden de $10\mu m/s$. Una vez más, se puede ver como la deformación en el primer nodo es cero, tal y como estipula el modelo de viga empotrada. En el resto de nodos, se aprecia un error oscilante periódico cuya amplitud es de $20\mu m/s$ en el nodo $\dot{\omega}_{13}$, $50\mu m/s$ en el nodo $\dot{\omega}_{15}$ y $70\mu m/s$ en el nodo $\dot{\omega}_{17}$ lo que supone un error máximo del 6,65 %, 2,5 % y 1,15 %, respectivamente.

En cuanto a lo que representa la pendiente de los nodos, la comparativa entre ambas señales se muestra en la Fig. 4.10. Una vez más, se puede observar que la estimación es altamente fiel a la obtenida mediante el modelo simulado en MSC.Adams, habiendo, como en el caso anterior, un primer periodo transitorio. En la Fig. 4.11, por su parte, se puede ver la evolución del error a lo largo de la trayectoria, estando este acotado en el orden de $100\mu rad/s$. Como sucediera en la pendiente, debido a que la medida a partir de la cual se estima todas las variables de velocidad es la $\dot{\omega}_{18}$, el error en esta variable es nulo. Del mismo modo, es conocido que la velocidad de variación de la pendiente en el primer nodo, $\dot{\omega}_{12}$, también es nulo. En los otros dos nodos, $\dot{\omega}_{14}$ y $\dot{\omega}_{16}$, en cambio, el error máximo de estimación es de $200\mu rad/s$, lo que representa un 2,5 % y un 1 % de la amplitud máxima de cada una de las variaciones de las pendientes, respectivamente.

Para finalizar de validar la estimación de las variables flexibles que componen los eslabones inferiores, se han comparado la aceleración de cada una de las variables estimadas, tanto las deformaciones como las pendientes estimadas con los valores obtenidos en las simulaciones MSC.Adams.

En la Fig. 4.12, se aprecia comparativamente ambas señales para las variables de deformación del eslabón de la cadena cinemática $i = 1$. De nuevo se aprecia una estimación altamente precisa, donde el error máximo en el extremo del eslabón es inferior a $2mm/s^2$, lo que significa un 2,2 % de la aceleración de la deformación máxima, mientras que en el resto de nodos, el error máximo es del 5 % y 10 %, respectivamente, tal y como se observa en la Fig. 4.13.

Del mismo modo, en la Fig. 4.14 se compara la evolución de la aceleración de la pendiente. En la Fig. 4.15, por su parte, se representan los errores de estimación.

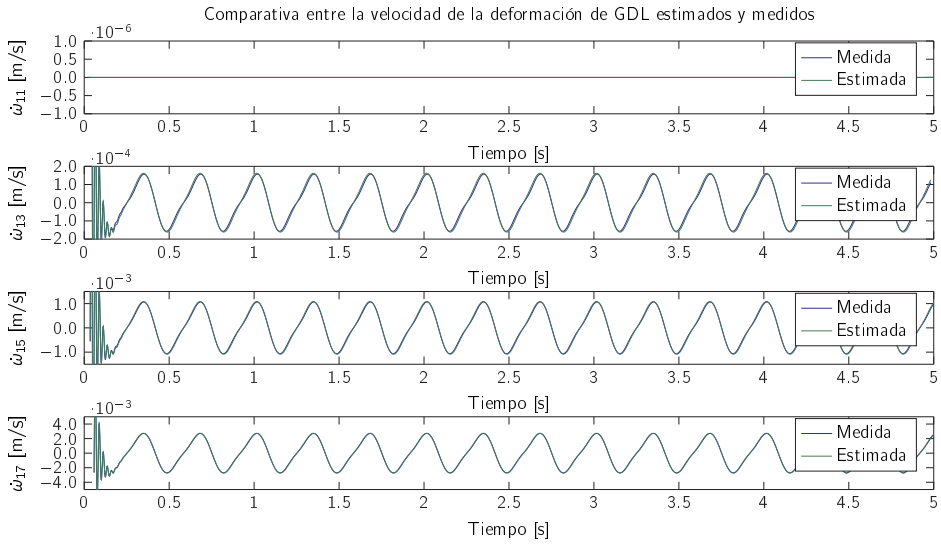


Figura 4.8: Comparativa entre la evolución de las velocidades de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.

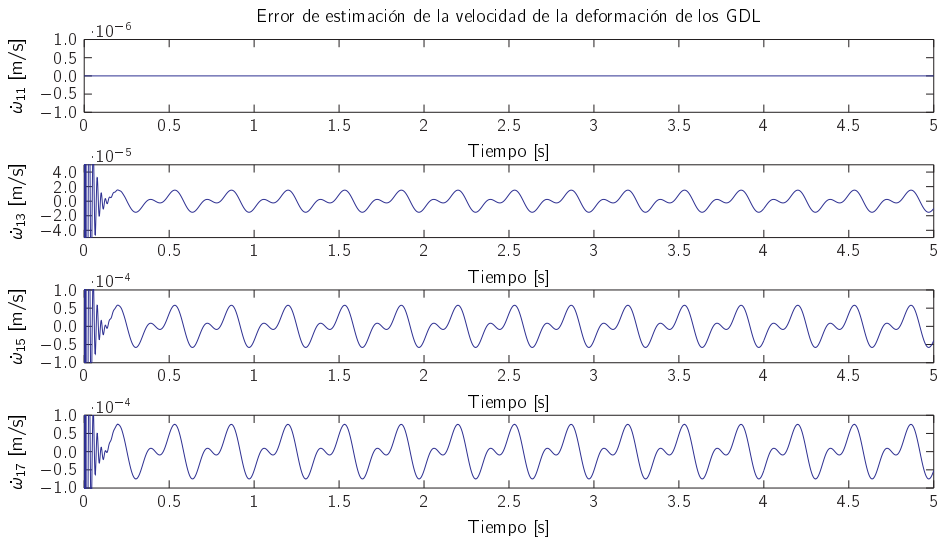


Figura 4.9: Error de estimación de las velocidades de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

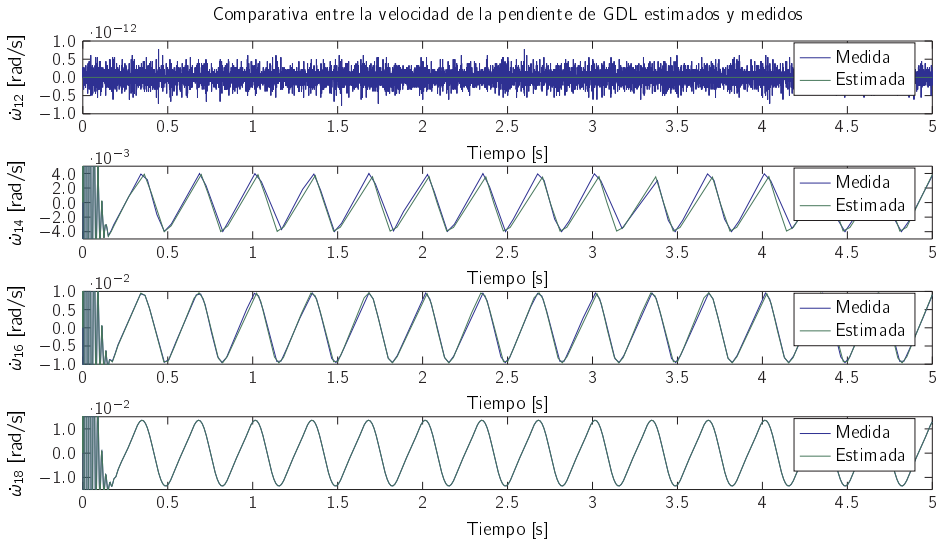


Figura 4.10: Comparativa entre la evolución de las velocidades de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.

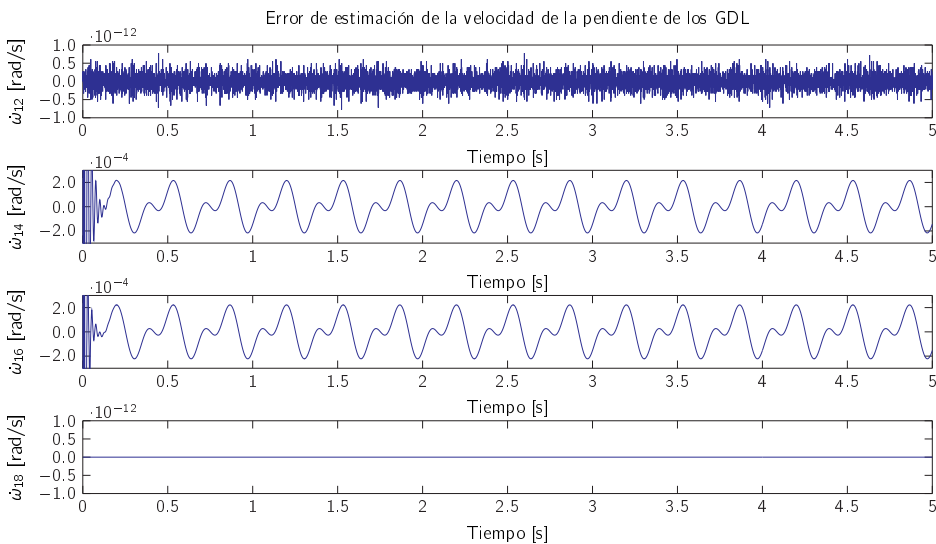


Figura 4.11: Error de estimación de las velocidades de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

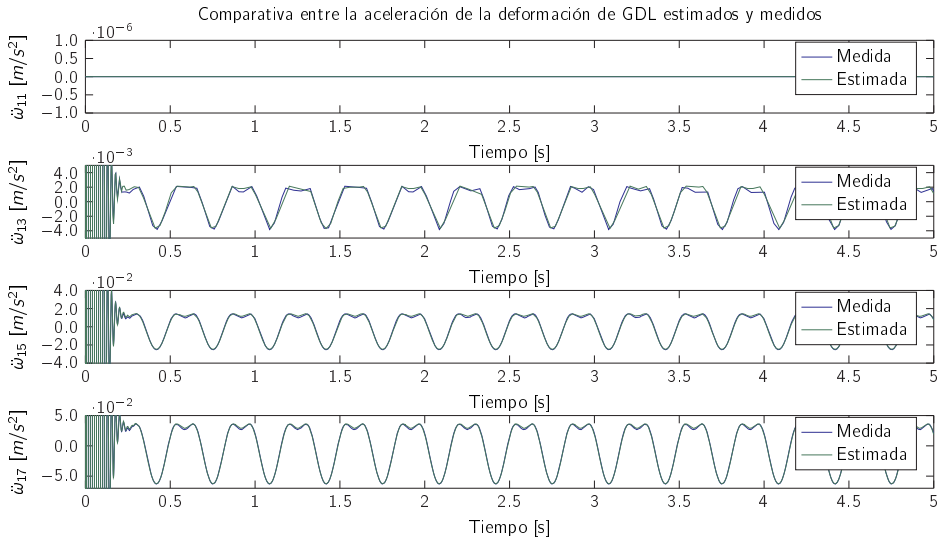


Figura 4.12: Comparativa entre la evolución de las aceleraciones de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.

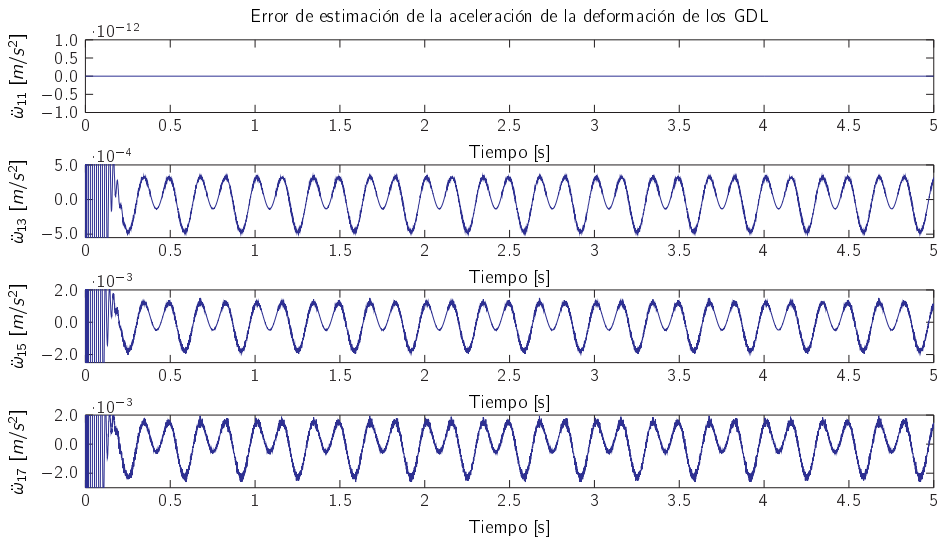


Figura 4.13: Error de estimación de las aceleraciones de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

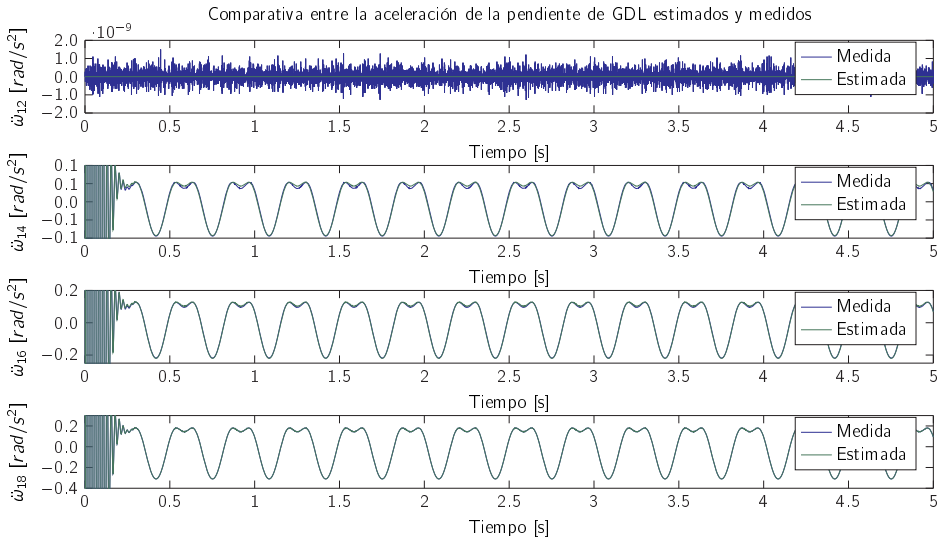


Figura 4.14: Comparativa entre la evolución de las aceleraciones de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.

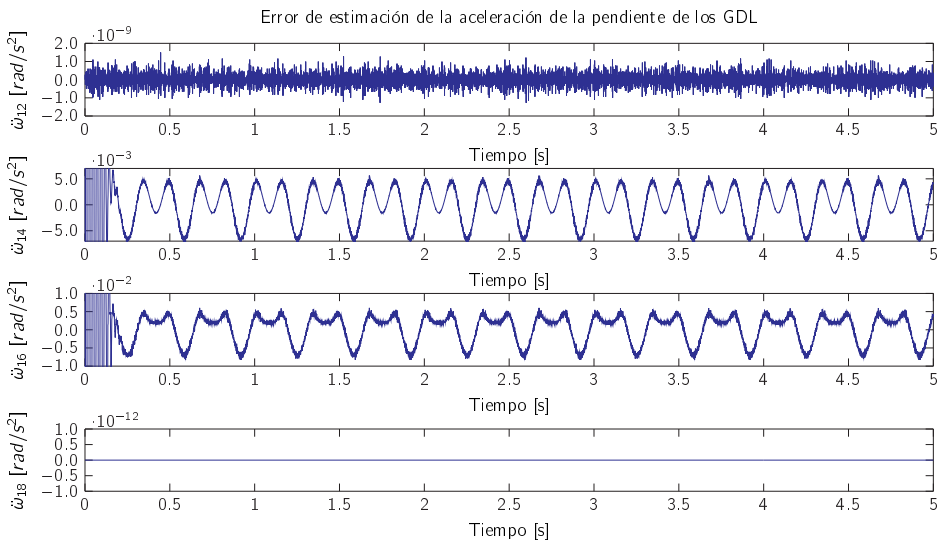


Figura 4.15: Error de estimación de las aceleraciones de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

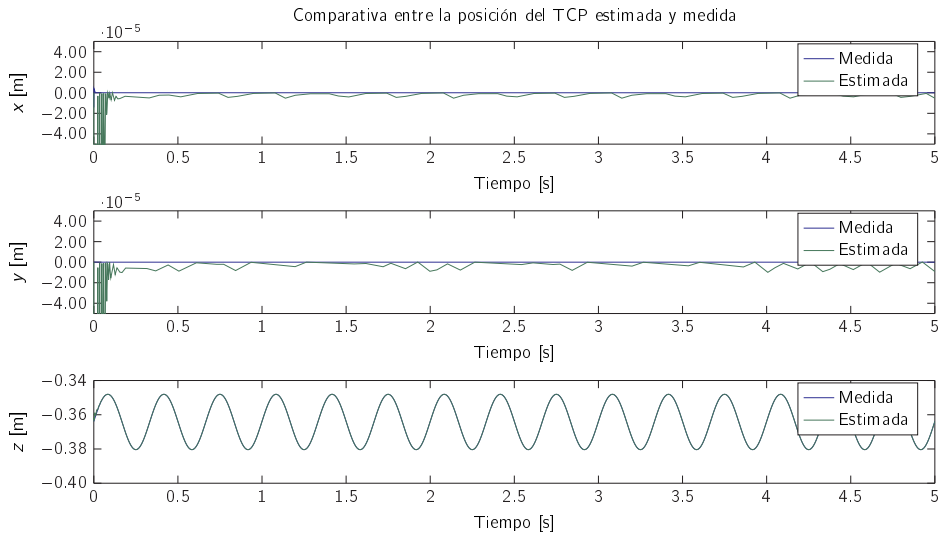


Figura 4.16: Comparativa entre la evolución de posición del TCP medida y estimada a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

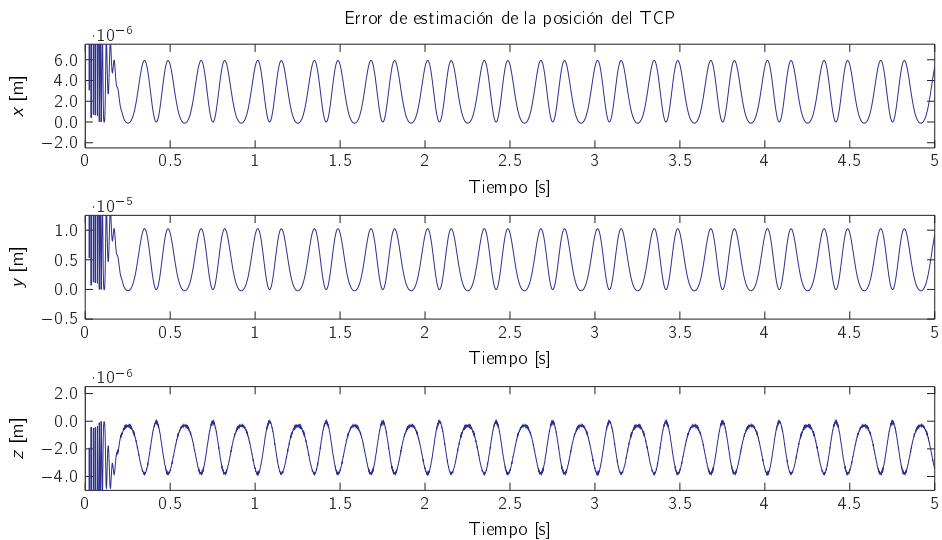


Figura 4.17: Error de estimación de la posición del TCP a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

En ella se puede ver como el error máximo de estimación en la aceleración de las pendientes es de 5 mrad/s^2 , lo que significa un error del 1,6 % de la aceleración máxima en $\ddot{\omega}_{14}$ y un 1,25 % en $\ddot{\omega}_{16}$.

Estimación de la posición del TCP

En segundo lugar, se ha cuantificado el rendimiento del estimador cinemático a la hora de estimar la posición del TCP. Para ello se ha resuelto el Problema Cinemático Directo para el caso de la trayectoria simétrica en el eje z definida por la Eq. (4.14) y los resultados obtenidos. Tal y como se ha expuesto en el Capítulo 3, para resolver el Problema Cinemático Directo se utiliza la ecuación de lazo, Eq. (3.85). Ésta permite estimar la posición del TCP en términos del ángulo de la articulación actuada y de la deformación en el último nodo del eslabón flexible.

Por lo tanto, conociendo el ángulo y la deformación del extremo, la cual ha sido obtenida mediante el estimador presentado en la sección anterior (Sección 4.2), y aplicando la ecuación de cierre en cada iteración de la trayectoria simétrica en el eje z, se puede obtener la evolución de la posición del TCP para cada uno de los tres ejes (x, y, z). Los datos de cada uno de estos tres ejes se compara gráficamente con los datos adquiridos en la simulación de MSC.Adams, obteniendo así la Fig. 4.16. En ella se puede apreciar, una vez más, la precisión del estimador desarrollado.

Destacar que para un movimiento puro en el eje z, los movimientos en los otros dos ejes, eje x e y, han de ser cero. Sin embargo, tal y como se puede apreciar en la Fig 4.17, en la estimación realizada existe un pequeño error en ambos ejes, siendo el error máximo de cada uno de ellos de $6\mu\text{m}$ y $10\mu\text{m}$, respectivamente. El movimiento en el eje z, por su parte, se observa que la estimación tiene un error máximo de $4\mu\text{m}$, lo que representa un error porcentual del 0.01 % de la amplitud del movimiento en dicho eje.

Por lo tanto, pese a las aproximaciones realizadas y teniendo en cuenta la simplicidad del estimador y el poco coste computacional de este, la estimaciones realizadas son altamente precisas para el caso de la trayectoria en el eje z, tal y como reflejan las simulaciones realizadas.

4.3.1.2. Validación experimental

Al igual que se ha realizado en la validación experimental del modelo dinámico, el estimador desarrollado en este capítulo se ha validado haciendo uso del prototipo descrito en la Sección 3.5.2.11. Sin embargo, para este nuevo escenario, además de los datos utilizados en el capítulo anterior, se ha dispuesto de tres encoders rotacionales colocados en cada una de las articulaciones de la base móvil, tal y como se representa en la Fig. 4.2 y en la Fig. 4.18.

Mediante dichos encoders se mide el rotación de la articulación que une la base móvil con cada uno de los paralelogramos que componen los eslabones inferiores, ϕ_{enc_i} . En el caso de la robótica rígida, este ángulo es complementario al giro definido por la variable γ_i . En la robótica flexible, sin embargo, este giro viene definido por

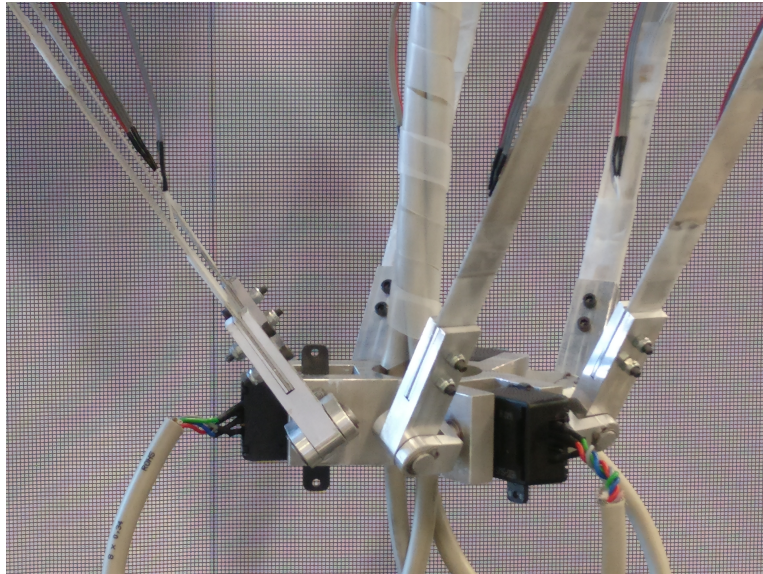


Figura 4.18: Figura en detalle de los encóders rotacionales (en negro) en la plataforma móvil del prototipo real.

el ángulo complementario de la variable γ_i y por la pendiente de la deformación en ese punto, ω_{iB} . Por lo tanto, a partir de la medida de dicha articulación se obtiene directamente dicha pendiente.

$$\omega_{iB} = \phi_{enc_i} - \gamma_i - \pi \quad (4.15)$$

Los datos son adquiridos mediante una myRIO, un dispositivo embebido que dispone una FPGA que garantiza la adquisición y el cálculo de los datos en Tiempo Real. Una vez calculados dichos datos estos son enviados para su almacenamiento a un PC via USB. Con todo ello, el esquema de conexionado descrito en la Fig. 3.42 se ha modificado de forma que el sistema de adquisición de datos queda descrito por la Fig. 4.19

Por lo tanto, y haciendo uso de la sensórica descrita se ha tratado de validar el estimador cinemático en el prototipo real. Para ello, en este primer caso de estudio se ha definido una trayectoria simétrica a lo largo del eje vertical z .

En dicho movimiento se han adquirido los ángulos de giro de las articulaciones activas, q_{a_i} , y los datos obtenidos de los encóders robotacionales. A partir de estos datos, y aplicando las ecuaciones definidas en este capítulo, se ha estimado la deformación en cada nodo de los paralelogramos flexibles. Estas estimaciones se han comparado, posteriormente, con los datos obtenidos mediante las galgas extensiométricas, pudiendo comparar tanto las deformaciones como las pendientes de estas en cada nodo.

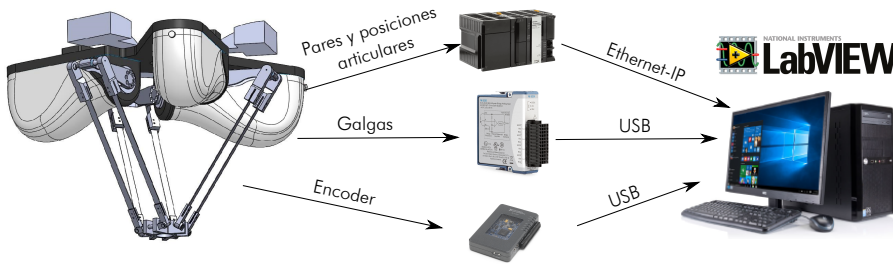


Figura 4.19: Esquema del conexionado para la validación experimental del estimador cinemático.

Debido a la simetría de la señal, la respuesta de cada una de las patas $i = 1, 2$ y 3 es equivalente. Por lo tanto, y para no repetir las mismas conclusiones, en este documento se comparará la respuesta en una sola pata, asumiendo que las conclusiones que se extraigan de ella son extrapolables al resto de patas.

Con todo ello, en la Fig. 4.20 se pueden ver, de forma sobrepuesta la evolución de la deformación en los cada uno de los nodos (véase Fig. 4.3). En ella se puede apreciar como en el primer nodo, ω_{i1} la deformación es siempre nula, ya que este punto está anclado en la articulación pasiva. Cabe destacar, que cuanto más alejado se encuentra el nodo de la base del eslabón, ω_{i1} , mayor es la deformación a la cual está sometido. Por lo tanto, una vez más, este efecto ratifica la decisión de utilizar las condiciones de contorno propias de la viga empotrada.

Con todo ello se aprecia que que ambas señales tienen una respuesta dinámica similar, siendo el error máximo de estimación de las deformaciones inferior al 8,75 %, 7,83 % y 6 % de la amplitud máxima de cada uno de los nodos, tal y como se aprecia en la Fig. 4.21.

De la misma forma que para las deformaciones, en la Fig. 4.22 se han representado sobre el mismo gráfico las estimaciones y las medidas obtenidas de las pendientes de los nodos. En este caso, y como ocurriera con el las deformaciones, la pendiente en la base del eslabón ω_{i1} es nula. De igual forma, y como cabía esperar, la pendiente también se incrementa a lo largo del eslabón.

Como ocurre en el caso de las simulaciones, el error de estimación en el extremo del eslabón, ω_{i8} , es nulo ya que es el punto a partir del cual se estiman el resto de valores. Con ello, los errores de estimación de la pendiente en los nodos ω_{i4} y ω_{i6} , son $90\mu rad$ y $110\mu rad$, respectivamente, lo que supone errores inferiores al 9 % de la amplitud.

Como se ha mencionado a lo largo de este capítulo, el método de estimación presentado permite, no solo predecir la deformación y su pendiente, ω , sino que mediante el mismo vector característico obtener las velocidades, $\dot{\omega}$ y aceleraciones, $\ddot{\omega}$, tal y como se ha demostrado en la validación de la simulación. Sin embargo, para el caso de la validación experimental, no se ha comparado su respuesta ya que no

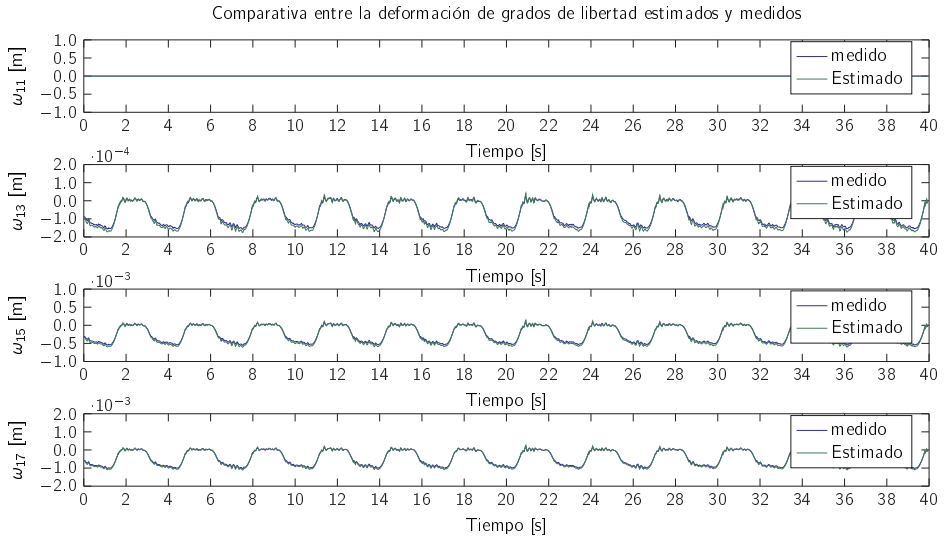


Figura 4.20: Comparativa entre la evolución de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida experimentalmente y estimada mediante el modelo matemático para la trayectoria simétrica en el eje z.

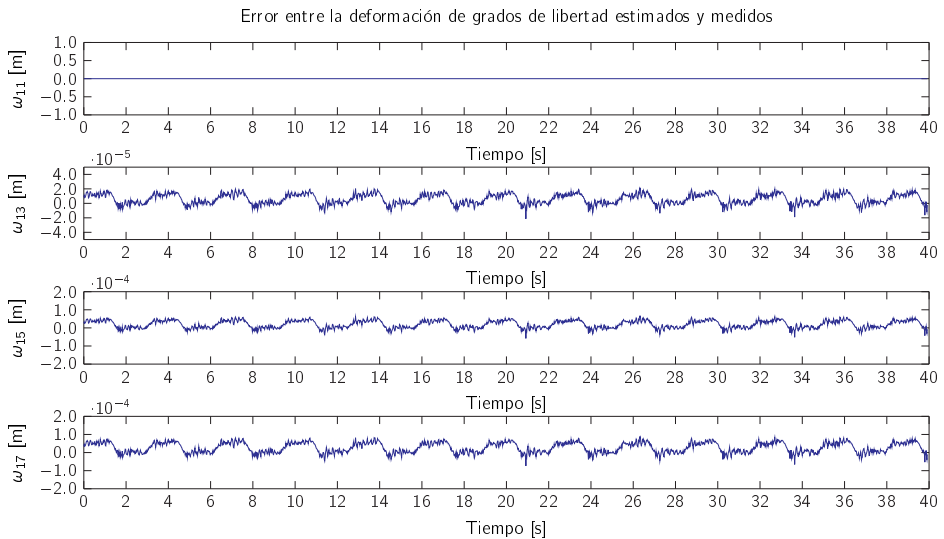


Figura 4.21: Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

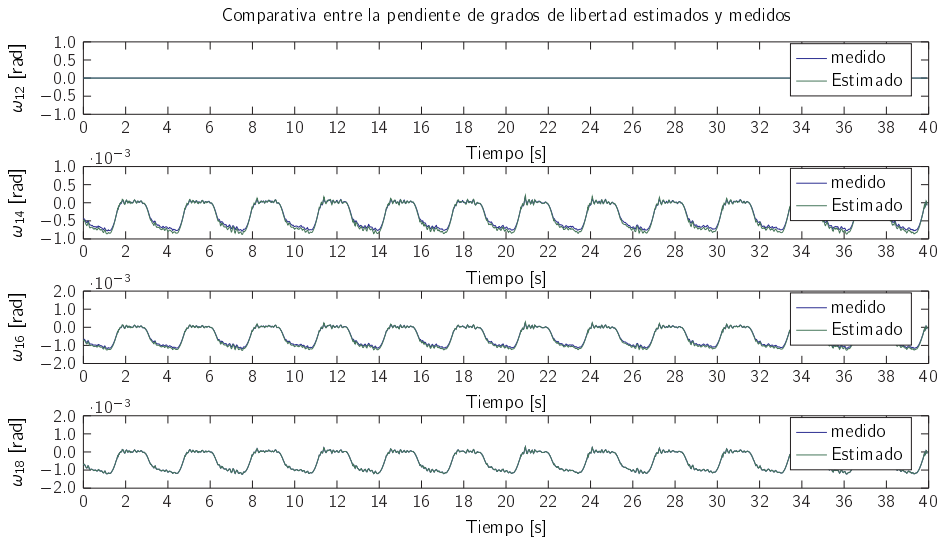


Figura 4.22: Comparativa entre la evolución de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida experimentalmente y estimada mediante el modelo matemático para la trayectoria simétrica en el eje z.

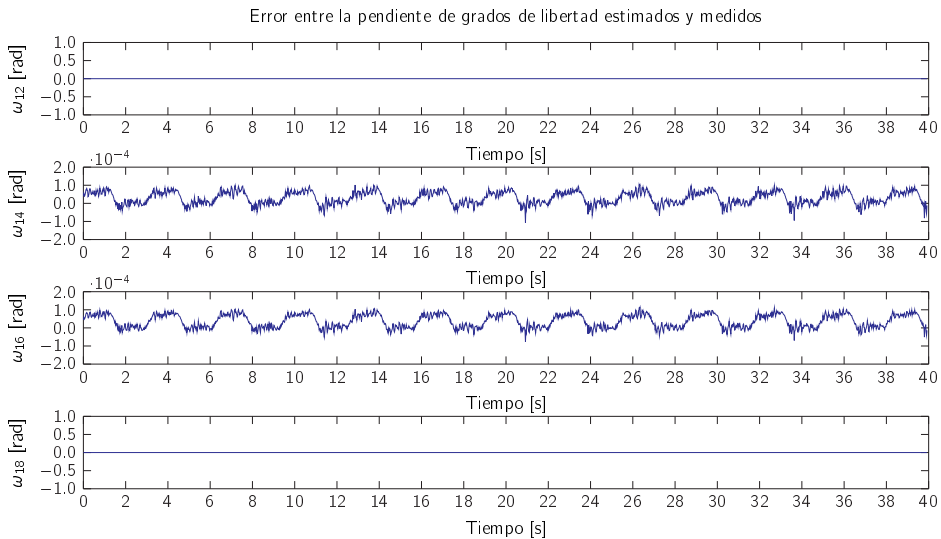


Figura 4.23: Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.

se disponen medidas de las velocidades y aceleraciones, y se requeriría derivar ambos señales.

Con todo ello, analizando los resultados obtenidos tanto en simulación como mediante el prototipo real se puede dar por validado el estimador para el caso de un movimiento simétrico en el eje z . En ellos se aprecia como en todos los casos, el comportamiento dinámico es reproducido fielmente y que los errores máximos no superan el 10 %.

4.3.2. Validación mediante movimientos complejos

Tal y como se ha realizado para la validación del modelo dinámico, el estimador cinemático se ha validado también mediante una trayectoria donde sus patas no se mueven de forma simétrica. De esta forma, se puede observar la respuesta del estimador ante cualquier trayectoria aleatoria. Para este caso, el prototipo ha sido sometido a una trayectoria circular con desplazamiento vertical.

4.3.2.1. Validación en simulación mediante movimientos senoidales

Para analizar la validez del estimador en cualquier tipo de trayectoria, se somete el modelo del robot Delta simulado en MSC.Adams a la trayectoria utilizada en la validación del modelo, Sección 3.5.2.10, la cual excita un rango amplio de frecuencias dentro del ancho de banda operacional del robot. Para ello, al igual que en la validación del modelo, se han aplicado movimientos sinusoidales de diferentes frecuencias a las articulaciones activas \mathbf{q}_a ,

$$q_{a_i} = 0.5 \sin(2\pi \omega_f t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.16)$$

donde $\omega_{f_1} = 3 \text{ rad/s}$, $\omega_{f_2} = 0.75 \text{ rad/s}$, $\omega_{f_3} = 1.2 \cdot 3 \text{ rad/s}$ y t es el tiempo que esta definido entre 0 y 5s.

Estimación de la deformación en el eslabón

Realizando un análisis similar al realizado para la trayectoria simétrica en el eje z , en primer lugar se ha cuantificado la precisión del estimador. En este caso, y al contrario que en la sección anterior, cada cadena cinemática se ha excitado mediante movimientos diferentes. Sin embargo, la precisión obtenida para cada una de ellas es muy similar, por lo que en este documento sólo se analizará el comportamiento de una única cadena cinemática, siendo extensibles las conclusiones obtenidas de su análisis al resto de ellas.

En la Fig. 4.24, se muestra la evolución de cada una de las variables de deformación, tanto para el estimador presentado como para el simulado mediante el software de simulación Multibody MSC.Adams. En ella, se aprecia el cálculo del estimador es suficientemente preciso y sigue con una mínima diferencia (del orden 10^{-5} , ver Fig. 4.25 del error) las medidas de simulación obtenidas.

Este error es algo mayor que el obtenido con la trayectoria simétrica en z , lo cual resulta lógico dado el aumento de componentes en la trayectoria. Sin embargo, tal

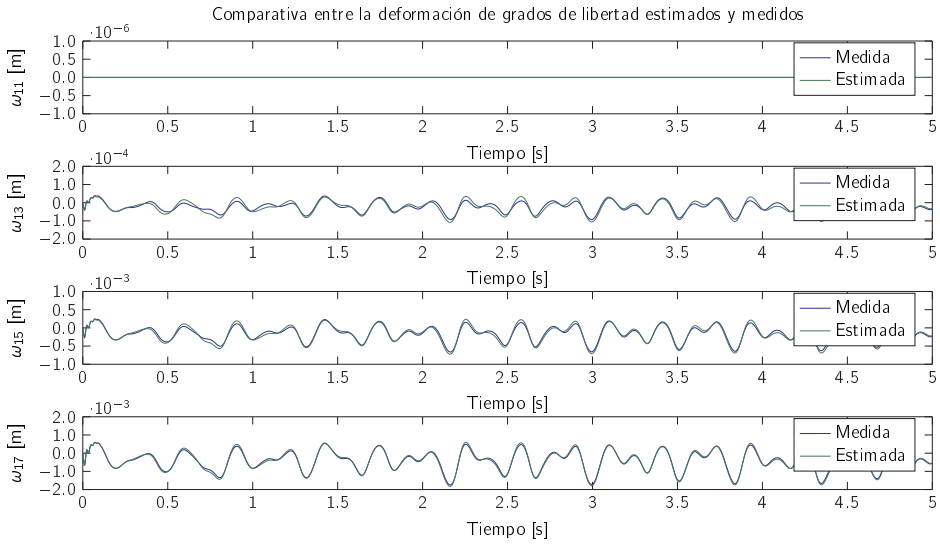


Figura 4.24: Comparativa entre la evolución de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria aleatoria

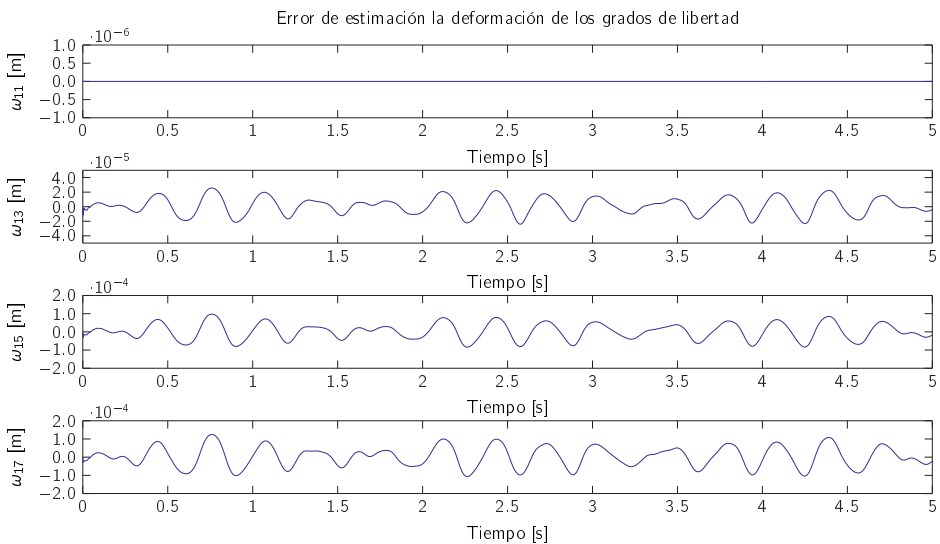


Figura 4.25: Error de estimación de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria aleatoria.

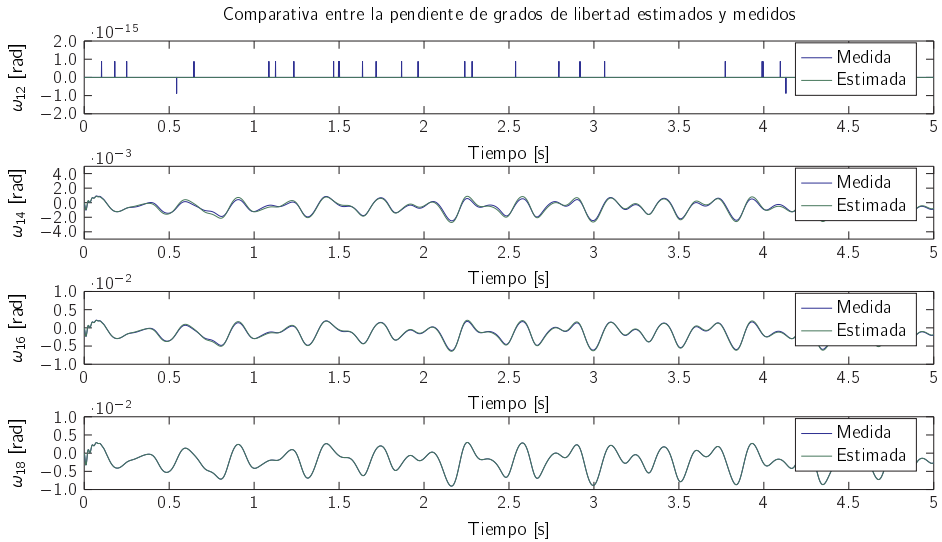


Figura 4.26: Comparativa entre la evolución de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria aleatoria.

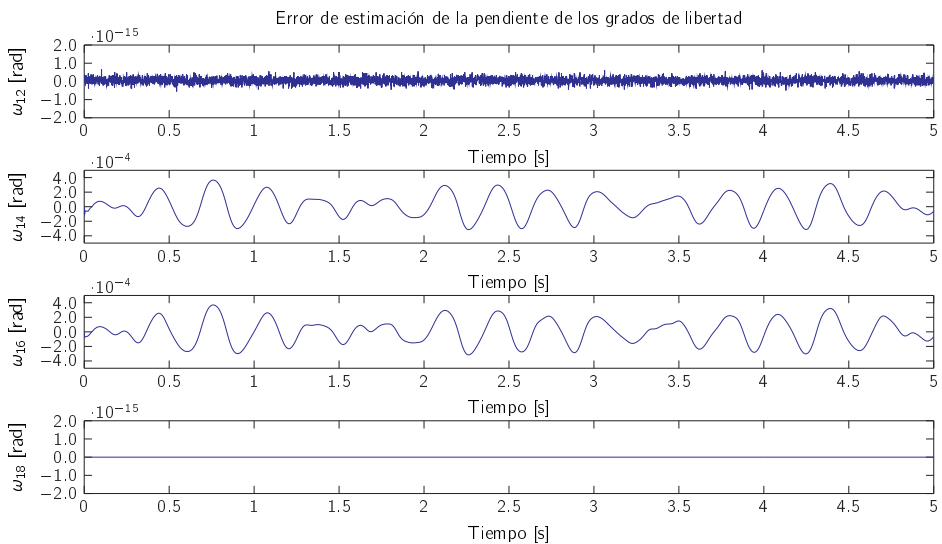


Figura 4.27: Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria aleatoria.

y como se observa en la Fig. 4.25, el error máximo de cada una de las variables de deformación (ω_{13} , ω_{15} y ω_{17}), es de $30\mu m$, $100\mu m$ y $100\mu m$, respectivamente. Estos errores representan, para cada variable un error del 15 %, 10 % y un 3 %, de la amplitud máxima de la deformación en cada uno de los nodos.

La evolución de la pendiente de cada uno de los nodos se puede analizar en la Fig. 4.26, donde se comparan evolución de las pendientes estimadas con los datos de simulación obtenidos mediante el software Multibody MSC.Adams.

Pese a que en la Fig. 4.26 se observa que la estimación realizada es precisa tanto en dinámica como en amplitud, en la Fig. 4.27 se representan los errores de estimación de cada una de las variables de pendiente. Del estudio de ésta se obtienen que los errores de estimación máximos obtenidos a lo largo de la simulación son inferiores a $400\mu m$, tanto para la variable ω_{14} como para la variables ω_{16} . Estos errores constituyen un error máximo de un 13 % y un 5 % de la amplitud de cada una de las pendientes. Nótese que, la pendiente en el nodo del extremo, ω_{18} , es la variable medida a partir de la cual se obtienen el resto de estimaciones. Por lo tanto, el error en ella es cero.

Del mismo modo que en los casos de las deformaciones y sus respectivas pendientes, utilizando el mismo vector propio, se puede estimar la velocidad y la aceleración de las variaciones de éstas, tal y como se especifica en la Sección 4.2. Por lo tanto, también se ha analizado la precisión de estimación de las velocidades y las aceleraciones de cada una de las variables flexibles.

La velocidad de la deformación estimada, por ejemplo, se ha comparado gráficamente en la Fig. 4.28. En ella, se puede apreciar que la estimación sigue la dinámica de los datos medidos en el software de simulación.

La Fig. 4.29, por su parte, representa los errores de estimación para cada una de las variables de velocidad de las deformaciones. En ella se puede apreciar que el error máximo de predicción de la velocidad de deformación en el extremo del eslabón, ω_{17} , es de $2,5 mm/s^2$, un 3,12 % de la amplitud de la velocidad de deformación en dicho nodo. Este error sube al 6,6 % ($2 mm/s^2$) y 12,5 % ($0,5 mm/s^2$) de la amplitud para las variables ω_{15} y ω_{13} , respectivamente.

Al igual que en el caso de la velocidad de la deformación, en la Fig. 4.30 se ha comparado de la evolución de las velocidades de las pendientes en cada uno de los nodos, tanto mediante el modelo del estimador como mediante la medida en simulación. En ella se puede apreciar como la predicción es incluso mejor que en el caso de la velocidad de la deformación.

En la Fig. 4.31, se demuestra dicha afirmación de forma gráfica, ya que tal y como se puede apreciar en la imagen, el error máximo en el segundo, ω_{14} , y en el tercer nodo, ω_{16} , es del 6,6 % y del 5 % de la amplitud de la velocidad de la pendiente en cada una de las variables, respectivamente.

Del mismo modo, en la Fig. 4.32 se representa la comparación gráfica de la evolución de los datos medidos y estimados de la aceleración de la deformación en cada uno de los nodos que componen el eslabón flexible de la cadena cinemática $i = 1$.

En ella se aprecia, de nuevo, una estimación altamente precisa, donde el error máximo en el extremo del eslabón es inferior a $0.5 mm/s^2$, lo que significa entorno a

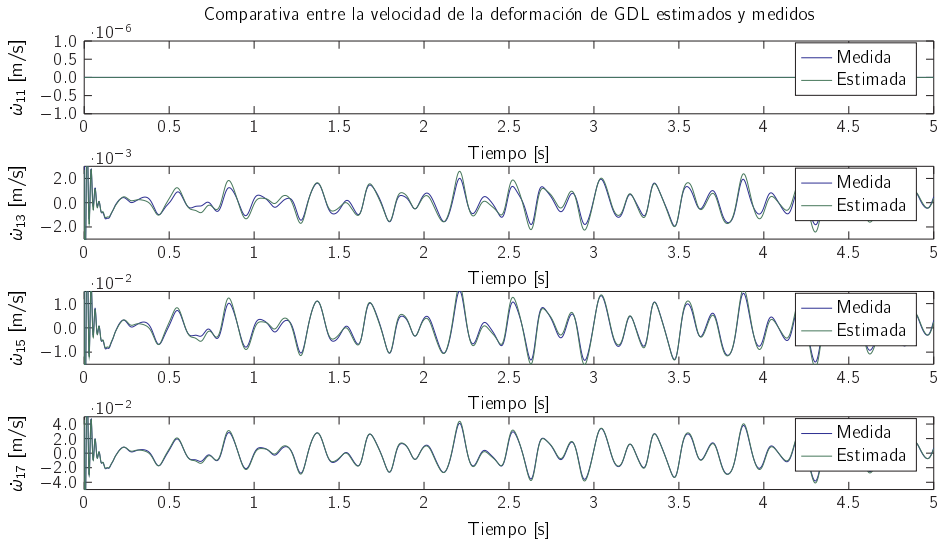


Figura 4.28: Comparativa entre la evolución de las velocidades de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria aleatoria.

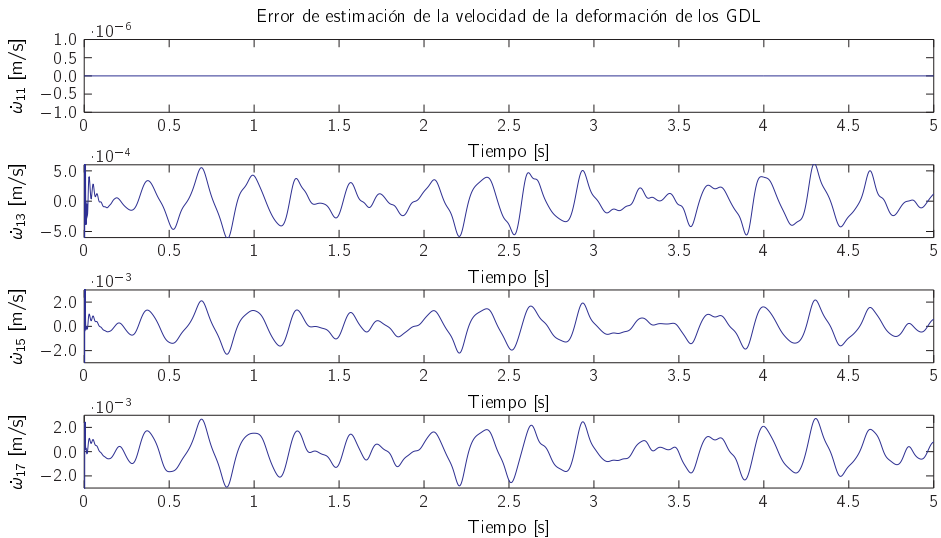


Figura 4.29: Error de estimación de las velocidades de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria aleatoria.

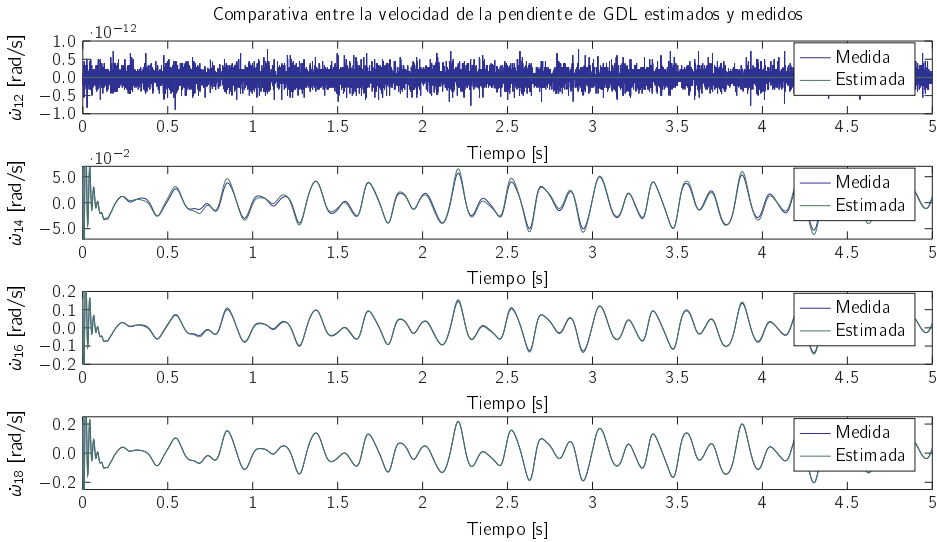


Figura 4.30: Comparativa entre la evolución de las velocidades de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria aleatoria.

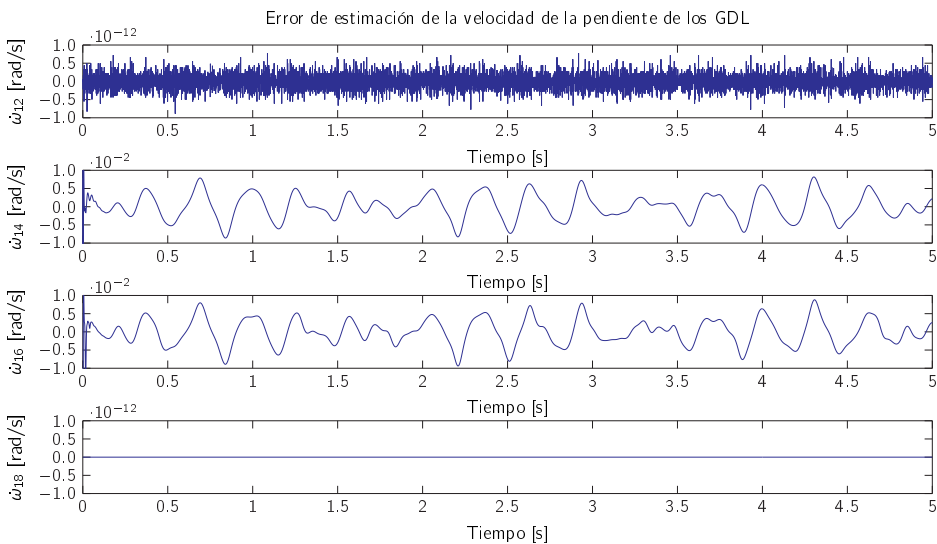


Figura 4.31: Error de estimación de las velocidades de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria aleatoria.

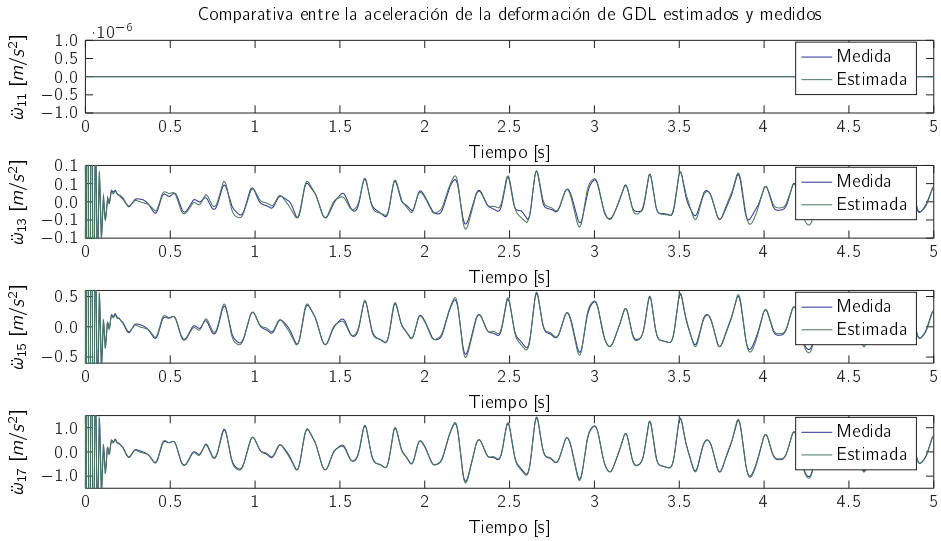


Figura 4.32: Comparativa entre la evolución de las aceleraciones de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria aleatoria.

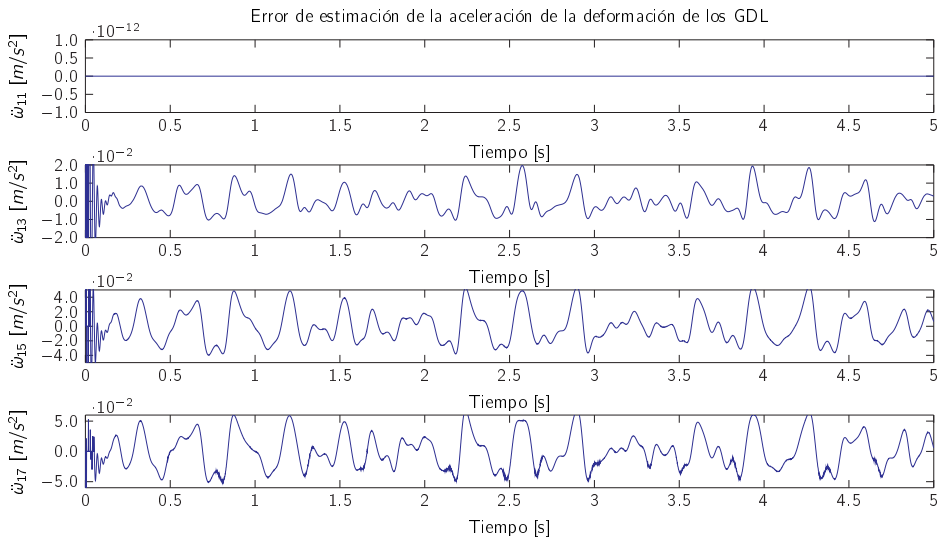


Figura 4.33: Error de estimación de las aceleraciones de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria aleatoria.

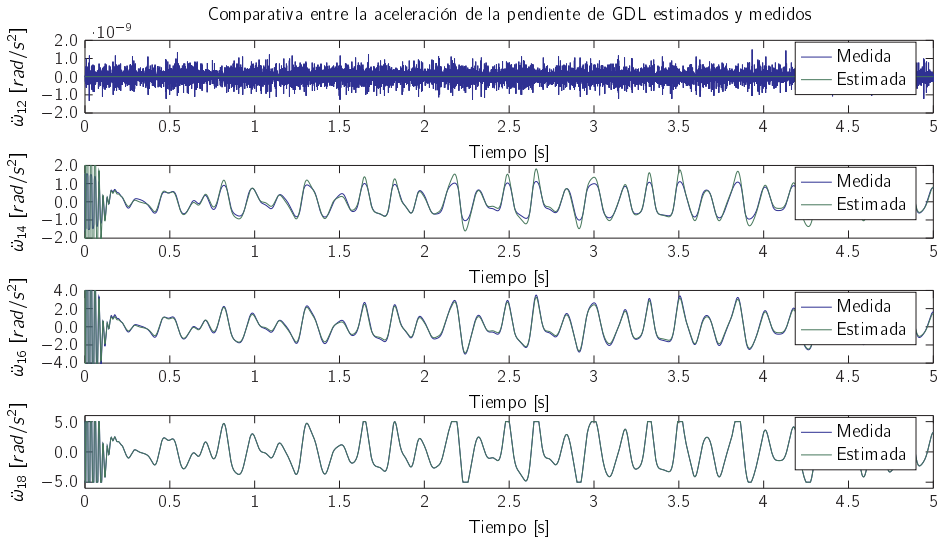


Figura 4.34: Comparativa entre la evolución de las aceleraciones de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria aleatoria.

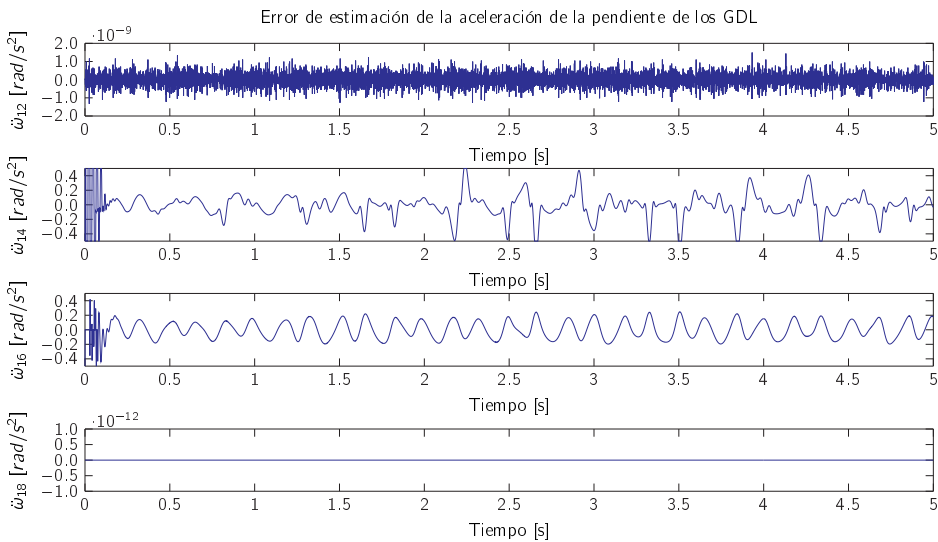


Figura 4.35: Error de estimación de las aceleraciones de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria aleatoria.

un 2,5 % de la aceleración en la deformación máxima, mientras que en el resto de nodos el error máximo es del 6,6 % y 12,5 %, respectivamente, tal y como se observa en la Fig. 4.33. Estos errores suponen un error absoluto máximo de 2 mm/s^2 tanto para la variable $\dot{\omega}_{13}$ como para la variable $\dot{\omega}_{15}$.

Por último, la evolución de la aceleración de la pendiente se compara en la Fig. 4.34. En la Fig. 4.35, por su parte, se representan los errores de estimación. En ella se puede ver como el error máximo de estimación en la aceleración de las pendientes es de 10 mrad/s , lo que significa un error del 10 % de la aceleración máxima en el segundo nodo del eslabón flexible, $\ddot{\omega}_{14}$, y un 2,5 % en el tercer nodo, $\ddot{\omega}_{16}$.

Estimación de la posición del TCP

En segundo lugar, una vez validada la precisión del estimador para cada una de las variables flexibles de los eslabones inferiores, se ha procedido a analizar la validez de éste a la hora de calcular la posición del TCP ante la trayectoria aleatoria definida anteriormente, Eq. (4.16).

Para ello se ha aplicado la solución al Problema de Posición Directo definido en la Sección 3.5.2.1, mediante la cual se define la posición del TCP a partir de la rotación de las articulaciones activas, \mathbf{q}_{a_i} , y la deformación de los eslabones flexibles en el último nodo, ω_{i7} , para cada una de las cadenas cinemáticas $i = 1, 2$ y 3. Nótese que mediante este procedimiento se analiza, por un lado, la precisión del estimador a la hora de calcular la deformación de ω_{i7} y por otro la del Problema de Posición Directo.

En la Fig. 4.36 se ha comparado la estimación obtenida a partir de la resolución del IKP y los datos medidos a partir de los sensores implementados en el software de simulación MSC.Adams para cada una de las coordenadas de posición, ejes xyz . En ella se puede apreciar como ambas señales evolucionan, en los tres ejes, con dinámicas y amplitudes muy similares.

En la Fig. 4.37, por su parte, se analiza en detalle el error cometido en la estimación de la posición del TCP en cada uno de los ejes. En el eje x , se puede apreciar que el error máximo es de 2 mm , lo que supone un 0,5 % del desplazamiento máximo en ese eje. Sin embargo, el valor RMS baja por debajo de los $550 \mu\text{m}$ y el error medio hasta los $363 \mu\text{m}$.

En el eje y , en cambio, el error máximo asciende ligeramente hasta los $2,5 \text{ mm}$, un 0,83 % de la amplitud en dicho eje. Del mismo modo, el error RMS se situó en los $770 \mu\text{m}$ y el error medio en $540 \mu\text{m}$ para toda la trayectoria analizada.

Por último, en el eje vertical z , el error absoluto se reduce hasta los $1,2 \text{ mm}$. Sin embargo, debido al menor rango de movimiento en este eje, dicho error supone un 0,75 % del desplazamiento máximo en el eje. Por su parte, los errores RMS y medios para este eje son $340 \mu\text{m}$ y $220 \mu\text{m}$, respectivamente.

Cálculo del par a partir de los datos del estimador

En el capítulo anterior, Capítulo 3, se analiza la precisión del modelo dinámico para la misma trayectoria que se ha utilizado en esta sección para la validación del estimador cinemático. Sin embargo, a la hora de calcular el modelo dinámico se han utilizado

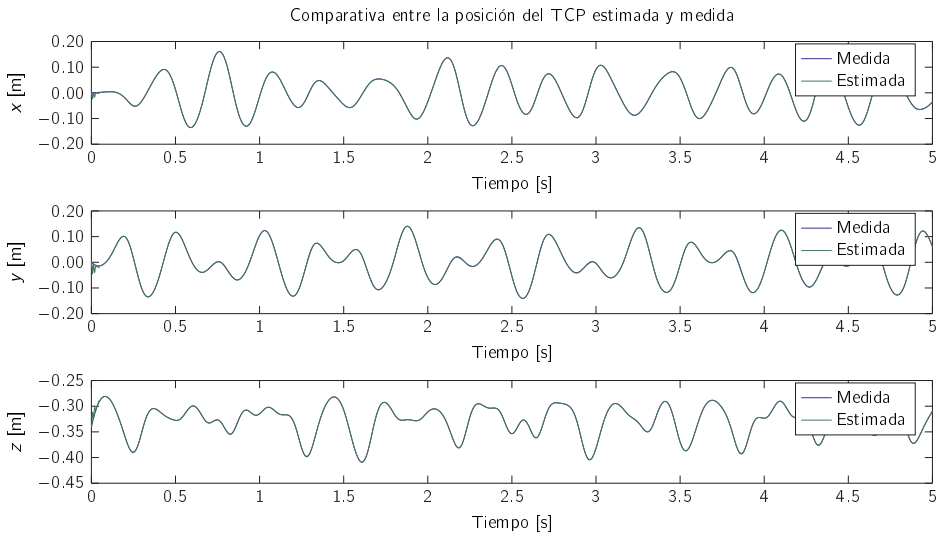


Figura 4.36: Comparativa entre la evolución de posición del TCP medida y estimada a lo largo de la trayectoria aleatoria.

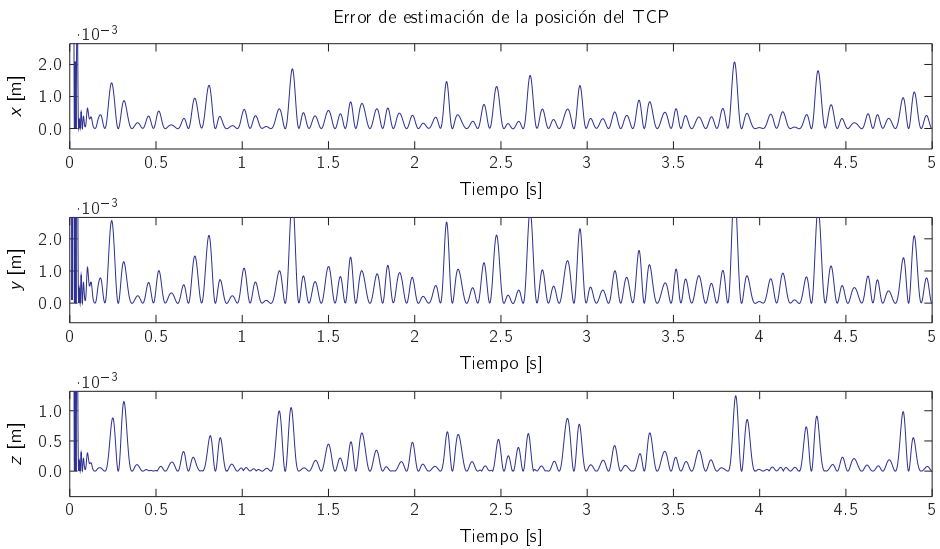


Figura 4.37: Error de estimación de la posición del TCP a lo largo de la trayectoria aleatoria.

los datos de deformación y pendiente, ω , y sus respectivas derivadas, $\dot{\omega}$ y $\ddot{\omega}$, obtenidos a partir de las medidas realizadas mediante el software de simulación Multibody MSC.Adams. Sin embargo, tal y como se ha comentado a lo largo de este capítulo, la medida de estas deformaciones no es trivial. Es por ello que en este capítulo se ha desarrollado el Estimador Cinemático. Por lo tanto, en las siguientes líneas se analiza el error de precisión del modelo dinámico cuando se hace uso del estimador.

En primer lugar, se han comparado los pares medidos mediante el software de simulación MSC.Adams y los estimados a partir del modelo matemático cuando el robot no está expuesto a ninguna carga. Como se aprecia en la Fig. 4.38, el modelo matemático sigue siendo capaz de estimar fielmente la dinámica del sistema. En la Fig. 4.39 se aprecia el error de estimación entre los pares medidos y los estimados, siendo el máximo error de $0,2583 Nm$, $0,2253 Nm$ y $0,294 Nm$ para las cadenas cinemáticas $i = 1, 2$ y 3 , respectivamente; lo que significa un error del $4,077\%$, $4,803\%$ y $3,774\%$ de cada amplitud. Además, el error medio del sistema no alcanza el $1,1\%$ ($0,8197\%$, $1,075\%$ y $0,7085\%$, respectivamente) del rango del par y el error RMS es inferior al $1,8\%$ ($1,707\%$, $1,846\%$ y $1,75\%$, respectivamente).

Al igual que en el análisis realizado en el capítulo anterior, en segundo lugar, se ha aplicado una carga de $2,5 Kg$ a la plataforma móvil del robot. Mediante esta carga, pese a ser demasiado alta para las especificaciones del robot comercial ($< 1 Kg$), se pretende demostrar el rango de validez del modelo desarrollado. Así, de la misma manera que en el escenario anterior, ambos pares, el par medido y el estimado, se comparan en la Fig. 4.40.

En este caso, tal y como se observa en la Fig. 4.41, el comportamiento dinámico del modelo con carga se ha reproducido, igualmente, de manera fiel, con un error máximo inferior a $0,4 Nm$ ($0,3779 Nm$, $0,3246 Nm$ y $0,3928 Nm$, respectivamente), lo que significa un $0,7921\%$, $0,8665\%$ y $0,6984\%$ de la amplitud del par, respectivamente. Además, el error medio es si cabe menor que en el caso anteriormente estudiado, siendo este inferior al $0,12\%$ ($0,1017\%$, $0,1163\%$ y $0,1031\%$ para las cadenas cinemáticas $i = 1, 2$ y 3 , respectivamente). Un efecto parecido sucede en el valor RMS del error, el cual son $0,2979\%$, $0,3168\%$ y $0,3168\%$, respectivamente.

Por lo tanto, como se puede apreciar en la Tabla 4.1 las diferencias entre la precisión del modelo dinámico con las variables de deformación y pendiente medidas directamente de los sensores de software de simulación MSC.Adams y las obtenidas a partir de la estimación de estas mediante el desarrollo presentado en este capítulo son inferiores al $0,01\%$ de la amplitud del par en todos los casos.

Con todo ello, se puede apreciar como para el caso de una trayectoria aleatoria, en la cual se excitan un amplio rango de frecuencias, el estimador presentado es capaz de estimar las deformaciones de los diferentes nodos de forma fiel. Si bien es cierto que los errores de estimación aumenta ligeramente en comparación con los errores obtenidos en el movimiento vertical, estos se encuentran dentro de los límites de precisión aceptables.

Además, estas medidas permiten, tal y como se ha comprobado, la estimación de forma muy precisa tanto del par realizado por las articulaciones activas como de la posición del TCP.

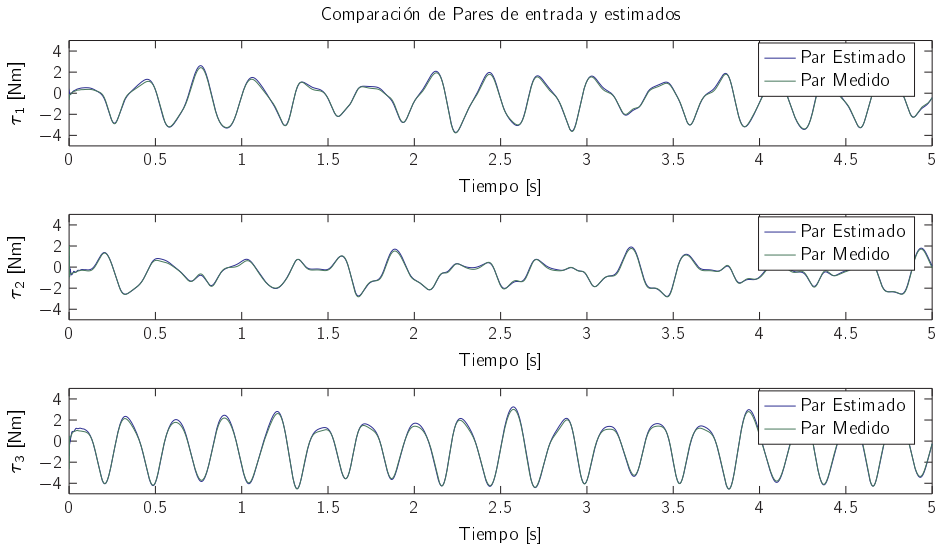


Figura 4.38: Comparación de la respuesta del par obtenida sin carga adicional a partir del modelo matemático y el software de simulación MSC.Adams.

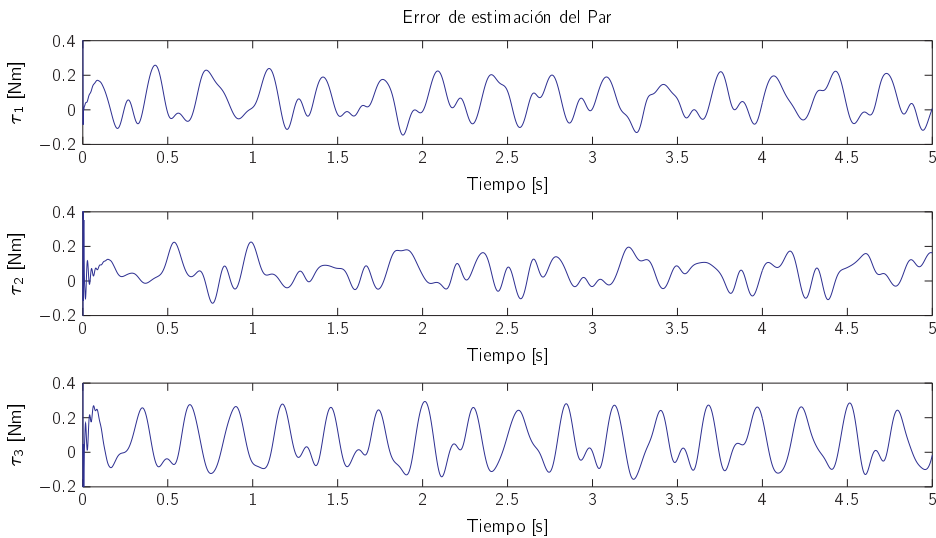


Figura 4.39: Error de estimación del par sin carga adicional respecto de los datos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams.

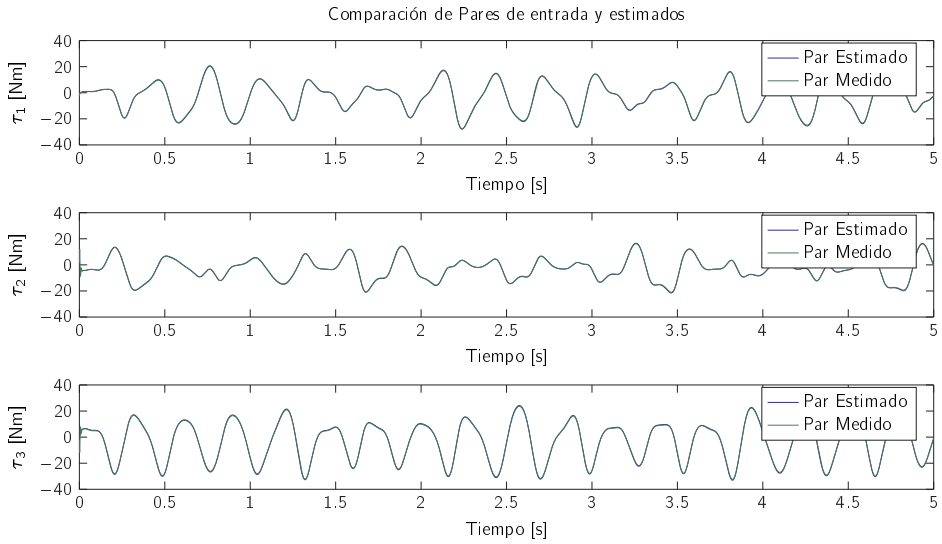


Figura 4.40: Comparación de la respuesta del par obtenida con 2,5kg de carga adicional a partir del modelo matemático y el software de simulación MSC.Adams.

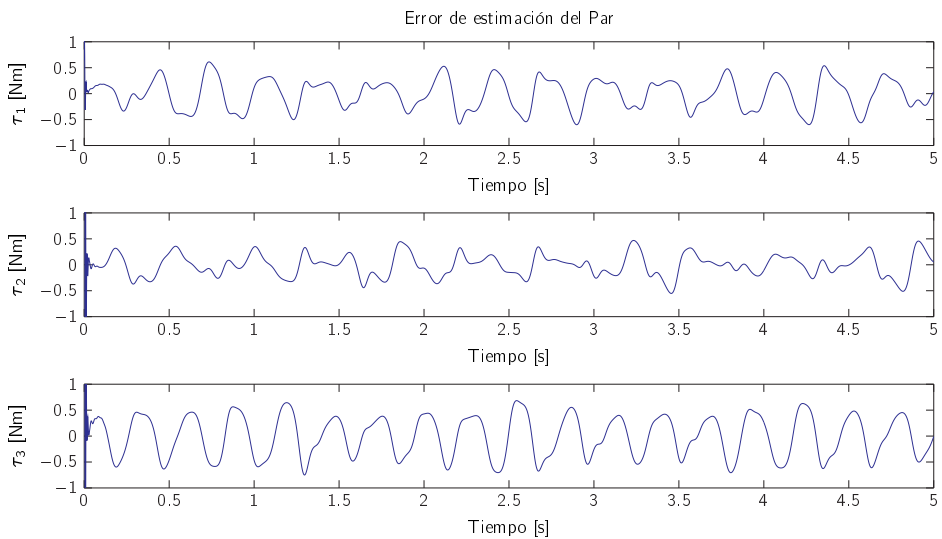


Figura 4.41: Error de estimación del par con 2,5kg de carga adicional mediante el modelo matemático en comparación con los datos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams.

	i	Carga [Kg]	Valor absoluto [Nm] medido/estimado	Valor porcentual [%] medido/estimado
Error máximo	1	$m_c = 0$	0.2580 / 0.2583	4.0740 / 4.0770
		$m_c = 2,5$	0.3778 / 0.3779	0.7918 / 0.7921
	2	$m_c = 0$	0.2251 / 0.2253	4.8010 / 4.8030
		$m_c = 2,5$	0.3248 / 0.3246	0.8671 / 0.8665
	3	$m_c = 0$	0.2937 / 0.2940	3.7720 / 3.7740
		$m_c = 2,5$	0.3923 / 0.3928	0.6975 / 0.6984
Error rms	1	$m_c = 0$	0.1081 / 0.1081	1.7060 / 1.7070
		$m_c = 2,5$	0.1420 / 0.1421	0.2977 / 0.2979
	2	$m_c = 0$	0.0865 / 0.0866	1.8460 / 1.8460
		$m_c = 2,5$	0.1186 / 0.1187	0.3167 / 0.3168
	3	$m_c = 0$	0.1361 / 0.1363	1.7480 / 1.7500
		$m_c = 2,5$	0.1747 / 0.1749	0.3107 / 0.3110
Error medio	1	$m_c = 0$	0.0519 / 0.0519	0.8197 / 0.8188
		$m_c = 2,5$	0.0486 / 0.0485	0.1018 / 0.1017
	2	$m_c = 0$	0.0504 / 0.0504	1.0750 / 1.0740
		$m_c = 2,5$	0.4264 / 0.4262	0.1138 / 0.1163
	3	$m_c = 0$	0.0552 / 0.0551	0.7085 / 0.7072
		$m_c = 2,5$	0.0581 / 0.0580	0.1032 / 0.1031

Tabla 4.1: Tabla comparativa de los pares de estimados y medidos.

4.3.2.2. Validación experimental para una trayectoria circular con desplazamiento vertical

Como en los casos anteriores, en la Fig. 4.42 se aprecia la deformación de los diferentes nodos de una de los eslabones flexibles, tanto la deformación estimada a partir de la medición realizada con el encóder rotacional como la medida directamente de las galgas extensiométricas.

En ellas se aprecia como la estimación reproduce de manera fiel la deformación de cada uno de los puntos, siendo el error máximo entre ellas inferior a $10\mu m$, $20\mu m$, $40\mu m$, menos del 6,7 % 5 % y 4 %, respectivamente, tal y como se aprecia en la fig. 4.43. Cabe recordar, que en la base del eslabón flexible, ω_{j1} , la deformación es nula, ya que en este punto ésta está anclada a la articulación pasiva.

De la misma forma, la estimación y medida de la pendiente de la deformación en dichos nodos se puede comparar en la fig. 4.44. Nótese que al igual que en la deformación, la pendiente en la base del eslabón flexible ω_{j2} es nula. Por su parte, cabe destacar igualmente que el error en el extremo contrario, ω_{j8} , es siempre nulo, ya que es precisamente la medida de este la que se toma como referencia para la

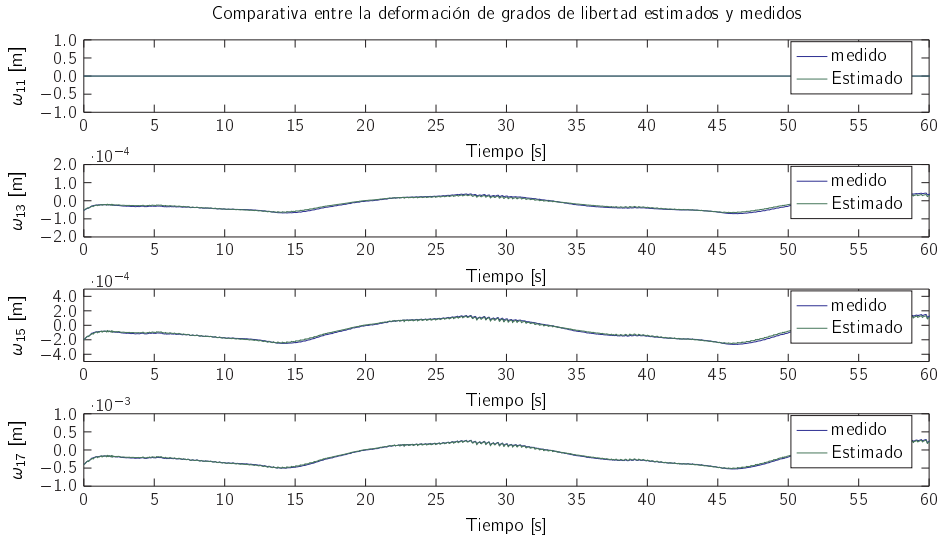


Figura 4.42: Comparativa entre la evolución de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida experimentalmente y estimada mediante el modelo matemático para la trayectoria circular con desplazamiento vertical.

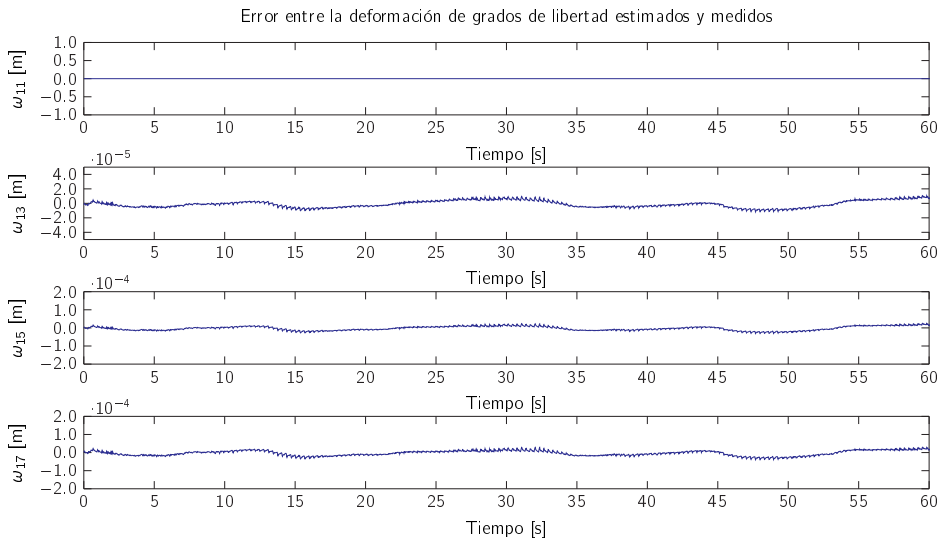


Figura 4.43: Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria circular con desplazamiento vertical.

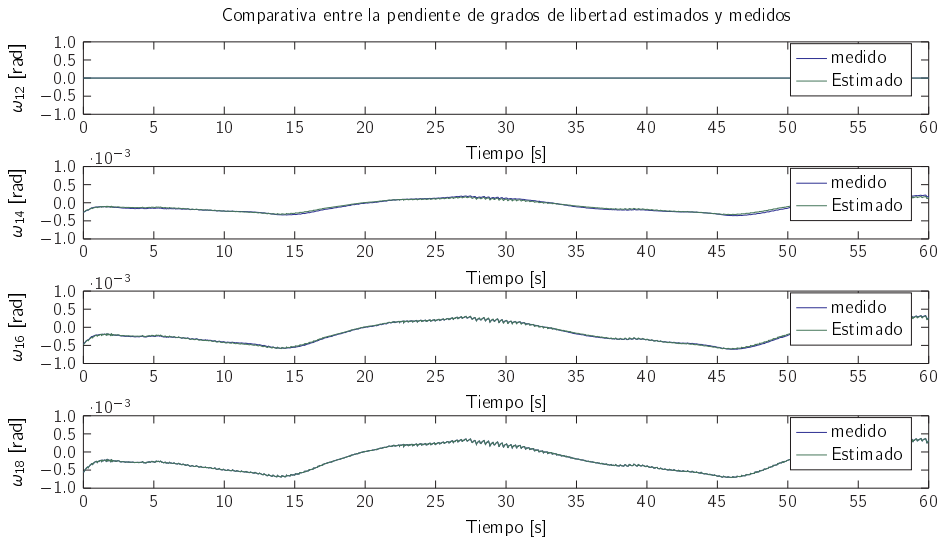


Figura 4.44: Comparativa entre la evolución de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida experimentalmente y estimada mediante el modelo matemático para la trayectoria circular con desplazamiento vertical.

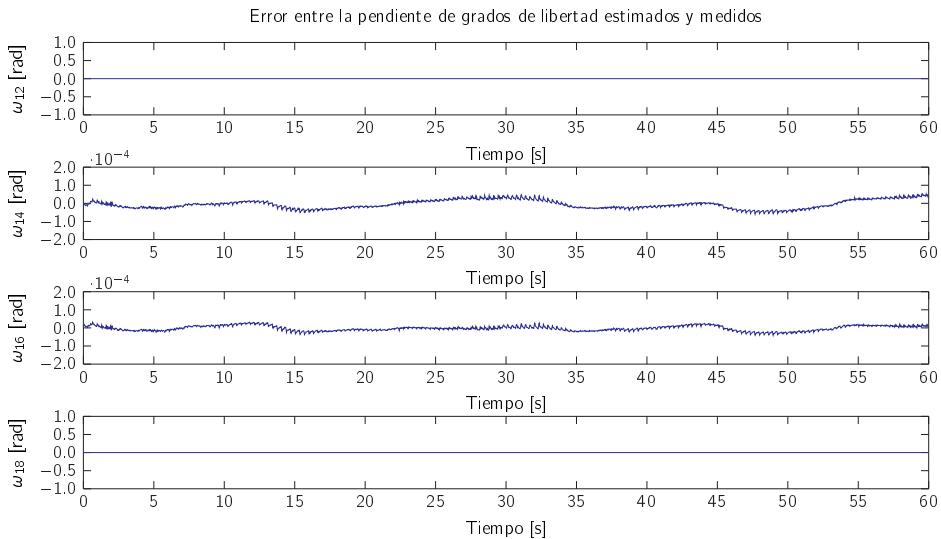


Figura 4.45: Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria circular con desplazamiento vertical.

estimación del resto de nodos. Tanto este como el resto de errores de deformación están representados de forma gráfica en la fig. 4.45, donde sus errores máximos son inferiores al $5 \cdot 10^{-5}$ rad, el 5 % y 4,5 % de sus amplitudes máximas para los nodos ω_{i4} y ω_{i6} respectivamente.

De nuevo, y visto los resultados experimentales presentados, se aprecia como el estimador presentado permite conocer la deformación de los eslabones de forma precisa en trayectorias aleatorias como la presentada en esta sección.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se propone un estimador nuevo para la deformación de los eslabones flexibles. Esta propuesta se basa en el análisis modal y el Método de Elementos Finitos. Este estimador, el cual está orientado a aplicaciones de control para robots paralelos, proporciona estimaciones precisas a la vez que computacionalmente efectivas comparándolo con las propuestas existentes en la literatura. Además, cabe destacar que la propuesta desarrollada, no solo es capaz de predecir la deformación de cada nodo y su respectiva pendiente, sino que también sus velocidades y aceleraciones.

El estimador propuesto ha sido validado tanto en simulación como de forma experimental. Para ello, en ambos casos se ha utilizado un Robot Delta comercial al cual se le han modificado los eslabones inferiores para incrementar su flexibilidad. Para el caso de la validación en simulación, el modelo contra el que se ha validado el estimador ha sido modelado mediante el Software Multibody MSC.Adams. Para la validación experimental, por su parte, se ha hecho uso del prototipo comercial al cual se le han colocado eslabones inferiores de aluminio.

En los resultados presentados se puede apreciar la alta precisión del estimador, tanto en simulación como experimentalmente. Además, esta precisión no solo se limita al mero hecho del cálculo de la deformación sino que ha propiciado el cálculo de forma fiel del par o de la posición del TCP, entre otras.

Cabe destacar que el estimador desarrollado tiene una mayor precisión en aquellos nodos que están más cerca del extremo donde se coloca el encóder, si bien el error absoluto es mayor en estos puntos. Esto se debe a dos factores: En primer lugar hay que tener en cuenta que, cuanto más cerca de la medida de referencia, en este caso el encóder, menor será el error de estimación realizado. Sin embargo, a medida que el nodo se aleja de la base, mayor es la deformación. Por lo tanto, ante mayores deformaciones mayores serán los errores absolutos, pese a que los errores relativos sean menores.



5.1. Introducción

Con el objetivo de sacar provecho del potencial teórico de los robots paralelos se requiere implementar un controlador avanzado que permita mejorar el rendimiento dinámico del robot cuando se requieran altas aceleraciones, velocidades y/o precisión.

Entre las numerosas técnicas detalladas en la Sección 2.2, sin duda destaca el Control de Par Computado o CTC. Este control multiarticular permite compensar, a partir de un modelo preciso, la dinámica no lineal del sistema, de forma que el robot disponga de una mejor respuesta dinámica a altas aceleraciones. Sin embargo, aunque en robótica serie con eslabones rígidos es un esquema de control muy referenciado, los trabajos que han aplicado esta ley de control en robótica paralela rígida han tenido que lidiar con la aparición de pares pasivos en la estructura y las dificultades para medir la posición del TCP. Además, mientras que en la robótica serie la posición del mecanismo queda definida únicamente mediante sus variables articulares, en robótica paralela, y

salvo excepciones, la localización del mecanismo queda definida mediante la posición y orientación del TCP. Por lo tanto, ante esta problemática surge una tesis nueva en el ámbito del control CTC para manipuladores paralelos: implementar la ley de control en el espacio articular o en el espacio cartesiano.

5.1.1. Control en espacio articular vs Control en espacio cartesiano

En un primer estudio, parece lógico pensar que la forma natural de definir las trayectorias de referencia del robot son las coordenadas del TCP. Es más, en robótica paralela no es posible definir las trayectorias de otro modo, dado que, a diferencia de los robots serie, los actuadores no pueden moverse unos independientemente de otros, dado que su movimiento está limitado por las restricciones mecánicas que conforman el mecanismo.

Siguiendo el mismo razonamiento, la opción lógica, por lo tanto, es seleccionar las variables de salida o de operación para implementar el control de robots paralelos, dado que estas variables definen de forma natural el estado del robot [165]. Esta aproximación permitiría realimentar de forma directa la salida del sistema, y el control, además de mucho más sencillo, permitiría aprovechar todo el potencial de la robótica paralela.

Sin embargo, en la práctica la implementación de este sistema es inviable. El problema fundamental radica en la medición directa del TCP con suficiente precisión, el cual sigue siendo un problema abierto en la robótica paralela rígida. Las propuestas para lograr este objetivo se basan principalmente en la utilización de láseres [27] y sistemas de visión [78, 167, 179]. Ambas soluciones, aunque prácticas en ciertos casos (por ejemplo para los mecanismos paralelos planos), presentan dificultades a la hora de aplicarlos al caso general. El sistema de medida por láser, por ejemplo, requiere encapsular el robot dentro de un sistema de espejos perfectamente calibrados. Los sistemas de visión, por su parte, están limitados por la velocidad de adquisición de las cámaras y la velocidad de procesamiento de las imágenes. En ambos casos, además, se requiere un ambiente limpio que no perjudique los sensores, difícil de conseguir en ciertas situaciones en la industria. Por ello, se puede afirmar que la medición directa de la posición del TCP no es, en la actualidad, una alternativa viable, ni si quiera en la robótica paralela rígida.

Ante la dificultad técnica que supone una medición directa, la alternativa reside en estimar la localización del TCP mediante modelos cinemáticos, con la problemática asociada a los errores de estimación que esto implica. Estos modelos se basan en las mediciones de las variables actuadas para predecir las variables de salida a partir de la cinemática directa.

El enfoque, por lo tanto, es diferente al propuesto al inicio. En esta nueva situación la utilización de las variables de salida para implementar el control no parece tan evidente, dado que sus valores son estimados mediante las mediciones de las variables articulares. Los trabajos presentados hasta la fecha en robótica paralela rígida han implementado este esquema tanto en el espacio de operación como el espacio articular. Sin embargo, dada la dificultad de medir directamente la localización del TCP,

en ambos casos se requiere la utilización de los datos de realimentación de los actuadores, es decir, los datos asociados a las variables articulares activas o actuadas. Por ello, el rendimiento del CTC, definido en cualquiera de los dos espacios mencionados, queda supeditado a la precisión del modelo cinemático que relaciona las diferentes variables del robot.

En la robótica paralela flexible, por su parte, la estimación la posición del TCP es aún más compleja, ya que la estimación del modelo cinemático requiere, a su vez, de la estimación de las variables flexibles (Capítulo 4), un problema para nada trivial a día de hoy. Es por ello que, tal y como se ha demostrado a lo largo de esta tesis, la estimación y control de la posición del TCP son dos de los problemas más complejos abordados por la robótica flexible.

Por lo tanto, en el presente capítulo se presenta un esquema de CTC modificado para robots paralelos con eslabones flexibles, en el que se combina el esquema del CTC clásico utilizado en la robótica rígida y la estimación de las deformaciones debidas a la flexibilidad de ciertos eslabones. Para ello, en un primer lugar se ha realizado una descripción detallada del esquema clásico para robots paralelos rígidos, para una vez entendido introducir en él la información de las deformaciones debidas a la flexibilidad de (parte de) los eslabones. Finalmente, el controlador propuesto se ha implementado en simulación, para lo que se ha hecho uso del modelo dinámico definido en la Sección 3.5.2 de un robot Delta con ciertos elementos flexibles en los eslabones inferiores.

5.2. Control de Par Computado para Robots Flexibles

5.2.1. Control de Par Computado Clásico

Tal y como se ha introducido en la Sección 2.3.2.2, el CTC es una de las estrategias de control más referenciadas, que hace uso del modelo dinámico inverso del robot para compensar y desacoplar la dinámica de éste de forma que su control se reduzca a un problema de control lineal. Evidentemente, la utilización del modelo dinámico del robot hace que esta estrategia sea más costosa computacionalmente que las aproximaciones de control local, tal y como se ha analizado en dicha sección.

Tal y como se ha analizado en el apartado anterior, existen diferentes corrientes a la hora de determinar el espacio en el que se define el controlador, es decir, si este se define en el espacio de operación o el espacio articular. Sin embargo, dado las características del controlador CTC para robots flexibles, éste sólo permite ser definido en el espacio articular, por lo que a continuación se analizará esta corriente para el caso de un robot paralelo rígido. Una vez definido el concepto del controlador CTC para robots rígidos, se detallará como ha de ser modificado cuando el robot a controlar es un robot paralelo flexible.

5.2.2. CTC en el espacio articular

Cuando el CTC se define en el espacio articular, las variables controladas son las variables articulares activas del robot \mathbf{q}_a , de modo que el controlador intenta minimizar

el error de seguimiento de trayectoria de estas. Cabe recordar que, a diferencia de lo que sucede en robótica serie, en robótica paralela las articulaciones activas no pueden moverse de forma independiente o libre respecto a las demás debido a las restricciones existentes. Esto es, las referencias del CTC, en el espacio articular, han de ser coherentes con las restricciones del mecanismo. Por ello, la planificación de trayectorias se realiza en el espacio de salida y se utiliza el modelo cinemático inverso para calcular las trayectorias de las variables articulares activas (Fig. 5.1).

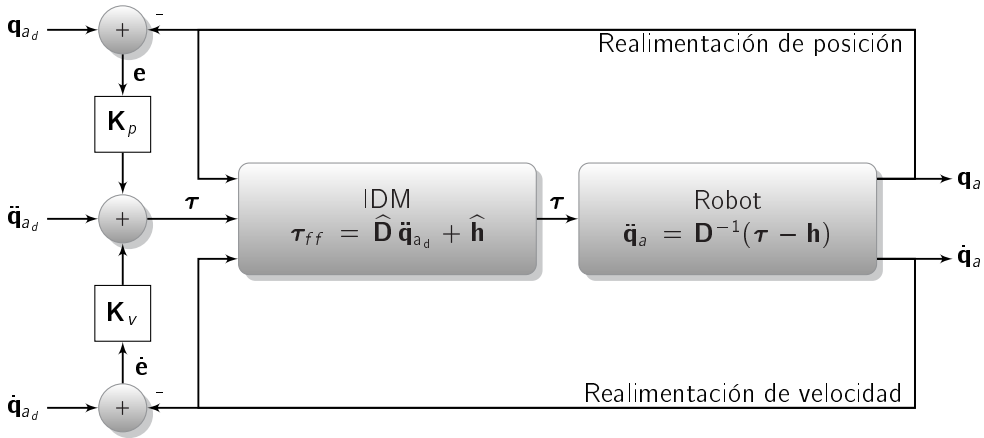


Figura 5.1: Implementación del CTC clásico en el espacio articular.

Con el fin de poder aplicar el CTC en el espacio articular, el modelo dinámico del robot ha de estar definido en términos de las variables articulares activas \mathbf{q}_a . Para ello se aplica un modelo dinámico como el presentado en [253, Sec 3.4], cuya forma compacta se muestra a continuación,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \quad (5.1)$$

donde \mathbf{x} son las coordenadas del TCP y \mathbf{q} son el conjunto de todas las variables articulares del robot, compuesto por las variables articulares activas \mathbf{q}_a y las no actuadas \mathbf{q}_{na} .

Nótese que el modelo está definido en función de tanto las variables articulares como de las variables de salida, de modo que, para el cálculo de dicho modelo, se requerirán las relaciones cinemáticas entre las coordenadas activas \mathbf{q}_a y el resto de coordenadas, como son las coordenadas del TCP \mathbf{x} y las variables articulares no actuadas \mathbf{q}_{na} (Fig. 5.1).

En base a este modelo, se puede definir la ley de control del CTC como,

$$\boldsymbol{\tau} = \widehat{\mathbf{D}}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_a, \widehat{\mathbf{q}}_{na}) (\ddot{\mathbf{q}}_{ad} + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}) + \widehat{\mathbf{C}}(\widehat{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}_a, \widehat{\mathbf{q}}_{na}, \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_a, \widehat{\mathbf{q}}_{na}) \dot{\mathbf{q}}_a + \widehat{\mathbf{G}}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_a, \widehat{\mathbf{q}}_{na}) \quad (5.2)$$

donde \mathbf{q}_{ad} y sus derivadas denotan la referencia de posición, velocidad y aceleración de las variables articulares actuadas, $\mathbf{e} = \mathbf{q}_{ad} - \mathbf{q}_a$ es el error de seguimiento de posición articular, $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}}_{ad} - \dot{\mathbf{q}}_a$ es el error de velocidad y \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v son las ganancias de posición y velocidad. $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ y $\hat{\mathbf{G}}$ son las matrices de inercia, Coriolis y el vector de gravedad estimados, correspondientes al modelo del robot. $\hat{\mathbf{x}}$ es la localización estimada del TCP y $\hat{\mathbf{q}}_{na}$ es el valor estimado de las variables articulares no actuadas. Estas estimaciones se realizan en base al modelo cinemático y el valor de las variables articulares actuadas \mathbf{q}_a .

Combinando la ley de control, Eq. (5.2) y la dinámica del manipulador, Eq. (5.1); es posible definir el comportamiento del sistema en lazo cerrado,

$$\mathbf{D} \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{G} = \hat{\mathbf{D}}(\ddot{\mathbf{q}}_{ad} + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}) + \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}}_a + \hat{\mathbf{G}} \quad (5.3)$$

de modo que, si el modelo es suficientemente preciso, es posible calcular la dinámica del error de seguimiento de trayectoria para las variables articulares,

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \left[(\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}) \ddot{\mathbf{q}}_a + (\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}}) \dot{\mathbf{q}}_a + (\mathbf{G} - \hat{\mathbf{G}}) \right] = \boldsymbol{\tau}_p \quad (5.4)$$

donde $\boldsymbol{\tau}_p$ modela la perturbación debida a las imprecisiones del modelo. Si el modelo dinámico es exacto, $p = 0$ y se establece que el error de seguimiento de trayectoria converge asintóticamente a cero para una correcta elección de las ganancias \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v , y siempre que la trayectoria no sea singular.

Nótese, sin embargo, que si el modelo cinemático presenta errores, dado que se controlan únicamente las articulaciones activas, puede suceder que aún midiendo un error pequeño en estas últimas, el robot presente errores importantes en el posicionamiento del TCP. Esto es, dado que la posición real \mathbf{x} y la estimada por el controlador $\hat{\mathbf{x}}$ difieren, aunque el controlador crea que realmente está en una determinada posición, este no sea el caso, presentándose un error de posicionamiento. Esta problemática se deriva de la dificultad en la medición directa del TCP, y resulta aún más crítica cerca de posiciones singulares, dado que el robot puede estar cerca de una de ellas sin que el control sea consciente de ello.

5.2.3. Definición del Control de Par Computado para Robots Flexibles

Al comienzo de este capítulo se afirma que el control CTC permite compensar, a partir de un modelo preciso, la dinámica no lineal del sistema. Sin embargo, si dicho modelo no contempla las deformaciones de los eslabones, éste no las tendrá en cuenta a la hora de generar la ley de control, y por lo tanto no será preciso. Además, mientras en la robótica rígida, la localización del TCP de los robots paralelos se determina mediante el Modelo Cinemático Directo, En la robótica flexible, por el contrario, la ecuación cinemática directa que el movimiento de los eslabones tiene múltiples soluciones, ya que la deformación de los eslabones flexibles permite más de una posición y orientación del TCP para una configuración articular dada. Esto, junto con la dificultad de medir directamente la posición real del TCP, hace que

no sea posible realimentar dicha posición y, por lo tanto, dichos errores tampoco son compensados por el controlador. Con todo ello, cuando se utiliza un controlador rígido para controlar el movimiento en el eje vertical z, éste genera una trayectoria ovalada como la representada en la Fig. 5.2.

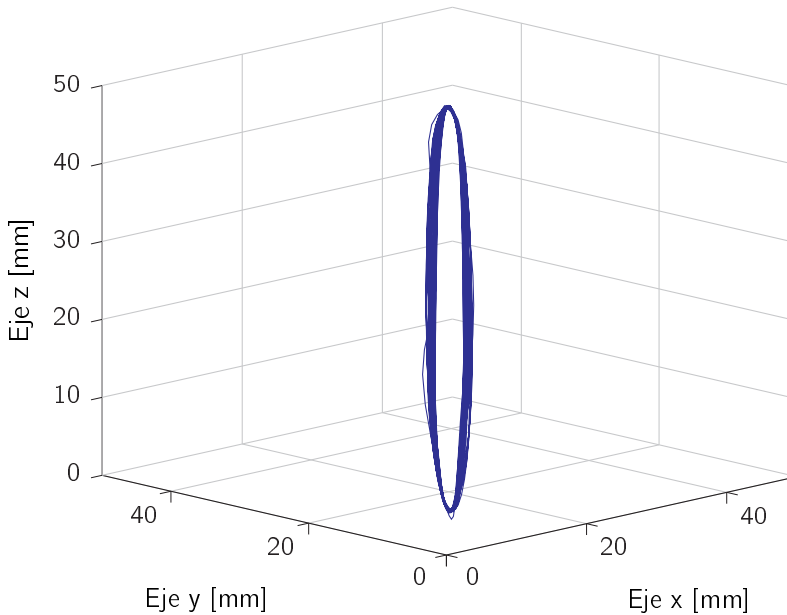


Figura 5.2: Trayectoria del TCP del robot experimental a un movimiento completamente vertical de 200ms de tiempo de ciclo.

Por lo tanto, los robots paralelos con eslabones flexibles requieren de un modelo en donde se contemple dicha flexibilidad. En ese caso, para estimar la posición del TCP, tal y como se ha definido en el Capítulo 3, el Modelo Cinemático Directo se define en términos de las variables de movimiento rígidas \mathbf{q}_r y las variables flexibles \mathbf{q}_f que modela la deformación de los eslabones flexibles,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_f) \quad (5.5)$$

Sin embargo, mientras las variables rígidas son fácilmente medibles mediante el uso de sensores de posición en las articulaciones, la medida de las variables flexibles no es una tarea trivial. Es por ello que en el Capítulo 4 se ha presentado un estimador cinemático nuevo para el calculo de las variables rígidas.

Por lo tanto, con el fin de reducir los errores debidos a las deformaciones de los eslabones flexibles, una de las soluciones planteadas es la inclusión de las variables flexibles en la ley de control. De esta forma, es posible controlar la deformación de estas en todo momento mediante la introducción de la deformación deseada en

el modelo. Logicamente, ante cualquier trayectoria la deformación deseada en todo momento es cero.

El Control de Par Computado para Robots Flexibles o CTC para Robots Flexibles surge combinando las virtudes del CTC y el aumento de la precisión al introducir el modelo flexible en la ley de control. De este modo, el esquema resultante (Fig. 5.3) minimiza los errores de posicionamiento debido a las deformaciones de los eslabones, por lo que presenta una mayor robustez ante variaciones en los parámetros del modelo.

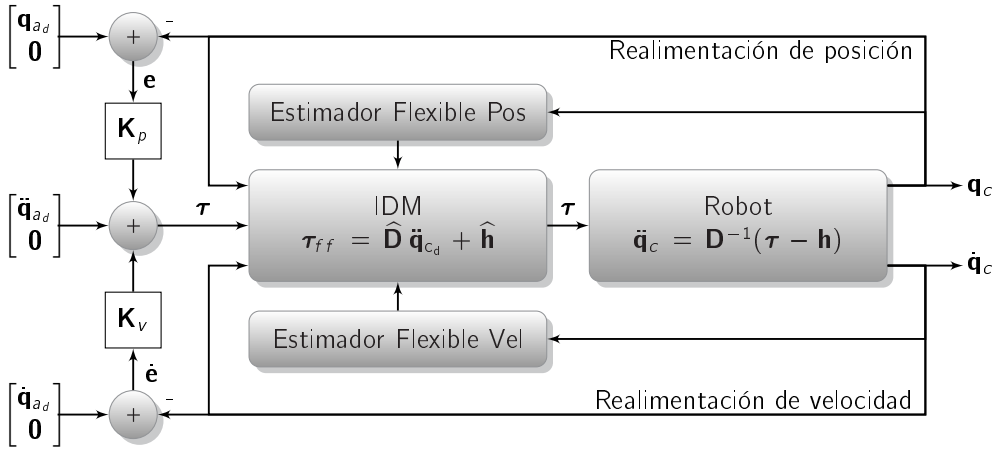


Figura 5.3: Implementación del CTC para Robots Flexibles.

Este esquema pretende ser una extensión o generalización del CTC clásico, permitiendo definir el control de robots paralelos en función de un conjunto de variables actuadas y flexibles que se denominan *coordenadas de control* \mathbf{q}_c . Estas coordenadas de control están compuestas por la totalidad de las variables articulares actuadas \mathbf{q}_a y las deformaciones en el extremo más alejado de la base de cada uno de los eslabones con elementos rígidos, δ . Por lo tanto, el CTC para Robots Flexibles puede ser implementado utilizando diferentes configuraciones de flexibilidad en los eslabones. Evidentemente, esto implica que si δ es un conjunto vacío, el CTC para Robots Flexibles tendrá la misma forma que el CTC clásico, cumpliéndose que $\mathbf{q}_c = \mathbf{q}_a$.

$$\mathbf{q}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_c} \quad (5.6)$$

La filosofía del CTC para Robots Flexibles es la misma que la que presenta el CTC clásico. Esto es, la ley de control se basa en la implementación de un lazo de realimentación no lineal basado en el modelo dinámico del robot con el fin de linealizar la dinámica del robot real. La diferencia entre el CTC clásico y el Robots Flexibles estriba en que, en este último esquema, la ley de control no solo se calcula para las variables actuadas, sino que también para las variables flexibles.

Evidentemente, esto implica que el modelo dinámico utilizado para implementar la ley de control tiene que estar definido en función de las variables flexibles del lazo de realimentación, tal y como se ha detallado en la Sección 3.4.

Al contrario que el CTC clásico, el CTC para Robots Flexibles no puede ser definido en el espacio cartesiano. Esto se debe a que, tal y como se ha abordado en la Sección 3.5.2.1, la Jacobiana que definen la relación entre los pares definidos en el espacio articular y cartesiano no es cuadrada, y por lo tanto ésta no es invertible en ambas direcciones.

Por lo tanto, el CTC para Robots Flexibles tiene que ser definido en el espacio articular. Para ello, se definen las variable a controlar, denominadas coordenadas de control \mathbf{q}_c , como el grupo de todas las variables articulares actuadas \mathbf{q}_a y el subconjunto de las variables flexibles (δ).

Por lo tanto, la ley de control del CTC para Robots Flexibles se define como,

$$\boldsymbol{\tau} = \widehat{\mathbf{D}}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_c, \widehat{\mathbf{q}}_p) (\mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_v \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}} + \ddot{\mathbf{q}}_{c,ref}) + \widehat{\mathbf{C}}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_c, \widehat{\mathbf{q}}_p, \widehat{\dot{\mathbf{x}}}_c, \widehat{\dot{\mathbf{q}}}_p) \dot{\mathbf{q}}_c + \widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_c) + \widehat{\mathbf{G}}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_c, \widehat{\mathbf{q}}_p) \quad (5.7)$$

donde \mathbf{K}_p , \mathbf{K}_v son las ganancias de posición y velocidad; $\mathbf{e} = \mathbf{q}_{c_d} - \mathbf{q}_c$ y $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}}_c$ definen el error de posición y velocidad de las coordenadas de control; y \mathbf{q}_{c_d} , $\dot{\mathbf{q}}_{c_d}$, $\ddot{\mathbf{q}}_{c_d}$ definen las referencias de las coordenadas de control, que son calculadas a partir de las referencias de localización del TCP (\mathbf{x}_d , $\dot{\mathbf{x}}_d$, $\ddot{\mathbf{x}}_d$) en base al modelo cinemático inverso.

5.3. Implementación en simulación del Controlador CTC para robots Flexibles

Para la validación de la estrategia de control presentada, se ha hecho uso de la co-simulación. La co-simulación o simulación cooperativa es una metodología aplicada a la simulación, que permite a componentes individuales ser simulados con diferentes herramientas ejecutándose al mismo tiempo e intercambiando información de forma colaborativa. El ambiente en la co-simulación recibe un vector de entradas calculado por uno de los softwares, en este caso Matlab, que interactúa con un segundo software, SC.Adams, para generar automáticamente un vector de salida que será de nuevo realimentado al primero de los softwares. Esta ha demostrado su efectividad al ser aplicada satisfactoriamente en diferentes campos como: computación de alto nivel, dinámica de multi-cuerpos, mecatrónica, química o mecánica estructural entre otros. De estas investigaciones se han encontrado varias ventajas para la co-simulación, como: la obtención del modelo de un prototipo más rápido, el uso y modelado en diversos ambientes de herramientas especializadas, el diseño colaborativo, el desarrollo de procesos que pueden ejecutarse de forma simultánea y la disponibilidad inmediata del nuevo modelo entre otras.

En este capítulo la co-simulación se aplicará para la implementación del controlador CTC para robots flexibles desarrollado en Matlab el cual será implementado sobre el modelo multibody del robot Delta desarrollado en MSC.Adams.

La co-simulación entre los dos paquetes de computación MSC.Adams y MATLAB, se hace posible gracias a una herramienta denominada ADAMS/Controls, la cual ofrece la comunicación entre ambos programas informáticos. Ésta herramienta se encarga de enlazar de forma simultanea el modelo flexible del robot desarrollado en MSC.Adams y la estrategia del control CTC para robots flexibles implementada en MATLAB, tal y como se ve en la Fig. 5.4.

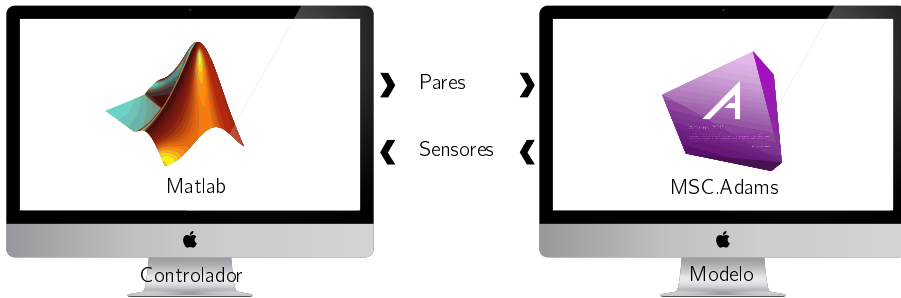


Figura 5.4: Diagrama conceptual de la arquitectura de la co-simulación.

Una vez definido la arquitectura de la co-simulación, se ha definido una trayectoria de referencia del TCP. Mediante esta trayectoria se ha excitado de forma simultanea los tres ejes de movimiento, de forma que ésta sea lo más real posible. En la Fig. 5.5 se puede apreciar como se han definido tres puntos en el espacio artesiano, los cuales son alcanzados mediante una trayectoria de tercer orden en un tiempo de 1,5 segundos entre cada uno de ellos.

Del mismo modo, este controlador requiere también de una referencia para las variables flexibles a controlar. Lógicamente, la deformación ideal para cualquier trayectoria es cuando ésta es nula, es decir cuando no existe deformación alguna. Por lo tanto, la referencia del vector de variables flexibles es cero para cada una de los eslabones flexibles del robot paralelo a controlar.

Para validar los beneficios del CTC para Robots Flexibles respecto del CTC Clásico, ambos controladores han sido alimentados con la trayectoria de referencia descrita. De igual forma, ambos controladores se han sintonizado experimentalmente con los mismo parámetros, véase Tabla 5.1,

K_{p_r}	K_{p_f}	ζ
$20 I_{n_r}$	$3000 I_{n_f}$	0,7

Tabla 5.1: Parametros de sintonización tanto del Controlador CTC Clásico como del CTC para robots Flexibles.

donde,

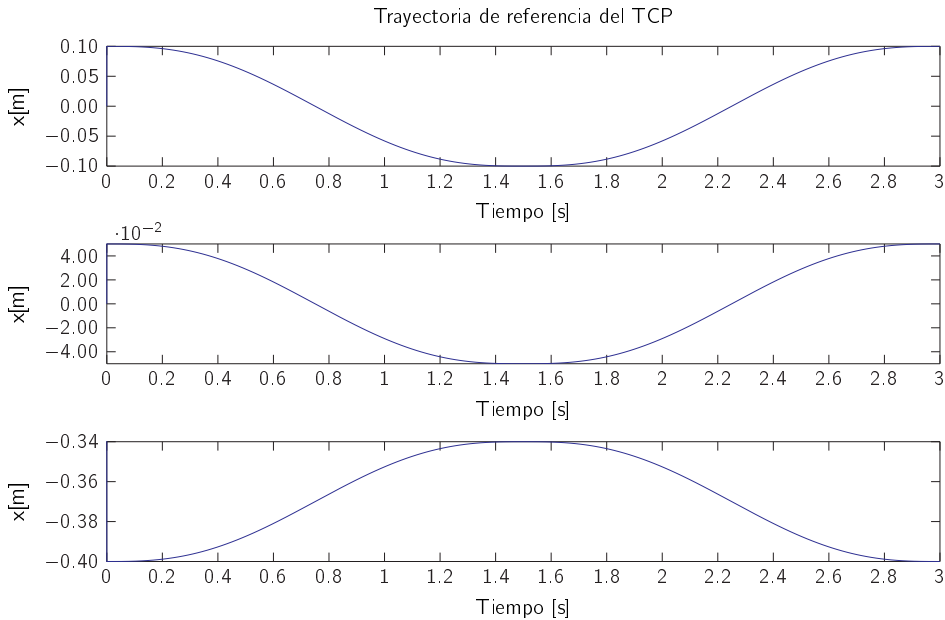


Figura 5.5: Trayectoria de referencia del TCP para la validación del controlador.

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p_r} \mathbf{I}_{n_r} & \mathbf{0}_{n_r \times n_f} \\ \mathbf{0}_{n_f \times n_r} & \mathbf{K}_{p_f} \mathbf{I}_{n_f} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

siendo \mathbf{K}_p la matriz diagonal de acciones proporcionales del sistema, \mathbf{K}_{p_r} la matriz diagonal de acciones proporcionales de los elementos rígidos, \mathbf{K}_{p_f} la matriz diagonal de acciones proporcionales de los elementos flexibles, y ζ el factor de amortiguamiento que determina la forma y la velocidad de respuesta del sistema completo (controlador+planta).

Con todo ello, en la Fig. 5.6 se compara el error de seguimiento del TCP para ambos casos. Como se puede apreciar, mientras el CTC para Robots flexibles elimina cualquier vibración debida a la flexibilidad de los eslabones, el CTC Clásico no es capaz de observar dichas perturbaciones, y por consiguiente, sufre oscilaciones que pueden llegar a superar $1mm$ de amplitud. Además, en cada uno de los tres ejes de movimiento se observa cómo error medio de seguimiento en el CTC Clásico es, como mínimo, el doble en magnitud que en el CTC para Robots Flexibles, siendo este del orden de $500\mu m$, $200\mu m$ y $500\mu m$ para los ejes x , y y z , respectivamente.

5.4. Conclusiones

En la presente sección se ha analizado la problemática asociada al control de robots paralelos con elementos flexibles, que se fundamenta en la dificultad de medir

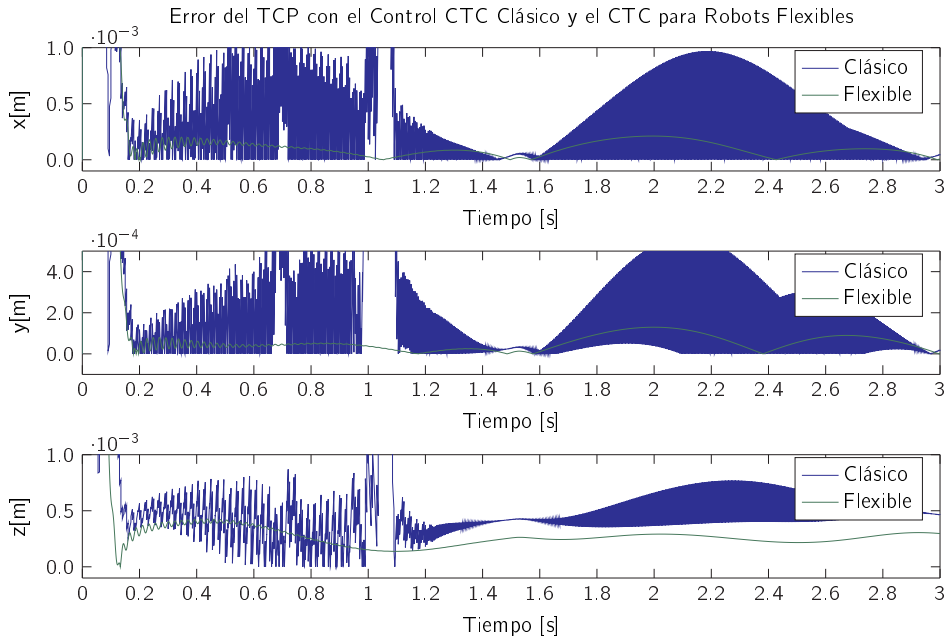


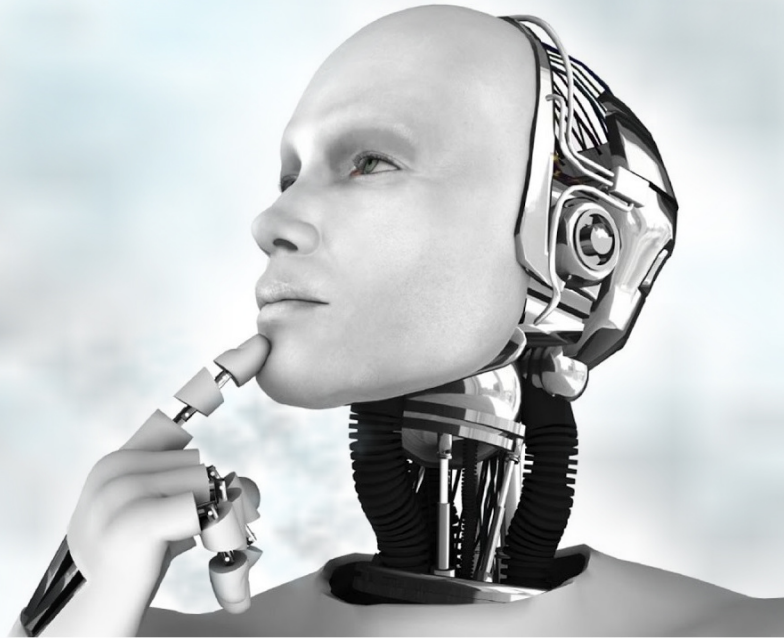
Figura 5.6: Error del TCP con el CTC Clásico y el CTC para Robots Flexibles a lo largo de la trayectoria aleatoria.

directamente las variables de salida del robot, y por consiguiente de hacer frente a las vibraciones derivadas de las deformaciones de los eslabones. Con el fin de reducir esta problemática, en este capítulo se ha propuesto un controlador basado en modelo que puede ser realimentado utilizando la información de las deformaciones, lo que permite al controlador disponer de una mejor estimación del movimiento del robot.

El controlador propuesto se ha bautizado como Control de Par Computado para Robots Flexibles, y surge de la combinación del CTC clásico y la introducción de la información flexible en la ley de control. De este modo, ofrece una mejor estimación de la posición del TCP, y por consiguiente un mayor rendimiento de control en tareas de alta velocidad y/o aplicaciones de alto rendimiento dinámico.

Con el fin de validar las cualidades de este controlador, en este capítulo se han llevado a cabo un análisis de sensibilidad y un estudio comparativo entre las aproximaciones de CTC clásico y el CTC para Robots Flexibles aplicado a un robot Delta con sus eslabones inferiores flexibles. Este estudio se ha realizado mediante la co-simulación del controlador en Matlab y el modelo en MSC.Adams.

Mediante el análisis realizado se ha demostrado que el CTC para Robots Flexibles, a diferencia del CTC Clásico, es capaz de eliminar las vibraciones debidas a las deformaciones de los eslabones, lo que supone una gran mejora en rendimiento. Además, también se ha demostrado como el error medio de seguimiento se reduce considerablemente debido a la introducción de la información flexible en el modelo.



6.1. Conclusiones

Aunque anteriores a los robots serie, la utilización de los robots paralelos en la industria es relativamente reciente. Este resurgir de las máquinas de cinemática paralela, compuestas por varios brazos articulados que unen una plataforma móvil a la base, está propiciado por la necesidad de especializar el trabajo de los robots. Desde la aparición de la arquitectura Delta, los robots paralelos han ido ganando popularidad gracias a sus características únicas en cuanto a rigidez, rapidez y precisión, lo que los hace óptimos para aquellas aplicaciones industriales que requieran de estas características.

Sin embargo, debido a su reciente introducción en la industria, muchas de las diferentes áreas de la robótica paralela no han sido estudiadas en profundidad. Esto repercute directamente en la expansión de la robótica paralela en la industria, que visto su potencial, exige soluciones para aquellos problemas que aún hoy presentan

este tipo de dispositivos.

Una de estas áreas es, sin duda, el estudio de las deformaciones de los eslabones cuando éstos trabajan bajo grandes exigencias dinámicas. Precedido de la robótica serie, no son pocos los centros de investigación, universidades y empresas que trabajan activamente en diferentes áreas de la flexibilidad en la robótica. Si bien es cierto, que la gran mayoría de los estudios se han enfocado desde un punto de vista más mecánico y sobre todo sobre manipuladores series, esta tesis se ha planteado el estudio de la flexibilidad enfocándose en el desarrollo de modelos dinámicos para controladores de posición, con el fin de poder mejorar el rendimiento de control de los robots paralelos para así posibilitar el aumento de las capacidades dinámicas de éstos.

Para lograr este objetivo, y tras el pertinente análisis literario, la tesis se ha estructurado en tres grandes bloques. El primer bloque está centrado en el modelado dinámico de este tipo de robots. En él se ha propuesto una metodología que, a diferencia de las existentes hasta la fecha, aborda la información flexible de una forma que, sin variar el procedimiento a seguir, permite tenerla en cuenta o no dentro de cada eslabón, en función de las características intrínsecas del eslabón. Además, permite, en caso de ser necesario, de dividir en un mismo eslabón, partes totalmente rígidas con partes flexibles, sin que esto suponga ninguna variación sobre el procedimiento a seguir. Por último, dicha metodología permite calcular el modelo dinámico de una forma estructurada siendo idónea para ser aplicada en controladores basados en modelo.

En el segundo bloque se han analizado la problemática asociada al problema cinemático de las estructuras flexibles. Para hacer frente a él, se ha desarrollado un estimador cinemático que permite estimar tanto la deformación a lo largo del eslabón como su velocidad y aceleración. Además, esta estimación se realiza mediante un solo encóder rotación de bajo coste por eslabón flexible y con un bajo coste computacional, lo que permite su implementación en controladores en Tiempo Real.

Por último, el tercer bloque de la tesis está centrado en el control. En él se ha analizado la problemática del control asociada a los robots paralelos flexibles, deduciendo la necesidad de implementar controles adaptados a las particularidades de la robótica paralela y que contemplen intrínsecamente la flexibilidad de los eslabones. Por ello, se ha propuesto un esquema de control, denominado Control de Par Computado o CTC para Robots Flexibles. Este controlador se presenta como una generalización del CTC clásico, permitiendo, a diferencia de éste, considerar la información flexible de los eslabones directamente en la ley de control. Este controlador, definido con el modelo calculado en el bloque de dinámica, se caracteriza por una mayor precisión en comparación con el CTC tradicional, ya que se eliminan los errores debido a la deformación de los eslabones.

Cada uno de estos bloques o capítulos, aunque relacionado con el resto, dispone de su entidad propia y, por ello, las aportaciones de este trabajo se definirán también estructuradas en estas tres áreas: dinámica, estimador y control.

6.1.1. Aportaciones en el área del modelado

La obtención del modelo dinámico es un paso fundamental para el dimensionamiento de los elementos del robot, el análisis de su comportamiento y la implementación de controladores avanzados. Sin embargo, debido a la variedad y complejidad estructural que presentan los robots paralelos, su modelado cinemático y dinámico presenta una mayor complejidad que el de los serie, haciendo imposible, en la mayoría de los casos, la aplicación directa de los métodos de modelado definidos para éstos.

En el caso de la robótica flexible, por su parte, la dificultad a la hora de definir un modelo cinemático y dinámico se complica, debido que al estudio de la dinámica acoplada de la estructura hay que sumarle, la ya de por sí complejidad del análisis de rigidez de las estructuras.

Por ello, la mayoría de los autores de esta área se ha centrado en el cálculo del modelo dinámico de un grado de libertad, o en ocasiones para robots series, siendo muy pocos los autores que han propuesto metodologías de cálculo genérico para los robots paralelos flexibles. Para este cálculo en la literatura es posible encontrar tres aproximaciones principales: el Método de Parámetros Concentrados, el Método de Modos Asumidos y el Método de Elementos Finitos. Cada uno de estos métodos corresponden a enfoques diferentes, por lo que su implementación ofrecen ventajas e inconvenientes diferentes.

El modelo dinámico calculado es utilizado para implementar técnicas de control basadas en modelo. Es más, con el fin de asegurar un rendimiento óptimo del controlador y poder extraer todo el potencial de éste, es indispensable un modelo dinámico preciso y adaptado a las necesidades de coste computacional de los controladores. Además, de los métodos propuestos en la literatura, ninguno aborda el estudio desde un punto de vista general, en el que se aborde una metodología global, independientemente de si hay o no deformación en alguna parte de alguno de los eslabones que componen el robot.

Por ello, **la principal aportación de este bloque consiste en la definición de una metodología de cálculo del modelo cinemático y dinámico que permite obtener, a diferencia de los modelos definidos en la literatura, el modelo de forma sistematizada independientemente de la flexibilidad y/o la rigidez de cada uno de los componentes de los diferentes eslabones que componen el robot.** Por lo tanto, esta metodología se caracteriza por su generalidad y facilidad de sistematización, permitiendo ser implementada en software para el cálculo automático del modelo de un determinado robot.

Por lo tanto, esta metodología aporta,

- **una extensión de la metodología existente para la obtención de modelos dinámicos de robots totalmente paralelos en la que permite introducir, si así se cree conveniente, el análisis de flexibilidad en alguno de los elementos.** Por lo tanto, la metodología permite definir el modelo en función de las variables activas y, en caso de haberlas, de un conjunto de variables flexibles,

de modo que las deformaciones debidas a esas elasticidades sean consideradas en el modelo, y por lo tanto, directamente en la ley de control.

- **un método fácilmente sistematizable**, que permite ser implementado de forma sencilla en un software de cálculo simbólico y permite, a partir de la definición de las ecuaciones de cierre y de la función Lagrangiana, el cálculo de todas las matrices que componen el modelo dinámico.

La metodología para la obtención del modelo dinámico propuesta en este bloque ha sido validada utilizando dos plataformas de diversa complejidad: el primer caso el Robot Sheffield, uno de los primeros prototipos flexibles construidos y que se ha convertido en un referente en robótica flexible debido a su simplicidad, y en segundo lugar, la plataforma Delta, uno de los referentes en la robótica paralela. La validez de la aproximación se ha demostrado utilizando dos enfoques complementarios,

- un enfoque basado en la simulación computacional, en la que a través del software comercial MSC.Adams los resultados obtenidos mediante el modelo matemático desarrollado han sido comparados con los obtenidos mediante éste software Multibody.
- un enfoque práctico, basado en la utilización de datos experimentales extraídos de los prototipos a la hora de ejecutar un conjunto de trayectorias de referencia. Para llevar a cabo este procedimiento, por un lado, en la plataforma Sheffield se han reproducido los ejemplos propuestos en los trabajos encontrados en la búsqueda bibliográfica que hayan abordado el modelado dinámico. Por otro lado, para el robot Delta se ha hecho uso de un prototipo comercial al cual se le han sustituido los eslabones de fibra de carbono de los paralelogramos articulados por unos mucho más flexibles de aluminio, los cuales permiten evidenciar más las deformaciones existentes.

6.1.2. Aportaciones en el estimador cinemático

A la hora de definir la metodología de modelado se ha visto la necesidad de conocer la deformación a lo largo de cada uno de los eslabones flexibles. Tras el estudio de la literatura en la actualidad se ha comprobado que las soluciones existentes son caras, pesadas computacionalmente y sensibles a ruidos. Es por ello que la carencia de métodos generalizados para abordar la estimación del problema cinemático es evidente.

Para abordar este problema, **en este capítulo se ha desarrollado un estimador cinemático para los eslabones flexibles basado en la medida de un encóder rotacional de bajo coste y en el estudio modal del eslabón cuya cinemática se quiera conocer**. Este estimador aporta las siguientes ventajas respecto al resto de soluciones existentes:

- **un estimador de bajo coste económico**, ya que los encóders son unos sensores económicos y que dan buenas prestaciones, no son sensibles a ruidos electromagnéticos, o cambios de temperatura. Además la implementación del sensor es rápida y sencilla, ya que no requiere de experiencia como puede ocurrir con las galgas extensiométricas.
- **solución de bajo coste computacional**. Al reducir el análisis modal únicamente al eslabón flexible, el cálculo del vector característico es independiente de la posición en la que se encuentre, por lo que su cálculo es función de las características mecánicas invariables; tales como rigidez, peso o dimensiones. Por lo tanto, el cálculo del vector característico puede realizarse offline, lo que reduce el cálculo de la deformación de cada punto del eslabón a una simple multiplicación.
- **estimador de posición, velocidad y aceleración**. Por definición, el vector propio, entre otras características, ofrece la relación de movimiento entre los diferentes puntos del sólido a estudiar. Por lo tanto, dicha relación se mantiene tanto en el movimiento como en cada una de sus derivadas, es decir, en posición y aceleración. Por consiguiente, el cálculo de las velocidades y aceleraciones, al igual que la posición se reduce a una multiplicación entre la medida obtenida por el encóder y el valor del vector propio equivalente al punto del eslabón en que se desea conocer la deformación.

6.1.3. Aportaciones en el área de control

La implementación de un controlador adecuado es esencial en robótica paralela, dado que permite aprovechar el máximo potencial que ofrece el robot en aquellas tareas para las que está diseñado. A nivel industrial, el campo de aplicación de los robots paralelos se centra en aquellas tareas que exigen rapidez, precisión o manipulación de grandes cargas. Estas características, combinándolas con la reducción de la masa móvil, generan cierta flexibilidad en los eslabones, la cual provoca cierto grado de imprecisión. Es por ello que, para garantizar el cumplimiento de las exigencias de rapidez, precisión y manipulación de grandes cargas; en ocasiones se requiere el uso de controladores que contemplen intrínsecamente la deformación de los eslabones. Por lo tanto, debido a la naturaleza de los requerimientos de estas tareas, las mejores estrategias de control de estos mecanismos se enmarcan dentro del control multiarticular, que ofrece un comportamiento dinámico adecuado para aplicaciones de alta velocidad y permite combinar velocidad y precisión.

Sin embargo, la mayoría de los trabajos propuestos en este área se basan en la robótica serie, por lo que no se consideran las particularidades de los mecanismos paralelos. Entre estas particularidades destaca el acoplamiento entre la posición y orientación, las singularidades internas en el espacio de trabajo del robot o la presencia de las articulaciones pasivas, cuyo movimiento, al igual que la localización del TCP, hay que estimar utilizando modelos cinemáticos.

Con el fin de hacer frente a este problema, en este bloque de la tesis se ha propuesto la extensión de la ley de control del CTC, la cual se ha denominado CTC para Robots Flexibles. Esta extensión permite tener en cuenta de forma intrínseca la deformación de los eslabones, reduciendo así los errores de precisión de la plataforma.

Por lo tanto, **la gran aportación de este bloque consiste en el diseño y validación de una generalización del esquema de Control de Par Computado, denominado CTC Extendido, cuya ley de control se basa en el tratamiento de la información flexible a través del modelo dinámico propuesto en el bloque de dinámica.** Esta estrategia combina el rendimiento de los controladores basados en modelo y la precisión que otorga la consideración de las deformaciones en la ley de control.

En resumen, este controlador aporta,

- **una generalización del CTC clásico que permite la definición de la ley de control en función de las variables activas y el conjunto de variables flexibles**, de modo que la deformaciones debidas a la elasticidad de los eslabones sean consideradas directamente en la ley de control, lo que permite realizar movimientos más precisos de todos los elementos del robot. De este modo, si las coordenadas de control contienen únicamente las variables articulares activas porque no se considera flexibilidad en ninguno de los eslabones, el CTC para Robot Flexibles presenta el mismo comportamiento que el CTC Clásico.
- **una mayor precisión es la estimación del TCP que el CTC clásico**, dado que la información de las deformaciones de los eslabones es utilizada para realizar mejores estimaciones de su posición.

Adicionalmente, **el análisis de estabilidad revela que el CTC para Robots Flexibles presenta estabilidad global cuando es implementado en el espacio de operación, de modo que su error converge asintóticamente a cero cuando no existen errores de modelado**, al igual que sucede con el CTC clásico.

6.2. Líneas Futuras

El trabajo realizado a lo largo de esta tesis ha permitido detectar una serie de líneas de interés para futuros trabajos de investigación,

- Teniendo en cuenta que la principal problemática del control es la dificultad de medición de la localización del TCP, se han de estudiar diferentes alternativas para poder obtener información fiable de estas coordenadas del robot. Para ello, además de la utilización del estimador desarrollado en esta tesis, se propone la utilización de sensores redundantes para medir algunas de las variables pasivas, dado que, según estudios realizados en nuestro departamento en robots paralelos rígidos, su utilización en el modelo permiten aumentar la robustez del modelo.

- Se debe seguir investigando en la aplicación del CTC para robots flexibles con el fin de determinar su mejor aplicación. En esta área, adicionalmente, se requerirá un estudio de las alternativas hardware con el fin de poder implementar en tiempo real estos controladores.
- Ampliar las técnicas de control a utilizar para el control de robots paralelos flexibles. En éste campo destaca diferentes variables existentes del CTC clásico que han demostrado ofrecer resultados más robustos en problemas rígidos, sin por ello aumentar el coste computacional del controlador [40].
- Una de las técnicas más interesantes para este tipo de robots es el control predictivo, sin embargo este tipo de controladores son computacionalmente muy pesados. Por lo tanto, se debe seguir investigando para reducir el coste computacional del modelado dinámico flexible con técnicas inteligentes (machine learning , redes neuronales,...). En esta área, en el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la UPV-EHU, se han obtenido muy buenos resultados mediante el uso de estrategias inteligentes para la reducción de los modelos dinámicos de las estructuras rígidas. Por consiguiente, a partir de esta experiencia, sería interesante trasladar dichos conocimientos a la robótica paralela flexible.

1.1. Diferencias entre los Manipuladores Series y los Paralelos.	3
2.1. Comparativa de las deformaciones que contemplan las diferentes teorías de vigas.	21
2.2. Tabla resumen de las Condiciones de Contorno más típicas.	24
2.3. Diferencia entre el Método de Modos Asumidos y el Método de Elementos Finitos.	33
2.4. Controladores de manipuladores flexibles: ventajas y desventajas.	66
3.1. Parámetros experimentales del Robot Sheffield	96
3.2. Parámetros rígidos del Robot Omron Mini Delta CR-UGD4MINI-NR	106
3.3. Propiedades mecánicas del aluminio de las pletinas flexibles.	106
3.4. Tabla resumen de los errores en la estimación de las velocidades de las variables articulares.	122
3.5. Tabla resumen de los errores porcentuales respecto de la amplitud máxima en la estimación de las velocidades de las variables articulares.	122
3.6. Tabla resumen de los errores en la estimación de las aceleraciones de las variables articulares.	125
3.7. Tabla resumen de los errores porcentuales respecto a la amplitud máxima en la estimación de las aceleraciones de las variables articulares.	125
4.1. Tabla comparativa de los pares de estimados y medidos.	176
5.1. Parametros de sintonización tanto del Controlador CTC Clásico como del CTC para robots Flexibles.	189

1.1. Robot serie (a) cortesía de KUKA Robotics Corporation y robot paralelo (b) cortesía de ABB Flexible Automation.	2
1.2. Esquema de manipulador con articulaciones flexibles (a) y eslabones flexibles (b).	4
1.3. Esquema de manipuladores con articulaciones flexibles debido a correas de transmisión (a) y reductora cicloidal (b).	5
1.4. Ejemplo de viga deformada con variación tanto en posición como en orientación del extremo.	6
2.1. Esquema de manipuladores con eslabones flexibles donde se aprecia que el modelo dinámico y cinemático están acoplados ya que el problema cinemático directo (a) y inverso (b) pueden tener diferentes soluciones.	16
2.2. Ejemplos de los diferentes tipos de esfuerzo a los que se puede someter un eslabón: (a) Flexión, (b) Torsión, (c) Cizalladura, (d) Tracción y (e) Compresión.	18
2.3. Ejemplos de los diferentes tipos de oscilaciones existentes: (a) oscilación discreta, (b) oscilación continua.	19
2.4. Desplazamiento virtual de una viga voladizo.	20
2.5. Sistema de coordenadas de las vigas según los criterios de la Teoría Lineal de Elasticidad y su plano de flexión.	22
2.6. Deformación de una viga de Euler-Bernoulli (b) comparada con la de Timoshenko (a).	23
2.7. Ejemplo de la representación de una viga en voladizo mediante el Modelo de Parámetros Concentrados.	26
2.8. Ejemplo de la representación de una viga en voladizo mediante el Método de Elementos Finitos.	30
2.9. Control de robots industriales.	35
2.10. Esquema de tipo de controladores.	37
2.11. Control Cinemático de Robots Paralelos de n GDL o genérico.	51
2.12. Control PD con compensación de gravedad.	52

2.13. Control de Prealimentación No Lineal.	54
2.14. Control de Par Computado (CTC).	56
2.15. MPC y linealización mediante realimentación no lineal.	59
3.1. Ángulos de Euler <i>a</i> Roll, <i>b</i> Pitch y <i>c</i> Yaw y sus derivadas.	72
3.2. Subsistemas del Robot Paralelo.	74
3.3. División de variables para el modelado dinámico de robots paralelos.	75
3.4. División de variables para el modelado dinámico de robots paralelos.	76
3.5. Ecuación de Cierre asociada a la cadena <i>i</i>	77
3.6. Relación entre diferentes tipos de variables.	80
3.7. Parámetros cinemáticos del eslabón <i>i</i>	87
3.8. Representación gráfica de los parámetros de la matriz de deformación elástica.	87
3.9. Foto real del Manipulador Flexible Sheffield, cortesía de la Universidad de Sheffield.	95
3.10. Esquema de las variables del modelo del Robot Sheffield.	96
3.11. Par de excitación para el Manipulador Sheffield.	99
3.12. Comparativa entre la evolución del ángulo a lo largo del tiempo obtenida mediante MSC.Adams y el modelo matemático cuando la carga en el extremo del manipulador es $m_p = 20g$	100
3.13. Evolución del ángulo a lo largo del tiempo obtenida a partir de los datos experimentales publicados en [221] cuando la carga en el extremo del manipulador es $m_p = 20g$	100
3.14. Comparativa entre la evolución de la posición del extremo del manipulador a lo largo del tiempo obtenida mediante MSC.Adams y el modelo matemático cuando la carga en el extremo del manipulador es $m_p = 20g$	102
3.15. Evolución de la posición del extremo del manipulador a lo largo del tiempo obtenida a partir de los datos experimentales publicados en [221] cuando la carga en el extremo del manipulador es $m_p = 20g$	102
3.16. Comparativa entre la evolución del ángulo de giro en función de la carga en el extremo obtenida mediante MSC.Adams y el modelo matemático propuesto.	103
3.17. Comparativa entre la evolución del ángulo de giro en función de la carga en el extremo obtenida a partir de los datos experimentales publicados en [221].	103
3.18. Comparativa entre la evolución de la posición del extremo final en función de la carga obtenida mediante MSC.Adams y el modelo matemático.	104
3.19. Comparativa entre la evolución de la posición del extremo final en función de la carga obtenida a partir de los datos experimentales publicados en [221].	104
3.20. Esquema del Robot Delta.	106
3.21. Ecuación de lazo de la cadena cinemática <i>i</i>	107

3.22. Intersección entre circunferencia descrita por el movimiento de L_i y la esfera definida por el movimiento del paralelogramo articulados I_i para el calculo del Problema Cinematico Inverso.	109
3.23. Intersección de las tres esferas descritas por el movimiento de I_i para el calculo del problema cinemático directo.	110
3.24. Calculo de la posición geometrica del punto B_i	114
3.25. Grados de libertad flexibles: a) Distancia de la deformación y b) Pendiente de la deformación.	116
3.26. Diagrama de bloques del proceso de validación del modelo dinamico del robot Delta.	119
3.27. Comparación de la evolución de la velocidad articular de la cadena cinemática 1, 2 y 3 medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.	120
3.28. Comparación de la evolución de la velocidad angular de γ medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables de las cadenas cinemáticas (o patas) 1, 2 y 3, respectivamente.	120
3.29. Comparación de la evolución de la velocidad angular de α_i medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.	121
3.30. Comparación de la evolución de la velocidad lineal del TCP medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.	123
3.31. Comparación de la evolución de las aceleraciones articulares actuadas medidas y las estimadas mediante las Jacobianas de las variables articulares.	123
3.32. Comparación de la evolución de la aceleración articular pasiva γ de cada cadena cinemática del Delta medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.	124
3.33. Comparación de la evolución de aceleración articular pasiva α de cada cadena cinemática del Delta medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.	124
3.34. Comparación de la evolución de la aceleración lineal del TCP medida y estimada mediante las Jacobianas de las variables articulares.	126
3.35. Comparación de la respuesta del par obtenida sin carga adicional a partir del modelo matemático y el el software de simulación MSC.Adams.	127
3.36. Error de estimación del par sin carga adicional mediante el modelo matemático en comparación con los datos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams.	127
3.37. Comparación de la respuesta del par obtenida con 2,5 kg de carga adicional a partir del modelo matemático y el software de simulación MSC.Adams.	128
3.38. Error de estimación del par con 2,5kg de carga adicional mediante el modelo matemático en comparación con los datos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams.	129
3.39. Evolución del error máximo de estimación en función de la carga aplicada a la plataforma el Robot Delta.	129
3.40. Evolución del error rms de estimación en función de la carga aplicada a la plataforma el Robot Delta.	130

3.41. Evolución del error medio de estimación en función de la carga aplicada a la plataforma el Robot Delta.	130
3.42. Esquema del conexionado para la validación experimental del modelo dinámico.	131
3.43. Comparación de la respuesta del par para una trayectoria a lo largo del eje y obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.	133
3.44. Error de estimación para una trayectoria a lo largo del eje y obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.	133
3.45. Representación tridimensional de la trayectoria circular con desplazamiento vertical realizada por el prototipo real.	134
3.46. Comparación de la respuesta del par para una trayectoria circular con desplazamiento vertical obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.	135
3.47. Error de estimación para una trayectoria circular con desplazamiento vertical obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.	135
3.48. Representación tridimensional de la trayectoria de pick & place realizada por el prototipo real.	136
3.49. Comparación de la respuesta del par para una trayectoria de pick & place obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.	137
3.50. Error de estimación para una trayectoria de pick & place obtenida a partir del modelo matemático y el prototipo real.	137
4.1. Esquema del eslabón flexible (<i>b</i>) conectado a dos eslabones rígidos (<i>a</i> , <i>c</i>) mediante articulaciones rotacionales.	145
4.2. Representación del ángulo medido y la posición del encóder rotacional.	148
4.3. Grados de libertad de un eslabón flexible: a) Distancia de la deformación y b) Pendiente de la deformación.	149
4.4. Comparativa entre la evolución de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.	150
4.5. Error de estimación de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	150
4.6. Comparativa entre la evolución de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.	151
4.7. Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	151
4.8. Comparativa entre la evolución de las velocidades de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.	153
4.9. Error de estimación de las velocidades de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	153
4.10. Comparativa entre la evolución de las velocidades de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.	154
4.11. Error de estimación de las velocidades de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	154

4.12. Comparativa entre la evolución de las aceleraciones de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.	155
4.13. Error de estimación de las aceleraciones de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	155
4.14. Comparativa entre la evolución de las aceleraciones de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria simétrica en el eje z.	156
4.15. Error de estimación de las aceleraciones de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	156
4.16. Comparativa entre la evolución de posición del TCP medida y estimada a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	157
4.17. Error de estimación de la posición del TCP a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	157
4.18. Figura en detalle de los encoders rotacionales (en negro) en la plataforma móvil del prototipo real.	159
4.19. Esquema del conexionado para la validación experimental del estimador cinemático.	160
4.20. Comparativa entre la evolución de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida experimentalmente y estimada mediante el modelo matemático para la trayectoria simétrica en el eje z.	161
4.21. Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	161
4.22. Comparativa entre la evolución de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida experimentalmente y estimada mediante el modelo matemático para la trayectoria simétrica en el eje z.	162
4.23. Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria simétrica en el eje z.	162
4.24. Comparativa entre la evolución de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria aleatoria	164
4.25. Error de estimación de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria aleatoria.	164
4.26. Comparativa entre la evolución de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria aleatoria.	165
4.27. Error de estimación de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria aleatoria.	165
4.28. Comparativa entre la evolución de las velocidades de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} medida y estimada para una trayectoria aleatoria.	167
4.29. Error de estimación de las velocidades de las deformaciones ω_{11} , ω_{13} , ω_{15} , ω_{17} a lo largo de la trayectoria aleatoria.	167
4.30. Comparativa entre la evolución de las velocidades de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} medida y estimada para una trayectoria aleatoria.	168
4.31. Error de estimación de las velocidades de las pendientes ω_{12} , ω_{14} , ω_{16} , ω_{18} a lo largo de la trayectoria aleatoria.	168

4.32. Comparativa entre la evolución de las aceleraciones de las deformaciones $\omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{17}$ medida y estimada para una trayectoria aleatoria.	169
4.33. Error de estimación de las aceleraciones de las deformaciones $\omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{17}$ a lo largo de la trayectoria aleatoria.	169
4.34. Comparativa entre la evolución de las aceleraciones de las pendientes $\omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{16}, \omega_{18}$ medida y estimada para una trayectoria aleatoria.	170
4.35. Error de estimación de las aceleraciones de las pendientes $\omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{16}, \omega_{18}$ a lo largo de la trayectoria aleatoria.	170
4.36. Comparativa entre la evolución de posición del TCP medida y estimada a lo largo de la trayectoria aleatoria.	172
4.37. Error de estimación de la posición del TCP a lo largo de la trayectoria aleatoria.	172
4.38. Comparación de la respuesta del par obtenida sin carga adicional a partir del modelo matemático y el el software de simulación MSC.Adams.	174
4.39. Error de estimación del par sin carga adicional respecto de los datos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams.	174
4.40. Comparación de la respuesta del par obtenida con 2,5kg de carga adicional a partir del modelo matemático y el el software de simulación MSC.Adams.	175
4.41. Error de estimación del par con 2,5kg de carga adicional mediante el modelo matemático en comparación con los datos obtenidos mediante el software de simulación MSC.Adams.	175
4.42. Comparativa entre la evolución de las deformaciones $\omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{17}$ medida experimentalmente y estimada mediante el modelo matemático para la trayectoria circular con desplazamiento vertical.	177
4.43. Error de estimación de las pendientes $\omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{16}, \omega_{18}$ a lo largo de la trayectoria circular con desplazamiento vertical.	177
4.44. Comparativa entre la evolución de las pendientes $\omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{16}, \omega_{18}$ medida experimentalmente y estimada mediante el modelo matemático para la trayectoria circular con desplazamiento vertical.	178
4.45. Error de estimación de las pendientes $\omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{16}, \omega_{18}$ a lo largo de la trayectoria circular con desplazamiento vertical.	178
5.1. Implementación del CTC clásico en el espacio articular.	184
5.2. Trayectoria del TCP del robot experimental a un movimiento completamente vertical de 200ms de tiempo de ciclo.	186
5.3. Implementación del CTC para Robots Flexibles.	187
5.4. Diagrama conceptual de la arquitectura de la co-simulación.	189
5.5. Trayectoria de referencia del TCP para la validación del controlador.	190
5.6. Error del TCP con el CTC Clásico y el CTC para Robots Flexibles a lo largo de la trayectoria aleatoria.	191

- [1] B.A.H. Abbas and J. Thomas. The second frequency spectrum of timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 51(1):123–137, mar 1977. [21](#)
- [2] Housseem Abdellatif and Bodo Heimann. Computational efficient inverse dynamics of 6-DOF fully parallel manipulators by using the Lagrangian formalism. *Mechanism and Machine Theory*, 44(1):192–207, jan 2009. [13](#)
- [3] Mehdi Abdolvand. Model-base Predictive Control for Vibration Suppression of a Flexible Manipulator. (September):3–5, 2012. [45](#), [65](#)
- [4] Akira Abe. Trajectory planning for residual vibration suppression of a two-link rigid-flexible manipulator considering large deformation. *Mechanism and Machine Theory*, 44(9):1627–1639, 2009. [38](#), [62](#)
- [5] M. A. Ahmad. Vibration and input tracking control of flexible manipulator using LQR with non-collocated PID controller. *Proceedings - EMS 2008, European Modelling Symposium, 2nd UKSim European Symposium on Computer Modelling and Simulation*, pages 40–45, 2008. [45](#), [65](#)
- [6] M.A. Ahmad, A.N.K. Nasir, N. Hambali, and H. Ishak. Vibration and Input Tracking Control of Flexible Manipulator using Hybrid Fuzzy Logic Control. *Ieee International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 593–598, 2008. [66](#)
- [7] Mohd Ashraf Ahmad and Zaharuddin Mohamed. Techniques of vibration and end-point trajectory control of flexible manipulator. *2009 6th International Symposium on Mechatronics and its Applications, ISMA 2009*, pages 1–6, 2009. [45](#), [65](#)
- [8] Mohd Ashraf Ahmad and Zaharuddin Mohamed. Modelling and simulation of vibration and input tracking control of a single-link flexible manipulator. *Pertanika Journal of Science and Technology*, 18(1):61–76, 2010. [45](#), [65](#)

- [9] Fang; An, Wei-dong; Chen, and Wan-liang; Zhang. Acceleration Feedback for Active Control on Forced Vibration of an Intelligent Cantilever Beam. *Journal of Ship Mechanics*, (6):702–713, 2013. 40, 63
- [10] Jorge Angeles, editor. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*. Mechanical Engineering Series. Springer New York, New York, NY, 2003. 13, 49, 70
- [11] S S Aphale, A J Fleming, and S O R Moheimani. Integral resonant control of collocated smart structures. *Smart Materials and Structures*, 16(2):439–446, 2007. 64
- [12] R. Aracil, R. Saltarén, and O. Reinoso. Parallel robots for autonomous climbing along tubular structures. *Robotics and Autonomous Systems*, 42(2):125–134, 2003. 12
- [13] H Asada, Z.-D. Ma, and H Tokumaru. Inverse Dynamics of Flexible Robot Arms: Modeling and Computation for Trajectory Control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 112(2):177, 1990. 117
- [14] Mohammed Bakhti and Badr Bououlid. Active Vibration Control of a Flexible Manipulator Using Model Predictive Control and. 5(01):165–177, 2013. 45, 65
- [15] M. Balas. Trends in large space structure control theory: Fondest hopes, wildest dreams. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3):522–535, jun 1982. 44, 65
- [16] Enrique Barbieri and Umit Ozguner. Unconstrained and Constrained Mode Expansions for a Flexible Slewing Link. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 110(4):416, 1988. 28, 117
- [17] Antonio Barrientos, Luis Felipe Peñin, Carlos Balaguer, and Rafael Aracil San-toja. *Fundamentos de Robótica | 2da Edicion*. McGraw-Hill, 2 edition, 2007. 17, 49, 70, 71
- [18] H. Baruh and S. S. K. Tadikonda. Issues in the dynamics and control of flexible robot manipulators. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 12(5):659–671, sep 1989. 117
- [19] Luca Bascetta and Paolo Rocco. End-point vibration sensing of planar flexible manipulators through visual servoing. *Mechatronics*, 16(3-4):221–232, 2006. 143
- [20] Luca Bascetta and Paolo Rocco. Two-time scale visual servoing of eye-in-hand flexible manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(4):818–830, 2006. 43, 64

- [21] E. Bayo. Timoshenko versus Bernoulli beam theories for the control of flexible robots. In *Proceeding of IASTED International Symposium on Applied Control and Identification*, pages 178–182, 1986. [22](#)
- [22] F. Bellezza, L. Lanari, and G. Ulivi. Exact modeling of the flexible slewing link. In *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 734–739. IEEE Comput. Soc. Press, 1990. [28](#)
- [23] Pablo Bengoa, Asier Zubizarreta, Aitziber Mancisidor, Itziar Cabanes, and Eva Portillo. Modos Asumidos Y Elementos Finitos: Comparativa de modelos para robots flexibles. In *Jornadas de Automática*, pages 392–399, 2014. [31](#)
- [24] M. Benosman and G. Le Vey. Control of flexible manipulators: A survey. *Robotica*, 22(05):533–545, aug 2004. [14](#)
- [25] Soumya Bhattacharya, H. Hatwal, and A. Ghosh. An on-line parameter estimation scheme for generalized stewart platform type parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 32(1):79–89, 1997. [13](#)
- [26] Soumya Bhattacharya, Dragomir N Nenchev, and Masaru Uchiyama. A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 33(7):957–964, 1998. [13](#)
- [27] F. Bleicher, F. Puschitz, and A. Theiner. Laser based measurement system for calibrating machine tools in 6 DOF. *DAAAM International Scientific Book 2006*, 2006. [182](#)
- [28] Wayne J. Book. Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms. *The International Journal of Robotics Research*, 3(3):87–101, 1984. [87](#), [117](#)
- [29] Wayne J. Book. Controlled Motion in an Elastic World. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 115(2B):252, 1993. [5](#)
- [30] WJ Book. Modeling, design, and control of flexible manipulator arms: a tutorial review. In *29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 500–506 vol.2. IEEE, 1990. [6](#), [22](#), [24](#), [28](#), [32](#), [144](#)
- [31] WJ Book, GG Hastings, and TE Alberts. Design strategies for high-speed lightweight robots. *Computers in Mechanical Engineering, September*, 5(2):26–33, 1986. [37](#)
- [32] Fatih Mehmet Botsali, Mete Kalyoncu, Mustafa Tinkir, and Umit Onen. Fuzzy logic trajectory control of flexible robot manipulator with rotating prismatic joint. *2010 The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering (ICCAE)*, pages 35–39, 2010. [48](#), [66](#)
- [33] C Brecher, T Ostermann, and D Friedrich. control concept for pkm considering the mechanical coupling between actuator. In *Proceedings of the 5th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, pages 413–427, 2006. [12](#)

- [34] J.N Bricout, J.C Debus, and P Micheau. A finite element model for the dynamics of flexible manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 25(1):119–128, jan 1990. 30
- [35] S. Briot and W. Khalil. Recursive and symbolic calculation of the elastodynamic model of flexible parallel robots. *The International Journal of Robotics Research*, 33(3):469–483, nov 2013. 34
- [36] Massimo Callegari, Matteo-Claudio Palpacelli, and Marco Principi. Dynamics modelling and control of the 3-RCC translational platform. *Mechatronics*, 16(10):589–605, dec 2006. 57
- [37] Eduardo F Camacho and C. Bordons. *Model Predictive control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, London, 2007. 58
- [38] Eduardo F. Camacho and Carlos Bordons. Control Predictivo: Pasado, Presente y Futuro. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 1:5–28, 2004. 58
- [39] R. H. Cannon and E. Schmitz. Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot. *The International Journal of Robotics Research*, 3(3):62–75, sep 1984. 32, 95
- [40] José Ignacio Cazalilla. *Diseño e implementación de un sistema de control de robots mediante la ingeniería del software basada en componentes. Aplicación a un robot paralelo de 3DOF*. PhD thesis, Intituto Universitario de Automática e Informática Industrial, 2017. 199
- [41] Wen-Hua Chen, Donald J. Ballance, and Peter J Gawthrop. Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach. *Automatica*, 39(4):633–641, 2003. 44, 65
- [42] Xiulong Chen, Yunfeng Li, Yu Deng, Wenbin Li, and Haibin Wu. Kinetoelastodynamics Modeling and Analysis of Spatial Parallel Mechanism. *Shock and Vibration*, 2015:1–10, 2015. 3, 4
- [43] P. Chiacchio, F. Pierrot, L. Sciavicco, and B. Siciliano. Robust design of independent joint controllers with experimentation on a high-speed parallel robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(4):393–403, 1993. 12
- [44] Jih Hua Chin, Yen His Sun, and Yuan Ming Cheng. Force computation and continuous path tracking for hydraulic parallel manipulators. *Control Engineering Practice*, 16(6):697–709, 2008. 55
- [45] Youngjin Choi, Joono Cheong, and Hyungpil Moon. A Trajectory Planning Method for Output Tracking of Linear Flexible Systems Using Exact Equilibrium Manifolds. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 15(5):819–826, oct 2010. 39, 62

- [46] J. Chung and H.H. Yoo. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 249(1):147–164, jan 2002. 29
- [47] A. Codourey. Dynamic modeling of parallel robots for computed-torque control implementation. *The International Journal of Robotics Research*, 17(12):1325–1336, dec 1998. 57
- [48] R. D. Cook and H. Saunders. Concepts and Applications of Finite Element Analysis (2nd Edition). *Journal of Pressure Vessel Technology*, 106(1):127, 1984. 88
- [49] Peter I. Corke and Seth A. Hutchinson. Real-time vision, tracking and control. *2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1(April):622–629, 2000. 142
- [50] John J Craig. *Robótica*, volume 1. Prentice Hall, Naucalpan de Juárez, 3 edition, 2006. 49
- [51] Roy R. Craig. *Structural dynamics: an introduction to computer methods*. 1981. 27
- [52] Lingli Cui Lingli Cui, Jianyu Zhang Jianyu Zhang, Lixin Gao Lixin Gao, and Feiyue Wang Feiyue Wang. A Robust Controller of a Flexible Manipulator Using Genetic Algorithm. *2006 9th International Conference on Control Automation Robotics and Vision*, 2(1):3–6, 2006. 47, 66
- [53] Bhaskar Dasgupta and T.S. Mruthyunjaya. A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 33(8):1135–1152, 1998. 13
- [54] Areolino De Almeida Neto, L. C S Góes, and C. L. Nascimento. Accumulative learning using multiple ANN for flexible link control. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 46(2):508–524, 2010. 48, 66
- [55] A De Luca, L Lanari, and G Ulivi. End-effector trajectory tracking in flexible arms: Comparison of approaches based on regulation theory. In *Advanced Robot Control*, pages 190–206. 1991. 44, 65
- [56] a. De Luca and B. Siciliano. Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 21(4):826–839, 1991. 28, 32
- [57] Alessandro De Lucat and Bruno Sicillanot. Trajectory control of a non-linear one-link flexible arm. *Int. J. Control*, 50(5):1699–1715, 1989. 44, 65
- [58] Berend Denkena, Bodo Heimann, Houssem Abdellatif, and Christian Holz. Design , Modeling and Advanced Control of the Innovative Parallel Manipulator

PaLiDA. *International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 24–28, 2005. 55

- [59] X. Ding and J. M. Selig. Dynamic modelling of a compliant arm with 6-dimensional tip forces using screw theory. *Robotica*, 21(02):193–197, feb 2003. 27
- [60] M. Dogřfan and Y. I Stefanopulos. Optimal nonlinear controller design for flexible robot manipulators with adaptive internal model. *IET Control Theory & Applications*, 1(3):770–778, may 2007. 46, 66
- [61] Xing-Jian Dong, Guang Meng, and Juan-Chun Peng. Vibration control of piezoelectric smart structures based on system identification technique: Numerical simulation and experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, 297(3-5):680–693, 2006. 45, 65
- [62] S Dubowsky. Dealing with vibrations in the deployment structures of space robotic systems. In *5th International Conference on Adaptive Structures*, Sendai, Japan, 1994. 6
- [63] Gregory Dubus. On-line estimation of time varying capture delay for vision-based vibration control of flexible manipulators deployed in hostile environments. In *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3765–3770. IEEE, oct 2010. 142, 143
- [64] Gregory Dubus, Olivier David, and Yvan Measson. A vision-based method for estimating vibrations of a flexible arm using on-line sinusoidal regression. In *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4068–4075. IEEE, may 2010. 142, 143
- [65] Vincent Duchaine, Samuel Bouchard, and Clément M. Gosselin. Computationally Efficient Predictive Robot Control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 12(5):570–578, oct 2007. 59
- [66] Santosha Kumar Dwivedy and Peter Eberhard. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 41(7):749–777, jul 2006. 13
- [67] S. Ebrahimi and A. Eshaghiyeh-Firoozabadi. Dynamic performance evaluation of serial and parallel RPR manipulators with flexible intermediate links. *Iranian Journal of Science and Technology - Transactions of Mechanical Engineering*, 40(3), 2016. 34
- [68] V. Etxebarria, a. Sanz, and I. Lizarraga. Real-time experimental control of a flexible robotic manipulator using a composite approach. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications, 2004.*, pages 955–960, 2004. 45, 65

- [69] V Feliu. Robots flexibles: hacia una generación de robots con nuevas prestaciones. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)*, 3(3):24–41, 2006. [4](#), [6](#), [14](#)
- [70] V Feliu, A Garcia, and J A Somolinos. Gauge-based tip position control of a new three-degree-of-freedom flexible robot. *International Journal of Robotics Research*, 20(8):660–675, 2001. [142](#)
- [71] V. Feliu and F. Ramos. Strain gauge based control of single-link flexible very lightweight robots robust to payload changes. *Mechatronics*, 15(5):547–571, 2005. [41](#), [63](#)
- [72] V Feliu, K. S. Rattan, and H. B. Brown. Modeling and Control of Single-Link Flexible Arms With Lumped Masses. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 114(1):59, 1992. [27](#)
- [73] Vicente Feliu, Iván Muñoz, Pedro L. Roncero, and Juan J. López. Repetitive control for single link flexible manipulators. *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2005(April):4303–4308, 2005. [37](#), [42](#), [63](#)
- [74] Miriam Fend. Whisker-Based Texture Discrimination on a Mobile Robot. In Mathieu S. Capcarrère, Alex A. Freitas, Peter J. Bentley, Colin G. Johnson, and Jon Timmis, editors, *Advances in Artificial Life*, volume 3630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 302–311. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005. [7](#)
- [75] James Richard Forbes and Christopher John Damaren. Single-link flexible manipulator control accommodating passivity violations: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(3):652–662, 2012. [62](#)
- [76] A. Garcia and V. Feliu. Force control of a single-link flexible robot based on a collision detection mechanism. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 147(6):588–595, nov 2000. [7](#)
- [77] A. García, V. Feliu, and J. A. Somolinos. Experimental Testing of a Gauge Based Collision Detection Mechanism for a New Three-Degree-of-Freedom Flexible Robot. *Journal of Robotic Systems*, 20(6):271–284, jun 2003. [7](#)
- [78] R. Garrido, Torres-Cruz, and J.C. Martinez-Garcia. control visual de robots paralelos planares. In *XI Latinoamerican Control Congress*, 2004. [182](#)
- [79] M Geradin and A Cardona. Kinematics and dynamics of rigid and flexible mechanisms using finite elements and quaternion algebra. *Computational Mechanics*, 4(2):115–135, 1988. [30](#)
- [80] Fathi Ghorbel. Modeling and PD control of closed-chain mechanical systems. In *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 540–542. IEEE, 1995. [12](#), [53](#), [69](#), [83](#)

- [81] Fathi Ghorbel, Olivier Chételat, and Roland Longchamp. A reduced model for constrained rigid bodies with application to parallel robots. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Robot Control*, number 3, pages 57–62, Capri, 1994. IFAC. [12](#), [53](#), [69](#), [83](#)
- [82] F.H. Ghorbel, O. Chetelat, Ruvinda Gunawardana, and Roland Longchamp. Modeling and set point control of closed-chain mechanisms: theory and experiment. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(5):801–815, 2000. [53](#), [69](#), [83](#)
- [83] S.C.P. Gomes, V.S. da Rosa, and B.C. Albertini. Active control to flexible manipulators. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 11(1):75–83, 2006. [66](#)
- [84] M. C. Good, L. M. Sweet, and K. L. Strobel. Dynamic Models for Control System Design of Integrated Robot and Drive Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107(1):53, 1985. [4](#)
- [85] Barry M. Gough. *Historical dictionary of Canada*. Scarecrow Press, 1999. [13](#)
- [86] a. Green. Dynamics and Trajectory Tracking Control of a Two-Link Robot Manipulator. *Journal of Vibration and Control*, 10(10):1415–1440, oct 2004. [28](#)
- [87] A. Green and J.Z. Sasiadek. *Inverse Dynamics and Fuzzy Repetitive Learning Flexible Robot Control*, volume 35. IFAC, 2002. [42](#), [63](#)
- [88] Min Gu and Samuel F Asokanathan. Combined Discrete-Distributed Control of a Single-Link Flexible Manipulator Using a Lyapunov Approach. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 121(3):448, 1999. [142](#)
- [89] Min Gu and Jean Claude Piedboeuf. A flexible-link as an endpoint position and force detection unit. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 15(1):361–366, 2002. [132](#), [142](#), [143](#)
- [90] Ruvinda Gunawardana and Fathi Ghorbel. PD Control of Closed-Chain Mechanical Systems : An Experimental Study. In IFAC, editor, *5th IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO'97)*, volume 1, pages 79–84, Nantes, 1997. [53](#), [69](#), [83](#)
- [91] H B Guo and H R Li. Dynamic analysis and simulation of a six degree of freedom Stewart platform manipulator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 220(1):61–72, jan 2006. [13](#)
- [92] HongBo Guo, YongGuang Liu, GuiRong Liu, and HongRen Li. Cascade Control of a Hydraulically Driven 6-DOF Parallel Robot Manipulator based on a Sliding Mode. *Control Engineering Practice*, 16(9):1055–1068, 2008. [12](#)

- [93] Kerem Gurses, Bradley J. Buckham, and Edward J. Park. Vibration control of a single-link flexible manipulator using an array of fiber optic curvature sensors and PZT actuators. *Mechatronics*, 19(2):167–177, 2009. [62](#)
- [94] Kerem Gurses, Bradley J. Buckman, and Edward J. Park. Vibration Control of a Flexible Link Manipulator Using an Array of Fiber-Optic Curvature Sensors and Piezoelectric Actuators. In *Volume 10: Mechanics of Solids and Structures, Parts A and B*, pages 417–423. ASME, 2007. [40](#), [62](#)
- [95] Moharam Habibnejad, Hamed Rahimi, and Amin Nikoobi. Path Planning of Mobile Elastic Robotic Arms by Indirect Approach of Optimal Control. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 8(1):1, 2011. [29](#)
- [96] WR Hamilton. On a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 2:247–308, 1834. [20](#)
- [97] WR Hamilton. Second Essay on a General Method in Dynamics, Philos. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1:95–144, 1835. [20](#)
- [98] G. Hastings and W. Book. Verification of a linear dynamic model for flexible robotic manipulators. In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1024–1029. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1986. [28](#), [32](#), [117](#), [144](#)
- [99] G Hastings and W Book. A linear dynamic model for flexible robotic manipulators. *IEEE Control Systems Magazine*, 7(1):61–64, feb 1987. [7](#), [95](#)
- [100] H. R. Heidari, M. H. Korayem, M. Haghpanahi, and V. F. Batlle. Optimal trajectory planning for flexible link manipulators with large deflection using a new displacements approach. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 72(3-4):287–300, 2013. [46](#), [65](#)
- [101] Robert Henriksson, Mikael Norrlof, Stig Moberg, Erik Wernholt, and Thomas B. Schon. Experimental comparison of observers for tool position estimation of industrial robots. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, pages 8065–8070. IEEE, dec 2009. [143](#)
- [102] Michael Hiltz, Craig Rice, Keith Boyle, and Ronald Allison. Canadarm: 20 years of mission success through adaptation. *International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space*, 1:1–8, 2001. [13](#)
- [103] G. Hirzinger, N. Sporer, M. Schedl, J. Butterfass, and M. Grebenstein. *Experimental Robotics VIII*, volume 5 of *Springer Tracts in Advanced Robotics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, jun 2003. [5](#)
- [104] Brian R Hopkins and Robert L. Williams. Kinematics, design and control of the 6âPSU platform. *Industrial Robot: An International Journal*, 29(5):443–451, oct 2002. [12](#), [51](#)

- [105] Seth Hutchinson, G.D. Hager, and P.I. Corke. A tutorial on visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5):651–670, 1996. [142](#)
- [106] Michael a. Johnson and Mohammad H. Moradi. *PID Control*. Springer-Verlag, London, 2005. [44](#), [65](#)
- [107] B. Jonker. A Finite Element Dynamic Analysis of Flexible Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 9(4):59–74, aug 1990. [31](#)
- [108] Ben Jonker. A finite element dynamic analysis of spatial mechanisms with flexible links. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 76(1):17–40, nov 1989. [30](#)
- [109] J.L. Junkins and J.D. Turner. *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers, Volume 3*. Elsevier, North Holland, 1 edition, 1986. [27](#)
- [110] Parveen Kalra and Anand M Sharan. Accurate modelling of flexible manipulators using finite element analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 26(3):299–313, jan 1991. [30](#)
- [111] Bongsoo Kang and James K. Mills. Dynamic modeling of structurally-flexible planar parallel manipulator. *Robotica*, 20(03), may 2002. [34](#)
- [112] M.R. Katebi and M.H. Moradi. Predictive PID controllers. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 148(6):478–487, 2001. [44](#), [65](#)
- [113] R. Kelly, V. Santibáñez, and A. Loria. Control of Robot Manipulators in Joint Space. *Saudi Med J*, 33:426, 2005. [55](#)
- [114] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*, volume 18. Pearson, 3 edition, 2002. [44](#), [65](#)
- [115] W Khalil and M Gautier. Modeling of mechanical systems with lumped elasticity. In *Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No.00CH37065)*, volume 4, pages 3964–3969. IEEE, 2000. [26](#), [27](#)
- [116] W. Khalil and S. Guegan. Inverse and Direct Dynamic Modeling of Gough-Stewart Robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 20(4):754–762, aug 2004. [13](#)
- [117] Wisama Khalil and Etienne Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Taylor & Francis, Bristol, 3 edition, 2004. [49](#), [56](#)
- [118] Wisama Khalil and Ouarda Ibrahim. General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 49(1):19–37, mar 2007. [13](#)

- [119] K. Khorasani. A neural-network-based controller for a single-link flexible manipulator using the inverse dynamics approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48(6):1074–1086, 2001. 48, 66
- [120] Chang Tai Kiang, Andrew Spowage, and Chan Kuan Yoong. Review of Control and Sensor System of Flexible Manipulator. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 77(1):187–213, 2014. 14, 142
- [121] Jin-Soo Kim and Masaru Uchiyama. Vibration Mechanism of Constrained Spatial Flexible Manipulators. *JSME International Journal Series C*, 46(1):123–128, 2003. 27
- [122] Sang-Myeong Kim, Semyung Wang, and Michael J Brennan. Comparison of negative and positive position feedback control of a flexible structure. *Smart Materials and Structures*, 20(1):015011, 2010. 39, 62
- [123] Hideo Kitagawa. Motion control of omnidirectional wheelchair considering patient comfort. In Luis Basañez, editor, *Triennial World Congress of IFAC*, pages 883–883, jul 2002. 7
- [124] Atsushi Konno and Masaru Uchiyama. Modeling of a flexible manipulator dynamics based upon Holzer’s model. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IROS '96*, volume 1, pages 223–229. IEEE, 1996. 27
- [125] MH Korayem and M Haghpanahi. Finite element method and optimal control theory for path planning of elastic manipulators. *New Advances in Intelligent Decision Technologies*, 199(2009):117–126, 2009. 30
- [126] MH Korayem, HN Rahimi, and A Nikoobin. *The Comparative Assessment of Modelling and Control of Mechanical Manipulator*. Sciyo, aug 2010. 30, 31
- [127] G. Leuret, K. Liu, and F.L. Lewis. Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator. *Journal of Robotic Systems*, 10(3):629–655, 1993. 91
- [128] Se-Han Lee, Jae-Bok Song, Woo-Chun Choi, and Daehie Hong. Position control of a Stewart platform using inverse dynamics control with approximate dynamics. *Mechatronics*, 13(6):605–619, jul 2003. 13
- [129] Tae Hoon Lee, Won Sang Ra, Seung Hee Jin, Tae Sung Yoon, and Jin Bae Park. Robust Extended Kalman Filtering via Krein Space Estimation. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E87-A(1):243–250, 2004. 41, 63
- [130] D. Li and S.E. Salcudean. Modeling, simulation, and control of a hydraulic Stewart platform. In *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 3360–3366. IEEE, 1997. 12, 51

- [131] Q. Li and F.X. Wu. Control performance improvement of a parallel robot via the design for control approach. *Mechatronics*, 14(8):947–964, oct 2004. 48, 66
- [132] Hongyan Liu, Yumei Huang, Wenhao Shi, and Hongwei Xu. Design of adaptive fuzzy controller for flexible link manipulator. In *2008 IEEE International Conference on Industrial Technology*, pages 1–4. IEEE, apr 2008. 66, 142
- [133] Jinkun Liu and Linjun Zhang. Adaptive boundary control for flexible two-link manipulator based on partial differential equation dynamic model. *IET Control Theory & Applications*, 7(1):43–51, 2013. 66
- [134] Liang-Yih Liu and King Yuan. Noncollocated passivity-based PD control of a single-link flexible manipulator. *Robotica*, 21(02):117–135, mar 2003. 37, 62
- [135] K. H. Low. Solution schemes for the system equations of flexible robots. *Journal of Robotic Systems*, 6(4):383–405, aug 1989. 28
- [136] @Lynx Design. Lift Labs, 2013. 8
- [137] Kougen Ma and Mehrdad N. Ghasemi-Nejhad. Adaptive control of flexible active composite manipulators driven by piezoelectric patches and active struts with dead zones. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(5):897–907, 2008. 46, 66
- [138] J.M. Maciejowski. *Predictive control with constraints*. Prentice Hall, London, pearson ed edition, 2002. 44, 65
- [139] Urban Maeder, Francesco Borrelli, and Manfred Morari. Linear offset-free Model Predictive Control. *Automatica*, 45(10):2214–2222, 2009. 65
- [140] Iskandar A Mahmood, S. O. Reza Moheimani, and Bharath Bhikkaji. Precise Tip Positioning of a Flexible Manipulator Using Resonant Control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 13(2):180–186, apr 2008. 42, 45, 64
- [141] Nuno Manuel Mendes Maia and J. M. (Julio Martins) Montalvao e Silva. *Theoretical and experimental modal analysis*. Research Studies Press, 1997. 144
- [142] David Q. Mayne, James B. Rawlings, Crhistopher V. Rao, and Pierre O.M. Scolaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000. 65
- [143] Leonard Meirovitch. *Analytical methods in vibrations*. 1967. 27
- [144] Leonard Meirovitch. *Computational Methods in Structural Dynamics*. Springer, 1980. 88

- [145] Leonard Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, 2 edition, 1986. 27, 31, 32
- [146] Leonard Meirovitch. *Dynamics and Control of Structures*. John Wiley & Sons, New York, 2 edition, 1990. 27
- [147] Leonard Meirovitch. *Principles and techniques of vibrations*. Prentice-Hall, 1997. 25, 27
- [148] Jean-Pierre Merlet. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms. In *ASME 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, 2002. 12, 50
- [149] J.P. Merlet. *Parallel Robots*. Springer Science & Business Media, 2 edition, 2006. 3, 77, 79
- [150] Tsutomu Mita and Hiroshi Yoshida. Undershooting Phenomenon and Its Control in Linear Multivariable Servomechanisms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2):402–407, 1981. 65
- [151] Z. Mohamed and M.O. Tokhi. Command shaping techniques for vibration control of a flexible robot manipulator. *Mechatronics*, 14(1):69–90, feb 2004. 30
- [152] S O R Moheimani and a J Fleming. *Piezoelectric transducers for vibration control and damping (advances in industrial control)*. Advances in Industrial Control. Springer-Verlag, London, 2006. 42
- [153] C.A. Monje, F. Ramos, B.M. Vinagre, and V. Feliu. Tip position control of a lightweight flexible manipulator using a fractional order controller. *IET Control Theory & Applications*, 1(5):1451–1460, sep 2007. 43, 64
- [154] M.H. Moradi, M.R. Katebi, and M.A. Johnson. Predictive PID control: a new algorithm. In *27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, volume 1, pages 764–769. IEEE, 2001. 44, 65
- [155] K A Morris and M Vidyasagar. A Comparison of Different Models for Beam Vibrations From the Standpoint of Control Design. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 112(3):349, 1990. 22
- [156] John J. Murray and Gilbert H. Lovell. Dynamic Modeling of Closed-Chain Robotic Manipulators and Implications for Trajectory Control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(4):522–528, 1989. 69, 83
- [157] N. O. Myklestad. A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams. *ournal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*, 11(2):153–162, 1944. 27

- [158] G. Naganathan and A. Soni. Non-linear flexibility studies for spatial manipulators. In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 373–378. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1986. 7
- [159] Yoshihiko Nakamura and Modjtaba Ghodoussi. Dynamics Computation of Closed-Link Robot Mechanisms with Nonredundant and Redundant Actuators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(3):294–302, 1989. 69, 83, 93
- [160] Hoai Nhan Nguyen, Jian Zhou, and Hee Jun Kang. A new full pose measurement method for robot calibration. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 13(7):9132–9147, 2013. 142
- [161] Dirk Nissing. A vibration damped flexible robot: identification and parameter optimization. In *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, volume 3, pages 1715–1719. American Autom. Control Council, 2000. 26
- [162] CM Oakley and RH Cannon Jr. End-point control of a two-link manipulator with a very flexible forearm: Issues and experiments. In *American Control Conference*, pages 1381–1389, Pittsburgh, PA, USA, 1989. IEEE Comput. Soc. Press. 28
- [163] Aníbal Ollero Baturone. *Robotica manipuladores y robots moviles*. S.A. MARCOMBO, 1 edition, 2001. 49
- [164] R Orszulik and J J Shan. Multi-Mode Adaptive Positive Position Feedback: An Experimental Study. *2011 American Control Conference*, pages 3315–3319, 2011. 40, 62
- [165] F. Paccot, N. Andreff, and P. Martinet. A Review on the Dynamic Control of Parallel Kinematic Machines: Theory and Experiments. *The International Journal of Robotics Research*, 28(3):395–416, mar 2009. 182
- [166] Flavien Paccot, Nicolas Andreff, and Philippe Martinet. Revisiting the Major Dynamic Control Strategies of Parallel Robots. In *2007 European Control Conference*, 2007. 55, 57
- [167] Flavien Paccot, Nicolas Andreff, Philippe Martinet, and Wisama Khalil. Vision-based Computed Torque Control for Parallel Robots. In *IECON 2006 - 32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*, pages 3851–3856. IEEE, nov 2006. 182
- [168] Kyung Jo Park. Flexible robot manipulator path design to reduce the endpoint residual vibration under torque constraints. *Journal of Sound and Vibration*, 275(3-5):1051–1068, 2004. 38, 62, 64

- [169] Anatol Pashkevich, Damien Chablat, and Philippe Wenger. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 44(5):966–982, may 2009. 34
- [170] Emiliano Pereira, Sumeet S. Aphale, Vicente Feliu, and S. O Reza Moheimani. Integral resonant control for vibration damping and precise tip-positioning of a single-link flexible manipulator. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 16(2):232–240, 2011. 42, 64
- [171] Emiliano Pereira, Sumeet S. Aphalet, Vicente Feliu, and S. O Reza Moheimani. A hybrid control strategy for vibration damping and precise tip-positioning of a single-link flexible manipulator. *IEEE 2009 International Conference on Mechatronics, ICM 2009*, 00(April), 2009. 42, 64
- [172] Emiliano Pereira, Juan J L Cela, and Vicente Feliu. A New Design Methodology for Passivity-Based Control of Single- Link Flexible Manipulators. *IEEE/ASME international conference*, pages 1–6, 2007. 37, 42, 62, 64
- [173] E. C. Pestel, F. A. Leckie, and E. F. Kurtz. Matrix Methods in Elastomechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 31(3):574, 1964. 27
- [174] Jean-Claude Piedboeuf. The jacodian matrix for a flexible manipulator. *Journal of Robotic Systems*, 12(11):709–726, nov 1995. 142
- [175] Jean-Claude; Piedboeuf and S Miller. Estimation of endpoint position and orientation of a flexible link using strain gauges. In Capri, editor, *Proceeding of the symposium on robot control*, pages 675–680, Italy, 1994. 142
- [176] G. Piras, W.L. Cleghorn, and J.K. Mills. Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links. *Mechanism and Machine Theory*, 40(7):849–862, jul 2005. 34
- [177] S. K. Pradhan and B. Subudhi. Real-Time Adaptive Control of a Flexible Manipulator Using Reinforcement Learning. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 9(2):237–249, 2012. 47, 66
- [178] JS Przemieniecki. *Theory of matrix structural analysis*. Dover Publications, New York, mcgraw-hil edition, 1968. 32, 99, 116
- [179] Zhen Qi and John E. McInroy. Nonlinear Image Based Visual Servoing Using Parallel Robots. *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (April):1715–1720, 2007. 182
- [180] Zhi-cheng Qiu, Jian-da Han, Xian-min Zhang, Yue-chao Wang, and Zhen-wei Wu. Active vibration control of a flexible beam using a non-collocated acceleration sensor and piezoelectric patch actuator. *Journal of Sound and Vibration*, 326(3-5):438–455, 2009. 40, 63

- [181] Zhicheng Qiu. Acceleration Sensor Based Vibration Control for Flexible Robot by Using PPF Algorithm. *2007 IEEE International Conference on Control and Automation*, 00(x):1335–1339, 2007. 39, 40, 62
- [182] D.W. Raboud, A.W. Lipsett, M.G. Faulkner, and J Diep. Stability evaluation of very flexible cantilever beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36(7):1109–1122, oct 2001. 26
- [183] H.N. Rahimi and M. Nazemizadeh. Dynamic analysis and intelligent control techniques for flexible manipulators: a review. *Advanced Robotics*, 28(2):63–76, jan 2014. 25
- [184] Carlos Rodriguez-Donate, Luis Morales-Velazquez, Roque Alfredo Osornio-Rios, Gilberto Herrera-Ruiz, and Rene de Jesus Romero-Troncoso. FPGA-based fused smart sensor for dynamic and vibration parameter extraction in industrial robot links. *Sensors*, 10(4):4114–4129, 2010. 142
- [185] Mathieu Rognant, Eric Courteille, and Patrick Maurine. A Systematic Procedure for the Elastodynamic Modeling and Identification of Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(6):1085–1093, dec 2010. 34
- [186] Brian Rooks. High speed delivery and low cost from new ABB packaging robot. *Industrial Robot: An International Journal*, 26(4):267–275, 1999. 5
- [187] Jee-Hwan Ryu, Dong-Soo Kwon, and Blake Hannaford. Control of a Flexible Manipulator with Noncollocated Feedback : Time Domain Passivity Approach. *Spinger tracts in advanced robotics*, pages 121–134, 2003. 37, 62
- [188] D.A. Saravanos and J.S. Lamancusa. Optimum structural design of robotic manipulators with fiber reinforced composite materials. *Computers & Structures*, 36(1):119–132, jan 1990. 26
- [189] Jerzy Sasiadek. Space Robotics and its Challenges. In *GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences*, volume 8, pages 1–8. 2013. 13
- [190] T. Sato. Design of a GPC-based PID controller for controlling a weigh feeder. *Control Engineering Practice*, 18(2):105–113, 2010. 44, 65
- [191] Mostafa Sayahkarajy, Z Mohamed, and A. A. Mohd Faudzi. Review of modelling and control of flexible-link manipulators. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 230(8):861–873, sep 2016. 14
- [192] G.R. Scholz and C.D. Rahn. Profile Sensing With an Actuated Whisker. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(1):124–127, feb 2004. 7
- [193] JA Selig. Study on dynamic modeling of compliant manipulators. In *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation (Cat. No.02EX527)*, volume 2, pages 1347–1353. IEEE, 2002. 27

- [194] J.M. Selig. Lumped parameter dynamic modeling for the flexible manipulator. In *Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation (IEEE Cat. No.04EX788)*, volume 1, pages 280–284. IEEE, 2004. 27
- [195] Jinjun Shan, Hong Tao Liu, and Dong Sun. Slewing and vibration control of a single-link flexible manipulator by positive position feedback (PPF). *Mechatronics*, 15(4):487–503, 2005. 39, 62
- [196] Weiwei Shang and Shuang Cong. Nonlinear computed torque control for a high-speed planar parallel manipulator. *Mechatronics*, 19(6):987–992, 2009. 58
- [197] Jeffrey J. Shifman. Lyapunov functions and the control of the Euler-Bernoulli beam. *International Journal of Control*, 57(4):971–990, apr 1993. 6, 24
- [198] HC Shin and SB Choi. Position control of a two-link flexible manipulator featuring piezoelectric actuators and sensors. *Mechatronics*, 11(6):707–729, sep 2001. 29
- [199] B Siciliano and O Khatib. *Springer handbook of robotics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008 edition, 2008. 4
- [200] Bruno Siciliano. Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 3(3):201–212, 1990. 141
- [201] S. N. Singh and A. A. Schy. Control of Elastic Robotic Systems by Nonlinear Inversion and Modal Damping. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 108(3):180, 1986. 28, 32, 44, 65
- [202] Sahjendra N. Singh and Albert A. Schy. Elastic Robot Control: Nonlinear Inversion and Linear Stabilization. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-22(4):340–348, 1986. 144
- [203] G. Song, S. P. Schmidt, and B. N. Agrawal. Experimental Robustness Study of Positive Position Feedback Control for Active Vibration Suppression. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(1):179a–182, 2002. 39, 62
- [204] S.-D. Stan, Milos Manic, V. Maties, and R. Balan. Kinematics analysis, design, and control of an Isoglide3 Parallel Robot (IG3PR). In *2008 34th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*, pages 2636–2641. IEEE, nov 2008. 51
- [205] John William Strutt. *The Theory of Sound*. Macmillan Publications Co., London, 1877. 21
- [206] Y. X. Su, B. Y. Duan, C. H. Zheng, Y. F. Zhang, G. D. Chen, and J. W. Mi. Disturbance-rejection high-precision motion control of a stewart platform. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(3):364–374, 2004. 12

- [207] Y.X. Su and J.K. Mills. Nonlinear PD Synchronized Control for Parallel Manipulators. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, number April, pages 1374–1379. IEEE, 2005. [12](#), [53](#)
- [208] B. Subudhi and a.S. Morris. Dynamic modelling, simulation and control of a manipulator with flexible links and joints. *Robotics and Autonomous Systems*, 41(4):257–270, dec 2002. [29](#)
- [209] B. Subudhi and a.S. Morris. Soft computing methods applied to the control of a flexible robot manipulator. *Applied Soft Computing*, 9(1):149–158, 2009. [46](#), [66](#)
- [210] B. Subudhi and a. S. Morris. Singular perturbation based neuro-H control scheme for a manipulator with flexible links and joints. *Robotica*, 24(02):151–161, 2005. [48](#), [66](#)
- [211] Dong Sun, James K. Mills, Jinjun Shan, and S. K. Tso. A PZT actuator control of a single-link flexible manipulator based on linear velocity feedback and actuator placement. *Mechatronics*, 14(4):381–401, 2004. [40](#), [62](#)
- [212] W Sunada and S Dubowsky. The application of finite element methods to the dynamic analysis of flexible spatial and coplanar linkage systems. *Journal of Mechanical Design*, 103(July 1981):643–651, 1981. [31](#)
- [213] Huang Sunan, Tan Kok Kiong, and Lee Tong Heng. *Applied Predictive Control*, volume 53 of *Advances in Industrial Control*. Springer London, London, 2002. [44](#), [65](#)
- [214] Sivakumar S. K. Tadikonda and Haim Baruh. Dynamics and Control of a Translating Flexible Beam With a Prismatic Joint. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 114(3):422, 1992. [28](#), [32](#)
- [215] K. K. Tan, T. H. Lee, and F. M. Leu. Predictive PI versus Smith control for dead-time compensation. *ISA Transactions*, 40(1):17–29, 2001. [44](#), [65](#)
- [216] R. J. Theodore and A Ghosal. Comparison of the Assumed Modes and Finite Element Models for Flexible Multilink Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 14(2):91–111, apr 1995. [22](#), [31](#), [32](#), [144](#)
- [217] W.T. Thomson. Matrix Solution For The Vibration Of Non Uniform Beams. *Journal of Applied Mechanics*, 17:337–339, 1950. [27](#)
- [218] Lianfang Tian and Curtis Collins. Adaptive neuro-fuzzy control of a flexible manipulator. *Mechatronics*, 15(10):1305–1320, 2005. [48](#), [66](#)
- [219] S Timoshenko, Jr W. Weaver, and D. H. Young. *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons, New York, 5 edition, 1974. [21](#), [22](#)

- [220] S.P. Timoshenko. X. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine Series 6*, 43(253):125–131, jan 1922. [21](#), [22](#)
- [221] A.K.M. Tokhi, M.O. and Azad. *Flexible Robot Manipulators*. The Institution of Engineering and Technology, London, 2008. [95](#), [99](#), [100](#), [101](#), [102](#), [103](#), [104](#), [105](#), [138](#), [203](#)
- [222] A.K.M. Tokhi, M.O.; Azad. *Flexible Robot Manipulators: Modelling, Simulation and Control*. IET, 2008. [7](#), [29](#), [30](#)
- [223] J. Tokhi, MO; Mohamed, Z; Martins, JM; Botto, M.A.; Sa da Costa. Approaches for dynamic modelling of flexible manipulator systems. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 150(4):401–411, jul 2003. [95](#)
- [224] P. Tomei. An observer for flexible joint robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(6):739–743, jun 1990. [4](#)
- [225] Alberto Traslosheros, Jose Maria Sebastian, Jesus Torrijos, Ricardo Carelli, and Eduardo Castillo. An inexpensive method for kinematic calibration of a parallel robot by using one hand-held camera as main sensor. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 13(8):9941–9965, 2013. [142](#)
- [226] Miguel Trejo-Hernandez, Roque Alfredo Osornio-Rios, Rene de Jesus Romero-Troncoso, Carlos Rodriguez-Donate, Aurelio Dominguez-Gonzalez, and Gilberto Herrera-Ruiz. FPGA-based fused smart-sensor for tool-wear area quantitative estimation in CNC machine inserts. *Sensors*, 10(4):3373–3388, 2010. [143](#)
- [227] Lung-Wen Tsai. Solving the Inverse Dynamics of a Stewart-Gough Manipulator by the Principle of Virtual Work. *Journal of Mechanical Design*, 122(1):3, 2000. [13](#)
- [228] LW Tsai. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. Wiley-Interscience, New York, 1 edition, 1999. [17](#), [49](#), [90](#), [116](#)
- [229] T. Tsujisawa and W.J. Book. A reduced order model derivation for lightweight arms with a parallel mechanism. In *Proceedings, 1989 International Conference on Robotics and Automation*, pages 728–735. IEEE Comput. Soc. Press, 1989. [32](#), [99](#), [116](#)
- [230] M. Z M Tumari, M. A. Ahmad, M. S. Saealal, M. A. Zawawi, Z. Mohamed, and N. M. Yusop. The direct strain feedback with PID control approach for a flexible manipulator: Experimental results. *International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 7–12, 2011. [41](#), [63](#)
- [231] M. Vidyasagar. On Undershoot and Nonminimum Phase Zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(5):440, 1986. [65](#)

- [232] A. Vivas and P. Poignet. Model Based Predictive Control of a Fully Parallel Robot. *SYROCO'03: Symposium on Robot Control*, pages 277–282, 2003. 58
- [233] Andrés Vivas and Philippe Poignet. Control Predictivo de un Robot Paralelo. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)*, 3(4):46–53, 2006. 58
- [234] Andrés Vivas and Philippe Poignet. Predictive functional control of a parallel robot. *Control Engineering Practice*, 13(7):863–874, 2005. 58
- [235] D. Wang and M. Vidyasagar. Transfer functions for a single flexible link. In *Proceedings, 1989 International Conference on Robotics and Automation*, number 1, pages 1042–1047, Scottsdale, 1989. IEEE Comput. Soc. Press. 28, 117
- [236] Xiaoya Wei and Shan Liu. Computational Effective Predictive End-Point Trajectory Control of Flexible Manipulators with Measureable Feedback Lag. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 4(20):3875–3884, 2012. 45, 65
- [237] Robert L. Williams II and Atul R Joshi. Planar parallel 3-RPR Manipulator. In *Proceedings of the Sixth Conference on Applied Mechanisms and Robotics*, number 740, pages 12–15, Cincinnati OH, 1999. 51
- [238] D.G. Wilson, G.P. Starr, G.G. Parker, and R.D. Robinett. Robust control design for flexible-link/flexible-joint robots. In *Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings*, volume 2, pages 1496–1501. IEEE, 2000. 39, 62
- [239] Zhang Xilun, D; Qixian. A new dynamic modeling method of D-Holzer method for the flexible manipulator. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 35(3):25–28, 1996. 27
- [240] Yunjun Xu and Erich Ritz. Vision based flexible beam tip point control. *Proceedings of the American Control Conference*, 17(5):5277–5282, 2009. 43, 64
- [241] Chifu Yang, Qitao Huang, Hongzhou Jiang, O. Ogbobe Peter, and Junwei Han. PD control with gravity compensation for hydraulic 6-DOF parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 45(4):666–677, apr 2010. 52
- [242] Zhiyong Yang, Jiang Wu, and Jiangping Mei. Motor-mechanism dynamic model based neural network optimized computed torque control of a high speed parallel manipulator. *Mechatronics*, 17(7):381–390, sep 2007. 57
- [243] Zhiyong Yang, Jiang Wu, Jiangping Mei, Jian Gao, and Tian Huang. Mechatronic Model Based Computed Torque Control of a Parallel Manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 5(1):1, 2008. 57

- [244] Ping-Lang Yen and Chi-Chung Lai. Dynamic modeling and control of a 3-DOF Cartesian parallel manipulator. *Mechatronics*, 19(3):390–398, apr 2009. 57
- [245] Shigang Yue, SK Tso, and WL Xu. Maximum-dynamic-payload trajectory for flexible robot manipulators with kinematic redundancy. *Mechanism and Machine Theory*, 36(6):785–800, jun 2001. 30
- [246] J. Yuh and T. Young. Dynamic Modeling of an Axially Moving Beam in Rotation: Simulation and Experiment. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 113(1):34, 1991. 28
- [247] Cheng-Xin Zhang and Yue-Qing Yu. Dynamic Analysis of Planar Cooperative Manipulators With Link Flexibility. *Journal of Mechanical Design*, 126(3):442, 2004. 30
- [248] Jinchuan Zheng and Minyue Fu. A Reset State Estimator Using an Accelerometer for Enhanced Motion Control With Sensor Quantization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(1):79–90, jan 2010. 143
- [249] G Zhu, S.S. Ge, and T.H. Lee. Simulation studies of tip tracking control of a single-link flexible robot based on a lumped model. *Robotica*, 17(1):71–78, jan 1999. 26
- [250] Zhenqi Zhu, Jinsong Li, Zhongxue Gan, and Hui Zhang. Kinematic and dynamic modelling for real-time control of Tau parallel robot. *Mechanism and Machine Theory*, 40(9):1051–1067, sep 2005. 55
- [251] Olek C Zienkiewicz, Robert L Taylor, and J.Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 6, reimpre edition, 2005. 30
- [252] Loredana Zollo, Bruno Siciliano, Alessandro De Luca, Eugenio Guglielmelli, and Paolo Dario. Compliance Control for an Anthropomorphic Robot with Elastic Joints: Theory and Experiments. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 127(3):321, 2005. 4
- [253] Asier Zubizarreta. *Estrategias de Control Avanzado para Robots Paralelos*. PhD thesis, Escuela Superior de Ingeniería de Bilbao, UPV/EHU, 2010. 68, 184

“

*Everybody knows that
some things are simply impossible
until somebody,
who doesn't know that,
makes them possible*

-Albert Einstein-