

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍA
INDUSTRIAL

TRABAJO FIN DE GRADO

*IMPLEMENTACIÓN EN MATLAB DE
UN PROCEDIMIENTO DE
OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA PARA
ESTRUCTURAS CON CARGAS
TÉRMICAS*

Alumno: Román Abad Castro

Director: Rubén Ansola Loyola

Curso: 2017-2018

Fecha: Bilbao, 15 Junio, 2018

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS	3
LISTA DE ACRÓNIMOS	4
RESUMEN	5
ABSTRACT	5
LABURPENA	6
1. INTRODUCCIÓN	7
1.1. Concepto de optimización.....	7
1.2. Tipos de optimización estructural.....	7
1.3. Optimización topológica. Antecedentes.....	8
1.4. Deformaciones y tensiones de origen térmico.....	9
2. OBJETIVOS Y ALCANCE	10
3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. PROCESO DE OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA	11
3.1. Procedimiento para la implantación de la OT	11
3.2. Formulación general del problema	11
3.3. Problema elástico por el método de los elementos finitos	13
3.4. Energía térmica.....	14
3.5. Método de las densidades y método SIMP	14
3.6. Definición del problema	15
4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA	16
4.1. Criterio de Optimalidad OC (Optimality Criteria)	17
4.2. Filtro	18
5. IMPLEMENTACIÓN DEL PROBLEMA EN MATLAB	19
5.1. Programa principal (líneas 1-34)	20
5.2. Criterio de optimalidad (líneas 35-46)	22
5.3. Filtro de Sensibilidad (líneas 47-60)	23
5.4. Análisis de Elementos Finitos (líneas 61-81).....	23
5.5. Matriz de conductividad térmica de un elemento (líneas 83-87).....	25
6. RESULTADOS OBTENIDOS	25
6.1. Variación en el número de elementos.....	26
6.2. Variación del factor de penalidad p	27
6.3. Variación de la restricción de volumen	29
6.4. Variación del radio de filtro r_{min}	30
6.5. Ejemplos con diferentes formas y restricciones	32

6.5.1.	Dominio inicial rectangular	32
6.5.2.	Doble zona de evacuación de calor.....	33
6.5.3.	Carga térmica en la mitad del dominio	35
6.5.4.	Dominio cuadrado con zona no optimizable	36
7.	TRABAJOS FUTUROS	39
8.	CONCLUSIONES	40
	REFERENCIAS	41
ANEXO A.	CÓDIGO COMPLETO DE MATLAB	43

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Optimización (a) de tamaño, (b) de forma y (c) topológica.	8
Figura 2: Optimización topológica ante una carga puntual	8
Figura 3: Discretización en elementos finitos	13
Figura 4: Magnitudes conocidas del problema	13
Figura 5: Ejemplo (a) de problema planteado y (b) solución con problema "checkerboard". ...	18
Figura 6: Representación de un radio de filtro r_{min} de (a) 1.0 y (b) 3.5	19
Figura 7: Ejemplo de optimización topológica frente a una carga térmica uniforme.	20
Figura 8: Ejemplo de numeración de nodos en un dominio de 4 x 4 elementos.....	24
Figura 9: Comparación entre la solución dada por Bendsøe y Sigmund (izquierda) y la solución obtenida (derecha)	25
Figura 10: Solución con distinto número de elementos	27
Figura 11: Solución con distinto factor de penalidad.....	28
Figura 12: Solución para distinto porcentaje de volumen sólido	30
Figura 13: Influencia del radio de filtro en la solución.....	31
Figura 14: Optimización topológica de un dominio inicial rectangular	33
Figura 15. Evacuación por las partes izquierda y superior.....	34
Figura 16: Evacuación por las partes izquierda y derecha	34
Figura 17: Solución obtenida aprovechando la simetría del dominio inicial	35
Figura 18: Optimización topológica con carga térmica en la mitad del dominio	36
Figura 19: Dominio con sección circular no optimizable	37
Figura 20: Zona no optimizable de diferentes tamaños	38
Figura 21: Evacuación de calor por la zona no optimizable	39

LISTA DE ACRÓNIMOS

OT	Optimización Topológica
Ω	Dominio inicial de diseño
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
OC	Criterio de Optimalidad
MMA	Método de las Asíntotas Móviles
PLS	Programación Lineal Secuencial
ε^t	Deformación unitaria térmica
ΔT	Variación de temperatura
ε_{xx}	Deformación unitaria longitudinal en el eje x
L	Longitud
ΔL	Variación de longitud
α	Coefficiente de dilatación térmica
σ_{xx}	Tensión normal en el eje x
E	Módulo de elasticidad o módulo de Young
ν	Coefficiente de Poisson
$f(x)$	Función objetivo
\mathbf{x}	Matriz de densidades
x_i	Densidad del elemento i
$g(x)$	Restricción de desigualdad
$h(x)$	Restricción de igualdad
\mathbf{K}	Matriz de conductividad térmica global
\mathbf{t}_e	Vector de temperaturas nodales
c	Energía térmica
\mathbf{k}_e	Matriz de conductividad térmica de un elemento
p	Factor de penalidad
\mathbf{T}	Vector global de temperaturas
f	Fracción de volumen
B_e	Condición de optimalidad
\hat{H}_f	Operador de convolución
r_{min}	Radio de filtro

RESUMEN

En este trabajo se hace un estudio de la técnica de optimización topológica, utilizada en el diseño de estructuras. La técnica consiste en encontrar la topología que mantenga las propiedades mecánicas del componente objetivo ante unas cargas y unas restricciones preestablecidas, a partir de un dominio inicial dado, disminuyendo el volumen de material empleado en su fabricación. El estudio se centrará en estructuras sometidas a cargas térmicas uniformes, por lo que lo que se buscará es la topología que ofrezca una conducción óptima de calor. El trabajo dispone de varias partes: un análisis teórico del concepto de optimización topológica y su implementación numérica; implementación del problema en un código del programa Matlab, que se utilizará para la resolución de estructuras; y un amplio análisis de los resultados obtenidos mediante este programa para diferentes condiciones. La metodología empleada para el cálculo se basa en el Método de los Elementos Finitos (MEF), empleando un Criterio de Optimalidad (OC) para optimizar la conducción de calor. La variable principal del proyecto es una matriz que contiene el valor de la densidad de cada elemento finito en que se divide el dominio inicial. Esta densidad adquiere un valor entre 0 y 1. La solución al problema se muestra como una representación gráfica de esta matriz de densidades, donde cada elemento de la estructura estará representado por un pequeño cuadrado, que tendrá color negro si su densidad es 1 (presencia de material), blanco para densidad 0 (vacío) y gris para valores intermedios.

Palabras clave: Optimización topológica, conducción de calor, dominio, distribución de material, restricción de volumen, variables de diseño, código de Matlab

ABSTRACT

In this Project an analysis of a topology optimization technique is done, which is used in the design of structures. The technique consists on finding the topology that maintains the mechanical properties of the component against certain loads and restrictions, starting from an initial domain, trying to reduce the volume of material used in the production of the structure. The study will focus on structures subjected to uniform thermal loads, so the objective is to find the topology that offers an optimum heat conduction. The project is divided in several parts: a theoretical analysis of the topology optimization concept and its numerical implementation; implementation of the problem in a Matlab code, which will be used for the resolution of structures; and a deep analysis of the obtained results by the use of this program in different conditions. The methodology used for the calculation is based in the Finite Elements Method (FEM), using an Optimality Criteria (OC) to optimize the heat conduction in the structure. The main variable of the project is a matrix that contains the value of the density of each finite element in which the initial domain is divided. This density will take a value between 0 and 1. The solution to the problem is shown as a graphic representation of this matrix of densities, where each element of the structure will be represented by a little square that will be colored black if its density is equal to 1 (presence of material), white if its density is equal to 0 (vacuum), or grey if it is an intermediate value.

Key words: Topology optimization, heat conduction, domain, material distribution, volume restriction, design variables, Matlab code.

LABURPENA

Lan honetan, egituren diseinuan erabilitako optimizazio topologikoaren azterketa egiten da. Teknika hau, aurretik ezarritako karga eta murrizpen batzuen aurrean, osagaiaren propietate mekanikoak mantenduko dituen topologia bilatzean datza, hasierako egoeratik, fabrikazioan erabilitako materialaren bolumena murriztuz. Azterketa, karga termiko uniformeak dituzten egituretara bideratuko da, beroaren eroapen optimoa eskainiko duen topologia bilatuz. Lana zati desberdinetan banatu daiteke: optimizazioa topologiko kontzeptuaren analisi teorikoa eta bere inplementazio numerikoa; egituren ebazpenerako erabiliko den, Matlab programako kodigoarekin egindako problemaren inplementazioa; eta programa hori erabiliz, baldintza desberdinetan lortu diren emaitzen azterketa sakona. Kalkulurako erabilitako metodologiaren oinarria, Elementu Finituen Metodoa da (EFM), Optimizazio Irizpide (OC) bat erabiliz beroaren eroapena hobetzeko. Proiektuaren aldagai nagusia, hasierako eremua banatzen den elementu finitu bakoitzaren dentsitatea daukan matrizea da. Dentsitate honen balioak 0 eta 1 bitartean egon daitezke. Problemaren soluzioa, dentsitate matrize horien adierazpide grafiko bezala ematen dira, non egituraren elementu bakoitzak lauki txiki batez irudikatuko den. Hauek, kolore beltza izango dute beraien dentsitatea 1 bada (materialaren presentzia), zuria dentsitatea 0 bada (hutsa) eta grisa tarteko baloreetarako.

Hitz gakoak: Optimizazio topologikoa, bero eroapena, eremu, materialaren banaketa, bolumenaren murrizketa, diseinu aldagaiak, Matlab-kodea

1. INTRODUCCIÓN

La Optimización Topológica (OT) es una técnica englobada dentro del campo de análisis estructural. Se basa en el análisis mecánico de un componente o estructura. Su principal objetivo es el aligeramiento estructural manteniendo las funcionalidades mecánicas del componente objetivo.

1.1. Concepto de optimización

Optimizar consiste en encontrar la mejor solución posible a un problema planteado. La meta no es contentarse con encontrar una solución mejor, sino encontrar la solución óptima.

En la vida laboral de cualquier persona, y más en la de un ingeniero, se trata de encontrar la mejor solución, a un determinado problema, entre un conjunto de posibles soluciones propuestas. En la ingeniería, además, siempre se busca la mejor solución posible con el mínimo coste necesario, diseñando objetos y procesos que sean capaces de realizar sus funciones durante el mayor tiempo de vida posible trabajando eficientemente.

Es importante no confundir el término optimización con el término eficiencia: optimización se refiere a la mejora de algo hasta un punto en el que resulta prácticamente imposible seguir mejorándolo. Pero aunque el deseo siempre sea mejorar, no siempre puede resultar rentable. Aquí entra en juego el término eficiencia, que relaciona las mejoras conseguidas con el coste que implica llevar a cabo dichas mejoras, en referencia a dinero, tiempo y esfuerzo. Una mejora sólo será eficiente cuando el coste de dicha mejora sea inferior a la propia mejora obtenida.

La optimización de estructuras es un campo en constante evolución, siendo una de las herramientas más empleadas en el diseño de nuevos elementos estructurales.

1.2. Tipos de optimización estructural

1. Optimización de tamaño

Trata de determinar las medidas óptimas de los elementos que constituyen una estructura de forma predefinida, como por ejemplo secciones de barras, espesores de placas, etc. Es el problema más sencillo ya que el número de variables del problema es limitado. También pretende discretizar una estructura preestablecida con elementos de cercha (barras articuladas) para encontrar las dimensiones óptimas de la estructura.

2. Optimización de forma

El objetivo es encontrar la forma óptima del contorno de una estructura de topología fija. Se parte de una forma predefinida y se busca optimizarla modificando los contornos exteriores e interiores que definen la estructura.

3. Optimización topológica

Se basa en buscar la distribución óptima de material en una estructura. Se parte de un dominio de material inicial, y en función de ciertas especificaciones, como apoyos fijos y cargas a las que

estará sometido, se establece la mejor distribución de material para soportar dichas cargas de manera que las deformaciones y los esfuerzos sean mínimos.

Los diferentes tipos de optimización se muestran en la Figura 1.

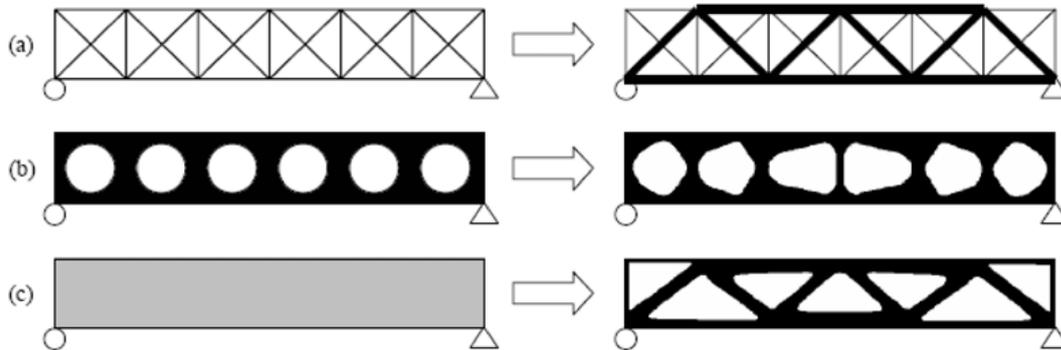


Figura 1: Optimización (a) de tamaño, (b) de forma y (c) topológica.

1.3. Optimización topológica. Antecedentes

La optimización topológica es un campo de investigación de rápido crecimiento, donde intervienen distintas áreas como las matemáticas, la mecánica y las ciencias computacionales. Tiene importantes aplicaciones prácticas en la industria aeroespacial, automotriz, de obras civiles, etc. Además tiene una gran importancia en el campo de las microtecnologías, principalmente en el diseño de mecanismos flexibles.

La OT resuelve el problema numéricamente, por medio de algoritmos iterativos que minimizan una función objetivo.

Una primera aplicación de la optimización topológica fue el diseño de estructuras sometidas a cargas puntuales que proporcionen la máxima rigidez ante dichas cargas y unas determinadas restricciones (apoyos). La Figura 2 muestra un dominio bidimensional (Ω), con apoyos articulados en las esquinas inferiores y una carga puntual (F) en la mitad del lado superior.

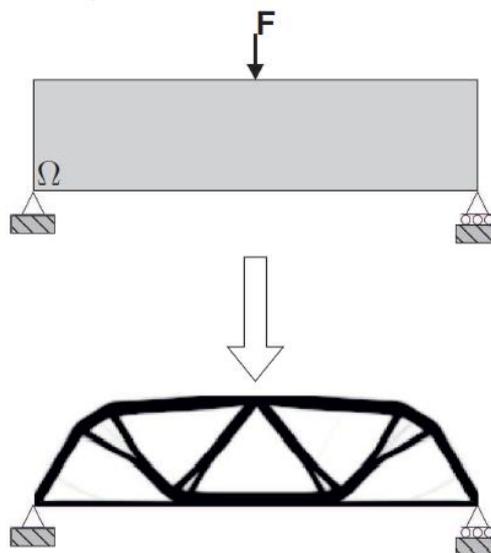


Figura 2: Optimización topológica ante una carga puntual

La parte inferior muestra la solución al problema de optimización topológica ante las condiciones impuestas y con una restricción de volumen determinada, es decir, el porcentaje de volumen del dominio inicial que debe estar ocupado por material. Las estructuras planas divididas en forma de cerchas triangulares resultan familiares y se pueden ver en la calle en todo tipo de estructuras como puentes, cubiertas de parques, polideportivos, etc.

Existen muchas otras aplicaciones de la optimización topológica en la ingeniería mecánica, como el diseño de mecanismos flexibles [1, 2, 3], diseño de sistemas Micro-Electro-Mecánicos [4,5], diseño de metamateriales (materiales con coeficiente de Poisson o coeficiente de expansión térmica negativos) [6], aletas para intercambio de calor, etc. Además, esta técnica se está comenzando a utilizar en la dinámica de fluidos [7], en el diseño de muros de contención de presas [8] o en los perfiles de alas de avión y hélices de helicópteros [9].

Muchas industrias que fabrican piezas mecánicas, como la aeroespacial, las obras civiles o la naval, necesitan el diseño de piezas con el menor peso posible pero con suficiente resistencia mecánica como para soportar todos los esfuerzos a los que estarán sometidos. La reducción de peso es un criterio a utilizar por el diseñador, que retira material, comprobando mediante ensayos de resistencia mecánica que el producto resultante cumple con los objetivos.

La OT es una técnica relativamente nueva. Su inicio lo tuvo en la publicación *The limits of economy of material in framestructures* de A.G. Michell en 1904. El autor estudió los criterios de optimización para la reducción de peso en estructuras de barras articuladas, aplicando los resultados a una viga en voladizo a la que llamó "Viga de Michell", que ha servido como punto de partida en el estudio de métodos de optimización topológica. La viga de Michell se reducía a una viga empotrada en un extremo, con un apoyo simple en el la esquina inferior del otro extremo, y sometida a una carga puntual hacia abajo en la esquina superior del extremo empotrado.

El tema de optimización topológica dio un giro en la década de los 60 cuando Schmidt [17] propuso la revolucionara idea de obtener el diseño óptimo mediante el empleo de ordenadores. Se establecieron las bases de un procedimiento iterativo para la resolución de los problemas.

En los años 70, con la mejora de la computación digital, el tema de optimización topológica cobró importancia, con autores como Mröz [10] y Pragera [11]. En este punto se descubrieron las grandes ventajas que suponía la utilización de métodos numéricos en el proceso de optimización.

Desde finales de los 80 se han ido mostrando las mejoras más avanzadas, con la publicación de una gran cantidad de artículos. Surgen técnicas nuevas como el método de homogeneización [12,13] y el método SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [3,14] que se verá más adelante.

Otros métodos que han surgido recientemente y han sido ampliamente usados son el criterio de optimalidad (OC) [15], el método de las asíntotas móviles (MMA) [16] y la programación lineal secuencial (PLS) [4].

1.4. Deformaciones y tensiones de origen térmico

El efecto de una variación de temperatura se manifiesta, en un material, produciendo una deformación unitaria aunque no haya ninguna otra tensión aplicada. A este efecto se le

denomina *deformación unitaria térmica* y se representa por ε^t . La deformación producida se manifiesta como una expansión pura o una compresión pura, sin que aparezcan tensiones cortantes respecto a ningún sistema de ejes, y puede expresarse linealmente en función de la variación de temperatura ΔT . La deformación unitaria es la misma en todas las direcciones, por lo que para cualquier eje de coordenadas resulta:

$$\varepsilon_{xx}^t = \varepsilon_{yy}^t = \varepsilon_{zz}^t = \alpha \cdot \Delta T \quad (1.1)$$

donde α es una característica física del material denominado *coeficiente de dilatación lineal*. Para un modelo unidimensional, como sería una barra de longitud L , sometida a un incremento de temperatura ΔT , el alargamiento unitario debido a esta carga térmica sería

$$\varepsilon_{xx}^t = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T \quad (1.2)$$

y por tanto su deformación total sería

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \quad (1.3)$$

Si la deformación de la barra está restringida por algún tipo de sistema, se origina una tensión normal σ_{xx} que contrarrestará la deformación de origen térmico, siendo en este caso la deformación:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha \cdot \Delta T \quad (1.4)$$

donde E es el módulo de elasticidad o módulo de Young del material.

Si la restricción es que la deformación debe ser nula $\varepsilon_{xx} = 0$, se produciría una tensión

$$\sigma_{xx} = -E \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (1.5)$$

Es decir, una tensión de compresión. Las tensiones de este tipo, originadas como consecuencia de la restricción a la libre dilatación de un cuerpo sometido a un incremento de temperatura, se denominan *tensiones termoelásticas*.

2. OBJETIVOS Y ALCANCE

El objetivo de este trabajo es la implementación en Matlab de un código para la resolución de problemas de optimización topológica aplicado a estructuras simples, con un espesor suficientemente pequeño como para considerarlas planas, y sometidas a cargas térmicas uniformes en una parte o en la totalidad del dominio inicial. El objetivo es encontrar la topología que haga que la carga térmica sea evacuada óptimamente hacia el exterior mediante conducción hacia una zona de evacuación de calor.

Dada la creciente importancia que están teniendo las impresoras 3D para el diseño y creación de todo tipo de materiales, cada vez resulta más sencillo y económico crear estructuras que a

priori podrían ser complicadas de fabricar con los medios de producción anteriores. Con las nuevas técnicas es posible fabricar estructuras con formas muy variadas y que respondan a los criterios de optimización topológica que se van a plantear.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. PROCESO DE OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA

En un proceso de optimización topológica se parte de un dominio inicial, generalmente rectangular, que se discretizará para encontrar la topología óptima en función de unas condiciones de carga y unas restricciones (apoyos). La optimización topológica se utiliza como punto de partida para nuevos diseños ya que aporta una idea general de cómo debe ser una estructura para tener unas características de funcionamiento óptimas ante ciertas cargas, aunque después habría que tener en cuenta posibles variaciones de las mismas.

En este caso, se realizará la optimización topológica de estructuras continuas, donde el dominio se dividirá en elementos finitos que representan una división del material en pequeños trozos. Cada elemento finito será analizado iterativamente hasta encontrar la distribución óptima de material.

3.1. Procedimiento para la implantación de la OT

Los pasos para un análisis de optimización topológica son:

- Definición del problema: se trata de establecer el dominio inicial, las condiciones de carga a las que estará sometido, las restricciones y el resto de variables implicadas en el diseño.
- Discretización del dominio en elementos finitos.
- Implementación del algoritmo de optimización topológica, que comienza a analizar iterativamente los diferentes elementos finitos para eliminar material hasta llegar a la solución final. Hay que tener en cuenta que las soluciones obtenidas son matemáticas, y puede darse el caso de que sean ilógicas a la hora de aplicarlas a materiales reales.
- Interpretación y verificación del resultado obtenido, obtención de conclusiones y fabricación el objeto.

3.2. Formulación general del problema

El problema matemático a resolver en procesos de optimización debe contener 3 grupos de elementos:

1. Función objetivo

Define la efectividad del sistema como una función de las variables del problema. En general, se busca minimizar su valor.

2. Restricciones

Las restricciones son limitaciones al problema que disminuyen el abanico de posibles soluciones a un grupo reducido de posibilidades. Las restricciones pueden dividirse en explícitas e implícitas. Las primeras afectan directamente, imponiendo condiciones a una o varias variables, mientras que las segundas afectan a magnitudes calculadas que dependen de las variables. En general, las restricciones explícitas son más sencillas de resolver.

A su vez, las restricciones también pueden dividirse en restricciones de igualdad y de desigualdad. Las de igualdad están relacionadas con leyes que rigen el comportamiento de la estructura, como elementos fijos, leyes de comportamiento del material, etc. Las restricciones de desigualdad están asociadas con limitaciones impuestas, como desplazamientos o tensiones máximas, volumen máximo a ocupar, etc.

3. Variables y parámetros del problema

Las variables son las incógnitas del problema que se deben resolver. Son valores que cambian durante el proceso de diseño. Pueden dividirse en:

- Propiedades de la sección, como el momento de inercia o el área.
- Geometría del elemento estructural: espesor, longitud, altura,...
- Topología del elemento estructural: densidad de material, perímetro total,...

Los parámetros del sistema son valores conocidos que relacionen las variables con la función objetivo y las restricciones. Permanecen inalterables durante todo el proceso.

De forma general, el problema trata de:

- Minimizar $f(x)$
- Sujeto a $g_j(x) \leq 0$
 $h_k(x) = 0$
- Siendo $x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max}$

Donde:

$f(x)$:	función objetivo
x :	vector con las variables de diseño
x_i	cada uno de los elementos del vector de variables
x_i^{min}, x_i^{max}	límites de diseño de los elementos
$g_j(x)$	restricciones de desigualdad
$h_k(x)$	restricciones de igualdad

3.3. Problema elástico por el método de los elementos finitos

El método de elementos finitos consiste en discretizar un dominio (Ω) en diferentes subdominios (elementos finitos) interconectados por medio de nodos, como se muestra en la Figura 3. La solución del elemento finito es conocida y se obtiene aplicando la función objetivo a cada uno de los 4 nodos que lo rodean, y de esta forma el problema de ecuaciones diferenciales se reduce a la simultánea resolución de todos los elementos finitos.

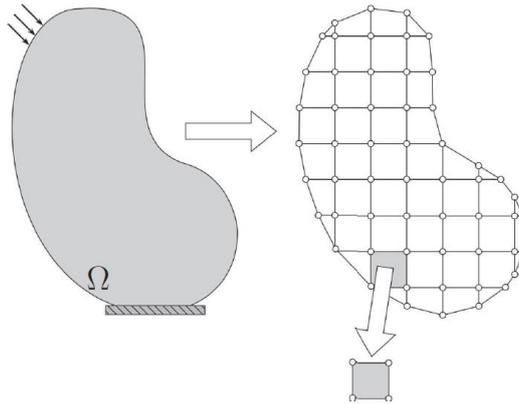


Figura 3: Discretización en elementos finitos

En la optimización topológica, la función objetivo más común es la maximización de la rigidez, lo que equivale a la minimización de la flexibilidad, imponiendo como condición la cantidad máxima de volumen a utilizar.

En el caso de optimización topológica ante cargas térmicas, la función objetivo es la optimización de la conducción de calor, minimizando la energía térmica, con la misma condición de restricción de volumen.

Las magnitudes conocidas, mostradas en la Figura 4, son las cargas aplicadas, ciertas condiciones de contorno como soportes o apoyos, la cantidad final de volumen a utilizar y alguna condición extra como regiones vacías donde no debe haber material, o por el contrario regiones donde la densidad de material debe ser máxima.

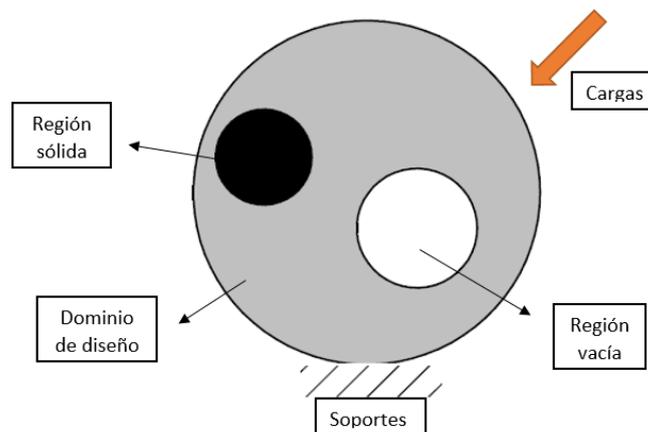


Figura 4: Magnitudes conocidas del problema

El problema trata de identificar qué puntos (elementos finitos) del dominio estarán formados por material y cuáles estarán vacíos. La variable que entra en juego en este punto es la densidad de cada elemento finito. Se otorgará un valor de densidad entre 0 y 1 a cada punto, significando 0 que el punto está vacío y 1 que la densidad de material es máxima.

El problema elástico a resolver viene dado por la fórmula¹:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

Donde \mathbf{t} es el vector de temperaturas nodales, \mathbf{f} el vector de carga térmica aplicada y \mathbf{K} es la matriz de conductividad térmica global.

3.4. Energía térmica

La función objetivo con la que se trabajará es la energía térmica c , también llamada energía calorífica, que está definida como la parte de la energía interna de un cuerpo en equilibrio, que es proporcional a su temperatura absoluta y se manifiesta en forma de calor. Esta energía se produce por los movimientos de los átomos que componen un material, ya sean traslaciones en líquidos y gases, o vibraciones en los cuerpos sólidos. Es decir, la energía térmica está causada por la energía cinética de los átomos que forman un cuerpo. Esta energía aumenta o disminuye en proporción a la temperatura por transferencias de energía, normalmente de calor, por medio de tres procesos: conducción, convección y radiación. La energía térmica será expresada como:

$$c = \mathbf{t}^T \cdot \mathbf{f} = \mathbf{t}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} \quad (3.2)$$

Para la solución del problema de óptima conductividad se requiere minimizar la energía térmica total de todo el dominio para las condiciones de carga establecidas.

3.5. Método de las densidades y método SIMP

El método de las densidades es un modelo que simula una microestructura y viene dado por:

$$\mathbf{k}_e(x_i) = x_i \cdot \mathbf{k}_e \quad (3.3)$$

Donde la matriz de conductividad térmica de un elemento resulta modificada multiplicándola por la densidad del elemento x_i . El valor x_i denominado pseudo-densidad de cada elemento finito en que se divide el dominio, puede oscilar entre 0 y 1, significando ausencia y presencia de material respectivamente. La matriz de conductividad térmica \mathbf{k}_e será la misma para todos los elementos, ya que el dominio se divide en elementos del mismo tamaño.

Aunque teóricamente la densidad podría llegar a ser 0, en la práctica se introduce un valor de densidad mínimo $x_{min} = 0.001$, prácticamente nulo, pero que evita que haya problemas con el funcionamiento del código de Matlab debido a indeterminaciones por la introducción de ceros en la matriz de conductividad.

¹ Los caracteres en negrita indican que se trata de un vector o una matriz

Otro inconveniente del método de densidades es la aparición de valores de densidades en torno a 0.5, que no se acerca ni a presencia ni a ausencia de material, apareciendo zonas “grises” en el diseño final. Esto hace que la interpretación de los resultados sea complicada. Para solucionar esto se desarrolló el método SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), que introduce un factor de penalidad p . En este método las densidades se elevan al factor de penalidad, normalmente de valor 3, haciendo que los valores de densidad intermedios se acerquen a los valores extremos 0 y 1. De esta forma desaparecerían las zonas “grises”, quedando mejor definidas las partes blancas (huecos) y negras (material).

3.6. Definición del problema

El problema de optimización topológica abordado en este trabajo consiste en obtener la distribución de material que consiga una conductividad de calor óptima ante unas cargas térmicas preestablecidas. Se partirá de un dominio inicial de forma rectangular. Los parámetros del sistema serán un conjunto de elementos que servirán para la evacuación del calor, la zona en la que será aplicada la carga térmica y las zonas del dominio no optimizables, donde el material debe ser conservado o eliminado desde el principio. El problema queda definido según la estructura vista en la sección 3.2 de la siguiente manera:

Se busca minimizar la energía térmica $c(x)$, siendo

$$c(x) = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \sum_{e=1}^N (x_e)^p \mathbf{t}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{t}_e \quad (3.4)$$

sujeto a

$$\frac{V(x)}{V_0} = f \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{0} < \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}$$

Donde \mathbf{T} es el vector global de temperaturas, \mathbf{F} el vector global de carga aplicada, \mathbf{K} la matriz global de conductividad térmica, \mathbf{t}_e y \mathbf{k}_e son los vectores de temperaturas nodales y matrices de conductividad de cada elemento respectivamente. El vector de temperaturas nodales de cada elemento viene definido por la temperatura de cada uno de los 4 nodos que le rodean. \mathbf{x} es una matriz que contiene la densidad de cada elemento, de valor entre 0 y 1, \mathbf{x}_{min} contiene la densidad mínima $x_i = 0.001$ en todos sus elementos para evitar las singularidades. N es el número de elementos en que se divide el dominio $(nelx * nely)^2$, p es el factor de penalidad, $V(x)$ es el volumen de material ocupado en cada momento, V_0 es el volumen total del dominio, resultante de adjudicar densidad 1 a todos los elementos, y f es la restricción de volumen impuesta en el problema.

² Las palabras con este formato de letra indican que se trata del nombre de variables en el programa Matlab

La solución obtenida se puede representar mediante un sistema de píxeles en blanco y negro que indican la ausencia o presencia de material, respectivamente. El algoritmo de optimización topológica funciona añadiendo material en los puntos en los que la energía térmica es alta y eliminándolo donde es menor.

Existen diversos procesos para abordar el problema de optimización, como el criterio de optimalidad (OC), el método de la asíntota móvil (MMA) o el método de programación lineal secuencial (PLS). Estos dos últimos procesos son buenos porque presentan buena convergencia, pero en este caso se utilizará un método OC.

4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En este trabajo se va a resolver un problema de optimización topológica en un dominio bidimensional, donde se considera que la dimensión z es pequeña respecto a las dimensiones x e y , obteniéndose un caso de tensión plana. El dominio inicial se va a dividir, en sus dimensiones x e y , en cuadrados de lado unitario ($a = b = 1$). Asumiendo esto, y que la estructura estará sometida a cargas térmicas uniformes, la matriz de conductividad térmica de un elemento simétrica y lista para implementar en Matlab sería la siguiente.

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 & -1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/6 & 2/3 & -1/6 \\ -1/6 & -1/3 & -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La matriz de conductividad térmica de un elemento se calcula una sola vez, al principio de la ejecución del programa, y la matriz global de conductividad se calcula en cada iteración a partir de las matrices de conductividad y de densidad de cada elemento.

En la resolución del problema se va a considerar que las cargas térmicas son uniformes en todo el dominio y que no existen restricciones en la deformación, por lo que no se generarán tensiones de origen térmico. El valor de la carga, es decir, la variación de temperatura ΔT , es el mismo para todos los elementos. Por tanto, es una variable que no es necesario introducirla en la resolución. Es evidente que una mayor carga térmica producirá una mayor energía térmica, pero ésta será proporcional a la variación de temperatura. La topología óptima es en este caso independiente de la variación de temperatura aplicada.

Al ser la topología óptima independiente de la temperatura de la carga aplicada, en todo el proceso se trabajará con temperaturas relativas. Al vector de fuerza aplicada \mathbf{f} , se le asignará un valor de temperatura $t = 1$. A los nodos por donde se produce la evacuación de calor (restricciones) se le asigna un valor de temperatura $t = 0$, y los demás nodos tendrán un valor de temperatura relativa intermedio de $0 \leq t \leq 1$.

El coeficiente de dilatación térmica α tampoco es necesario introducirlo en el programa, puesto que afecta a todos los elementos del dominio por igual.

Que el coeficiente de dilatación térmica α , que es una propiedad de cada material, no afecte a la solución significa que se ofrece una solución universal aplicable a cualquier tipo de material.

4.1. Criterio de Optimalidad OC (Optimality Criteria)

Siguiendo el desarrollo de Bendsøe (1995) [20] un criterio de optimalidad simple puede ser formulado como sigue:

$$x_e^{nueva} = \begin{cases} \max(x_{min}, x_e - m) & \text{si } x_e B_e^\eta \leq \max(x_{min}, x_e - m) \\ x_e B_e^\eta & \text{si } \max(x_{min}, x_e - m) < x_e B_e^\eta < \min(1, x_e + m) \\ \min(1, x_e + m) & \text{si } \min(1, x_e + m) \leq x_e B_e^\eta \end{cases}$$

donde m (move) es un límite para el cambio de densidad de un elemento en cada iteración, $\eta=1/2$ es un coeficiente de suavizado, y B_e es un factor que viene de la condición de optimalidad, siendo

$$B_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial x_e}} \quad (4.2)$$

donde λ es un multiplicador Lagrangiano hallado mediante un algoritmo biseccional.

La sensibilidad de la función objetivo viene dada por la derivada de la energía térmica $c(x)$ respecto a la densidad de cada punto x_e , y se expresa de la siguiente forma

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -p(x_e)^{p-1} \mathbf{t}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{t}_e \quad (4.3)$$

4.2. Filtro

La implementación de un filtro es necesario para asegurar la existencia de soluciones y para evitar los problemas llamados de "checkerboard". Estos problemas, también llamados de tablero de ajedrez, surgen cuando al aplicar el algoritmo de optimización aparecen puntos blancos y negros intercalados haciendo que el dominio se parezca a un tablero de ajedrez. Esto dificulta la interpretación de los resultados, y aunque en la teoría sería la solución óptima, en la práctica resulta imposible fabricar piezas con esa topología. Un ejemplo de este problema se puede ver en la Figura 5, que se trata de una viga empotrada sometida a una fuerza puntual en su extremo.

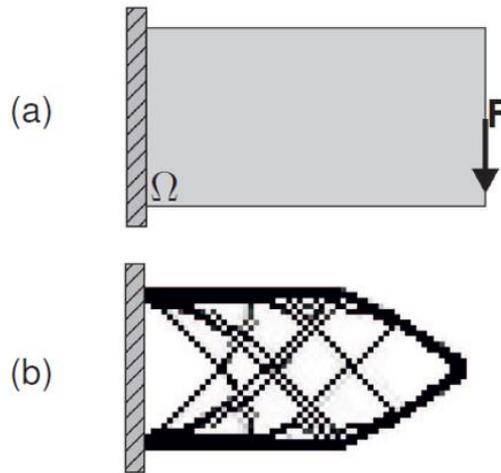


Figura 5: Ejemplo (a) de problema planteado y (b) solución con problema "checkerboard".

El filtro aplicado fue desarrollado por Sigmund (1994) [19]. Actúa operando sobre la derivada de la función objetivo (sensibilidad) realizando un promedio, de forma que el nuevo valor que tomará un punto será un promedio ponderado del valor de un conjunto de puntos circundantes. El número de nodos que entrarán en este promedio dependerá de un valor r_{min} (radio) que es introducido por el usuario en la ejecución del programa. La expresión matemática del filtro es la siguiente:

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial x_e} = \frac{1}{x_e \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f} \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f x_f \frac{\partial c}{\partial x_f} \quad (4.4)$$

donde N es el número de nodos en la malla a analizar y \widehat{H}_f es el operador de convolución (factor de ponderación) definido como:

$$\widehat{H}_f = r_{min} - dist(e, f), \quad \{f \in N \mid dist(e, f) \leq r_{min}\}, \quad e = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

Sólo entrarán en ponderación aquellos elementos cuyo centro se encuentre a una distancia menor que r_{min} del centro del punto en consideración, por lo tanto el operador de convolución vale cero fuera del área de filtro. El operador de convolución es inversamente proporcional a la distancia entre elementos, siendo los puntos adyacentes más importantes a la hora de realizar el promedio ponderado.

Este filtro suavizará la imagen creando acabados más finos. El filtro es aplicado a un círculo de radio r_{min} , medido desde el centro del elemento a analizar. Para que un elemento entre en el área de filtrado, la distancia entre ambos centros debe ser menor o igual al radio r_{min} . Dos ejemplos de este radio se pueden ver en la Figura 6.

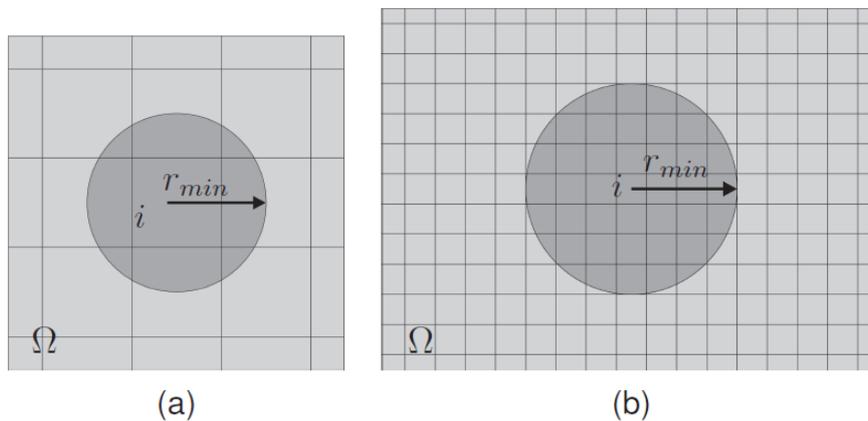


Figura 6: Representación de un radio de filtro r_{min} de (a) 1.0 y (b) 3.5

5. IMPLEMENTACIÓN DEL PROBLEMA EN MATLAB

En el anexo A se muestra el código completo de Matlab como un programa función. La función ha de ser llamada desde la ventana de comandos de Matlab escribiendo la siguiente línea:

```
top(nelx,nely,volfrac,penal,rmin)
```

donde $nelx$ y $nely$ son el número de elementos en que se divide el dominio en los ejes x e y respectivamente, $volfrac$ es la fracción de volumen que debe ser ocupada, $penal$ es el factor de penalidad p y $rmin$ es el radio de filtro.

Las demás variables, como las condiciones de contorno y demás restricciones están introducidas en la propia función y pueden ser editadas si es necesario. Para cada iteración, el programa genera una imagen con la distribución de densidad. La Figura 7 muestra la solución al código dado en el Anexo A cuando desde la ventana de comandos de Matlab se introduce la siguiente entrada:

```
top(40,40,0.4,3.0,1.2)
```

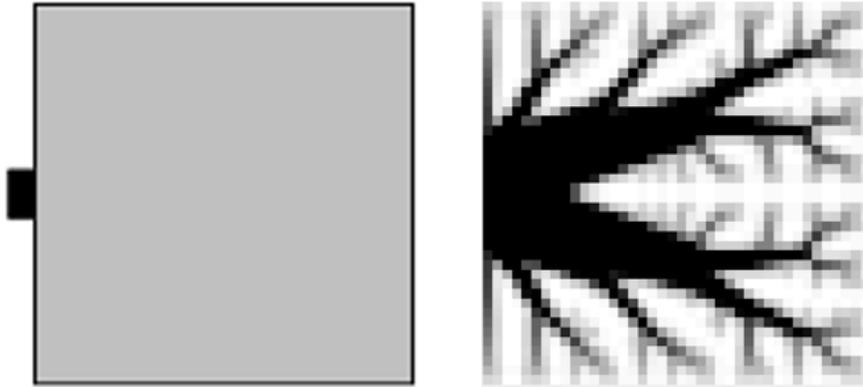


Figura 7: Ejemplo de optimización topológica frente a una carga térmica uniforme.

A la izquierda se muestra el dominio inicial (zona gris) con la zona por donde se evacúa el calor (zona negra). A la derecha se muestra la distribución óptima de material ocupando el 40% del volumen inicial.

El programa cuenta con varios apartados que a continuación serán explicados.

5.1. Programa principal (líneas 1-34)

El programa principal cuenta con diferentes partes:

```
1  %%% MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA PARA ESTRUCTURAS CON CARGAS
1  TÉRMICAS %%%
2  function top(nelx,nely,volfrac,penal,rmin)
3  % INICIALIZAR
4  x(1:nely,1:nelx) = volfrac;
5  loop = 0;
6  change = 1.;
```

Tras inicializar la función, se establece el punto de partida, asignando a todos los elementos una densidad x_e igual a `volfrac`, se inicializa el contador `loop` que contará el número de iteraciones, y se aplica un valor inicial a la variable `change`, que posteriormente será el criterio de parada.

```
7  % COMENZAR PROCESO ITERATIVO
8  while change > 0.01
9      loop = loop + 1;
10     xold = x;
```

Aquí se abre el proceso iterativo, estableciendo como criterio de parada que la variable `change` (cambio) sea menor o igual que 0.01, que significa que el cambio en la nueva distribución de material respecto a la anterior es inapreciable. A partir de aquí todas las acciones se repiten en cada iteración. Se suma una unidad al contador `loop` y se establece como variable `xold` el antiguo valor de la matriz de densidad `x`.

```
11 % ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS
12 [U]=FE(nelx,nely,x,penal);
```

El análisis de elementos finitos genera el nuevo vector de temperaturas `U` mediante la función `FE`, que se analiza más adelante. Este vector representa la temperatura relativa de cada nodo provocado por la carga térmica.

```
13 % FUNCIÓN OBJETIVO Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
14 [KE] = lk;
15 c = 0.;
16 for ely = 1:nely
17     for elx = 1:nelx
18         n1 = (nely+1)*(elx-1)+ely;
19         n2 = (nely+1)* elx +ely;
20         Ue = U([n1;n2;n2+1;n1+1]);
21         c = c + (0.001+0.999*x(ely,elx)^penal)*Ue'*KE*Ue;
22         dc(ely,elx) = -0.999*penal*x(ely,elx)^(penal-1)*Ue'*KE*Ue;
23     end
24 end
```

En este apartado se calcula la función objetivo (energía térmica `c`) como suma de la energía térmica de cada elemento. Con dos ciclos `for` se recorre todo el dominio elemento a elemento, calculando para cada uno de ellos sus dos nodos superiores (`n1` y `n2`), y a partir de ellos los dos inferiores (`n1+1` y `n2+1`). Sacando el vector de temperaturas de cada elemento `Ue`, se calcula la energía térmica `c`. También se calcula la sensibilidad de la función objetivo (`dc`).

```
25 % FILTRO DE SENSIBILIDAD
26 [dc] = check(nelx,nely,rmin,x,dc);
```

Mediante la función `check`, se aplica el filtro de sensibilidad para reducir los problemas de checkerboard vistos anteriormente.

```
27 % ACTUALIZACIÓN DEL DISEÑO POR EL CRITERIO DE OPTIMALIDAD
28 [x] = OC(nelx,nely,x,volfrac,dc);
```

La función OC aplica el criterio de optimalidad a partir del valor de sensibilidad de la función dc hallada anteriormente y calcula la nueva distribución de material x.

```
29 % IMPRIMIR RESULTADOS
30 change = max(max(abs(x-xold)));
31 disp([' It.: ' sprintf('%4i',loop) ' Obj.: ' sprintf('%10.4f',c)
' Vol.: ' sprintf('%6.3f',sum(sum(x))/(nelx*nely)) ' ch.: ' 1
sprintf('%6.3f',change )])
```

Se calcula el valor change como el cambio en el elemento con la máxima variación de densidad tras cada iteración, comparando la nueva matriz x con la anterior xold. En el momento que este cambio valga menos que 0.01, el proceso iterativo parará. Por cada iteración se muestra en pantalla el número de iteración (loop), el valor de la función objetivo (c), la fracción de volumen ocupada en ese momento (Vol) y el valor de la variable change.

```
32 % FIGURA DE DENSIDADES
33 colormap(gray); imagesc(-x); axis equal; axis tight;axis
off;pause(1e-6);
34 end
```

Se genera una figura en escala de grises como la mostrada en la Figura 7 indicando la densidad en cada punto, que es una representación gráfica de la topología que tendría la figura final optimizada. En este punto se cierra el ciclo while y el programa principal llega a su fin.

5.2. Criterio de optimalidad (líneas 35-46)

```
35 %%%%%%%%%% SUBFUNCIÓN - CRITERIO DE OPTIMALIDAD %%%%%%%%%%
36 function [xnew]=OC(nelx,nely,x,volfrac,dc)
37 l1 = 0; l2 = 100000; move = 0.2;
38 while (l2-l1 > 1e-4)
39     lmid = 0.5*(l2+l1);
40     xnew = max(0.001,max(x-
        move,min(1.,min(x+move,x.*sqrt(dc./lmid)))));
41     if sum(sum(xnew)) - volfrac*nelx*nely > 0;
42         l1 = lmid;
43     else
44         l2 = lmid;
45     end
46 end
```

En estas líneas se aplica el criterio de optimalidad visto en la sección 4.1. El valor $\eta = 1/2$ se introduce como una raíz cuadrada `sqrt`. Mediante un ciclo `while` se entra en el algoritmo biseccional para encontrar el multiplicador lagrangiano λ (`lmid`) con una precisión de 10^{-4} . La función calcula la nueva distribución de material `xnew` dándole a cada elemento el valor de su densidad comprendido entre 0 y 1.

5.3. Filtro de Sensibilidad (líneas 47-60)

```

47 %%%%%%%%%% SUBFUNCIÓN - FILTRO DE SENSIBILIDAD %%%%%%%%%%
48 function [dcn]=check(nelx,nely,rmin,x,dc)
49     dcn=zeros(nely,nelx);
50     for i = 1:nelx
51         for j = 1:nely
52             sum=0.0;
53             for k = max(i-round(rmin),1):min(i+round(rmin),nelx)
54                 for l = max(j-round(rmin),1):min(j+round(rmin),nely)
55                     fac = rmin-sqrt((i-k)^2+(j-l)^2);
56                     sum = sum+max(0,fac);
57                     dcn(j,i) = dcn(j,i) + max(0,fac)*x(l,k)*dc(l,k);
58                 end
59             end
60         end

```

Mediante la función `check` se aplica el filtro de sensibilidad visto en la sección 4.2. La variable `fac` es el factor de ponderado \hat{H}_f . La variable `sum` es el sumatorio de los factores de ponderado. Véase que solo se acumula el valor del factor de ponderado si éste es mayor que cero, es decir, si el elemento está en el área de influencia. El radio de influencia `rmin` se redondea a un número entero para mayor facilidad operacional.

Con todo esto se calcula la nueva sensibilidad que evitará los problemas de *checkerboard*.

Si se elige un valor de `rmin` menor que la unidad, ninguno de los elementos adyacentes entrarán en el filtro y las sensibilidades serían igual a las originales antes de aplicar el filtro.

5.4. Análisis de Elementos Finitos (líneas 61-81)

```

61 %%%%%%%%%% SUBFUNCIÓN - ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS %%%%%%%%%%
62 function [U]=FE(nelx,nely,x,penal)
63     [KE] = lk;
64     K = sparse((nelx+1)*(nely+1), (nelx+1)*(nely+1));
65     F = sparse((nely+1)*(nelx+1),1); U =sparse((nely+1)*(nelx+1),1);
66     for ely = 1:nely
67         for elx = 1:nelx
68             n1 = (nely+1)*(elx-1)+ely;
69             n2 = (nely+1)* elx +ely;
70             edof = [n1; n2; n2+1; n1+1];

```

```

71         K(edof,edof) = K(edof,edof) + (0.001 +
           0.999*x(ely,elx)^penal)*KE;
72     end
73 end

74 % DEFINICIÓN DE CARGAS Y RESTRICCIONES

75 F(:,1) = 1;
76 fixeddofs = [nely/2 - 1:1:nely/2+3];
77 alldofs = [1:(nely+1)*(nelx+1)];
78 freedofs = setdiff(alldofs,fixeddofs);

79 % RESOLUCIÓN

80 U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \F(freedofs,:);
81 U(fixeddofs,:)= 0;

```

En esta subfunción se hace el análisis por elementos finitos del sistema. Primero se crea la matriz global de conductividad térmica K y los vectores globales de fuerza y temperaturas F y U respectivamente, que al principio están formados por elementos nulos (de valor cero). Posteriormente se recorre todo el dominio, hallando los 4 nodos que rodean a cada elemento ($n1$ y $n2$ son los nodos superiores). A partir de estos nodos se calcula la matriz de conductividad global del sistema

Las cargas y restricciones se modifican manualmente. En el vector F se asigna valor 1 a los nodos que estarán sometidos a la carga térmica (en este caso todos). En la variable `fixeddofs` se introducen los nodos por los que se supondrá que el calor será evacuado del dominio. Finalmente, con todos estos datos, se calcula el vector de temperaturas U .

Para realizar el análisis de elementos finitos el dominio inicial se discretiza en un solo vector. A cada nodo se le asigna un número, siendo el número 1 el nodo superior izquierdo, el número $(nelx+1)*(nely+1)$ el inferior derecho, y recorriendo el dominio de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Un ejemplo de esta numeración se muestra en la Figura 8, en un dominio de 4×4 elementos, que tiene un total de $(4+1) * (4+1) = 25$ nodos.

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	25

Figura 8: Ejemplo de numeración de nodos en un dominio de 4×4 elementos

5.5. Matriz de conductividad térmica de un elemento (líneas 83-87)

```
83 function [KE]=lk
84 KE = [ 2/3 -1/6 -1/3 -1/6
85        -1/6 2/3 -1/6 -1/3
86        -1/3 -1/6 2/3 -1/6
87        -1/6 -1/3 -1/6 2/3 ];
```

Se introduce la matriz de conductividad de un elemento dada en la sección 4.

6. RESULTADOS OBTENIDOS

Haciendo pequeñas variaciones en el código de Matlab o en los parámetros de diseño introducidos, se pueden obtener numerosos ejemplos y obtener conclusiones sobre cuál es la solución más apropiada para el problema de optimización topológica.

Para el ejemplo dado anteriormente en la sección 5, un cuadrado sometido a una carga térmica uniforme en todo su dominio con una zona de evacuación de calor en uno de sus lados, la literatura (Bendsøe - Sigmund, Springer (2004)) [14] da una solución al problema de optimización topológica. Una comparación entre la solución dada y la solución obtenida se puede ver en la Figura 9.

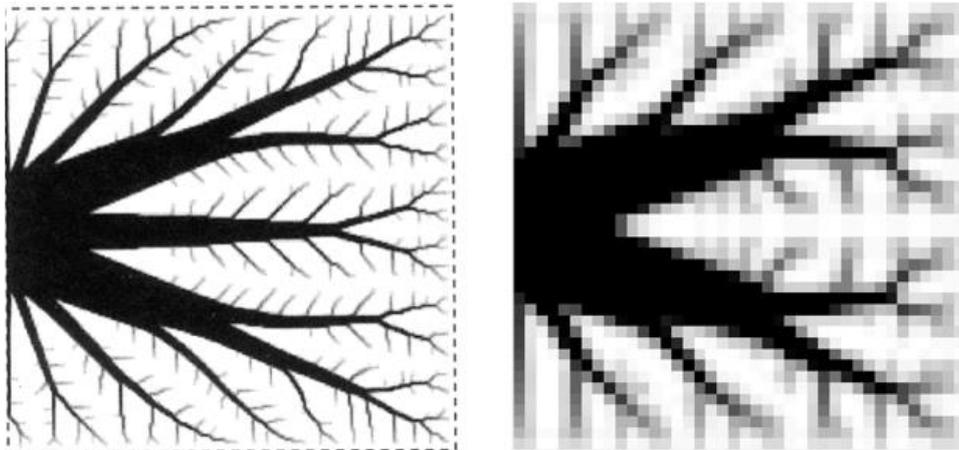


Figura 9: Comparación entre la solución dada por Bendsøe y Sigmund (izquierda) y la solución obtenida (derecha)

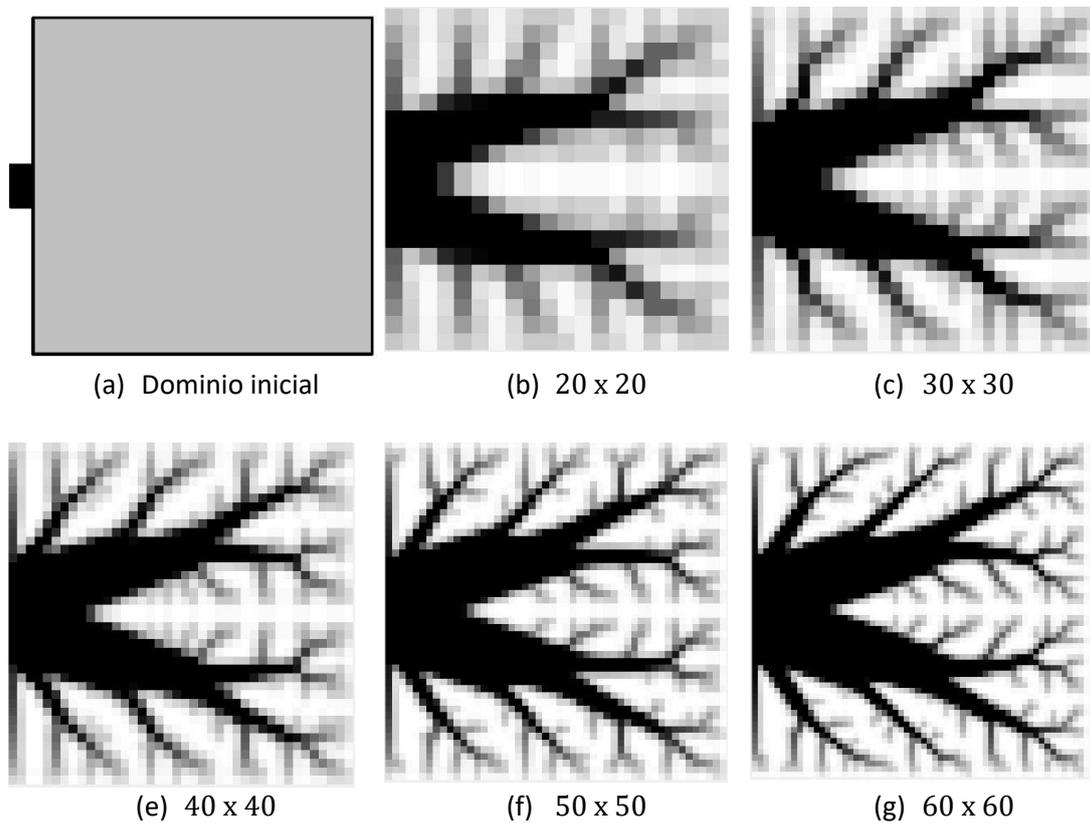
Se puede comprobar como en la solución dada por Bendsøe y Sigmund (izquierda) el dominio se compone de un gran número de ramificaciones que hacen que la transferencia de calor hacia el punto de evacuación (a la izquierda del dominio) sea óptima. En la solución obtenida (derecha) en Matlab, se observa cómo las ramificaciones creadas siguen un patrón similar, aunque la discretización en un número de elementos relativamente pequeño hace que se aprecien varias diferencias a simple vista, como la ausencia de la ramificación central. Sin embargo, se puede concluir que el programa ofrece una solución válida para el problema de optimización topológica.

Como se verá en la siguiente sección, aumentando el número de elementos en que se divide el dominio la solución se aproxima más a la dada por la literatura.

En los posteriores apartados se analizará el problema de optimización topológica inicial pero introduciendo variaciones en sus parámetros. Se estudiará primero una división en distinto número de elementos, diferentes restricciones de volumen de material y distintos valores del radio de influencia del filtro r_{min} y del factor de penalidad p_{enal} . Finalmente se propondrán otros ejemplos variando otros parámetros del problema.

6.1. Variación en el número de elementos

En este apartado se estudiará el problema de un cuadrado sometido a una carga térmica uniforme, dividiendo el dominio inicial en un número de elementos desde 20×20 hasta 100×100 elementos. La solución para las distintas divisiones se puede ver en la Figura 10.



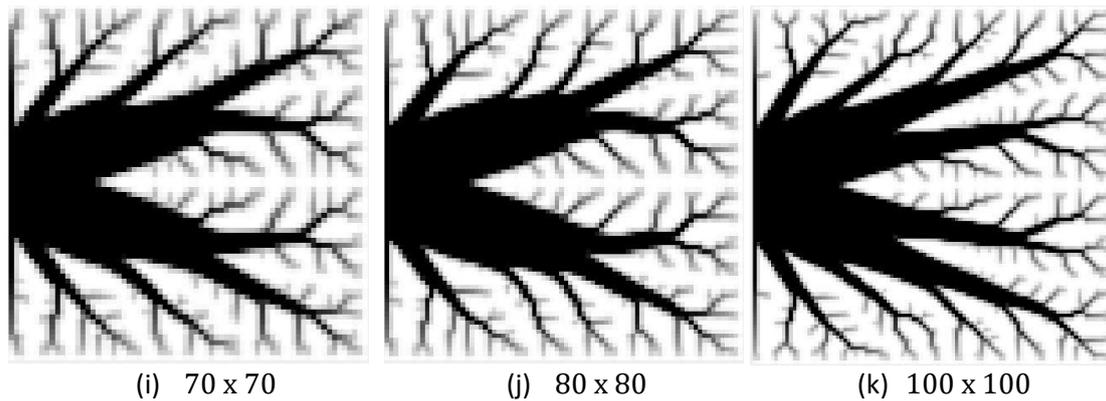


Figura 10: Solución con distinto número de elementos

Se puede observar que a medida que aumenta el número de elementos, la solución final tiene una mayor nitidez, aunque desde una división básica de 20 x 20 elementos (fig. 10b) ya se puede ver de manera aproximada la forma que van a tener las ramificaciones., aunque están muy poco definidas.

A medida que aumenta el número de elementos la solución se asemeja más a la dada en la literatura. La precisión de la solución aumenta proporcionalmente al número de nodos, hasta el punto de que en un dominio de 100 x 100 elementos (fig. 10k) se cuenta con unos bordes muy definidos, sin apenas zonas grises. Al ser los elementos de menor tamaño, aumenta el número de pequeñas ramificaciones, ya que son más estrechas, aumentando así la velocidad de evacuación de calor.

El inconveniente de aumentar el número de nodos es que también aumenta el coste computacional, al ser mucho mayor el número de operaciones a realizar en cada iteración. Esto implica que se necesitan ordenadores con más potencia para resolver el problema y que se tarda mucho más tiempo en obtener la solución.

6.2. Variación del factor de penalidad p

El factor de penalidad p es un parámetro que se utiliza para evitar la aparición de zonas “grises” que complican la interpretación de los resultados, al haber trozos que no tienen ni presencia ni ausencia completa de material. Se va a estudiar qué sucede al introducir distintos factores de penalidad en el programa (Figura 11).

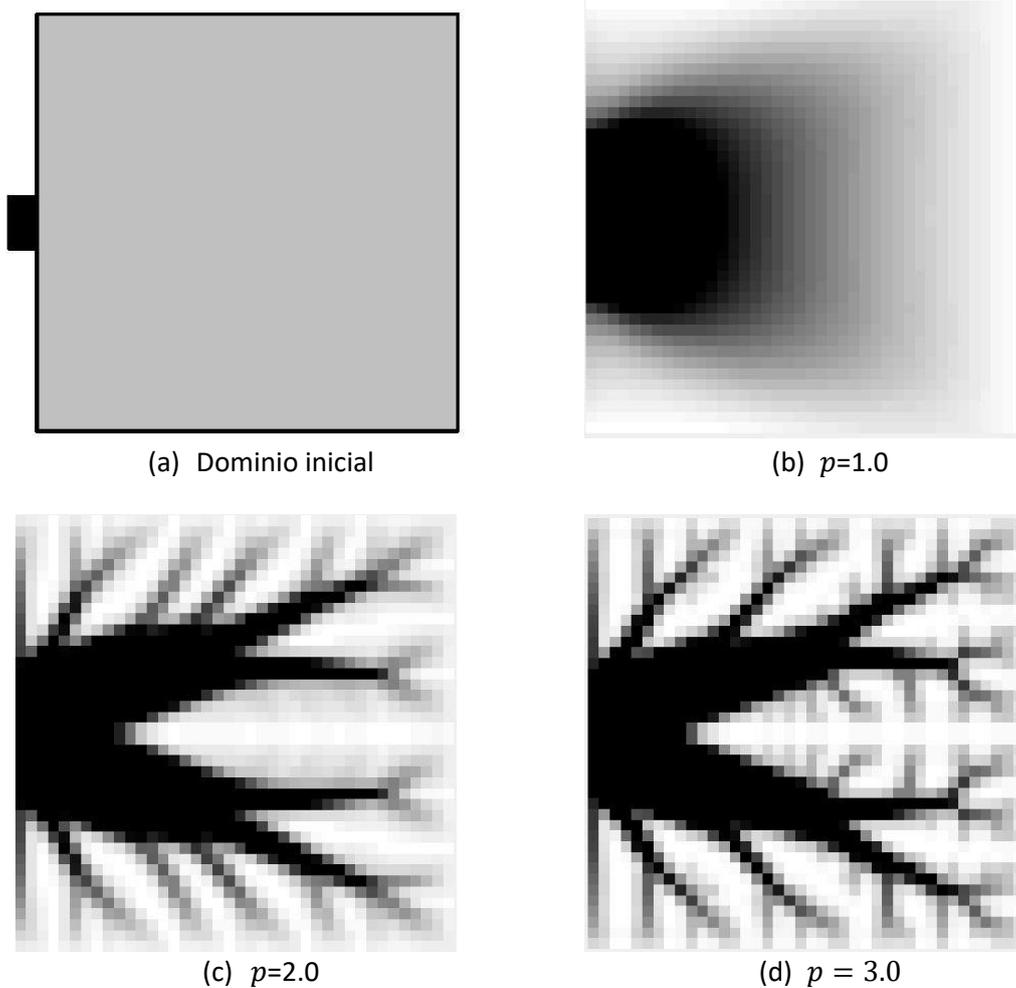


Figura 11: Solución con distinto factor de penalidad

En la figura se observan 3 casos. En el primero (fig. 11b), un factor $p = 1.0$ significa que el resultado no sufrirá ninguna modificación. Se observa como la densidad va disminuyendo progresivamente, desde la parte negra cerca de la zona de evacuación de calor, hasta la parte blanca en el extremo contrario. Esto no aporta nada a la solución del problema de optimización topológica.

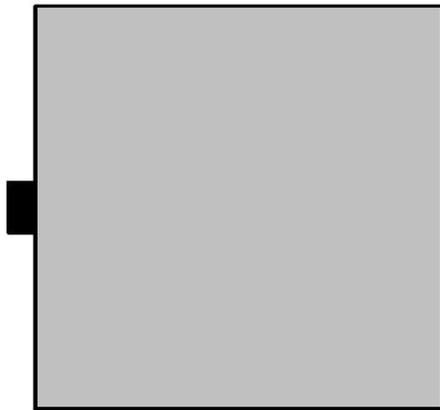
En el segundo caso (fig. 11c), con un factor $p = 2.0$ ya se pueden distinguir algunas ramificaciones, aunque todavía no tienen suficiente precisión como para considerarlo una buena solución, ya que todavía hay muchas zonas “grises” que dificultan la interpretación.

En la última imagen (fig. 11d), con un factor $p = 3.0$ se diferencian más claramente las zonas blancas y negras, habiendo suficientes ramificaciones.

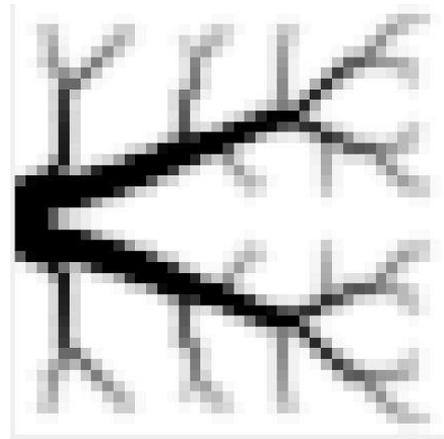
Si se introduce un factor de penalidad superior ($p > 3.0$), sin modificar ningún otro dato, el programa entra en un bucle infinito que no converge hacia una solución concreta. Por tanto, se puede concluir que para este programa el factor más apropiado es un factor de penalidad $p = 3.0$.

6.3. Variación de la restricción de volumen

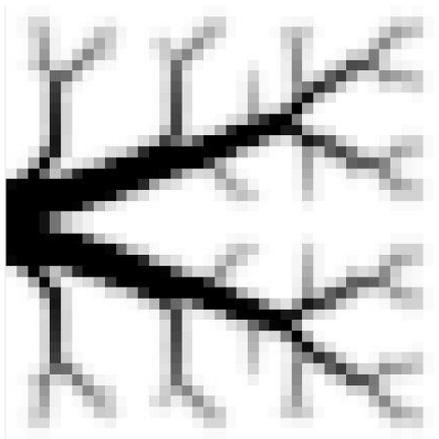
En esta sección se va a modificar el porcentaje del dominio inicial que será ocupado por material sólido. La solución para diferentes porcentajes se puede ver en la Figura 12.



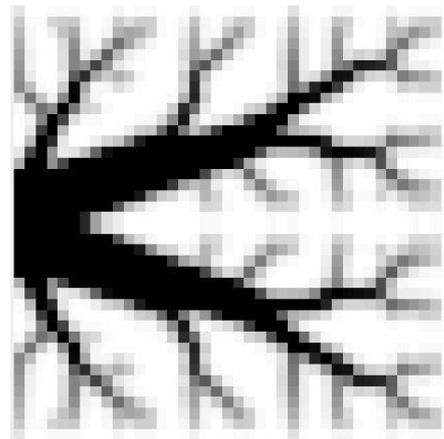
(a) Dominio inicial



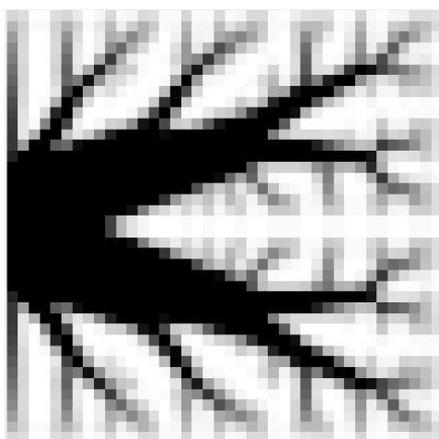
(b) $V = 10\%$



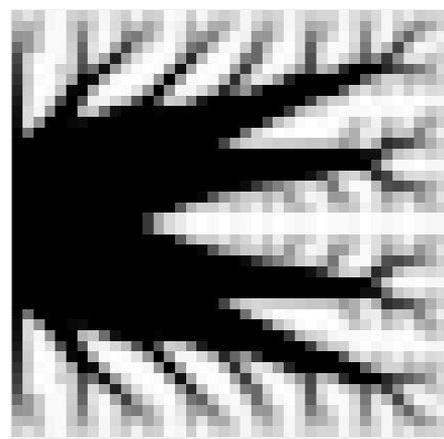
(c) $V = 20\%$



(d) $V = 30\%$



(e) $V = 40\%$



(f) $V = 50\%$

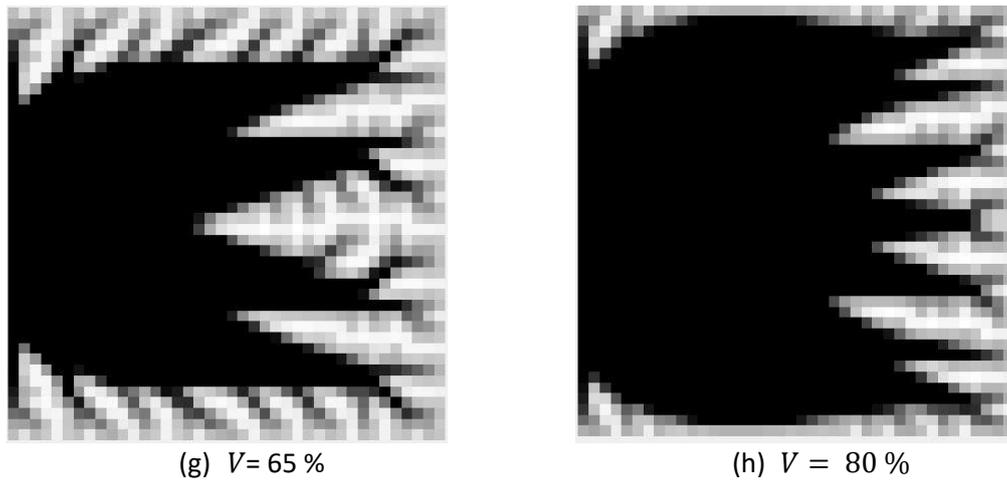


Figura 12: Solución para distinto porcentaje de volumen sólido

Se puede ver como a mayor volumen va creciendo la parte central que está compuesta por material sólido. La forma que tienen las ramificaciones es similar para todos los casos, y a medida que el volumen ocupado es mayor, las ramificaciones son más pequeñas y los huecos existentes entre ellas se van rellendo de material.

En este caso interesa encontrar un equilibrio entre el coste que supone utilizar más material para la fabricación de la pieza y la eficacia conseguida en la evacuación del calor. Una pieza con un 10 % de volumen (fig. 12b) puede tener un coste de fabricación bajo, pero también acumulará más tensiones puesto que el poco material existente absorberá todo el calor, y por tanto la pieza fallará antes. En cambio, la pieza con un 80 % de material (fig. 12h), es prácticamente sólida. El calor se repartirá mejor y el material estará sometido a menos tensiones, pero a cambio el coste de fabricación será mucho mayor.

El porcentaje de volumen es un importante parámetro de diseño. Para elegir el volumen más adecuado habrá que tener en cuenta los conceptos de optimización y eficiencia vistos en la sección 1.1.

6.4. Variación del radio de filtro r_{min}

El radio de filtro es un parámetro utilizado para que no haya diferencias grandes de densidad entre nodos adyacentes. Actúa sobre la sensibilidad de la función, otorgando a cada punto un valor medio de la sensibilidad de nodos cercanos. En esta sección se analiza la influencia del radio del filtro en la solución final, que se puede ver en la Figura 13.

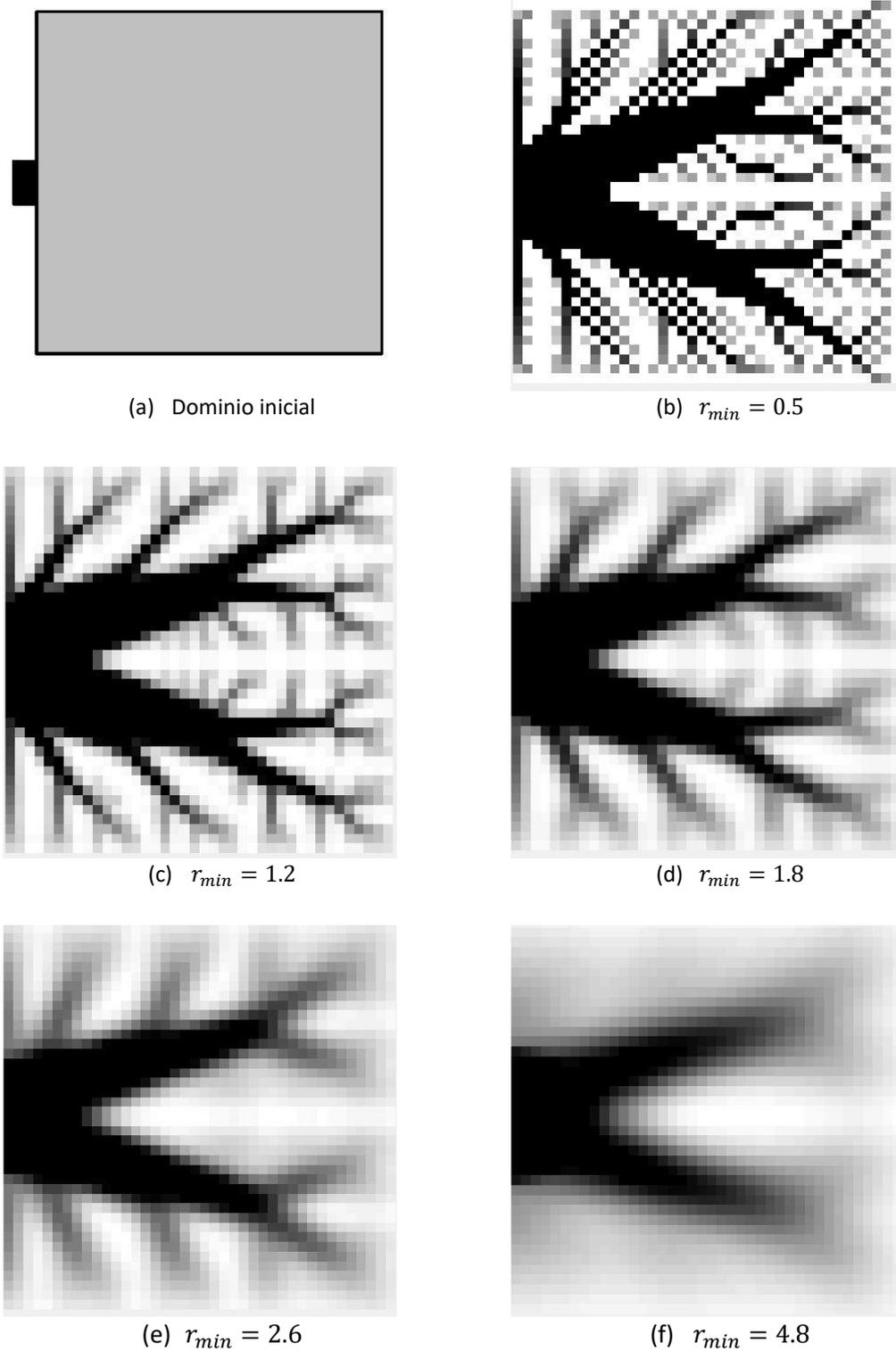


Figura 13: Influencia del radio de filtro en la solución

En el primer caso (fig. 13b) se observa el problema de “checkerboard” visto en la sección 4.2, que es la razón por la que se implementa este filtro. Con un valor del radio $r_{min} = 0.5$, el elemento no llega a interactuar con ninguno de los elementos que le rodean, por lo que el filtro no actúa. Se puede observar como aparecen elementos blancos y negros intercalados, formando una especie de tablero de ajedrez. Aunque la forma de las ramificaciones también es

similar al resto de casos, la construcción de este tipo de piezas resulta imposible, además de que serían frágiles porque los elementos estarían unidos por sus esquinas, con un espesor muy pequeño que se rompería ante un mínimo esfuerzo.

Al aumentar el radio de filtro, cada vez son más los elementos que se tienen en cuenta para el análisis de sensibilidad. Al ser este valor una media ponderada de los elementos que entran en el área de filtro, los elementos separados por una distancia menor al radio de filtro no podrán tener densidades muy diferentes, al estar influenciados recíprocamente. Esto hace que los cambios entre las zonas de material estén cada vez más difuminados, volviendo al problema de la aparición de zonas grises. Se puede observar que con un radio de filtro $r_{min} = 4.8$ (fig. 13f) las ramificaciones prácticamente han desaparecido. Aunque se pueden intuir las dos ramificaciones centrales más gruesas, todas las ramificaciones laterales se han convertido en zonas grises que no aportan una solución útil, perdiendo el efecto conseguido con el factor de penalidad p .

Se puede concluir que el radio de filtro $r_{min} = 1.2$ (fig. 13c) utilizado en el ejemplo inicial es el más apropiado, ya que es suficientemente grande como para evitar el problema de "checkerboard", y suficientemente pequeño como para que no aparezcan zonas grises y las ramificaciones estén bien definidas.

6.5. Ejemplos con diferentes formas y restricciones

En esta sección se van a analizar ejemplos cambiando algunas condiciones como las zonas de evacuación del calor, la existencia de zonas no optimizables, cambios en la forma inicial del dominio y distintas zonas de aplicación de la carga térmica.

Para resolver estos ejemplos, se utilizarán los parámetros que se ha concluido que son los más apropiados en secciones anteriores. Esto es, se utilizará un factor de penalidad $p = 3.0$, un dominio de 40×40 elementos (excepto en un ejemplo en que el dominio tendrá forma rectangular), y un radio de filtro $r_{min} = 1.2$. La restricción de volumen utilizada será del 40%.

El programa, por tanto, será llamado con la siguiente expresión:

```
top(40, 40, 0.4, 3.0, 1.2)
```

Esta expresión es la misma que para el primer ejemplo. Lo que ha cambiado en estos casos son algunos de los parámetros introducidos en el propio programa, por lo que hay que hacer algunas modificaciones en el código de Matlab.

6.5.1. Dominio inicial rectangular

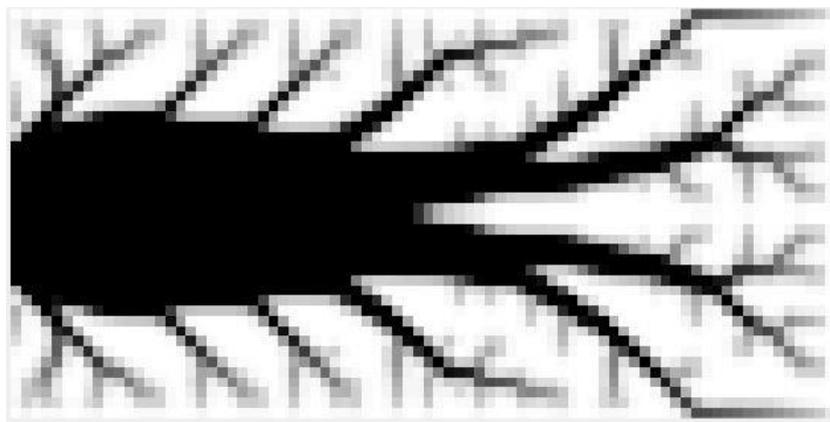
Este es el único caso en el que la llamada al programa es diferente, sin realizar ninguna otra modificación en el código. Se va a analizar un dominio rectangular con una anchura (elementos en el eje horizontal nel_x) igual al doble de su altura (nel_y). La llamada al programa será:

```
top(80, 40, 0.4, 3.0, 1.2)
```

La solución a este problema se muestra en la Figura 14.



(a) Dominio inicial



(b) Solución obtenida

Figura 14: Optimización topológica de un dominio inicial rectangular

Se puede ver cómo la morfología básica es la misma que en un cuadrado. El dominio consta de una parte central sólida de la que salen dos ramificaciones gruesas que se extienden hasta la parte derecha del dominio. Por las partes superior e inferior salen ramificaciones más estrechas, como en el caso de un dominio cuadrangular.

6.5.2. Doble zona de evacuación de calor

En este apartado se va a analizar un cuadrado dividido en 40×40 elementos, pero con dos zonas de evacuación de calor. En un primer caso se va a establecer como zonas de evacuación la parte izquierda y la superior del dominio, y en un segundo caso la parte izquierda y la derecha, aprovechando la simetría que aparece en este caso.

Para establecer distintas zonas de evacuación de calor, hay que modificar la línea 76 en el código de Matlab para añadir los nuevos elementos de salida a la variable `fixeddoffs`.

a. Evacuación en las partes izquierda y superior

Se establecen como zonas de evacuación cinco elementos tanto en la parte izquierda como en la superior. La solución a este problema se muestra en la Figura 15.

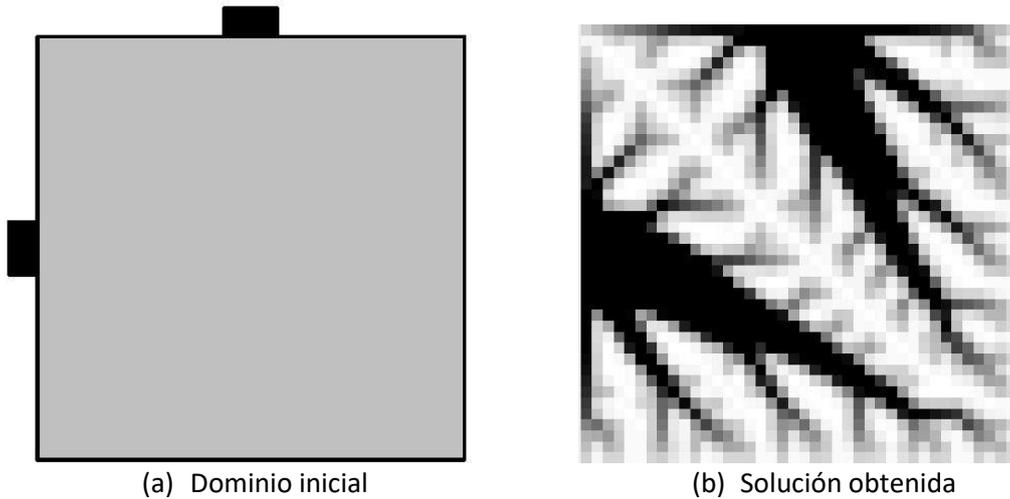


Figura 15. Evacuación por las partes izquierda y superior

En comparación con el caso inicial, se siguen diferenciando dos ramificaciones centrales más gruesas, pero en este caso cada una de cada una de las zonas de evacuación, con pequeñas ramificaciones saliendo de ellas.

La simetría existente en el dominio inicial al trazar un eje diagonal, desde la esquina superior izquierda hacia la inferior derecha, se traslada a la solución, donde se pueden diferenciar dos triángulos simétricos respecto al mismo eje.

b. Evacuación en las partes izquierda y derecha

También se establecen cinco elementos de evacuación de calor, situados en los extremos laterales del dominio. La solución se da en la Figura 16.

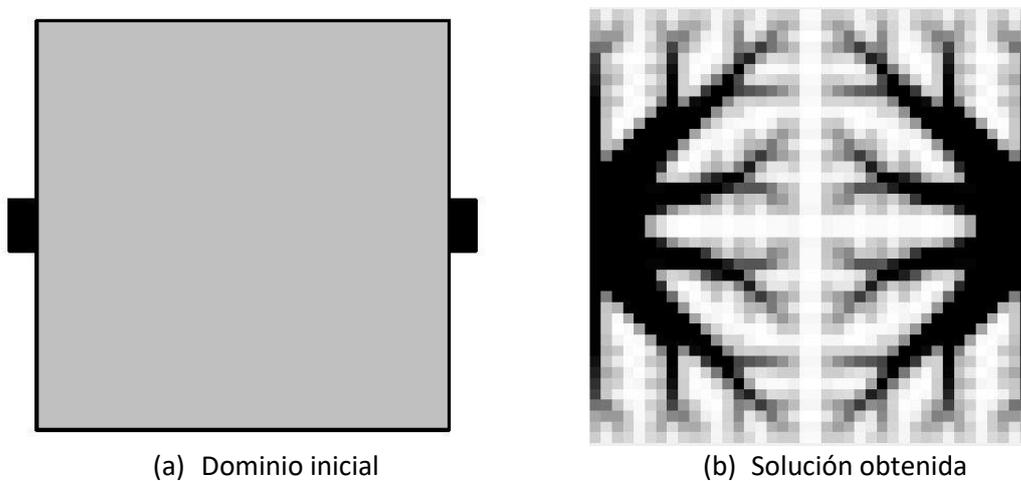


Figura 16: Evacuación por las partes izquierda y derecha

Se observa una clara simetría en las partes izquierda y derecha, respecto a un eje que divide el dominio por su parte central. Aprovechando esta simetría, el problema podría haber sido llamado con la siguiente línea:

```
top(20,40,0.4,3.0,1.2)
```

En este caso se utilizaría el código inicial, con evacuación de calor por la parte izquierda, y dividiendo el dominio en 20 elementos horizontales (la mitad) y 40 verticales. De esta forma se ahorra coste operacional, y la solución obtenida es exactamente la misma (Figura 17).

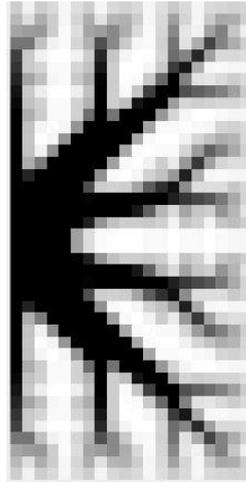


Figura 17: Solución obtenida aprovechando la simetría del dominio inicial

La solución en este caso es idéntica a la parte izquierda de la Figura 16b. Por tanto siempre que sea posible se recomienda aprovechar posibles simetrías en el dominio inicial y las restricciones para reducir el coste operacional. La solución al dominio completo se puede obtener creando una imagen espejo que complete la mitad derecha del dominio.

6.5.3. Carga térmica en la mitad del dominio

En este caso se va a estudiar el mismo dominio con forma de cuadrado del ejemplo inicial, pero la carga térmica se aplica solamente en la mitad derecha del dominio. Para obtener este estado de carga hay que modificar la línea 75 del código, y sustituirla por la siguiente:

```
F((nelx+1)*nely/2+1:1:(nelx+1)*(nely+1),1) = 1;
```

La solución se muestra en la Figura 18.

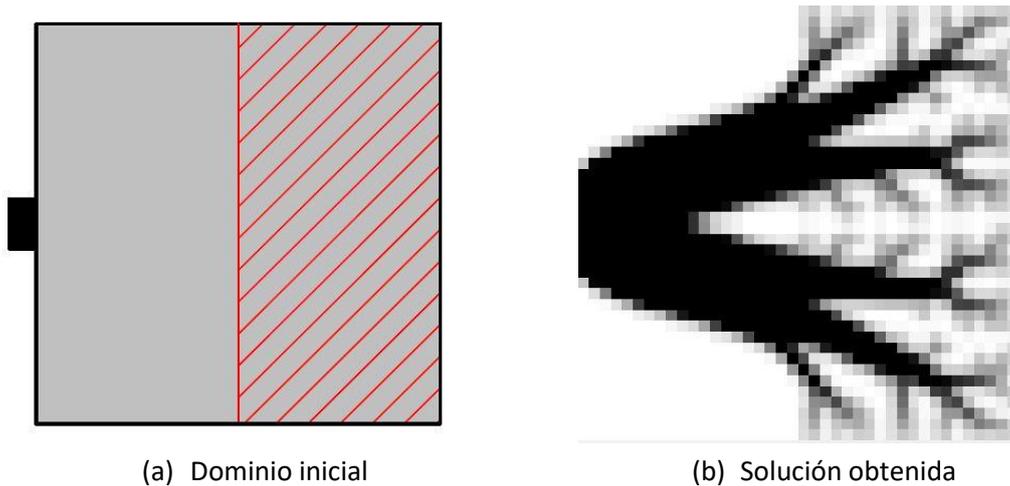


Figura 18: Optimización topológica con carga térmica en la mitad del dominio

En la figura se puede ver como las grandes ramificaciones centrales siguen existiendo para conducir el calor hacia la zona de evacuación, pero las ramificaciones pequeñas centrales solo existen en la zona del dominio sometida a la carga térmica, que es donde realmente se necesita optimizar el material.

Si la zona sometida a la carga térmica fuera la más cercana a los puntos de escape, es decir, la mitad izquierda, el programa interpretaría que la mitad derecha no necesita conducir el calor por lo que estaría completamente vacía. La optimización se realizaría por tanto sólo en la mitad izquierda, obteniendo la misma solución que en la Figura 17.

De la misma manera, si la zona donde se aplica la carga fuera la mitad superior o inferior, el problema sería el mismo que en la sección 6.5.1, variando la zona de evacuación, que en este caso estarían situados en una esquina.

6.5.4. Dominio cuadrado con zona no optimizable

En esta sección se va a estudiar el dominio de forma cuadrada con la presencia de una zona no optimizable, es decir, que debe estar vacía por definición. Esto es un caso probable, ya que a menudo las piezas deben contener agujeros para el paso de ejes o cualquier otro elemento de montaje. En esta ocasión hay que hacer varias modificaciones en el código de Matlab:

En la subfunción `OC` en la que se aplica el criterio de optimalidad y se genera la matriz x con la densidad de cada elemento, se añade, tras la línea 40, la siguiente línea:

```
xnew(find(passive))=0.001;
```

Esta sentencia asigna la densidad mínima 0.001 (equivalente a valor nulo) a todos los elementos que se encuentren en la variable `passive`. Esta variable es una matriz del tamaño del dominio inicial que contiene el valor 1 en los elementos que no puedan ser optimizados, es decir, donde se requiere ausencia de material, y el valor 0 en todos los demás.

La variable `passive` se define al principio del código, en el programa principal. El caso que se va a estudiar va a ser el mismo dominio cuadrado dividido en 40×40 elementos, al que se le impone una zona no optimizable circular, de diámetro 15 elementos, centrada en el medio del cuadrado. Para ello se introducen las siguientes líneas tras la línea 4:

```
for ely = 1:nely
    for elx = 1:nelx
        if sqrt((ely-nely+1/2.)^2 + (elx-nelx/2.)^2) < 7.5
            passive(ely,elx)=1;
            x(ely,elx)=0.001;
        else
            passive(ely,elx)=0;
        end
    end
end
```

La solución al problema, introduciendo los parámetros habituales, se observa en la Figura 19.

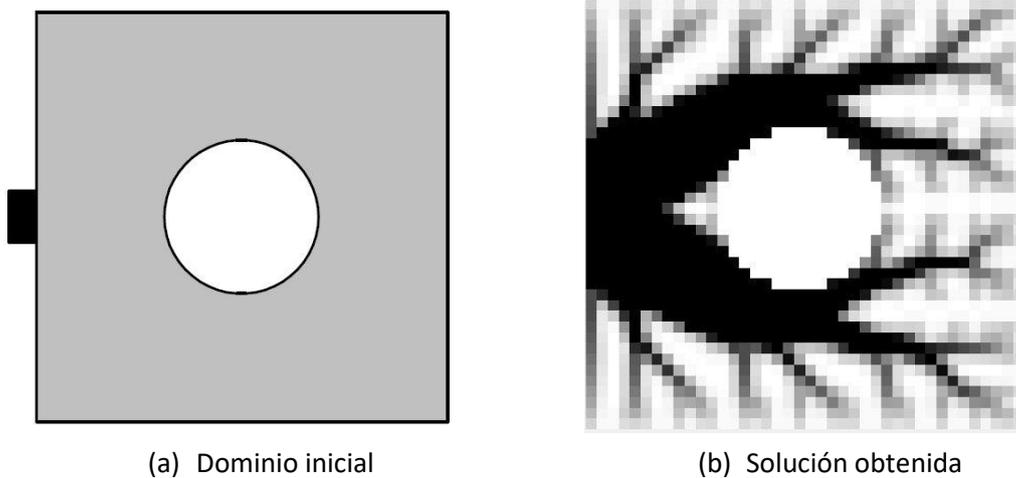


Figura 19: Dominio con sección circular no optimizable

En la solución se aprecia claramente el círculo central en el que no existe material. Siguen existiendo las dos ramificaciones centrales más gruesas, pero se adaptan a esta zona no optimizable “abrazando” al círculo central. El diámetro d del círculo central es fácilmente modificable, y a continuación se muestran varios ejemplos con distinto diámetro (Figura 20).

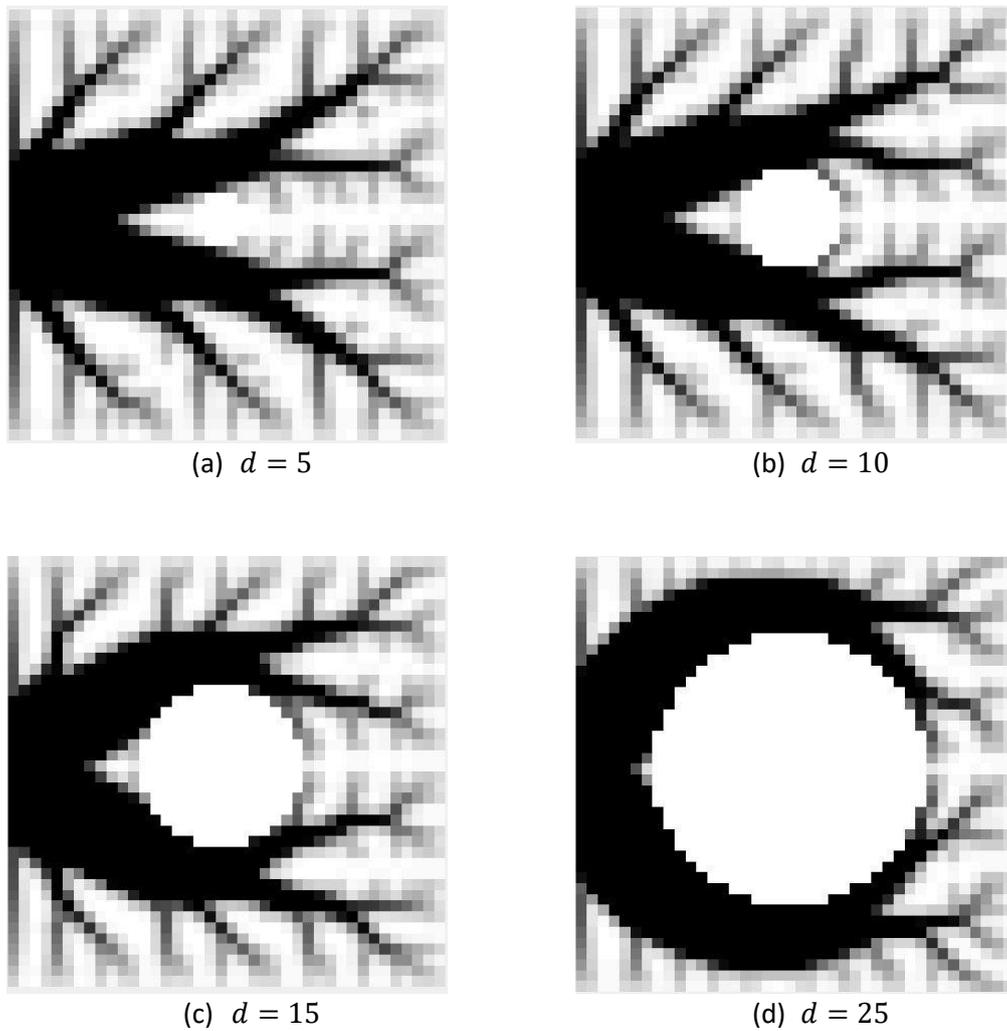


Figura 20: Zona no optimizable de diferentes tamaños

En todas las figuras se observa como las ramificaciones se adaptan al círculo central. Al ser el porcentaje de volumen un 40 % en todos los casos, cuanto mayor es la zona no optimizable (fig. 20d), existe una mayor concentración de material en las zonas que sí son optimizables.

Se podrían añadir más zonas no optimizables y de diferentes formas, relacionando la ecuación de la superficie no optimizable con las coordenadas de cada elemento.

a. Evacuación por la zona no optimizable

Otra posible aplicación con una zona no optimizable es que la zona de evacuación sea el propio área no optimizable. Un ejemplo práctico de este caso es una tubería por la que circula agua de refrigeración, que es la que absorbe el calor aplicado a la pieza. La solución a este problema se muestra en la Figura 21.

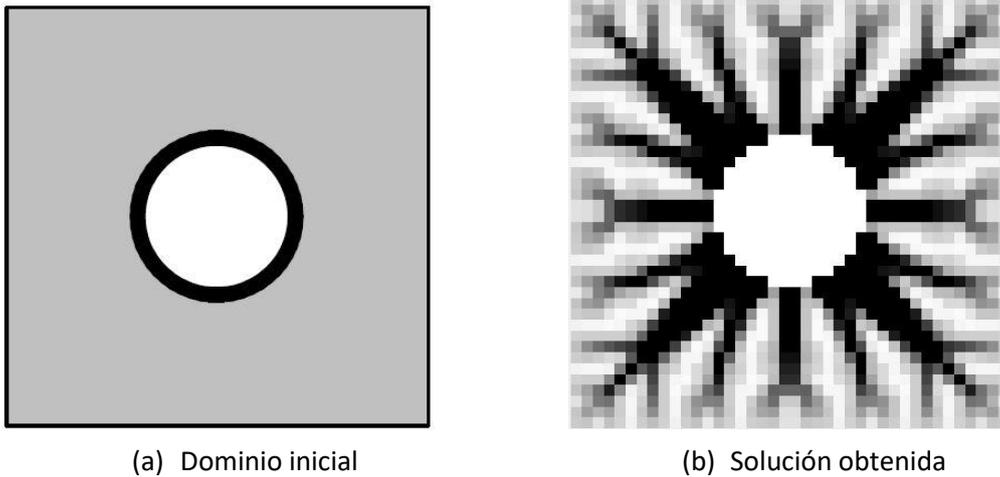


Figura 21: Evacuación de calor por la zona no optimizable

La solución obtenida es simétrica respecto de ocho ejes, al igual que el dominio inicial. Todas las ramificaciones crecen desde el borde del área no optimizable. Al igual que en el ejemplo anterior, cuanto mayor sea el área no optimizable, mayor es la concentración de material en la zona optimizable.

7. TRABAJOS FUTUROS

Este trabajo se ha centrado en la optimización topológica de estructuras sometidas solamente a cargas térmicas. Al ser ésta la única carga considerada, y al asumir que es una carga uniforme, hay ciertos valores que no es necesario tener en cuenta, como el valor absoluto de la carga térmica aplicada, es decir, la variación de temperatura a la que va a estar sometido el material. La energía térmica va a depender proporcionalmente de esta variación, pero como afecta a todos los elementos en la misma proporción, la energía será mínima para la misma distribución de material, independientemente de la temperatura.

Por la misma razón, no es necesario considerar el coeficiente de dilatación térmica α , haciendo que este programa ofrezca una solución universal para cualquier tipo de material.

En trabajos previos de optimización topológica se ha estudiado con amplitud el diseño de estructuras sometidas a cargas puntuales. En estos casos la función objetivo a reducir es la energía de deformación, que depende de los desplazamientos nodales. De un modo similar, en estos casos no es necesario conocer la magnitud de la fuerza aplicada, ya que la deformación provocada es directamente proporcional a esta carga.

En cuanto al material utilizado, son dos los parámetros que relacionan las cargas aplicadas con la deformación provocada. El primero, el módulo de elasticidad o módulo de Young E , relaciona un esfuerzo con la deformación producida. Es un parámetro que en la matriz de rigidez del elemento se encuentra multiplicando en la misma proporción a todos los elementos, por lo que su valor no afecta a la solución. El segundo parámetro, el coeficiente de Poisson ν , relaciona una fuerza con la deformación producida en las direcciones ortogonales a dicha fuerza. Este

parámetro, multiplica en distinta proporción a cada elemento en la matriz de rigidez, por lo que no es despreciable y afecta a la solución.

Para un futuro se propone el estudio de estructuras sometidas tanto a cargas térmicas como a cargas puntuales. En este caso, la función objetivo sería la energía interna del cuerpo, compuesta por la suma de la energía térmica y la energía de deformación. En este caso hay que tener en cuenta tanto el material empleado como los valores de las cargas aplicadas, puesto que la carga térmica y las cargas puntuales contribuyen a la energía interna en diferente proporción.

Los tres parámetros del material (coeficiente de dilatación térmica, módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson) influyen en la deformación producida por la combinación de cargas, por tanto deberán ser conocidos e introducidos en el programa.

8. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha implementado un programa en Matlab para resolver problemas de optimización topológica para estructuras planas sometidas a cargas térmicas uniformes, buscando optimizar la conducción de calor hacia el exterior, minimizando de esta forma la energía térmica de la estructura.

El programa incluye varios parámetros para obtener la solución adecuada, como son el factor de penalidad p y el radio de filtro r_{min} . A base de pruebas variando estos parámetros se ha llegado a concluir que los valores más adecuados son un valor de $p = 3.0$ y $r_{min} = 1.2$.

Comparando la solución obtenida con la solución ofrecida en la literatura {14} se concluye que el programa da una solución válida, que se asemeja más a la solución dada cuanto mayor sea el número de elementos en que se divide el dominio inicial. Se ha observado que discretizando un dominio inicial cuadrado en 100×100 elementos la solución muestra una gran nitidez, pero a costa de aumentar el coste computacional necesario para la resolución del problema.

También se puede concluir que los métodos utilizados para la optimización (método SIMP y Criterio de Optimalidad OC) son eficientes y fáciles de implementar, ofreciendo soluciones adecuadas al problema.

La optimización topológica resulta una herramienta útil en el diseño de elementos estructurales que precisan una reducción del volumen de material empleado en su fabricación, consiguiendo que el elemento diseñado reduzca en gran medida su peso, pero mantenga sus propiedades mecánicas.

Actualmente existen herramientas de computación numérica avanzada que facilitan la resolución del problema por el Método de Elementos Finitos, y nuevas tecnologías de fabricación que permiten crear productos con prácticamente cualquier tipo de forma y dimensiones.

La optimización topológica es una técnica relativamente nueva en la que se está avanzando día a día y en la que quedan muchos avances por descubrir en un futuro.

REFERENCIAS

- [1] Nishiwaki, S., Frecker, M.I., Min, S., y Kikuchi, N. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. *Int. J.Numer. Meth. Engng.* 42 (1998).
- [2] Kikuchi, N., Nishiwaki, S., Fonseca, L.S.O., y Silva E.C.N. Design optimization method for compliant mechanisms microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 151 (1998).
- [3] Lin, J., Luo, Z., y Tong, L. A new multi-objective programming scheme for topology optimization of compliant mechanisms. *Struct. Multidisc Optim.* 40 (2010).
- [4] Rubio, W.M., Silva E.C.N., y Nishiwaki, S. Piezoresistive sensor design using topology optimization. *Struct. Multidisc Optim.* 36 (2008).
- [5] Kota, S., Joo, J. Li, Z. Rodgers, S.M., y Sniogowsky, J. Design of compliant mechanisms: Applications to mems. *Analog. Integrated Circuits and Signal Processing* 29 (2001).
- [6] Larsen, U.D., Sigmund, O., y Bouwstra, S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio. *Journal of Microelectromechanical Systems* 6, 2 (1997).
- [7] Pingen, G., Evgrafov, A., y Maute, K. Topology optimization of flow domains using the lattice Boltzmann method. *Struct. Multidisc Optim.* 34 (2007).
- [8] Sigmund, O., y Clausen, P.M. Topology optimization using a mixed formulation: An alternative way to solve pressure load problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007).
- [9] Maute, K., y Allen, M. Conceptual design of aeroelastic structures by topology optimization. *Struct. Multidisc Optim.* 27 (2004).
- [10] Mróz, Z., y Rozvany, G.I.N. Optimal design of structures with variable support conditions. *Journal of Optimization Theory and Applications* 15, 1 (1975).
- [11] Prager, W., y Rozvany, G.I.N. Optimal layout of grillages. *Journal of structural Mechanics* 5,1 (1977).
- [12] Bendsøe, M.P., y Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71, 2 (1988).
- [13] Suzuki, K., y Kikuchi, N. A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 93 (1991).
- [14] Bendsøe, M.P., y Sigmund, O. *Topology optimization: Theory, Methods and Applications.* Springer Verlag, Berlin (2003).
- [15] Yin, L. y Yang, W. Optimality criteria method for topology optimization under multiple constraints. *Computer and Structures* 79 (2001).

- [16] Svanber, K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 24 (1987).
- [17] Schmidt, L.A. Structural design by systematic synthesis. *Proceedings of the second ASCE Conference on Electronic Computation.* Pittsburgh, USA (1960).
- [18] Alcaraz, J.L., Ansola, R., Canales, J., Tárrago, J.A., y Veguería, E. Elasticidad y resistencia de materiales. *Deformaciones y tensiones de origen térmico* (2015).
- [19] Sigmund, O. *Design of material structures using topology optimization.* Ph.D. Thesis. Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark (1994).
- [20] Bendsøe, M.P. *Optimization of structural topology, shape and material* (1995).

Páginas web:

- [21] <http://www.catec.aero/materiales-y-procesos/optimizacion-topologica.htm>
- [22] <https://www.rankia.com/blog/gestion-cartera/3167733-optimizacion-vs-eficiencia>

ANEXO A. CÓDIGO COMPLETO DE MATLAB

```

1  %%% MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA PARA ESTRUCTURAS CON CARGAS
TÉRMICAS %%%
2  function top(nelx,nely,volfrac,penal,rmin)
3  % INICIALIZAR
4  x(1:nely,1:nelx) = volfrac;
5  loop = 0;
6  change = 1.;
7  % COMENZAR PROCESO ITERATIVO
8  while change > 0.01
9      loop = loop + 1;
10     xold = x;
11 % ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS
12     [U]=FE(nelx,nely,x,penal);
13 % FUNCIÓN OBJETIVO Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
14     [KE] = lk;
15     c = 0.;
16     for ely = 1:nely
17         for elx = 1:nelx
18             n1 = (nely+1)*(elx-1)+ely;
19             n2 = (nely+1)* elx +ely;
20             Ue = U([n1;n2;n2+1;n1+1]);
21             c = c + (0.001+0.999*x(ely,elx)^penal)*Ue'*KE*Ue;
22             dc(ely,elx) = -0.999*penal*x(ely,elx)^(penal-1)*Ue'*KE*Ue;
23         end
24     end
25 % FILTRO DE SENSIBILIDAD
26     [dc] = check(nelx,nely,rmin,x,dc);
27 % ACTUALIZACIÓN DEL DISEÑO POR EL CRITERIO DE OPTIMALIDAD
28     [x] = OC(nelx,nely,x,volfrac,dc);
29 % IMPRIMIR RESULTADOS
30     change = max(max(abs(x-xold)));
31     disp([' It.: ' sprintf('%4i',loop) ' Obj.: ' sprintf('%10.4f',c)
' Vol.: ' sprintf('%6.3f',sum(sum(x))/(nelx*nely)) ' ch.: ' 1
sprintf('%6.3f',change )])
32 % FIGURA DE DENSIDADES
33     colormap(gray); imagesc(-x); axis equal; axis tight;axis
off;pause(1e-6);
34 end

```

```

35 %%%%%%%%%% SUBFUNCIÓN - CRITERIO DE OPTIMALIDAD %%%%%%%%%%
36 function [xnew]=OC(nelx,nely,x,volfrac,dc)
37     l1 = 0; l2 = 100000; move = 0.2;
38     while (l2-l1 > 1e-4)
39         lmid = 0.5*(l2+l1);
40         xnew = max(0.001,max(x-
41             move,min(1.,min(x+move,x.*sqrt(dc./lmid)))));
42         if sum(sum(xnew)) - volfrac*nelx*nely > 0;
43             l1 = lmid;
44         else
45             l2 = lmid;
46         end
47     end

48 %%%%%%%%%% SUBFUNCIÓN - FILTRO DE SENSIBILIDAD %%%%%%%%%%
49 function [dcn]=check(nelx,nely,rmin,x,dc)
50     dcn=zeros(nely,nelx);
51     for i = 1:nelx
52         for j = 1:nely
53             sum=0.0;
54             for k = max(i-round(rmin),1):min(i+round(rmin),nelx)
55                 for l = max(j-round(rmin),1):min(j+round(rmin),nely)
56                     fac = rmin-sqrt((i-k)^2+(j-l)^2);
57                     sum = sum+max(0,fac);
58                     dcn(j,i) = dcn(j,i) + max(0,fac)*x(l,k)*dc(l,k);
59                 end
60             end
61         end
62     end

63 %%%%%%%%%% SUBFUNCIÓN - ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS %%%%%%%%%%
64 function [U]=FE(nelx,nely,x,penal)
65     [KE] = lk;
66     K = sparse((nelx+1)*(nely+1), (nelx+1)*(nely+1));
67     F = sparse((nely+1)*(nelx+1),1); U =sparse((nely+1)*(nelx+1),1);
68     for ely = 1:nely
69         for elx = 1:nelx
70             n1 = (nely+1)*(elx-1)+ely;
71             n2 = (nely+1)* elx +ely;
72             edof = [n1; n2; n2+1; n1+1];
73             K(edof,edof) = K(edof,edof) + (0.001 +
74                 0.999*x(ely,elx)^penal)*KE;
75         end
76     end

77 % DEFINICIÓN DE CARGAS Y RESTRICCIONES
78 F(:,1) = 1;
79 fixeddofs = [nely/2 - 1:1:nely/2+3];
80 alldofs = [1:(nely+1)*(nelx+1)];
81 freedofs = setdiff(alldofs,fixeddofs);

82 % RESOLUCIÓN
83 U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \F(freedofs,:);
84 U(fixeddofs,:)= 0;

```

```
82 %%%%%%%%%%% SUBFUNCIÓN - MATRIZ DE CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DEL  
ELEMENTO %%%%%%%%%%
```

```
83 function [KE]=lk  
84 KE = [ 2/3 -1/6 -1/3 -1/6  
85         -1/6 2/3 -1/6 -1/3  
86         -1/3 -1/6 2/3 -1/6  
87         -1/6 -1/3 -1/6 2/3 ];
```