



El problema de los tres cuerpos

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Iker García Ribote

Trabajo dirigido por
Virginia Muto Foresi

Leioa, 20 de noviembre de 2017

Índice general

Introducción	v
1. Problema de los dos cuerpos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Propiedades generales de las soluciones de las EDOs	1
1.3. Mecánica de Newton	2
1.4. Mecánica de Hamilton-Jacobi	5
1.5. Solución analítica al problema de los dos cuerpos	9
1.6. Solución numérica.	20
2. Problema de los tres cuerpos	25
2.1. Introducción	25
2.2. Un breve camino por la historia	26
2.2.1. De Newton a Poincaré	26
2.2.2. De Poincaré a la actualidad	27
2.3. Formulación del problema de los tres cuerpos	29
2.3.1. Mecánica Newtoniana	29
2.3.2. Integrales del movimiento	30
2.3.3. Mecánica Hamiltoniana	31
2.4. Soluciones de Euler y Lagrange	32
2.4.1. Soluciones triangulares	34
2.4.2. Soluciones colineales	36
2.5. Sistema Binario. Simulación numérica	37
2.5.1. Planteamiento de las ecuaciones	37
2.5.2. Simulaciones numéricas	39
2.6. Conclusiones	42
A. Método de Euler	43
A.1. Descripción del método	43
A.2. Implementación del método en <i>Mathematica</i>	44
B. Método de Runge-Kutta explícito	47
B.1. Descripción del método	47
B.2. Implementación del método en <i>Mathematica</i>	48

C. Sistema binario	51
Bibliografía	53

Introducción

El propósito de este trabajo es introducir al lector en un problema que surgió de manera natural tras el descubrimiento de la famosa Ley de Gravitación Universal de Newton: *El problema de los tres cuerpos*. El objetivo principal del problema es encontrar las ecuaciones que definen la trayectoria de tres cuerpos sometidos a atracción gravitacional mutua dadas unas ciertas posiciones y velocidades iniciales.

Desde que el ser humano alzó la vista por primera vez y contempló las estrellas, un mar de dudas invadió su ser, la inmensidad del espacio y nuestra necesidad de dar explicación a lo que nos rodea son una combinación peligrosa. Así pues, este problema ha llamado la atención de los científicos durante más de 300 años.

Pese a los avances en la tecnología y la capacidad computacional que hemos logrado en pleno siglo XXI, sigue habiendo muchas dudas y muchos casos sin resolver en torno a este problema. A día de hoy se siguen realizando estudios tanto analíticos como numéricos sobre este problema, sin embargo, la complejidad que hay detrás sigue siendo inexpugnable en ciertos casos. Por ejemplo, en 2017, XiaoMing Li y ShiJun Liao en la Universidad Jiaotong de Shanghai, determinaron con éxito 695 familias nuevas de órbitas periódicas bajo unas condiciones particulares utilizando el supercomputador TH-2* en Guangzhou.

Cuando planteamos el problema surgen de manera inmediata las ecuaciones diferenciales, ya que queremos representar la variación de la posición. Como matemáticos, la complejidad de resolver ciertas ecuaciones diferenciales es bien conocida, por esto, supone un reto que no podemos desoir. Además, el hecho de explicar un fenómeno que se da en la naturaleza nos influye directamente como científicos, más aún, la cantidad de casos en los que se puede aplicar el problema es inmensa, todo esto hace que sea un problema relevante y sustancioso cuanto menos.

*Es una supercomputadora desarrollada por la Universidad Nacional de Tecnología de Defensa de China (NUDT) y la empresa china Inspur. Está ubicada en el Centro Nacional de Supercomputación en Guangzhou (NSCC-GZ) Republica Popular China. Tiene un rendimiento de 33.86 petaFLOPS (33.860.000.000.000.000 operaciones de coma flotante por segundo), con un pico teórico de 54.9 petaFLOPS que la convirtió en la supercomputadora más rápida del mundo entre junio de 2013 y junio de 2016.

El problema de los tres cuerpos se ha considerado en temas relacionados con astronomía, vuelos espaciales, dinámica galáctica, formación estelar y la determinación de trayectorias para misiones de naves espaciales, tanto aterrizajes robóticos y satélites como viajes tripulados.

Entre otros descubrimientos, se encuentra la idea de que un sistema estelar binario pueda albergar planetas. Esta idea ha sido explorada con gran detalle desde 1981 por Gonczi y Froeschle hasta 2014 por Cuntz, finalmente verificada gracias a las observaciones realizadas por la Misión Kepler de la NASA.

Recientemente, utilizando los datos de Kepler, más de 700 candidatos a exoplanetas** obtuvieron el estatus de exoplanetas basándose en un método estadístico para identificar la probabilidad de candidatos falsos positivos en la muestra. Esto presagia la necesidad de aplicar *el problema de los tres cuerpos* ya que cada caso considerado incluye la posible interacción de tres masas. Se han realizado muchos otros descubrimientos detectando múltiples sistemas planetarios, incluyendo KOI-142, que es otro hallazgo de un par de planetas basado en sus interacciones mutuas.

Las aplicaciones de vuelos espaciales implican la determinación de las trayectorias de las naves espaciales para las misiones de satélites y de espacio de aterrizaje. Las misiones Apollo 8-10 de la NASA a la luna requirieron soluciones numéricas precisas para el problema de los tres cuerpos. La NASA también lanzó varias misiones de exploración, siendo las más notables el Telescopio Espacial Hubble, el Observatorio de Rayos X CHANDRA, el Telescopio Espacial SPITZER, el Telescopio Espacial Kepler y el próximo Telescopio Espacial James Webb. Cada una de estas misiones implica diferentes soluciones al problema de los tres cuerpos y todos, excepto Kepler, orbitan la Tierra.

Las aplicaciones más básicas del problema de los tres cuerpos involucran satélites artificiales comúnmente utilizados para fines militares y/o de comunicación. Estos satélites generalmente se consideran dentro del ámbito de un problema restringido de tres cuerpos. Un problema restringido de tres cuerpos simplifica la solución porque una de las masas es mucho menor que las demás y tienen una influencia gravitacional insignificante.

Entre las posibles soluciones del problema de los tres cuerpos, la simplificación impuesta en el problema restringido de tres cuerpos ha sido el más práctico, y por lo tanto muchos sistemas astronómicos diferentes han sido estudiados dentro de este marco. Entre otros, el sistema Tierra-Luna-Nave espacial, Tierra-Sol-Luna, Sol-Júpiter-Asteroide.

Explorar el problema dentro de un entorno astronómico puede abarcar una escala amplia, en este trabajo discutiremos sólo los casos más básicos. Sin perder de vista el objetivo principal de este trabajo, es decir, dar las herramientas necesarias para un primer contacto con el problema y dotar de

** Planetas que se encuentran fuera del Sistema Solar.

los conocimientos necesarios para proseguir, si se desea, con un estudio más profundo, se comenzará con el problema de los dos cuerpos. Para ello, se realizará un estudio analítico y numérico. En la parte analítica se mostrarán varias formas de resolver el problema dando las ventajas y los inconvenientes de cada una. Respecto a la parte numérica se mostrarán los resultados obtenidos mediante el uso de métodos numéricos. En los apéndices aparecerá de forma más detallada tanto el método como el desarrollo de éste en *Mathematica*.

Finalmente se estudiará el problema de los tres cuerpos. De manera análoga al caso de dos cuerpos, se comenzará con un estudio analítico del problema para acabar con unos resultados numéricos. Al comienzo de ambas partes se introducirá el problema desde un punto de vista histórico con la intención de adentrar al lector en el mismo entendiendo el porqué y la evolución de este a lo largo de la historia.

Cabe destacar que a lo largo del trabajo se mencionarán muchos libros y artículos relacionados con el problema que quedarán registrados en la bibliografía, sin embargo, con el fin de no mezclar estas obras de interés general con el material empleado para el desarrollo de este trabajo, a continuación se citarán los libros utilizados.

Para el problema de los dos cuerpos se han utilizado: la página web de la universidad [1], el libro *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem* [2], una sección (Section 7.4) de un libro *The Two-Body Problem-Difference Equations to Differential Equations* [3], así como apuntes recopilados durante la carrera, sobre todo para las aproximaciones numéricas se han utilizado los apuntes de la asignatura *Métodos II* de tercero que se obtienen principalmente del libro *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*[4].

Para el problema de los tres cuerpos se han utilizado principalmente, un trabajo llamado *The three-body problem* [5], el libro *New Foundations of Classical Mechanics* [6], un artículo de una revista *Estructuras simplécticas en la física matemática* [7] y datos numéricos recogidos en el trabajo *New Families of Solutions in N-Body Problems* [8]. Para la parte de simulaciones numéricas se ha utilizado un experimento llamado *Un experimento numérico sobre el problema de los tres cuerpos en Mat Lab 5.1* [9] con su posterior traducción al lenguaje de programación *Mathematica*.

Capítulo 1

Problema de los dos cuerpos

1.1. Introducción

Como caso particular del problema de los n -cuerpos nos encontramos en primer lugar con el problema de los 2 cuerpos. Este caso nos ayudará a comprender en qué consiste la resolución de un problema de cuerpos bajo atracción gravitatoria para luego analizar problemas más avanzados donde el número de cuerpos es mayor.

Éste, a diferencia de otros más complejos sí tendrá solución, siendo un problema tradicional en la física tanto antigua como moderna. Surge de manera natural cuando nos planteamos el movimiento de la tierra alrededor del sol, de la luna alrededor de la tierra y otro tipo de movimientos similares.

Durante la historia se ha resuelto de muchas formas distintas, sin embargo, en este capítulo nos centraremos en dos métodos de resolución analítica distintos: compararemos como afronta el problema la mecánica de Newton frente a la mecánica de Hamilton-Jacobi.

En la actualidad, el mundo computacional es de gran relevancia tanto en la física como en las matemáticas y por tanto acabaremos este capítulo adentrándonos en algunos métodos de resolución numérica para este problema.

1.2. Propiedades generales de las soluciones de las EDOs

En general, para todo problema de n -cuerpos, el objetivo principal es dar las ecuaciones que definen la posición de cada cuerpo a lo largo del tiempo, es decir, encontrar las ecuaciones $x_i(t)$. En consecuencia, al plantear el problema nos encontraremos con unas ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias, por esto, es conveniente repasar algunos conceptos básicos sobre las propiedades de las soluciones de las EDOs.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el *problema general de los tres cuerpos* pueden ser representadas por curvas en 3D. En un caso especial, la solución puede ser un único punto, conocido como *punto fijo* o solución de equilibrio. Normalmente, las órbitas periódicas están centradas en esos puntos, por ello se les denomina también *puntos estables* o *centros estables*.

Desde un punto de vista matemático, se requiere que la solución de la EDO exista y que sea única. La existencia de la solución puede ser, o bien global, cuando dicha solución está definida para todo t , o bien local, cuando sólo está definida para un determinado intervalo de t . La unicidad de la solución implica que sólo hay una única solución para cada punto.

La existencia y unicidad para EDOs dadas han sido establecidas por teoremas matemáticos. Sea la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y'(x) = f(y(x), x)$, donde $y' = dy/dx$, y sea la condición inicial $y(x_0) = y_0$, con x_0 siendo el valor inicial para $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$. El teorema de existencia de Picard establece que si $f(y(x), x)$ es una función continua y Lipschitz en x e y , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que existe una solución única para $y(x)$ en el intervalo $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$.

Otra condición es que el problema esté bien definido, esto significa que la solución tiene que ser continua con respecto al dato inicial.

1.3. Mecánica de Newton

La mecánica newtoniana o también llamada mecánica vectorial estudia el movimiento de partículas y sólidos en un espacio euclídeo tridimensional. La formulación de la misma se hace en un sistema de referencia inercial como los que aquí nos atañen. En este trabajo nos centraremos en la parte dinámica que estudia los movimientos y las causas que lo producen, es decir, las fuerzas y energías que influyen en el movimiento.

Supongamos que tenemos dos cuerpos \mathbf{a} y \mathbf{b} con masas m_1 y m_2 y con posiciones \vec{x}_1 y \vec{x}_2 respectivamente. Hay que tener en cuenta que estamos en \mathbb{R}^3 , es decir, $\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ y $\vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$. En adelante escribiremos x_1 y x_2 sin la flecha para simplificar la notación.

Por la 2ª ley de Newton tenemos que:

$$\begin{cases} \vec{F}_{12}(x_1, x_2) = m_1 x_1'' = m_1 \vec{a}_1, \\ \vec{F}_{21}(x_1, x_2) = m_2 x_2'' = m_2 \vec{a}_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde \vec{F}_{12} es la fuerza en m_1 debido a la interacción con m_2 y \vec{F}_{21} es la fuerza en m_2 debido a la interacción con m_1 . (Notar que la derivada segunda de la posición es la aceleración, es decir, usamos la 2ª ley de Newton que nos dice $\vec{F} = m\vec{a}$).

Queremos determinar la trayectoria de \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente, luego queremos calcular $x_1(t)$ y $x_2(t) \forall t$ dadas las posiciones iniciales $x_1(t=0)$ y $x_2(t=0)$ y las velocidades iniciales $v_1(t=0) = x_1'(t=0)$ y $v_2(t=0) = x_2'(t=0)$.

Nos encontramos ante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este caso, trabajando con ambas expresiones podemos llegar a una solución:

Sumando las ecuaciones: (Movimiento del centro de masas)
Tenemos en cuenta que la posición del centro de masas (baricentro) viene dada por la expresión

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Entonces,

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = m_1 x_1'' + m_2 x_2'' = (m_1 + m_2) x_{cm}''.$$

Aplicando la 3ª ley de Newton tenemos que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ luego, llegamos a la conclusión de que:

$$x_{cm}'' = 0. \quad (1.2)$$

De aquí podemos deducir también la conservación de la cantidad de movimiento de la siguiente manera:

$$x_{cm}'' = 0 \Rightarrow x_{cm}' = v_{cm} = cte \Rightarrow m_1 x_1' + m_2 x_2' = cte.$$

Restando las ecuaciones: (Movimiento del vector desplazamiento)

$$x_1'' - x_2'' = \left(\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \right).$$

Aplicando de nuevo la 3ª ley de Newton ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$) llegamos a que:

$$x_1'' - x_2'' = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}.$$

Despejando \vec{F}_{12} llegamos a la expresión:

$$\vec{F}_{12} = \left(\frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \right) (x_1'' - x_2'') = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (x_1'' - x_2'').$$

Ahora sea $\vec{r} = x_1 - x_2$ y $\mu = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)$ entonces podemos escribir:

$$\vec{F}_{12}(r) = \mu r'' . \quad (1.3)$$

Usando la definición de \vec{r} y de x_{cm} tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r(t), \\ x_2(t) &= x_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r(t). \end{aligned}$$

Cabe recalcar que son expresiones no explícitas para la solución del problema según la mecánica de Newton. Es decir, obtenemos que tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ dependen de una variable que depende de t , el vector posición $\vec{r}(t)$.

Veamos un ejemplo práctico. Supongamos que nos encontramos en un sistema solar formado por una única estrella y un planeta que gira a su alrededor describiendo una órbita circular. Gracias a una serie de mediciones sabemos que la masa de esa estrella es del orden de $2 * 10^{30}$ kg y la masa del planeta es del orden de $6 * 10^{24}$ kg. Por otro lado, sabemos que se encuentran a una distancia $r = 149,6$ millones de km. Efectivamente, las condiciones de masa y distancia son muy parecidas a las de nuestro Sol y la Tierra pero en este sistema solar solo hay dos cuerpos y además su órbita es circular y no elíptica. A continuación nos preguntamos como será una ecuación que describa la posición de la tierra para cada instante de tiempo t .

En primer lugar consideraremos tanto la estrella como el planeta como si fueran objetos puntuales de masa m_2 y m_1 respectivamente. Además $x_2(t)$ describirá la posición de la estrella para cada momento t y análogamente $x_1(t)$ para la tierra. Entonces, dada la solución que hemos visto anteriormente, la ecuación que describe la posición de la tierra a lo largo del tiempo es la siguiente.

$$x_1(t) = x_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r(t).$$

Dado que la masa m_2 de la estrella es $3 * 10^5$ veces mayor que la del planeta m_1 , consideraremos que el centro de masas está en la estrella, es decir, $x_{cm} = x_2$. Además consideraremos también que $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \approx 1$. Luego, tenemos que:

$$x_1(t) = x_2 + r(t).$$

Ahora, colocando el origen de coordenadas en la estrella, y dado que no se mueve tenemos que $x_2(t) = 0 \quad \forall t$. En definitiva sólo tenemos que definir el vector de posición $r(t)$.

En este caso, dado que el planeta sigue una trayectoria circular alrededor del origen de coordenadas, expresamos el vector posición en coordenadas

polares como $r(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t))$. En definitiva, tenemos que la ecuación que define la posición del planeta para cada instante de tiempo t , siendo el origen de coordenadas la estrella viene dada por:

$$x_1(t) = (149,6 * 10^6 \cos(\omega t), 149,6 * 10^6 \sin(\omega t)).$$

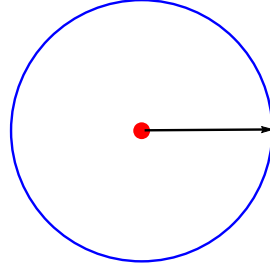


Figura 1.1: Órbita del planeta (azul) alrededor de la estrella (rojo).

Introducimos el factor de conversión $\omega = \frac{2\pi}{T}$ siendo T el periodo, es decir, el tiempo que tarda el planeta en dar una vuelta completa al sol, ya que tanto el $\sin(\theta)$ como el $\cos(\theta)$ esperan un ángulo como variable y no el tiempo. De esta forma si por ejemplo medimos el tiempo en días, y el planeta que hemos tomado como ejemplo tarda 400 días en dar una vuelta completa, tendríamos que

$$x_1(t) = (149,6 * 10^6 \cos(\frac{2\pi}{400}t), 149,6 * 10^6 \sin(\frac{2\pi}{400}t)).$$

Es decir, si queremos saber su posición al cabo de 100 días tendríamos que

$$x_1(t) = (149,6 * 10^6 \cos(\frac{\pi}{2}), 149,6 * 10^6 \sin(\frac{\pi}{2})).$$

1.4. Mecánica de Hamilton-Jacobi

En primer lugar cabe recalcar que los sistemas que se pueden estudiar bajo la mecánica de Hamilton-Jacobi, conocida como teoría Hamiltoniana, son sistemas conservativos, es decir, sistemas en los que se conserva la energía total, o sea la energía total se mantiene constante en el tiempo.

Como ya adelantó Newton, el sistema solar es un sistema conservativo, y como este va a ser el principal punto de representación de este trabajo podemos proceder de la siguiente manera.

Supongamos el caso específico del sistema sol-tierra. En primer lugar dado que el sol supone el 99.8% de la masa total del sistema solar, supongamos que el objeto de mayor masa M (el sol) está en un punto fijo del espacio con masa $M > m$ y con centro de masas en el interior de este.

El cuerpo de menor masa m (la tierra) se moverá bajo el campo gravitatorio que produce el de mayor masa. Expresamos la energía cinética y la energía potencial gravitatoria en coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m((x')^2 + (y')^2), \\ V = -G\frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

donde G es la constante gravitacional y su valor es aproximadamente

$$6,67 * 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2},$$

si medimos la fuerza en Newtons, la distancia en metros, y la masa en kilogramos.

Consideramos el movimiento en el plano XY ya que tenemos un potencial central y el vector momento angular* se conserva ya que suponemos que no hay fuerzas exteriores. Si denotamos por Z al eje del momento, como el vector normal al plano de los movimientos está representado por el momento angular, el movimiento de m estará en el plano XY .

Dado el planteamiento del problema, por la simetría y la dependencia del momento angular hacemos un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

*En la mecánica newtoniana, el momento angular de una partícula o masa puntual con respecto a un punto O del espacio se define como el momento de su cantidad de movimiento \vec{p} con respecto a ese punto. Normalmente se designa mediante el símbolo L . Siendo \vec{r} el vector que une el punto O con la posición de la masa puntual, será

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

El vector \vec{L} es perpendicular al plano que contiene \vec{r} y \vec{v} , en la dirección indicada por la regla del producto vectorial o regla de la mano derecha y su módulo o intensidad es

$$|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}|\sin(\theta) = |\vec{p}||\vec{r}|\sin(\theta).$$

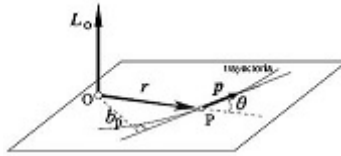


Figura 1.2: Vector momento angular \vec{L}_0 .

Derivando ambas variables respecto a la variable temporal:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \cos \theta r' - r \sin \theta \theta', \\ y' &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \sin \theta r' + r \cos \theta \theta'. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que:

$$(x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + r^2(\theta')^2. \quad (1.4)$$

Así nuestro sistema de energía cinética y potencial planteado antes se reescribe como:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m((r')^2 + r^2(\theta')^2), \\ V = -G\frac{Mm}{r}. \end{cases}$$

Siguiendo la teoría de la mecánica hamiltoniana, definimos ahora el Lagrangiano del sistema:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m((r')^2 + r^2(\theta')^2) + G\frac{Mm}{r}.$$

Escribimos las *ecuaciones lagrangianas del movimiento* para representar la dinámica del sistema. Según el formalismo estándar las ecuaciones se escriben como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

donde q_j y q'_j representan posiciones y velocidades respectivamente.

Para llegar al Hamiltoniano H del sistema usamos la siguiente transformación:

$$H = \sum_i p_i q'_i - L.$$

Se definen los momentos para el sistema de dos cuerpos teniendo en cuenta que los momentos asociados a las variables son de la forma $p_i = \frac{\partial L}{\partial q'_i}$. Entonces, en nuestro caso los dos grados de libertad vienen representados por r y θ :

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial L}{\partial r'} = m r', \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta'} = m r^2 \theta'. \end{cases}$$

Veamos como queda H :

$$H = p_r r' + p_\theta \theta' - \frac{1}{2}m((r')^2 + r^2(\theta')^2) - G\frac{Mm}{r}.$$

Como $p_r = m r'$ y $p_\theta = m r^2 \theta'$ tenemos que:

$$H = m(r')^2 + mr^2(\theta')^2 - \frac{1}{2}m((r')^2 + r^2(\theta')^2) - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m(r')^2 + \frac{1}{2}mr^2(\theta')^2 - G\frac{Mm}{r}.$$

Es decir, tenemos que:

$$H = \frac{1}{2m}m^2(r')^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2r^4(\theta')^2}{mr^2} - G\frac{Mm}{r}.$$

En definitiva:

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] - G\frac{Mm}{r}.$$

Por la definición de sistema conservativo tenemos que H no depende del tiempo:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

En resumidas cuentas, vemos que sobre las trayectorias del sistema existe una cantidad conservada, la energía E ($H = E$).

El sistema de Hamilton representa las ecuaciones de movimiento del sistema. En forma general:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{cases}$$

Siendo $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $p_1 = p_r$, $p_2 = p_\theta$, aplicando las ecuaciones a nuestras variables obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial r} = -p_r' = \frac{GMm}{r^2} - \frac{p_\theta^2}{mr^3}, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} = -p_\theta' = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \theta', \\ \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = r'. \end{cases}$$

Entonces el sistema escrito de forma compacta es:

$$\begin{cases} p_r' = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - G\frac{Mm}{r^2}, \\ p_\theta' = 0, \\ \theta' = \frac{p_\theta}{mr^2}, \\ r' = \frac{p_r}{m}. \end{cases}$$

Obtenemos un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, en lugar de las n de segundo orden obtenidas en el apartado en el que aplicamos la mecánica de Newton.

El objetivo de este trabajo no es centrarse en la mecánica Hamiltoniana y en la obtención de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, más bien recomendar la mecánica hamiltoniana para el estudio de la estabilidad del sistema solar frente a la mecánica newtoniana, debido principalmente a la reducción de orden de sus ecuaciones diferenciales.

Por otro lado quiero recalcar, antes de empezar con la parte computacional, que el problema de los dos cuerpos aquí expuesto tiene solución analítica, con lo que podremos predecir las trayectorias. Más adelante, en casos más complicados que el de los dos cuerpos, veremos que no siempre es así y que no quedará mas remedio que afrontar el problema con procesos relacionados con la aproximación numérica mediante el uso de ordenadores.

1.5. Solución analítica al problema de los dos cuerpos

En 1609 Johan Kepler (1571-1630) publicó las primeras dos de sus tres leyes sobre el movimiento de los planetas. La primera aseguraba que los planetas se movían en una órbita elíptica con el sol en uno de sus focos. Dedujo esta conclusión tras analizar con esmero los datos que Tycho Brahe (1546-1601) había recogido tras observar el movimiento del planeta Marte durante un periodo de más de 20 años. Su trabajo fue un triunfo para la ciencia ya que había conseguido crear un modelo del sistema solar más preciso y simple que los de Copernico y Ptolomeo. Sin embargo, aunque brillante, los resultados de Kepler no daban respuesta a la pregunta de por qué los planetas se movían bajo esas órbitas. En 1687 Newton aportó los principios que faltaban. En su gran trabajo *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Newton demostró que la órbita elíptica de los planetas es una consecuencia de sus tres leyes del movimiento y de la ley del cuadrado inverso de la gravitación. Por lo tanto el comportamiento de los planetas podía ser explicado por las

mismas leyes que describen la caída de una manzana del árbol al suelo. Por primera vez en la historia quedó claro que los cuerpos celestiales no se comportaban de manera diferente a los objetos de nuestra vida cotidiana. En esta sección veremos como el movimiento de los planetas queda explicado usando sólo las leyes de Newton y las herramientas aprendidas en el calculo diferencial e integral. La solución a este problema es uno de los mayores triunfos de la inteligencia humana y del calculo en particular.

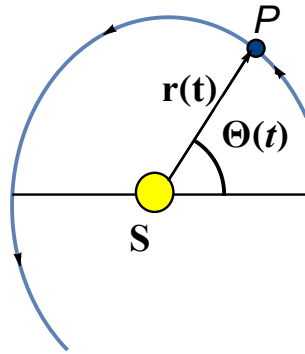


Figura 1.3: Trayectoria de P alrededor de S

Para empezar, supongamos que tenemos dos cuerpos, uno de masa m , que denotaremos por P y otro de masa M que denotaremos por S . Consideraremos que S representa el sol y P un planeta. Las leyes de Newton del movimiento se sostienen en un sistema de coordenadas con el origen situado en el centro de masas de uno de los cuerpos. Para simplificar, asumiremos que M es significativamente mayor que m , permitiéndonos asumir que el centro de coordenadas esta situado en el centro de masas de S . Elegimos el sistema de coordenadas en el plano complejo tal que S esta en el origen y $z(t)$ representa la posición de P con respecto a S en el tiempo t . Si expresamos $z(t)$ en coordenadas polares, entonces

$$z(t) = r(t)e^{i\theta(t)},$$

con r y θ funciones de valores reales. Para simplificar la notación, en general omitiremos la referencia explicita a t escribiendo

$$z = re^{i\theta}.$$

Bajo las leyes de gravitación de Newton la magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre los dos cuerpos es

$$|F| = \frac{GMm}{r^2}.$$

La fuerza gravitacional entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}u_r,$$

donde u_r es un vector unitario que expresa la dirección de actuación de la fuerza.

Como la gravedad es una fuerza atractiva y asumimos que S está en reposo en el origen, F se dirige desde P hacia el origen. Por lo tanto tenemos que

$$F = -\frac{GMm}{r^2}e^{i\theta},$$

donde $-e^{i\theta}$ es el vector unitario que apunta hacia S según la posición de P .

Además, asumimos que esta será la única fuerza que actúa sobre los dos cuerpos. Ahora si $v(t)$ y $a(t)$ representan la velocidad y la aceleración, respectivamente de P en el momento t , entonces por la 2ª ley del movimiento de Newton, $F = ma$, tenemos

$$ma = -\frac{GMm}{r^2}e^{i\theta}.$$

Siendo $k = GM$ esto queda simplificado a

$$a = -\frac{k}{r^2}e^{i\theta}. \quad (1.5)$$

Por otro lado como $z(t) = e^{i\theta}$ tenemos entonces que

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{dr}{dt} = ire^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} + e^{i\theta} \frac{dr}{dt}.$$

Y sabemos que

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(ire^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} + e^{i\theta} \frac{dr}{dt} \right) = \\ &= ire^{i\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} (ire^{i\theta}) + e^{i\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) + \frac{dr}{dt} \frac{d}{dt} (e^{i\theta}) = \\ &= ire^{i\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} \left(i^2 r e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} + ie^{i\theta} \frac{dr}{dt} \right) + e^{i\theta} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} ie^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} = \\ &= ire^{i\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} - r e^{i\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + ie^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + e^{i\theta} \frac{d^2r}{dt^2} + ie^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} = \\ &= -r e^{i\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + e^{i\theta} \frac{d^2r}{dt^2} + ie^{i\theta} \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right). \end{aligned}$$

Juntando este resultado con (1.5) tenemos que

$$-\frac{k}{r^2} = -r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 r}{dt^2} + i \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right). \quad (1.6)$$

La igualdad (1.6) implica que la parte real del miembro izquierdo de la ecuación es igual a la parte real del derecho y análogamente con la parte imaginaria. Esto es,

$$-\frac{k}{r^2} = -r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad (1.7)$$

$$0 = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt}. \quad (1.8)$$

Multiplicando ambos lados de (1.8) por r obtenemos

$$0 = r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2r \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt}.$$

Sin embargo reconocemos

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2r \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right),$$

luego tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0. \quad (1.9)$$

De (1.9) deducimos que

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c, \quad (1.10)$$

siendo c una constante cualquiera.

Para cualquier intervalo de tiempo de interés, tendremos que $r > 0$, esto es, S y P no están en el mismo punto del espacio, entonces, $r^2 > 0$.

Si $c = 0$, entonces $\frac{d\theta}{dt} = 0$ para todo t , que correspondería al caso relativamente no interesante donde θ es constante y P se mueve en una línea recta que pasa por S .

Los casos más interesantes son cuando $c < 0$ y $c > 0$. El primero implicaría que $\frac{d\theta}{dt} < 0$ para todo t y el segundo que $\frac{d\theta}{dt} > 0$ para todo t , es decir, de la elección del signo de c depende la orientación elegida para el sistema de coordenadas, es decir, la dirección en la que tomamos la medida de los ángulos positiva. Sin pérdida de generalidad asumimos $c > 0$, es decir, $\frac{d\theta}{dt} > 0$.

Vamos a usar ahora la sustitución $s = \frac{1}{r}$ para poner (1.7) de manera mas simple.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{s^2} \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{s^2} \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Entonces por (1.9) tenemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2} = cs^2, \quad (1.11)$$

y por lo tanto

$$\frac{dr}{dt} = -c \frac{ds}{d\theta}.$$

Aplicando diferenciación de nuevo tenemos que

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-c \frac{ds}{d\theta} \right) = -c \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{d\theta} \right) = -c \frac{d}{d\theta} \left(\frac{ds}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -c \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2s}{d\theta^2}.$$

Ahora usando (1.10) tenemos que

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -c^2 s^2 \frac{d^2s}{d\theta^2}. \quad (1.12)$$

Finalmente sustituyendo (1.11), (1.12) y $s = \frac{1}{r}$ en (1.7) tenemos que

$$-ks^2 = -\frac{1}{s} (cs^2)^2 - c^2 s^2 \frac{d^2s}{d\theta^2} = -c^2 s^3 - c^2 s^2 \frac{d^2s}{d\theta^2}.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por $-c^2 s^2$ tenemos que

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{k}{c^2}. \quad (1.13)$$

Esta es la ecuación diferencial a la que queríamos llegar. La solución a esta ecuación será una expresión para s en función de θ , teniendo en cuenta que r es ahora una función de s , exactamente, $r = \frac{1}{s}$. Esto nos dará a r en función de θ y nos permitirá determinar la trayectoria del movimiento de P . Observamos que sin embargo no hemos encontrado r en función de t . En otras palabras, seremos capaces de determinar la trayectoria del movimiento de P , pero no seremos capaces de determinar donde se encuentra P en un determinado momento t .

Para resolver (1.13), primero observamos que si $y(\theta)$ es solución de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,$$

entonces la función $x(\theta)$ dada por

$$x(\theta) = y(\theta) + \frac{k}{c^2},$$

satisface la ecuación

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = \frac{k}{c^2},$$

ya que,

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(y + \frac{k}{c^2} \right) + \left(y + \frac{k}{c^2} \right) = \frac{d^2y}{d\theta^2} + y + \frac{k}{c^2} = 0 + \frac{k}{c^2} = \frac{k}{c^2}.$$

Por lo tanto para resolver (1.13), sólo tenemos que resolver la ecuación

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = 0. \quad (1.14)$$

Es decir, solo tenemos que encontrar una función s de θ tal que

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} = -s. \quad (1.15)$$

Ahora (1.15) simplemente nos dice que s es una función con la propiedad de que su segunda derivada es ella misma con el signo negativo. Pero nosotros ya conocemos dos de esas funciones, que son, $\sin \theta$ y $\cos \theta$; más aun, para cualquier constantes A y B , la función $A \sin \theta + B \cos \theta$ también tiene esa propiedad. Pese a no justificarlo de manera formal debido a que este no es el fin del trabajo y con la intención de priorizar lo que aquí nos atañe, tomaremos como cierto que cualquier solución a (1.14) debe ser de la forma

$$A \sin \theta + B \cos \theta,$$

para algunas constantes A y B . De aquí deducimos que la solución a (1.13) tiene que ser de la forma

$$s = A \sin \theta + B \cos \theta + \frac{k}{c^2}, \quad (1.16)$$

para algunas constantes A y B . Buscamos ahora valor para las constantes A y B tal que

$$\left(\frac{ds}{d\theta} \right)_{\theta=0} = 0, \quad (1.17)$$

y

$$\left(\frac{d^2s}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} \leq 0. \quad (1.18)$$

Intuitivamente, esto significa que estamos buscando valores que satisfacen la condición para que s tenga un máximo local en $\theta = 0$. Es decir, estas condiciones se dan si r tiene un mínimo local en $\theta = 0$. Interpretamos esto como que elegimos A y B de manera que P está mas cerca de S cuando la trayectoria de P cruza el eje real de las abscisas. Ahora,

$$\frac{ds}{d\theta} = A \cos \theta - B \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{ds}{d\theta} \right)_{\theta=0} = A$$

y

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} = -A \sin \theta - B \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2s}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} = -B.$$

Finalmente las condiciones (1.17) y (1.18) se satisfacen si tomamos $A = 0$ y $B \geq 0$. En otras palabras, las condiciones (1.16) y (1.17) quedan satisfechas si

$$s = B \cos \theta + \frac{k}{c^2}, \quad (1.19)$$

donde $B \geq 0$. En términos de r (1.19) queda

$$\frac{1}{r} = B \cos \theta + \frac{k}{c^2} = \frac{c^2 B \cos \theta + k}{c^2},$$

es decir,

$$r = \frac{c^2}{c^2 B \cos \theta + k} = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + \frac{c^2 B}{k} \cos \theta}.$$

Ahora sea $\alpha = \frac{c^2}{k}$ y $\epsilon = \alpha B$, entonces nuestra expresión de r en función de θ queda reducida a

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (1.20)$$

donde $\epsilon \geq 0$ y $\alpha > 0$ son constantes.

Podemos observar por ejemplo cuando $\epsilon = 0$ y $\alpha = 2$, se obtiene la órbita circular de P . De radio constante $r = 2$.

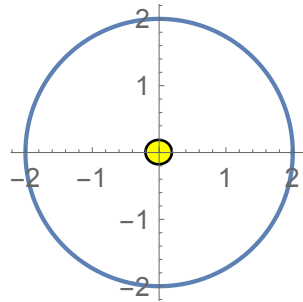


Figura 1.4: Órbita de P para $\alpha = 2$ y $\epsilon = 0$

Es importante observar que, como indicamos previamente, nuestra solución no nos da valores de r y de θ para valores específicos de t , es decir,

(1.20) nos da valores de r para cualquier valor de específico de θ . En otras palabras, nuestra solución no nos da la posición de P para un tiempo t dado, pero nos dice la posición de P en función de θ . En efecto, si dibujamos los puntos $z = re^{i\theta}$ para todos los valores de θ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con r dado en (1.20), entonces la curva resultado será la trayectoria de la órbita de P entorno a S . Por ejemplo si $\epsilon = 0$, entonces $r = \alpha$ para todo t y la órbita de P es una circunferencia de radio α y centro S , como vemos en la figura 1.4 para $\alpha = 2$. Observamos que como hemos asumido $\frac{d\theta}{dt} > 0$, el movimiento sobre la curva será en la dirección opuesta al de las agujas del reloj.

Si $0 < \epsilon < 1$, entonces $\epsilon \cos \theta$ tiene un valor máximo en ϵ cuando $\theta = 0$ y un valor mínimo en $-\epsilon$ cuando $\theta = -\pi$ o $\theta = \pi$.

Así el valor mínimo de r es

$$r(0) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon}$$

y el valor máximo es

$$r(-\pi) = r(\pi) = \frac{\alpha}{1 - \epsilon}.$$

Por lo tanto la órbita de P entorno a S es una curva cerrada con

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} r(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} \frac{\alpha}{1 + \epsilon} = \frac{\alpha}{2}$$

y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} r(\pi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} \frac{\alpha}{1 - \epsilon} = \infty.$$

Por lo tanto cuando ϵ se aproxima a 1 por la izquierda, el punto de mayor aproximación de P a S se contrae hacia $\frac{\alpha}{2}$, pero el punto en el que P está más alejado de S aumenta sin límite. Así, cuando ϵ varía de 0 a 1, la órbita de P se aplasta, cambiando de un círculo a ún ovalo. La figura 1.5 muestra la evolución de la órbita de P para $\alpha = 1$ y los valores de $\epsilon \in \{0, 0,7, 0,9\} \forall \theta \in [0, 2\pi]$. Debido a este comportamiento, ϵ es llamado la excentricidad** de la órbita de P .

**La excentricidad ϵ de una elipse es la razón entre su semidistancia focal (longitud del segmento que parte del centro de la elipse y acaba en uno de sus focos), denominada por la letra c , y su semieje mayor. Su valor se encuentra entre cero y uno.

$$\epsilon = \frac{c}{a}, \quad (0 \leq \epsilon \leq 1).$$

La excentricidad indica la forma de una elipse; una elipse será más redondeada cuanto más se aproxime su excentricidad al valor cero.

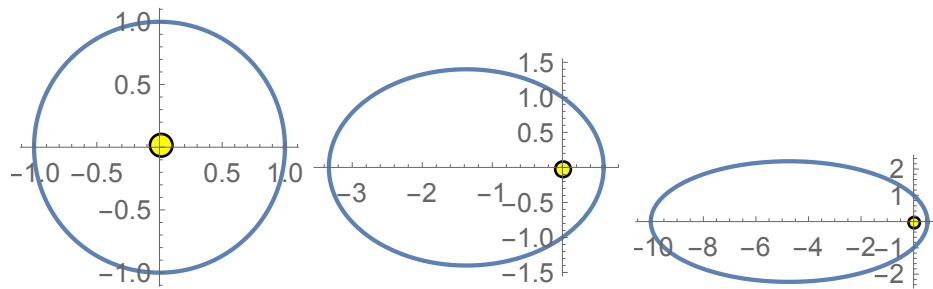


Figura 1.5: Órbita de P para $\alpha = 1$ y $\epsilon = 0, 0,7, 0,9$

Destacar que, en armonía con las leyes de Kepler, S se encuentra siempre en uno de los focos de la elipse.

Cuando $\epsilon = 1$, r no está definido para $\theta = -\pi$ y $\theta = \pi$. En efecto, en este caso

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} r(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{\alpha}{1 + \cos \theta} = \infty$$

y

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^+} r(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi^+} \frac{\alpha}{1 + \cos \theta} = \infty.$$

Por lo tanto la órbita de P no es cerrada; P hace su mayor aproximación a S cuando $\theta = 0$, en ese punto la distancia de P a S es de $\frac{\alpha}{2}$, y luego sigue una trayectoria que se aleja más y más de S . La situación para $\alpha = 1$ y $\epsilon = 1$ se muestra en la figura 1.6.

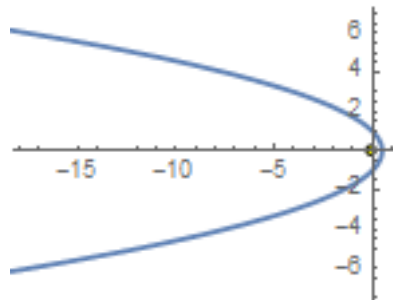


Figura 1.6: Órbita de P para $\alpha = 1$ y $\epsilon = 1$

Para $\epsilon > 1$ tenemos dos ángulos θ_1 y θ_2 , con

$$-\pi < \theta_1 < -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi,$$

tales que

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = -\frac{1}{\epsilon},$$

es decir, se anula en el denominador de (1.19).

Cuando $-\pi < \theta < \theta_1$ o $\theta_2 < \theta < \pi$ tenemos $1 + \epsilon \cos \theta \leq 0$. Ya que $\alpha > 0$ y $r \geq 0$ para todo θ , la órbita de P en este caso está definida por (1.19) cuando $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Además

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^+} r(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^+} \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta} = \infty$$

y

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^-} r(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^-} \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta} = \infty.$$

Así otra vez la órbita de P no es cerrada, P se aproxima a S a una distancia de $\frac{\alpha}{1 + \epsilon}$ cuando $\theta = 0$ y sigue una trayectoria que se aleja de S . Se puede observar en la figura 1.7.

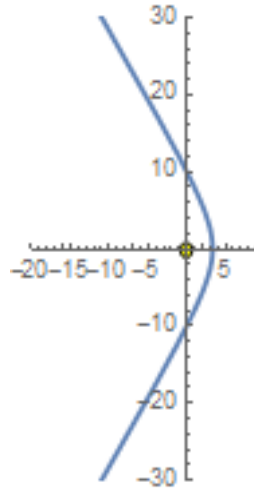


Figura 1.7: Órbita de P para $\alpha = 2$ y $\epsilon = 2$

No es difícil observar que si reescribimos la ecuación (1.20) en coordenadas rectangulares, siendo x e y respectivamente la parte real e imaginaria de $z = re^{i\theta}$, entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por lo tanto si z es un punto en la curva de la ecuación (1.20), tenemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\alpha}{1 + \frac{\epsilon x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \frac{\alpha \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon x}.$$

Dividiendo ambos lados por $\sqrt{x^2 + y^2}$ obtenemos

$$1 = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon x},$$

y entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha - \epsilon x.$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\alpha\epsilon x + \epsilon^2 x^2,$$

de donde obtenemos que

$$(1 - \epsilon^2)x^2 + y^2 + 2\alpha\epsilon x - \alpha^2 = 0. \quad (1.21)$$

Por consiguiente si las coordenadas polares de z satisfacen (1.20), entonces las coordenadas rectangulares de z deben satisfacer (1.21). Más aun, sabemos por la geometría analítica que la curva en el plano con la ecuación

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (1.22)$$

donde a, b, c, d, e y f son todas constantes, es una elipse si $b^2 - 4ac < 0$, una parábola si $b^2 - 4ac = 0$, y una hipérbola si $b^2 - 4ac > 0$. Por esto, llamamos al número

$$D = b^2 - 4ac$$

discriminante de (1.22). En el caso de (1.21), tenemos que

$$D = 0 - 4(1 - \epsilon^2) = -4(1 - \epsilon^2).$$

Por consiguiente, $D < 0$ cuando $0 \leq \epsilon < 1$, $D = 0$ cuando $\epsilon = 1$ y $D > 0$ cuando $\epsilon > 1$. Como ya hemos visto que la órbita de P es una circunferencia cuando $\epsilon = 0$ (un caso particular de una elipse), tenemos ahora una clasificación para las órbitas de P entorno a S en términos de la excentricidad de ϵ :

Excentricidad	Órbita de P
$\epsilon = 0$	Circunferencia
$0 < \epsilon < 1$	Elipse
$\epsilon = 1$	Parábola
$\epsilon > 1$	Hipérbola

Cabe recalcar que, en conjunto, estas curvas son todas conocidas como secciones cónicas.

Hemos visto que comenzando con las suposiciones de Newton sobre las leyes de la gravitación y su segunda ley del movimiento, hemos concluido que la órbita de un cuerpo P entorno a otro cuerpo S va a ser una sección cónica. Aunque increíble el logro de Newton para la física, las matemáticas y la filosofía este no es el final de la historia. En esta sección sólo hemos trabajado con dos cuerpos y tomando como única fuerza entre ellos la atracción gravitatoria, sin embargo, en la realidad, el modelo de nuestro sistema solar tendría que tener en cuenta el sol, nueve planetas, muchas lunas, asteroides y cometas.

El problema del movimiento para tres cuerpos o más que interactúan entre ellos debido a su atracción gravitatoria ha supuesto un reto para los matemáticos desde los tiempos de Newton. Sin embargo, nosotros sabemos que este problema, conocido como *el problema de los n-cuerpos*, no puede ser resuelto en general. Desde el trabajo de Henri Poincaré (1854-1912) los avances en este problema han sido cualitativos y cuantitativos respecto a la descripción de las órbitas, pero no respecto a la solución analítica. En efecto fue Poincaré el primero en mostrar que incluso en el *simple* caso de los tres cuerpos, las órbitas pueden ser altamente complejas, revelando la sensibilidad a las condiciones iniciales que hacen imposible la predicción sobre la futura trayectoria de cualquier cuerpo dado. En los siguientes capítulos nos introduciremos en estos problemas.

1.6. Solución numérica.

Antes de comenzar este apartado, hay que decir que hemos decidido recuperar la notación con flechas dada su influencia a la hora de entender bien los métodos numéricos, es decir, para diferenciar bien cuando se trata de vectores y cuándo no.

Partimos de las ecuaciones del movimiento

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Dadas las fuerzas, el problema de integración no es para nada trivial. Se trata de una ecuación diferencial en la que la cantidad a integrar depende de las magnitudes que queremos hallar. En la mayoría de los problemas no existe solución analítica como ya hemos explicado antes, un ejemplo es el problema de los tres cuerpos. Sin embargo, esto no quiere decir que no podamos hallar la solución a las ecuaciones del movimiento, existen diferentes técnicas que nos permiten aproximar una solución con la precisión que se desee mediante el uso de ordenadores. Entre estos métodos destacamos los métodos numéricos que nos van a proporcionar una lista de valores de las variables para unos instantes de tiempo t .

En esta sección vamos a utilizar dos métodos, el método de Euler y el método de Runge Kutta (R-K) de 4 etapas. Estudiaremos un caso práctico en el que conoceremos la solución exacta, para posteriormente comparar ambos métodos. De todas formas, también disponemos del comando *ND-Solve* en *Mathematica* que nos permite conocer una aproximación numérica sin necesidad de implementar el método. No nos centraremos en explicar en que consisten estos métodos, en los apéndices aparece una breve explicación de cada método y el programa escrito en *Mathematica*.

Dado un intervalo de tiempo muy corto podemos suponer que la velocidad y la aceleración son constantes, así, dada la posición, la velocidad y la aceleración en un instante concreto, podemos hallar la posición y velocidad en un instante posterior. Dadas la nueva posición y velocidad hallamos el nuevo valor de la fuerza y así la aceleración. Luego repetimos el proceso cuantas veces queramos.

Escribimos las ecuaciones del movimiento como sigue:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \end{cases}$$

Como bien es sabido, debemos tener cuidado ya que si la aproximación no es buena los errores se van acumulando y podemos acabar con una posición y velocidad muy incorrectas, es decir, en primera instancia, si la aproximación no es buena el valor de la posición y la velocidad será ligeramente errónea pero tras varias iteraciones ese error se acumula y obtenemos valores que distan mucho de la realidad.

Vamos a analizar un caso concreto:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -kx. \end{cases}$$

En primer lugar calculamos la solución analítica, el sistema se reduce a resolver la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $x'' = -kx$. Es fácil ver que una solución es $x = \cos(\sqrt{k} t) + C$. Hemos decidido tomar $k = 1$ para ver un ejemplo concreto.

Vamos a comparar ahora ambos métodos, el de Euler y el de Runge Kutta, para ello vamos a ver las diferencias entre las gráficas de la solución analítica y las gráficas de los métodos numéricos, así como las diferencias entre los diagramas de fases.

Empezamos con pasos de tamaño 0,1.

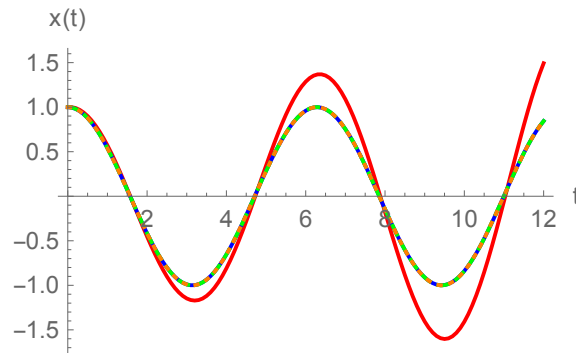


Figura 1.8: En azul método de R-K, en verde y discontinuo solución exacta, en naranja y a puntos *NDSolve* y en rojo método de Euler.

Como se puede ver, el método de Runge Kutta se ajusta de manera muy buena a la realidad, mientras que el método de Euler no. En el método de Euler se ve a la perfección lo mencionado anteriormente, es decir, como empieza siendo muy buena aproximación pero luego el error se va acumulando hasta que se dispara.

En la figura 1.8 se muestra también el resultado obtenido con el comando *NDSolve* del *Mathematica*, que claramente es tan bueno como el obtenido con R-K. Es importante notar que el comando *NDSolve* usa algoritmos numéricos de orden superior y paso variable que en general, no podemos controlar, es decir, si no se añaden especificaciones concretas, es el propio programa el que decide que método utilizar. Veamos también el diagrama de fases de los tres métodos en la figura 1.9.

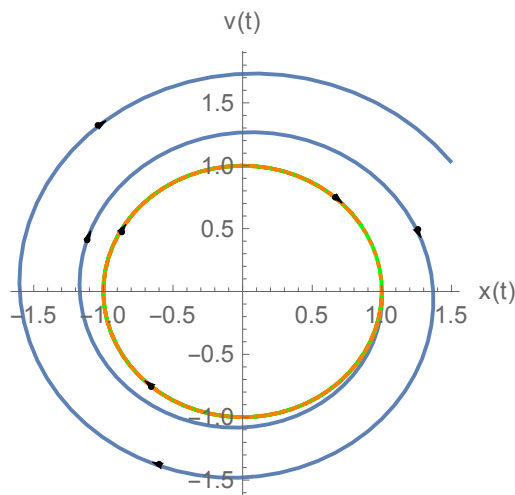


Figura 1.9: En verde el método de R-K, en azul método de Euler y en naranja y punteado el *NDSolve*.

Vemos como tanto la aproximación obtenida con el método de R-K como con el comando *NDSolve* se mantienen en la circunferencia de radio uno, sin embargo, la aproximación obtenida con el método de Euler se va alejando cada vez más, debido a la acumulación del error.

Veamos ahora qué ocurre si tomamos pasos de tamaño 0,05. El método de R-K ya es muy bueno y no se notará la mejoría, pero veamos con el de Euler.

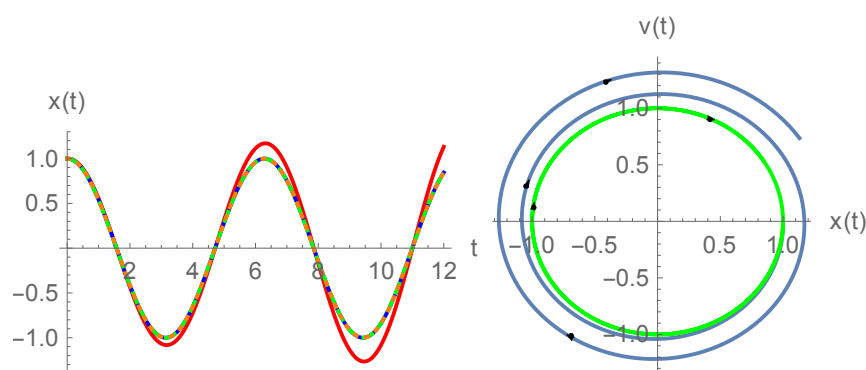


Figura 1.10: Gráfico y diagrama de fases para paso más pequeño.

De nuevo, el método de R-K se ajusta fielmente a la realidad, en esta ocasión el método de Euler se ajusta mejor que en el caso anterior, sin embargo, otra vez vemos claramente en el diagrama de fases cómo, aunque mas tarde, el error se vuelve a acumular alejando la aproximación respecto a la obtenida con R-K.

En conclusión, recomendar el método de Runge Kutta de cuatro etapas para este tipo de aproximaciones numéricas respecto al método de Euler.

Capítulo 2

Problema de los tres cuerpos

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos el movimiento de tres cuerpos en el espacio bajo la influencia de la atracción gravitatoria mutua. El problema consiste en hallar el movimiento a lo largo del tiempo de estos cuerpos dadas únicamente sus posiciones y velocidades en un determinado momento t_0 .

En general, el movimiento de los cuerpos tiene lugar en tres dimensiones y no hay requisitos ni para sus masas ni para las condiciones iniciales. Por todo esto nos referimos a esto como *El problema general de los tres cuerpos*.

Frente al *problema de los dos cuerpos*, el añadir un cuerpo extra vuelve este problema demasiado complicado como para obtener el mismo tipo de soluciones. Este tipo de soluciones no existen porque el movimiento de los tres cuerpos es en general impredecible, esto hace que *el problema de los tres cuerpos* sea uno de los mayores desafíos en la historia de la ciencia.

En la mecánica celeste los ejemplos típicos del *problema de los tres cuerpos* son los sistemas: Sol-planeta-planeta, Sol-planeta-luna y Sol-planeta-asteroide. El último caso puede ser simplificado ya que la masa del asteroide es despreciable frente a la masa del Sol o del planeta, esto implica que teóricamente podemos omitir la influencia gravitacional del asteroide sobre el Sol o el planeta. Si se dan estas condiciones, *el problema general de los tres cuerpos* se transforma en *el problema de los tres cuerpos restringido* o P3CR. En este último caso se dan dos opciones, que los dos cuerpos con masas dominantes se muevan alrededor de sus centros de masas en órbitas elípticas o que se muevan en órbitas circulares. Estos corresponden a *el problema de los tres cuerpos restringido circular o elíptico*. Hay que recalcar que como veremos luego, el más estudiado ha sido el caso circular (P3CRC).

El problema general de los tres cuerpos ha sido estudiado por más de trescientos años. En este capítulo daremos una pequeña vista global de la historia de este problema, a continuación nos adentraremos en como se puede formular, para luego exponer los estudios analíticos y numéricos que se han

realizado a lo largo de la historia.

2.2. Un breve camino por la historia

Hemos decidido dividir esta sección en dos partes, siguiendo la metodología realizada por otros autores. Por un lado resumiremos el periodo desde la publicación de *Principia* [10] por Newton en 1687 hasta la publicación de *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [11] por Poincaré en 1892 (volúmenes 1 y 2) y en 1899 (volumen 3). Por otro lado, nos centraremos en el desarrollo que ha habido desde 1900 hasta hoy.

2.2.1. De Newton a Poincaré

El problema de los tres cuerpos fue formulado por Newton en su libro *Principia* [10], donde él consideraba el movimiento de la tierra y la luna alrededor del Sol. Una forma especial del problema fue propuesta por Euler en 1767 [12]. Él consideró tres cuerpos de masas arbitrarias situados en una línea recta. Euler mostró que los cuerpos siempre se mantendrían alineados para unas condiciones iniciales apropiadas, y que esa línea giraría alrededor del centro de masas de los cuerpos llevando así a estos a girar en un movimiento periódico a lo largo de elipses. En 1772, cinco años más tarde, Lagrange [13] encontró una segunda clase de órbitas periódicas para el problema, mostró que si los cuerpos se encuentran de tal forma que generan un triángulo equilátero, se moverán a lo largo de elipses para una ciertas condiciones iniciales, manteniéndose siempre en los vértices de un triángulo equilátero. Las soluciones dadas por Euler y Newton son soluciones particulares al *problema general de los tres cuerpos* y hablaremos más sobre ellas en posteriores secciones.

Euler fue el primero en formular el P3CRC en un sistema de coordenadas rotacional. Esto supuso un avance importante en el estudio del problema. Lagrange también estudió el P3CRC, deduciendo que tenía cinco puntos de equilibrio (conocidos ahora como los puntos de Lagrange).

Contribuciones importantes al P3CRC fueron hechas por Jacobi, quien usó el sistema de coordenadas rotacional introducido por Euler para demostrar la existencia de la integral de movimiento. Después, la integral fue usada por Hill [14] para determinar el movimiento de un asteroide en el problema y para introducir las denominadas curvas de velocidad cero (CVC). Hill consideró un caso especial del P3CRC, donde dos masas son mucho menores (conocido como *el problema de Hill*), y así descubrió una nueva clase de soluciones periódicas. Tras unos doscientos años desde la formulación original de Newton, Hill desarrolló su teoría lunar, la cual tras ciertas modificaciones hechas por Brown es todavía hoy usada en la mecánica celeste [15].

En la segunda mitad del siglo diecinueve, Poincaré estudió y avanzó en la solución del *problema de los tres cuerpos*. Su gran libro compuesto por

tres volúmenes *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [11] originalmente publicado en 1892-99, contiene la mayoría de sus contribuciones al estudio del P3CRC. Poincaré desarrolló unos cuantos métodos cualitativos para la resolución de ecuaciones diferenciales, que usó para estudiar e identificar posibles órbitas periódicas a la par que demostraba la no integrabilidad del sistema de ecuaciones que describen el *problema de los tres cuerpos*. Los nuevos métodos de Poincaré permitieron identificar la imposibilidad de predicción que supone el problema y observar las primeras manifestaciones de un nuevo fenómeno, que es hoy comúnmente conocido como *Caos*.

2.2.2. De Poincaré a la actualidad

Poincaré (1892) estudió el problema de Hill y generalizó la definición de Hill sobre órbitas periódicas. El trabajo de Poincaré sobre la existencia de soluciones periódicas en un sistema dinámico con un grado de libertad fue extendido por Bendixson [16](1901). Bendixson formuló y probó un teorema que hoy en día es conocido como el teorema de Poincaré-Bendixson, el cual nos da un criterio para la existencia de soluciones periódicas en estos sistemas. El trabajo de Poincaré llevó a la búsqueda sistemática de órbitas periódicas en *el problema de los tres cuerpos* y a su clasificación a Darwin [17], Moulton [18] y Strömberg y Pedersen [19] (1897-1922), así como al estudio de la estabilidad de estas que fue iniciado por Poincaré y seguido por Levi-Civita [20] y Lyapunov [21] entre 1901 y 1907.

Otras generalizaciones y extensiones de las ideas de Poincaré sobre la estabilidad y periodicidad de las órbitas fueron propuestas por Birkhoff [22](1912), que entre otras cosas probó *el último teorema geométrico* formulado por Poincaré. El problema de Poincaré-Birkhoff dice que hay infinitas órbitas periódicas cercanas a una órbita periódica estable, esto implica también la existencia de órbitas cuasiperiódicas*.

En la búsqueda de soluciones periódicas y no periódicas al problema, se descubrió que las ecuaciones diferenciales que describen el problema contienen singularidades bajo las cuales la solución finaliza súbitamente. Un ejemplo de estos desenlaces son las colisiones entre dos o tres cuerpos; que denominamos *singularidades por colisión*. Una vez conscientes de su existencia, el siguiente paso era eliminarlas mediante un proceso llamado de regularización. Painlevé [23] aportó un gran trabajo en este campo entre los años 1896 y 1897. Determinó que las colisiones eran la única singularidad y que esas colisiones podían ser excluidas por un conjunto de ciertas condiciones iniciales para las cuales las ecuaciones de movimiento del problema podrían ser integrables usando series de potencias. El problema de la regu-

*Un movimiento cuasiperiódico es el tipo de evolución temporal que presenta un fenómeno físico que sin ser periódico repite una y otra vez condiciones arbitrariamente cercanas a una posición previa del sistema. Un fenómeno cuasiperiódico oscila una y otra vez mostrando cada cierto tiempo un aspecto similar al que tuvo el sistema previamente.

larización de las colisiones entre dos cuerpos fue investigado principalmente por Levi-Civita [20], Bisconcini [24] y Sundman [25] entre los años 1907 y 1912. Siegel y Moser también estudiaron las triples colisiones y formularon teoremas que permiten establecer condiciones para estas colisiones [26].

Tras darse cuenta de que la posibilidad de encontrar soluciones al problema de forma parecida era improbable los investigadores consideraron buscar soluciones en series infinitas. Delaunay [27] usó variables canónicas en la teoría de la perturbación del problema de los tres cuerpos. Siguiendo este trabajo, Lindstedt [28] y Gylden [29] introdujeron series infinitas y estudiaron los radios de convergencia, sin embargo, no fueron capaces de presentar una demostración formal de la convergencia. Poincaré aclaró los conceptos de convergencia y divergencia de series infinitas y expuso ciertas imperfecciones en los métodos desarrollados por estos autores. Painlevé también intentó encontrar soluciones al problema en series infinitas pero falló como sus predecesores, sin embargo, predijo que estas soluciones eran posibles, por lo menos en principio.

Efectivamente, Painlevé estaba en lo cierto y Sundman encontró una solución completa al *problema de los tres cuerpos* dada en términos de expansión en serie de potencias en 1912. Desafortunadamente la solución propuesta por Sundman convergía muy despacio por lo que no se podía usar para ninguna aplicación práctica. Hay que tener en cuenta que la existencia de la solución de Sundman no contradice la imposibilidad de predecir el movimiento de los tres cuerpos planteada por Poincaré, ya que la solución de Sundman no determina directamente la trayectoria de cualquiera de los tres cuerpos.

El sistema de tres cuerpos aquí considerado es un sistema Hamiltoniano, lo que significa que la energía total se conserva. En general, los sistemas Hamiltonianos se pueden dividir en dos tipos: integrables y no integrables. Poincaré expresó las ecuaciones diferenciales del problema en la forma Hamiltoniana y estudió las integrales del movimiento [30]. A pesar de lo dicho anteriormente, aunque los sistemas son principalmente no integrables pueden tener soluciones periódicas dependiendo de las condiciones iniciales. Poincaré, Birkhoff y otros consideraron soluciones cuasiperiódicas en muchos sistemas. La pregunta fundamental que ellos trataron de contestar fue: ¿Qué ocurre con las soluciones de un sistema Hamiltoniano integrable cuando las ecuaciones que lo gobiernan son algo perturbadas? La primera respuesta correcta a esta pregunta fue dada por Kolmogorov [31] en el año 1954 pero sin una demostración formal, la cual fue posteriormente obtenida por Moser [32] en 1962 y por Arnold [33] en 1963 de manera totalmente independiente. El teorema formal es hoy en día conocido como el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM).

Como hemos mencionado anteriormente, las órbitas periódicas fueron descubiertas en el pasado usando métodos analíticos. Tras el descubrimiento de los ordenadores y mediante el uso de simulaciones con éstos, Hénon [34]

y Szebehely [35] encontraron muchas órbitas periódicas y las clasificaron entre los años 1965 y 1974. Un trabajo reciente realizado por Suvakov y Dmitra'sinovic [36] en el año 2013 muestra que todavía se están descubriendo órbitas periódicas.

Hoy en día la aplicación al problema de los tres cuerpos ha sido extendida a muchos más casos, gracias al progreso, cada día se descubren nuevas planetas y estrellas con propiedades muy distintas a lo que conocíamos hasta hoy, dando lugar a sistemas distintos como estrella-estrella-planeta y agujero negro-estrella-planeta etc.

2.3. Formulación del problema de los tres cuerpos

2.3.1. Mecánica Newtoniana

En *el problema general de los tres cuerpos*, tres cuerpos de masa arbitraria se mueven en el espacio de tres dimensiones debido a su atracción gravitatoria mutua. Sin embargo, si el movimiento de los cuerpos está en un plano el problema se llama *El problema general plano de los tres cuerpos*. En esta situación usaremos la teoría de la gravedad de Newton para describir la interacción gravitatoria de los tres cuerpos.

Como hemos comentado previamente para resolver el problema de manera completa necesitamos determinar las posiciones de los cuerpos a lo largo del tiempo de forma única, partiendo de sus posiciones y velocidades en un momento determinado t_0 .

Denotaremos las tres masas como M_i y sus posiciones respecto al origen del sistema de coordenadas cartesianas por los vectores \vec{R}_i para $i = 1, 2, 3$, respectivamente. De esta manera la posición de un cuerpo respecto a otro vendrá dada por $\vec{r}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i$ donde $r_{ij} = -r_{ji}$ para $i, j = 1, 2, 3$.

Siendo la única fuerza que actúa sobre los cuerpos la fuerza gravitacional de Newton, las ecuaciones del movimiento quedan descritas de la siguiente forma:

$$M_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = G \sum_{j=1}^3 \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}, \quad (2.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Notar que ahora, a diferencia de lo visto en el capítulo uno, cuando relatábamos la solución analítica al problema de los dos cuerpos, \vec{r}_{ij} no es un vector unitario, de ahí que en este caso tengamos un r_{ij}^3 en el denominador y no al cuadrado.

En definitiva, tenemos un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que pueden ser escritas de manera explícita en términos de las componentes del vector \vec{R}_i . De esta manera tendríamos 9 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Dado que cada una de ellas puede convertirse en dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer

orden, tendríamos un total de 18 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describen al completo *el problema general de los tres cuerpos*. Si las integrales del movimiento existen podemos proceder a resolverlas mediante el uso de cuadraturas **. Por lo tanto, vamos a determinar ahora el número de integrales del movimiento para *el problema general de los tres cuerpos*.

2.3.2. Integrales del movimiento

Sea la ecuación (2.1) y teniendo en cuenta la condición de simetría $r_{ij} = -r_{ji}$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^3 M_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = 0, \quad (2.2)$$

integrando,

$$\sum_{i=1}^3 M_i \frac{d\vec{R}_i}{dt} = \vec{C}_1, \quad (2.3)$$

donde el vector \vec{C}_1 es constante. Integrando otra vez:

$$\sum_{i=1}^3 M_i \vec{R}_i = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2, \quad (2.4)$$

siendo \vec{C}_2 otro vector constante.

Dado que el centro de masas del sistema queda definido por

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^3 M_i \vec{R}_i}{\sum_{i=1}^3 M_i},$$

la ecuación (2.4) determina el movimiento del centro de masas, mientras que la ecuación (2.3) nos muestra que se mueven a velocidad constante. Los vectores \vec{C}_1 y \vec{C}_2 son las integrales del movimiento, por lo tanto tenemos 6 integrales del movimiento considerando las componentes de esos vectores.

Por otro lado la conservación del momento angular sobre el centro del sistema de coordenadas cartesianas nos da otras integrales para *el problema general de los tres cuerpos*. Tomamos el producto vectorial de la ecuación (2.2) con \vec{R}_i y obtenemos:

$$\sum_{i=2}^3 M_i \vec{R}_i \times \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = 0, \quad (2.5)$$

**El término cuadratura numérica (a menudo abreviado a cuadratura) es más o menos sinónimo de integración numérica, especialmente si se aplica a integrales de una dimensión a pesar de que para el caso de dos o más dimensiones (integral múltiple) también se utiliza.

integrando obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^3 M_i \vec{R}_i \times \frac{d\vec{R}_i}{dt} = \vec{C}_3, \quad (2.6)$$

siendo \vec{C}_3 un vector constante. Así obtenemos tres integrales más del movimiento.

Otra integral de movimiento está relacionada con la conservación de la energía total. Siendo la energía cinética:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 M_i \frac{d\vec{R}_i}{dt} \cdot \frac{d\vec{R}_i}{dt}, \quad (2.7)$$

y la energía potencial:

$$E_{pot} = -\frac{G}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{M_i M_j}{r_{i,j}}, \quad (2.8)$$

sabemos que $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$, luego tenemos que:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 M_i \frac{d\vec{R}_i}{dt} \cdot \frac{d\vec{R}_i}{dt} - \frac{G}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{M_i M_j}{r_{i,j}} \equiv C_4, \quad (2.9)$$

siendo C_4 una constante.

En conclusión, hay 10 integrales (clásicas) del movimiento para *el problema de los tres cuerpos*, lo que significa que el conjunto de 18 ecuaciones diferenciales ordinarias se puede reducir a 8.

Se pueden calcular otras dos integrales del movimiento relacionadas con la eliminación del tiempo y la eliminación del denominado *nodo ascendente*. Sin embargo, estas se alejan de las nociones de las que disponemos en este trabajo. Para más información se puede consultar los estudios realizados por Szebehely [35] y Barrow-Green [37] al respecto. Es decir, tenemos un total de 12 integrales del movimiento, luego, finalmente el sistema de 18 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se puede reducir a 6. Ha sido probado que no existen mas integrales del movimiento independientes de las anteriores por matemáticos como Bruns [38], Poincaré [11], Whittaker [39], Szebehely [35], Valtonen y Karttunen [40].

Dado que la $E_{cin} > 0$ y la $E_{pot} < 0$, la E_{tot} o C_4 puede ser positiva negativa y cero, luego C_4 puede ser usada para clasificar los movimientos del *problema general de los tres cuerpos*.

2.3.3. Mecánica Hamiltoniana

La formulación estándar del *problema general de los tres cuerpos* presentada en la sección anterior ha sido sustituida por la formulación Hamiltoniana

por algunos matemáticos, entre otros Poincaré. Hay otras posibles variantes como las definidas y usadas por Siegel y Moser, sin embargo, nosotros sólo consideraremos la Hamiltoniana.

Empezamos tomando $G=1$ en las formulas (2.1) y (2.8). Además, escribimos $\vec{R}_i = (R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}) \equiv q_{ki}$, donde R_{1i} , R_{2i} y R_{3i} son las componentes del vector \vec{R}_i en el sistema de coordenadas cartesianas, y $k = 1, 2$ y 3 . Usando esta notación, definimos el momento p_{ki} como

$$p_{ki} = M_i \frac{dq_{ki}}{dt}, \quad (2.10)$$

y la energía cinética como

$$E_{cin} = \sum_{k,i=1}^3 \frac{p_{ki}^2}{2M_i}. \quad (2.11)$$

Entonces, calculamos el Hamiltoniano $H = E_{cin} + E_{pot}$ que nos permite escribir las ecuaciones del movimiento en la siguiente forma Hamiltoniana

$$\frac{dq_{ki}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{ki}}, \quad \frac{dp_{ki}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_{ki}}. \quad (2.12)$$

Esas ecuaciones que forman de nuevo un conjunto de 18 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de manera equivalente a las dadas por la ecuación (2.1).

2.4. Soluciones de Euler y Lagrange

Como ya hemos mencionado anteriormente, Euler [12] (1767) y Lagrange [13] (1772) obtuvieron dos clases diferentes de soluciones periódicas al problema general de los tres cuerpos, considerando el posicionamiento lineal y triangular de los cuerpos respectivamente. En ambos casos demostraron que los cuerpos se mueven describiendo órbitas elípticas. A pesar de que la masa de los cuerpos es totalmente arbitraria, la posición de los mismos no lo es, por esto, las soluciones propuestas por Lagrange y Euler se caracterizan como soluciones particulares. La existencia de estos posicionamientos especiales juegan un rol importante en el estudio de estabilidad de las órbitas.

En primer lugar, partiendo de (2.1) y teniendo en cuenta que $\vec{r}_{ij} = (x_j - x_i)$ y que x_i son los vectores \vec{R}_i nos queda la ecuación:

$$M_i x_i'' = -G \sum_{i \neq j} M_i M_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3}, \quad (2.13)$$

para $i, j = 1, 2, 3$.

Omitiendo la constante gravitacional ($G \equiv 1$), sustituyendo en (2.13) para el caso de tres cuerpos obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1'' = -M_2 \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3} - M_3 \frac{x_1 - x_3}{|x_1 - x_3|^3}, \\ x_2'' = -M_3 \frac{x_2 - x_3}{|x_2 - x_3|^3} - M_1 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3}, \\ x_3'' = -M_1 \frac{x_3 - x_1}{|x_3 - x_1|^3} - M_2 \frac{x_3 - x_2}{|x_3 - x_2|^3}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Con el centro de masas en el origen, la posición de los vectores viene dada por

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 = 0. \quad (2.15)$$

Las tres ecuaciones de movimiento para los tres cuerpos tienen su forma más simétrica cuando las expresamos en términos de sus vectores de posición relativos s_1, s_2, s_3 definidos por:

$$\begin{cases} s_1 = x_3 - x_2, \\ s_2 = x_1 - x_3, \\ s_3 = x_2 - x_1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Estas variables están relacionadas por

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad (2.17)$$

como se puede ver en la figura 2.1.

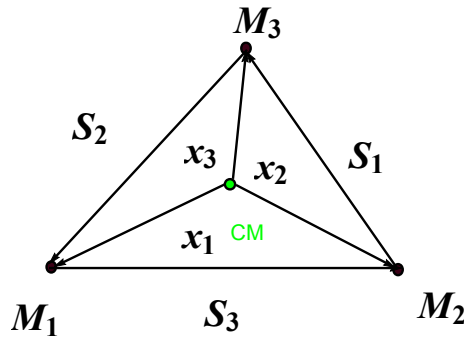


Figura 2.1: Vectores de posición para el problema de los tres cuerpos.

Usando (2.15) y (2.16) para x_k y sumando y restando términos convenientemente elegidos, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{cases} Mx_1 = M_3s_2 - M_2s_3, \\ Mx_2 = M_1s_3 - M_3s_1, \\ Mx_3 = M_2s_1 - M_1s_2, \end{cases} \quad (2.18)$$

donde $M = M_1 + M_2 + M_3$.

Necesitamos (2.18) para relacionar la solución en términos de las variables simétricas s_k con el centro de masas fijado.

Usando las definiciones (2.16) y las ecuaciones (2.14) y sumando y restando nuevamente los términos convenientes obtenemos las ecuaciones del movimiento en forma simétrica

$$\begin{cases} s_1'' = -M \frac{s_1}{|s_1|^3} + M_1\mathfrak{G}, \\ s_2'' = -M \frac{s_2}{|s_2|^3} + M_2\mathfrak{G}, \\ s_3'' = -M \frac{s_3}{|s_3|^3} + M_3\mathfrak{G}, \end{cases} \quad (2.19)$$

donde

$$\mathfrak{G} = \frac{s_1}{|s_1|^3} + \frac{s_2}{|s_2|^3} + \frac{s_3}{|s_3|^3}. \quad (2.20)$$

Esta notación fue introducida por primera vez por Broucke y Lass [41] en 1973. Es curioso que en dos siglos de investigación sobre *el problema de los tres cuerpos* nadie se había percatado de esta formulación dada su notable simplicidad. Vamos a ver a continuación como nos proporciona una forma directa para la comprensión de las soluciones exactas al *problema de los tres cuerpos*.

2.4.1. Soluciones triangulares

Notar que si $\mathfrak{G} = 0$ el sistema de ecuaciones (2.19) se puede separar en un conjunto de tres ecuaciones similares de dos cuerpos. Comparando (2.17) y (2.20), vemos que esto ocurrirá si

$$|s_1|^3 = |s_2|^3 = |s_3|^3, \quad (2.21)$$

es decir, si los cuerpos están situados en los vértices de un triángulo equilátero. Luego podemos expresar dos *lados* del triángulo en términos de un tercero de la siguiente forma

$$\begin{cases} s_1 = s_3 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})s_3, \\ s_2 = s_3 e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})s_3. \end{cases} \quad (2.22)$$

La relación triangular se mantendrá, luego s_1 y s_2 están determinados por s_3 para todo el tiempo. Esto es consistente con $\mathfrak{G} = 0$ en (2.19). Luego, hemos encontrado una familia de soluciones que se reduce a un problema de dos cuerpos de Kepler^{***}. Como hemos expresado en (2.22), las tres partículas permanecen en los vértices de un triángulo equilátero, pero el triángulo puede cambiar su tamaño y orientación en el plano según como se mueven las partículas. La solución del triángulo equilátero fue descubierta por Lagrange. Observar que es completamente independiente de la masa de las partículas.

Para describir las órbitas de las partículas respecto del centro de masas, sustituimos (2.22) en (2.18) y resolvemos

$$\begin{cases} Mx_1 = \frac{1}{2}[-2M_2 - M_3 + iM_3\sqrt{3}]s_3, \\ Mx_2 = \frac{1}{2}[2M_1 + M_3 + iM_3\sqrt{3}]s_3, \\ Mx_3 = \frac{1}{2}[M_1 - M_2 - i(M_1 + M_2)\sqrt{3}]s_3. \end{cases} \quad (2.23)$$

Esto muestra que las partículas siguen dos órbitas similares que difieren sólo en tamaño y orientación que vienen determinadas por las masas. Cabe señalar que el vector de aceleración de cada partícula apunta hacia el centro de masas. Las órbitas del movimiento elíptico se muestran en la figura 2.2.

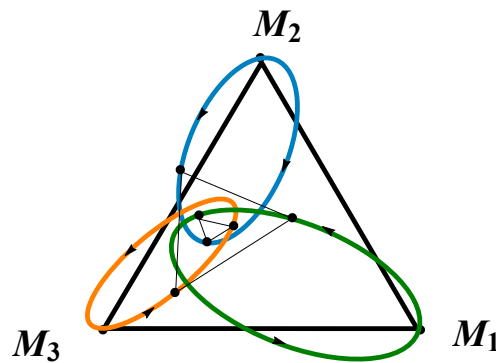


Figura 2.2: Solución del triángulo equilátero de Lagrange.

^{***}El problema de Kepler consiste en describir el movimiento de una partícula sujeta a una fuerza central que varía de manera inversa al cuadrado de la distancia desde el centro de la fuerza. Es el comienzo de las investigaciones en la teoría astronómica, así como en la mecánica celeste. Básicamente el problema consiste en resolver la ecuación del movimiento $mr'' = mv' = -\frac{k}{r^2}\vec{r}$.

2.4.2. Soluciones colineales

Euler encontró otra solución exacta para las ecuaciones de los tres cuerpos donde todas las partículas se encuentran en una línea separadas por distancias en relación fija. Para determinar las condiciones generales para tal solución, supongamos que la partícula 2 se encuentra entre las otras dos partículas. Luego la condición (2.17) se satisface escribiendo

$$s_1 = \lambda s_3, \quad s_2 = -(1 + \lambda)s_3 \quad (2.24)$$

donde λ es una escalar positivo a determinar. Ahora podemos eliminar \mathfrak{G} en las ecuaciones (2.19) para obtener así

$$\begin{cases} s_1'' + M \frac{s_1}{|s_1|^3} = \frac{M_1}{M_3} \left(s_3'' + M \frac{s_3}{|s_3|^3} \right), \\ s_2'' + M \frac{s_2}{|s_2|^3} = \frac{M_2}{M_3} \left(s_3'' + M \frac{s_3}{|s_3|^3} \right). \end{cases} \quad (2.25)$$

Introduciendo (2.24) en estas ecuaciones para eliminar s_1 y s_2 obtenemos

$$\begin{cases} (M_2 + M_3(1 + \lambda))s_3'' = -(M_2 + M_3(1 + \lambda)^{-2}) \frac{M s_3}{|s_3|^3}, \\ (M_1 - M_3\lambda)s_3'' = -(M_1 - M_3\lambda^{-2}) \frac{M s_3}{|s_3|^3}. \end{cases} \quad (2.26)$$

En consecuencia,

$$\frac{M_2 + M_3(1 + \lambda)}{M_1 - M_3\lambda} = \frac{M_2 + M_3(1 + \lambda)^{-2}}{M_1 - M_3\lambda^{-2}}.$$

Poniendo esto en una forma estándar, vemos que esto es un polinomio de grado 5:

$$(M_1 + M_2)\lambda^5 + (3M_1 + 2M_2)\lambda^4 + (3M_1 + M_2)\lambda^3 - \lambda^2(M_2 + 3M_3) - \lambda(2M_2 + 3M_3) - (M_2 + M_3) = 0$$

La parte izquierda es negativa cuando $\lambda = 0$ y positiva cuando λ tiende a infinito; luego el polinomio tiene una raíz positiva. Por la regla de los signos de Descartes, no tiene mas que una raíz positiva real. Por lo tanto, λ es una única función de masas, y la solución de los dos cuerpos de (2.26) determina una familia colineal para las soluciones de los tres cuerpos. Se obtienen otras dos soluciones al poner diferentes partículas entre las otras. Por lo tanto, hay tres familias distintas de soluciones colineales de tres cuerpos. Una solución para el caso elíptico se muestra en la siguiente imagen.

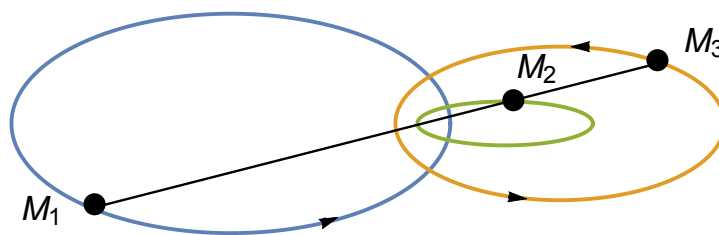


Figura 2.3: Solución colineal de Euler.

Se han encontrado generalizaciones de las soluciones de Lagrange y Euler para sistemas con más de tres partículas. Como en el caso de los tres cuerpos, en todas esas soluciones las partículas permanecen en una configuración permanente con aceleraciones dirigidas hacia el centro de masas. Las soluciones son principalmente de interés matemático, ya que requieren condiciones iniciales extremadamente especiales como para que se den físicamente.

Las soluciones de Euler y Lagrange son las únicas soluciones exactas conocidas del *problema de los tres cuerpos*. Para comprender la gran variedad de otras soluciones, habría que recurrir a un análisis más cualitativo.

2.5. Sistema Binario. Simulación numérica

2.5.1. Planteamiento de las ecuaciones

Debido a la complejidad del *problema de los tres cuerpos* vamos a plantear a continuación un caso concreto que podamos aproximar numéricamente, un sistema binario****.

Asumiremos que los tres cuerpos se encuentran en movimiento sobre un plano. Aquí el plano será OXY.

Consideremos, también, que dos de los cuerpos son muy grandes en comparación con la tercera masa y que esta masa ni afecta el movimiento de las otras dos. Por ejemplo consideraremos dos estrellas, de ahí *Sistema Binario*, y un asteroide que se mueve entorno a ellas. En general las dos estrellas deben viajar en elipses alrededor de su centro combinado de masa, pero haremos una simplificación adicional: las dos masas se encuentran fijas en el plano OXY y que la tercera masa es la única que posee movimiento.

Sean m_1 y m_2 las dos masas mayores y m_3 la tercera masa con $m_3 \ll m_1$, $m_3 \ll m_2$. Consideramos que m_1 esta fija en el origen $(0,0)$ y que m_2 está en el punto $(a,0)$, mientras que las coordenadas que sí varían de

****En astronomía, el término sistema binario se utiliza para referirse a dos objetos astronómicos que se encuentran tan próximos entre sí que están ligados por su fuerza gravitatoria, orbitando alrededor de un centro de masas común. Normalmente se utiliza para referirse a dos estrellas.

la masa m_3 serán (x, y) . Inicialmente la masa m_3 está ubicada en el punto (x_0, y_0) y con una velocidad de salida de (x'_0, y'_0) , es decir:

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \quad (x'(0), y'(0)) = (x'_0, y'_0).$$

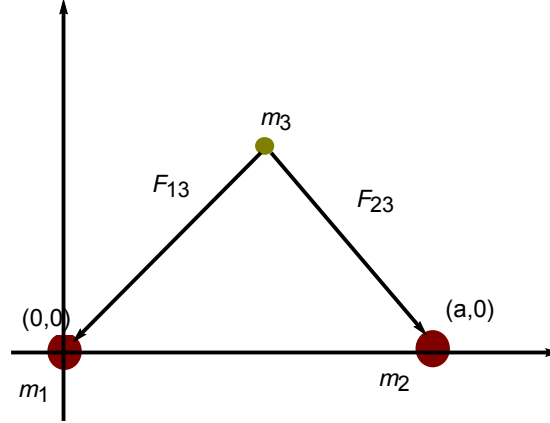


Figura 2.4: Gráfico del sistema binario.

Por la ley de Newton sabemos que $\sum F = ma$. Aplicada a m_3 se obtiene la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de esta masa, donde las únicas fuerzas que actúan son las gravitacionales: $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}u_r$.

De la figura 2.4 se deduce:

$$F_{13} + F_{23} = m_3(x'', y''),$$

$$\frac{Gm_1m_3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(0 - x, 0 - y) + \frac{Gm_2m_3}{((a - x)^2 + y^2)^{3/2}}(a - x, 0 - y) = m_3(x'', y'').$$

Expresando esta ecuación por componentes:

$$\begin{cases} x'' = \frac{-Gm_1x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2(x - a)}{((x - a)^2 + y^2)^{3/2}}, \\ y'' = \frac{-Gm_1y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2y}{((x - a)^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Ahora podemos convertir este sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden introduciendo las variables $u = x'$, $v = y'$, obteniendo así el siguiente

sistema:

$$\begin{cases} x' = u, \\ y' = v, \\ u' = \frac{-Gm_1x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2(x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}}, \\ v' = \frac{-Gm_1y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (2.28)$$

2.5.2. Simulaciones numéricas

A continuación mostraremos las distintas soluciones numéricas obtenidas en *Mathematica* del sistema (2.28) en función de las condiciones iniciales impuestas (2.29). Para más información sobre el código escrito en *Mathematica*, consultar el apéndice C. Entonces, con las condiciones iniciales

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \quad (x'(0), y'(0)) = (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), \quad (2.29)$$

obtenemos las siguientes figuras con masas $m_1 = 2,24 \cdot 10^{11}$ y $m_2 = 2,8 \cdot 10^{11}$, y posiciones $(0, 0)$ y $(0, 20)$ respectivamente. Se han tomado las condiciones iniciales como vienen indicadas en el pie de las figuras.

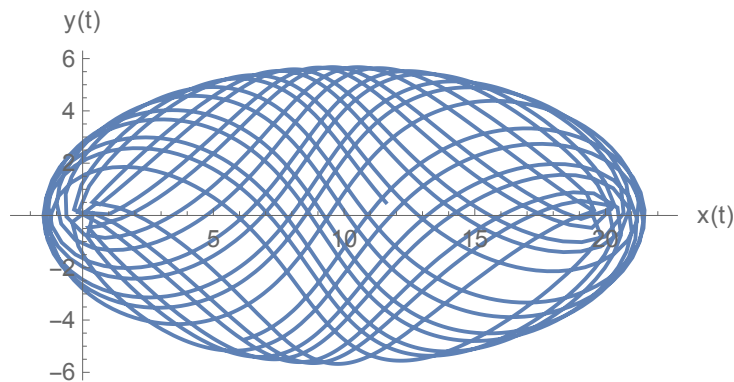


Figura 2.5: Gráfico de la solución para $x(0) = 11,6$, $y(0) = 0,5$, $u(0) = -0,8$ y $v(0) = 0,9$.

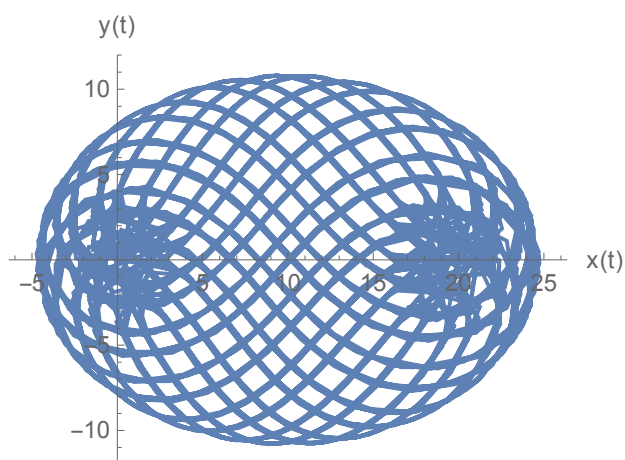


Figura 2.6: Gráfico de la solución para $x(0) = 11,4$, $y(0) = 1,4$, $u(0) = -1,2$ y $v(0) = -1,2$.

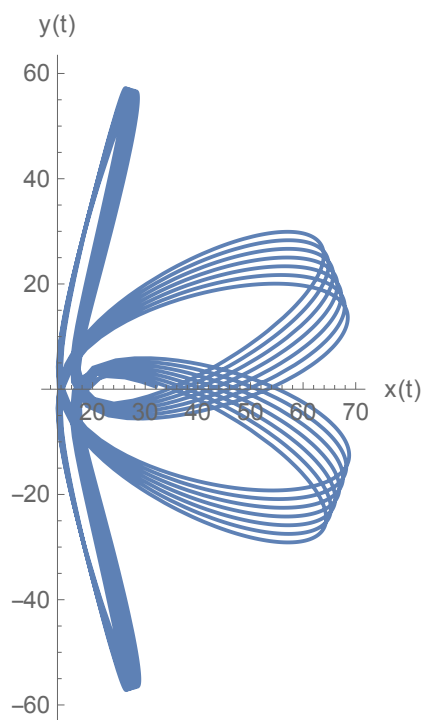


Figura 2.7: Gráfico de la solución para $x(0) = 32$, $y(0) = 0,5$, $u(0) = -1,6$ y $v(0) = 0,6$.

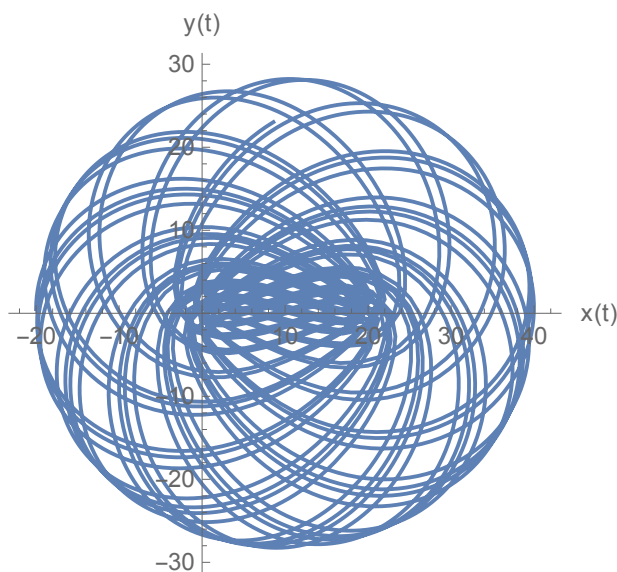


Figura 2.8: Gráfico de la solución para $x(0) = -20$, $y(0) = 0,5$, $u(0) = 0$ y $v(0) = 1,40$.

En definitiva, estas son algunas de las órbitas periódicas que recorre el asteroide entorno a las dos estrellas. Hay que recalcar la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales, como podemos ver en las siguientes figuras, un pequeño cambio en las condiciones iniciales altera mucho la trayectoria del cuerpo.

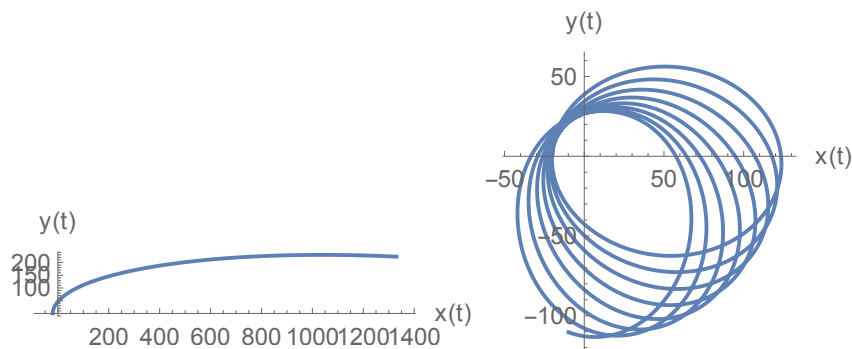


Figura 2.9: Gráfico de la solución para $x(0) = -20$, $y(0) = 0,5$, $u(0) = 0$ con $v(0) = 1,55$ (izquierda) y $v(0) = 1,4$ (derecha).

Podemos observar en el pie de la figura 2.9, como una pequeña variación en la velocidad inicial, convierte una órbita elíptica cuasiperiódica en una órbita que se aleja infinitamente.

2.6. Conclusiones

Como hemos podido ver a lo largo de todo el trabajo *el problema de los tres cuerpos* es un problema muy complejo, por ello nos hemos limitado a resolver casos concretos con cualidades muy específicas y en ningún caso hemos resuelto el problema de manera general. Nos hemos limitado a ver casos concretos en los que se puede estudiar ya sea, de manera analítica, o numérica, las cualidades y propiedades de sus soluciones. Hay muchos más casos posibles a la hora de afrontar el problema que lo convierten en uno mucho más complejo. Tanto es así, que este problema se ha afrontado desde Trabajos de Fin de Grado como este, hasta en tesis doctorales. Incluso grandes científicos expertos en sus respectivas materias trabajan en conjunto en centros de investigación como la NASA intentando resolver los misterios que rodean a este problema.

En conclusión, esperamos que se haya cumplido la finalidad de este trabajo, que no es otra que adentrar al lector en un problema con más de 300 años de historia, y dotarle de las herramientas y conocimientos necesarios para proseguir en el estudio de este.

Apéndice A

Método de Euler

A.1. Descripción del método

Partimos de las ecuaciones del movimiento que vienen dadas por

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Teniendo en cuenta que la velocidad es la derivada de la posición, y a su vez la aceleración es la derivada de la velocidad, reescribimos en forma de sistema tal que:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que una derivada no es más que un cociente entre incrementos infinitesimales aproximamos las derivadas por incrementos finitos:

$$\begin{cases} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \simeq \vec{v}, \\ \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \simeq \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \end{cases}$$

Ahora como

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \text{ y } \Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t),$$

tenemos que

$$\vec{r}(t + \Delta t) \simeq \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \Delta t,$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) \simeq \vec{v}(t) + \frac{\Delta t}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t).$$

Nombrando las posiciones y velocidades sucesivas con subíndices tenemos que:

$$\begin{aligned}t_{n+1} &= t_n + h, \\ \vec{r}_{n+1} &= \vec{r}_n + \vec{v}_n h, \\ \vec{v}_{n+1} &= \vec{v}_n + \frac{h}{m} \vec{F}_n,\end{aligned}$$

donde h denota el incremento en el tiempo. Las ecuaciones dadas nos proporcionan una tabla de valores de la posición y la velocidad para una lista de valores del tiempo.

A.2. Implementación del método en *Mathematica*

En el apartado 1.6 *Solución numérica* hemos planteado el problema particular

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -kx. \end{cases}$$

En esta sección vamos mostrar el código escrito en *Mathematica* para resolver este problema. Para ser exactos, vamos a escribir el sistema dando a las variables el mismo nombre que hemos usado en el programa y definiendo las condiciones iniciales que hemos impuesto, luego queda el sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & y_1(0) = 1 \\ y_2'(x) = -ky_1(x), & y_2(0) = 0, \quad \text{con } k = 1. \end{cases}$$

El código escrito en *Mathematica* es el siguiente:

```
Clear ["Global '*']

h = 0.05;
nmax = 12/h;
x[0] = 0;
y1[0] = 1;
y2[0] = 0;

For[n = 1, n <= nmax, n++,
x[n] = x[n - 1] + h;
y1[n] = y1[n - 1] + h*y2[n - 1];
y2[n] = y2[n - 1] - h*(y1[n - 1]);]
```

Además, hemos dibujado tanto el gráfico de la solución como el plano de fases usando:

```
gr1 = ListPlot[Table[{x[i], y1[i]}, {i, 0, nmax}],  
Joined -> True, PlotStyle -> Red,  
AxesLabel -> {"t", "x(t)"}]
```

```
h1 = ListPlot[Table[{y1[i], y2[i]}, {i, 0, nmax}],  
Joined -> True, AspectRatio -> 1,  
AxesLabel -> {"x(t)", "v(t)"}]
```

Obteniendo como resultado los gráficos siguientes

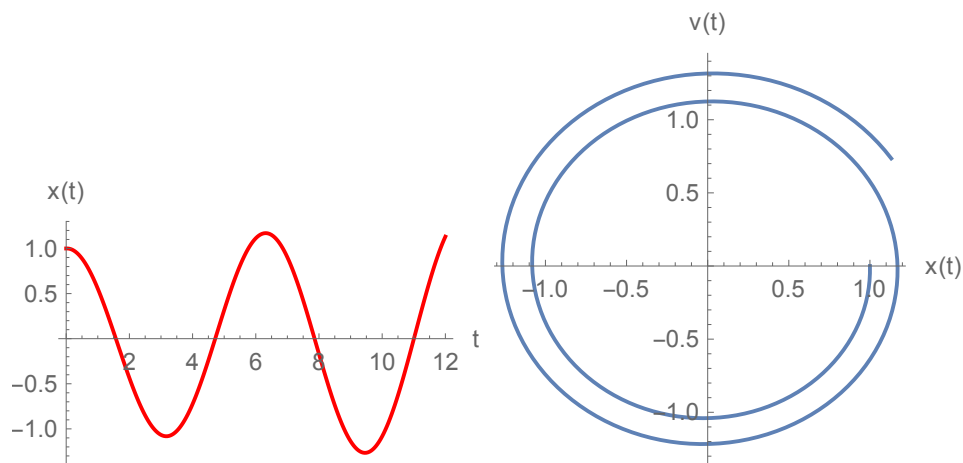


Figura A.1: Gráfico de la solución y plano de fases.

Apéndice B

Método de Runge-Kutta explícito

B.1. Descripción del método

Pueden considerarse los métodos de Runge-Kutta como la clase más importante de métodos de un paso para aproximar ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En general la estructura de un método de Runge-Kutta explícito de R etapas viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h), \\ \phi(x, y; h) = \sum_{r=1}^R c_r k_r, \\ k_1 = f(x, y), \\ k_r = f\left(x + ha_r, y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\right), \quad r = 2, 3, \dots, R \\ a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}, \quad r = 2, 3, \dots, R. \end{array} \right.$$

Un método de R-K de R etapas emplea R evaluaciones de la función $f(x, y)$ que pueden considerarse como aproximaciones de la derivada $y'(x)$ en diversos puntos y en este sentido, podemos interpretar $\phi(x, y; h)$ como una medida de dichas aproximaciones. Por ello, por consistencia, se exige que $\sum_{r=1}^R c_r = 1$. La elección de las constantes c_r , a_r , R y b_{rs} darán lugar a distintos métodos de Runge-Kutta con diferentes propiedades. Además en los métodos explícitos cada k_r sólo depende de los k_s previamente calculados.

En nuestro caso, en el apartado *1.6 Solución numérica* hemos empleado el conocido como método de Runge-Kutta de cuarto orden que puede

considerarse como el más popular de todos los métodos de Runge-Kutta. A continuación se puede ver en que consiste:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)\phi(x, y; h) = \sum_{r=1}^R c_r k_r,$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1),$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3).$$

Podría parecer que el orden coincide con el número de etapas en los métodos R-K explícitos, pero esto no es así. Si denotamos por $p(R)$ el máximo orden alcanzable por un método explícito de R etapas se tiene que $p(R) = R$ para $R = 1, 2, 3, 4$, pero $p(5) = 4$, $p(6) = 5$, $p(7) = 6$, $p(8) = 6$ y $p(R) \leq R - 2$, $R = 9, 10, \dots$

B.2. Implementación del método en *Mathematica*

Análogamente al *Apendice A* vamos a poner explícitamente el código escrito en *Mathematica* para resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & y_1(0) = 1, \\ y_2'(x) = -ky_1(x), & y_2(0) = 0, \end{cases} \quad \text{con } k = 1,$$

cuyos resultados se han presentado en el apartado *1.6 Solución numérica*. El código es:

```
Clear["Global`*"]

f1[x_, y1_, y2_] := y2 ;
f2[x_, y1_, y2_] := -y1 ;

a = 0;
b = 12;
h = 0.05;
nmax = (b - a)/h;
x[0] = 0;
y1[0] = 1;
y2[0] = 0;
For[n = 1, n <= nmax, n++,
```



```

x[n] = a + n*h;
k1a = f1[x[n - 1], y1[n - 1], y2[n - 1]];
k1b = f2[x[n - 1], y1[n - 1], y2[n - 1]];
k2a = f1[x[n - 1] + h/2, y1[n - 1] + (h/2)*k1a,
y2[n - 1] + (h/2)*k1b];
k2b = f2[x[n - 1] + h/2, y1[n - 1] + (h/2)*k1a,
y2[n - 1] + (h/2)*k1b];
k3a = f1[x[n - 1] + h/2, y1[n - 1] + (h/2)*k2a,
y2[n - 1] + (h/2)*k2b];
k3b = f2[x[n - 1] + h/2, y1[n - 1] + (h/2)*k2a,
y2[n - 1] + (h/2)*k2b];
k4a = f1[x[n - 1] + h, y1[n - 1] + h*k3a, y2[n - 1] + h*k3b];
k4b = f2[x[n - 1] + h, y1[n - 1] + h*k3a, y2[n - 1] + h*k3b];
y1[n] = y1[n - 1] + (h/6) (k1a + 2 k2a + 2 k3a + k4a) ;
y2[n] = y2[n - 1] + (h/6) (k1b + 2 k2b + 2 k3b + k4b);

```

Y de nuevo hemos dibujado tanto el gráfico de la solución como el plano de fases usando:

```

gr2 = ListPlot[Table[{x[i], y1[i]}, {i, 0, nmax}],
Joined -> True, PlotStyle -> Blue,
AxesLabel -> {"t", "x(t)"}];

```

```

h2 = ListPlot[Table[{y1[i], y2[i]}, {i, 0, nmax}],
Joined -> True, AspectRatio -> 1, PlotStyle -> Green,
AxesLabel -> {"x(t)", "v(t)"}];

```

Obteniendo como resultado los gráficos siguientes

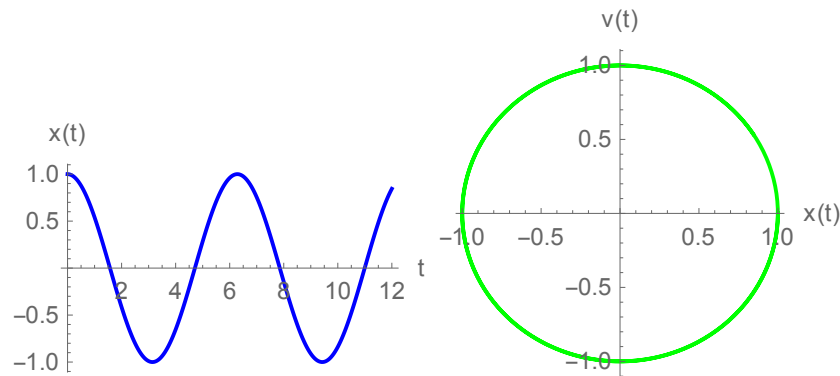


Figura B.1: Gráfico de la solución y plano de fases.

Apéndice C

Sistema binario

Como hemos descrito al final del capítulo 2 se trata de escribir en *Mathematica* el sistema

$$\begin{cases} x' = u, \\ y' = v, \\ u' = \frac{-Gm_1x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2(x - a)}{((x - a)^2 + y^2)^{3/2}}, \\ v' = \frac{-Gm_1y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2y}{((x - a)^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Entonces, en *Mathematica* usando el comando *NDSolve* nos queda

```
Clear["Global`*"]
```

```
m1 = 2.24*10^11;
```

```
m2 = 2.8*10^11;
```

```
a = 20;
```

```
G = 6.67*10^-11;
```

```
s = NDSolve[{x'[t] == u[t], y'[t] == v[t],  
u'[t] == (-G*m1*x[t])/(x[t]^2 + y[t]^2)^(3/2) - (  
G*m2*(x[t] - a))/((x[t] - a)^2 + y[t]^2)^(3/2),  
v'[t] == (-G*m1*y[t])/(x[t]^2 + y[t]^2)^(3/2) - (  
G*m2*y[t])/((x[t] - a)^2 + y[t]^2)^(3/2), x[0] == 11.6,  
y[0] == 0.5, u[0] == -0.8, v[0] == 0.9}, {x, y}, {t, 500}].
```

De esta manera, cambiando las condiciones iniciales hemos obtenido tres gráficos, de la siguiente forma

```
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 500},  
PlotRange -> Full, AxesLabel -> {"x(t)", "y(t)"}]
```

Obteniendo así, por ejemplo la primera de las cuatro figuras.

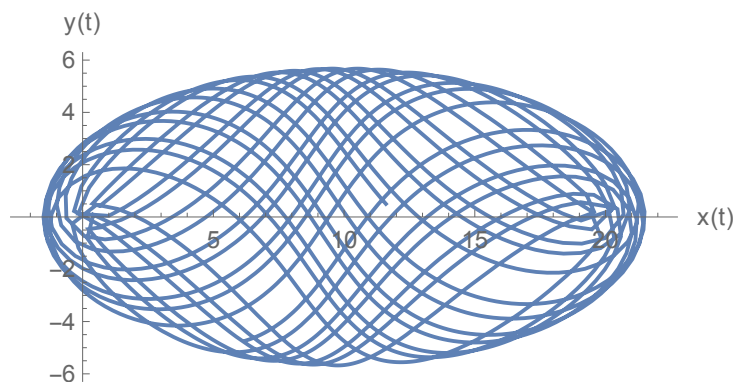


Figura C.1: Gráfico de la solución para $x(0) = 11,6$, $y(0) = 0,5$, $u(0) = x'(0) = -0,8$ y $v(0) = y'(0) = 0,9$.

Bibliografía

- [1] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/con_mlineal/m_lineal/mlineal.htm
- [2] Jose Javier Arenas Ferrer. *Estabilidad y Caos en el Sistema Solar*. Proyecto fin de máster en física de sistemas complejos, UNED. 2012. <http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:master-Ciencias-FSC-Jjarenas/Documento.pdf>
- [3] <http://de2de.synechism.org/c7/sec74.pdf>
- [4] S.D. Lambert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, John Wiley & Sons, 1991.
- [5] Z.E. Musielak and B.Quarles. *The three-body problem*. arXiv: 1508.02312v1 [astro-ph.EP] 10 Aug 2015
- [6] David Hestenes. *New Foundations for Classical Mechanics*. 1999.
- [7] G.F. Torres del Castillo. *Estructuras simplécticas en la física matemática*. 13 de enero de 1989.
- [8] Simó C. *New Families of Solutions in N-Body Problems*. In: Casacuberta C., Miró-Roig R.M., Verdera J., Xambó-Descamps S. (eds) European Congress of Mathematics. Progress in Mathematics, vol 201. Birkhäuser, Basel. 2001. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8268-2_6
- [9] Lic. Juan Valentin Mendoza Mogollón. *Un experimento numérico sobre el problema de los tres cuerpos en Mat Lab 5.1*. Universidad Nacional de Piura, Perú. Julio 2004
- [10] Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Royal Soc. Press, London, 1687.
- [11] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste, Tome 1 (1892), 2 (1892), 3 (1899)*; English translation *New Methods of Celestial Mechanics, Parts 1, 2, 3 (1993)*. Gauthier-Villars; American Inst. Phys., 1892.

- H. Poincaré. *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Acta, 13:1–270, 1890.
- [12] Euler. *De moto rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*. Novo Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 11:144–151, 1767.
- [13] Lagrange. *Essai sur le problème des trois corps*. Euvres, 6:229–331, 1772.
- [14] W. Hill. *On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motion of the Sun and Moon*. John Wilson and Son, Cambridge, MA, 1877.
- W. Hill. *Researchers into the lunar theory*. Amer. J. Mathematics, 1:5–26, 129–147, 245–260, 1878.
- [15] M.C. Gutzwiller. *Moon-earth-sun: The oldest three-body problem*. Reviews of Modern Physics, 70:589–639, 1998.
- [16] I. Bendixon. *Sur les courbes définies par des équations différentielles*. Acta, 24:1–88, 1901.
- [17] G. Darwin. *Periodic orbits*. Acta, 21:99–242, 1897.
- [18] F. R. Moulton, D. Buchanan, T. Buck, F. L. Griffin, W. R. Longley, and W. D. MacMillan. *Periodic orbits*. Carnegie institution of Washington, Washington, DC, 1920.
- [19] E. Strömberg. *Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps*. Bull. Paris, 9:87–130, 1935.
- [20] T. Levi-Civita. *Sur la régularisation du problème des trois corps*. Acta, 42:92–144, 1918.
- [21] A.M. Lyapunov. *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (3), 9:203–474, 1907.
- [22] G. Birkhoff. *Quelques théorèmes sur la mouvement des systèmes dynamiques*. Bull. de la Société Mathématique de France, 40:305–323, 1912.
- [23] P. Painlevé. *Sur les singularités des équations de la dynamique et sur la problème des trois corps*. Comptes Rendus, 123:871–873, 1896.
- P. Painlevé. *Sur le cas du problème des trois corps (et des n corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini*. Comptes Rendus, 125:1078–1081, 1897.
- [24] G. Bisconcini. *Sur le problème des trois corps. trajectoires le long desquelles deux au moins des trois corps se choquent. conditions qui entraînent un choc*. Acta, 30:49–92, 1906.

- [25] K.F. Sundman. *Recherches sur le problème des trois corps*. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, 34 (6):1–43, 1907.
- K.F. Sundman. *Nouvelles recherches sur le problème des trois corps*. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, 35 (9):1–27, 1909.
- K.F. Sundman. *Mémoires sur le problème des trois corps*. Acta, 36:105–179, 1912.
- [26] C.L. Siegel. *Der dreierstoss*. Annals of Mathematics, 42:127–168, 1941.
- C.L. Siegel and J.K. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.
- [27] C.E. Delaunay. *Théorie du mouvement de la lune ii*. Mémoire de l'Académie des Sciences, 29:1–931, 1867.
- [28] A. Lindstedt. *Sur la détermination des distances mutuelles dans le problème des trois corps*. Annales de l'École Normale (3), 1:85–102, 1884.
- [29] H. Gylden. *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes*. Acta, 17:1–168, 1893.
- [30] J. Barrow-Green. *Oscar ii's prize competition and the error in poincaré's memoir on the three body problem*. Archive for History of Exact Sciences, December 1994.
- [31] A.N. Kolmogorov. *On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the hamiltonian*. Dokl. Acad. Nauk SSR, 98:527–530, 1954. In Russian.
- [32] J. Moser. *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*. Nachricht von der Akademie der Wissenschaften, Gottingen II, Math. Phys. K1:1–20, 1962.
- [33] V. I. Arnold. *Proof of a theorem of a. n. kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian*. Russian Mathematical Surveys, 18:9–36, October 1963.
- [34] M. Hénon. *Generating Families in the Restricted Three-Body Problem, volume I*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- M. Hénon. *Generating Families in the Restricted Three-Body Problem, volume II*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
- M. Hénon. *New families of periodic orbits in hill's problem of three bodies*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 85:223–246, 2003.

- [35] V. Szebehely. *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, New York and London, 1967.
- V. Szebehely. *Open problems on the eve of the next millennium*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 65:205–211, 1997.
- V. Szebehely and C. F. Peters. *Complete solution of a general problem of three bodies*. *Astronomical Journal*, 72:876, September 1967a.
- V. Szebehely and C. F. Peters. *A new periodic solution of the problem of three bodies*. *Astronomical Journal*, 72:1187, November 1967b.
- [36] M. Suvakov. *Numerical search for periodic solutions in the vicinity of the figure-eight orbit: Slaloming around singularities on the shape sphere*. ArXiv e-prints, December 2013.
- M. Suvakov and V. Dmitra'sinovic. *Three classes of newtonian three-body planar periodic orbits*. *Physical Review Letters*, 110(11):114301, March 2013.
- [37] J. Barrow-Green. *Poincaré and the Three Body Problem*. American Math. Soc., Providence, R.I., 1997.
- [38] H. Bruns. *Über die integrale des vielkörper-problems*. *Acta*, 11:25–96, 1887.
- [39] E.T. Whittaker. *A Treatise on The Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies with an Introduction to the Problem of Three Bodies*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1937.
- [40] M. Valtonen and H. Karttunen. *The Three-Body Problem*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, March 2006
- [41] R. Broucke and H. Lass. *A note on relative motion in the general three-body problem*. *Celestial Mechanics*, 8:5–10, August 1973.