

# Fundamentos de Teoría de la **COMUNICACIÓN**

INMA HERNÁEZ RIOJA



eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

*CIP. Biblioteca Universitaria*

**Hernández Rioja, Inma**

Fundamentos de teoría de la comunicación [Recurso electrónico] / Inma Hernández Rioja. – Datos. – Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2019]. – 1 recurso en línea : PDF (135 p.)

Modo de acceso: World Wide Web.

ISBN: 978-84-9082-978-3

1. Sistemas de telecomunicaciones. 2. Tratamiento de señales. 3. Telecomunicaciones.

(0.034)621.39

# Fundamentos de Teoría de la Comunicación

Inma Hernáez Rioja



# Agradecimientos

He escrito este libro para ser utilizado como guía en las clases magistrales del curso de **Teoría de la Comunicación** impartido en la titulación de Grado de Tecnología de Ingeniería de Telecomunicación, en la Escuela de Ingeniería de Bilbao (Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea). El contenido responde por tanto al diseñado por el profesorado responsable de las clases magistrales desde la implantación del actual plan de estudios y en su elaboración, además de la autora, han colaborado los profesores **Sofía Ruiz de Gauna Gutiérrez** e **Igor Fernández Pérez**. También han realizado innumerables correcciones y mejoras al texto, por lo cual quiero expresar mi más sincero agradecimiento. También quiero agradecer a Igor el haber realizado la traducción del libro al euskera.



# Prefacio

La asignatura está integrada en el módulo común a la rama de telesecomunicación (Módulo 02) y como tal trabaja los principios básicos de las telecomunicaciones. La asignatura describe, desde un punto de vista formal y matemático, los mecanismos básicos que permiten realizar la transmisión de la información en los sistemas de telecomunicación modernos (radio y televisión digital, transmisión de datos, comunicaciones telefónicas etc.).

La asignatura se imparte durante el segundo cuatrimestre del segundo año de la titulación. Así, parte del dominio de herramientas de análisis de señales y operaciones con ellas (convolución y transformada de Fourier), habilidades y capacidades proporcionadas fundamentalmente por las asignaturas de formación básica *Análisis de Circuitos* y *Tratamiento de Señales* (ambas de primer curso). También se suponen adquiridos los conocimientos de las técnicas básicas de análisis estadístico (asignatura de *Estadística*, en primer curso) y otras herramientas básicas de álgebra y cálculo (*Álgebra*, *Cálculo I*, *Cálculo II* y *Ampliación de Matemáticas*), tales como representación gráfica de funciones, integrales básicas, operaciones con números complejos, funciones trigonométricas, representación vectorial y operaciones básicas con vectores. Adicionalmente, es importante la comprensión de los conceptos de energía y potencia, trabajados en *Ampliación de Física*.

El curso tiene un total de 7,5 ECTS de los cuales 3 ECTS corresponden a las clases magistrales, 2,25 a las llamadas Prácticas de Aula o clases de problemas, 1,5 ECTS son prácticas de laboratorio y finalmente 0,75 ECTS se implementan con clases de tipo *seminario*. El contenido de este libro está ajustado a los 3 ECTS (30 horas de exposiciones teóricas) de las clases magistrales.



# Índice general

<b>1. Introducción a los sistemas de comunicaciones</b>	<b>11</b>
1.1. Modelo de un sistema de comunicación	11
1.2. Caracterización del medio de transmisión	12
1.2.1. Atenuación	13
1.2.2. Distorsión	15
<b>2. Señales y procesos aleatorios</b>	<b>19</b>
2.1. Procesos aleatorios	19
2.1.1. Introducción a los procesos aleatorios	19
2.1.2. Definiciones	20
2.1.3. Conceptos básicos de estadística	22
2.2. Promedios de ensamble	23
2.2.1. Valor medio	23
2.2.2. Autocorrelación	23
2.2.3. Valor Cuadrático Medio	24
2.2.4. Autocovarianza	24
2.2.5. Varianza	25
2.2.6. Correlación cruzada	25
2.2.7. Covarianza cruzada	26
2.2.8. Coeficiente de correlación cruzada	26
2.2.9. Procesos incorrelados, ortogonales e independientes	26
2.3. Propiedades de los procesos estacionarios	27
2.4. Promedios temporales y procesos ergódicos	29
2.4.1. Resumen promedios temporales y de ensamble	30
2.5. Representación espectral de señales aleatorias	30
2.5.1. Densidad espectral de potencia	30
2.5.2. Propiedades	32
2.6. Ejemplos prácticos	32
2.6.1. Coseno de fase aleatoria	32
<b>3. Transmisión de señales con ruido</b>	<b>35</b>
3.1. Procesos estacionarios a través de sistemas LI	35
3.1.1. Valor medio del proceso de salida	35
3.1.2. Autocorrelación y correlaciones cruzadas	36
3.1.3. Densidades espectrales de potencia	37
3.2. Procesos Gaussianos	38
3.2.1. Variables aleatorias gaussianas	38

3.2.2.	Procesos gaussianos . . . . .	41
3.2.3.	Propiedades de los procesos gaussianos . . . . .	41
3.3.	Ruido térmico y ruido blanco . . . . .	42
3.4.	Ruido filtrado y Ancho de Banda Equivalente de Ruido . . . . .	42
3.4.1.	Ejemplo: Filtro paso bajo RC . . . . .	44
3.5.	Transmisión banda base con ruido . . . . .	45
<b>4.</b>	<b>Señales y Sistemas Paso Banda</b> . . . . .	<b>49</b>
4.1.	Transformada Hilbert . . . . .	49
4.2.	Señal analítica . . . . .	51
4.3.	Equivalente paso-bajo . . . . .	52
4.4.	Sistemas paso banda . . . . .	55
4.5.	Procesos paso banda . . . . .	56
4.5.1.	Transformador de Hilbert . . . . .	56
4.5.2.	Señal analítica . . . . .	57
4.5.3.	Equivalente paso bajo . . . . .	57
4.5.4.	Componentes en fase y cuadratura . . . . .	58
<b>5.</b>	<b>Comunicaciones digitales banda base</b> . . . . .	<b>61</b>
5.1.	Códigos de línea . . . . .	61
5.2.	Densidad Espectral de Potencia de la señal digital . . . . .	64
5.2.1.	Cálculo de la densidad espectral de potencia de la señal digital en línea . . . . .	64
5.2.2.	DEP para símbolos incorrelados . . . . .	65
5.2.3.	Eficiencia espectral . . . . .	67
5.2.4.	Potencia transmitida . . . . .	67
5.3.	Ejemplos . . . . .	68
5.3.1.	Código unipolar binario NRZ . . . . .	68
5.3.2.	Código unipolar M-ario NRZ . . . . .	69
5.3.3.	Código polar binario NRZ . . . . .	70
5.3.4.	Código polar M-ario NRZ . . . . .	71
5.3.5.	Código polar binario RZ . . . . .	72
5.3.6.	Código polar M-ario RZ . . . . .	73
5.3.7.	Código unipolar binario RZ . . . . .	74
5.3.8.	Código unipolar M-ario RZ . . . . .	75
5.3.9.	Código Manchester . . . . .	76
5.4.	Canales limitados en banda . . . . .	77
5.4.1.	Interferencia entre símbolos . . . . .	77
5.4.2.	Pulso de Nyquist o pulsos en coseno alzado . . . . .	80
5.4.3.	Resumen . . . . .	83
<b>6.</b>	<b>Modulaciones digitales</b> . . . . .	<b>85</b>
6.1.	Introducción . . . . .	85
6.2.	Expresión general de la DEP para procesos estacionarios paso banda . . . . .	86
6.3.	Modulación por desplazamiento de amplitud (ASK) . . . . .	86
6.3.1.	Descripción . . . . .	86
6.3.2.	Densidad Espectral de Potencia . . . . .	87
6.4.	Modulación por desplazamiento de fase (PSK) . . . . .	89

6.4.1.	Descripción . . . . .	89
6.4.2.	Componentes en fase y en cuadratura . . . . .	90
6.4.3.	Densidad Espectral de Potencia . . . . .	91
6.4.4.	Casos particulares en PSK . . . . .	93
6.5.	Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK) . . . . .	94
6.5.1.	Introducción . . . . .	94
6.5.2.	Densidad Espectral de Potencia . . . . .	96
<b>7.</b>	<b>Ruido en las comunicaciones digitales</b>	<b>99</b>
7.1.	Espacio de señal . . . . .	99
7.1.1.	Definiciones . . . . .	99
7.1.2.	Correlador y filtro adaptado . . . . .	101
7.1.3.	Ejemplos . . . . .	102
7.2.	Receptor óptimo: enfoque probabilístico . . . . .	104
7.2.1.	El criterio MAP . . . . .	104
7.2.2.	Las regiones de decisión . . . . .	106
7.2.3.	Regiones de decisión en el caso no equiprobable . . . . .	107
7.3.	Cálculo de la probabilidad de error . . . . .	108
7.3.1.	Espacios unidimensionales . . . . .	109
7.3.2.	Espacios bidimensionales . . . . .	114
<b>A.</b>	<b>Conceptos básicos de señales y sistemas</b>	<b>119</b>
A.1.	Transformada de Fourier usando $f$ . . . . .	119
A.2.	Transformadas de Fourier de señales básicas. Propiedades . . . . .	120
A.2.1.	Dualidad . . . . .	120
A.2.2.	La función delta . . . . .	120
A.2.3.	Retardos, desplazamientos y funciones senoidales . . . . .	121
A.2.4.	Convolución . . . . .	122
A.2.5.	Exponencial real . . . . .	124
A.2.6.	Pulso rectangular y pulso triangular . . . . .	124
A.3.	Valor medio . . . . .	126
A.4.	Energía y Potencia . . . . .	127
A.5.	Correlación cruzada y autocorrelación . . . . .	128
A.5.1.	Teorema de Parseval . . . . .	130
A.6.	Tabla de transformadas básicas de Fourier . . . . .	131
<b>B.</b>	<b>Libros recomendados</b>	<b>133</b>



# Tema 1

## Introducción a los sistemas de comunicaciones

### 1.1. Modelo de un sistema de comunicación

El objetivo fundamental de un sistema de comunicación es la transmisión de información entre una fuente de información y un receptor de información (ver figura 1.1). Para su transmisión, la información se manifiesta físicamente a través de una señal eléctrica (analógica o digital). Si el formato de origen de la información no es una señal eléctrica (si es por ejemplo una señal acústica, una imagen ...), se utilizarán transductores (micrófonos o cámaras) para obtener una señal eléctrica, que es la que recorrerá el sistema. En el extremo receptor, podrá haber también un transductor que realizará la conversión inversa para recuperar la información en su forma de origen (altavoces o pantallas). En esta asignatura nos centramos en el sistema de comunicación propiamente dicho, cuya entrada y salida son señales eléctricas, analógicas o digitales, que llevan asociada la información o el mensaje que se desea transmitir. Por ello, hablaremos de la *señal* a transmitir o del *mensaje* de forma indistinta, tomándolos como expresiones equivalentes. La función del sistema de comunicación será la de transmitir adecuadamente dichas señales o mensajes desde un punto de origen hasta un destino lejano.



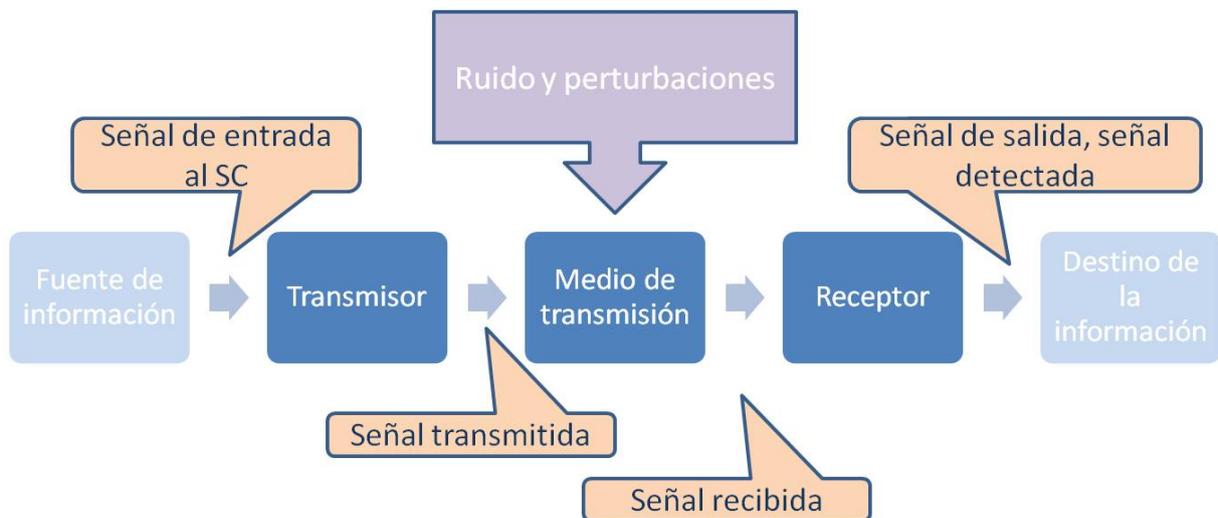
**Figura 1.1:** El sistema de comunicación como elemento transmisor de información entre una fuente y un destino lejano.

El objetivo del Sistema de Comunicación es generar en el extremo receptor una réplica del mensaje generado en el extremo emisor (ver figura 1.2). Las señales podrán ser transmitidas a través de muy diferentes medios de transmisión (radio, fibra óptica, cables metálicos diversos...). Durante el trayecto, la señal será afectada por las condiciones de la transmisión (ruido térmico e interferencias de muy diversas procedencias). Por ello, es necesario tanto adecuar las características de la señal al medio de transmisión (modular adecuadamente para una transmisión por radio, cable o fibra) como protegerla de las agresiones que sufrirá en el trayecto (amplificar,

introducir códigos robustos, proteger frente a errores...). Estas operaciones serán realizadas por el equipo transmisor, que también tendrá que encargarse de realizar la transducción de la señal eléctrica (obtener un campo electromagnético a través de una antena para la transmisión por radio, una señal óptica mediante un láser para la transmisión por fibra, etc.).

El receptor deberá recuperar el mensaje original a partir de la señal recibida, que podrá llegar débil y deteriorada. Tras la recuperación de la señal eléctrica (utilizando antenas, diodos PIN u otros transductores), por lo general realizará las operaciones de demodulación y detección.

Así como un sistema de comunicación puede permitir la transmisión de múltiples señales y engloba todos los equipos implicados en la transmisión, denominaremos *canal de transmisión* al trayecto único seguido por la señal en su viaje desde el emisor hasta el receptor. La teoría de la comunicación estudia los fundamentos teóricos de la transmisión de las señales a través de los diferentes canales de transmisión, partiendo de la caracterización y modelado de las señales y del ruido, estudiando cómo afecta éste a la comunicación, junto con el análisis de la *capacidad de transmisión del canal* y de sus características. La teoría de la comunicación aporta los métodos y las técnicas que permitirán proteger la información frente a las agresiones y perturbaciones del medio así como optimizar el uso del medio para la compartición eficiente de los recursos disponibles. Con todo ello, podemos decir que la teoría de la comunicación estudia las técnicas que permitirán realizar una comunicación eficiente a través del medio de transmisión elegido.



**Figura 1.2:** Elementos de un sistema de comunicación.

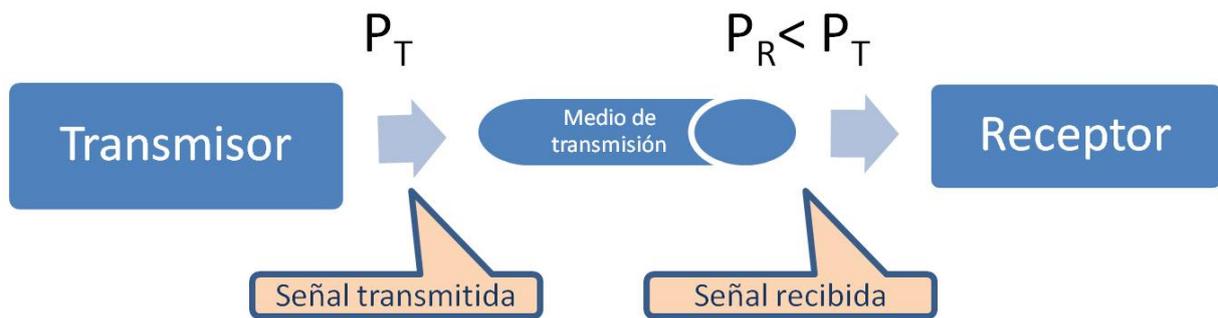
## 1.2. Caracterización del medio de transmisión

Los tres fenómenos más importantes que afectan a las señales en su transmisión son la atenuación, la distorsión y el ruido. En este apartado introducimos el tratamiento de los dos primeros, y dejamos el estudio de los efectos del ruido para otro tema.

### 1.2.1. Atenuación

La atenuación refleja la pérdida de potencia que sufre la señal al atravesar el medio de transmisión. Estas pérdidas se expresan habitualmente en unidades logarítmicas, es decir en decibelios (dB<sup>1</sup>). Si la potencia transmitida es  $P_T$  (W) y la potencia recibida  $P_R$  (W), se define la atenuación  $L$  (dB)<sup>2</sup> como (ver figura 1.3):

$$L(\text{dB}) = 10 \cdot \log \frac{P_T}{P_R} \quad (1.1)$$



**Figura 1.3:** Esquema simple de un sistema de transmisión.

En la expresión 1.1<sup>3</sup> las potencias  $P_T$  y  $P_R$  están expresadas en unidades lineales, y ambas en la misma unidad (ambas en  $W$ , ambas en  $mW$ , etc.). La propagación de la señal a través del medio provocará una pérdida de potencia, por lo que  $P_T > P_R$ ,  $\frac{P_T}{P_R} > 1$  y  $L$  será una cantidad positiva<sup>4</sup>.

Para la mayoría de los medios de transmisión, estas pérdidas expresadas en unidades logarítmicas (dB) se incrementan linealmente con la distancia recorrida por la señal en el medio. Es decir, se caracteriza el medio con una atenuación  $\alpha$  dB/km, de forma que en un trayecto de  $d$  km la atenuación total sufrida por la señal será de:

$$L(\text{dB}) = \alpha \text{ (dB/km)} \cdot d \text{ (km)} \quad (1.2)$$

De esta forma, la atenuación en términos lineales tiene una evolución exponencial:

$$a = 10^{\frac{\alpha}{10}} \quad (1.3)$$

$$l = \frac{P_T}{P_R} = 10^{\frac{L}{10}} = 10^{\frac{\alpha d}{10}} \quad (1.4)$$

en donde  $P_T$  y  $P_R$  deben estar expresadas en unidades lineales (vatios o milivatios).

El valor de la atenuación  $l$  expresado en términos lineales no tiene unidades, y será mayor que la unidad, representando así una pérdida de potencia. La atenuación  $l$  es el inverso de la

<sup>1</sup>El nombre viene del ingeniero Alexander Graham Bell, razón por la que la letra B es siempre en mayúsculas

<sup>2</sup>L: del inglés, Losses

<sup>3</sup>El logaritmo es base 10

<sup>4</sup>Recuerde que si  $0 < x < 1$  entonces  $\log x < 0$

ganancia  $g = \frac{1}{l}$ , concepto habitualmente utilizado para sistemas de amplificación, en donde la potencia de salida es mayor que la potencia de entrada ( $g > 1$ ).

La potencia puede expresarse también en unidades logarítmicas. Las más habituales serían el dBW (que se lee *debe-vatio*) y el dBm (que se lee *debe-eme*). Estas unidades se calculan simplemente como 10 veces el logaritmo (en base 10) de las unidades expresadas en vatios (para el dBW) o en milivatios (para el dBm):

$$P(\text{dBW}) = 10 \log P(W) \quad P(\text{dBm}) = 10 \log P(\text{mW})$$

Si la potencia está expresada en unidades logarítmicas (habitualmente dBm) la atenuación en dB es directamente la diferencia de potencias transmitida y recibida:

$$\begin{aligned} L(\text{dB}) &= 10 \cdot \log \frac{P_T(\text{mW})}{P_R(\text{mW})} = 10 \cdot \log P_T(\text{mW}) - 10 \cdot \log P_R(\text{mW}) \\ &= P_T(\text{dBm}) - P_R(\text{dBm}) \end{aligned}$$

En telecomunicaciones es muy habitual trabajar con estas unidades logarítmicas, por lo que es interesante conocer algunas relaciones frecuentes<sup>5</sup>:

**Potencia doble o mitad** Si un trayecto reduce a la mitad la potencia de la señal, la atenuación introducida por el trayecto es de 3 dB:

$$\begin{aligned} P_R(\text{mW}) &= \frac{P_T(\text{mW})}{2} \\ L(\text{dB}) &= 10 \cdot \log 2 = 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

Así, si por ejemplo la potencia de entrada es de 1 mW (0 dBm), la potencia de salida será (para una atenuación de 3 dB) de 0,5 mW (-3 dBm).

De la misma manera, si un dispositivo introduce una ganancia en potencia de 3 dB, la potencia de salida expresada en unidades lineales -en vatios (W) o en milivatios (mW)- será el doble de la potencia de entrada. Por ejemplo, si la potencia de entrada es de 1 mW (0 dBm), la de salida será de 2 mW (3 dBm).

En resumen, sumar o restar 3 dB en unidades logarítmicas de potencia, equivale a doblar o dividir la potencia en unidades lineales.

**Ganancias o atenuaciones de 10** Como  $10 \cdot \log 10 = 10$ , un factor de 10 en la relación de potencias equivale a sumar (o restar) 10 dB. Por ejemplo, si la potencia transmitida es de 1 mW (0 dBm) y la atenuación del medio es de  $L = 10$  dB, la potencia recibida será de 0,1 mW (-10 dBm).

**Ganancias o atenuaciones en cascada** Si se conectan en cascada dos trayectos con atenuaciones de  $L_1$  dB y  $L_2$  dB, la atenuación total introducida será de  $L = L_1 + L_2$  dB. Por ejemplo, la conexión de dos trayectos de atenuación de 10 dB por trayecto, introducirá una atenuación total de 20 dB. Así, si la potencia transmitida es de 1 mW (0 dBm), la potencia recibida tras el primer trayecto será de 0,1 mW (-10 dBm), y tras atravesar la señal el segundo trayecto será de 0,01 mW (-20 dBm).

<sup>5</sup>Es muy conveniente saber que  $\log 2 \simeq 0,3$ ,  $\log 10 = 1$  y  $\log 1 = 0$

**Ejemplo** Consideremos la transmisión de una señal piloto de potencia 5 mW, a través de un enlace coaxial sistema caracterizado por una atenuación  $\alpha = 1,2$  dB/km. La atenuación introducida por los conectores situados en los extremos emisor y receptor es de 0,6 dB. Queremos calcular la potencia recibida en el extremo receptor, ubicado a una distancia de 2km.

Expresamos la potencia transmitida en unidades logarítmicas:

$$P_T \text{ (dBm)} = 10 \cdot \log 5 \text{ mW} \simeq 7 \text{ dBm}$$

La atenuación total introducida por el enlace será:

$$L = 1,2 \text{ dB/km} \cdot 2 \text{ km} + 0,6 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$$

Y finalmente la potencia recibida:

$$P_R = P_T - L = 4 \text{ dBm}$$

que equivale a  $P_R = 10^{4/10} = 2,5$  mW.

## 1.2.2. Distorsión

La distorsión introducida por un sistema de transmisión está relacionada con sus características de transmisión, y en términos generales puede ser de dos tipos: *lineal* y *no lineal*. La *distorsión lineal* se refiere a la que puede ser generada por los sistemas lineales, caracterizados por una función de transferencia y una respuesta frecuencial  $H(f)$ . La *distorsión no lineal* es la que introducen los sistemas no lineales, cuya respuesta no puede ser caracterizada con una función de transferencia, y que se caracterizan a través de la llamada *función característica del sistema*  $y = f(x)$ .

### 1.2.2.1. Distorsión lineal

Un sistema lineal se dice que no introduce distorsión si la salida  $y(t)$  es una versión escalada y retardada de la entrada  $x(t)$ :

$$y(t) = K \cdot x(t - t_0) \quad (1.5)$$

en donde:

- $K > 0$  es el valor correspondiente al factor de escala (normalmente  $K < 1$  ya que la señal sufrirá una atenuación en el trayecto).
- $t_0 > 0$  el retardo necesariamente experimentado por la señal para recorrer el sistema de transmisión.

Un sistema lineal e invariante puede caracterizarse a través de su *respuesta al impulso*  $h(t)$ , cuya transformada de Fourier es la *respuesta frecuencial* del sistema. Ello significa que podemos calcular la respuesta del sistema  $y(t)$  a cualquier entrada  $x(t)$  utilizando la ecuación de convolución:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

De esta manera, para que un sistema no introduzca distorsión, utilizando 1.5:

$$y(t) = K \cdot x(t - t_0) = K \cdot x(t) * \delta(t - t_0)$$

por lo que un sistema lineal sin distorsión tendrá una respuesta al impulso dada por:

$$h(t) = K \cdot \delta(t - t_0)$$

Podemos expresar esta misma condición en el dominio de la frecuencia:

$$H(f) = K e^{-j2\pi f t_0}$$

Es decir, la respuesta frecuencial de un sistema sin distorsión será tal que:

$$|H(f)| = K \quad \text{módulo constante} \quad (1.6)$$

$$\angle H(f) = -2\pi f t_0 \quad \text{fase lineal} \quad (1.7)$$

De esta forma la respuesta frecuencial de la salida en un sistema sin distorsión será:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) \cdot H(f) = X(f) \cdot K e^{-j2\pi f t_0} \\ |Y(f)| &= K \cdot |X(f)| \\ \angle Y(f) &= \angle X(f) - 2\pi f t_0 \end{aligned}$$

Si alguna de las dos condiciones no se cumple, entonces decimos que el sistema presenta distorsión lineal, bien *de amplitud*, si no se cumple la condición del módulo, bien *de fase*, si no se cumple la condición de la fase de la respuesta frecuencial:

$$\text{Si } |H(f)| \neq K \quad \Rightarrow \text{Distorsión lineal de amplitud} \quad (1.8)$$

$$\text{Si } \angle H(f) \neq -2\pi f t_0 \quad \Rightarrow \text{Distorsión lineal de fase} \quad (1.9)$$

Estas condiciones para la respuesta frecuencial deben cumplirse para el rango de frecuencias en las que se encuentra la señal de entrada. Por ejemplo, si la señal de entrada  $x(t)$  es de tipo *paso bajo*, tal que  $X(f) \neq 0$  en  $|f| < B$  Hz, las condiciones 1.6 y 1.7 deberán cumplirse en ese mismo rango de frecuencias. De la misma forma, si se trata de una señal paso banda, con su respuesta definida en  $f_1 < |f| < f_2$ , las condiciones 1.6 y 1.7 deberán igualmente cumplirse en ese mismo rango de frecuencias.

### 1.2.2.2. Distorsión no lineal

La distorsión no lineal se genera en los sistemas no lineales. En estos sistemas la salida no puede calcularse utilizando la respuesta al impulso y la ecuación de convolución. Para una señal de entrada  $x(t)$ , se obtiene la salida a través de la función característica, para la que suele utilizarse una aproximación polinómica:

$$y(t) = C_0 + C_1 \cdot x(t) + C_2 \cdot x^2(t) + \dots + C_N \cdot x^N(t)$$

De forma que:

$$Y(f) = C_0 + C_1 \cdot X(f) + C_2 \cdot X(f) * X(f) + \dots + C_N \cdot \underbrace{X(f) * \dots * X(f)}_N$$

De las ecuaciones anteriores, está claro que a la salida aparecerán frecuencias nuevas, no presentes en la señal de entrada, debido justamente a los términos que generan la no linealidad ( $C_0, C_2, \dots, C_N$ ). La medida de la distorsión del sistema se realiza utilizando como entrada una señal piloto o tono de prueba,  $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ . Con esta entrada, además de la propia señal de prueba (escalada) a la salida encontraremos tonos a frecuencias doble ( $2f_0$ ), triple ( $3f_0$ ), etc. (los armónicos de  $f_0$ ). La distorsión pretende evaluar en qué cantidad aparecen dichas frecuencias. Así, se define por un lado la distorsión introducida por cada armónico:

$$d_n = \frac{A_n}{A_1}$$

en donde  $A_n$  es la amplitud de salida del armónico  $n$ -ésimo, y  $A_1$  la amplitud de salida correspondiente a la frecuencia de entrada  $f_0$ . El valor de  $d_n^2$  expresa la relación, a la salida del sistema, entre la potencia del armónico  $n$ -ésimo no deseado y la potencia del primer armónico (armónico deseado). Para calcular la distorsión total, calculamos la potencia total no deseada en relación a la potencia del primer armónico, definiéndose la Distorsión Armónica Total (conocida como  $THD\%$ ) introducida por el sistema como:

$$THD\% = \sqrt{\sum_{n>1} d_n^2} \cdot 100\%$$



# Tema 2

## Señales y procesos aleatorios

### 2.1. Procesos aleatorios

#### 2.1.1. Introducción a los procesos aleatorios

El esquema de la figura 2.1 muestra una posible clasificación para las señales. Como puede verse, las señales reales pueden ser deterministas o aleatorias. Para las señales complejas puede realizarse la misma clasificación, con la diferencia de que se tratará de señales bidimensionales.

Las señales deterministas son aquellas que quedan totalmente definidas a partir de una cierta expresión matemática, de forma que es posible conocer exactamente el valor que tiene la señal para cada instante de tiempo. Por ejemplo, si consideramos la expresión  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$ , siendo  $A$ ,  $f_0$  y  $\phi$  valores constantes de amplitud, frecuencia y fase inicial, podemos determinar el valor de  $x(t)$  de forma exacta para cualquier valor deseado de  $t$ .

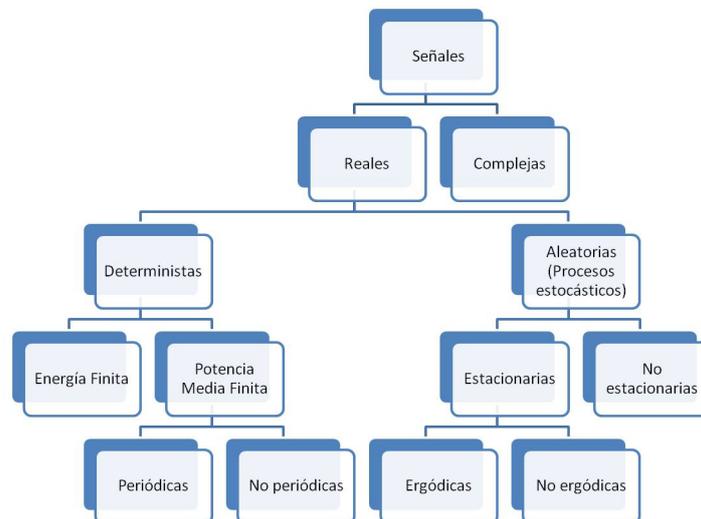
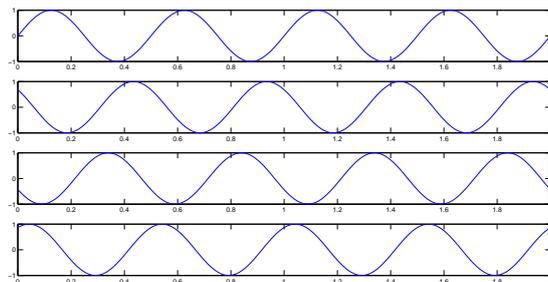


Figura 2.1: Clasificación de las señales

Sin embargo, los mensajes transmitidos en un sistema de comunicación no pertenecen a ese grupo de señales deterministas, ya que lógicamente en el receptor el mensaje no se conoce de antemano. Si pensamos por ejemplo en un mensaje formado por bits representados por un tren de pulsos rectangulares de amplitudes  $1V$  y  $0V$ , no será posible saber con antelación si la amplitud del pulso en un cierto instante va a ser una u otra. Adicionalmente, existen perturbaciones

en los sistemas de comunicación que tienen carácter aleatorio, para los que tampoco es posible conocer su valor con antelación, como por ejemplo el ruido, o ciertas interferencias procedentes de otros sistemas de comunicación. Tanto en un caso como en el otro, necesitaremos un conjunto de herramientas matemáticas que nos permitan trabajar con este tipo de señales de carácter aleatorio. Estas herramientas nos las proporcionará la Estadística, a través de modelos capaces de representar las regularidades presentes en las señales o en las perturbaciones.

Una señal o proceso aleatorio es una función que además de depender del tiempo, depende también de una o varias variables aleatorias. Por ejemplo, consideremos la señal  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$  en la que  $f_0$  y  $A$  son constantes (al igual que antes), pero en la que ahora  $\phi$  es una variable aleatoria, que podrá tomar valores en el intervalo  $[0, 2\pi]$  con una cierta probabilidad<sup>1</sup>. Los valores que toma  $x(t)$  a lo largo del tiempo dependerán del valor (aleatorio) tomado por  $\phi$ . Si queremos representar gráficamente  $x(t)$  tendremos forzosamente que dar valores a  $\phi$  (los valores de  $A$  y de  $f_0$  son constantes y por tanto se suponen conocidos). La función que resulta de dar valores específicos a la variable aleatoria se conoce como una *realización del proceso*  $x(t)$ <sup>2</sup>. Por ejemplo, en la figura 2.2 se han representado cuatro realizaciones del seno de fase aleatoria.



**Figura 2.2:** 4 realizaciones de un seno de fase aleatoria

En los próximos apartados estudiaremos los estadísticos que nos permitirán trabajar con los procesos aleatorios (también llamados *procesos estocásticos*) más comunes en los sistemas de comunicación. En el apartado 2.1.3 se repasan brevemente algunos conceptos básicos de estadística.

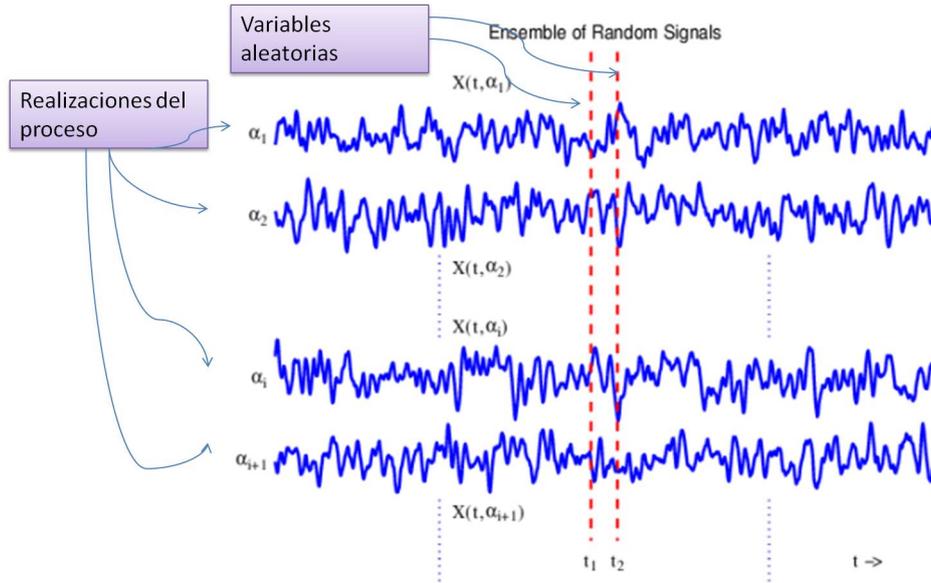
### 2.1.2. Definiciones

Considere un conjunto de señales ruidosas, como las representadas en la figura 2.3, que podrían haber sido generadas por algún elemento ruidoso. Todas las señales representadas son diferentes entre sí, pero al haber sido generadas por el mismo proceso estocástico, poseen ciertos elementos que las caracterizan a todas. Cada una de las señales  $x(t, \alpha_i)$  es una manifestación concreta del proceso de generación de ruido, también llamada *realización del proceso* o *función muestra*. El conjunto (infinito) de todas las realizaciones o funciones muestra constituye el *proceso estocástico*  $x(t)$ .

<sup>1</sup>Esta función se conoce como *seno de fase aleatoria* y es muy utilizada en comunicaciones porque representa el hecho de desconocer la fase con la que una portadora senoidal de frecuencia conocida alcanza el receptor.

<sup>2</sup>Esto es equivalente a cuando se dan valores a una variable aleatoria, que resulta en las diferentes posibles realizaciones de la variable.

Si elegimos ahora en el proceso estocástico un instante de tiempo  $t_1$  y observamos los valores que toma el proceso (es decir,  $x(t_1, \alpha)$ ) obtendremos una variable aleatoria  $x_1 = x(t_1, \alpha)$ . Eligiendo cualquier otro instante  $t_2$  los valores observados constituyen otra variable aleatoria  $x_2 = x(t_2, \alpha)$ . El conjunto de todas las (infinitas) variables aleatorias  $x(t_i, \alpha)$  definirá el proceso estocástico  $x(t, \alpha)$ . A los promedios o estadísticos calculados para las variables aleatorias  $x_1, x_2 \dots x_n$  les llamaremos *promedios de ensamble*. Por otro lado, los promedios de las funciones muestra, calculados a lo largo del tiempo, serán *promedios temporales*.



**Figura 2.3:** Representación de un proceso aleatorio

El promedio temporal de una señal  $x(t)$  se calcula como:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

En un proceso aleatorio, podremos calcular el promedio temporal de cualquiera de sus realizaciones  $x(t, \alpha_i)$  de la misma manera:

$$\langle x(t, \alpha_i) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t, \alpha_i) dt$$

El cálculo de un promedio en la dirección de ensamble (representado a través del operador *Esperanza*,  $E\{\cdot\}$ ) consistirá en calcular el valor medio de la variable aleatoria que queda definida. Para ello, necesitaremos la *función de densidad de probabilidad* de la variable aleatoria, es decir, del proceso en el instante elegido. Para el instante  $t_i$ :

$$E\{x(t_i, \alpha)\} = \int x(t_i, \alpha) f_x(x, t_i) dx$$

en donde  $f_x(x, t_i)$  es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $x(t_i, \alpha)$ .

Para simplificar la nomenclatura utilizada para los procesos y las variables aleatorias que los definen, es habitual eliminar el uso del parámetro  $\alpha$ . De esta forma, hablaremos del proceso  $x(t)$ , y de las variables aleatorias que lo definen  $x_i = x(t_i)$ , cuyas funciones densidad de probabilidad serán  $f_{x_i}(x_i) = f_x(x, t_i)$ . Sabremos si la expresión  $x(t)$  se refiere a una señal determinista o a un proceso estocástico por el contexto en que se utilice.

### 2.1.3. Conceptos básicos de estadística

En este apartado repasamos algunas nociones de estadística que utilizaremos con frecuencia.

**Función de densidad de probabilidad (fdp)** Esta función define con qué probabilidad una variable aleatoria toma valores en un cierto intervalo. Si consideramos la variable aleatoria  $x$  con fdp  $f_x(x)$ , la probabilidad de que  $x$  tome los valores del intervalo  $[a, b]$  es:

$$p(x \in [a, b]) = \int_a^b f_x(x) dx$$

Es decir, la probabilidad de que  $x$  tome valores en el intervalo  $[a, b]$  es el área de su fdp en dicho intervalo. Por lo tanto, el área total de la fdp debe valer 1.

**Operador esperanza,  $E\{\cdot\}$**  Este operador calcula el valor medio de su argumento:

$$E\{x\} = \int x f_x(x) dx$$

$$E\{x^2\} = \int x^2 f_x(x) dx$$

Se trata de un operador lineal, es decir:

$$E\{\alpha x + \beta y\} = \alpha E\{x\} + \beta E\{y\}$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  constantes y  $x$  e  $y$  dos variables aleatorias.

**Funciones de una variable aleatoria** Si queremos calcular la esperanza de una variable aleatoria  $Y$  que está expresada como una función de otra  $Y = g(X)$  de la que conocemos su fdp,  $f_X(X)$ , aplicaremos la siguiente regla:

$$E\{Y\} = \int Y f_Y(Y) dY = \int g(X) f_X(X) dX$$

**Esperanza de un proceso** Si queremos calcular la esperanza de un proceso  $x(t)$ , expresado como una función  $g(V, t)$  que depende de  $t$  y de una variable aleatoria  $V$  de la que conocemos su fdp,  $f_V(V)$ , aplicaremos la siguiente regla:

$$x(t) = g(V, t)$$

$$E\{x(t)\} = E\{g(V, t)\} = \int g(V, t) f_V(V) dV$$

Si hay dos variables aleatorias  $V, W$ , con función de densidad de probabilidad conjunta  $f_{VW}(V, W)$ , y  $x(t) = g(V, W, t)$ :

$$x(t) = g(V, W, t)$$

$$E\{x(t)\} = E\{g(V, W, t)\} = \iint g(V, W, t) f_{VW}(V, W) dV dW$$

## 2.2. Promedios de ensamble

Los promedios de ensamble que vamos a necesitar son los siguientes:

- Para un proceso:
  - Valor medio
  - Autocorrelación
  - Valor Cuadrático Medio
  - Autocovarianza
  - Varianza
- Para dos procesos
  - Correlación cruzada
  - Covarianza cruzada
  - Coeficiente de correlación

### 2.2.1. Valor medio

El valor medio (o simplemente la media) de un proceso es un *estadístico de primer orden*. Proporciona la media de cada una de las variables aleatorias  $x_i = x(t_i, \alpha)$  que definen un proceso como una función del tiempo:

$$m_x(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_x(x, t) dx$$

**Procesos estacionarios** Cuando la función de densidad de probabilidad de las variables aleatorias  $x_i$  no depende de  $t$  ( $f_x(x, t_i) = f_x(x, t_j), \forall t_i, t_j$ ) entonces la media del proceso será también constante e independiente de  $t$ . En este caso se dice que el proceso es **estacionario de primer orden** o también **estacionario en la media**. En este caso  $E\{x(t)\} = m_x(t) = m_x$ .

El valor medio de un proceso se conoce también como su componente continua o componente DC.

### 2.2.2. Autocorrelación

La función de Autocorrelación de un proceso es un *estadístico de segundo orden*. Se calcula como el valor medio del producto de dos valores del proceso tomados en dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ :<sup>3</sup>

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x^*(t_2)\}$$

---

<sup>3</sup>Se ha considerado la expresión general para procesos complejos.

**Procesos estacionarios** En la expresión anterior, intervienen dos variables aleatorias ( $x_1 = x(t_1)$  y  $x_2 = x(t_2)$ ) y el cálculo del promedio del producto de las dos variables requiere conocer la función de densidad de probabilidad conjunta de las dos variables  $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$ . Cuando esta función depende únicamente de la distancia entre los dos instantes de tiempo considerados, la función de Autocorrelación puede escribirse en función de la diferencia  $\tau = t_1 - t_2$ :

$$R_x(\tau) = E\{x(t + \tau)x^*(t)\} = \left. \begin{array}{l} t + \tau = t' \\ t = t' - \tau \end{array} \right\} = E\{x(t')x^*(t' - \tau)\} \quad (2.1)$$

En este caso, se dice que el proceso  $x(t)$  es **estacionario de segundo orden** o también **estacionario en la autocorrelación**.

Para que un proceso sea estacionario de segundo orden, deberá ser también estacionario de primer orden.

Un proceso que es estacionario de segundo orden se dice que es **Estacionario en sentido amplio**, y es conocido por sus siglas en inglés *WSS*, *Wide-Sense-Stationary*. Un proceso *estacionario en sentido estricto* sería aquél para el cual la estacionariedad se cumple para estadísticos de orden superior a dos. Para la comprensión, el estudio y el modelado de la mayoría de los procesos que intervienen en los sistemas de comunicación es suficiente con conocer los estadísticos de segundo orden. Adicionalmente, la mayoría de estos procesos son WSS.

### 2.2.3. Valor Cuadrático Medio

El valor cuadrático medio de un proceso es un caso particular de su función de autocorrelación, obtenido para  $t_1 = t_2 = t$ :

$$R_x(t, t) = E\{|x(t)|^2\} = P_x(t)$$

Este valor es además la **Potencia del proceso**.

**Procesos estacionarios** Cuando el proceso es estacionario (en sentido amplio) este valor será independiente de  $t$  y coincide con el valor de la función de autocorrelación en el origen:

$$P_x = R_x(0) = E\{|x(t)|^2\}$$

### 2.2.4. Autocovarianza

La autocovarianza de un proceso es la autocorrelación del proceso sin media:

$$\begin{aligned} C_x(t_1, t_2) &= E\{(x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))^*\} \\ &= E\{x(t_1)x^*(t_2) - x(t_1)m_x^*(t_2) - m_x(t_1)x^*(t_2) + m_x(t_1)m_x^*(t_2)\} \\ &= R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x^*(t_2) - m_x(t_1)m_x^*(t_2) + m_x(t_1)m_x^*(t_2) \\ &= R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x^*(t_2) \end{aligned}$$

- Si el proceso es WSS:

$$C_x(\tau) = E\{(x(t + \tau) - m_x)(x(t) - m_x)^*\} = R_x(\tau) - |m_x|^2$$

### 2.2.5. Varianza

La varianza de un proceso es un caso particular de la Autocovarianza del proceso, calculado cuando  $t_1 = t_2$ :

$$\sigma_x^2(t, t) = R_x(t, t) - |m_x(t)|^2$$

Es decir, se trata de la potencia del proceso sin media.

**Procesos estacionarios** Para un proceso WSS, esta potencia será constante e independiente de  $t$ :

$$\sigma_x^2 = R_x(0) - |m_x|^2 = P_x - |m_x|^2$$

Como vemos, la potencia total del proceso  $P_x = R_x(0)$  tiene dos componentes. Por un lado  $|m_x|^2$ , que al ser  $m_x$  el valor medio del proceso, será la potencia de dicho valor medio. El resto, la varianza  $\sigma_x^2$  será la potencia del proceso sin media, es decir de la *componente alterna* del proceso. El valor  $\sigma_x$  se conoce como la *desviación típica o desviación estándar* del proceso  $x(t)$ .

### 2.2.6. Correlación cruzada

La correlación cruzada de dos procesos  $x(t)$  e  $y(t)$  es un estadístico de segundo orden, calculado como el valor medio del producto de los dos procesos:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y^*(t_2)\}$$

Para el cálculo de este estadístico necesitaremos conocer  $f_{x_1y_2}(x_1, y_2)$ , la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias  $x_1 = x(t_1)$  e  $y_2 = y(t_2)$ ,  $\forall(t_1, t_2)$ . En el caso en el que estas dos variables aleatorias sean independientes, esta función de densidad de probabilidad se podrá calcular como el producto de las funciones de densidad de probabilidad de cada una de las variables:

$$f_{x_1y_2}(x_1, y_2) = f_{x_1}(x_1)f_{y_2}(y_2) \quad (2.2)$$

y si esto ocurre para todo  $t_1, t_2$ , entonces los procesos  $x(t)$  e  $y(t)$  son independientes y por tanto:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)\}E\{y^*(t_2)\} = m_x(t_1)m_y^*(t_2) \quad (2.3)$$

**Procesos estacionarios** Si los dos procesos son WSS, y son además *conjuntamente estacionarios* entonces la correlación cruzada entre ambos procesos será una función de la diferencia  $\tau$  entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ ,  $\tau = t_1 - t_2$ :

$$R_{xy}(\tau) = E\{x(t + \tau)y^*(t)\} = E\{x(t)y^*(t - \tau)\}$$

El valor de la correlación cruzada en el origen se conoce como la *Potencia cruzada de los procesos*:

$$P_{xy} = R_{xy}(0) = E\{x(t)y^*(t)\}$$

Si los dos procesos son además de conjuntamente estacionarios, independientes se cumplirá 2.2:

$$R_{xy}(\tau) = E\{x(t+\tau)y^*(t)\} = E\{x(t+\tau)\}E\{y^*(t)\} = m_x \cdot m_y^* \quad (2.4)$$

### 2.2.7. Covarianza cruzada

La covarianza cruzada entre dos procesos es la correlación cruzada de los dos procesos sin su media:

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= E\{x(t_1) - m_x(t_1)(y^*(t_2) - m_y^*(t_2))\} \\ &= E\{x(t_1)y^*(t_2)\} - m_x(t_1)E\{y^*(t_2)\} - m_y^*(t_2)E\{x(t_1)\} + m_x(t_1)m_y^*(t_2) \\ &= R_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y^*(t_2) \end{aligned}$$

**Procesos estacionarios** Para procesos conjuntamente estacionarios, la covarianza cruzada dependerá únicamente de la diferencia de los instantes  $t_1$  y  $t_2$ :

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= E\{(x(t+\tau) - m_x)(y^*(t) - m_y^*)\} \\ &= R_{xy}(\tau) - m_x \cdot m_y^* \end{aligned}$$

### 2.2.8. Coeficiente de correlación cruzada

Se define el coeficiente de correlación cruzada entre dos procesos como:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{C_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}$$

**Procesos estacionarios** Si los dos procesos son conjuntamente estacionarios:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y}$$

### 2.2.9. Procesos incorrelados, ortogonales e independientes

En este apartado por simplificar, nos referiremos únicamente a los procesos estacionarios y en su caso conjuntamente estacionarios. Las definiciones serían similares para procesos no estacionarios.

**Procesos incorrelados** Dos procesos son incorrelados si su covarianza cruzada vale cero, para todo  $\tau$ :

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= 0 \quad \forall \tau \\ R_{xy}(\tau) &= m_x \cdot m_y^* \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Procesos ortogonales** Dos procesos son ortogonales si su correlación cruzada vale cero, para todo  $\tau$ :

$$R_{xy}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

Además, como puede deducirse de la expresión 2.5, si dos procesos  $x(t)$  e  $y(t)$  están incorrelados y uno de ellos es de media cero, entonces  $R_{xy}(\tau) = 0$ , es decir, los dos procesos son ortogonales.

Adicionalmente, si dos procesos  $x(t)$  e  $y(t)$  son estadísticamente independientes (ver 2.4), entonces  $R_{xy}(\tau) = m_x \cdot m_y^*$  y los dos procesos están incorrelados.

Es importante tener en cuenta que el hecho de que dos procesos estén incorrelados, ello no implica necesariamente que sean estadísticamente independientes. Es decir, así como independencia implica incorrelación, la inversa no es cierto, incorrelación no implica necesariamente independencia.

### Ejemplo: superposición de procesos

Considere el proceso  $z(t) = x(t) \pm y(t)$ . Suponiendo  $x(t)$  e  $y(t)$  conjuntamente estacionarios, calcular  $R_z(\tau)$  y  $G_z(f)$ .

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \mathbb{E}\{z(t+\tau)z^*(t)\} = \mathbb{E}\{(x(t+\tau) \pm y(t+\tau))(x^*(t) \pm y^*(t))\} \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm R_{xy}(\tau) \pm R_{yx}(\tau) \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm (R_{xy}(\tau) + R_{xy}^*(-\tau)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tomando transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} G_z(f) &= G_x(f) + G_y(f) \pm (G_{xy}(f) + G_{xy}^*(f)) \\ &= G_x(f) + G_y(f) \pm 2\Re\{G_{xy}(f)\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si los dos procesos son **incorrelados**:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= m_x \cdot m_y^* \\ R_{xy}^*(-\tau) &= m_x^* \cdot m_y \\ G_{xy}(f) &= m_x \cdot m_y^* \cdot \delta(f) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm 2\Re\{m_x \cdot m_y^*\} \\ G_z(f) &= G_x(f) + G_y(f) \pm 2\Re\{m_x \cdot m_y^* \cdot \delta(f)\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si además uno de los dos es de media cero (procesos **ortogonales**):

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \\ G_z(f) &= G_x(f) + G_y(f) \end{aligned} \quad (2.10)$$

## 2.3. Propiedades de los procesos estacionarios

En este apartado se resaltan algunas de las propiedades y características más relevantes de la función de autocorrelación y de la correlación cruzada para procesos WSS.

## 1. Simetría hermítica de la función de autocorrelación

La función de autocorrelación presenta simetría hermitica, es decir  $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E\{x(t+\tau)x^*(t)\} \\ R_x^*(\tau) &= E\{x^*(t+\tau)x(t)\} \\ R_x^*(-\tau) &= E\{x^*(t-\tau)x(t)\} = R_x(\tau) \end{aligned}$$

Si el proceso es real ( $x(t) = x^*(t)$ ), entonces su función de autocorrelación es también real y por lo tanto tendrá simetría par:  $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ .

## 2. Máximo en el origen.

La función de autocorrelación presenta un máximo en el origen<sup>4</sup>:  $|R_x(\tau)| < R_x(0)$ . Lo demostraremos a continuación para procesos reales, aunque la propiedad se cumple igualmente para procesos complejos.

Partimos del hecho de que la potencia de un proceso es una cantidad siempre positiva, y lo aplicamos a los procesos  $y_1(t) = x(t+\tau) + x(t)$  e  $y_2(t) = x(t+\tau) - x(t)$ :

$$\begin{aligned} R_y(0) &= E\{|y(t)|^2\} > 0 \\ E\{(x(t+\tau) \pm x(t))(x(t+\tau) \pm x(t))\} &> 0 \\ E\{|x(t+\tau)|^2\} + E\{|x(t)|^2\} \pm E\{x(t)x(t+\tau)\} \pm E\{x(t+\tau)x(t)\} &> 0 \\ 2(R_x(0) \pm R_x(\tau)) &> 0 \end{aligned}$$

De forma que:

$$\begin{aligned} R_x(0) &> -R_x(\tau) \text{ tomando el signo +} \\ R_x(0) &> R_x(\tau) \text{ tomando el signo -} \end{aligned}$$

Es decir que  $R_x(0) > |R_x(\tau)|$ .

## 3. Procesos periódicos en la media cuadrática.

Si existe algún valor de  $\tau = \tau_0$  para el cual  $R_x(\tau_0) = R_x(0)$  (es decir, se alcanza el valor máximo del origen), entonces la función de autocorrelación es periódica con periodo  $\tau_0$  ( $R_x(\tau) = R_x(\tau + \tau_0)$ ). En este caso, se dice que el proceso  $x(t)$  es *periódico en la media cuadrática*. Para estos procesos se cumple que  $E\{|x(t+\tau_0) - x(t)|^2\} = 0$ , es decir, que no hay potencia en la diferencia entre el proceso y el mismo desplazado el valor del periodo. En efecto, siendo  $x(t)$  un proceso real<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} E\{|x(t+\tau_0) - x(t)|^2\} &= 0 \\ E\{|x(t+\tau_0)|^2\} + E\{|x(t)|^2\} - 2E\{x(t+\tau_0)x(t)\} &= 0 \\ 2R_x(0) - 2R_x(\tau_0) &= 0 \\ R_x(0) &= R_x(\tau_0) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Ver la propiedad 3 para tratar de caso de igualdad

<sup>5</sup>Por simplificar lo demostramos únicamente para procesos reales.

## 4. Simetría de la función de correlación cruzada.

La correlación cruzada de dos procesos  $x(t)$  e  $y(t)$  presenta la siguiente simetría:  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E\{x(t+\tau)y^*(t)\} \\ R_{yx}(\tau) &= E\{y(t+\tau)x^*(t)\} \\ R_{yx}^*(\tau) &= E\{y^*(t+\tau)x(t)\} \\ R_{yx}^*(-\tau) &= E\{y^*(t-\tau)x(t)\} \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} t - \tau = t' \\ t = t' - \tau \end{array} \right\} \\ R_{yx}^*(-\tau) &= E\{y^*(t')x(t'+\tau)\} = R_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

## 2.4. Promedios temporales y procesos ergódicos

Los procesos ergódicos son aquellos en los que los promedios temporales de las realizaciones del proceso coinciden con los promedios de ensamble. Estudiaremos únicamente la ergodicidad de los procesos en la media y en la autocorrelación, o en la correlación cruzada en el caso de estudiar la ergodicidad conjunta de dos procesos. En los procesos ergódicos, los estadísticos del proceso (media y autocorrelación) pueden determinarse a partir de una única realización, calculando los promedios temporales.

**Ergodicidad en la media** Un proceso es ergódico en la media si el promedio temporal de una cualquiera de sus realizaciones  $\langle x_i(t) \rangle$  coincide con el promedio de ensamble:

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = E\{x(t)\} = m_x$$

Para que un proceso sea ergódico en la media debe ser estacionario de segundo orden (ó WSS).

Si un proceso es ergódico en la media, el valor medio de la función de autocorrelación vale  $|m_x|^2$ :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T R_x(\tau) d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T E\{x(t+\tau)x^*(t)\} d\tau \\ &= E\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t+\tau)x^*(t) d\tau \right\} \\ &= E\{x(t)\langle x^*(t) \rangle\} = |m_x|^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Ergodicidad en la autocorrelación** Un proceso es ergódico en la autocorrelación si la autocorrelación temporal (a la que denominaremos  $\rho_x(\tau)$ ) de una cualquiera de sus realizaciones coincide con la autocorrelación del proceso:

$$\rho_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t+\tau)x_i^*(t) dt = E\{x(t+\tau)x^*(t)\} = R_x(\tau) \quad (2.12)$$

La ergodicidad en la autocorrelación requiere estacionariedad de orden 4 (sin demostración).

**Ejemplo** Estudiamos la estacionariedad y ergodicidad del proceso  $x(t) = A$  siendo  $A$  una v.a. uniformemente distribuida en  $[-V, V]$ .

Su media de ensamble:  $E\{A\} = 0$

Y su autocorrelación:

$$E\{A^2\} = \int_{-V}^V A^2 \frac{1}{2V} dA = \frac{V^2}{3} \quad (2.13)$$

Por lo que el proceso es WSS.

Su media temporal:

$$\langle x(t) \rangle = A \quad (2.14)$$

depende de la realización elegida, por lo que el proceso NO es ergódico en la media (y por tanto tampoco presenta ergodicidad de orden superior).

### 2.4.1. Resumen promedios temporales y de ensamble

La tabla 2.4 resume las definiciones dadas tanto para los promedios temporales como para los promedios de ensamble, así como su interpretación conceptual.

## 2.5. Representación espectral de señales aleatorias

### 2.5.1. Densidad espectral de potencia

La Densidad Espectral de Potencia (DEP) de un proceso es una función que describe cómo está distribuida la potencia del proceso sobre las diferentes frecuencias que lo componen. Puede calcularse como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f)$$

También podemos obtener la siguiente expresión para  $G_x(f)$ :

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_{T_i}(f)|^2\}}{T}$$

$$X_{T_i}(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

en donde  $x_i(t)$  sería una realización del proceso, y  $T$  un intervalo de tiempo representativo.

Esta expresión nos presenta una interpretación del modo de cálculo de la DEP de un proceso WSS:

- $X_{T_i}(f)$  es la transformada de Fourier de un segmento de duración  $T$  de una de las realizaciones del proceso.
- $|X_{T_i}(f)|^2$  es la Densidad Espectral de Energía de ese segmento de duración finita.
- $E\{|X_{T_i}(f)|^2\}$  será el promedio de esa Densidad Espectral de Energía para todas las realizaciones del proceso (promedio realizado en la dirección de ensamble).
- El último paso divide el valor obtenido (para cada frecuencia) por la duración del segmento para obtener una potencia, y extiende el intervalo a  $\infty$ .

Estadístico	Expresión estadística	Expresión temporal	Interpretación
Media $m_x$	$E\{x(t)\} = \int x(t) f_x(x, t) dx$	$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$	Componente continua
Valor Cuadrático Medio VCM	$E\{x(t) \cdot x^*(t)\}$	$\langle x(t) \cdot x^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x^*(t) dt$	Potencia Total
Varianza $\sigma_x^2$	$E\{ x(t) - E\{x(t)\} ^2\} = E\{ x(t) ^2\} - E^2\{x(t)\}$	$\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)(x(t) - \langle x(t) \rangle)^* \rangle = \langle  x(t) ^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2$	Potencia del proceso/señal sin media (Potencia de la componente alterna)
Desviación típica $\sigma_x$	$\sqrt{E\{ x(t) - E\{x(t)\} ^2\}} = \sqrt{E\{ x(t) ^2\} - E^2\{x(t)\}}$	$\sqrt{\langle  x(t) ^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2}$	Valor eficaz
Autocorrelación	$R_x(\tau) = E\{x(t+\tau) \cdot x^*(t)\}$	$\rho_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) \cdot x^*(t) \cdot dt$	Parecido de $x(t+\tau)$ con $x(t)$
Autocovarianza $C_x(\tau)$	$C_x(\tau) = E\{(x(t+\tau) - m_x) \cdot (x(t) - m_x)^*\} = R_x(\tau) - m_x^2$	$C_x(\tau) = \langle (x(t+\tau) - m_x) \cdot (x(t) - m_x)^* \rangle = \rho_x(\tau) - m_x^2$	Parecido de $x(t+\tau)$ sin media con $x(t)$ sin media
Correlación cruzada $R_{xy}(\tau)$	$R_{xy}(\tau) = E\{x(t+\tau) \cdot y^*(t)\}$	$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) \cdot y^*(t) \cdot dt$	Parecido de $x(t+\tau)$ con $y(t)$
Covarianza cruzada $C_{xy}(\tau)$	$C_{xy}(\tau) = E\{(x(t+\tau) - m_x) \cdot (y(t) - m_y)^*\} = R_{xy}(\tau) - m_x m_y^*$	$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t+\tau) - m_x) \cdot (y(t) - m_y)^* \cdot dt = r_{xy}(\tau) - m_x m_y^*$	Parecido de $x(t+\tau)$ sin media con $y(t)$ sin media
Coefficiente de correlación	$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$	$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$	Como $C_{xy}(\tau)$ , normalizado a los valores eficaces de las señales

Figura 2.4: Definiciones de promedios temporales y promedios de ensamble

### 2.5.2. Propiedades

1.  $G_x(f)$  es siempre real. Partimos de la simetría hermítica de la función de autocorrelación  $R_x(\tau)$ :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_x^*(-\tau) \\ G_x(f) &= G_x^*(f) \Rightarrow G_x(f) \text{ es real} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se ha utilizado que si  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \Rightarrow x^*(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(f)$

2.  $G_x(f) \geq 0 \quad \forall f$

Es decir,  $G_x(f)$  es una función real y positiva.

3. Si  $x(t)$  real  $\Rightarrow G_x(f)$  real y par

$$\begin{aligned} x(t) \text{ real} &\Rightarrow R_x(\tau) = R_x(-\tau) (\text{par}) \\ G_x(f) &= G_x(-f) (\text{par}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

En este caso, también podemos expresar  $G_x(f)$  así:

$$\begin{aligned} G_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin(2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.17)$$

4.  $R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = P_x$

Es decir, la potencia del proceso puede calcularse como el área de la Densidad Espectral de Potencia.

5. Densidad Espectral de Potencia Cruzada de dos procesos WSS

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\{R_{xy}(\tau)\} &= G_{xy}(f) \\ R_{xy}(\tau) &= R_{yx}^*(-\tau) \\ G_{xy}(f) &= G_{yx}^*(f) \end{aligned} \quad (2.18)$$

## 2.6. Ejemplos prácticos

### 2.6.1. Coseno de fase aleatoria

Un proceso muy utilizado en comunicaciones es como ya se ha comentado el coseno (o el seno) de fase aleatoria:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

en donde  $A$  y  $f_0$  son constantes, y  $\phi$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Al ser el valor de la fase aleatorio y con distribución uniforme, no habrá ninguna diferencia en trabajar con el coseno o con el seno. La función de densidad de probabilidad uniforme de la variable  $\phi$  será  $f_\phi(\phi)$ :

$$f_\phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \phi \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

para lo que se ha tenido en cuenta que toda función de densidad de probabilidad debe cumplir que su área vale la unidad. La figura 2.2 mostrada al comienzo de este tema muestra algunas realizaciones de este proceso.

**Valor Medio** Calcularemos ahora el valor medio del proceso,  $E\{x(t)\}$ . Para hacerlo, tendremos en cuenta cómo se aplica el operador esperanza  $E\{\cdot\}$  a una función del tiempo, y de una o más variables aleatorias (ver apartado 2.1.3):

$$m_x = E\{x(t)\} = E\{A \cos(2\pi f_0 t + \phi)\} = A \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \frac{1}{2\pi} d\phi = 0$$

Se trata por tanto de un proceso de media cero y por tanto constante e independiente de  $t$ , por lo que podemos afirmar que el proceso es *estacionario en la media*.

**Autocorrelación** Partimos de la expresión general de la función de autocorrelación, sin asunciones previas sobre su posible estacionariedad <sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E\{x(t_1)x^*(t_2)\} = E\{A \cos(2\pi f_0 t_1 + \phi) A \cos(2\pi f_0 t_2 + \phi)\} \\ &= \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\phi)\} + E\{\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

ya que  $E\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\phi)\} = 0$  al tratarse del valor medio un coseno de fase aleatoria uniformemente distribuida, como en el párrafo anterior.

De esta forma se obtiene que  $R_x(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))$  que es una función de  $t_1 - t_2$  y podemos escribir:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (2.19)$$

Se trata por tanto de un proceso estacionario en la autocorrelación, con lo que ya podemos afirmar que es un proceso estacionario en sentido amplio WSS.

<sup>6</sup>En numerosas ocasiones utilizaremos las siguientes expresiones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \end{aligned}$$

**Ergodicidad** Tenemos interés en saber si el coseno de fase aleatoria es un proceso ergódico. Para ello debemos estudiar sus realizaciones y calcular los promedios temporales. Obtenemos una realización del proceso considerando  $\phi = \phi_i$  como un valor constante, obteniendo la señal  $x_i(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_i)$ . Esta es una señal periódica (con periodo  $\frac{1}{f_0}$ ). Su valor medio será:

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) dt = 0$$

Como vemos, el valor medio de cualquier realización del proceso es cero, y coincide con el valor medio de ensamble, por lo que podemos afirmar que el proceso es ergódico en la media.

Calculamos ahora la autocorrelación (temporal y determinista) de una realización del proceso:

$$\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_i(t + \tau) x_i^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_T \cos(2\pi f_0(t + \tau) + \phi_i) \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_T \cos(2\pi f_0(2t + \tau) + 2\phi_i) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_T \cos(2\pi f_0 \tau) dt \end{aligned}$$

En la expresión anterior, el primer sumando representa el cálculo del valor medio (temporal) de un coseno de frecuencia  $2f_0$  o periodo  $T_0/2$ , por lo que valdrá cero. En el segundo sumando  $\cos(2\pi f_0 \tau)$  no depende de  $t$  por lo que saldrá fuera de la integral (y del límite, ya que tampoco depende de  $T$ ):

$$\rho_x(\tau) = \cos(2\pi f_0 \tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_T dt = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

Este resultado coincide con el obtenido en la ecuación 2.19 para el promedio de ensamble, por lo que podemos afirmar que este proceso es ergódico también en la autocorrelación.

# Tema 3

## Transmisión de señales con ruido

### 3.1. Procesos estacionarios a través de sistemas LI

Consideramos el proceso WSS  $x(t)$  que atraviesa el sistema lineal e invariante con respuesta al impulso  $h(t)$ .

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

Conocidos los estadísticos del proceso de entrada (su media, su función de autocorrelación etc.) nos interesa conocer los del proceso de salida. Por ello, calcularemos la media y la función de autocorrelación del proceso de salida, así como las correlaciones cruzadas entre los procesos de entrada y salida del sistema. A partir de las expresiones calculadas, obtendremos las funciones DEP de la salida en función la DEP del proceso de entrada y de la respuesta frecuencial del sistema.

#### 3.1.1. Valor medio del proceso de salida

Si la media del proceso de entrada  $x(t)$  es  $m_x$ , queremos calcular  $m_y = \mathbb{E}\{y(t)\}$ :

$$\begin{aligned} m_y &= \mathbb{E}\{y(t)\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{x(t - \lambda)\} \cdot h(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Siendo  $x(t)$  un proceso estacionario,  $\mathbb{E}\{x(t - \lambda)\} = \mathbb{E}\{x(t)\} = m_x$  y por tanto:

$$\begin{aligned} m_y &= m_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \\ &= m_x \cdot H(0) \end{aligned}$$

siendo  $H(0)$  el valor en el origen ( $f = 0$ ) de la respuesta frecuencial del sistema  $H(f)$ .

### 3.1.2. Autocorrelación y correlaciones cruzadas

$$R_y(\tau) = \mathbb{E}\{y(t + \tau) \cdot y^*(t)\} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda \\ y(t + \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda \cdot y^*(t)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau - \lambda) \cdot h(\lambda) d\lambda \\ &= R_{xy}(\tau) * h(\tau) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$R_{xy}^*(-\tau) = R_{yx}(\tau)$$

$$R_y(\tau) = R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau) \quad (3.4)$$

Desarrollamos ahora  $R_{xy}(\tau)$ :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \mathbb{E}\{x(t + \tau) \cdot y^*(t)\} \\ &= \mathbb{E}\left\{x(t + \tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t - \lambda) \cdot h^*(\lambda) d\lambda\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \lambda) \cdot h^*(\lambda) d\lambda = \{\mu = -\lambda\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - \mu) \cdot h^*(-\mu) d\mu = \\ &= R_x(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned}$$

Y también:

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \quad (3.5)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau) \\ &= R_{xy}(\tau) * h(\tau) \\ &= R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned} \quad (3.6)$$

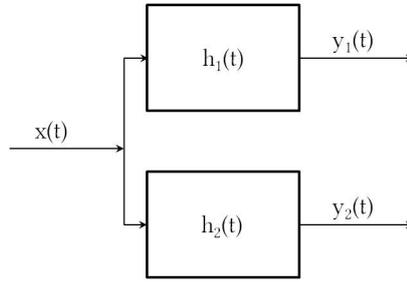
### 3.1.3. Densidades espectrales de potencia

Haciendo la transformada en (3.6):

$$\begin{aligned}
 G_y(f) &= G_x(f) \cdot H^*(f) \cdot H(f) \\
 G_y(f) &= G_x(f) \cdot |H(f)|^2 \\
 &= G_{yx}(f) \cdot H^*(f) \\
 &= G_{xy}(f) \cdot H(f)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

#### Ejemplo: Procesos ortogonales

Considere el proceso  $x(t)$  que atraviesa en paralelo los sistemas  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$  dando lugar a los procesos  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  respectivamente.



Deseamos obtener  $G_{y_1y_2}(f)$  y analizar en qué casos serán  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  ortogonales. Calculamos primero  $R_{y_1y_2}(\tau)$  y después transformamos:

$$\begin{aligned}
 R_{y_1y_2}(\tau) &= \mathbb{E}\{y_1(t+\tau) \cdot \int x^*(t-\lambda) \cdot h_2^*(\lambda) d\lambda\} \\
 &= \int R_{y_1x}(\tau+\lambda) \cdot h_2^*(\lambda) d(\lambda) \\
 &= \int R_{y_1x}(\tau-\mu) \cdot h_2^*(-\mu) d(\mu) \\
 &= R_{y_1x}(\tau) * h_2^*(-\tau)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Y teniendo en cuenta (3.5):

$$\begin{aligned}
 R_{y_1y_2}(\tau) &= R_x(\tau) * h_1(\tau) * h_2^*(-\tau) \\
 G_{y_1y_2}(f) &= G_x(f) \cdot H_1(f) \cdot H_2^*(f)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Podemos ver que :

$$\text{Si } H_1(f) \cdot H_2^*(f) = 0 \Rightarrow R_{y_1y_2}(\tau) = 0 \tag{3.10}$$

y los dos procesos de salida serán ortogonales. Un caso particular para el que esto se cumplirá será cuando las respuestas  $H_1(f)$  y  $H_2(f)$  no se solapan en frecuencia. Como:

$$\begin{aligned}
 G_{y_1}(f) &= G_x(f) \cdot |H_1(f)|^2 \\
 \text{y } G_{y_2}(f) &= G_x(f) \cdot |H_2(f)|^2
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

y si  $H_1(f)$  y  $H_2(f)$  no se solapan, tampoco lo harán  $G_{y_1}(f)$  y  $G_{y_2}(f)$ . De aquí podemos deducir que si dos procesos tienen DEP tales que no se solapan en frecuencia, los dos procesos son **ortogonales**.

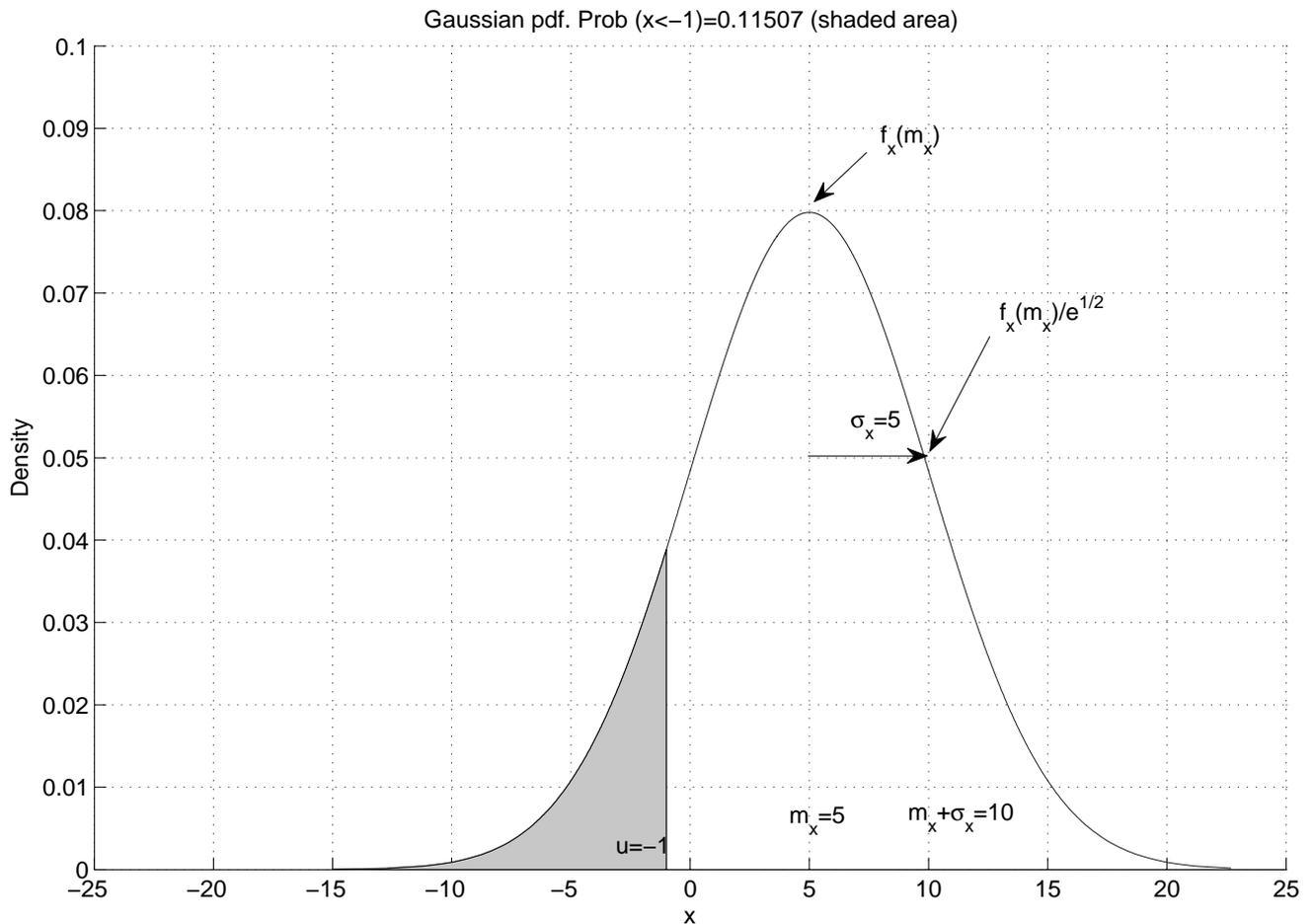
## 3.2. Procesos Gaussianos

Un proceso gaussiano (también llamado **normal**) es aquel en el que las variables aleatorias que lo definen  $(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$  son conjuntamente gaussianas para cualquier  $n, t_1, \dots, t_n$ . Antes de estudiar los procesos gaussianos, repasamos las propiedades de las variables aleatorias gaussianas.

### 3.2.1. Variables aleatorias gaussianas

Una variable aleatoria  $x$  es gaussiana si su función densidad de probabilidad (fdp) es:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.12)$$



**Figura 3.1:** Función densidad de probabilidad gaussiana

En donde  $m_x$  es la media de  $x$  y  $\sigma_x$  su desviación estándar ( $\sigma_x > 0$ ). La figura 3.1 muestra esta fdp con  $m_x = 5$  y  $\sigma_x = 5$ . Una v.a. **estándar normal** tiene media cero y desviación estándar unidad. Si  $z$  es una v.a. estándar normal, entonces  $z \cdot \sigma_x + m_x$  es normal con media  $m_x$  y desviación estándar  $\sigma_x$ . Y de la misma forma, si  $x$  es una v.a. gaussiana o normal con media  $m_x$  y desviación estándar  $\sigma_x$ , entonces  $z = \frac{x-m_x}{\sigma_x}$  será una v.a. estándar normal.

Evidentemente, siendo  $x$  gaussiana:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{x\} &= m_x \\ \mathbf{E}\{(x - m_x)^2\} &= \sigma_x^2\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}f_x(m_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \\ f_x(m_x \pm \sigma_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Como es sabido, el área bajo la curva de la fdp en un intervalo, proporciona el valor de la probabilidad de que  $x$  tome los valores del intervalo:

$$p(x \in [a, b]) = \int_a^b f_x(x) dx; \quad (3.15)$$

Una función muy utilizada y cuyo valor se encuentra tabulado es la conocida como **función Q** que evalúa el área bajo la cola de la gaussiana, es decir, el área bajo la curva desde  $-\infty$  hasta un valor  $u < m_x$  o bien desde un valor  $u > m_x$  hasta  $\infty$ . Las tablas están calculadas para variables gaussianas estándar (con media cero y varianza unidad) por lo que si nuestra variable no es estándar, tendremos que desnormalizarla para obtener el valor correspondiente. A continuación veremos cómo utilizar dicha función Q.

Para una variable aleatoria standard normal  $x$  ( $m_x = 0, \sigma_x = 1$ ), queremos calcular el área bajo la gaussiana desde un valor  $u > 0$  hasta  $\infty$ :

$$Q(u) = p(x \in [u, \infty]) = \int_u^\infty f_x(x) dx = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx; \quad (3.16)$$

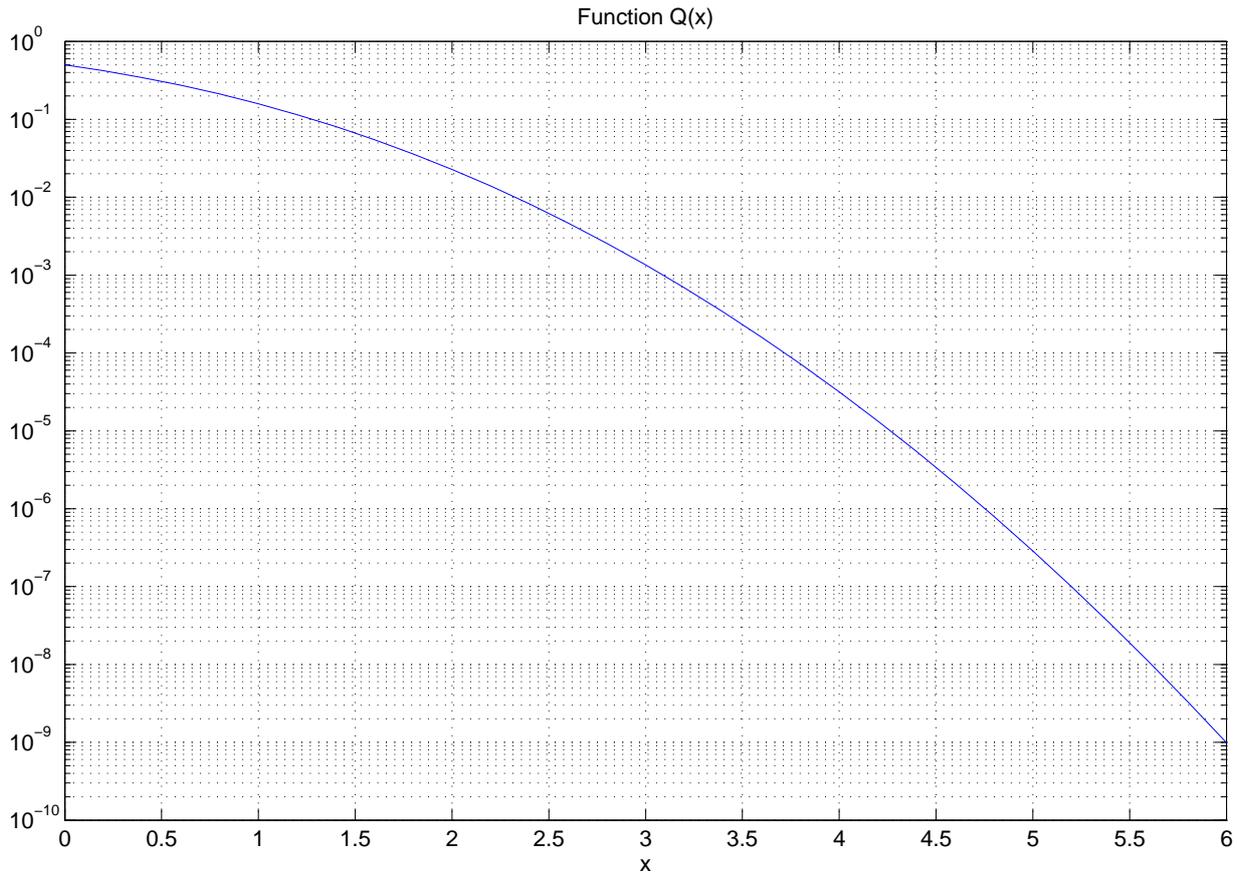
Acudiendo a la tabla con el valor de  $u > 0$  en el eje de abcisas, encontraremos el valor buscado.

Si queremos calcular el valor de la cola de la gaussiana para en un intervalo  $[-\infty, u]$  siendo  $u < 0$ , dada la simetría de la gaussiana estándar alrededor del origen, debemos acudir a la tabla con  $|u|$  (es decir, el argumento de la función Q es la distancia del punto de interés hasta el origen):

$$Q(|u|) = p(x \in [u, \infty]) = \int_u^\infty f_x(x) dx = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx; \quad (3.17)$$

Para una variable aleatoria gaussiana con media  $m_x$  y desviación típica  $\sigma_x$ , calculamos el área de la cola de la gaussiana ( $u > m_x$ ):

$$\begin{aligned}p(x \in [u, \infty]) &= \int_u^\infty f_x(x) dx = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \\ &\left\{ z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}; \quad x = \sigma_x z + m_x; \quad dx = \sigma_x dz; \quad x = u \rightarrow z = \frac{u - m_x}{\sigma_x} \right\} \\ &= \int_{\frac{u-m_x}{\sigma_x}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q\left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right)\end{aligned}$$



**Figura 3.2:** Area bajo la cola de la gaussiana, desde  $x > m_x$  hasta  $\infty$

Para  $u < m_x$ :

$$p(x \in [-\infty, u]) = \int_{-\infty}^u f_x(x) dx = Q\left(\frac{m_x - u}{\sigma_x}\right)$$

Es decir, para una v.a. gaussiana con media  $m_x$  y desviación típica  $\sigma_x$ , el argumento de la función Q será el valor del umbral normalizado:

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{|u - m_x|}{\sigma_x}\right) &= p(x \in [-\infty, u]) = \int_{-\infty}^u f_x(x) dx; \text{ si } u < m_x \\ &= p(x \in [u, \infty]) = \int_u^{\infty} f_x(x) dx; \text{ si } u > m_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Es importante darse cuenta de que  $Q(0) = \frac{1}{2}$ , y que la función Q sólo está definida para valores positivos (es decir, calculamos el área de la cola de la gaussiana).

## Dos variables aleatorias

Se dice que 2 variables aleatorias  $x_i$  y  $x_j$  son conjuntamente gaussianas si:

$$f_{x_i x_j}(x_i, x_j) = \frac{1}{(2\pi) \cdot \sqrt{|C|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[X] \cdot [C]^{-1} [X]^T} \quad (3.19)$$

en donde:

$$[X] = [x_i - m_{x_i} \quad x_j - m_{x_j}]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{ij} \\ C_{ji} & C_{jj} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \mathbb{E} \{ (x_i - m_{x_i}) \cdot (x_j - m_{x_j}) \}$$

Una propiedad importante de las variables aleatorias gaussianas es que si  $C_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ :

$$f_{x_i x_j}(x_i, x_j) = f_{x_i}(x_i) \cdot f_{x_j}(x_j)$$

Es decir, si dos v.a. gaussianas están incorreladas, entonces son independientes.

### 3.2.2. Procesos gaussianos

En un proceso gaussiano, todas las variables aleatorias que lo definen,  $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_n)$  son gaussianas y también conjuntamente gaussianas. Por tanto, la función densidad de probabilidad conjunta es:

$$f_{x_1 x_2 \dots x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |C|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[X] \cdot [C]^{-1} [X]^T} \quad (3.20)$$

en donde:

$$[X] = [x_1 - m_{x_1} \quad x_2 - m_{x_2} \quad \dots \quad x_n - m_{x_n}]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \mathbb{E} \{ (x_i - m_{x_i}) \cdot (x_j - m_{x_j}) \}$$

Se dice que dos procesos  $x(t)$  e  $y(t)$  son conjuntamente gaussianos si sus variables aleatorias  $x(t_i)$  e  $y(t_j)$  son conjuntamente gaussianas.

### 3.2.3. Propiedades de los procesos gaussianos

1. Un proceso queda totalmente descrito a partir de las medias  $m_{x_i}$  y las covarianzas  $C_{ij}$ , es decir por su  $m_x(t)$  y su autocorrelación  $R_x(t_1, t_2)$ . Esta propiedad se deduce directamente de la expresión (3.20).
2. Debido a la propiedad (1), si un proceso gaussiano es estacionario en sentido amplio (WSS), también será estacionario en sentido estricto (SSS).

3. Si dos procesos son conjuntamente gaussianos, y  $C_{xy}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$  (son incorrelados), entonces los dos procesos también serán independientes.
4. Cualquier combinación lineal de variables aleatorias gaussianas da lugar a una variable aleatoria gaussiana. Por tanto, si un proceso gaussiano es la entrada de un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso  $h(t)$ , el proceso de salida  $y(t) = x(t) * h(t)$  será también gaussiano.

### 3.3. Ruido térmico y ruido blanco

El ruido térmico (también llamado ruido de Johnson o ruido de Nyquist) se produce en medios conductores debido a la agitación térmica de las cargas en los conductores. Estas se mueven de forma aleatoria, generando una tensión eléctrica aleatoria con distribución de amplitudes gaussiana  $n(t)$  y con valor medio cero. Para las frecuencias de trabajo habituales ( $|f| < 10^{12} Hz$ ), la DEP puede considerarse plana, por lo que se conoce como ruido blanco.

$$G_n(f) = \frac{\eta}{2} \quad (3.21)$$

siendo  $\eta$  una constante dependiente de la temperatura del conductor ( $T$  en  $^{\circ}K$ ), indicativa del nivel de ruido existente:

$$\eta = k_B \cdot T$$

$$k_B \text{ es la constante de Boltzmann } k_B = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ W/Hz/}^{\circ}K \quad (3.22)$$

$$\text{o en unidades logarítmicas } 10 \cdot \log(k_B) = -198,6 \text{ dBm/Hz/}^{\circ}K \quad (3.23)$$

$$T : \text{Temperatura en } ^{\circ}K$$

Con esta DEP, las muestras del ruido  $n(t_1)$ ,  $n(t_2)$  están totalmente incorreladas entre sí:

$$\mathbb{E}\{n(t)\} = 0 \quad (3.24)$$

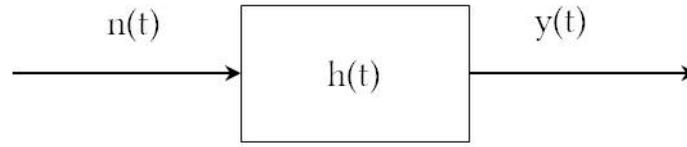
$$\mathbb{E}\{n(t_1) \cdot n(t_2)\} = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & \text{si } t_1 = t_2 \\ 0 & \text{si } t_1 \neq t_2 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\text{es decir, } R_n(\tau) = \frac{\eta}{2} \cdot \delta(\tau) \quad (3.26)$$

Obsérvese que la potencia total de este ruido tomaría valor infinito. En realidad, como este ruido será siempre observado a través de algún sistema con un ancho de banda limitado a  $BHz$ , se obtendrá un valor finito en el cálculo de la potencia de ruido.

### 3.4. Ruido filtrado y Ancho de Banda Equivalente de Ruido

El ruido lo observaremos siempre a través de un sistema LI con respuesta al impulso  $h(t)$ , como se indica en la figura 3.3. La DEP del ruido a la salida:



$$R_y(\tau) = R_n(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

**Figura 3.3:** Filtrado del ruido a través de un SLI

$$G_y(f) = G_n(f) \cdot |H(f)|^2$$

$$G_y(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2$$

El ruido de salida será gaussiano y de media cero:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{y(t)\} &= \mathbb{E}\{n(t) * h(t)\} = \mathbb{E}\left\{\int n(t - \tau)h(\tau)d\tau\right\} = \\ &= \int \mathbb{E}\{n(t - \tau)\}h(\tau)d\tau = 0 \end{aligned}$$

La potencia del ruido de salida:

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f)|H(f)|^2 df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \sigma_y^2$$

Y la f.d.p. del ruido de salida será:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

Para caracterizar un sistema en términos del *ruido que deja pasar* se utiliza el concepto de **ancho de banda equivalente de ruido**,  $B_N$ . Para un sistema paso bajo,  $B_N$  es el ancho de banda de un filtro paso bajo ideal con ganancia  $K = |H(f)|_{max}$  que deja pasar la misma potencia de ruido que el sistema, cuando a su entrada hay ruido blanco. A continuación obtendremos la expresión para el cálculo de este importante parámetro de los sistemas.

La potencia de ruido  $N_0$  a la salida del sistema con respuesta frecuencial  $H(f)$  cuando a la entrada hay ruido blanco con DEP  $\eta/2$  será:

$$N_0 = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Por otro lado, la potencia de ruido  $N_0$  a la salida de un filtro paso bajo ideal con ancho de banda  $B_N$  y de ganancia  $|H_{max}|$  cuando a la entrada hay ruido blanco con DEP  $\eta/2$  será:

$$N_0 = \frac{\eta}{2} |H_{max}|^2 \cdot 2B_N$$

Por tanto:

$$B_N = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2|H_{max}|^2} \quad (3.27)$$

Para un sistema paso banda, la definición es idéntica.

### 3.4.1. Ejemplo: Filtro paso bajo RC

En este ejemplo calculamos el ancho de banda equivalente de ruido de un paso bajo  $RC$  y lo comparamos con su ancho de banda a 3dB.

La respuesta frecuencial de un filtro paso bajo  $RC$  es:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

Para calcular la frecuencia de corte a 3dB  $f_c$  buscamos el valor de  $f$  para el cual  $|H(f)|^2$  cae a la mitad de su máximo ( $|H(0)|^2$ ):

$$|H(0)|^2 = 1; \quad |H(f_c)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f_c RC)^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Para calcular el ancho de banda equivalente de ruido  $B_N$ , igualamos la potencia que genera el sistema a la que se obtendría con un filtro ideal de ancho de banda  $B_N$ , cuando a la entrada hay ruido blanco con DEP  $\eta/2$ :

$$\frac{\eta}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{\eta}{2} \cdot 2B_N$$

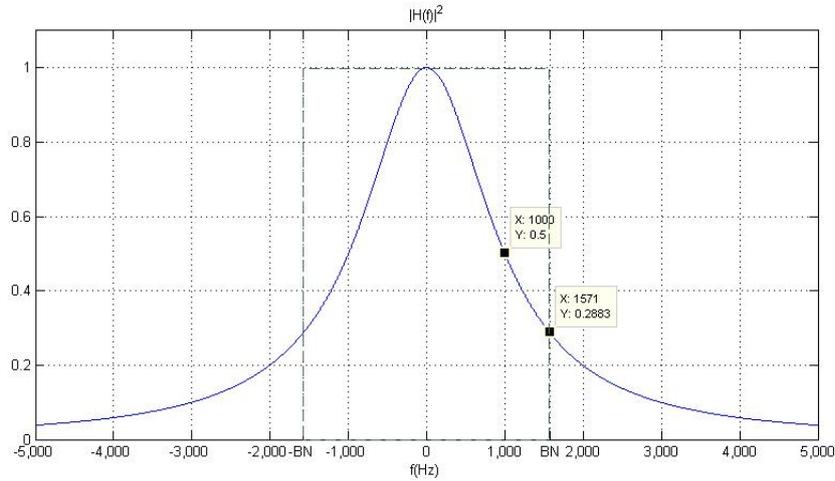
$$B_N = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2} df$$

Para resolver la integral utilizamos la primitiva:

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x$$

Y se obtiene:  $B_N = \frac{1}{4RC} > f_{c_{3dB}} = \frac{1}{2\pi RC}$

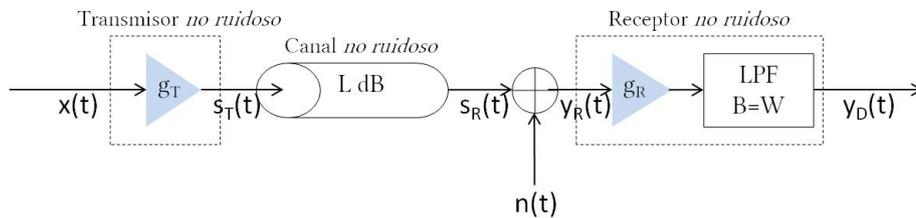
La figura 3.4 muestra los resultados obtenidos para un valor de  $RC = \frac{1}{2000\pi}$ , y por tanto  $f_{c_{3dB}} = 1000$  y  $B_N = 500\pi = 1571Hz$ .



**Figura 3.4:** Respuesta frecuencial del filtro paso bajo RC y su filtro equivalente en términos de potencia de ruido.

### 3.5. Transmisión banda base con ruido

En términos de potencias, modelamos un sistema de transmisión en banda base con ruido con el esquema mostrado en la figura 3.5.



**Figura 3.5:** Modelo de un sistema de Transmisión en Banda Base con Ruido

Con referencia a los elementos de la figura 3.5:

- $x(t)$  es el proceso de entrada que se desea transmitir, de tipo paso bajo y con ancho de banda  $W$ . La potencia de la señal de entrada será  $S_x$ .
- $g_T$  es la ganancia en potencia del transmisor. Representamos el transmisor por un amplificador lineal de ganancia en potencia  $g_T$ .
- $s_T(t)$ : Es la señal transmitida, inyectada al canal. Su DEP será idéntica a la de la señal de entrada, salvo por el factor de ganancia  $g_T$ :

$$s_T(t) = \sqrt{g_T}x(t)$$

$$G_{s_T}(f) = g_T \cdot G_x(f)$$

$$P_T = g_T \cdot P_x$$

- $L$ dB: atenuación (dB) introducida por el canal ideal. El valor correspondiente en lineal será  $l = 10^{L/10}$ .

- $s_R(t)$ : señal recibida, será idéntica a la señal de entrada salvo por un factor de ganancia/atenuación y un retardo  $t_0$ . Este retardo no afecta en los cálculos de potencias.

$$\begin{aligned} s_R(t) &= \frac{1}{\sqrt{l}} s_T(t) \\ G_{s_R}(f) &= \frac{1}{l} \cdot G_{s_T}(f) \\ S_R &= \frac{1}{l} \cdot S_T \end{aligned}$$

en donde  $S_T$  y  $S_R$  son las potencias de la señal transmitida ( $s_T(t)$ ) y recibida ( $s_R(t)$ ).

- $n(t)$ : es el ruido del sistema, incorrelado con la señal, con DEP  $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$ . En el modelo, todo el ruido del sistema se supone aditivo y blanco y se encuentra a la entrada del receptor, sumándose a la señal recibida  $s_R(t)$ . Con este modelo, el resto de componentes serán elementos no ruidosos. Así, a la entrada del receptor la señal  $y_R(t)$  tendrá una componente de señal ( $s_R(t)$ ) y una componente de ruido ( $n(t)$ ):

$$y_R(t) = s_R(t) + n(t)$$

- $g_R$ : es la ganancia en potencia del receptor, que se considera ideal con  $|H_R(f)|^2 = g_R \cdot \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$ , y con ancho de banda  $W$  tal que permite el paso íntegro de la señal, y limita el paso del ruido al ancho de banda de  $x(t)$ .
- $y_D(t)$ : señal detectada a la salida del receptor, tendrá una componente de señal y una componente de ruido:

$$y_D(t) = s_D(t) + n_D(t) = s_R(t) \cdot \sqrt{g_R} + n_D(t)$$

Teniendo en cuenta que señal y ruido están incorrelados, la potencia total de  $y_D(t)$  será la suma de la potencia de señal detectada ( $S_D$ ) y de la potencia de ruido detectada ( $N_D$ ). Así calcularemos la relación señal a ruido detectada a la salida del sistema como:

$$(S/N)_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{\mathbb{E}\{|s_D(t)|^2\}}{\mathbb{E}\{|n_D(t)|^2\}}$$

$$S_D = \int_{-\infty}^{\infty} G_{S_D}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} g_R \cdot G_{s_R}(f) df = S_R \cdot g_R$$

El ruido a la salida será el ruido a la entrada filtrado por el receptor, con respuesta frecuencia  $H_R(f)$ :

$$\begin{aligned} n_D(t) &= n(t) * h_R(t) \\ G_{n_D}(f) &= G_n(f) \cdot |H_R(f)|^2 \\ N_D &= g_R \cdot \frac{\eta}{2} \cdot 2W = g_R \cdot \eta \cdot W \end{aligned}$$

De forma que la relación señal a ruido en detección (a la salida del sistema):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_R \cdot g_R}{g_R \cdot \eta \cdot W} = \frac{S_T}{l \cdot \eta \cdot W} \quad (3.28)$$

Como puede verse, la relación señal a ruido en detección empeora a medida que el ancho de banda de la señal a transmitir aumenta (a igualdad de potencia transmitida y para un mismo canal). Dicho de otra forma, para mantener la calidad en la detección, un aumento del ancho de banda de la señal requerirá un aumento proporcional en la potencia de la señal transmitida. Así, si por ejemplo pasamos de transmitir una señal con ancho de banda telefónico ( $W = 4 \text{ kHz}$ ) a transmitir una señal de audio calidad profesional ( $24 \text{ kHz}$ ) y queremos mantener una determinada calidad en la detección, debemos aumentar la potencia transmitida en un factor de 6 (es decir  $7,8 \text{ dB}$ ). Para mantener dicha calidad con una señal de imagen, con  $W = 4 \text{ MHz}$ , el aumento de potencia con respecto a la de la señal telefónica será por un factor de 1000 (es decir  $30 \text{ dB}$ ).

## Ejemplo

Un determinado sistema de transmisión banda base tiene una atenuación de canal de  $L = 140 \text{ dB}$ . El receptor tiene un ancho de banda equivalente de ruido de  $B_N = W$  (siendo  $W = 20 \text{ kHz}$  el ancho de banda del mensaje), una ganancia en potencia unidad y una temperatura equivalente de ruido de  $5 \cdot T_0$  ( $T_0 = 290^\circ \text{K}$ ). Si se desea una relación señal a ruido en detección superior a  $60 \text{ dB}$ , ¿cuál debe ser la mínima potencia de señal transmitida?

$$\begin{aligned} (S/N)_D |_{dBm} &= S_D |_{dBm} - N_D |_{dBm} \geq 60 \text{ dB} \\ S_D |_{dBm} &= S_R |_{dBm} = S_T |_{dBm} - 140 \text{ dB} \\ N_D &= \frac{\eta}{2} \cdot g_R \cdot 2 \cdot B_N = \frac{k_B \cdot T_N}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot W = k_B \cdot 5 \cdot T_0 \cdot W \\ N_D |_{dBm} &= 10 \cdot \log k_B + 10 \log(5 \cdot T_0) + 10 \log W \end{aligned}$$

sustituyendo obtenemos:  $N_D = -124 \text{ dBm}$

$$S_T \geq 76 \text{ dBm}$$



# Tema 4

## Señales y Sistemas Paso Banda

Una gran parte de los sistemas de comunicación son de tipo paso banda: la potencia de la señal que viaja por el medio se encuentra concentrada alrededor de una cierta frecuencia (la frecuencia portadora o *carrier*  $f_0$  o  $f_c$ ). En este capítulo presentamos un conjunto de herramientas matemáticas adecuadas para trabajar con las señales y los sistemas paso banda.

### 4.1. Transformada Hilbert

Se define el transformador de Hilbert como un sistema LI cuya respuesta al impulso (representada en la figura ??) es:

$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi \cdot t} \quad (4.1)$$

De forma que la transformada Hilbert de una señal  $x(t)$  es:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \hat{x}(t) = x(t) * h_Q(t) = x(t) * \frac{1}{\pi \cdot t} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \frac{1}{\pi(t - \tau)} d\tau \quad (4.2)$$

Como vemos, a diferencia de otras transformaciones (como por ejemplo la transformada de Fourier), no hay un cambio de dominio y tanto la señal como su transformada son funciones de la variable  $t$ .

Al comportarse como un SLI, podemos utilizar muchas propiedades de los SLI para estudiar el transformador de Hilbert. Si calculamos su transformada de Fourier:

$$\frac{1}{\pi \cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad -j \operatorname{sgn}(f) \quad (4.3)$$

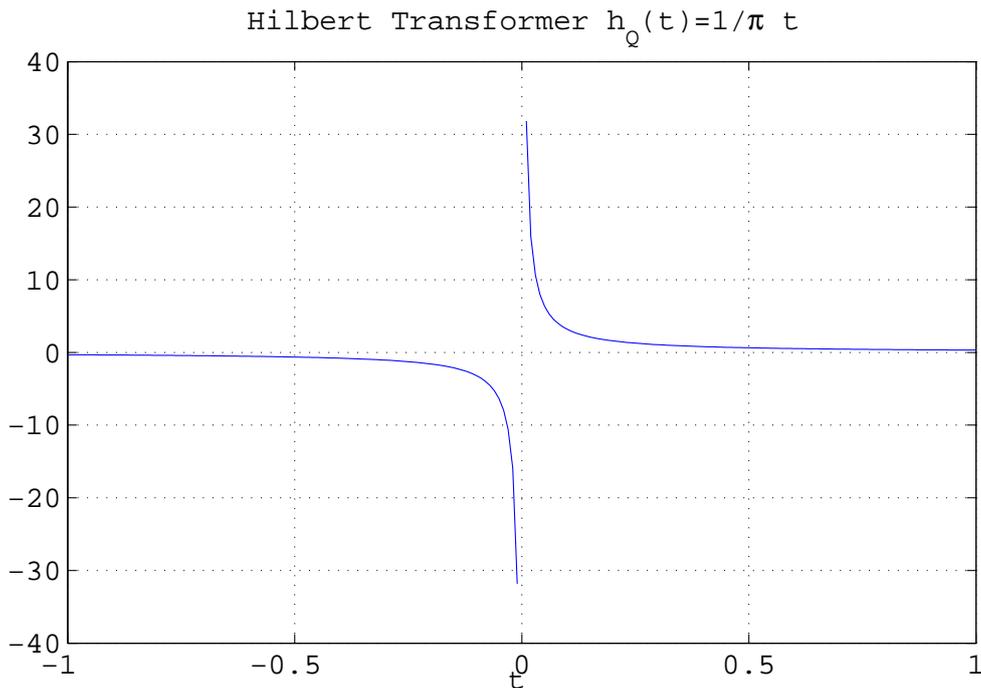
en donde

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} -1 & \text{si } f < 0 \\ 1 & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

Obtenemos la respuesta frecuencial del transformador de Hilbert, representada en la figura ??,  $H_Q(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$

$$|H_Q(f)| = 1 \quad \forall f \quad (4.4)$$

$$\angle H_Q(f) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } f < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } f > 0 \end{cases}$$



**Figura 4.1:** Respuesta al impulso del transformador de Hilbert

Es decir, el sistema no modifica el módulo de la TF de la señal de entrada, modificando únicamente su fase.

Si conocemos la transformada de Fourier de una señal  $x(t)$ ,  $X(f)$ , podremos calcular su transformada Hilbert en el dominio de la frecuencia, usando:

$$\mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} = \hat{X}(f) = X(f) \cdot (-j \operatorname{sgn}(f)) \quad (4.5)$$

### Ejemplo

Calculamos la transformada Hilbert de una señal cosenoidal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ :

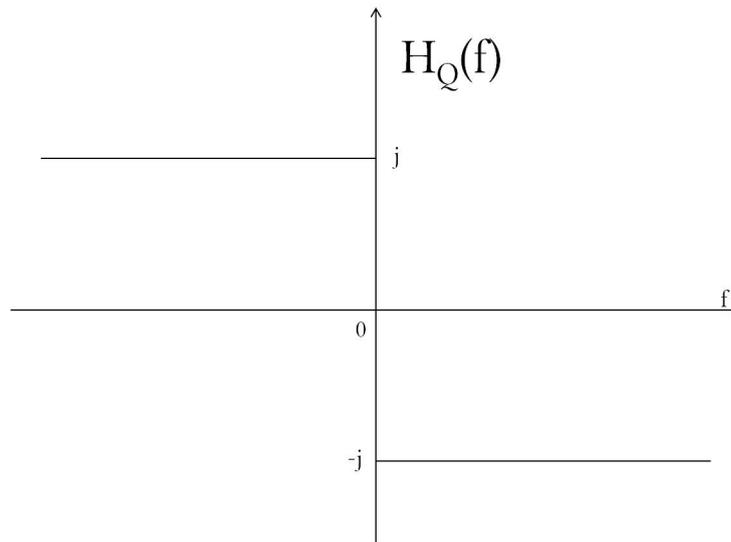
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} &= X(f) \cdot (-j \operatorname{sgn}(f)) \\ &= \frac{1}{2} \{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} \cdot (-j \operatorname{sgn}(f)) \\ &= \frac{1}{2j} \{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\} \end{aligned}$$

y volviendo al dominio del tiempo:

$$\hat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

Es fácil comprobar que:

$$\mathcal{H}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = -\cos(2\pi f_0 t)$$



**Figura 4.2:** Transformada de Fourier del Transformador de Hilbert

Y en general:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\{\cos(2\pi f_0 t + \phi)\} &= \cos(2\pi f_0 t + \phi - \frac{\pi}{2}) \\ &= \sin(2\pi f_0 t + \phi)\end{aligned}$$

Es decir, el transformador de Hilbert aplica un desfase de un cuarto de ciclo ( $\pi/2$ ) a la componente frecuencial  $f_0$ . Si una señal está formada por varias componentes frecuenciales, por ser el transformador de Hilbert un sistema lineal, aplicará este mismo desfase de  $\pi/2$  a cada una de ellas. Es importante diferenciar el efecto del transformador de Hilbert, que aplica un *desfase constante* a cada componente frecuencial, de un elemento retardador, que aplica un *retardo constante* a cada componente frecuencial. En efecto, la respuesta frecuencial de un sistema retardador tiene módulo constante (al igual que el transformador de Hilbert) pero respuesta de fase lineal (con pendiente proporcional al retardo que aplica):

$$H(f) = K e^{-j2\pi f_0 t}$$

A consecuencia de esto, al aplicar el transformador de Hilbert sobre una señal  $x(t)$  formada por más de una componente frecuencial se modificará su forma de onda. En cambio, aplicar un retardo sobre la misma señal no modificará su forma de onda.

---

Usando 4.5 es fácil ver que:

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} = -x(t)$$

ya que  $(-j \cdot \text{sgn}(f))^2 = -1$ .

## 4.2. Señal analítica

La señal analítica de  $x(t)$ , siendo  $x(t)$  real, es una señal compleja elaborada de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_x(t) = x^+(t) = x(t) + j \hat{x}(t) \quad (4.6)$$

de forma que:

$$\begin{aligned}\Re\{x^+(t)\} &= x(t) \\ \Im\{x^+(t)\} &= \hat{x}(t)\end{aligned}$$

En frecuencia podemos calcular la transformada de Fourier de la señal analítica:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x^+(t)\} &= X^+(f) = X(f) + j(-j \operatorname{sgn}(f)) \cdot X(f) \\ &= X(f) \cdot [1 + \operatorname{sgn}(f)] \\ &= X(f) \cdot 2 \cdot u(f)\end{aligned}$$

Es decir:

$$X^+(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \\ 2 \cdot X(f) & \text{si } f > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

También se define la señal analítica negativa, que es la conjugada de la señal analítica *positiva*:

$$\begin{aligned}x^-(t) &= x(t) - j\hat{x}(t) \\ X^-(f) &= X(f) \cdot 2 \cdot u(-f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f) & \text{si } f < 0 \\ 0 & \text{si } f > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

### Ejemplo

Considerando de nuevo la señal senoidal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ :

$$\begin{aligned}x(t) = \cos(2\pi f_0 t) & \quad X(f) = \frac{1}{2} \{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} \\ \hat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t) & \quad \hat{X}(f) = \frac{1}{2j} \{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\} \\ x^+(t) = e^{j2\pi f_0 t} & \quad X^+(f) = \delta(f - f_0) \\ x^-(t) = e^{-j2\pi f_0 t} & \quad X^-(f) = \delta(f + f_0)\end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.3. Equivalente paso-bajo

La señal **equivalente paso-bajo** de un señal paso-banda  $x(t)$  (también llamada **envolvente compleja**) se define *con respecto a una frecuencia*  $f_0$  de la banda de frecuencias en las que se encuentra  $x(t)$  como:

$$\tilde{x}(t) = x^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \quad (4.9)$$

Su transformada de Fourier:

$$\tilde{X}(f) = X^+(f + f_0) \quad (4.10)$$

Es decir, es la señal analítica trasladada al origen de frecuencias. Desarrollando (4.9):

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(t) &= x^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \\
 &= (x(t) + j\hat{x}(t)) (\cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t) \\
 \Re \{\tilde{x}(t)\} &= x(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{x}(t) \sin 2\pi f_0 t \\
 &= x_F(t) \quad \text{Componente en Fase de } x(t) \\
 \Im \{\tilde{x}(t)\} &= \hat{x}(t) \cos 2\pi f_0 t - x(t) \sin 2\pi f_0 t \\
 &= x_C(t) \quad \text{Componente en Cuadratura de } x(t) \\
 \tilde{x}(t) &= x_F(t) + jx_C(t)
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Re\{x^+(t)\} = \Re\{\tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \\
 &= \Re\{(x_F(t) + jx_C(t)) (\cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t)\} \\
 &= x_F(t) \cos 2\pi f_0 t - x_C(t) \sin 2\pi f_0 t
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

y también:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t) &= \Im\{x^+(t)\} = \Im\{\tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \\
 &= \Im\{(x_F(t) + jx_C(t)) (\cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t)\} \\
 &= x_C(t) \cos 2\pi f_0 t + x_F(t) \sin 2\pi f_0 t
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Se define la **envolvente real** de  $x(t)$  como:

$$e_x(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{x_F^2(t) + x_C^2(t)} \tag{4.13}$$

Es decir, es el módulo del equivalente paso bajo. La envolvente de la señal también se puede calcular como el módulo de la señal analítica:

$$e_x(t) = |\tilde{x}(t)| = |x^+(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}| = |x^+(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

También se define la **fase instantánea** de la señal  $x(t)$  como la fase del equivalente paso bajo:

$$\phi_x(t) = \angle \tilde{x}(t) = \arctan \frac{x_C(t)}{x_F(t)} \tag{4.14}$$

Entonces:

$$\tilde{x}(t) = e_x(t) \cdot e^{j\phi_x(t)} \tag{4.15}$$

$$x^+(t) = \tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} = e_x(t) \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \phi_x(t))} \tag{4.16}$$

Y podemos poner  $x(t)$  como:

$$x(t) = \Re\{x^+(t)\} = e_x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi_x(t))$$

Y también:

$$x(t) = e_x(t) \cos 2\pi f_0 t \cos \phi_x(t) - e_x(t) \sin 2\pi f_0 t \sin \phi_x(t)$$

de donde:

$$x_F(t) = e_x(t) \cos \phi_x(t)$$

$$x_C(t) = e_x(t) \sin \phi_x(t)$$

Es importante fijarse en que:

$$\begin{array}{ll} x(t) & \text{es real, paso-banda} \\ \hat{x}(t) & \text{es real, paso-banda} \\ \left. \begin{array}{l} x_F(t) \\ x_C(t) \\ e_x(t) \\ \phi_x(t) \end{array} \right\} & \text{real, paso-bajo} \\ \tilde{x}(t) & \text{compleja, paso-bajo} \\ x^+(t) & \text{compleja, paso-banda} \end{array}$$

## Ejercicio

Como hemos visto las señales paso banda se forman habitualmente con el producto de una señal paso bajo y otra paso banda. En este ejercicio calculamos la transformada Hilbert de una señal paso banda expresada de esa forma.

Consideremos la señal  $x(t) = m(t)c(t)$  en donde  $m(t)$  es una señal de tipo paso bajo con ancho de banda  $W$  y  $c(t)$  es una señal paso banda con ancho de banda  $B = f_2 - f_1$ , en donde  $f_1$  es la frecuencia inferior y  $f_2$  la frecuencia superior del espectro. Queremos calcular  $\hat{x}(t)$ , la transformada Hilbert de la señal paso banda  $x(t)$  formada con el producto de ambas. Para ello, trabajaremos en el dominio de la frecuencia:

$$\hat{X}(f) = M(f) * C(f) \cdot -j \operatorname{sgn} f = \int_{-\infty}^{\infty} M(f - \lambda) C(\lambda) d\lambda \cdot -j \operatorname{sgn} f$$

Siendo  $c(t)$  una señal paso banda, podemos escribir

$$C(f) = \frac{1}{2} (C^-(f) + C^+(f))$$

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{2} \left( \int_{-f_2}^{-f_1} M(f - \lambda) C^-(\lambda) d\lambda + \int_{f_1}^{f_2} M(f - \lambda) C^+(\lambda) d\lambda \right) \cdot -j \operatorname{sgn} f$$

Si ocurre que  $f_1 > W$  (de forma que los espectros de  $m(t)$  y  $c(t)$  no solapan) entonces el primer sumando vale cero para  $f > 0$  y el segundo sumando valdrá cero para  $f < 0$ , y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\widehat{X}(f) &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^0 M(f-\lambda)C^-(\lambda) \cdot (j)d\lambda + \int_0^{\infty} M(f-\lambda)C^+(\lambda) \cdot (-j)d\lambda \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} M(f-\lambda)C(\lambda) \cdot -j \operatorname{sig} \lambda d\lambda \\
&= M(f) * \widehat{C}(f)
\end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$\widehat{x}(t) = m(t) \widehat{c}(t)$$

Es decir, la transformada Hilbert de la señal  $x(t)$  es el producto de la señal paso bajo  $m(t)$  por la transformada Hilbert de la señal paso banda  $\widehat{c}(t)$ .

Un caso muy frecuente es la operación de modulación:

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \widehat{x}(t) = m(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Y en general para una señal paso banda:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_F(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_C(t) \sin(2\pi f_0 t) \\
\widehat{x}(t) &= x_F(t) \sin(2\pi f_0 t) + x_C(t) \cos(2\pi f_0 t)
\end{aligned}$$

## 4.4. Sistemas paso banda

Dado que las señales paso banda se transmitirán a través de sistemas paso banda, tenemos interés en conocer las relaciones entre las representaciones paso banda de las señales de entrada, salida y la respuesta al impulso del sistema.

Es decir, si  $x(t)$  y  $h(t)$  son ambas paso banda,  $y(t)$  será también paso banda y podemos escribir:

$$x(t) = \Re\{x^+(t)\} = \frac{1}{2} \{x^+(t) + x^-(t)\} \quad (4.17)$$

$$h(t) = \Re\{h^+(t)\} = \frac{1}{2} \{h^+(t) + h^-(t)\} \quad (4.18)$$

$$y(t) = \Re\{y^+(t)\} = \frac{1}{2} \{y^+(t) + y^-(t)\} \quad (4.19)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
Y(f) &= X(f) \cdot H(f) = \frac{1}{2} \{X^+(f) + X^-(f)\} \frac{1}{2} \{H^+(f) + H^-(f)\} \\
&= \frac{1}{4} \{X^+(f)H^+(f) + X^-(f)H^-(f)\}
\end{aligned}$$

$$\text{ya que } X^+(f)H^-(f) = X^-(f)H^+(f) = 0$$

Y teniendo en cuenta 4.17:

$$Y^+(f) = \frac{1}{2} X^+(f)H^+(f) \quad Y^-(f) = \frac{1}{2} X^-(f)H^-(f) \quad (4.20)$$

$$y^+(t) = \frac{1}{2} x^+(t) * h^+(t) \quad y^-(t) = \frac{1}{2} x^-(t) * h^-(t) \quad (4.21)$$

Para el equivalente paso bajo podemos escribir teniendo en cuenta (4.10) y sustituyendo en (4.20):

$$\begin{aligned} Y^+(f) &= \tilde{Y}(f - f_0) = \frac{1}{2} \tilde{X}(f - f_0) \tilde{H}(f - f_0) \\ \tilde{Y}(f) &= \frac{1}{2} \tilde{X}(f) \tilde{H}(f) \\ \tilde{y}(t) &= \frac{1}{2} \tilde{x}(t) * \tilde{h}(t) \end{aligned}$$

## 4.5. Procesos paso banda

En los apartados anteriores hemos encontrado las representaciones analítica y paso bajo de una señal paso banda. Cuando la señal de trabajo es un proceso estocástico paso banda, tendremos interés en conocer las expresiones de las funciones de correlación y DEP específicas para procesos paso banda.

### 4.5.1. Transformador de Hilbert

Considerando el transformador de Hilbert como un sistema LI con respuesta al impulso  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t) * \frac{1}{\pi t} \\ G_{\hat{x}}(f) &= G_x(f) \cdot |H(f)|^2 = G_x(f) \cdot |-j \operatorname{sgn}(f)|^2 = G_x(f) \\ R_{\hat{x}}(\tau) &= R_x(\tau) \end{aligned}$$

y en particular:

$$\begin{aligned} R_{\hat{x}}(0) &= R_x(0) \\ P_{\hat{x}} &= P_x \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} R_{\hat{x}x}(\tau) &= R_x(\tau) * \frac{1}{\pi t} = \widehat{R}_x(\tau) \\ G_{\hat{x}x}(f) &= -j \cdot \operatorname{sgn}(f) \cdot G_x(f) \end{aligned}$$

Y como  $G_x(f)$  es una función siempre PAR,  $G_{\hat{x}x}(f)$  será una función IMPAR, por lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{\hat{x}x}(f) df = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\hat{x}x}(0) = 0 \quad (4.22)$$

Es decir, la potencia cruzada de  $x(t)$  y su transformada hilbert  $\hat{x}(t)$  es cero (los procesos son ortogonales en el origen).

De la misma forma:

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = R_{\hat{x}x}^*(-\tau) = R_x(\tau) * -\frac{1}{\pi\tau} = -R_{\hat{x}x}(\tau) = -\widehat{R}_x(\tau)$$

## 4.5.2. Señal analítica

### 4.5.2.1. Correlaciones

Calculamos la función de autocorrelación de la señal analítica de un proceso  $x(t)$ :

$$\begin{aligned}
 x^+(t) &= x(t) + j \hat{x}(t) \\
 R_{x^+}(\tau) &= E \{ [x(t + \tau) + j \hat{x}(t + \tau)] [x(t) - j \hat{x}(t)] \} \\
 &= R_x(\tau) + j R_{\hat{x}x}(\tau) - j R_{x\hat{x}}(\tau) + R_{\hat{x}}(\tau) \\
 &= 2 \left[ R_x(\tau) + j \widehat{R}_x(\tau) \right]
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

De donde se deduce (teniendo en cuenta 4.22) que:

$$P_{x^+} = R_{x^+}(0) = 2 R_x(0) = 2 P_x \tag{4.24}$$

De la misma forma podemos calcular la función de autocorrelación de la señal analítica negativa  $x^-(t)$ , obteniéndose:

$$R_{x^-}(\tau) = 2 \left[ R_x(\tau) - j \widehat{R}_x(\tau) \right] \tag{4.25}$$

### 4.5.2.2. Densidades Espectrales de Potencia

Calculamos las transformadas de Fourier en 4.23 y en 4.25 para obtener las DEP correspondientes:

$$G_{x^+}(f) = 2 \cdot G_x(f) (1 + \text{sgn}(f)) = 4 G_x(f) \cdot u(f) \tag{4.26}$$

$$G_{x^-}(f) = 2 \cdot G_x(f) (1 - \text{sgn}(f)) = 4 G_x(f) \cdot u(-f) \tag{4.27}$$

Y teniendo en cuenta que  $G_x(f) = G_x(-f)$ :

$$G_{x^+}(f) = G_{x^-}(-f)$$

Por otro lado, con las expresiones 4.26 y 4.27 comprobamos también que se cumple 4.24.

Finalmente, dado que  $G_{x^+}(f)$  y  $G_{x^-}(f)$  no se solapan, los procesos  $x^+(t)$  y  $x^-(t)$  son ortogonales, y  $R_{x^+x^-}(\tau) = 0$ .

## 4.5.3. Equivalente paso bajo

Calculamos también la autocorrelación y la DEP del proceso equivalente paso bajo:

$$\begin{aligned}
 R_{\tilde{x}}(\tau) &= E \{ \tilde{x}(t + \tau) \cdot \tilde{x}^*(t) \} \\
 &= E \{ x^+(t + \tau) \cdot e^{-j 2\pi f_0(t + \tau)} \cdot (x^+(t))^* \cdot e^{j 2\pi f_0 t} \} \\
 &= e^{-j 2\pi f_0 \tau} \cdot R_{x^+}(\tau) \\
 G_{\tilde{x}}(f) &= G_{x^+}(f + f_0)
 \end{aligned}$$

#### 4.5.4. Componentes en fase y cuadratura

Partimos de la expresión siguiente para la componente en fase:

$$\begin{aligned} x_F(t) &= \Re \{ \tilde{x}(t) \} = \frac{1}{2} \{ \tilde{x}(t) + \tilde{x}^*(t) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ x^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} + x^-(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} R_{x_F}(\tau) &= E \{ x_F(t+\tau) x_F(t) \} \\ &= \frac{1}{4} E \{ \{ x^+(t+\tau) \cdot e^{-j2\pi f_0(t+\tau)} + x^-(t+\tau) \cdot e^{j2\pi f_0(t+\tau)} \} \\ &\quad \{ x^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} + x^-(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \} \} \\ &= \frac{1}{4} \{ R_{x^+}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} + R_{x^-}(\tau) \cdot e^{j2\pi f_0 \tau} \} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Es interesante ver que:

$$P_{x_F} = R_{x_F}(0) = \frac{1}{4} \{ R_{x^+}(0) + R_{x^-}(0) \} = P_x$$

en donde hemos teniendo en cuenta 4.24.

De la misma manera, partiendo de:

$$\begin{aligned} x_C(t) &= \Im \{ \tilde{x}(t) \} = \frac{1}{2j} \{ \tilde{x}(t) - \tilde{x}^*(t) \} \\ &= \frac{1}{2j} \{ x^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} - x^-(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Es sencillo deducir que:

$$R_{x_C}(\tau) = R_{x_F}(\tau)$$

Y por lo tanto:

$$P_{x_C} = R_{x_C}(0) = P_{x_F} = P_x \quad (4.31)$$

También podemos expresar  $R_{x_F}(\tau)$  en función de la autocorrelación de  $x(t)$ . Partiendo de 4.29:

$$\begin{aligned} R_{x_F}(\tau) &= \frac{1}{4} \{ R_{x^+}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} + [R_{x^+}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f_0 \tau}]^* \} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\Re \{ R_{x^+}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} \} \\ &= \Re \left\{ \left( R_x(\tau) + j\widehat{R}_x(\tau) \right) (\cos 2\pi f_0 \tau - j \sin 2\pi f_0 \tau) \right\} \\ &= R_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \widehat{R}_x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau \end{aligned} \quad (4.32)$$

en donde puede también comprobarse que se cumple 4.31.

Haciendo la transformada de Fourier en 4.29 obtenemos las DEP:

$$G_{x_F}(f) = G_{x_C}(f) = \frac{1}{4} \{G_{x^+}(f + f_0) + G_{x^-}(f - f_0)\}$$

Para la función de correlación cruzada, partiendo de 4.28 y 4.30 se demuestra fácilmente que:

$$R_{x_F x_C}(\tau) = \frac{j}{4} \{R_{x^+}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} - R_{x^-}(\tau) \cdot e^{j2\pi f_0 \tau}\} \quad (4.33)$$

$$G_{x_F x_C}(f) = \frac{j}{4} \{G_{x^+}(f + f_0) - G_{x^-}(f - f_0)\} \quad (4.34)$$

y

$$R_{x_C x_F}(\tau) = -R_{x_F x_C}(\tau) \quad G_{x_C x_F}(f) = -G_{x_F x_C}(f)$$

De la expresión 4.33 se deduce que en  $\tau = 0$ :

$$R_{x_F x_C}(0) = 0$$

Es decir que la potencia cruzada de los procesos fase y cuadratura es nula (los procesos son ortogonales en el origen).

De la expresión 4.34 se deduce que si  $G_x(f)$  tiene simetría par con respecto a  $f_0$  (de forma que  $G_{x^+}(f + f_0) = G_{x^-}(f - f_0)$ ), entonces  $G_{x_F x_C}(f) = 0$  y los procesos  $x_C(t)$  y  $x_F(t)$  serán ortogonales para todo valor de  $\tau$ .



# Tema 5

## Comunicaciones digitales banda base

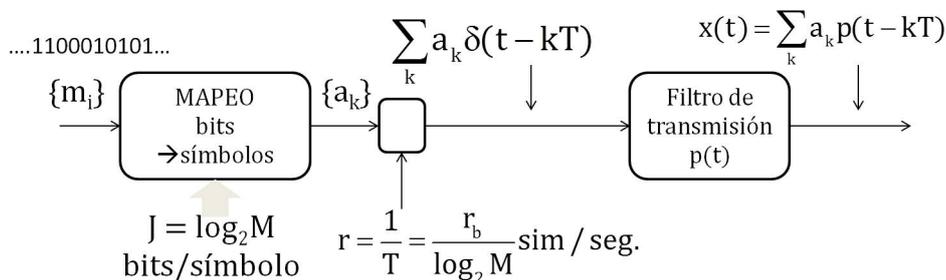
En este tema estudiaremos los elementos que conforman el equipo de transmisión en un sistema de comunicaciones digitales banda base. El objetivo es la transmisión de información digital (bits) a una cierta velocidad binaria ( $r_b$ ) a través de un canal que consideraremos ideal y con un ancho de banda limitado a  $B$  Hz. Los aspectos relativos al ruido se estudiarán en otro capítulo.

### 5.1. Códigos de línea

Utilizaremos la siguiente expresión para la señal digital en línea:

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

La secuencia de símbolos  $a_k$  constituye el mensaje digital que se desea transmitir. Los símbolos pertenecen a un conjunto finito de  $M$  valores  $a_m \in \{a_0 \dots a_{M-1}\}$ , también conocido como el alfabeto. Los símbolos se transmiten a través del pulso básico  $p(t)$  a un ritmo de  $r = \frac{1}{T}$  símbolos por segundo.  $r$  se conoce como la velocidad de símbolo y se expresa en símbolos/segundo ( $s^{-1}$ ) o baudios (*bauds*) y como veremos mas adelante, determinará el valor del ancho de banda necesario para la transmisión.



**Figura 5.1:** Esquema del codificador de línea

En general, la información digital está constituida por una secuencia de bits que deben ser transmitidos a una velocidad binaria  $r_b$  (flujo binario) determinada por la aplicación o por las características de la fuente de información. Por ejemplo, si se tratara de una señal telefónica con formato MIC (30+2), el flujo binario requerido es de 2048 *kbits* (2 *Mbits*). Para la transmisión de esta información digital será necesario realizar un mapeo de esta secuencia binaria a la

$m_i m_j$	$a_k$
00	-1,5
01	-0,5
11	0,5
10	1,5

**Tabla 5.1:** Mapeo multinivel (M=4) código polar

secuencia discreta de símbolos  $\{a_k\}$ . Para ello, se agruparán los bits de entrada en grupos de  $J$  bits y a cada grupo se le asigna un símbolo. De esta forma habrá  $M = 2^J$  posibles símbolos a transmitir. Este conjunto de símbolos se conoce como el alfabeto del código.

La figura 5.1 muestra el esquema de proceso de formación de la señal digital. Partiendo del flujo binario a  $r_b$  los bits se forman grupos de  $J$  bits que serán asignados a uno de los  $M$  símbolos  $\{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$ . Este proceso se conoce como *mapeo* de bits a símbolos. Por ejemplo, en un sistema de transmisión binario, en el que se utilizarán dos símbolos para la transmisión, podríamos asignar un valor de  $0 V$  al bit de información «0» y un valor de  $1 V$  al bit de información «1». La tabla 5.1 muestra un posible mapeo para un código cuaternario. Las unidades para los símbolos pueden ser Voltios o podrían ser otras unidades de amplitud (por ejemplo Amperios, por lo que en general no utilizaremos ningún símbolo (V o A) asociado.

Una vez realizado el mapeo los símbolos deben salir a línea a una velocidad de  $r = \frac{r_b}{\log_2 M}$  símbolos por segundo, para mantener el flujo binario de fuente  $r_b$ . Para formar la señal digital, se utilizará el pulso básico o pulso de transmisión  $p(t)$ , que llevará una amplitud proporcional al símbolo correspondiente  $a_k$  transmitido en el instante  $kT$ . La duración y forma del pulso tendrá una gran incidencia en las características de la señal digital, como veremos en los próximos apartados.

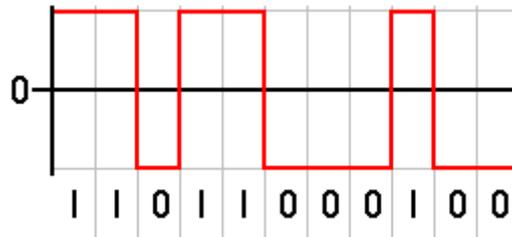
Así pues, un código de línea queda definido tanto por los símbolos a transmitir resultantes del mapeo, como por la forma y características del pulso de transmisión  $p(t)$ . A continuación estudiaremos algunos códigos populares.

Atendiendo a diferentes características, podemos realizar diferentes clasificaciones para los códigos de línea:

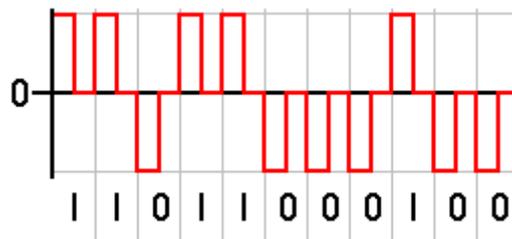
**Número de niveles** Se conocen como códigos *binarios* aquéllos en los que  $M = 2$ , de forma que a cada bit de información se le hace corresponder un símbolo. Cuando los bits se agrupan en grupos de 2 o más bits, el código se dice que es multinivel. En los códigos multinivel, los niveles asociados a los símbolos están equiespaciados, de forma que el intervalo entre símbolos consecutivos es siempre el mismo ( $\frac{a_{M-1} - a_0}{M-1}$ ) (ver por ejemplo la tabla 5.1).

**Polaridad** Un código se dice que es *unipolar* cuando todos sus símbolos tienen la misma polaridad (positiva o negativa). Por el contrario, un código es *polar* cuando los símbolos pueden ser positivos o negativos. Cuando los símbolos son equiprobables ( $p(a_m) = \frac{1}{M}$  caso habitual), los códigos polares presentan media cero ( $\mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} a_m = 0$ ), es decir que sus símbolos se encuentran distribuidos alrededor del cero. En los códigos unipolares en cambio, el valor medio no será cero sino  $\frac{a_0 + a_{M-1}}{2}$  (siempre para símbolos equiprobables).

**Retorno a cero** En sistemas banda base y sin limitación del ancho de banda de transmisión un pulso muy utilizado es el pulso rectangular. Cuando la duración del pulso  $D$  es igual al intervalo de símbolo  $D = T = \frac{1}{r}$  el código se conoce como NRZ (Non-Return-to-zero) (figura 5.2), en contraposición con los códigos RZ, en los que la duración del pulso es habitualmente la mitad del intervalo de símbolo,  $D = \frac{T}{2} = \frac{1}{2r}$  (figura 5.3).



**Figura 5.2:** Ejemplo de codificación con código NRZ (polar)



**Figura 5.3:** Ejemplo de codificación con código RZ (polar)

Lo visto no contempla por supuesto todos los códigos posibles. Hay una gran diversidad de códigos. Dos códigos muy populares que no responden a la clasificación anterior son los siguientes:

**Código bipolar** En este código, se realiza el siguiente mapeo:

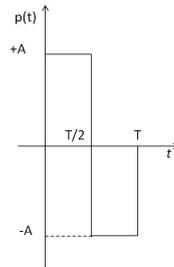
$m_i$	$a_k$
0	0
1	$\begin{cases} +1 & \text{si anterior 1 era -1} \\ -1 & \text{si anterior 1 era +1} \end{cases}$

A continuación se muestra un ejemplo:

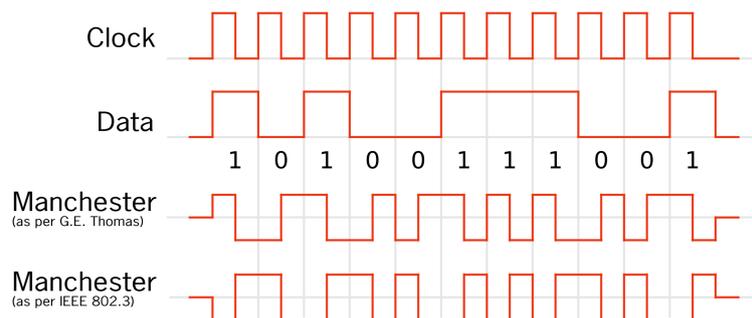
$m_i$	0	1	1	0	0	1	0	1	1
$a_k$	0	-1	+1	0	0	-1	0	+1	-1

Se trata por tanto de un código con memoria. Además, el número de símbolos de salida es  $M=3$ , a velocidad  $r = r_b$  por lo que es un código redundante. Esta redundancia permitirá detectar ciertos errores, ya que existen en el código cadenas no permitidas  $(+1 + 1)$ , y  $(-1 - 1)$ .

**Código Manchester** Este es un código muy popular, utilizado como parte del estándar IEEE 802.3 (Lan-Ethernet). En este código, al bit de información '0' se le asigna una transición  $+1 \rightarrow -1$  ( $p(t)$  de la figura 5.4) y al bit de información '1', la transición inversa ( $-p(t)$ ). El pulso asignado por tanto es el de la figura 5.4. De esta forma, se incluye la información del reloj en la propia señal. Como desventaja, la señal ocupará el doble de ancho de banda que en un código binario NRZ, como veremos en los próximos apartados. La figura 5.5 muestra dos implementaciones de este código.



**Figura 5.4:** Pulso básico del código Manchester



**Figura 5.5:** Ejemplo de codificación con código Manchester

## 5.2. Densidad Espectral de Potencia de la señal digital

### 5.2.1. Cálculo de la densidad espectral de potencia de la señal digital en línea

Se desea calcular la DEP del proceso estacionario:

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kT - t_0)$$

en donde  $t_0$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo  $[0, T]$ . Partimos de la expresión para la DEP:

$$G_x(f) = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \{|X_{T'}(f)|^2\}}{T'}$$

en donde

$$X_{T'}(f) = \mathcal{F} \{x_{T'}(t)\} \quad x_{T'}(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < \frac{T'}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Eligiendo  $T' = (2K + 1)T$ :

$$X_{T'}(f) = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-K}^K a_k p(t - kT - t_0) \right\} = \sum_{k=-K}^K a_k P(f) e^{-j2\pi f t_0} e^{-j2\pi f kT}$$

$$|X_{T'}(f)|^2 = |P(f)|^2 \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K a_k a_l^* e^{-j2\pi f(k-l)T}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ |X_{T'}(f)|^2 \} &= |P(f)|^2 \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K \mathbb{E} \{ a_k a_l^* \} e^{-j2\pi f(k-l)T} \\ &= |P(f)|^2 \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K R_a[k-l] e^{-j2\pi f(k-l)T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K R_a[k-l] e^{-j2\pi f(k-l)T} &= \left\{ \begin{array}{l} k-l = n \\ k = n+l \end{array} \right\} = \sum_{l=-K}^K \sum_{n=-K-l}^{K-l} R_a[n] e^{-j2\pi f(k-l)T} \\ &= \sum_{n=0}^{2K} R_a[n] e^{-j2\pi f nT} + \sum_{n=-1}^{2K-1} R_a[n] e^{-j2\pi f nT} + \dots + \sum_{n=-2K+1}^1 R_a[n] e^{-j2\pi f nT} + \sum_{n=-2K}^0 R_a[n] e^{-j2\pi f nT} = \\ &= (2K+1)R_a[0] + (2K+1-1)R_a[1]e^{-j2\pi f T} + (2K+1-2)R_a[2]e^{-j2\pi f 2T} + \dots \\ &\dots + (2K+1-1)R_a[-1]e^{j2\pi f T} + (2K+1-2)R_a[-2]e^{j2\pi f 2T} + \dots + (2K+1-K)e^{j2\pi f KT} \\ &= \sum_{n=-K}^K ((2K+1) - |n|) R_a[n] e^{-j2\pi f nT} = (2K+1) \sum_{n=-K}^K \left( 1 - \frac{|n|}{2K+1} \right) R_a[n] e^{-j2\pi f nT} \end{aligned}$$

$$G_x(f) = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \mathbb{E} \{ |X_{T'}(f)|^2 \} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |P(f)|^2 \sum_{n=-K}^K \left( 1 - \frac{|n|}{2K+1} \right) R_a[n] e^{-j2\pi f nT}$$

$$G_x(f) = \frac{1}{T} |P(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n] e^{-j2\pi f nT}$$

### 5.2.2. DEP para símbolos incorrelados

Tal y como queda demostrado en la Sección 5.2.1, la expresión de la DEP de la señal digital es:

$$G_x(f) = \frac{1}{T} |P(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n] e^{-j2\pi f nT} \quad (5.1)$$

en donde:

$$R_a(n) = \mathbb{E}\{a_{k+n}a_k\}$$

es la función de autocorrelación de la secuencia de símbolos  $a_k$  o  $a[k]$  usando la nomenclatura de secuencias discretas.

Distinguimos dos componentes importantes en la expresión 5.1:

- $|P(f)|^2$ , la Densidad Espectral de Energía del pulso de transmisión  $p(t)$ .
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n]e^{-j2\pi fnT}$ , la transformada discreta de Fourier de la secuencia  $R_a(n)$  para  $\Omega = 2\pi fT$ , es decir, la DEP  $G_a(f)$  de la secuencia aleatoria de símbolos  $a[k]$ .

Un caso particular muy importante y utilizado es aquel en el que la secuencia de símbolos es una secuencia incorrelada, es decir:

$$C[n] = \mathbb{E}\{(a[k+n] - m_a)(a[k] - m_a)^*\} = R_a[n] - |m_a|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \sigma_a^2 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$R_a[n] = m_a^2 + \sigma_a^2\delta[n]$$

En estas condiciones, la DEP de la secuencia de símbolos será:

$$G_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n]e^{-j2\pi fnT} = m_a^2 + \sigma_a^2 + \sum_{n \neq 0} m_a^2 e^{-j2\pi fnT} = \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fnT}$$

que puede escribirse también:

$$G_a(f) = \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Y sustituyendo en 5.1:

$$\begin{aligned} G_x(f) &= \frac{1}{T} |P(f)|^2 G_a(f) = \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 |P(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nr) \\ &= \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \end{aligned} \quad (5.2)$$

En donde:

$$m_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \sum_{k=0}^{M-1} a_k p(a_k) \quad (5.3)$$

siendo  $p(a_k)$  las probabilidades de los símbolos. Para el caso más habitual de símbolos equiprobables,  $p(a_k) = \frac{1}{M}$  y

$$m_a = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k \quad (5.4)$$

Y la varianza:

$$\begin{aligned}\sigma_a^2 &= \mathbb{E}\{(a_k - m_a)^2\} = \sum_{k=0}^{M-1} (a_k - m_a)^2 p(a_k) \\ &= \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 p(a_k) - m_a^2\end{aligned}\quad (5.5)$$

y para el caso equiprobable:

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 - m_a^2 \quad (5.6)$$

### 5.2.3. Eficiencia espectral

En las comunicaciones digitales un parámetro importante que define el sistema de transmisión es la llamada *Eficiencia espectral*  $\eta$ , que mide la cantidad de información (bits por segundo, *bps*) que el sistema es capaz de alojar en el ancho de banda ocupado (*Hz*):

$$\eta = \frac{r_b}{B_T} \text{ bps/Hz} \quad (5.7)$$

Es importante observar que el ancho de banda de la señal digital vendrá determinado por  $r$  y no por  $r_b$ . Ocupando un mismo ancho de banda  $B_T$ , podemos aumentar el flujo binario manteniendo  $r$  y aumentando el número de niveles  $M$ , ya que  $r = \frac{r_b}{\log_2 M}$ . De forma equivalente, podemos transmitir la misma información  $r_b$  ocupando menor ancho de banda (disminuyendo  $r$ ) si aumentamos el número de niveles  $M$ .

### 5.2.4. Potencia transmitida

A partir de la expresión 5.2 podemos calcular la potencia de la señal digital en línea:

$$\begin{aligned}P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \\ &= \sigma_a^2 r \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df + (m_a r)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 \delta(f - nr) df = \\ &= \sigma_a^2 r E_p + (m_a r)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 = (\sigma_a^2 + m_a^2) \cdot E_p \cdot r\end{aligned}\quad (5.8)$$

para lo que hemos utilizado que:

$$r \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P(nr)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = E_p$$

También podemos calcular  $P_x$  utilizando:

$$P_x = E_s \cdot r \quad (5.9)$$

en donde  $E_s$  es la energía media por símbolo:

$$E_s = \sum_{k=0}^{M-1} E_k \cdot p(a_k) \quad y \quad (5.10)$$

$$E_k = \int |s_k(t)|^2 dt = \int |a_k \cdot p(t)|^2 dt = a_k^2 \int |p(t)|^2 dt = a_k^2 \cdot E_p \quad (5.11)$$

$E_k$  es la energía asociada a la transmisión del símbolo  $a_k$  con el pulso de transmisión  $p(t)$ , cuya energía es  $E_p$ . Sustituyendo en 5.10 y después en 5.9:

$$P_x = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 \cdot p(a_k) \cdot E_p \cdot r = (\sigma_a^2 + m_a^2) \cdot E_p \cdot r \quad (5.12)$$

## 5.3. Ejemplos

### 5.3.1. Código unipolar binario NRZ

Calcularemos la DEP del código unipolar binario NRZ, para el caso de símbolos incorrelados. En el código unipolar NRZ se realiza el mapeo de acuerdo a la tabla 5.2.

$m_i$	$a_k$
0	0
1	+1

**Tabla 5.2:** Mapeo código unipolar binario

Se utiliza un pulso rectangular, de amplitud  $A$  y duración  $T = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_b}$ , es decir:

$$p(t) = A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$P(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

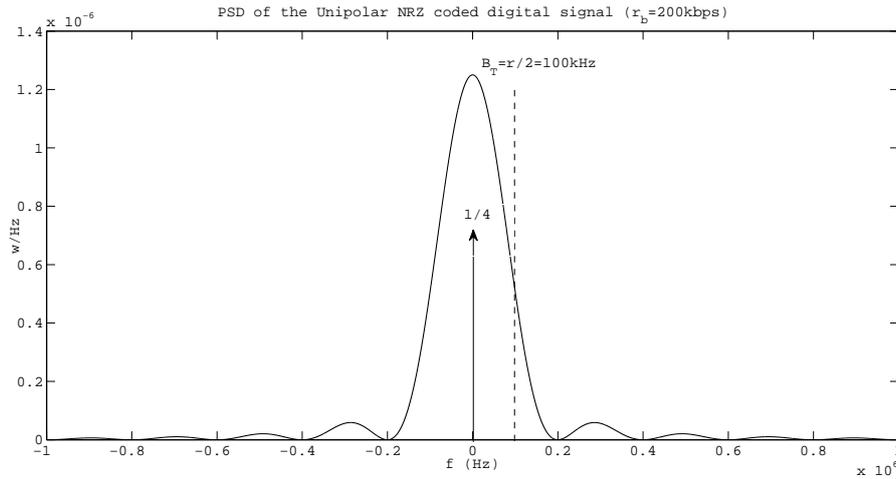
$$|P(f)|^2 = (AT)^2 \operatorname{sinc}^2(fT)$$

Calculamos la media y la varianza de los símbolos utilizando 5.4 y 5.6:

$$m_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \frac{1}{2}(0^2 + 1^2) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Y sustituyendo en 5.2:



**Figura 5.6:** DEP de la señal digital unipolar NRZ para  $r_b = 200kbps$

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{r_b}\right) + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$

La figura 5.6 representa la expresión anterior para una velocidad binaria de  $200kbps$  y con pulso de amplitud  $A = 1$ . En la figura se ha representado también el ancho de banda estimado para la transmisión, que para una función  $\text{sinc}^2$  es de  $\frac{B_z}{2}$ , en donde  $B_z$  es el ancho de banda del primer cero de la función  $\text{sinc}$ . En este ancho de banda se encuentra prácticamente el 90% de la potencia de la señal debida a la  $\text{sinc}$ . Por tanto, la eficiencia espectral para este caso:

$$\eta^{NRZ} = \frac{r_b}{B_T} = 2 \text{ bps/Hz}$$

La potencia de la señal transmitida:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4r_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{r_b}\right) df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4} \delta(f) df = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

Como era de esperar, ya que ambos símbolos son equiprobables, y por tanto la mitad del tiempo estamos transmitiendo un pulso rectangular de amplitud  $A$ , cuya energía es  $E_1 = A^2T$ , por tanto la energía media por símbolo  $E_s = E_1/2$  y  $P_x = A^2T \cdot r = A^2/2$ .

### 5.3.2. Código unipolar M-ario NRZ

La expresión obtenida para el código unipolar binario NRZ en el apartado 5.3.1 se generaliza fácilmente para códigos multinivel, teniendo en cuenta que para un código M-ario, con símbolos equiprobables  $a_k = \{0, 1, \dots, M-1\}$  y  $p(a_k) = \frac{1}{M}$ , la media y la varianza pueden calcularse como <sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Para el cálculo de la varianza se ha utilizado la siguiente suma:  $\sum_{k=1}^M k^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}$

$$m_a = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k = \frac{M-1}{2}$$

$$\sigma_{a_k}^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 - m_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$$

Y la expresión para la DEP quedará:

$$G_x(f) = A^2 \left\{ \sigma_a^2 \frac{1}{r} \text{sinc}^2 \left( \frac{f}{r} \right) + m_a^2 \delta(f) \right\}$$

$$= A^2 \left\{ \frac{M^2-1}{12r} \text{sinc}^2 \left( \frac{f}{r} \right) + \left( \frac{M-1}{2} \right)^2 \delta(f) \right\}$$

cuya representación será, salvo constantes similar a la obtenida en 5.6.

La eficiencia espectral obtenida en este caso será:

$$\eta^{NRZ(M-ario)} = \frac{r_b}{B_T} = 2 \log_2 M \text{ bps/Hz}$$

Y la potencia transmitida:

$$P_x = A^2 (\sigma_a^2 + m_a^2)$$

### 5.3.3. Código polar binario NRZ

Calcularemos ahora la DEP del código polar binario NRZ, para el caso de símbolos incorrelados. En el código polar NRZ se realiza el mapeo siguiente:

$m_i$	$a_k$
0	-1
1	+1

**Tabla 5.3:** Mapeo código polar binario

Y se utiliza un pulso rectangular, de amplitud  $A$  y duración  $T = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_b}$ , es decir:

$$p(t) = A \Pi \left( \frac{t - T/2}{T} \right)$$

$$P(f) = AT \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

$$|P(f)|^2 = (AT)^2 \text{sinc}^2(fT)$$

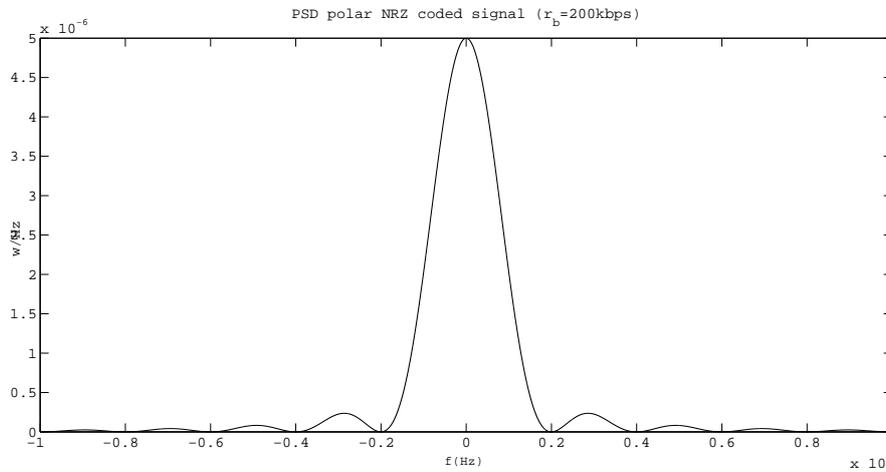
Calculamos la media y la varianza de los símbolos utilizando 5.4 y 5.6:

$$m_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \frac{1}{2}[(-1)^2 + (+1)^2] - 0 = 1$$

Y sustituyendo en 5.2:

$$G_x(f) = \frac{A^2}{r_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{r_b}\right)$$



**Figura 5.7:** DEP de la señal digital polar NRZ para  $r_b = 200\text{kbps}$

La potencia de la señal transmitida:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{r_b} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{r_b}\right) df = A^2$$

O de forma más sencilla:

$$P_x = E_s \cdot r = E_p \cdot r = A^2$$

La eficiencia espectral será la misma que para el caso unipolar:

$$\eta^{NRZ} = \frac{r_b}{B_T} = 2 \text{ bps/Hz}$$

### 5.3.4. Código polar M-ario NRZ

Al igual que para el caso de códigos unipolares, podemos generalizar el ejemplo 5.3.3 al caso multinivel, calculando la media y la varianza de los símbolos. En este caso, los símbolos utilizados serán:  $a_k = \left\{ \pm \frac{2K+1}{2} \right\}$  para  $k = 0 \dots \frac{M}{2} - 1$ . Con este mapeo, estamos manteniendo el espaciado entre símbolos de 1 utilizado en el caso multinivel unipolar. Por ejemplo, para  $M = 4$ , los símbolos transmitidos serán  $a_k = \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$ .

En este caso, la media de los símbolos será cero, y la varianza, al mantener el espaciado entre los símbolos, la misma que para el caso unipolar:

$$\sigma_a^2 = \frac{M^2 - 1}{12}$$

La DEP en este caso será por tanto:

$$\begin{aligned} G_x(f) &= \frac{A^2 \sigma_a^2}{r} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{f}{r} \right) \\ &= A^2 \frac{M^2 - 1}{12r} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{f}{r} \right) \end{aligned}$$

La potencia de la señal transmitida:

$$P_x = E_s \cdot r = E_p \cdot \sigma_a^2 \cdot r = A^2 \sigma_a^2$$

Y la eficiencia espectral será la misma que para el caso unipolar:

$$\eta^{NRZ(M\text{-ario})} = \frac{r_b}{B_T} = 2 \log_2 M \text{ bps/Hz}$$

### 5.3.5. Código polar binario RZ

Calcularemos ahora la DEP del código polar binario RZ, para el caso de símbolos incorrelados. Al ser un código polar binario el mapeo se corresponde con la tabla 5.3. El pulso utilizado es rectangular, de amplitud  $A$  y duración  $D = \frac{T}{2} = \frac{1}{2r_b}$ , es decir, la mitad de los pulsos NRZ:

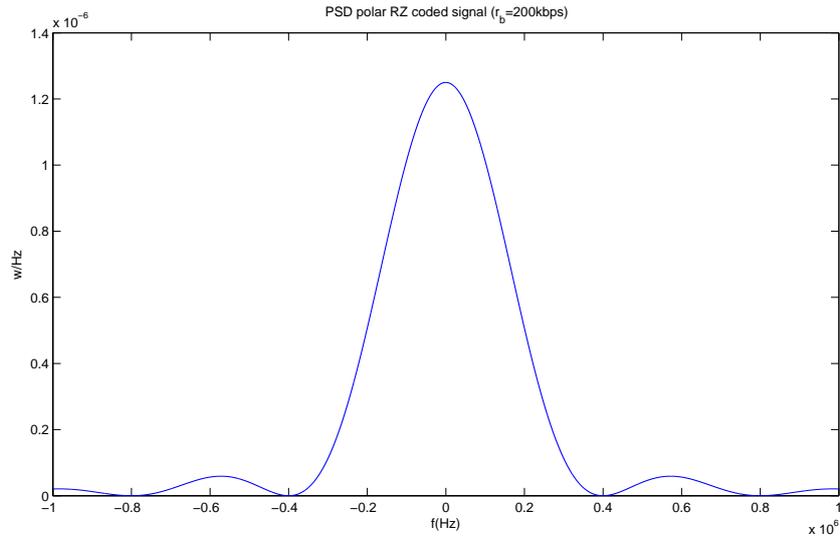
$$\begin{aligned} p(t) &= A \Pi \left( \frac{t - T/4}{T/2} \right) \\ P(f) &= A \frac{T}{2} \operatorname{sinc} f \frac{T}{2} \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} \\ |P(f)|^2 &= \left( A \frac{T}{2} \right)^2 \operatorname{sinc}^2 f \frac{T}{2} \end{aligned}$$

La media y la varianza de los símbolos no cambia con respecto al caso NRZ (apartado 5.3.3):

$$\begin{aligned} m_a &= \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0 \\ \sigma_a^2 &= \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \frac{1}{2} [(-1)^2 + (1)^2] - 0^2 = 1 \end{aligned}$$

Y sustituyendo en 5.2:

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r_b} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{f}{2r_b} \right)$$



**Figura 5.8:** DEP de la señal digital polar RZ para  $r_b = 200\text{kbps}$

Como puede observarse, su forma es idéntica a la del caso polar NRZ con la diferencia de que en este caso el ancho de banda ocupado es el doble.

La potencia de la señal transmitida:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4r_b} \text{sinc}^2 \left( \frac{f}{2r_b} \right) df = \frac{A^2}{2}$$

O de forma más sencilla:

$$P_x = E_s \cdot r = E_p \cdot r = \frac{A^2}{2}$$

Y la eficiencia espectral será la mitad que para el caso NRZ:

$$\eta^{RZ} = \frac{r_b}{B_T} = 1 \text{ bps/Hz}$$

### 5.3.6. Código polar M-ario RZ

Calcularemos ahora la DEP del código polar M-ario RZ, como siempre para el caso de símbolos incorrelados. Al ser un código polar el mapeo se corresponde con el realizado en 5.3.4, con símbolos  $a_k = \left\{ \pm \frac{2K+1}{2} \right\}$  para  $k = 0 \dots \frac{M}{2} - 1$ . La media de los símbolos será cero y la varianza  $\sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$ . El pulso utilizado es rectangular, de amplitud  $A$  y duración medio periodo de símbolo:  $D = \frac{T}{2} = \frac{1}{2r_b}$ , es decir, la mitad de los pulsos NRZ:

$$\begin{aligned} p(t) &= A \Pi \left( \frac{t - T/4}{T/2} \right) \\ P(f) &= A \frac{T}{2} \text{sinc} f \frac{T}{2} \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} \\ |P(f)|^2 &= \left( A \frac{T}{2} \right)^2 \text{sinc}^2 f \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Y sustituyendo en 5.2:

$$G_x(f) = \left(\frac{AT}{2}\right)^2 \frac{M^2 - 1}{12} r \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{2r}\right) = \frac{A^2 M^2 - 1}{4r} \frac{M^2 - 1}{12} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{2r}\right)$$

La potencia de la señal transmitida:

O de forma más sencilla:

$$P_x = E_s \cdot r = E_p \frac{M^2 - 1}{12} \cdot r = \frac{A^2 M^2 - 1}{2} \frac{M^2 - 1}{12}$$

Y la eficiencia espectral será la mitad que para el caso NRZ:

$$\eta^{RZ} = \frac{r_b}{B_T} = \log_2 M \text{ bps/Hz}$$

### 5.3.7. Código unipolar binario RZ

Calcularemos la DEP del código unipolar binario RZ, para el caso de símbolos incorrelados. El mapeo realizado se corresponderá con el ya visto en el ejemplo 5.3.1 por lo que:

$$m_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_k^2\} - m_a^2 = \frac{1}{2}[0^2 + 1^2] - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Y se utiliza un pulso rectangular, de amplitud  $A$  y duración  $D = \frac{T}{2} = \frac{1}{2r_b}$ , es decir:

$$p(t) = A\Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right)$$

$$P(f) = A\frac{T}{2} \operatorname{sinc}f\frac{T}{2} \cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{4}}$$

$$|P(f)|^2 = \left(A\frac{T}{2}\right)^2 \operatorname{sinc}^2 f\frac{T}{2}$$

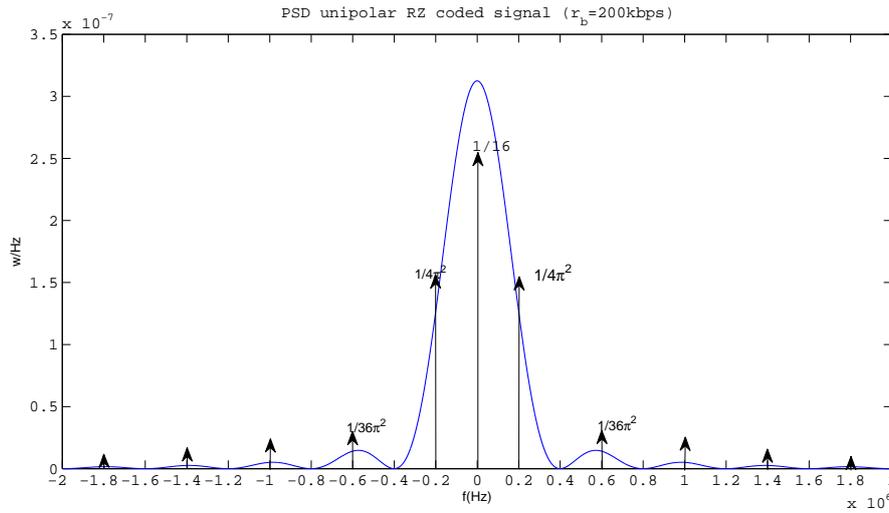
Y sustituyendo en 5.2:

$$G_x(f) = \frac{1}{4}r_b \frac{A^2}{4r_b^2} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{2r_b} + \frac{A^2}{4} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{2r_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - nr_b)$$

$$= \frac{A^2}{16r_b} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{2r_b} + \frac{A^2}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 \frac{n}{2} \delta(f - nr_b) \quad (5.13)$$

La figura 5.9<sup>2</sup> representa la expresión anterior para una velocidad binaria de 200kbps y con pulso de amplitud  $A = 1$ . Como puede observarse, del tren infinito de deltas (segundo sumando

<sup>2</sup>El área de las deltas no mantiene la escala del resto de la gráfica



**Figura 5.9:** DEP de la señal digital unipolar RZ para  $r_b = 200kbps$

en la expresión 5.13), además de la delta situada en el origen únicamente quedan las situadas en los múltiplos impares de  $r$ , ya que las situadas en los múltiplos pares de  $r$  se anulan, debido a los ceros de la sinc.

La existencia de fuertes componentes senoidales en los múltiplos impares de  $r$  podrá ser utilizada para la recuperación del sincronismo de bit en recepción, motivo que justifica el uso de los códigos RZ, ya que la eficiencia espectral para este caso:

$$\eta^{RZ} = \frac{r_b}{B_T} = 1 \text{ bps/Hz}$$

es la mitad de la lograda por los códigos NRZ.

La potencia de la señal transmitida se calcula con más facilidad en este caso utilizando la ecuación 5.9 :

$$\begin{aligned} E_0 &= 0 & E_1 &= A^2 \frac{T}{2} & E_s &= \frac{1}{2} A^2 \frac{T}{2} \\ P_x &= A^2 \frac{T}{4} r & &= \frac{A^2}{4} \end{aligned}$$

Como era de esperar, ya que en este caso, con ambos símbolos equiprobables, la mitad del tiempo estamos transmitiendo un pulso rectangular de amplitud  $A$  y duración la mitad que en el caso NRZ.

### 5.3.8. Código unipolar M-ario RZ

La expresión obtenida para el código unipolar binario RZ en 5.3.7 se generaliza fácilmente para códigos multinivel, teniendo en cuenta que para un código M-ario, con símbolos equiprobables  $a_k = \{0, 1, \dots, M - 1\}$  y  $p(a_k) = \frac{1}{M}$ , la media y la varianza pueden calcularse como:

$$m_a = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k = \frac{M-1}{2}$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 - m_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$$

Y la expresión para la DEP quedará:

$$\frac{M^2-1}{12} \frac{A^2}{4r} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{2r} + (M-1)^2 \frac{A^2}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 \frac{n}{2} \delta(f-nr) \quad (5.14)$$

Al igual que para el caso binario, las deltas situadas en los múltiplos pares de  $r$  (excepto la del origen) se anulan.

Para calcular la potencia transmitida  $P_T$  podemos utilizar 5.12 con  $E_p = A^2 \frac{T}{2}$ :

$$P_x = E_s \cdot r = \frac{A^2}{2} (\sigma_a^2 + m_a^2)$$

El ancho de banda estimado para la transmisión de este código será  $B_T \simeq r$  por lo que la eficiencia espectral será:

$$\eta^{RZ(M-ario)} = \frac{r_b}{B_T} = \log_2 M \text{ bps/Hz}$$

### 5.3.9. Código Manchester

Tal y como se ha visto en la sección 5.1 el código Manchester es un código polar (por lo tanto con media cero) y su pulso incluye en la parte central una transición de -1 a +1 o a la inversa, tal y como se muestra en la figura 5.5.

En este caso por lo tanto:

$$m_a = 0$$

$$\sigma_a^2 = 1$$

Calculamos la transformada de Fourier del pulso (su módulo):

$$p(t) = A \left\{ \Pi \left( \frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}} \right) - \Pi \left( \frac{t - \frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}} \right) \right\}$$

$$|P(f)| = A \left| \frac{T}{2} \operatorname{sinc} f \frac{T}{2} \left\{ e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} - e^{-j2\pi f \frac{3T}{4}} \right\} \right|$$

$$= A \left| \frac{T}{2} \operatorname{sinc} f \frac{T}{2} e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} \left\{ e^{+j2\pi f \frac{T}{4}} - e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} \right\} \right|$$

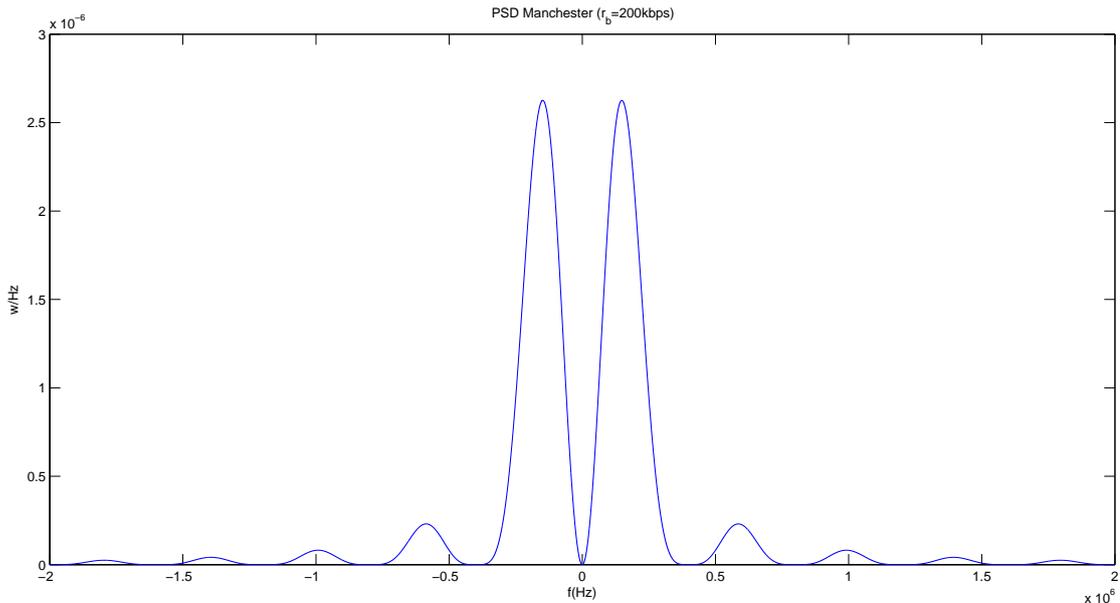
$$= AT \operatorname{sinc} f \frac{T}{2} \sin 2\pi f \frac{T}{4}$$

Por tanto:

$$G_x(f) = A^2 T \operatorname{sinc}^2 f \frac{T}{2} \sin^2 2\pi f \frac{T}{4}$$

siendo  $T = T_b = \frac{1}{r_b}$

cuya representación gráfica encontramos en la figura 5.10.



**Figura 5.10:** DEP del código Manchester

Como puede verse en la figura, el código presenta una excelente respuesta en bajas frecuencias (tiene un cero en  $f=0$ ). El máximo de la DEP se encuentra en  $f = 0,74r$  y la caída espectral es con  $\frac{1}{f^2}$  y así se considera un ancho de banda de transmisión estimado  $B_T = r$ . Por tanto su eficiencia espectral será:

$$\eta = \frac{r_b}{B_T} = 1 \text{ bps/Hz}$$

La potencia transmitida se calcula fácilmente a partir de la energía media por símbolo: ambos símbolos tienen la misma energía,  $E_1 = E_0 = A^2 T$ , y por tanto:

$$P_T = A^2$$

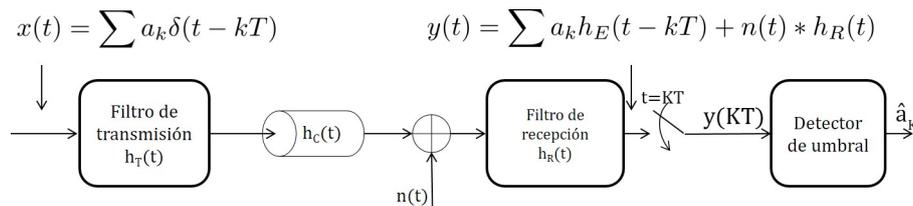
## 5.4. Canales limitados en banda

### 5.4.1. Interferencia entre símbolos

La figura 5.11 representa un sistema de transmisión en banda base de una señal digital.

		$m_a$	$\sigma_a^2$	$E_p$	$P_T = (\sigma_a^2 + m_a^2) E_p r$	$\eta$ bps/Hz
Unipolar $a_k = 0, 1 \dots M - 1$	NRZ	$\frac{M - 1}{2}$	$\frac{M^2 - 1}{12}$	$A^2 \cdot T$	$\frac{2M^2 - 3M + 1}{6} \cdot A^2$	$2 \log_2 M$
	RZ	$\frac{M - 1}{2}$	$\frac{M^2 - 1}{12}$	$\frac{A^2 \cdot T}{2}$	$\frac{2M^2 - 3M + 1}{6} \cdot \frac{A^2}{2}$	$\log_2 M$
Polar $a_k = \pm \frac{1}{2}, \dots \pm \frac{M-1}{2}$	NRZ	0	$\frac{M^2 - 1}{12}$	$A^2 \cdot T$	$\frac{M^2 - 1}{12} \cdot A^2$	$2 \log_2 M$
	RZ	0	$\frac{M^2 - 1}{12}$	$\frac{A^2 \cdot T}{2}$	$\frac{M^2 - 1}{12} \cdot \frac{A^2}{2}$	$\log_2 M$
Manchester $a_k = \pm \frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{4}$	$A^2 \cdot T$	$\frac{A^2}{4}$	1

**Tabla 5.4:** Resumen de valores de parámetros para diferentes tipos de códigos con pulsos de amplitud  $A$  y símbolos equiespaciados 1.



**Figura 5.11:** Sistema de transmisión banda base digital

La secuencia de símbolos  $\{a_k\}$  a velocidad de símbolo  $r$ , atravesará el filtro de transmisión (con respuesta al impulso  $h_T(t)$ ) para ser inyectada en el canal con respuesta al impulso  $h_C(t)$ . El ruido del sistema  $n(t)$  se modela como un ruido blanco y gaussiano a la entrada del filtro receptor  $h_R(t)$ .

Para estimar el valor de los símbolos transmitidos, se realizará un muestreo de la señal a la salida del receptor  $y(t)$ , evaluando su valor en cada intervalo de símbolo en instantes  $t_k = kT$ . Así, en un determinado instante  $t_K = KT$  desearemos recibir el símbolo  $a_K$  correspondiente a dicho instante. El detector de umbral decidirá a cuál de los símbolos del alfabeto de  $M$  símbolos  $\{a_k\}$  pertenece el valor detectado  $y(t_K)$ , estimando el símbolo transmitido  $\hat{a}_K$ . En el caso de que  $\hat{a}_K \neq a_K$  se habrá producido un error en la detección del símbolo.

La expresión para la señal a la salida del filtro receptor será:

$$y(t) = \sum a_k h_E(t - kT) + n(t) * h_R(t)$$

En donde:

$$h_E(t) = h_T(t) * h_C(t) * h_R(t)$$

es la respuesta conjunta del sistema completo formado por el transmisor, canal de transmisión y filtro receptor.

En el instante  $t_K = KT$ :

$$\begin{aligned}
 y(KT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h_E(KT - kT) + n(t) * h_R(t)|_{t=t_K} \\
 &= \underbrace{a_K h_E(0)}_{\text{símbolo deseado}} + \underbrace{\sum_{k \neq K, k=-\infty}^{\infty} a_k h_E(KT - kT)}_{\text{Interferencia entre símbolos}} + \underbrace{n(t) * h_R(t)|_{t=t_K}}_{\text{Ruido}} \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, según la ecuación 5.15, en el valor de señal detectado (y a partir del cual se estimará el símbolo transmitido  $\widehat{a}_K$ ) podemos distinguir tres componentes:

- El valor del símbolo transmitido, escalado por  $h_E(0)$ . Esta es la componente que nos interesa.
- Una componente de *Interferencia entre símbolos*, más conocida por sus siglas en inglés **ISI** (*Inter Symbol Interference*)
- Una componente de ruido, que en este momento no tendremos en cuenta (se estudiará más adelante), por lo que la consideraremos cero.

Para eliminar la ISI, deberá cumplirse que:

$$h_E((K - k)T) = h_E(nT) = 0 \quad \forall n \neq 0 \quad (5.16)$$

Esta condición también la podemos escribir:

$$h_E(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = h_E(0) \cdot \delta(t) \quad (5.17)$$

O en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned}
 H_E(f) * r \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kr) &= h_E(0) \\
 r \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_E(f - kr) &= h_E(0) \quad \forall |f| \leq \frac{r}{2} \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

en donde  $H_E(f)$  es la respuesta frecuencial completa del canal (filtro transmisor, canal de transmisión y filtro receptor) y  $r = \frac{1}{T}$  es la velocidad de símbolo. Las ecuaciones 5.16 y 5.18 representan el *Primer Criterio de Nyquist* para la transmisión sin interferencia entre símbolos, expresadas en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia respectivamente. La primera parte de la ecuación 5.18 es la extensión periódica con periodo  $r$  de la respuesta frecuencial  $H_E(f)$ .  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_E(f - kr)$  es por lo tanto una función periódica, con periodo  $r$ . La segunda parte de la ecuación es la constante  $h_E(0)$ .

Una consecuencia de este principio es que **la velocidad máxima de transmisión por un canal de ancho de banda  $B$  será  $r_{max} = 2B$** . O de forma equivalente, el ancho de banda mínimo necesario para la transmisión a velocidad  $r$  será  $B_{min} = \frac{r}{2}$ .

### 5.4.2. Pulso de Nyquist o pulsos en coseno alzado

Una función que cumple de forma evidente 5.16 es la función *sinc*:

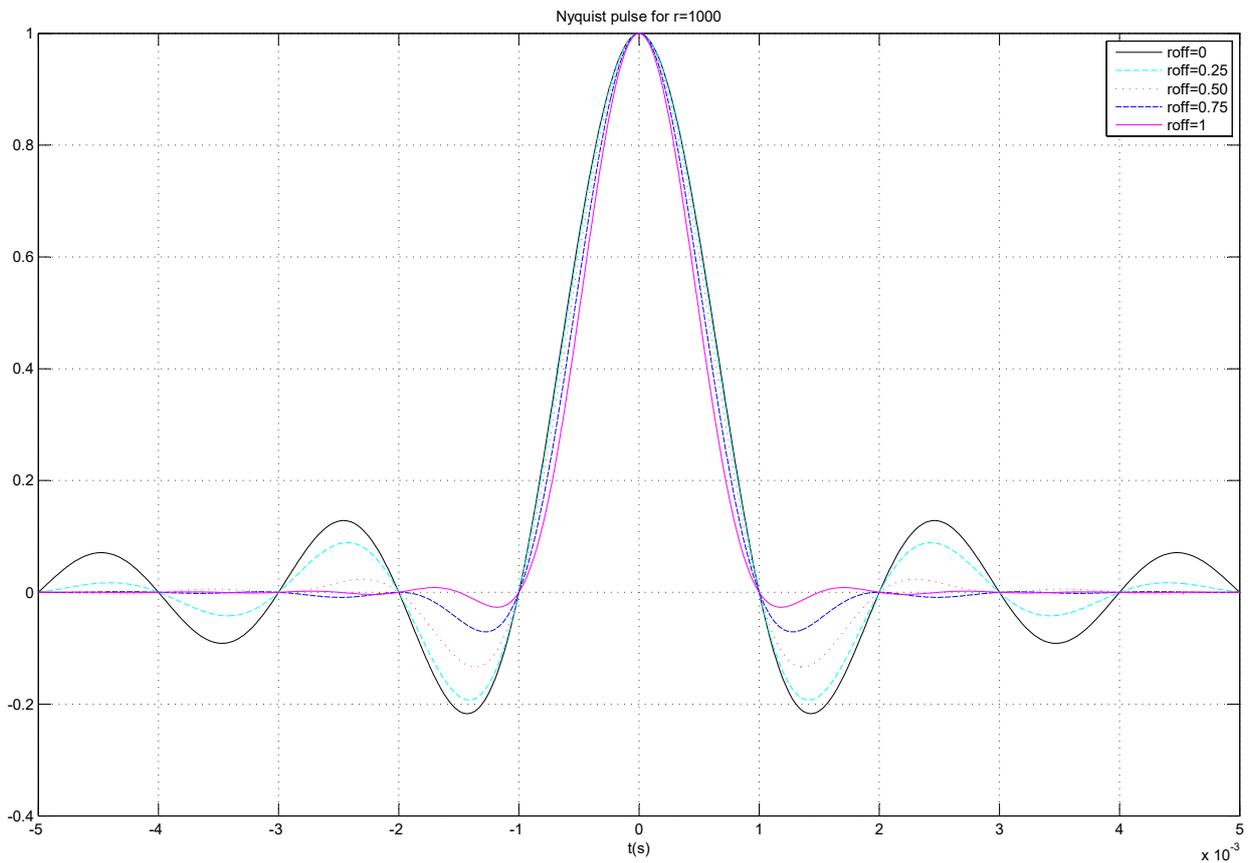
$$h_E(t) = \text{sinc}(rt)$$

Cuya transformada de Fourier:

$$H_E(f) = \frac{1}{r} \Pi \left( \frac{f}{r} \right)$$

es plana en  $|f| \leq \frac{r}{2}$ . Y es sencillo comprobar que cumple la condición en el dominio de la frecuencia (ecuación 5.18). La función *sinc* es un caso particular del conjunto de funciones conocidas como *Pulsos de Nyquist* cuya expresión temporal es la siguiente (ver figura 5.12):

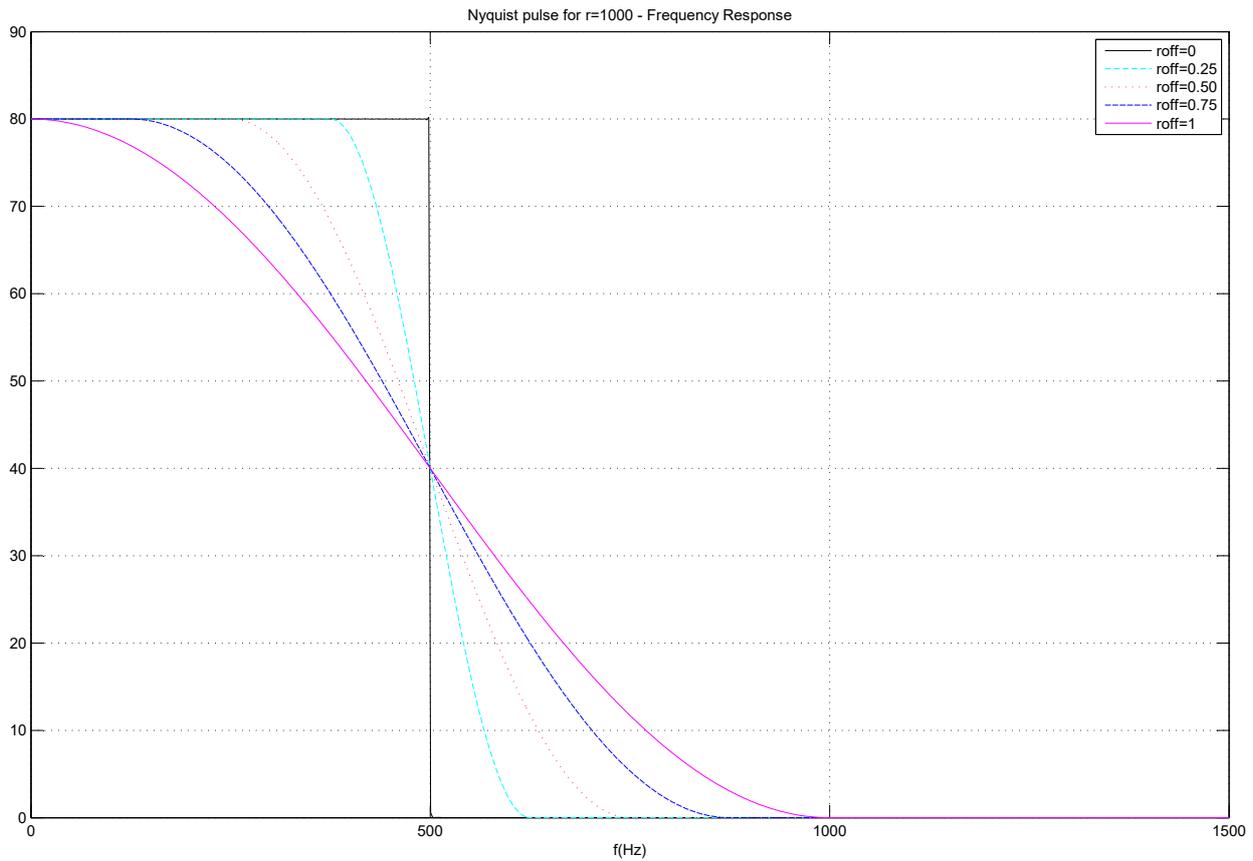
$$h_E(t) = \frac{\cos 2\pi\beta t}{1 - (4\beta t)^2} \cdot \text{sinc } rt \quad (5.19)$$



**Figura 5.12:** Pulsos de Nyquist para diferentes valores del factor de rolloff  $\rho$  ( $r = 1000$ ).

Y su transformada de Fourier:

$$H_E(f) = \begin{cases} \frac{1}{r} & 0 < |f| < \frac{r}{2} - \beta \\ \frac{1}{2r} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{2\beta} \left( |f| + \beta - \frac{r}{2} \right) \right) & \frac{r}{2} - \beta \leq |f| \leq \frac{r}{2} + \beta \\ 0 & |f| \geq \frac{r}{2} + \beta \end{cases} \quad (5.20)$$



**Figura 5.13:** Respuesta frecuencial en coseno alzado para diferentes valores del factor de rolloff  $\rho$  ( $r = 1000$ ).

siendo  $\beta$  el parámetro que controla el *exceso de ancho de banda* sobre el mínimo ancho de banda necesario  $\frac{r}{2}$ . Cuando el exceso de ancho de banda  $\beta$  se expresa en relación a  $\frac{r}{2}$  se conoce como *factor de roll-off*  $\rho = \frac{\beta}{r/2} = \frac{2\beta}{r}$ .

Como puede verse en la figura 5.13 se distinguen 3 zonas en la respuesta frecuencial:

- Una zona plana y constante, alrededor del origen, en el rango  $0 < |f| < \frac{r}{2}(1 - \rho)$ . Para  $\rho = 0$  esta zona abarca hasta  $r/2$  y para  $\rho = 1$  no existe.
- Una zona de transición, de anchura total  $2\beta = \rho r$ . Para  $\rho = 0$  esta zona no existe y para  $\rho = 1$  abarca todo el ancho de banda,  $r$ . Esta zona, con la forma de un *coseno alzado* da el nombre a esta función de transferencia, como *respuesta en coseno alzado*. Presenta una simetría denominada *vestigial* alrededor de  $\frac{r}{2}$ , que permitirá que se cumpla la ecuación 5.18.
- La zona atenuada, con  $H_E(f)=0$ , desde  $|f| \geq \frac{r}{2}(1 + \rho)$ .

La característica en coseno alzado permite que se cumpla la ecuación 5.18, sin tener que presentar una respuesta tipo 'ladrillo', sin intervalo de transición en la banda de paso y la banda atenuada. A cambio el ancho de banda necesario para la transmisión a velocidad  $r$  se ha incrementado por  $\rho \frac{r}{2} Hz$ :

$$B_T = \frac{r}{2}(1 + \rho)$$

El empleo de valores de  $\rho$  grandes aumenta por tanto el ancho de banda de transmisión necesario para una determinada velocidad de símbolo  $r$ . Sin embargo, como puede verse en la respuesta temporal de la figura 5.12, la amplitud de los lóbulos secundarios se reduce considerablemente a medida que crece el exceso de ancho de banda. Alejándose más de un periodo de símbolo del origen, se aprecia que la pendiente de la curva alrededor del cero es más plana para los mayores valores de  $\rho$ . Esta característica implica que si se produjeran errores de sincronismo en el instante la detección del símbolo (en cuyo caso la detección no se realizará exactamente en la posición del cero, sino ligeramente antes o ligeramente después), la interferencia entre símbolos que se producirá será tanto menor cuando más plana sea la curva alrededor del cero, es decir, cuanto mayor sea  $\rho$ . En resumen, el empleo de exceso de ancho de banda reduce la sensibilidad del sistema a los errores de sincronismo.

En los sistemas de transmisión, valores habituales utilizados para  $\rho$  se encuentran en el rango  $0,2 < \rho < 0,3$ . El aumento de ancho de banda necesario para la transmisión de un cierto flujo binario  $r_b$ , puede compensarse aumentando el número de niveles del código  $M$ , ya que  $r = \frac{r_b}{\log_2 M}$ . Por ejemplo, si pasamos de utilizar  $\rho = 0$  a utilizar  $\rho = 1$ , el ancho de banda se dobla, pasando de ser  $B$  a ser  $2B$ . Si ahora doblamos el número de niveles del código, reduciremos  $r$  a la mitad, por lo que el flujo binario transmitido por el canal seguirá siendo  $r_b$ . La tabla 5.5 muestra los valores de  $r_b$  logrados para diferentes valores de  $M$  y de  $\rho$  en un canal telefónico de anchura  $B = 4000$  Hz. Como vemos, podemos lograr transmitir el mismo flujo binario utilizando la combinación ( $M = 2, \rho = 0$ ) que utilizando la combinación ( $M = 4, \rho = 1$ ). Evidentemente, el mayor flujo binario lo obtenemos combinando los menores valores de  $\rho$  con los mayores valores de  $M$ .

	$\rho = 0$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,75$	$\rho = 1$
M=2	8000	6400	5333	4571	4000
M=4	16000	12800	10666	9142	8000
M=8	24000	19200	16000	13713	12000
M=16	32000	25600	21333	18284	16000

**Tabla 5.5:** Velocidades binarias alcanzadas en una transmisión por canal telefónico ( $B = 4000$  Hz) con filtros en coseno alzado, para diferentes valores de  $\rho$  y  $M$ .  $r_b = \frac{2B}{(1 + \rho)} \cdot \log_2 M$

Como ya sabemos, la respuesta en coseno alzado debe ser alcanzada por el conjunto formado por los filtros de recepción y transmisión, junto con la respuesta del propio canal de transmisión. Considerando un canal de transmisión ideal, y fijándonos únicamente en los filtros:

$$H_T(f) \cdot H_R(f) = H_E(f)$$

y es  $H_E(f)$  quien debe presentar la forma en coseno alzado. Como veremos en temas posteriores, para minimizar la probabilidad de error del sistema, los filtros de transmisión y recepción deben formar una pareja, de forma que:

$$h_T(t) = h_R^*(-t)$$

Lo cual significa que:

$$\begin{aligned} H_T(f) &= H_R^*(f) \\ H_T(f)H_R(f) &= |H_T(f)|^2 = |H_R(f)|^2 = H_{\cos}(f) \\ |H_T(f)| &= |H_R(f)| = \sqrt{H_{\cos}(f)} \end{aligned}$$

En donde hemos llamado  $H_{\cos}(f)$  a la característica en coseno alzado. Por esta razón, los filtros utilizados en transmisión y recepción tienen una característica conocida como *raíz de coseno alzado*.

### 5.4.3. Resumen

Recapitulamos aquí las ideas principales de esta sección:

- La transmisión a velocidad de símbolo  $r$  requiere un ancho de banda mínimo de  $B_{min} = \frac{r}{2}$ .
- De forma equivalente, la transmisión por un canal de ancho de banda  $BHz$  limita la velocidad de símbolo a  $r_{max} = 2B$ .
- La transmisión a velocidad máxima  $r = 2B$  tiene ciertos inconvenientes:
  - La dificultad de implementación de los filtros de transmisión y recepción.
  - El elevado valor de los lóbulos secundarios, que hará el sistema muy sensible a errores de sincronismo (se producirá mucha ISI en caso de error de sincronismo).
- Los problemas mencionados se resuelven utilizando pulsos de la familia de los *pulsos de Nyquist* (o *filtros en coseno alzado*) con factores de *roll-off* superiores a cero.
- El empleo de valores de  $\rho > 0$  reduce la velocidad de transmisión por un canal de  $BHz$  a  $r_{max} = \frac{2B}{1+\rho}$ . De forma equivalente, la transmisión a velocidad  $r$  requerirá un ancho de banda mínimo de  $B_{min} = \frac{r}{2}(1 + \rho)$ .
- El exceso de ancho de banda creado puede compensarse utilizando un mayor número de niveles para permitir la transmisión del mismo flujo binario, ya que el flujo binario resultante será:  $r_b = \frac{2B}{1 + \rho} \cdot \log_2 M$ .



# Tema 6

## Modulaciones digitales

En este tema estudiaremos las técnicas básicas que se utilizan para la modulación de las señales digitales banda base - estudiadas en el tema anterior - con el fin de posibilitar su transmisión a través de canales paso banda.

### 6.1. Introducción

En toda operación de modulación, se distinguen las siguientes señales:

- Señal moduladora: es la señal con la información que se desea transmitir. Será una señal banda base (analógica o digital).
- Señal portadora: es una señal que se utilizará para transportar la información, mediante la variación de alguno de los parámetros que la definen.
- Señal modulada: es la señal paso banda resultante de la modulación, que llevará la información de la moduladora.

Las modulaciones en las que la señal portadora es una senoide se conocen como *modulaciones de onda continua*, o por sus siglas en inglés, modulaciones *CW - Continuous Wave*-. Estas modulaciones responden en términos generales a la siguiente expresión:

$$y(t) = e(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \quad (6.1)$$

en donde  $y(t)$  es la *señal modulada* y la señal senoidal con frecuencia  $f_c$  -  $A_c \cos 2\pi f_c t$ - es la *señal portadora*. Las funciones  $e(t)$  y  $\phi(t)$  serán quienes contengan la información a transmitir. Si es la envolvente de la señal  $e(t)$  quien lleva la información dará lugar a una **modulación de amplitud**, que cuando la señal moduladora (o información) es digital se conoce como *Modulación por Desplazamiento de Amplitud*, más conocido por sus siglas en inglés *ASK - Amplitude Shift Keying*. Si es la fase instantánea  $\phi(t)$  la que se modula se tratará de una **modulación de fase** o una **modulación de frecuencia**, conocidas respectivamente como *PSK - Phase Modulation Keying* y *FSK - Frequency Shift Keying*.

En los apartados que siguen veremos los aspectos básicos de estas modulaciones.

## 6.2. Expresión general de la DEP para procesos estacionarios paso banda

Para el cálculo de la Densidad Espectral de Potencia de los procesos paso banda con modulación digital, partimos de la siguiente expresión general del proceso estacionario paso banda:

$$y(t) = A_c (a(t)(\cos(2\pi f_c t + \phi) - b(t) \sin(2\pi f_c t + \phi)) \quad (6.2)$$

en donde  $A_c$  es la amplitud de una portadora de frecuencia  $f_c$  y  $\phi$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en  $(0, 2\pi)$ .

Los procesos  $a(t)$  y  $b(t)$  son señales digitales banda base que responden a las expresiones:

$$a(t) = \sum_k a_k p(t - kT) \quad (6.3)$$

$$b(t) = \sum_k b_k p(t - kT) \quad (6.4)$$

y ambas pueden considerarse procesos estacionarios con DEP respectivas  $G_a(f)$  y  $G_b(f)$ . Además, estos dos procesos estarán por lo general incorrelados, es decir que consideraremos  $R_{ab}(\tau) = 0$ .

Así, la autocorrelación del proceso paso banda  $y(t)$  puede calcularse como:

$$R_y(\tau) = \frac{A_c^2}{2} \{R_a(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) + R_b(\tau)\cos(2\pi f_c \tau)\} \quad (6.5)$$

y por lo tanto la expresión general para DEP de las señales digitales moduladas paso banda resultante es:

$$G_y(f) = \frac{A_c^2}{4} \{G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c) + G_b(f - f_c) + G_b(f + f_c)\} \quad (6.6)$$

En los apartados que siguen particularizaremos los valores de las señales  $a(t)$  y  $b(t)$  para cada tipo de modulación.

## 6.3. Modulación por desplazamiento de amplitud (ASK)

### 6.3.1. Descripción

En una señal ASK la envolvente  $e(t)$  de la expresión 6.1 es una señal digital banda base **unipolar**, y la fase instantánea será constante con t:

$$y^{ASK}(t) = A_c \sum_k a_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (6.7)$$

Los  $a_k = 0, +1, +2, \dots, +(M - 1)$  deberán ser todos positivos (como corresponde a una señal unipolar) de forma que  $e(t)$  sea siempre positiva. El caso particular binario en el que

$a_k = \{0, 1\}$ , se conoce como modulación **OOK - On Off Keying**, debido a que corresponde a una portadora que *se enciende* o *se apaga* según reciba un 1 o un 0.

En estas modulaciones se distingue entre el caso *síncrono*, en el que el periodo de símbolo  $T$  contiene un número entero de ciclos de portadora  $T = \frac{N}{f_c}$  con  $N \gg 1$  en general, y el caso *asíncrono*, en el que no necesariamente se cumple dicha relación, ya que el oscilador de la portadora y el reloj de símbolo no están sincronizados.

Para el caso síncrono (que es el consideraremos de aquí en adelante) podemos escribir (por simplificar tomaremos  $\phi = 0$ ):

$$\begin{aligned} y^{ASK}(t) &= A_c \sum_k a_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c t) = A_c \sum_k a_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c (t - kT)) \\ &= A_c \sum_k a_k p'(t - kT) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Esta expresión puede interpretarse como la de una señal digital, cuyo pulso básico es  $p'(t) = p(t)\cos 2\pi f_c t$ . Las  $M$  señales transmitidas serán entonces:

$$\begin{aligned} s_k(t) &= A_c a_k p'(t) = A_c a_k p(t) \cos 2\pi f_c t \\ k &= 0, 1 \dots M - 1 \quad a_k = 0, 1 \dots M - 1 \end{aligned}$$

### 6.3.2. Densidad Espectral de Potencia

En este apartado calcularemos la DEP de la señal ASK partiendo de la expresión 6.6. Si comparamos la expresión general de un proceso paso banda de 6.2 con 6.7 podemos identificar:

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_k a_k p(t - kT) \\ b(t) &= 0 \\ y^{ASK}(t) &= A_c a(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \end{aligned}$$

Por lo que la DEP será (substituyendo en 6.6):

$$G_y(f) = \frac{A_c^2}{4} \{G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c)\}$$

y  $G_a(f)$  es la DEP de la señal digital banda base unipolar:

$$G_a(f) = \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr)$$

con  $m_a = \frac{M-1}{2}$  y  $\sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$ . Si tenemos además pulsos NRZ, entonces  $|P(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2 fT$  y:

$$G_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{r} \text{sinc}^2 \frac{f}{r} + m_a^2 \delta(f)$$

y substituyendo:

$$G_y^{ASK}(f) = \frac{A_c^2 \sigma_a^2}{4 r} \left\{ \text{sinc}^2 \frac{f - f_c}{r} + \text{sinc}^2 \frac{f + f_c}{r} \right\} + \frac{A_c^2}{4} m_a^2 \{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \} \quad (6.9)$$

### 6.3.2.1. Eficiencia espectral

Evidentemente, la eficiencia espectral dependerá del pulso utilizado para la generación de la señal moduladora banda base,  $p(t)$ . Consideramos para empezar el caso de ASK M-aria con pulsos NRZ cuya DEP responde a la expresión 6.9. Teniendo en cuenta que se trata de la función  $\text{sinc}^2$  el ancho de banda de transmisión estimado será  $B_T \simeq r$ , y la eficiencia espectral será por tanto  $\eta = \frac{r_b}{B_T} \simeq \frac{r_b}{r} = \log_2 M$ .

Si se tratara de un pulso RZ, el ancho de banda ocupado sería el doble que para el caso NRZ, y por tanto la eficiencia espectral se reducirá a la mitad.

Otra posibilidad es el empleo de pulsos de Nyquist, cuya forma minimiza la ISI (Interferencia entre símbolos). En este caso, sabemos que en banda base el ancho de banda ocupado es de  $\frac{r}{2}(1 + \rho)$ , de manera que para la señal paso banda ASK será  $B_T = r(1 + \rho)$ , y la eficiencia espectral:  $\eta = \frac{r_b}{r(1 + \rho)} = \frac{\log_2 M}{1 + \rho}$ . Así, la eficiencia espectral se reduce por el factor  $(1 + \rho)$  respecto al sistema con pulsos rectangulares, pero el ancho de banda estará estrictamente limitado a  $r(1 + \rho)$  (mientras que con pulsos rectangulares existe una gran dispersión espectral, o pérdida de energía en lóbulos secundarios).

### 6.3.2.2. Potencia Transmitida

Para calcular la potencia transmitida, podemos utilizar la expresión 5.9, calculando la energía media por símbolo  $E_s$ :

$$P_T = E_s r = r \sum_{k=0}^{M-1} E_k p(a_k) = r \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} E_k$$

siendo  $E_k$  la energía de cada una de las señales  $s_k(t)$  asociadas a cada símbolo  $a_k$ . En este caso, partiendo de la expresión 6.8 para la señal ASK transmitida:

$$s_k(t) = A_c a_k p'(t) = A_c a_k \cos 2\pi f_c t p(t)$$

$$E_k = \int s_k^2(t) dt = A_c^2 a_k^2 \int \cos^2 2\pi f_c t p^2(t) dt = A_c^2 a_k^2 \frac{E_p}{2}$$

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} E_k = A_c^2 \frac{E_p}{2} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^2 = A_c^2 \frac{E_p}{2} (\sigma_a^2 + m_a^2)$$

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} (E_p r) (\sigma_a^2 + m_a^2)$$

Y si  $p(t)$  es un pulso rectangular de duración  $T$ , entonces  $E_p = T$  y  $P_T = \frac{A_c^2}{2} (\sigma_a^2 + m_a^2)$ . Por supuesto llegamos a la misma expresión para  $P_T$  calculando el área de la DEP de la expresión 6.9.

## 6.4. Modulación por desplazamiento de fase (PSK)

### 6.4.1. Descripción

En una modulación PSK se introduce la información digital en la fase de la portadora, de la siguiente forma:

$$y^{PSK}(t) = A_c \sum_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \phi_k + \phi) \quad (6.10)$$

siendo  $p(t)$  el pulso básico, que consideraremos rectangular,  $p(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$ . En cada periodo de símbolo  $kT$  el valor de la fase de la portadora cambia de acuerdo al valor del símbolo recibido:

$$\phi_k = \frac{\pi}{M}(2a_k + N) \quad \text{siendo } a_k = \{0, 1 \dots M - 1\} \text{ y } N = \{0, 1\}. \quad (6.11)$$

Según la expresión anterior, el círculo queda dividido en  $M$  sectores  $\phi_k$ , y cada uno va asociado a un símbolo  $a_k$ . El valor de  $N$  especifica el si existe la fase 0 ( $N = 0$ ) o no ( $N = 1$ ), o dicho de otra forma, cuál es el valor que se da al símbolo  $a_0$ .

Veamos algunos ejemplos.

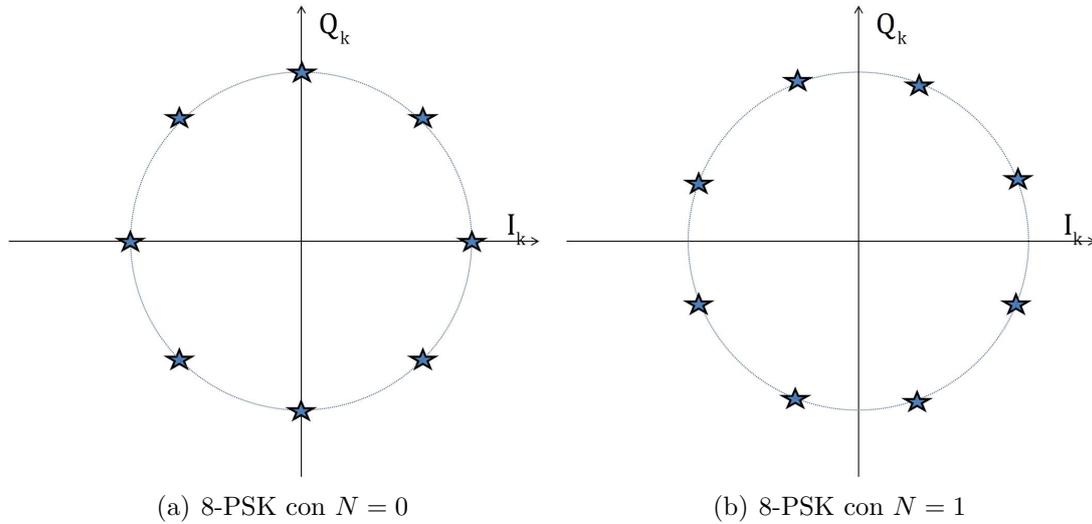
$$M = 4 \quad N = 0 \quad \phi_k = \frac{2\pi}{4}a_k = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$M = 4 \quad N = 1 \quad \phi_k = \frac{2\pi}{4}a_k + \frac{\pi}{4} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

$$M = 8 \quad N = 0 \quad \phi_k = \frac{2\pi}{8}a_k = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

$$M = 8 \quad N = 1 \quad \phi_k = \frac{2\pi}{8}a_k + \frac{\pi}{8} = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$$

La figura 6.1 muestra los valores de las fases transmitidas para una modulación 8-PSK. A continuación veremos cómo los puntos de la gráfica representan los valores de los símbolos transmitidos, en su representación paso-bajo como símbolos complejos. Esta representación se conoce como *constelación* de los símbolos transmitidos.



**Figura 6.1:** Constelaciones de los símbolos en una modulación 8-PSK

### 6.4.2. Componentes en fase y en cuadratura

Partiendo de la expresión 6.10 podemos obtener las componentes  $a(t)$  y  $b(t)$  de la expresión 6.2 para la señal PSK:

$$y^{PSK}(t) = A_c \sum_k p(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \phi) \cos \phi_k - A_c \sum_k p(t - kT) \sin(2\pi f_c t + \phi) \sin \phi_k \quad (6.12)$$

$$a(t) = \sum_k p(t - kT) \cos \phi_k$$

$$b(t) = \sum_k p(t - kT) \sin \phi_k$$

También podemos escribir estas expresiones de la siguiente forma:

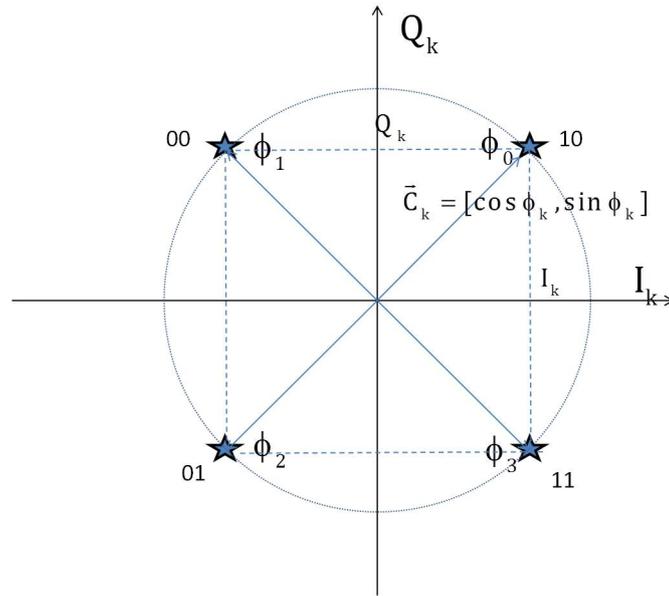
$$a(t) = \sum_k p(t - kT) \cos \phi_k = \sum_k \cos \phi_k p(t - kT) = \sum_k I_k p(t - kT) \quad (6.13)$$

$$b(t) = \sum_k p(t - kT) \sin \phi_k = \sum_k \sin \phi_k p(t - kT) = \sum_k Q_k p(t - kT) \quad (6.14)$$

En donde  $a(t)$  y  $b(t)$  se han expresado como señales digitales banda base, con pulso básico  $p(t)$ , con símbolos  $I_k = \cos \phi_k$  y  $Q_k = \sin \phi_k$ , a velocidad de símbolo  $r = \frac{1}{T}$ . Las señales  $a(t)$  y  $b(t)$  serán las componentes en fase y en cuadratura del proceso (excepto por un factor de escala  $A_c$ ), con respecto a una portadora de frecuencia  $f_c$  y fase  $\phi$ . En general, salvo para el cálculo de la DEP, podremos tomar  $\phi = 0$  sin pérdida de generalidad.

Entonces el equivalente paso bajo de la señal PSK será:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= y_F(t) + j y_C(t) = A_c(a(t) + j b(t)) = A_c \sum_k (I_k + j Q_k) p(t - kT) \\ &= A_c \sum_k \vec{C}_k p(t - kT) \end{aligned}$$



**Figura 6.2:** Constelación de símbolos en una modulación 4 PSK, con  $N = 1$

En donde los  $\vec{C}_k = [I_k, Q_k] = [\cos \phi_k, \sin \phi_k]$  son los símbolos complejos transmitidos, cuyas partes real e imaginaria corresponden a los símbolos de las señales digitales en fase y cuadratura. La figura 6.2 representa estos símbolos para una PSK cuaternaria ( $M = 4$ ) con  $N = 1$ . En dicha figura se ha representado también un posible mapeo para los bits de la secuencia binaria de entrada.

### 6.4.3. Densidad Espectral de Potencia

Comenzamos obteniendo la DEP de las componentes  $a(t)$  y  $b(t)$ . Como se trata de señales digitales banda base con símbolos incorrelados:

$$a(t) = \sum_k I_k p(t - kT)$$

$$b(t) = \sum_k Q_k p(t - kT)$$

$$G_a(f) = \left\{ \sigma_I^2 r |P(f)|^2 + (m_I \cdot r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \right\}$$

$$G_b(f) = \left\{ \sigma_Q^2 r |P(f)|^2 + (m_Q \cdot r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \right\}$$

Calculamos las medias y las varianzas de los símbolos:

$$m_I = E\{I_k\} = E\{\cos \phi_k\} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \cos \phi_m = 0$$

$$m_Q = E\{Q_k\} = E\{\sin \phi_k\} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sin \phi_m = 0$$

$$\sigma_I^2 = E\{I_k^2\} = E\{\cos^2 \phi_k\} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \cos^2 \phi_m = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 + \cos 2\phi_m}{2} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_Q^2 = E\{Q_k^2\} = E\{\sin^2 \phi_k\} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sin^2 \phi_m = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - \cos 2\phi_m}{2} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

de forma que:

$$G_a(f) = G_b(f) = \frac{r}{2} |P(f)|^2 \quad (6.15)$$

Por lo que utilizando 6.6 obtendremos la DEP para la señal PSK:

$$G_y^{PSK}(f) = \frac{A_c^2}{4} r \{ |P(f - f_c)|^2 + |P(f + f_c)|^2 \} \quad (6.16)$$

#### 6.4.3.1. Eficiencia espectral

Si el pulso básico utilizado es un pulso rectangular de duración  $T = \frac{1}{r}$ , entonces  $B_T \simeq r$  y  $\eta \simeq \frac{r_b}{r} = \log_2 M$ . Si se utilizan pulsos de Nyquist, entonces el ancho de banda estará limitado a  $B_T = r(1 + \rho)$  y  $\eta = \frac{\log_2 M}{1 + \rho}$ .

#### 6.4.3.2. Potencia transmitida

Podemos utilizar la expresión 5.9 para calcular la Potencia transmitida:

$$P_T = E_s r = r \sum_{k=0}^{M-1} E_k p(a_k) = r \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} E_k$$

siendo  $E_k$  la energía de cada una de las señales  $s_k(t)$  asociadas a cada símbolo  $a_k$ . En este caso, tomando  $\phi = 0$  en 6.10 las señales transmitidas serán:

$$s_k(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_k) p(t)$$

$$E_k = \int s_k^2(t) dt = A_c^2 \int p^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \phi_k) dt = \frac{A_c^2}{2} E_p$$

Es decir, todos símbolos son transmitidos con la misma energía  $\left( \frac{A_c^2}{2} E_p \right)$ , y por tanto la Energía media por símbolo  $E_s = \frac{A_c^2}{2} E_p$ . Por tanto:

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} E_p r$$

Y para el pulso rectangular de duración  $T = \frac{1}{r}$  obtenemos  $P_T = \frac{A_c^2}{2}$ .

Por supuesto llegamos a la misma expresión para  $P_T$  calculando el área de la DEP de la expresión 6.16.

### 6.4.4. Casos particulares en PSK

#### 6.4.4.1. Caso binario, BPSK

El caso binario en PSK ( $M=2$ ) da lugar a dos conocidas modulaciones, según  $N = 0$  o  $N = 1$  en la expresión 6.11.

**M=2, N=0** Las fases transmitidas serán  $\phi_k = \{0, \pi\}$  y las señales transmitidas:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A_c \cos 2\pi f_c t & 0 < t < T \\ s_1(t) &= -A_c \cos 2\pi f_c t & 0 < t < T \end{aligned}$$

Esta modulación se conoce también como PRK (Phase Reversal Keying). Vemos que en este caso, en la expresión 6.12 la componente correspondiente a  $b(t)$  (6.14) se anula, y la constelación pasa a ser unidimensional, con dos únicos símbolos  $I_k = -1, +1$  en fase con la portadora

**M=2, N=1** Las fases transmitidas serán  $\phi_k = \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}$  y las señales transmitidas:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A_c \sin 2\pi f_c t & 0 < t < T \\ s_1(t) &= -A_c \sin 2\pi f_c t & 0 < t < T \end{aligned}$$

En este caso, en la expresión 6.12 es la componente correspondiente a  $a(t)$  (6.13) la que se anula, y la constelación es también unidimensional, con dos únicos símbolos  $Q_k = -1, +1$ , en cuadratura con la portadora. Estos casos binarios para PSK son en realidad casos degenerados (unidimensionales) del caso genérico PSK bidimensional.

La DEP para estos dos casos particulares de PSK será la misma obtenida para el caso general (6.16). Podemos comprobarlo, partiendo de la expresión general de la señal PSK particularizada para PRK (caso  $M=2, N=0$ ):

$$\begin{aligned} y^{PRK}(t) &= A_c \sum_k p(t - kT) \cos \phi_k \cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= A_c a(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \end{aligned}$$

De donde:

$$G_y^{PRK}(f) = \frac{A_c^2}{4} \{G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c)\}$$

y

$$G_a(f) = \left\{ \sigma_I^2 r |P(f)|^2 + (m_I \cdot r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \right\}$$

Calculamos las medias y las varianzas de los símbolos  $I_k = \{-1, +1\}$ :

$$m_I = E\{I_k\} = E\{\cos \phi_k\} = \frac{1}{2}((-1) + (+1)) = 0$$

$$\sigma_I^2 = E\{I_k^2\} = E\{\cos^2 \phi_k\} = \frac{1}{2}((-1)^2 + (+1)^2) = 1$$

de forma que:

$$G_a(f) = r|P(f)|^2$$

$$G_y^{PRK}(f) = \frac{A_c^2}{4}r \{|P(f - f_c)|^2 + |P(f + f_c)|^2\}$$

Se deja para el estudiante la demostración para el caso de la modulación PSK binaria con  $M=2$ ,  $N=1$ .

#### 6.4.4.2. Caso cuaternario QPSK y modulaciones M-QAM

La modulación QPSK se da para  $M = 4$ . Si  $N = 0$ , las fases transmitidas serán  $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ . Para  $N = 1$  las fases transmitidas serán  $\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$ , y esta es la modulación que se conoce como QAM (Quadrature Amplitude Modulation). Esta modulación puede verse como la combinación de dos modulaciones BPSK, con una PRK en la componente en fase ( $I_k = \{-1, +1\}$ ) y otra en la componente en cuadratura ( $Q_k = \{-1, +1\}$ ).

Si en la modulación 4-QAM con  $N = 1$  aumentamos el número de niveles tanto en los símbolos  $I_k$  como en los  $Q_k$ , se obtienen constelaciones de puntos de forma cuadrada, conocidas como M-QAM. La figura 6.3 representa algunas de ellas. Por ejemplo, si tenemos 4 niveles en cada una de las componentes:  $I_k = Q_k = \{-3, -1, +1, +3\}$ , obtendremos un conjunto de 16 símbolos complejos  $\vec{C}_k$  que formarán una rejilla cuadrada, correspondiente a la modulación conocida como 16-QAM.

Estas modulaciones son muy populares por su sencillez de implementación. La figura 6.4 representa de forma esquemática el proceso de generación de una constelación QAM (aunque el principio básico se puede aplicar a cualquier constelación bidimensional). En el flujo binario de entrada se forman grupos de  $\log_2 M$  bits, con los que se elige el símbolo de la constelación. Las componentes  $I$  y  $Q$  de dicha constelación generarán las señales digitales banda base correspondientes a las componentes en fase y en cuadratura de la señal paso-banda.

## 6.5. Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK)

### 6.5.1. Introducción

En las modulaciones FSK (Frequency Shift Keying), la información correspondiente al símbolo a transmitir se ubica en la frecuencia de la portadora transmitida. El estudio de estas modulaciones es complejo y en este tema nos limitaremos a presentar algún caso particular que presenta una analítica sencilla.

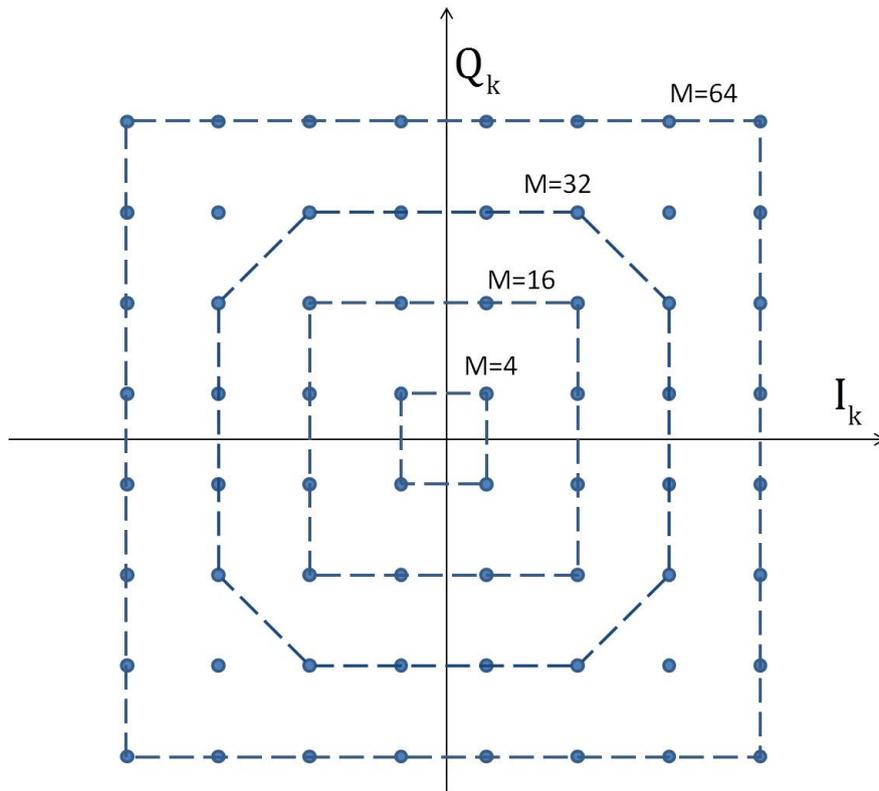


Figura 6.3: Constelaciones de símbolos en las modulaciones QAM

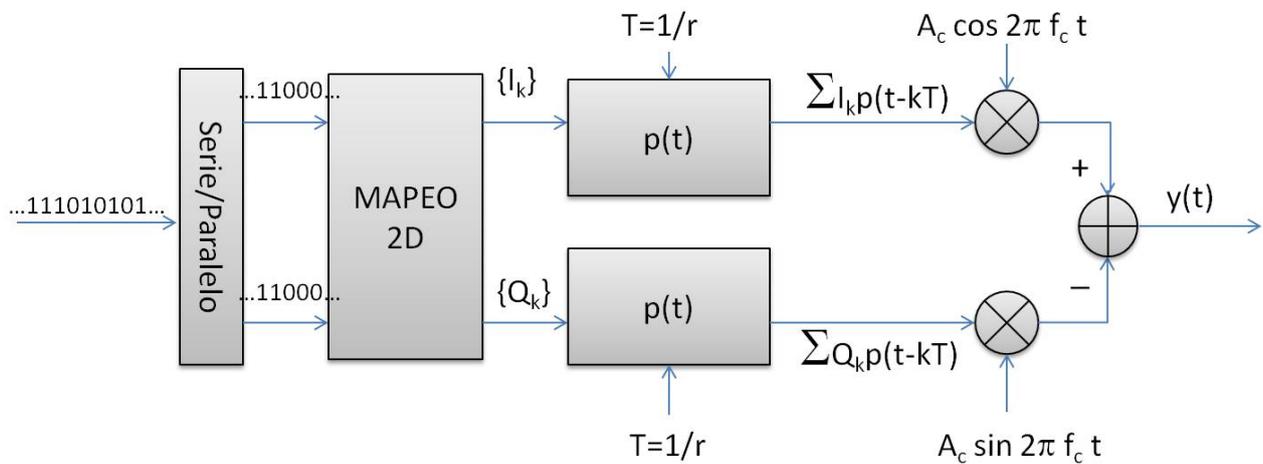


Figura 6.4: Esquema de un modulador QAM

En términos generales, en una modulación FSK las señales transmitidas asociadas a un conjunto de símbolos  $\{a_k\}_M$  son señales senoidales con frecuencias  $\{f_k\}_M$ :

$$s_k(t) = A_c \cos(2\pi f_k t) p(t)$$

y la señal modulada:

$$s^{FSK}(t) = A_c \sum_k p(t - kT) \cos 2\pi f_k t$$

En estas modulaciones podemos distinguir dos tipos básicos:

- En el caso más simple, para la transmisión del símbolo  $a_k$ , se selecciona un oscilador de frecuencia  $f_k$ . Habrá  $M$  osciladores independientes disponibles, y en general, se producirán discontinuidades en las transiciones entre símbolos consecutivos.
- En una versión más elaborada, los osciladores están sincronizados o más bien las frecuencias necesarias se generan de forma síncrona con continuidad de fase. Estas modulaciones se conocen como de *fase continua* y existe toda una familia de modulaciones del tipo CPFSK (Continuous Phase FSK).

### 6.5.2. Densidad Espectral de Potencia

El caso general de FSK puede estudiarse como una combinación de  $M$  modulaciones ASK. Aquí lo vamos a trabajar para el caso binario,  $M=2$ , y por tanto con la transmisión de dos portadoras asociadas a cada uno de los símbolos:

$$y(t) = y_1^{ASK}(t) + y_2^{ASK}(t)$$

en donde

$$\begin{aligned} y_1^{ASK}(t) &= A_c \sum_k a_k p(t - kT) \cos 2\pi f_1 t \\ y_2^{ASK}(t) &= A_c \sum_k b_k p(t - kT) \cos 2\pi f_2 t \end{aligned} \quad (6.17)$$

siendo  $b_k = \overline{a_k}$  y  $a_k = \{0, 1\}$ . Al ser las dos señales ortogonales (claramente  $E\{a_k \cdot b_k\} = 0$ ), la DEP de  $y(t)$  será la suma de las DEP de cada una de las señales ASK:

$$G_y(f) = G_{y_1}(f) + G_{y_2}(f)$$

$$\begin{aligned} G_{y_1}(f) &= \frac{A_c^2}{4} \{G_{x_1}(f - f_1) + G_{x_1}(f + f_1)\} \\ G_{y_2}(f) &= \frac{A_c^2}{4} \{G_{x_2}(f - f_2) + G_{x_2}(f + f_2)\} \end{aligned}$$

en donde  $x_1(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$  y  $x_2(t) = \sum_k b_k p(t - kT)$  son las dos señales digitales banda base unipolares que dan lugar a las señales ASK en 6.17.

$$\begin{aligned} G_{x_1}(f) &= \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \\ G_{x_2}(f) &= \sigma_b^2 r |P(f)|^2 + (m_b r)^2 \sum_n |P(nr)|^2 \delta(f - nr) \end{aligned}$$

en donde  $m_a = m_b = \frac{1}{2}$  y  $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \frac{1}{4}$  y  $|P(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2 fT$ . Por lo tanto:

$$G_{x_1}(f) = G_{x_2}(f) = \frac{1}{4}T \text{sinc}^2 fT + \frac{1}{4}\delta(f)$$

$$G_y(f) = \frac{A_c^2}{16} \left\{ T \text{sinc}^2(f - f_1)T + \delta(f - f_1) + T \text{sinc}^2(f - f_2)T + \delta(f - f_2) + \right. \\ \left. T \text{sinc}^2(f + f_1)T + \delta(f + f_1) + T \text{sinc}^2(f + f_2)T + \delta(f + f_2) \right\} \quad (6.18)$$

La Potencia transmitida en esta modulación es evidentemente constante e igual a  $\frac{A_c^2}{2}$ .

### 6.5.2.1. FSK de Shunde

Se trata de un caso particular de FSK binaria en el que la separación de las dos portadoras  $f_1$  y  $f_2$  es tal que se genera una señal modulada de fase continua:

$$f_1 = f_0 + \frac{r_b}{2}$$

$$f_2 = f_0 - \frac{r_b}{2}$$

Con estos valores las dos sincs de la expresión 6.18 (y también las dos deltas) están separadas  $f_1 - f_2 = r_b$ , y el ancho de banda de transmisión se estima en  $B_T = r_b$ , lográndose una eficiencia espectral de  $\eta = 1$  bps/Hz.



# Tema 7

## Ruido en las comunicaciones digitales

### 7.1. Espacio de señal

#### 7.1.1. Definiciones

El espacio de la señal realiza una interpretación vectorial de las señales. Para una transmisión  $M$ -aria, consideramos las  $M$  señales  $\{s_1(t), \dots, s_k(t), \dots, s_M(t)\}$ , asociadas a cada uno de los  $M$  símbolos discretos  $\{a_1, \dots, a_k, \dots, a_M\}$ , estando las señales  $s_k(t)$  definidas en el intervalo  $[0, T]$ . En la interpretación vectorial, las señales  $s_k(t)$  son vectores  $\vec{s}_k$ . Sobre estos vectores, definimos las siguientes operaciones, que definen el subespacio vectorial de dimensión  $N \leq M$ :

#### Producto Escalar

$$\langle \vec{s}_i, \vec{s}_j \rangle = \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt$$

si  $\langle \vec{s}_i, \vec{s}_j \rangle = 0 \Rightarrow \vec{s}_i \perp \vec{s}_j$  (son ortogonales)

#### Norma de un vector

$$\|\vec{s}_i\| = \sqrt{\langle \vec{s}_i, \vec{s}_i \rangle}$$
$$\|\vec{s}_i\|^2 = \langle \vec{s}_i, \vec{s}_i \rangle = \int_0^T |s_i(t)|^2 dt = E_i$$

siendo  $E_i$  la energía de de la señal  $s_i(t)$ .

#### Coefficiente de correlación

$$\rho_{ij} = \frac{\langle \vec{s}_i, \vec{s}_j \rangle}{\|\vec{s}_i\| \|\vec{s}_j\|}$$

El coeficiente de correlación es como puede verse el valor de la correlación cruzada de las dos señales evaluada en el origen, y normalizado con la raíz cuadrada del producto de sus energías. Obsérvese que  $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ .

### Base Ortonormal

En el espacio vectorial definido por los  $M$  vectores  $\{\vec{s}_k\}_M$ , las direcciones del espacio vienen dadas por los vectores de la base ortonormal definida por  $N \leq M$  vectores ortonormales  $\{\vec{\phi}_k\}_N$ , o funciones  $\{\phi_k(t)\}_N$ , tales que:

$$\langle \vec{\phi}_k, \vec{\phi}_l \rangle = \int_0^T \phi_k(t)\phi_l(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Nótese que:

$$\|\vec{\phi}_k\| = 1$$

Es decir, los vectores  $\vec{\phi}_k$  son ortonormales: son ortogonales entre sí y de norma unitaria.

#### 7.1.1.1. Descomposición en el espacio de la señal: constelación de las señales

Cualquier vector  $\vec{s}_i$  del subespacio puede obtenerse a partir de una combinación lineal de los  $N$  vectores  $\{\vec{\phi}_k\}_N$ :

$$\vec{s}_i = \sum_{k=1}^N s_{ik} \vec{\phi}_k$$

O de forma equivalente:

$$s_i(t) = \sum_{k=1}^N s_{ik} \phi_k(t)$$

Los coeficientes  $s_{ik}$  son las proyecciones del vector  $\vec{s}_i$  sobre las  $k$  direcciones del espacio  $\{\vec{\phi}_k\}_N$ :

$$s_{ik} = \langle \vec{s}_i, \vec{\phi}_k \rangle = \int_0^T s_i(t)\phi_k(t)dt$$

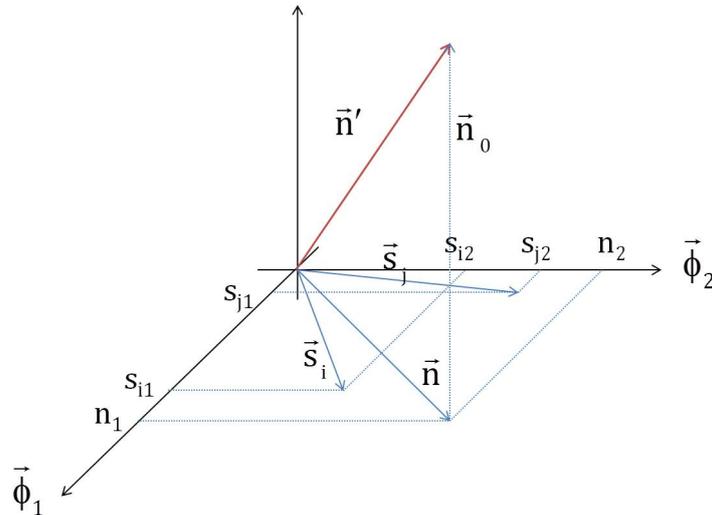
En la figura 7.1 se ha representado un subespacio de dos dimensiones (el plano definido por los vectores  $\{\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2\}$ ) y dos señales cualesquiera del subespacio  $\{\vec{s}_i, \vec{s}_j\}$ . Esta representación de las componentes de las señales transmitidas en el espacio se denomina **constelación de las señales**.

Un vector que no pertenece al espacio definido por las  $M$  señales (o por las  $N$  funciones de la base ortonormal), como por ejemplo una señal de ruido  $n'(t)$  -o vector de ruido  $\vec{n}'$ -, podrá expresarse como la suma de dos vectores: el vector que resulta de la proyección sobre el subespacio  $\vec{n}$ , y una componente  $\vec{n}_0$ , ortogonal al subespacio:

$$\vec{n}' = \sum_{k=1}^N n_k \vec{\phi}_k + \vec{n}_0$$

La componente  $\vec{n}_0$  es la parte de la señal que no pertenece al subespacio de las señales. Esta componente no será percibida por nuestro receptor (que estará diseñado para el subespacio de

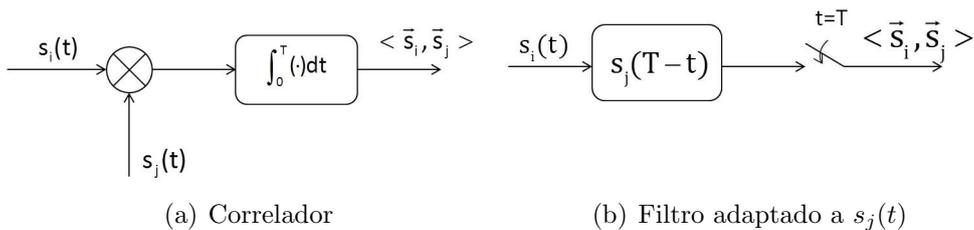
los vectores  $\{\vec{\phi}_k\}_N$  y únicamente será capaz de ver las componentes  $n_k$  de su proyección  $\vec{n}$ , por lo que no la tendremos en cuenta (ver figura 7.1).



**Figura 7.1:** Vector de ruido  $\vec{n}'$  proyectado en el espacio de las señales definido por  $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2$

### 7.1.2. Correlador y filtro adaptado

Como las señales  $s_k(t)$  son de duración  $T$ , el producto escalar de los vectores  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$  es la correlación cruzada de las señales  $s_i(t)$  y  $s_j(t)$  evaluada en el origen (es decir, el área bajo el producto de las dos señales). Por ello, la implementación del producto escalar mediante el esquema de la figura 7.2(a) se conoce como *implementación con correlador*.



**Figura 7.2:** Implementaciones del producto escalar

El producto escalar de dos señales puede expresarse también como:

$$s_i(t) * s_j(T - t)|_{t=T} = \int_0^T s_i(\lambda) s_j(T - (t - \lambda)) d\lambda \Big|_{t=T} = \int_0^T s_i(\lambda) s_j(\lambda) d\lambda$$

Esta implementación del producto escalar, representada en la figura 7.2(b) se conoce como *implementación con filtro adaptado*, ya que el receptor estaría en este caso adaptado a la señal  $s_j(t)$ , produciendo el valor máximo a su salida cuando  $s_i(t) = s_j(t)$ .

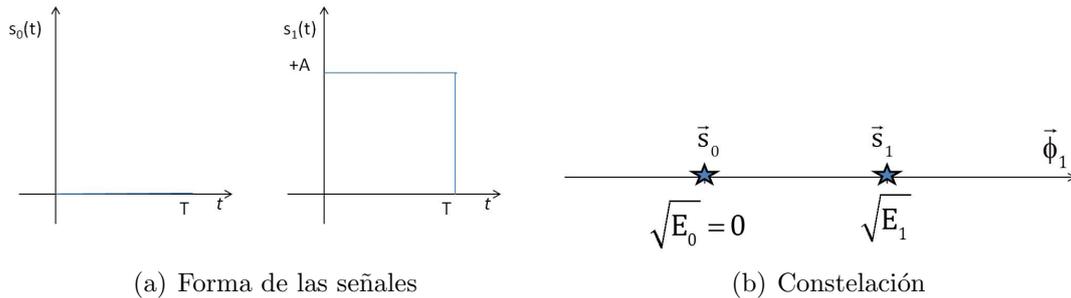
### 7.1.3. Ejemplos

#### 7.1.3.1. Señal unipolar

Consideremos una señal digital binaria unipolar NRZ  $x(t) = \sum a_k p(t-kT)$ , siendo  $a_k = \{0, A\}$ . Las señales transmitidas correspondientes a cada símbolo serán (ver figura 7.3(a)):

$$s_0(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_1(t) = A p(t) = A \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$



**Figura 7.3:** Señales transmitidas para una señal digital banda base unipolar NRZ

Estas dos señales ( $M = 2$ ) se pueden representar en un espacio unidimensional ( $N = 1$ ). Para calcular la señal de la base ortonormal  $\phi(t)$ , obtenemos un vector en la misma dirección que  $s_1(t)$  pero con norma unitaria:

$$\phi(t) = \frac{\vec{s}_1}{\|\vec{s}_1\|} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = \sqrt{E_1} \phi(t)$$

El espacio de la señal para este ejemplo se ha representado en la figura 7.3(b).

Es importante observar que aunque en este ejemplo hemos utilizado un pulso rectangular como señal a transmitir, obtendríamos la misma representación de la figura 7.3(b) para cualquier otra forma del pulso  $p(t)$  como pulsos RZ o pulsos no rectangulares, y también formas de tipo paso banda. La diferencia estribaría en el valor de la energía  $E_1$ . Así por ejemplo, esta misma representación es válida para el caso de una modulación OOK en donde:

$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = A \cos 2\pi f_0 t p(t)$$

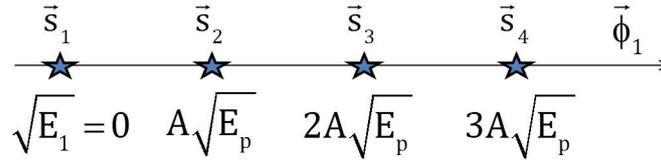
con la única diferencia de que en este caso:

$$E_1 = \frac{A^2}{2} T$$

El caso unipolar binario se extiende fácilmente al caso M-ario, considerando M señales:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A(i-1)p(t) \quad i = 1 \dots M \\ E_i &= (A(i-1))^2 E_p \end{aligned} \quad (7.1)$$

siendo  $E_p = T$  para el caso banda base, y  $E_p = \frac{T}{2}$  para la modulación ASK multinivel. El espacio de la señal en el caso multinivel y  $M=4$  se ha representado en la figura 7.4.



**Figura 7.4:** Representación del espacio de la señal en el caso unipolar cuaternario.

### 7.1.3.2. Señal polar

Consideremos ahora una señal digital binaria polar NRZ  $x(t) = \sum a_k p(t - kT)$ , siendo  $a_k = \{-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\}$ . Las señales transmitidas correspondientes a cada símbolo en este caso serán:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= -\frac{A}{2} p(t) = -\frac{A}{2} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \\ s_1(t) &= \frac{A}{2} p(t) = \frac{A}{2} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \end{aligned}$$

Estas dos señales ( $M = 2$ ) son linealmente dependientes ( $s_1(t) = -s_0(t)$ ) y se pueden representar en un espacio unidimensional ( $N = 1$ ). Para calcular la señal de la base ortonormal  $\phi(t)$ , obtenemos un vector en la misma dirección que una de ellas, por ejemplo  $s_1(t)$  y le imponemos norma unitaria:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{\vec{s}_1}{\|\vec{s}_1\|} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \\ s_0(t) &= -\sqrt{E_0} \phi(t) = -\sqrt{E_1} \phi(t) \\ s_1(t) &= \sqrt{E_1} \phi(t) \end{aligned}$$

Las señales y su constelación se han representado en la figura 7.5.

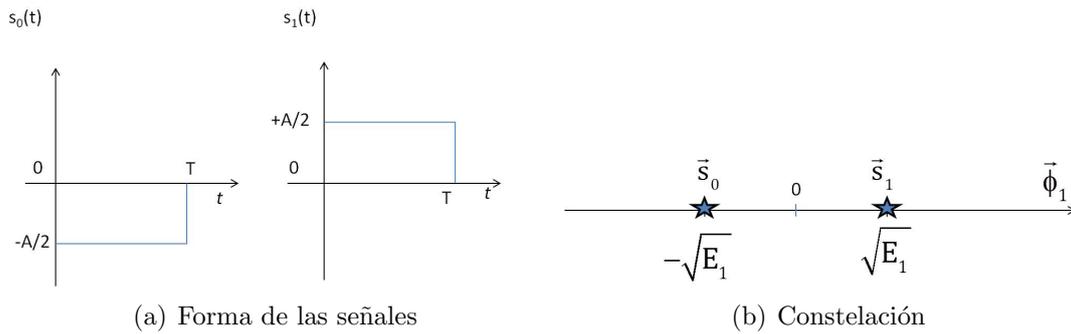
### 7.1.3.3. Señal PSK

Consideremos ahora la señal PSK:

$$s(t) = A_c \sum_k \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k) p(t - kT)$$

Los valores posibles para la fase serán:

$$\varphi_i = \frac{\pi}{M}(2i + N) \quad i = 0, 1 \dots M - 1$$



**Figura 7.5:** Señales transmitidas para una señal digital banda base polar NRZ

siendo  $N = (0, 1)$ .

Si la portadora  $f_0$  es un múltiplo entero de la velocidad de símbolo ( $f_0 = \frac{n}{T}$ ) las  $M$  señales transmitidas serán:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A_c \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i) p(t) \\ &= A_c (\cos \varphi_i \cos 2\pi f_0 t - \sin \varphi_i \sin 2\pi f_0 t) p(t) \\ &= A_c (I_i \cos 2\pi f_0 t - Q_i \sin 2\pi f_0 t) p(t) \end{aligned}$$

en donde  $I_i$  y  $Q_i$  son los símbolos de las componentes digitales banda base en fase y en cuadratura.

Como las señales  $\cos 2\pi f_0 t$  y  $\sin 2\pi f_0 t$  son ortogonales, es fácil ver que las señales  $\{s_i(t)\}$  definen un espacio de dos dimensiones. Para formar la base ortonormal, elegimos:

$$\phi_1(t) = \frac{\cos 2\pi f_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2}}} p(t) \quad \phi_2(t) = -\frac{\sin 2\pi f_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2}}} p(t)$$

Con esta elección:

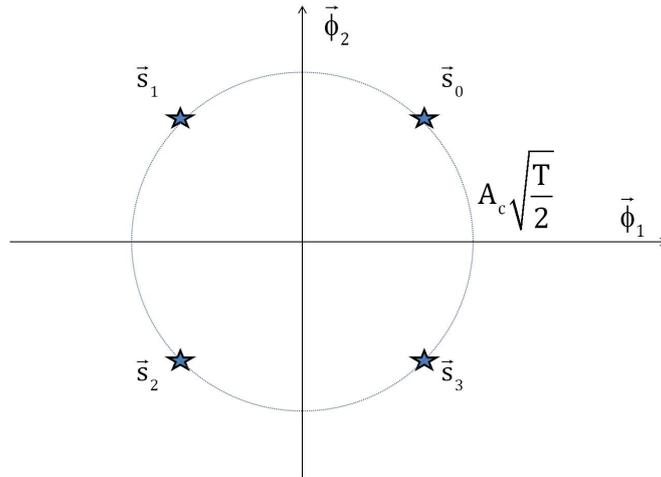
$$s_i(t) = A_c \sqrt{\frac{T}{2}} (I_i \phi_1(t) + Q_i \phi_2(t)) \quad i = 1 \dots M$$

Es inmediato ver que todas las señales transmitidas tienen la misma energía  $E_i = \frac{A_c^2}{2} T$ . En la figura 7.6 se ha representado la constelación de las señales para  $M = 4$  (QAM) y  $N = 1$ .

## 7.2. Receptor óptimo: enfoque probabilístico

### 7.2.1. El criterio MAP

Consideremos la transmisión de  $M$  símbolos  $\{a_i\}_M$  con probabilidades *a priori*  $p(a_i) = p_i$ . Las probabilidades *a priori* son las probabilidades de emisión de los símbolos, y por regla general valdrán  $p_i = \frac{1}{M}$ , es decir, los símbolos serán equiprobables. La transmisión del símbolo  $a_i$  llevará asociada la transmisión de una señal  $s_i(t)$ , con probabilidad  $p_i$ . A la señal transmitida se sumará el ruido del sistema  $n'(t)$ . Llamamos  $r(t)|a_i$  a la señal recibida cuando el símbolo transmitido ha sido  $a_i$  (o  $\vec{r}|a_i$  en la interpretación vectorial):



**Figura 7.6:** Representación del espacio de la señal en el caso QAM.

$$\begin{aligned} \vec{r}|a_i = r(t)|a_i &= s_i(t) + n'(t) = \sum_{k=1}^N s_{ik} \phi_k(t) + \sum_{k=1}^N n_k \phi_k(t) + n_0(t) \\ &= \sum_{k=1}^N (s_{ik} + n_k) \phi_k(t) + n_0(t) = \sum_{k=1}^N r_k|a_i \phi_k(t) + n_0(t) \end{aligned}$$

Según se ha visto en la sección 7.1, la componente  $n_0(t)$  del ruido no pertenece al subespacio de las señales, por lo que el receptor no podrá detectarlo, y por lo tanto no lo tendremos en cuenta.

Utilizando la señal recibida, el receptor deberá decidir cuál de los  $M$  posibles símbolos ha sido el símbolo transmitido. Desde un punto de vista estadístico, el criterio MAP (Máximo A Posteriori) establece como estimación del símbolo transmitido  $\hat{a}_i$  aquél que maximice la probabilidad a posteriori  $p(a_i|\vec{r})$ , la cual aplicando la regla de Bayes puede calcularse como:

$$p(a_i|\vec{r}) = \frac{p(\vec{r}|a_i)p(a_i)}{p(\vec{r})}$$

Y la estimación del símbolo transmitido  $\hat{a}_i$  se realiza buscando aquél que maximiza la expresión anterior:

$$\hat{a}_i = \max_i \{p(a_i|\vec{r})\} = \max_i \left\{ \frac{p(\vec{r}|a_i)p(a_i)}{p(\vec{r})} \right\}$$

Como  $p(\vec{r})$  no depende del símbolo transmitido, maximizar la expresión anterior es equivalente a maximizar:

$$\hat{a}_i = \max_i \{p(\vec{r}|a_i)p(a_i)\} \quad (7.2)$$

que se conoce como *criterio MAP*.

Si además los símbolos son equiprobables, entonces:

$$\hat{a}_i = \max_i \{p(a_i|\vec{r})\} = \max_i \{p(\vec{r}|a_i)\}$$

criterio que se conoce como de máxima verosimilitud (*criterio ML*, de *Maximum Likelihood*).

### 7.2.2. Las regiones de decisión

Para calcular  $p(\vec{r}|a_i)$  en la ecuación 7.2 sabemos que:

$$\begin{aligned}\vec{r}|a_i &= \vec{s}_i + \vec{n} = \sum_{k=1}^N (s_{ik} + n_k) \vec{\phi}_k \\ p(\vec{r}|a_i) &= p(\vec{s}_i + \vec{n}) = \prod_{k=1}^N p(s_{ik} + n_k) = \prod_{k=1}^N p(r_k|a_i)\end{aligned}\quad (7.3)$$

La variable aleatoria  $r_k|a_i = s_{ik} + n_k$  será una variable aleatoria gaussiana, ya que  $n_k$  es gaussiana. Su media y varianza serán:

$$\begin{aligned}m_{r_k|a_i} &= E\{s_{ik} + n_k\} = s_{ik} + E\{n_k\} \\ E\{n_k\} &= E\left\{\int_0^T n(t)\phi_k(t)dt\right\} = \int_0^T E\{n(t)\}\phi_k(t)dt = 0 \\ m_{r_k|a_i} &= s_{ik}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r_k}^2 &= E\{(r_{ik}|a_i - m_{r_k|a_i})^2\} = E\{n_k^2\} = E\left\{\int_0^T n(t)\phi_k(t)dt \int_0^T n(\lambda)\phi_k(\lambda)d\lambda\right\} \\ &= \int_0^T \phi_k(\lambda) \int_0^T E\{n(t)n(\lambda)\}\phi_k(t)dtd\lambda = \int_0^T \phi_k(\lambda) \int_0^T R_n(t-\lambda)\phi_k(t)dtd\lambda \\ &= \int_0^T \phi_k(\lambda) \int_0^T \frac{\eta}{2}\delta(t-\lambda)\phi_k(t)dt d\lambda = \frac{\eta}{2} \int_0^T \phi_k(\lambda) \int_0^T \delta(t-\lambda)\phi_k(t)dt d\lambda \\ &= \frac{\eta}{2} \int_0^T \phi_k^2(\lambda) \int_0^T \delta(t-\lambda)dt d\lambda = \frac{\eta}{2} \int_0^T \phi_k^2(\lambda)d\lambda = \frac{\eta}{2} E_\phi = \frac{\eta}{2}\end{aligned}\quad (7.4)$$

Y por tanto, sustituyendo en la ecuación 7.3:

$$p(\vec{r}|a_i) = \prod_{k=1}^N p(r_k|a_i) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{\eta\pi}} e^{-\frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta}} = \frac{1}{(\eta\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta}}$$

Y aplicando ahora el criterio MAP (ec. 7.2):

$$\begin{aligned}\hat{a}_i &= \max_i \{p(\vec{r}|a_i) p(a_i)\} \\ &= \max_i \left\{ \frac{p(a_i)}{(\eta\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta}} \right\} = \max_i \left\{ p(a_i) e^{-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta}} \right\} \\ &= \max_i \left\{ \ln p(a_i) - \sum_{k=1}^N \frac{(r_k|a_i - s_{ik})^2}{\eta} \right\} = \min_i \left\{ \sum_{k=1}^N (r_k|a_i - s_{ik})^2 - \eta \ln p(a_i) \right\} \\ &= \min_i \left\{ \sum_{k=1}^N (r_k|a_i - s_{ik})^2 - \eta \ln p(a_i) \right\} = \min_i \{d_i^2 - \eta \ln p(a_i)\}\end{aligned}\quad (7.5)$$

En el caso de símbolos equiprobables, el sumando  $\eta \ln p(a_i)$  contribuirá por igual a todos los símbolos, y la decisión estará basada exclusivamente en la distancia euclídea de la señal recibida a cada uno de los símbolos de la constelación coincidiendo con el criterio ML:

$$\hat{a}_i = \max_i \{p(\vec{r}|a_i)\} = \min_i \{d_i^2\} \quad (7.6)$$

En la ecuación 7.6 podemos ver que el símbolo elegido será aquél que se encuentre más próximo en el espacio de la señal. De esta forma, cada punto de la constelación o símbolo  $a_i$  llevará asociada una región del plano (**Zona de Decisión**)  $Z_i$ . Las figuras 7.7 representan estas regiones de decisión para los casos unidimensional binario (7.7(a)) y M-ario (7.7(b)) y bidimensional con M=4 (7.7(c)) y M=8 (7.7(d)).

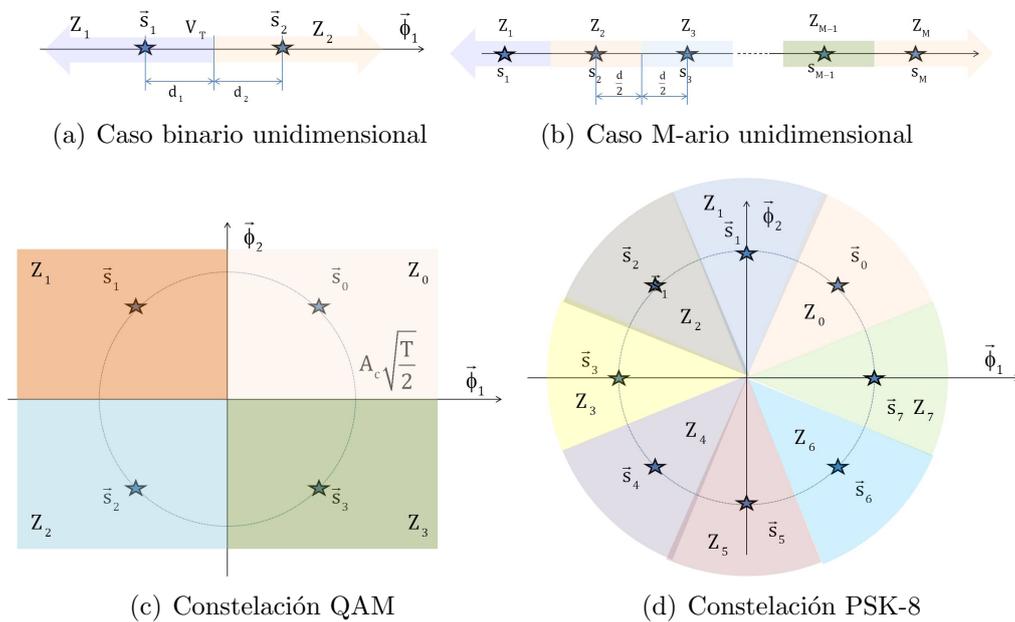


Figura 7.7: Regiones de decisión

### 7.2.3. Regiones de decisión en el caso no equiprobable

En general las probabilidades a priori de los símbolos son todas iguales ya que los bits de fuente se aleatorizan utilizando secuencias de pseudo-ruido de forma que todos los símbolos tengan la misma probabilidad de emisión. Por eso aplicaremos el criterio MAP considerando únicamente la mínima distancia euclídea para la decisión del símbolo transmitido (criterio ML). En este apartado estudiamos cómo afecta el hecho de que los símbolos no sean equiprobables en las regiones de decisión en el caso simple de un sistema unidimensional binario.

Dada la señal recibida  $\vec{r}$  el criterio MAP con probabilidades de emisión a priori  $p(a_i) = p_i$  elige aquel símbolo  $\hat{a}_i$  tal que:

$$\sum_{k=1}^N (r_k - s_{ik})^2 - \eta \ln p_i \rightarrow \text{Minimo}$$

$$d^2(\vec{r}, \vec{s}_i) - \eta \ln p_i \rightarrow \text{Minimo}$$

Como vemos, el valor de la probabilidad de emisión de cada símbolo, corrige el valor de la distancia al símbolo, acortándola tanto más cuando mayor sea la probabilidad del símbolo (la función logaritmo es una función creciente).

Aplicándolo al caso binario unidimensional, suponiendo símbolos con probabilidades de emisión  $p_1$  y  $p_2$  las dos cantidades a comparar serán:

$$(r - s_1)^2 - \eta \ln p_1 \leq (r - s_2)^2 - \eta \ln p_2$$

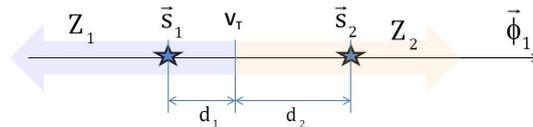
La frontera de la región de decisión se encontrará en el valor de  $r = V_T$  correspondiente al caso de igualdad:

$$\begin{aligned} (V_T - s_1)^2 - \eta \ln p_1 &= (V_T - s_2)^2 - \eta \ln p_2 \\ (V_T - s_1)^2 - (V_T - s_2)^2 &= \eta \ln \frac{p_1}{p_2} \\ d_1^2 - d_2^2 &= \eta \ln \frac{p_1}{p_2} \end{aligned} \quad (7.7)$$

En donde  $d_1$  y  $d_2$  son las distancias de cada símbolo a la frontera de la región de decisión (al umbral de decisión).

Como podemos ver en 7.7 el símbolo que tenga la mayor probabilidad de emisión, tendrá la mayor distancia al umbral, por lo tanto verá ampliada su región de decisión (ver figura 7.8):

- Si  $p_1 = p_2 \Rightarrow d_1 = d_2$  y la frontera está equidistante de ambos símbolos
- Si  $p_1 > p_2 \Rightarrow d_1 > d_2$  y se amplía la región de decisión de  $a_1$
- Si  $p_1 < p_2 \Rightarrow d_1 < d_2$  y se amplía la región de decisión de  $a_2$



**Figura 7.8:** Umbral de decisión  $V_T$  y Zonas de decisión  $Z_i$  para el caso  $p_2 > p_1$

### 7.3. Cálculo de la probabilidad de error

En este apartado calcularemos la probabilidad de cometer un error en la detección de un símbolo. Para  $M$  símbolos  $a_i$  transmitidos, la probabilidad de error por símbolo  $p(e)$  puede calcularse como:

$$p(e) = \sum_{i=1}^M p(e|a_i)p(a_i)$$

en donde  $p(e|a_i)$  es la probabilidad de error condicionada a la transmisión del símbolo  $a_i$ , y  $p(a_i)$  es la probabilidad de emisión del símbolo (probabilidades a priori).

Para calcular  $p(e|a_i)$  aplicaremos el criterio MAP (ecuación 7.5):

$$\sum_{k=1}^N (r_k - s_{ik})^2 - \eta \ln p(a_i) \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$d_i^2 - \eta \ln p(a_i) \rightarrow \text{Mínimo}$$

siendo  $d_i$  la distancia euclídea de la señal recibida al símbolo  $a_i$  y  $\frac{\eta}{2}$  la varianza del ruido. Según este criterio, cada símbolo llevará asociada una región de decisión  $Z_i$ . Cuando se transmita el símbolo  $a_i$  se cometerá un error si la señal recibida se encuentra fuera de la región de decisión asociada al símbolo  $a_i$ :

$$p(e|a_i) = p(\vec{r} \notin Z_i)$$

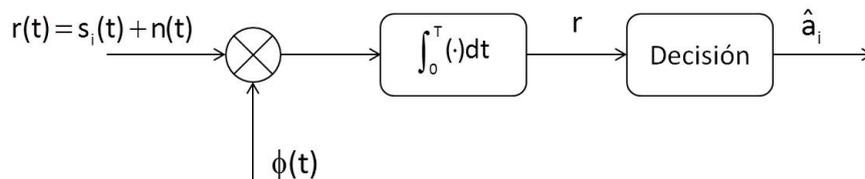
En los próximos apartados calcularemos este valor para las diferentes constelaciones, considerando en todos los casos símbolos equiprobables.

### 7.3.1. Espacios unidimensionales

La figura 7.7(b) representa el espacio de las señales para este caso. Las señales transmitidas serán:

$$s_i(t) = s_i \phi(t) \quad i = 1 \dots M \quad (7.8)$$

siendo  $s_i = \langle \vec{s}_i, \vec{\phi} \rangle$ .



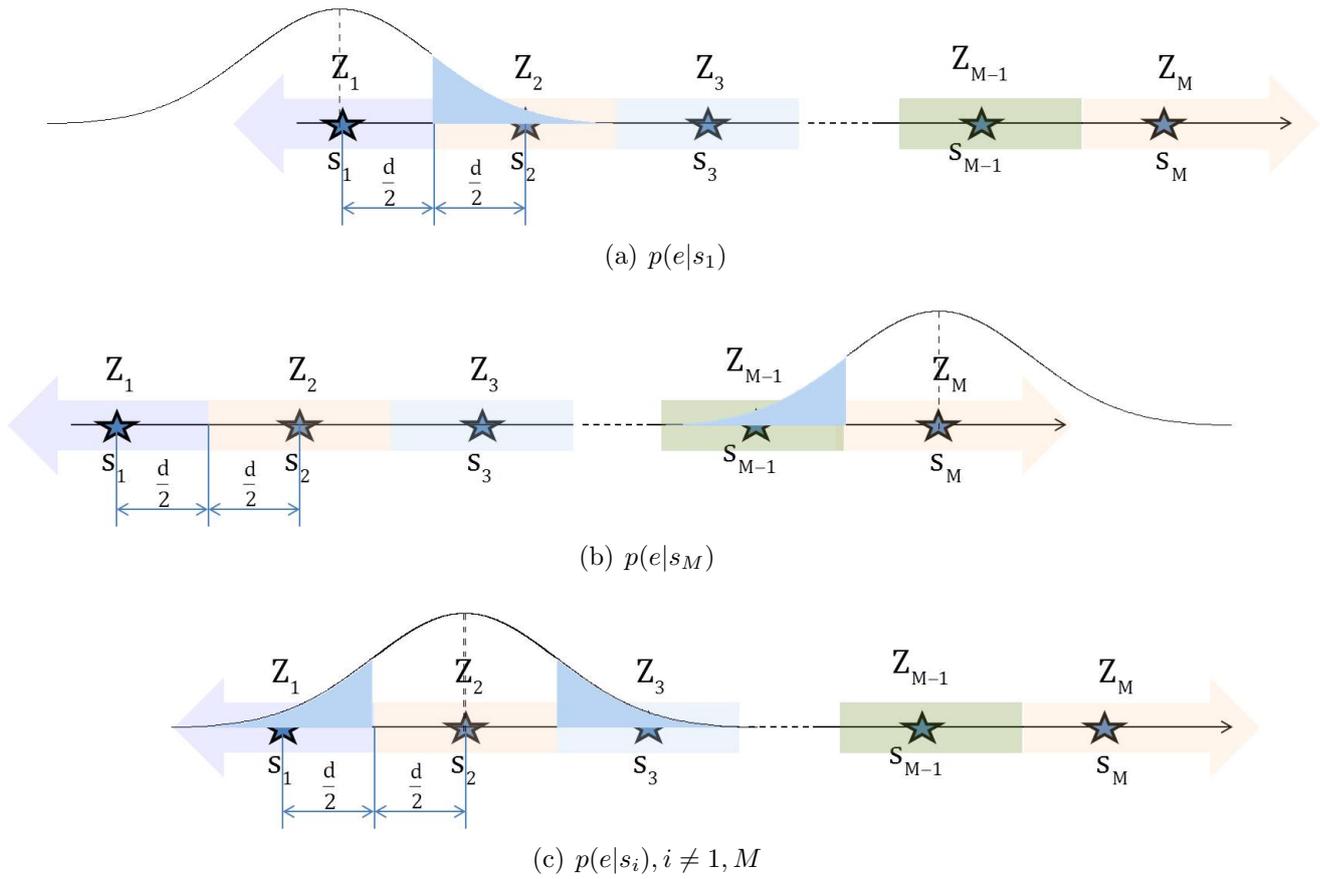
**Figura 7.9:** Receptor óptimo para un espacio de señales unidimensional

El receptor óptimo utilizará un único correlador, que proyectará la señal recibida  $r(t)$  sobre el vector  $\phi(t)$ , representado en la figura 7.9. Suponiendo la transmisión del símbolo  $a_i$  la señal recibida será  $s_i(t) + n(t)$  y su proyección  $r$  caerá en alguna de las regiones de decisión  $Z_i$  de la figura 7.7(b). La decisión por tanto implica conocer los valores de los umbrales de decisión, o las fronteras de las regiones de decisión y se cometerá un error cuando dicha proyección  $r$  caiga fuera del intervalo  $Z_i$  asociado al símbolo  $a_i$ . Considerando el símbolo  $a_1$ :

$$p(e|a_1) = p(r|a_1 \notin Z_1) = p(s_1 + n \notin Z_1) = p(n > d/2)$$

$n$  es una variable aleatoria gaussiana, de media cero y varianza  $\frac{\eta}{2}$  según vimos en 7.4. Por eso:

$$p(n > d/2) = \int_{d/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} e^{-\frac{n^2}{\eta}} dn = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)$$



**Figura 7.10:** Zonas de decisión y probabilidades de error condicionadas en un espacio unidimensional

Este valor corresponde al área sombreada en la gaussiana de la figura 7.10(a).

De forma totalmente simétrica, para el símbolo del otro extremo  $s_M$ :

$$\begin{aligned}
 p(e|a_M) &= p(r|a_M \notin Z_M) = p(s_M + n \notin Z_M) \\
 &= p(n < -d/2) = \int_{-\infty}^{-d/2} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} e^{-\frac{n^2}{\eta}} dn = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \\
 &= p(e|a_1)
 \end{aligned}$$

Para los símbolos interiores, la región de decisión está acotada por ambos lados al intervalo  $(-d/2, d/2)$  y por lo tanto ahora:

$$\begin{aligned}
 p(e|a_i) &= p(r|a_i \notin Z_i) = p(s_i + n \notin Z_i) + p(s_i - n \notin Z_i) \\
 &= 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} p(e) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p(e|a_i) = \frac{1}{M} \left( 2Q \left( \frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right) + (M-2)2Q \left( \frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right) \right) \\ &= \frac{2(M-1)}{M} Q \left( \frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right) \end{aligned}$$

Como ya se ha visto en temas anteriores, el área de la cola de la gaussiana (función  $Q$ ) está tabulada y para calcularla utilizaremos la gráfica adjunta al final de este tema (figura 7.14).

### 7.3.1.1. Señal binaria

Considerando un sistema binario ( $M = 2$ ) y unidimensional ( $N = 1$ ), vamos a calcular la probabilidad de error para los casos unipolar y polar.

**Caso unipolar** En el caso unipolar, en 7.8 tenemos:

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \sqrt{E_2}$$

Y por tanto la energía media por símbolo  $E_s = \frac{1}{2}E_2 = E_b$ , en donde  $E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$  es la energía media por bit (con  $M = 2$  para el sistema binario). La distancia entre ambos símbolos será  $d = \sqrt{E_2} = \sqrt{2E_s}$ , de forma que la probabilidad de error:

$$p(e) = Q \left( \sqrt{\frac{E_s}{\eta}} \right) = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{\eta}} \right) = Q(\sqrt{\gamma_b}) \quad (7.9)$$

en donde se ha introducido el parámetro  $\gamma_b = \frac{E_b}{\eta}$  que representa la relación señal a ruido presente en el sistema, y que nos permitirá realizar la comparación entre diferentes técnicas de modulación. La expresión 7.9 obtenida será válida para espacios unidimensionales binarios y unipolares, tanto banda base como paso banda (como por ejemplo la señal OOK). Finalmente, en el diseño del receptor óptimo según la configuración de la figura 7.9, el sistema de decisión tendrá el umbral en  $V_T = \frac{\sqrt{2E_b}}{2}$  y decidirá según el criterio:

$$r \underset{a_2}{\overset{a_1}{\leq}} V_T$$

**Caso polar** Considerando ahora el caso polar, en 7.8 tenemos:

$$s_1 = -\sqrt{E_1}, \quad s_2 = \sqrt{E_2} \quad E_1 = E_2 = E_s = E_b$$

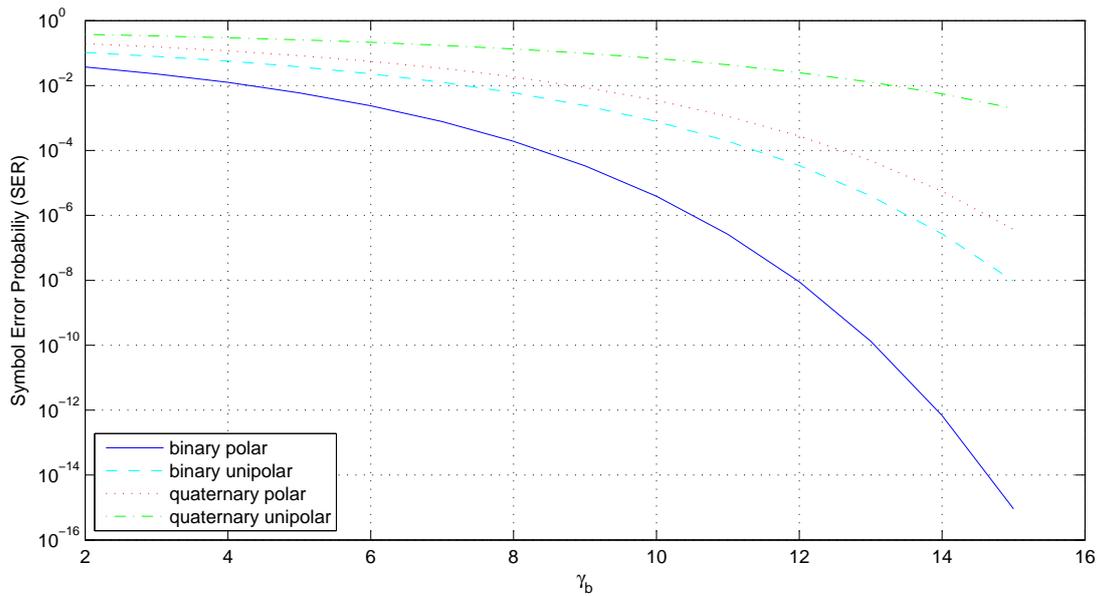
En este caso la distancia entre ambos símbolos será  $d = 2\sqrt{E_s}$ , y el umbral se encontrará en el origen  $V_T = 0$ . La probabilidad de error:

$$p(e) = Q \left( \sqrt{\frac{2E_s}{\eta}} \right) = Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}} \right) = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \quad (7.10)$$

Como puede observarse comparando las expresiones 7.9 y 7.10, a igualdad de energía media por bit, la probabilidad de error en el caso unipolar es mayor que en el caso polar, y que la función Q es una función decreciente. La figura 7.11 muestra la probabilidad de error para ambos casos. De forma equivalente, podemos afirmar que para obtener la misma probabilidad de error, es necesario proporcionar mayor potencia a la señal en el caso unipolar que en el caso polar. Si llamamos  $E_b^p$  a la energía media por bit necesaria para obtener una cierta  $p(e)$  en un sistema polar, podemos calcular la energía media por bit necesaria para mantener la misma  $p(e)$ ,  $E_b^u$ , en caso unipolar:

$$\begin{aligned} \frac{E_b^u}{\eta} &= \frac{2E_b^p}{\eta} \\ E_b^u &= 2E_b^p \\ 10 \log E_b^u &= 10 \log E_b^p + 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

Es decir, se requiere un incremento de potencia en la señal unipolar transmitida de 3 dB para igualar el caso polar.



**Figura 7.11:** Probabilidad de error por símbolo para los casos binario y cuaternario, polar y unipolar

### 7.3.1.2. Señal cuaternaria

Considerando ahora un sistema unidimensional cuaternario ( $M = 4$ ), calcularemos la probabilidad de error para los casos unipolar y polar.

**Caso unipolar** Consideremos el conjunto de señales descrito por 7.1, con  $M = 4$ , y  $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{E_p}}p(t)$ , cuya constelación se ha representado en la figura 7.4. Como puede verse en la figura, la distancia entre símbolos adyacentes es  $d = A\sqrt{E_p}$  y la energía media por símbolo será:

$$E_s = \frac{1}{4}A^2E_p(0 + 1 + 4 + 9) = \frac{7}{2}d^2 = 2E_b$$

en donde  $E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$  es la energía media por bit.

A continuación calculamos las probabilidades de error condicionadas para cada símbolo:

$$p(e|a_1) = p(e|a_4) = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \quad \text{para los símbolos extremos}$$

$$p(e|a_2) = p(e|a_3) = 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \quad \text{para los símbolos internos}$$

De esta forma la probabilidad de error:

$$\begin{aligned} p(e) &= \frac{1}{4} \left( 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) + 4Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\eta}}\right) \\ &= \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{7\eta}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{7\eta}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2}{7}\gamma_b}\right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

En el diseño del receptor óptimo según la configuración de la figura 7.9, el sistema de decisión tendrá los umbrales en los puntos centrales de los intervalos entre símbolos:

$$\begin{aligned} Si \quad r < \frac{d}{2} &\Rightarrow \hat{a}_1 \\ Si \quad \frac{d}{2} < r < \frac{3d}{2} &\Rightarrow \hat{a}_2 \\ Si \quad \frac{3d}{2} < r < \frac{5d}{2} &\Rightarrow \hat{a}_3 \\ Si \quad r > \frac{5d}{2} &\Rightarrow \hat{a}_4 \end{aligned}$$

siendo  $d = \sqrt{\frac{4E_b}{7}}$ .

**Caso polar** Considerando ahora el caso polar, las señales transmitidas son:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= +\frac{A}{2}p(t) & s_3(t) &= -\frac{A}{2}p(t) \\ s_2(t) &= +\frac{3A}{2}p(t) & s_4(t) &= -\frac{3A}{2}p(t) \end{aligned}$$

de forma que para las proyecciones en el espacio unidimensional (ecuación 7.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} s_1 &= +\frac{A}{2}\sqrt{E_p} & s_3 &= -\frac{A}{2}\sqrt{E_p} \\ s_2 &= +\frac{3A}{2}\sqrt{E_p} & s_4 &= -\frac{3A}{2}\sqrt{E_p} \end{aligned}$$

Y  $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{E_p}}p(t)$ , al igual que en el caso unipolar.

En este caso, la distancia entre símbolos es  $d = A\sqrt{E_p}$ , y la energía media por símbolo  $E_s = \frac{1}{4}A^2E_p \left(2\frac{9}{4} + 2\frac{1}{4}\right) = A^2E_p\frac{5}{4} = \frac{5}{4}d^2 = 2E_b$  en donde  $E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$  es la energía media por bit. Repitiendo los pasos seguidos para el caso unipolar, calculamos la probabilidad de error por símbolo, obteniéndose:

$$\begin{aligned} p(e) &= \frac{1}{4} \left( 2Q \left( \frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right) + 4Q \left( \frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}} \right) \right) = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{d^2}{2\eta}} \right) \\ &= \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{2E_s}{5\eta}} \right) = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{4E_b}{5\eta}} \right) = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{4}{5}\gamma_b} \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Como puede observarse comparando las expresiones 7.11 y 7.12, a igualdad de energía media por bit, la probabilidad de error en el caso unipolar es superior a la probabilidad de error en el caso polar, al igual que ocurría en el caso binario. También ahora podemos calcular el incremento de energía que será necesario proporcionar a la señal unipolar con respecto a la necesaria para el caso polar, si se desea obtener la misma probabilidad de error:

$$\begin{aligned} \frac{2E_b^u}{7\eta} &= \frac{4E_b^p}{5\eta} \\ E_b^u &= 2,8E_b^p \\ 10 \log E_b^u &= 10 \log E_b^p + 4,47dB \end{aligned}$$

Es decir, es necesario un incremento de 4,47 dB en la potencia de la señal transmitida para lograr la misma probabilidad de error en el caso unipolar que en el polar para el sistema cuaternario.

La figura 7.11 representa estas probabilidades de error por símbolo (SER - *Symbol Error Rate*) para estos casos.

### 7.3.2. Espacios bidimensionales

En un espacio bidimensional las señales transmitidas serán:

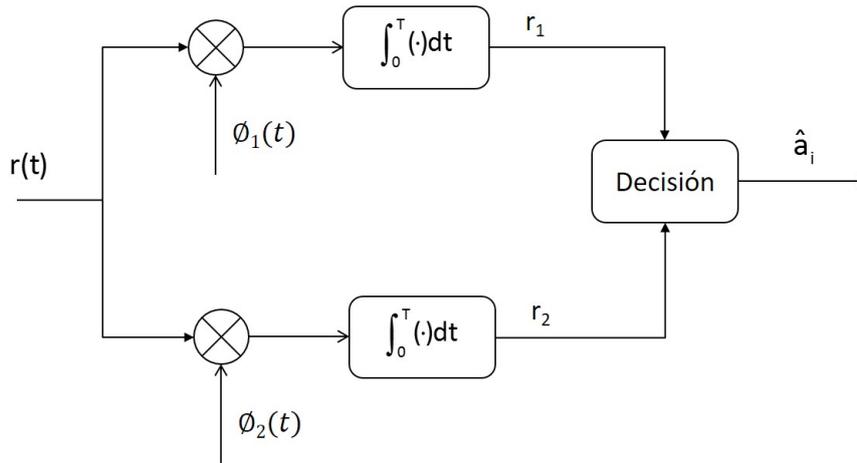
$$s_i(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t) \quad i = 1 \dots M \quad (7.13)$$

siendo  $s_{i1} = \langle \vec{s}_i, \vec{\phi}_1 \rangle$  y  $s_{i2} = \langle \vec{s}_i, \vec{\phi}_2 \rangle$  las proyecciones de las señales  $\vec{s}_i$  en las direcciones de  $\vec{\phi}_1$  y  $\vec{\phi}_2$ .

El receptor óptimo en este caso utilizará dos correladores para obtener las dos proyecciones  $r_1$  y  $r_2$  sobre el espacio bidimensional (figura 7.12). El sistema de decisión deberá conocer las regiones de decisión (en este caso, áreas) y se producirá un error cuando la señal recibida caiga fuera de la región de decisión asociada al símbolo transmitido. Realizaremos el cálculo de la probabilidad de error únicamente para el caso de  $M=4$ .

**M=4** Consideramos en primer lugar una constelación como la de la figura 7.7(c).

Supongamos la transmisión del símbolo  $\vec{s}_1$ . Se cometerá un error si la señal recibida se encuentra fuera del cuadrante correspondiente al símbolo (región  $Z_0$ ). En este caso, es más



**Figura 7.12:** Esquema del receptor óptico bidimensional. El sistema de decisión deberá conocer las regiones de decisión asociadas a cada símbolo.

sencillo calcular la probabilidad de error considerando la probabilidad de decisión correcta, que se dará cuando  $r_1 > 0$  y al mismo tiempo  $r_2 > 0$ , tal y como se ha representado en la figura 7.13:

$$\begin{aligned}
 p(e/s_0) &= 1 - p(c/s_0) = 1 - (p(r_1 > 0)p(r_2 > 0)) \\
 &= 1 - (p(n_1 > -d/2)p(n_2 > -d/2)) \\
 &= 1 - \left(1 - Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)\right)^2 \\
 &= 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) - \left(Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)\right)^2
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right) \ll 1$  la expresión anterior podrá escribirse como:

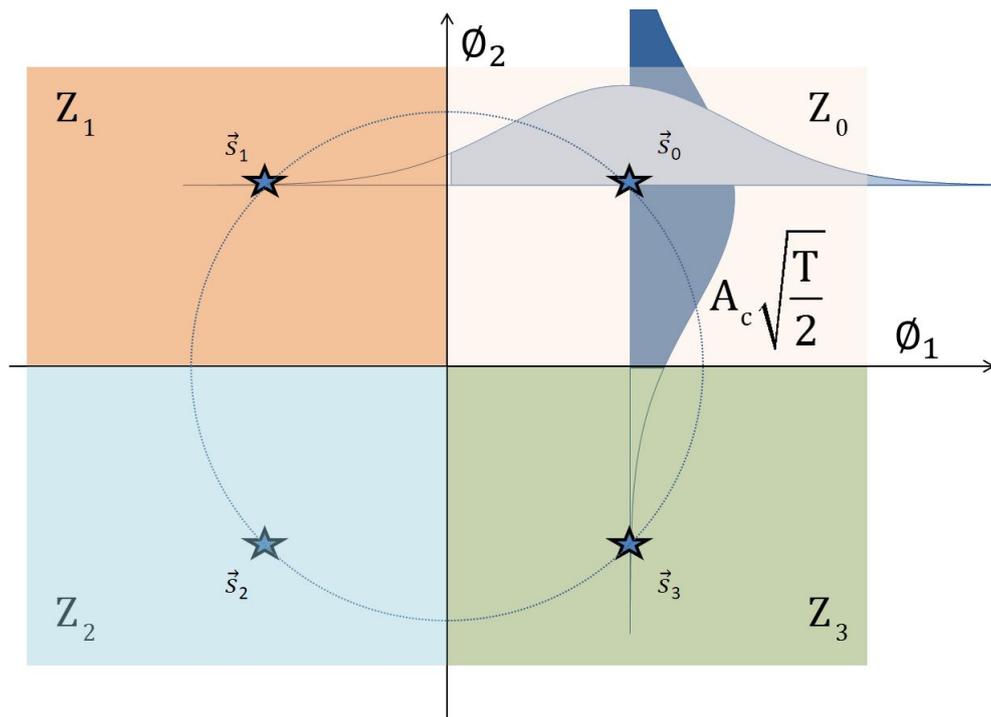
$$p(e/s_0) \simeq 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)$$

Y teniendo en cuenta que todos los símbolos son equiprobables y la simetría del espacio de la señal:

$$p(e) \simeq 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{\eta/2}}\right)$$

Así por ejemplo para el caso QAM o QPSK, en el que la separación  $d$  entre las señales vale:

$$d = 2A_c\sqrt{T/2}\cos(\pi/4) = 2\sqrt{E_s}\cos(\pi/4) = \sqrt{2E_s}$$



**Figura 7.13:** Cálculo de la probabilidad de error en un espacio bidimensional. Se ha sombreado la probabilidad de detección correcta en cada una de las direcciones.

la probabilidad de error por símbolo valdrá:

$$p(e) \simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

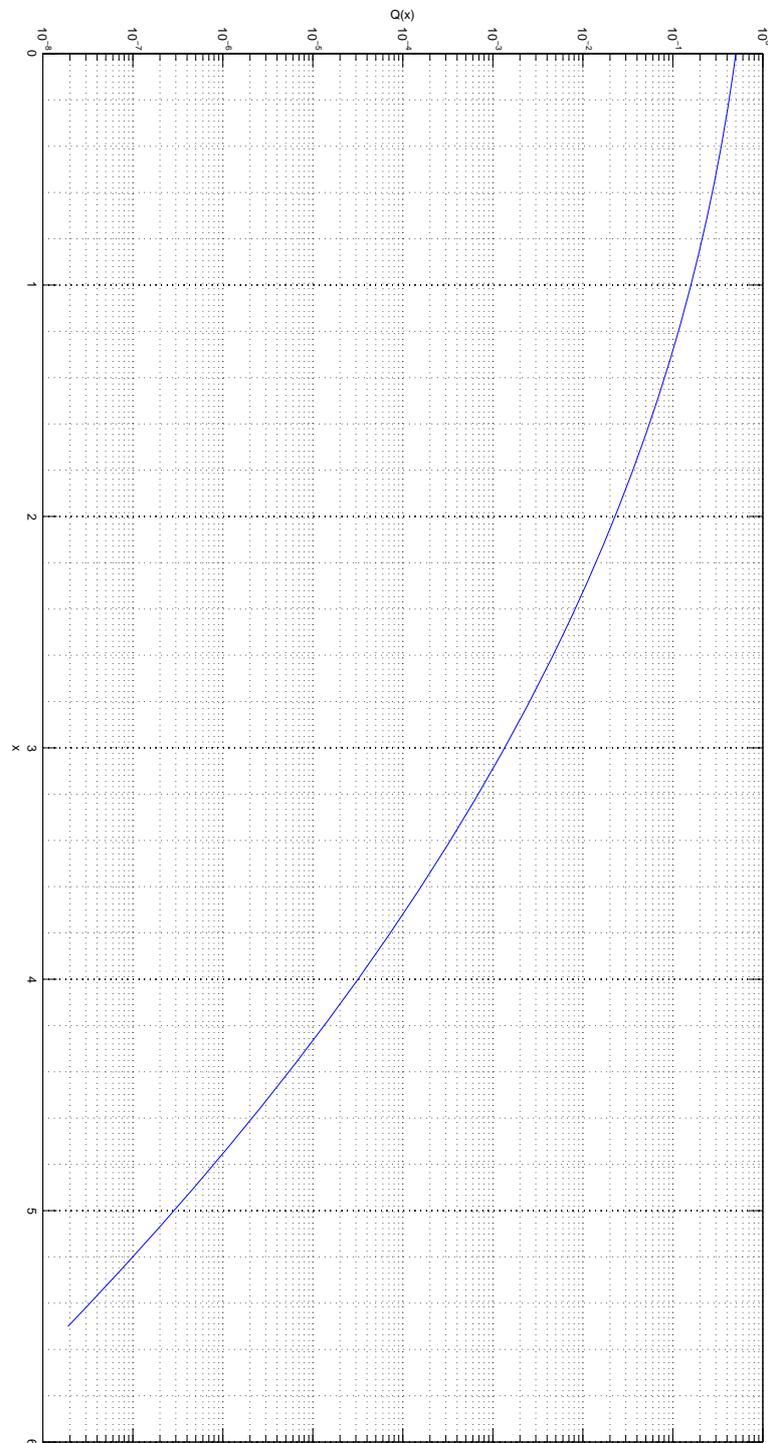


Figura 7.14: Función  $Q(x)$ : Área de la cola de la gaussiana



# Apéndice A

## Conceptos básicos de señales y sistemas

### A.1. Transformada de Fourier usando $f$

En cursos precedentes, se ha utilizado la siguiente definición para la transformada de Fourier de una señal  $x(t)$ :

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (\text{A.1})$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.2})$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A.3})$$

En esta definición, la variable  $\omega$  tiene unidades de radianes/segundo. En comunicaciones sin embargo, se trabaja habitualmente con unidades de frecuencia (**Hercios**= $Hz$  ó **ciclos por segundo**= $s^{-1}$ ), y dado que 1 ciclo se corresponde con  $2\pi$  radianes,  $\omega = 2\pi f$ , y la expresión para la Transformada de Fourier (directa e inversa) nos queda:

$$X(f) = X(\omega)|_{\omega=2\pi f} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega|_{\omega=2\pi f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} 2\pi df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Como se puede ver en [A.4](#) las expresiones de las transformadas utilizando  $f$  podemos obtenerlas a partir de las expresiones (ya conocidas) utilizando  $\omega$  simplemente haciendo la sustitución  $\omega = 2\pi f$ . Sin embargo, en algunos casos especiales (fundamentalmente en aquellos en los que interviene la función  $\delta$ ) habrá que ser cuidadoso al realizar el cambio. Por eso vamos a repasar a continuación algunas de las transformadas y propiedades de la transformada más relevantes.

## A.2. Transformadas de Fourier de señales básicas. Propiedades

En este apartado repasaremos las propiedades de la transformada de Fourier y al mismo tiempo algunas de las transformadas básicas que más frecuentemente vamos a utilizar en el curso.

### A.2.1. Dualidad

Como puede deducirse de las expresiones (??) y (??), las expresiones de la transformada directa e inversa de Fourier usando  $f$  difieren únicamente en el signo de la exponencial y se puede escribir que:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = |\lambda = t| = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda \\ X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j2\pi t\lambda} d\lambda = |\mu = -\lambda| = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\mu)e^{j2\pi t\mu} d\mu = \\ &= |\mu = f| = \int_{-\infty}^{\infty} x(-f)e^{j2\pi t f} df = \mathcal{F}^{-1}\{x(-f)\} \end{aligned}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

$$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

### A.2.2. La función delta

La función *delta de dirac*  $\delta(x)$  es una función especial que representa un valor infinito en  $x = 0$  y vale cero para todo el resto de valores de  $x$ . Además, es tal que su área vale la unidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Por ello:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1 = \{\omega = 2\pi f\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f) 2\pi df = 1$$

Y como por otro lado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) df = 1$$

Se deduce que

$$\delta(f) = 2\pi\delta(\omega)|_{\omega=2\pi f}$$

Recordamos además que el producto de una función  $x(t)$  por una delta obtendremos otra delta en la misma posición, y cuyo área vendrá dada por el valor de la función para ese valor de  $t$ :

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Así, si calculamos la transformada de Fourier de la función delta:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\begin{aligned} \delta(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1 \\ 1 &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \delta(f) \end{aligned}$$

### A.2.3. Retardos, desplazamientos y funciones senoidales

Si se aplica un retardo constante  $t_0$  a una función, en el dominio de la frecuencia añadimos una fase lineal a su transformada, lo que implica que su transformada queda multiplicada por la exponencial compleja. En el caso más simple:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1 \\ \delta(t - t_0) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} = e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

Y para una señal  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \\ x(t - t_0) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)e^{-j\omega t_0} = X(f)e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

Si aplicamos un desplazamiento en el dominio de la frecuencia, la exponencial compleja la encontraremos en el dominio temporal:

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \delta(f) \\ e^{j2\pi f_0 t} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \delta(f - f_0) \end{aligned}$$

De donde podemos ver que:

$$\begin{aligned} \cos 2\pi f_0 t &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2} \{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} \\ \sin 2\pi f_0 t &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j} \{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\} \end{aligned}$$

Aplicando el desplazamiento frecuencial a una señal  $x(t)$ :

$$\begin{aligned}x(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f) \\x(t)e^{j2\pi f_0 t} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f - f_0)\end{aligned}$$

Y de la expresión anterior podemos deducir:

$$\begin{aligned}x(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f) \\x(t)e^{j2\pi f_0 t} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f - f_0) \\x(t)e^{-j2\pi f_0 t} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f + f_0) \\x(t) \cos 2\pi f_0 t &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\{X(f - f_0) + X(f + f_0)\} \\x(t) \sin 2\pi f_0 t &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j}\{X(f - f_0) - X(f + f_0)\}\end{aligned}$$

Esta propiedad se conoce como la *propiedad de modulación*, ya que si la señal  $x(t)$  es de tipo paso bajo, de forma que  $X(f) \neq 0$  para  $|f| < B$  Hz, tras el producto por el seno o el coseno, será una señal paso banda definida en una banda frecuencial de anchura  $2B$  Hz alrededor del valor  $f_0$ .

#### A.2.4. Convolución

Consideremos la operación de convolución de dos señales  $x(t)$  y  $h(t)$ , representada simbólicamente por el símbolo  $*$  y calculada como sabemos a través de la expresión:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (\text{A.6})$$

Si  $h(t)$  es la respuesta al impulso de un sistema y  $x(t)$  es la entrada al sistema,  $y(t)$  será la salida obtenida.

**Retardo temporal** Como sabemos, en un sistema lineal e invariante, la respuesta a una entrada retardada será la misma respuesta a la señal original, también retardada en la misma cantidad. Es decir, si la entrada al sistema  $h(t)$  es  $x(t - t_0)$ , entonces:

$$x(t - t_0) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0 - \tau)h(\tau)d\tau = y(t - t_0)$$

Además, obtendríamos la misma salida si el retardo se aplica sobre  $h(t)$ :

$$\begin{aligned}x(t) * h(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau - t_0)d\tau = \{\tau - t_0 = \mu\} \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - (\mu + t_0))h(\mu)d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0 - \mu)h(\mu)d\mu \\&= x(t - t_0) * h(t) = y(t - t_0)\end{aligned}$$

**Inversión temporal** Consideremos ahora la salida del sistema  $y(-t)$ . Estamos interesados en conocer qué operaciones habría que realizar sobre  $x(t)$  o sobre  $h(t)$  o sobre ambas señales, para obtener  $y(-t)$  por convolución:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\
 y(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t - \tau)h(\tau)d\tau
 \end{aligned}
 \tag{A.7}$$

¿Cuáles son las dos señales que se están convolucionando en A.7? Para responder a la pregunta, vamos a analizar las operaciones necesarias para realizar la convolución  $x(t) * h(t)$ :

1. Cambiar  $t$  por  $\tau$ , obteniendo  $x(\tau)$  y  $h(\tau)$
2. Invertir temporalmente  $x(\tau)$ : cambiamos  $\tau$  por  $-\tau$ , obteniendo  $x(-\tau)$ .
3. Posicionar  $x(-\tau)$  en  $\tau = t$ : cambiamos  $\tau$  por  $\tau - t$ , obteniendo  $x(-(\tau - t)) = x(t - \tau)$
4. Calcular el área bajo el producto de  $x(t - \tau)h(\tau)$

La tabla A.1 resume las operaciones anteriores, y las expresiones que se obtienen para diferentes casos:

	Paso 1 $t \rightarrow \tau$	Paso 2 $\tau \rightarrow -\tau$	Paso 3 $\tau \rightarrow \tau - t$	Paso 4 $\int_{-\infty}^{\infty}(\cdot)d\tau$
$x(t) * h(t)$	$x(\tau)$	$x(-\tau)$	$x(t - \tau)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau$
$x(-t) * h(t)$	$x(-\tau)$	$x(\tau)$	$x(\tau - t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)h(\tau)d\tau$
$x(t) * h(-t)$	$x(\tau)$	$x(-\tau)$	$x(t - \tau)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(-\tau)d\tau$
$x(-t) * h(-t)$	$x(-\tau)$	$x(\tau)$	$x(\tau - t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)h(-\tau)d\tau$

**Tabla A.1:** Pasos seguidos en el cálculo de la convolución

Por lo tanto:

$$x(-t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)h(\tau)d\tau$$

que es diferente de la expresión buscada A.7.

Si en A.7 hacemos el cambio de variable  $\mu = -\tau$ :

$$\begin{aligned}
 y(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t + \mu)h(-\mu)d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x(\mu - t)h(-\mu)d\mu \\
 &= x(-t) * h(-t)
 \end{aligned}$$

Es decir, para obtener la salida invertida es necesario invertir tanto  $x(t)$  como  $h(t)$ .

### A.2.5. Exponencial real

Una señal muy utilizada es la exponencial causal decreciente  $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$  en donde  $u(t)$  es la función escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Para que  $x(t)$  sea una señal acotada, es decir para ser una exponencial decreciente, es necesario que  $\alpha > 0$ . El valor de  $\alpha$  se corresponde con la velocidad de caída de la exponencial, y cuanto mayor sea, más rápidamente decae el valor de  $x(t)$  hacia cero. Su inverso es la *constante de tiempo* de la exponencial  $\tau = \frac{1}{\alpha}$ , y se corresponde con el valor de  $t$  para el cual  $x(t)$  decae a  $\frac{1}{e}$  de su valor en el origen.

La transformada de Fourier es:

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Para representar esta transformada, al ser una función compleja, debemos obtener previamente el módulo y la fase de la transformada <sup>1</sup>:

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$$

$$\angle X(f) = -\arctan \frac{2\pi f}{\alpha}$$

### A.2.6. Pulso rectangular y pulso triangular

**Pulso rectangular:** El pulso rectangular es una función de duración finita muy utilizada en comunicaciones, por un lado porque permite seleccionar intervalos de duración finita en una señal de duración infinita, y por otro porque es la función básica de un tren de pulsos, que es la señal más simple utilizada en las comunicaciones digitales.

El pulso rectangular básico  $p(t)$  se define como:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

<sup>1</sup>También podríamos representar su parte real y su parte imaginaria, pero no es lo más habitual cuando representamos la transformada de Fourier

Y su transformada usando  $\omega$  es:

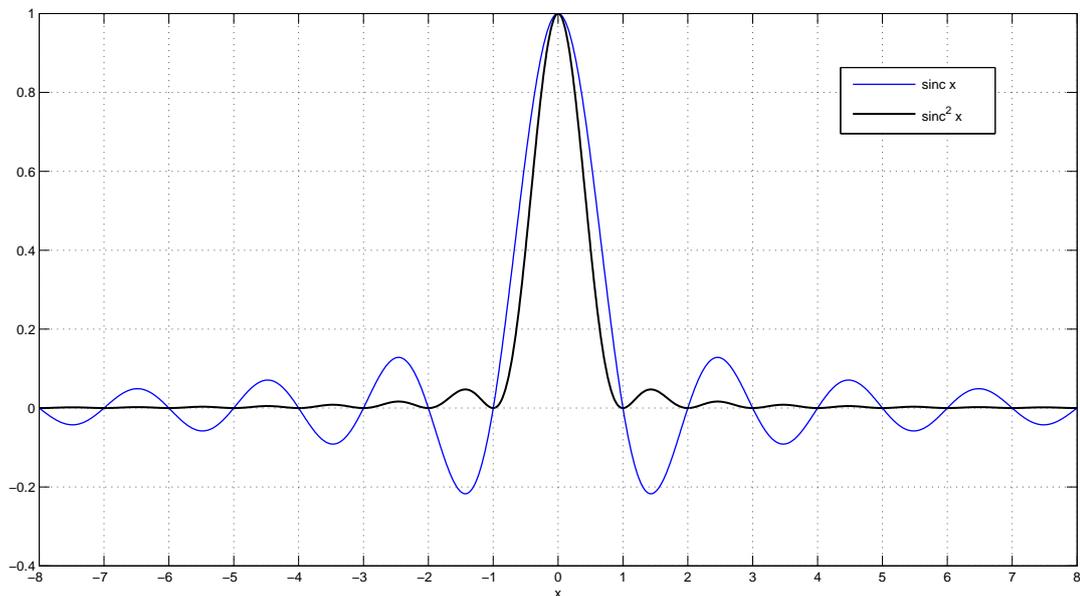
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2 \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}$$

Sustituyendo  $\omega = 2\pi f$  expresamos su transformada de Fourier utilizando  $f$  a través de la función *sinc*:

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = T \operatorname{sinc} fT$$

La función *sinc*  $x$ , representada en la figura A.1 es una función muy empleada que se define como:

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



**Figura A.1:** Representación de las funciones  $\operatorname{sinc} x$  y  $\operatorname{sinc}^2 x$ .

Puede observarse que la función *sinc* presenta ceros periódicos en el conjunto de números enteros ( $x_i = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (salvo para el origen). La transformada de Fourier del pulso rectangular de duración  $T$  presentará estos ceros en los múltiplos enteros de  $\frac{1}{T}$ , es decir para  $f_i = \pm \frac{1}{T}, \pm \frac{2}{T}, \pm \frac{3}{T}, \dots$ . Así, por ejemplo, un pulso rectangular de duración  $1 \text{ ms}$  presentará en su transformada ceros periódicos en múltiplos de  $1 \text{ kHz}$ .

**Pulso triangular:** El pulso triangular es también de duración finita, y el pulso triangular básico suele definirse de duración  $2T$ :

$$\Delta\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & \text{si } -T < t < 0 \\ 0 & \text{si } |t| > T \\ 1 - \frac{t}{T} & \text{si } 0 < t < T \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$

El pulso triangular puede obtenerse a través de la convolución de dos pulsos rectangulares, cada uno con una duración mitad de la del pulso triangular resultante (en el caso de un triángulo *isósceles*, es decir, con simetría par con respecto al origen):

$$\Delta\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{1}{T}\right) * \Pi\left(\frac{1}{T}\right)$$

A partir de esta expresión, y sabiendo que convolucionar en un dominio es multiplicar en el otro dominio:

$$\Delta\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \operatorname{sinc}^2 fT$$

La función  $\operatorname{sinc}^2 x$  se encuentra representada en la figura [A.1](#).

Lógicamente, esta función también presenta ceros en el conjunto de números enteros ( $x_i = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (salvo para el origen). En la transformada del pulso triangular de duración  $2T$ , estos ceros aparecen también para los valores de  $f$  múltiplos enteros de  $\frac{1}{T}$ . Por ello, para un pulso triangular de duración  $1 \text{ ms}$  (por tanto  $T = 0,5 \text{ ms}$ ) la transformada de Fourier presentará su primer cero en  $2 \text{ kHz}$ .

Por otra parte, la función toma únicamente valores positivos y los lóbulos secundarios de la función son de menor amplitud que en el caso de la función  $\operatorname{sinc}$ . Así, la función tiende más rápidamente a cero al crecer el valor de la variable independiente.

### A.3. Valor medio

Para una función continua  $x(t)$  definida en un intervalo  $[a, b]$  el valor medio de la función en dicho intervalo se define como:

$$x_m = \frac{1}{|a - b|} \int_a^b x(t) dt$$

Es decir, es el área bajo la función en el intervalo, dividido por la duración del intervalo.

Esta expresión sin embargo, no puede aplicarse directamente a señales de duración infinita.

El valor medio o promedio temporal de una señal  $x(t)$  se define como:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

En el caso de señales periódicas, es fácil ver que:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

en donde  $T$  es el periodo de la señal.

## A.4. Energía y Potencia

Se define la Energía de una señal  $x(t)$  mediante la siguiente expresión:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Las señales cuya energía  $E_x$  es una cantidad finita se dice que son *señales de Energía Finita*. Todas aquellas señales cuya duración sea finita, acotadas a un intervalo  $T$ , serán de Energía finita. Sin embargo, esta no es una condición necesaria, ya que hay muchas señales cuya duración es infinita, cuya Energía es una cantidad finita. Por ejemplo, para la exponencial real decreciente  $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ :

$$E_x = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{2\alpha}$$

Por otro lado, se define la Potencia de una señal  $x(t)$  mediante la expresión:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt \quad (\text{A.8})$$

Las señales cuyo valor de  $P_x$  es una cantidad finita se dice que son *señales de Potencia Media Finita*.

Es inmediato ver que para una señal de Energía Finita, el valor de su potencia será cero ( $P_x = 0$ ).

Un caso particular muy importante para las señales de Potencia Media Finita son las señales periódicas. Para ellas, partiendo de la expresión A.8, y tomando para  $T = NT_0$  siendo  $T_0$  el periodo de la señal:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \int_T |x(t)|^2 dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} N \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

## A.5. Correlación cruzada y autocorrelación

Consideremos dos señales de energía finita,  $x(t)$  e  $y(t)$ . Una buena estrategia para evaluar la diferencia que existe entre ellas puede ser calcular la energía que existe en su diferencia:

$$\begin{aligned} d^2(x(t), y(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt \\ &= E_x + E_y - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt \end{aligned}$$

Así, el área bajo el producto de dos señales es una buena medida del parecido entre dos señales. Sin embargo, esta medida supone que ambas señales están alineadas. Es decir, no tiene en cuenta que el parecido en la forma de dos señales puede cambiar si a una de ellas se le aplica un cierto desplazamiento. Esto es lo que hace precisamente la función de correlación cruzada:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t - \tau) dt = \{t - \tau = t'\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t' + \tau)y(t') dt' \end{aligned}$$

Para señales complejas, la definición de la Función de correlación cruzada, para dos señales de energía finita es:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt = \{t - \tau = t'\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t' + \tau)y^*(t') dt' \end{aligned}$$

Para señales de potencia media finita, la definición es similar:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)y^*(t) dt$$

Y si las señales son periódicas:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)y^*(t) dt$$

en donde  $T$  es un múltiplo común de los periodos  $T_x$  y  $T_y$  de las señales periódicas  $x(t)$  e  $y(t)$ .

La función de **Autocorrelación** es la función de correlación de una señal  $x(t)$  consigo misma. Para señales de Energía Finita:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x^*(t) dt$$

Para señales de potencia media finita, la definición es similar:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)x^*(t)dt$$

Y si la señal es periódica:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t + \tau)x^*(t)dt$$

en donde  $T$  es el periodo o un múltiplo del periodo.

Esta función medirá el parecido de una señal con ella misma desplazada  $\tau$ .

### Propiedades de la función de autocorrelación

- El valor en el origen de la función de autocorrelación es la energía de la señal:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

Para señales de Potencia Media Finita:

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

Y para señales periódicas:

$$R_x(0) = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

Para las señales de Potencia Media Finita, el valor de la Autocorrelación en el origen es la Potencia de la señal:

$$R_x(0) = P_x$$

- La función de autocorrelación tiene simetría hermítica:

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$$

Si la señal es real, entonces la función de autocorrelación también será real y por lo tanto tendrá simetría par:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

- La función de autocorrelación tiene un máximo absoluto en el origen:

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$$

El caso de igualdad para un cierto valor de  $\tau = \tau_0$  únicamente puede darse en el caso de que la función de autocorrelación sea periódica (es decir, si el máximo del origen se alcanza para algún otro valor de  $\tau = \tau_0$ , entonces va a darse también en todos los múltiplos de  $\tau_0$ ).

- La transformada de Fourier de la función de autocorrelación es la función de **Densidad Espectral de Energía** (para señales de Energía Finita) o la función de **Densidad Espectral de Potencia** (para señales de Potencia Media Finita):

Para señales de EF:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_x(f) = |X(f)|^2$$

Para señales de PMF periódicas:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

en donde los  $C_n$  son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal periódica y  $f_0 = \frac{1}{T}$  es la frecuencia fundamental.

Y para otras señales de PMF no periódicas:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

en donde T es un intervalo convenientemente elegido.

### A.5.1. Teorema de Parseval

El teorema de Parseval aplicado a la Energía (para señales de Energía Finita) establece que:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

## A.6. Tabla de transformadas básicas de Fourier

Tabla de pares de transformadas de Fourier	
$x(t)$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$
$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$X(t)$	$x(-f)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
$(j2\pi t)^n x(t)$	$\frac{d^n X(f)}{df^n}$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j \operatorname{sign}(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \operatorname{sinc}(fT)$
$2B \operatorname{sinc}(2Bt)$	$\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \operatorname{sinc}^2 fT$
$B \operatorname{sinc}^2(Bt)$	$\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$
$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2} \{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\}$
$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2j} \{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\}$
$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$
$e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$



# Apéndice B

## Libros recomendados

Para el alumnado interesado existe abundante bibliografía en el campo de las comunicaciones que expanden los conceptos básicos tratados en este libro. Curiosamente, si buscamos mediante el término *Teoría de la Comunicación* la gran mayoría de los libros y documentos que encontraremos se referirán al estudio de la comunicación desde un punto de vista sociológico, psicológico o pero es raro que aparezca como tal desde un punto de vista ingenieril, que es el que nos concierne. Para encontrar los libros que necesitamos es mejor buscar con los términos *sistemas de comunicación comunicaciones digitales o transmisión*.

El primer tema de este libro está dedicado a los fundamentos elementales de la comunicación y estará incluido como capítulo introductorio en casi cualquier libro de los propuestos. En [1] (en inglés) o [2] (en español) se contextualiza el modelo del sistema de comunicación en el ámbito general de las telecomunicaciones. Además describe la historia de las telecomunicaciones con los eventos más destacables de los siglos XIX y XX. Por otro lado, en el capítulo 2 de [3] encontraremos los conceptos de decibelio, atenuación y distorsión, explicados con numerosos ejemplos. Además, este capítulo incluye también un repaso de Señales y Sistemas (en el Apéndice A de este libro).

Para el tema 2 [Señales y procesos aleatorios](#), en el que se presentan los procesos estocásticos, el libro [4] tiene todo lo necesario para repasar los conceptos básicos de estadística y trabajar también los procesos estacionarios y sus propiedades. Además este libro tiene ejemplos con código en Matlab. Más completo aún y también más próximo al temario que trabajamos en nuestro libro es el capítulo 4 de [6]. Este capítulo 4 incluye también todo el 3 [Transmisión de señales con ruido](#).

En [1] se trata el tema del ruido en los sistemas de comunicación ([3 Transmisión de señales con ruido](#)) de una forma muy similar a como hacemos en este libro. El estudiante interesado puede además completar sus conocimientos con el análisis del ruido en la transmisión de un pulso, aspecto que en libro no se trabaja. También se pueden estudiar otros ejercicios sencillos con ruido en [5].

La transformada Hilbert y el tratamiento de las señales y sistemas paso banda están tratadas en el capítulo 2 de [6] de forma simple y similar a como lo hacemos en el libro. Además en él se presentan algunas modulaciones analógicas que quedan muy bien descritas con estas herramientas, y que nosotros no trabajamos por falta de tiempo. La parte correspondiente a procesos paso banda se trata en este mismo libro en el capítulo 4.

El tema 5 [Comunicaciones digitales banda base](#) puede estudiarse en el capítulo 11 de [1], aunque en este se incluye también el tratamiento del ruido y los errores que en nuestro libro se dejan para el último tema. Este tema se complementa además en [1] con el diseño de sistemas

igualadores (o ecualizadores) para eliminar la interferencia entre símbolos residual que es una técnica básica e importante que no se trabaja en este libro. También seguimos la aproximación de [1] (en su primer apartado del capítulo 14) para la descripción y análisis espectral de las señales paso banda moduladas digitalmente (tema [6 Modulaciones digitales](#)).

Finalmente, el tema [7 Ruido en las comunicaciones digitales](#) puede estudiarse en capítulo 7 de [6], en particular la descripción del espacio de la señal y el diseño del receptor óptimo, pero también el cálculo de la probabilidad de error.

# Bibliografía

- [1] Paul B. Crilly A. Bruce Carlson, *Communication Systems. An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication.*, McGraw-Hill, 2010.
- [2] Janet C. Rutledge A. Bruce Carlson, Paul B. Crilly, *Sistemas de comunicación. Una introducción a las señales y el ruidos en las comunicaciones eléctricas.*, McGraw-Hill, 2007.
- [3] Leon W. Couch, *Sistemas de comunicación digitales y analógicos*, Pearson, Prentice Hall, 2008.
- [4] John A. Gubner, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers.*, Cambridge University Press, 2006.
- [5] Ferrer G. Stremler, *Introduction to Communication Systems*, Addison Wesley, 1990.
- [6] Simon Haykin, *Digital Communication Systems*, Wiley, 2014.

**UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK**  
**MANUALES UNIVERSITARIOS**

**INFORMAZIOA ETA ESKARIAK • INFORMACIÓN Y PEDIDOS**

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU  
argialetxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus  
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao  
Tfn.: 94 601 2227 • [www.ehu.eus/argitalpenak](http://www.ehu.eus/argitalpenak)

eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea