

INDUSTRIA TEKNOLOGIAREN
INGENIARITZAKO GRADUA
GRADU AMAIERAKO LANA

**BIDERKATZAILE EOLIKOETAKO
ERRODAMENDUEN DINAMIKA
SIMULATZEKO EREDU NUMERIKOAREN
PRESTAKUNTZA**

Ikaslea: Bengoetxea Aristondo, Mikel

Zuzendaria: Aguirrebeitia Celaya, Josu

Ikasturtea: 2018-2019

Data: Bilbo, 2019ko ekainaren 11

LABURPENA

Bilboko Ingeniaritza Eskolako (UPV/EHU) Analisi eta Diseinu Mekanikoa Taldeak (ADM) arraboladun errodamenduen dinamikaren inguruko ikerketa lerroa hasi berri du. Zehatz esanda, turbina eoliko biderkatzaileetan zentratuta daude eta analitikoki eredututako simulagailua dute jomuga. Lan hau ikerketaren lehen pausua da, eta helburu nagusiak arrabola zilindrikodun errodamenduetako fenomeno dinamiko esanguratsuenak numerikoki ebaztea eta elkarrekintza hauen formulazioak jasotzen dituen eredu analitikoa prestatzea dira. Horrela, gorputzen arteko fenomeno fisikoak banan-banan landu dira eta eredu bateratua programatzeko prest dago. Higidura erlatiboa, talka anizkoitzak eta deformazioa bezalakoak aintzat hartuta, lortutako emaitzek hautatutako metodologia horren sistema konplexuak eredutzeko proposa dela erakusten dute.

Hitz gakoak: arraboladun errodamendua, dinamika, biderkatzaile eolikoa, eredu numerikoa.

RESUMEN

El Grupo de Análisis y Diseño Mecánico (ADM) de la Escuela de Ingeniería de Bilbao (UPV/EHU) ha iniciado una línea de investigación sobre la dinámica de los rodamientos de rodillos. Concretamente, están centrados en las multiplicadoras de las turbinas eólicas y tienen por objetivo un simulador analíticamente modelizado. Este trabajo es la primera parte de dicha investigación, y el objetivo principal consiste en resolver numéricamente los fenómenos dinámicos más relevantes de los rodamientos de rodillos cilíndricos y preparar un modelo analítico que recoja las formulaciones de estas interacciones. De este modo, los fenómenos físicos entre los cuerpos han sido reproducidos separadamente y el modelo completo está listo para ser programado. Los resultados obtenidos muestran que la metodología adoptada es apropiada para modelizar un sistema tan complejo en el que están presentes el movimiento relativo, las colisiones múltiples y la deformación.

Palabras clave: rodamiento de rodillos, dinámica, multiplicadora eólica, modelo numérico.

ABSTRACT

The Mechanical Analysis and Design Group (ADM) from the Faculty of Engineering in Bilbao (UPV/EHU) has initiated a line of research in roller bearing dynamics. In particular, they are focused on wind turbine gearboxes and they aim at an analytically modelled simulator. This project is the former part of the research, and its main objective is to solve numerically the most relevant dynamic phenomena in cylindrical roller bearings and to prepare an analytical model which gathers the formulations of these interactions. In this way, physical phenomena between bodies have been reproduced separately and the comprehensive model is ready for programming. The obtained results prove that the methodology followed is appropriate for modelling such a complex system in which relative motion, multiple collisions and deformation are present.

Keywords: roller bearing, dynamics, wind turbine gearbox, numerical model.

AURKIBIDEA

Irudien zerrenda.....	3
Taulen zerrenda.....	3
1. Sarrera.....	5
2. Testuingurua.....	6
2.1. Sektore eolikoa.....	6
2.2. Aerosorgailuak.....	7
2.3. Biderkatzaile eolikoak.....	8
2.4. Errodamenduak.....	9
2.5. Hutsegiteak.....	10
3. Helburuak eta irismena.....	13
4. Onurak.....	14
5. Gaiaren egoeraren analisia.....	15
5.1. Errodamenduen higiduraren ereduak.....	15
5.1.1. Eredu kuasiestatikoak.....	15
5.1.2. Eredu dinamikoak.....	16
5.1.3. Elementu Finituen Metodoaren aplikazioa.....	18
5.2. Diziplina osagarrien ekarpenak.....	18
5.3. Kontaktu indarren ereduak.....	19
6. Aukeren analisia.....	21
6.1. Analisiaren izaera.....	21
6.2. Planteamendu matematikoaren oinarriak.....	22
6.3. Ebazpen metodoa.....	22
6.4. Bestelako kontsiderazioak.....	23
7. Irtenbidearen deskribapena.....	25
8. Metodologia.....	27
8.1. Hasierako saiakerak.....	27
8.1.1. Geldiunetik abiatutako kontaktu gabeko erorketa askea.....	27
8.1.2. Geldiunetik abiatutako kontaktudun erorketa askea.....	29
8.1.3. Kontaktudun erorketa hasierako abiadura horizontalarekin.....	32
8.1.4. Bi gorputzen erorketa askea kontaktu anizkoitzekin.....	35
8.1.5. Bi gorputzen erorketa askea murrizketa geometrikoarekin.....	41
8.2. Dinamika osoaren planteamendua.....	44

8.2.1. Errodamendua makinan kokatzea	44
8.2.2. Errodamenduaren parametroak definitzea	46
8.2.3. Kalkulu prozedurako aldagaiak zehaztea	48
8.2.4. Dinamikaren ekuazioak formulatzea.....	50
8.2.5. Ekuazioak ebazteko eskema esplizitua planteatzea.....	53
9. Plangintza.....	54
10. Gastuen aitortpena	56
11. Ondorioak.....	58
Bibliografia.....	61
I eranskina.....	65
II eranskina.....	85

IRUDIEN ZERRENDA

1. irudia. Aerosorgailuen atalen eskema.....	7
2. irudia. Kaiola eta arrabola zilindrikodun errodamendua.....	13
3. irudia. Errodamenduaren karga eta higiduraren arabeko guneak.	17
4. irudia. Erorketa askeko gorputzaren eskema grafikoa.....	27
5. irudia. Urrats tamaina desberdinetarako erorketa askeko $y(t)$ emaitzak eta erroreak.	29
6. irudia. Kontaktu gabeko eta kontaktudun egoeretako eskema grafikoak.	30
7. irudia. Esferaren zentroaren posizio bertikalaren bilakaera ($y(t)$).	31
8. irudia. $k = 6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^{1.5}$ zurruntasunarekin, $y(t)$ -ren bilakaera.....	32
9. irudia. Esferaren hasierako egoera eta kontaktudun egoera.....	32
10. irudia. Esferaren xy planoko ibilbidea dt desberdinekin.	34
11. irudia. Esferaren ibilbidea eta x , y eta θ koordenatuen bilakaera ($dt = 10^{-6} \text{ s}$).....	34
12. irudia. Esfera bikotearen hasierako kokapena.....	35
13. irudia. Esferen solido askeen diagramak.....	36
14. irudia. Esferen aldagai zinematiko esanguratsuak.....	36
15. irudia. Esferen ibilbideak eta koordenatuen bilakaera.	40
16. irudia. Lehenengo esferaren koordenatuen bilakaera dt desberdinekin.....	40
17. irudia. Esferen arteko murrizketa geometrikoagatiko lotura indarra.	41
18. irudia. Esferen ibilbideak eta koordenatuen bilakaera.	43
19. irudia. Lehenengo esferaren koordenatuen bilakaera dt desberdinekin.....	43
20. irudia. Ardatz azkarreko osagai multzoaren eskema.....	45
21. irudia. Errodamenduen parametro dimentsionalak.....	47
22. irudia. Barneko eraztunaren solido askearen diagrama.....	51
23. irudia. Kaiolaren solido askearen diagrama.....	52
24. irudia. Arrabolen solido askearen diagrama.....	52
25. irudia. Urrats aldakorreko eskema esplizitua.....	53
26. irudia. Lanaren Gantt diagrama, Microsoft Project softwarean lortua.....	55

TAULEN ZERRENDA

1. taula. Kontaktu posibleak eta hauen ezaugarriak.	37
2. taula. Gastuen aitorpena.....	56

1. SARRERA

Sektore eolikoa energia-sisteman indartsu hedatzen ari denez, enpresen etengabeko analisi eta optimizazioei esker, aerosorgailuetako elementuei buruzko ezagutza nabarmen areagotu da. Esaterako, turbina eolikoaren besoen biraketa geldoa sorgailu elektrikoek behar duten maiztasunera egokitzeko instalatzen diren bizpahiru etapatako biderkatzaileen inguruan asko ikertu da. Izan ere, zeresan teknologiko handia dute, makinaren lehiakortasuna baldintzatzen dutelako.

Biderkatzaileok etapa paraleloz edota epizikloidalez osatuta daude, eta engranajeen eta euskarrien artean biraketa erlatiboa izateko errodamenduak erabiltzen dira. Azken hauek askotariko baldintzak jasan behar izaten dituztenez, hutsegiteen arrazoiak identifikatzerakoan zailtasunak agertzen dira: batetik, hainbat fenomenok parte hartzen dute (zurruntasun handiak, talkak eta lubrifikazioa, kasu); eta bestetik, turbina modelo bakoitzak errodamendu sorta propioa du.

Edonola ere, osagaion portaera simulazio bidez lantzeak makinaren eraginkortasuna handiagotzeko bideak zabal litzake. Azken baten, erregimen iraunkorreko portaera deskribatzen duten lanak izan arren, iragankorrari dagokionez badago zer ikerturik. Honen harira, simulazioen bidez sektoreko enpresak detektatzen ari diren *skidding* bezalako problematikak ikertu eta aurrerako tresna eraginkorak eraiki litezke.

Hain zuzen, Analisi eta Diseinu Mekanikoa Taldearen (ADM) biderkatzaile eolikoetako errodamenduen ikerketa lerroan garatutako lan hau dinamika eredutzeko lehen pausua da. Lehenik eta behin, osagai hauetan gertatzen diren fenomeno nagusiak analitikoki deskribatu eta banan-banan simulatu dira. Ondoren, banaka aztertutako fenomenoak bateratzen dituen eredia diseinatu da. Hau aurreragoko lanetan programatuz gero, arrabola zilindrikodun errodamenduen dinamikaren simulazioa eskuratzeko aukera izango da.

Analisi eta programazio lana izaki, baliabide informatiko eta matematiko egokiak hautatzea funtsezkoa izan da. Ikerketa lerroaren azken helburuetako bat den simulagailuak arrazoizko aldagai kopurua erabil dezan eta kodeak moldatu ahal izateko nolabaiteko erraztasuna eskaini dezan, printzipio analitikoak eta integrazio esplizitua aplikatu dira. Elementu Finituen Metodarako (EFM) softwarek baino aldagai gutxiagorekin aritu arren, GNU Octave-n zein Matlab-en eskema esplizituak denbora tarte esanguratsuetarako ebazteko, urrats tamaina txikiekin lan egin beharrak problemaren kostu konputazionala asko hazten du.

2. TESTUINGURUA

2.1. Sektore eolikoa

Joan den hamarkadan Van Kuik *et al.*-ek [1] aurreikusi bezala, sektore eolikoaren nazioarteko merkatuko presentzia urtero % 20-30 artean hazi da 2008az geroztik. Azken urteetako gorakadaren adibide gisa, 1992an mundu osoan instalatutako aerosorgailu guztiek 2,5 GW sortzeko ahalmena bazuten, 2006an zifra bera 75 GW-koa zen, Espainian energia kontsumoaren % 8 asetuz. Wind Europeren 2018ko txostenaren arabera [2], iaz estatuko energia kontsumoaren % 19 haizetik lortu zen. Era berean, Europako parke eolikoaren ahalmenak 11,3 GW-ko igoera garbia izan zuen, urtea 189 GW-ko ahalmenarekin bukatuz (170 GW *onshore* modalitatean eta 19 GW *offshore* modalitatean). Horrela bada, Europako energia eskariaren % 18,8 sektore eolikoak asetu zuen, eta 2019an energia eolikoak gas naturalaren errekuntzaren bidez lortzen dena gaindi dezake, joan den hamarkadan erregai fosiletatik lortzen denari aurre hartu ondoren.

Teknologia honen arrakastaren faktore nagusiak petrolioaren prezioaren igoera eta, 1997ko Kyotoko Protokoloaren arabera, berotegi-efektuko gasen emisioak murriztu beharra izan dira. Izan ere, Europan 2018an eraikitako energia sorkuntzarako instalazioen % 95ak energia berriztagarria sortzen du. Honen harira, zenbait konpainia handik sektore eolikoan inbertitu eta aurrerapen nabarmenak lortu dituzte; besteak beste, General Electric, Mitsubishi, Siemens Gamesa eta Vestas aipa daitezke. Horren adibide dira Erresuma Batuan 8,8 MW-ko eta 164 m-ko beso-diametroko *offshore* turbinak instalatu izana, eta Vestas-ek 10 MW-ko lehen turbina fabrikatu izana.

Etorkizunera begira, sektoreak oinarri sendoak ezartzeko bi erronka nagusi identifikatu dira: teknologiaren prezioak merketzea, estatuen diru-laguntzekiko menpekotasuna alde batera uzteko, eta instalazio hauek sistema elektrikoan modu optimoan integratzea. Azken honek datozen urteetan zeresan handia izango du, sarearen eskakizunak asetzeko potentzia-fluxuaren erregulazioa oso garrantzitsua izango da eta.

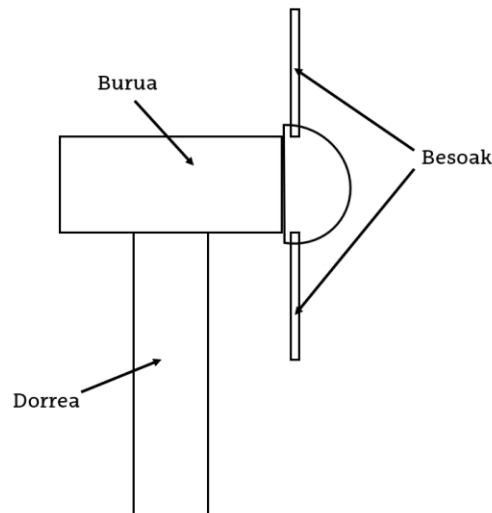
Wind Europeren aurreikuspenen arabera [3]-[4], 2020ra arte urtero 12,6 GW haziko da parke eolikoaren ahalmena, Europan energiaren % 16,5 ekoitziz eta zentral hidroelektrikoaren ekoizpena atzean utziz. 2020an, Espainiako energia eskariaren % 24 parke eolikoek asetzera eta Danimarkan zifra honek % 50 gainditzea espero da, azken hau Europan energia eolikoaren tasa altueneko herrialdea izanik. Epe luzeagora, 2030erako 323 GW-ko ahalmena aurreikusten da, 2016ko 160 GW-ak bikoiztuz. Horrela, energia

eskariaren % 29,6 asetuko luke, petrolioa ez erosteagatik milioika euro aurreztuz eta milioika tona CO₂ isurtzea ekidinez. Horrez gain, sektoreak 569.000 behargini lana emango lieke. Helburu hauek erdiesteko, sektore eolikoan 239.000 milioi € inbertitu beharko direla aurreikusten da.

2.2. Aerosorgailuak

Aerosorgailuak edo turbina eolikoak Lurreko makina birakaririk handienak dira; eta, gaur egun, batezbeste 5-6 MW-ko potentzia eta 110-120 m-ko beso-diametroa duten aerosorgailuak instalatzen dira. XX. mendearen azken hamarkadetatik gaurdaino, hauen diseinuan eta teknologian aurrerapen handiak eman dira, makinaren lehiakortasuna asko handiagotuz. Adibidez, egungo aerosorgailuen bizitza erabilgarrian zehar, konponketa eta mantenu lanetarako denboraren % 2 soilik erabiltzen da [1].

Aerosorgailuek hiru atal nagusi dituzte: dorrea, burua eta besoak (ikus 1. irudia). Hauen arteko loturak mekanismo desberdinen bidez egiten dira: burua dorrearekin lotzeko, yaw mekanismoa erabiltzen da; eta besoak buruari lotzeko *pitch* mekanismoa. Buruaren barneko azpiatal nagusiak biderkatzailea eta sorgailu elektrikoa dira.



1. irudia. Aerosorgailuen atalen eskema.

Aerosorgailuak elementuen konfigurazioaren arabera sailkatuz gero, ardatz horizontalekoak eta bertikalekoak bereizten dira. Lehenak ohikoagoak dira, 18-40 m-ko garaiera edo altuagoa, eta bizpahiru beso izaten dituztelarik. Hauetan, biderkatzailea eta sorgailua dorrearen goialdean kokatzen dira. Ardatz bertikaleko turbinetan, aldiz, biderkatzailea eta sorgailua behealdean daude, eta besoek osatzen duten planoak bertikalarekiko inklinatuta egoten da.

Diseinuari dagokionez, turbina integratuak eta modularrak bereizten dira. Lehen kasuan, biderkatzailearen estalkiak besodun errotorearen eta beste osagai batzuen euskarri gisa funtzionatzen du. Modularrean, ostera, osagai guztiak bankada batera modu berezian lotzen dira. Lehenengo konfigurazioa konpaktuagoa da, baina bigarrena mantenurako errazagoa da, beste desberdintasun batzuen artean.

Errotorearen eta biderkatzailearen arteko loturaren arabera, *shaft-mounted gearbox* eta *tooth-mounted gearbox* aldaerak bereizten dira. Lehenengoan lotura zurruna denez, engranaje sistemak gehiago sufritzen du. Bigarrenean, lotura malgua da eta alde biak bankadara zurrunki lotzen dira. Konfigurazio honek mantentze-lan handiagoak behar dituzenez, *offshore* modalitatean saihestea komeni da. Bestalde, sorgailuaren eta biderkatzailearen arteko lotura malgua izaten da.

2.3. Biderkatzaile eolikoak

Biderkatzaileak turbina eolikoaren besoen biraketa sorgailuen maiztasunera egokitzeko erabiltzen dira. Engranaje sistema hau aerosorgailuaren atal kritikoena da, hainbat osagairen elkarrekintzek zorizko karga aldakorrei (haizearen abiadura eta norabide aldaketak, kasu) erantzun behar dietelako eta sarritan ingurugiro baldintza oldarkorrak jasaten dituztelako. Kanpoaldetik lortzen den biraketa oso geldoa denez, normalean, biderkatzaileak 90:1 inguruko transmisio erlazioa izaten du eta, horretarako, gehienetan hiru etapa instalatzen dira (bakoitzak 3-5 arteko transmisio erlazioa izanik, normalean). Horrela, mugimendua 5-22 rpm-tik 1000-1600 rpm-ra eraldatzea lortzen da.

Adam Ragheb eta Magdi Ragheben [5] esanetan, biderkatzaile eolikoaren arloan asko ikertu beharra dago. Izan ere, 30 urteko bizitza erabilgarrirako diseinatutako turbinek 20 urteko bizitza izan ohi dutela behatu da, askotan martxan 5 urte soilik eginez. Gainera, biderkatzailearen kostua aerosorgailuaren kostu osoaren % 10 da. Hortzen formak, gurpilen dimentsioak, analisi dinamikoak eta lubrifikazio erregimenak uztartu beharrak diseinatzeko sistema konplexu bilakatzen ditu. Hori dela eta, badira biderkatzailearik gabe transmisio zuzena edo engranaje tren bakarra duten turbinak (30:1 inguruko biderketadunak), baina hauekin sorgailu bereziak erabili behar izaten dira.

Orokorrean, biderkatzaileak engranaje planetario edo epizikloidal deritzen engranaje sistemaz baliatzen dira. Konfigurazio honek bolumen txikian transmisio erlazio handiak lortzea ahalbidetzen du eta gaitasun handiagoak jasan ditzake. Dena den, diseinu konplexuagoa eta irisgarritasun okerragoa dituzte, eta errodamenduek karga handiak jasan behar izaten dituzte, arazoak sortuz.

Normalean, hortz zuzeneko engranajez osatuta egoten dira, hortz helikoidalak erabiliz gero planeten lerrokatzea mantentzea zailagoa delako. Hortz zuzeneko engranajeek, halere, zarata handiagoa ateratzen dute; hori dela eta, abiadura baxuko etapetan tren epizikloidalak eta abiadura altuetan etapa paraleloak jartzea oso hedatuta dago. Hauez gain, hortz helikoidal bikoitzeko engranajeak ere izaten dituzte. Horrela bada, Al-Hamadani *et al.*-ek jaso bezala, aerosorgailuetan 3 konfigurazio erabiltzen dira gehien bat [6]: etapa planetario bat bi etapa paraleloekin, bi etapa planetario etapa paralelo bakarrarekin, edo bi etapa planetario soilik.

2.4. Errodamenduak

Errodamenduak ardatzak eusteko osagai mekanikoak dira, karga nagusiak labainketarik gabe elementu errodatzaileen bidez transmititzen direlarik. Hauen aitzindariak historiaurrean objektu astunak garraiatzeko erabiltzen ziren arrabolak dira eta, K.a. lehen mendean jada, boladun errodamenduak erabiltzen ziren. Dena den, Angulo *et al.*-ek jaso bezala [7], osagai hauen aurrerapen handienak XX. mendekoak dira, materialen eta fabrikazio tekniken ezagutzak zehaztasun handiko errodamenduak lortzea ahalbidetuz. Horrez gain, errodamenduen dimentsionaketa eta hautaketarako oinarriak finkatu ziren, *Anti-Friction Bearing Manufacturers Association* (AFBMA) eta *International Standards Organization* (ISO) erakundeen eskutik.

Orokorrean, errodamenduek lau atal dituzte: kanpoko eraztuna, barneko eraztuna, elementu errodatzaileak eta kaiola banatzailea. Dena den, badira kaiola gabeko zein barneko eraztun gabeko errodamenduak ere. Merkatuan dagoen aukera zabalari esker, aplikazio eta eskakizun desberdinetarako errodamenduak aurki daitezke. Bestelako kojineten aldean, errodamenduek ardatzaren norabidean espazio gutxi behar dute eta, kasu askotan, neurri baten karga axiala jasan dezakete. Desabantailen artean, ondorengoak aipa daitezke: norabide erradialean kojinetek baino espazio gehiago behar izatea, lerrokatzeko eskakizun zorrotzak eta hauts partikulen higadurak bizitza erabilgarria mugatzea.

Elementu errodatzaileen eta pisten arteko tentsioen banaketa konplexuak aztertu zituen lehena Stribeck izan zen, Hertzen teoria oinarri hartuta. Analisi hauetan, elementu errodatzaileen eta eraztunen arteko konformagarritasunak zeresan handia du. Gainazalen arteko kontaktua zenbat eta konformeagoa izan, kontaktu azalera handiagoa da eta errodamenduak karga handiagoak transmiti ditzake, marruskadura

handiagoa jasanez. Konformagarritasuna txikia denean, marruskadura txikiagoa da, baina higadura handiagoa.

Engranaje sistemetan, ardatzek errodamendu pakete finko eta mugikor bana izaten dituzte. Pakete finkoak indar erradiala eta axiala eusten ditu, eta pakete mugikorak indar erradiala eusten du eta hedapen termikoa jasateko gai izan behar du. *National Renewable Energy Laboratory* (NREL) erakunde estatubatuarrak errodamenduen bizitza erabilgarria "ANSI/AFBMA Std 11-1990" arauarekin eta egokitzapenekin estimatzea eta, oro har, osagai hauen bizitzaren estimazioak % 90eko fidagarritasunarekin egitea gomendatzen du [8].

Normalean, biderkatzaile eolikoetan mota hauetako errodamenduak erabiltzen dira: arrabola esferikodunak, arrabola koniko bikoitzdunak, arrabola zilindrikodunak eta boladunak. Batzuetan, arrabola koniko sinplekunak ere ikus daitezke. Arraboladun errodamenduak erabiltzearen arrazoietako bat karga handiagoak jasateko ahalmena da, baita talkei hobeto aurre egitekoa ere.

Arrabolen mugimenduan errodadura eta labainketa konbinatzen direnean, labainketak partikula txikiak erauzi eta pistaren eta arrabolen artean abrasioa eragiten dute. Fenomeno honi *skidding* edo labainketa deritzo. Abrasioaren ondorioz, gainazal akatsak azaltzen dira, bibrazioak eta zarata eraginez, eta honek hutsegitea eragin ohi du.

1947an Lundbergekek eta Palmgranek arraboladun errodamenduen hutsegiteei buruzko azterlan estatistikoak argitaratu zituzten [9] eta, hauek oinarri hartuta, AFBMAk 1950ean errodamenduen karga onargarria zenbatesteko metodo normalizatua osatu zuen. Arau hauek *American National Standard Institute*-k (ANSI) ere onartu zituen eta errodamenduen aukeraketarako erreferentzia izaten jarraitzen dute.

2.5. Hutsegiteak

Ingurugiro baldintza bortitzek eta karga egoera aldakorrek eraginda, turbina eolikoetako osagaiek teoria klasikoek aurreikusitakoa baino lehen huts egin ohi dute. Bereziki, biderkatzaileetako engranajeen hortzek eta errodamenduek jatorri desberdinetako hutsegiteak pairatzen dituzte. Hauen artean, ardatz bizkorreko errodamenduek izaten dituzte baldintza kritikoenak. Izan ere, karga txikiak eta abiadura handiak jasaten dituzte, labaintzeko aukerak handiagotuz. Errodamenduetako labainketa edo *skidding* fenomenoak sistema baldintza idealetatik aldentzen du eta, ondorioz, kontaktuetan eta higiduretan desdoikuntzak azaltzen dira. Hauek akatsak eragiten dituzte eta, denboraren poderioz, makinak izorratu egiten dira.

Labainketa bultzatzen duten egoerak biderkatzailearen sarrerako eta irteerako baldintza zinematikoekin lotuta egoten dira. Hau da, abioetan, geldiketetan, larrialdiko maniobretan edo sareko konexio aldaketetan, karga iragankor esanguratsuak azaltzen dira; eta karga jasaten duen gunea egokitu bitartean, errodamenduetako arrarolek *skidding* fenomenoaren jasan dezakete.

Kasu kritikoenetan, kontaktu gainazalen azpialdean tentsio ebakitzailerik handiak agertzen dira eta hutsegitea nekearen teoria klasikoak aurreikusten duena baino arinago gertatzen da. Hau ekiditeko, aplikatutako kargak indar likatsua eta inertzia indarrak gainditu behar ditu, honen balioa abiadurarekin areagotzen delarik. Beraz, funtzionamenduko kargak neke limitearen eta labainketagatik mugaren artean egon behar du.

Era berean, engranaje sistemak ondo isolatuta eta lerrokatuta egotea, eta jasaten dituen kargak kontrolpean izatea funtsezkoa da. Azken baten, bibrazioen edo muntaia eskasen ondorioz osagairen batek lerrokatuta egoteari utziz gero, tentsio kontzentrazio kaltegarriak eta hutsegiteak suerta daitezke. Horregatik, mantenu lanen bidez elementuen lerrokatzea periodikoki egiaztatzea eta lubrifikazio sistema partikula askeak kanporatzeko gai izatea oso garrantzitsua da. Izan ere, partikula askeen abrasioa higadura mekanismoetako bat da.

AGMA eta ISO arauak errodamenduen zein engranajeen hainbat hutsegite modu jasotzen dituzte, baina biderkatzaile eolikoetan bestelakoak ere antzeman dira. Izan ere, aipatutako faktore kaltegarriak honakoak erants dakizkieke:

- Diseinu desegokia (adibidez, elementu errodatzaile txikiegiak).
- *Endplay* handiegia; hau da, ardatzaren norabidean eraztunen arteko mugimendu erlatibo handiegia.
- Junturen eta lubrifikazioaren funtzionamendu desegokia.
- Tenperatura aldaketak.
- Zikinkeria edo hezetasuna.
- Funtzionamenduko abiadura tartea zabalegia izatea.
- Materialen inklusioak.
- Gainazal akatsak.

Hauek guztiek errodamenduen higadura goiztiarra eragiten dute eta, ondorioz, sistemaren lerrokatzeak txarrera egiten du. Honek engranajeen funtzionamendu okerra eragiten du eta, aurrerago, hortzen edota errodamenduen hutsegitea gertatzen da.

Normalean, eragile batek baino gehiagok aldi berean jarduten dute eta, hauen konbinazioen arabera, bibliografian hutsegite moduei izen bereizgarriak esleitzen zaizkie. Hona hemen hauetako batzuk:

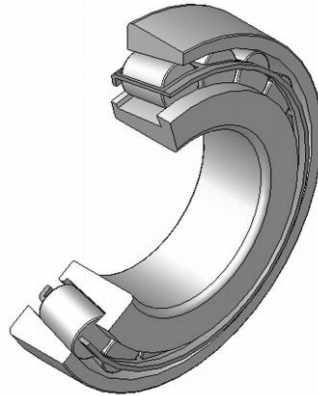
- *Fretting*: kargapean kontaktuan dauden gorputzek bibrazioak jasaten dituztenean gertatzen da; batez ere, balaztatzean. Batzuetan, korrosioarekin eta nekearekin konbinatzen da.
- *Wear*: gainazaleko higaduragatiko deformazio dimentsionalei deritze, sarritan zimurtasunarekin eta urradurarekin konbinatzen delarik. Partikula arrotzen presentziak eta lubrifikazio desegokiak ere eragin ohi dute.
- *Micropitting*: kontaktuko gainazalen arteko lubrifikazio eskasiagatik gertatzen da. Gainazalaren zimurtasuna lubrifikatzailer geruzaren ordenakoa denean, kontaktuko puntuetan deformazio plastikoa eta pitzadurak azaltzen dira.
- *Flaking*: pisten zein elementu errodatzaileen gainazalak askatzean datza, gailurrak eta haranak sorraraziz. Arrazoi nagusiak gehiegizko kargak, nekea, muntaketa desegokia, lasaiera falta edota kutsadura izaten dira.

3. HELBURUAK ETA IRISMENA

Lan honen helburu nagusiak hauek dira:

- Biderkatzaile eolikoetako errodamenduen funtzioa deskribatzea.
- Aipatutako elementuen dinamikan parte hartzen duten fenomenoak identifikatzea.
- Fenomeno dinamiko nagusiak analitikoki adierazi eta numerikoki ebatzea.
- Aztertutako fenomenoaren simulazioaren formulazio analitikoa prestatzea.

Hau guztia errodamendu modelo bakarrerako landu da; hots, kaiola eta arrabola zilindrikodun baterako (ikus 2. irudia). Beste errodamenduen kasurako gehiena estrapolagarria da, egokitzapen batzuk korapilatsuak izanagatik ere.



2. irudia. Kaiola eta arrabola zilindrikodun errodamendua.

Era berean, bibliografiak errodamenduetako fenomeno fisiko bakoitza azaltzeko hainbat teoria eskaintzen ditu. Lan honetan ez da hauen arteko hobespenetan sakondu, egoera konkretuetan aukerak erkatzea baliagarria suerta daitekeen arren. Horrela bada, honako irismena dagokio:

- Errodamendu modelo bakarra aztertzea.
- Fenomeno fisikoen interpretazio konplexuak saihestea.
- Eraitza bitarteko produktua izatea, aplikazio praktikoa etorkizuneko lanen jarraipenak baldintzatuz.

4. ONURAK

Lan hau gauzatzeak sor ditzakeen onurak hiru ardatzetan egitura daitezke. Hasteko, teknologia eolikoa sektore estrategikoa da, eta datozen urteetako garapenak dagozkion ikerketa lerroetan sakontzea ezinbesteko du. Hori dela eta, esparru honetako proiektuei, orokorrean, etorkizun oparoa begitantzen zaie. Bereziki, biderkatzaileen osagaien diseinu zein funtzionamenduaren inguruko aurrerapenek onarpen handiagoa izaten dute, makinaren atal honek aerosorgailuen lehiakortasunean duen garrantzia dela eta.

Bestalde, enpresek erregimen iragankorrak errodamenduen hutsegiteetan duen eragina antzeman eta euren ardura adierazi dute, ildo honetan jarduteko beharrezana agerian utziz. Horren erakusle da bibliografian antzeko proiektuetan diharduen ikertzaile andana. Horrez gain, lan hau garatu bitartean, Zamudioko Gamesa Gearbox unitatearekin aldian aldiko bilerak egin dira. Eurei ikerketa lerro hau erakargarria iruditu zaie eta hautatutako metodologiari buruzko oniritzia azaldu dute. Horrela bada, industria esparruko eragile batek egindako lanean eta aurrerantzean izan dezakeen jarraipenean interesa erakustea baloratzekoak dira.

Azkenik, aplikatutako metodologiak sistema fisikoak eredutzeko erabiltzen duen ikuskera orokorra ere aipatzekoa da. Nahiz eta lan honek optimizazio eta xehetasunetan ez sakondu, problema fisikoa Matlab sistemaren bidez programatu da eta, kodearen aldagarritasuna bermatu asmoz, modu errazean balioa alda dakieken parametroekin lan egin da. Horrez gain, ezarritako oinarriak beste makina edo osagai batzuen eredutzean lagungarri izan daitezke, bai legozkieken berezitasunekin programa egokitzeko, bai sistema desberdinagoen planteamenduaren abiapuntu izateko.

Honek guztiak GRALak egin ditzakeen ekarpenak interes handikoak direla erakusten du. Azken baten, emaitzak aplikatzeko jarraipena behar izango badu ere, ikerketa lerroari oinarri sendoak finkatzeko giltzarria da.

5. GAIAREN EGOERAREN ANALISIA

5.1. Errodamenduen higiduraren ereduak

20 urteko bizitza erabilgarria izateko diseinatutako errodamenduek 5 urteko batezbesteko bizitza izateaz arduratuta, hainbat dira osagai mekaniko hauetan gertatzen diren fenomenoak eredutzeko egindako ahaleginak. Labainketa identifikatu eta zenbatestea ikertzaileen erronka nagusietako bat da. Fenomeno hau elementu errodatzaileen eta pisten arteko trakzio indarrak arraste likatsua eta inertzia indarrak gainditzeko gai ez direnean gertatzen da.

Errodamenduen portaera aztertzeko eta eredutzeko ikerlanak bi taldetan multzokatzen dira: analisi kuasiestatikoak eta analisi dinamikoak. Guztiek Hertzten teoria dute oinarri, sistema hauetan kontaktuko indar ez-linealek zeresan handia baitute. Eredu kuasiestatikoek indarren orekan ez dituzte inertziagatiko efektuak aintzat hartzen, dinamikoek ez bezala. Dena den, azken hauek denboran zeharreko integrazio eskemen beharrezana dute, gorputzen arteko marruskaduraren izaera ez-lineala dela eta.

5.1.1. Eredu kuasiestatikoak

Jonesek argitaratu zuen elementu errodatzaileen arteko higidura deskribatzen zuen lehen eredu matematikoa 1960an [10]. Honek marruskadura lehorra kontsideratu zuen eta elementu errodatzaileek barneko eraztunean errodadura hutsa dutela suposatu zuen. Aurrerago, 1971n Harrisek barneko eraztunaren bidezko elementu errodatzaileen kontrola kolokan jarri zuen, beste eredu bat proposatuz [11]-[12]. 1975ean, Gentle eta Bonessek trakzio elastohidrodinamikoa (EHD) eta indar biskoelastikoak kontsideratu zituzten [13].

Aldi berean, labainketa fenomenoak identifikatu asmoz, 1964an Hiranok labainketa gordina gertatzeko baldintza ezarri zuen [14]:

$$\frac{z F_c}{F_a} > 0,1 \quad (1)$$

non z elementu errodatzaile kopurua, F_c indar zentrifugoa eta F_a bultzada indar axiala diren. 1963an, Klimanek antzeko baldintza bat iradoki zuen [15], labainketa faktore berdinen menpe adieraziz. Dena den, ondorengo lanek labainketak beste parametro batzuen menpekotasuna duela azaldu dute. Adibidez, Bujoreanu *et al.*-en 2003ko lanak [16] *skidding* eta *scuffing* fenomenoek bero sorrerarekin duten erlazioa jorratzen dute. Bestalde, Liao *et al.*-ek 2001ean labainketan eragina duten hiru faktore esanguratsuenak

identifikatu zituzten [17]: kaiolaren abiadura angeluarra, deformazio erradiala eta deformazio axiala. Labainketa murrizteko neurri eraginkorrena norabide axialean deformazio handiagotzea dela ebatzi zuten.

Orain arte aipatutako lanek irizpide kuasiestatikoak aplikatzen dituzte eta ez dituzte denboran zeharreko baldintza aldakorrak kontsideratzen. Horrez gain, karga erradialak eta axialak konbinatzeko aukera, kaiola banatzailea eta inertziak ere ez dituzte barneratzen. Kaiolak errodamenduaren higiduran eragina du. Izan ere, karga erradiala eta axiala konbinatuz gero, kargadun gunean elementu errodatzaileek kaiola mugitzen dute, eta karga gabeko gunean kaiolak mugitzen ditu elementu errodatzaileak.

5.1.2. Eredu dinamikoak

Haize turbinetan aurreko sinplifikazioak eginez gero, errealitatea behar bezala eredutzen ez denez, formulazio dinamikoak doiagoak dira. 1971an, Waltersek elementu errodatzaileen eta kaiolaren dinamika uztartzen zituen lehen eredu dinamikoa plazaratu zuen [18]; baina elementu errodatzaileen dinamika murrizketen bidez eredutu zuenez, hauetako fenomeno dinamikoak aztertze mugak zituen. 1975ean, Guptak elementu errodatzaileen higiduraren ekuazio diferentzialak formulatu zituen [19], baina honen ereduak ez zuen kaiola aintzat hartzen.

Gainera, 1990ean, Chang *et al.*-ek kaiolaren zeresana egiaztatu zuten, karga baxuko egoeretan nabarmenagoa izanik [20]-[21]. Zehatz esanda, proposatutako ereduan kaiolaren dinamika baztertu zuten, eta lortutako emaitzak gertakizun esperimentalekin bat ez zetoze behatu zuten.

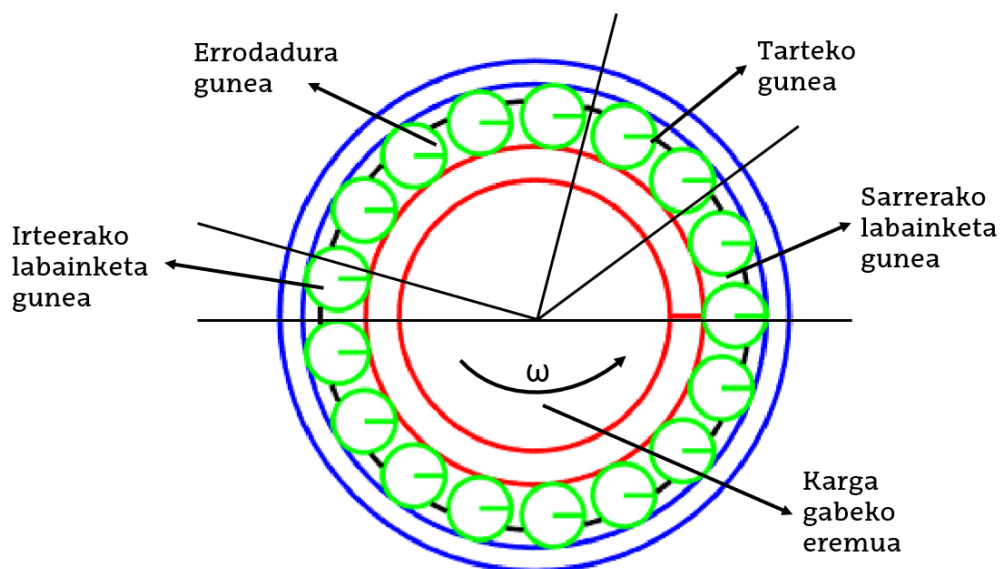
1994an, Meeks eta Tranek irizpide kuasiestatikoak eta dinamikoak txandakatzen dituen eredu argitaratu zuten [22]. Hau da, errodamenduak jasaten duen kargaren banaketa kuasiestatikoki kalkulatu zuten, eta elementu errodatzaileen eta kaiolaren arteko elkarrekintzaren analisi dinamikoa gehitu zuten. Kaiola aztertze planteamendu egokia izan arren, karga desberdinen konbinazioa erabili eta labainketa identifikatzeko ez da baliogarria, formulazio dinamikoan ez baititu efektu girokopikoak aintzat hartzen.

2009an, Houpertek efektu hidrodinamikoek kargadun gunea handiagotzen dutela ondorioztatu zuen [23]-[24]. Lubrifikazioari esker, kargaren banaketa leunagoa dela ere behatu zuten.

2011n, Jain eta Huntetek efektu zentrifugoak eta girokopikoak, eta EHD lubrifikazio erregimena kontuan hartzen dituen eredu dinamikoa argitaratu zuten [25]. Honekin

indar erradialak kargadun gunearen sarreran labainketa eragiten duela eta indar axialagatiko mina, aldiz, uniforme dela ondorioztatu zuten. Horrez gain, karga gabeko gunea egonez gero labainketa guztiz saihestea ezinezkoa dela behatu zuten, eta indar erradialaren kalteak leuntzeko elementu errodatzaile handiagoak jartzea onuragarria dela ebatzi zuten. Era berean, aurrekarga estatikoaren onurak egiaztatu zituzten, aurrekarga funtzionamenduko karga labainketarik ez izateko karga minimoa baino handiagoa izateko diseinatu behar dela ondorioztatuz. Beste soluzio posible batzuk trakzio handiko lubrifikatzaileekin labainketa murriztea eta elementu errodatzaileen kopurua txikiagotzea dira. Edonola ere, eredu honek ez ditu marruskadura ezta kaiolaren lasaierak aintzat hartzen.

2012an, Jainek aurreko eredu sakonago landu zuen [26], karga axial eta abiadura konstantean labainketa ekiditeko aplikatu beharreko karga minimoa kalkulatzeko ekuazio simple bat proposatuz. Horrez gain, karga axiala eta erradiala konbinatzean labainketa maximoa kargadun gunearen sarreran identifikatu zuen, eta kargadun gunearen barnean labainketa lokalak gertatzen direla ere behatu zuen. 3. irudiak Jainek errodamenduaren perimetroan identifikatutako guneak erakusten ditu.



3. irudia. Errodamenduaren karga eta higiduraren araberako guneak.

2012an, Tu *et al.*-ek beste eredu dinamiko bat gauzatu zuten [27]. Hauek honako sinplifikazioak aplikatu zituzten: barneko eraztunaren abiadura konstantea izatea, eraztunak solido zurrunka izatea, lasaiera erradiala zein elementu errodatzaileen eta kaiolaren artekoa arbuiatzea, eta jariakinaren presioa mespretxatzea. Horrela, zenbait

karga erradialetarako analisi lauak egin zituzten, eta karga erradiala handiagotu ahala labainketa gutxitzen dela behatu zuten.

2017an, Han *et al.*-ek EHD lubrifikazioa aintzat hartzen duen eredu dinamiko ez-lineala argitaratu zuten [28]. Honetan, lasaierak zein kaiolaren kontaktu ez-jarraituak kontsideratzen dira. Karga erradiala, makurdura momentua eta karga aldakorren anplitudea handiagotu ahala, labainketa eta honen abiadura murrizten direla ondorioztatu zuten.

5.1.3. Elementu Finituen Metodoaren aplikazioa

Ikerketa lerro berean, EFM bidez garatutako argitalpenak ere badaude. Esaterako, 2010ean Laniado-Jácome *et al.*-ek eredu numerikoen bidez tentsio eta deformazioen analisi estatikoak garatu zituzten [29]. Hauen arabera, biraketa abiadura handietan labainketa gutxiago gertatzen da, baina erroadura gunek identifikatzea zailagoa da. Erroadura gunea kargadun gunea baino txikiagoa dela, eta azken hau erroadura gunean zentratuta dagoela behatu zuten. 2014an, Daidié *et al.*-ek elementu errodatzaileak trakziozko malguki ez-lineal bezala eredutu zituzten [30], karga banaketak eta kontaktu angeluak aztertuz. Horrez gain, EFM bidezko softwareak metodo analitikoaren osagarri gisa erabiltzea ere oso hedatuta dago; esaterako, zurruntasun lokalak zehazteko.

5.2. Diziplina osagarrien ekarpenak

Analisi hauek eskatzen duten diziplina arteko lana aipatzekoa da. Horren adibide esanguratsua da 1973an Rumbarger *et al.*-ek egindako ekarpena, sistema hauetako jariakinen portaera eta fenomeno termikoak sakon aztertuz [31]. Horrez gain, 1980an Pirvics eta Klecknerrek ereduak ordenagailu bidez inplementatzeko metodo eta baliabideei eman beharreko garrantzia azpimarratu zuten [32]. Honen harira, aipatutako lanetan zenbakizko ebazpenerako eskema erabiliena 4. ordenako Runge-Kutta metodoa da.

Gorputz anitzeko sistemen dinamika denboran zehar integratzeko eskemen arloan, bi motako metodoak bereizten dira. Batzuetan, energiaren kontserbazioaren printzipioa oinarri hartuta, bigarren ordenako ekuazio diferentzial aljebraikoak modu eraginkorren ebazten dira. Izan ere, murrizketa zinematikoei eta ez-linealtasunek eragin ditzaketen ezegonkortasunak berez kontrolatzen dira. Besteetan, zenbakizko jatorria duten oszilazioak kontrolatzeko metodo alternatiboak erabiltzen dira. Hau da, oszilazio hauek sistemaren konbergentzia baldintzatzen dutenez, oszilazioak identifikatu eta eransten

duten energia disipatzeko tresnak erabiltzen dira. Adibidez, 2002an Lens eta Cardonak maiztasun altuko sasi-oszilazioekin lan egiteko metodo bat aurkeztu zuten [33].

Era berean, 1989an Cardonak murrizketa aljebraikoak kudeatzeko bi bide deskribatu zituen [34]. Lehenaren arabera, ekuazio sisteman termino egonkortzaileak txertatuz, soluzioak puntu baten inguruan oszila dezala lor daiteke. Azkenean, ekuazio diferentzial aljebraikoak ebatzi beharrean, ekuazio diferentzial arruntak ebazten dira. Nahiz eta murrizketak zehazki ez bete, azkenean konbergentzia lortzen da. Dena den, planteamendu honek ausazko konstanteak erabili eta murrizketak zehatz-mehatz ez betetzea bezalako arriskuak ditu. Bigarren bideak integrazioaren aurretiko murrizketen ezabapen aljebraikoa du oinarri. Metodo hau garbiagoa izanagatik ere, ezin da beti aplikatu eta kalkulu kostu nabarmen handiagoa du.

5.3. Kontaktu indarren ereduak

Hertzen teoria oinarri izanik, 1990ean Lankarani eta Nikraveshek gorputz zein partikula biren arteko talkan azaltzen den kontaktu indarraren eredu jarraitua plazaratu zuten [35]-[36]. Berez, kanpo-talkak eredutzeko baliogarria denez, eredu hau ez da errodamenduen kasurako egokiena. Dena den, lan honetan simulaziorako tresnak aztertu eta prestatzen direnez, saiakera batzuetan kanpo-talkak behatu dira.

Kontaktuaren iraupena sisteman aldaketa esanguratsuak gertatzeko modukoa bada, kontaktuak ezin daitezke aldiuneko talka bezala eredutu. Hori dela eta, horrelako kasuetan kontaktu indarraren eredu jarraitua hobesten da. Hau lortzeko, 1960an Goldsmithek Kelvin-Voigt tankerako eredu proposatu zuen, zeinetan kontaktua paraleloan jarritako malguki eta motelgailu lineal banak eredutzen duten. 1975ean, Hunt eta Grossleyk eredu lineala baztertu eta, Hertzen teoria aplikatuz, barneratze elastikoan disipatutako energia eta moteldura indarra estimatu zituzten. 1987an, Khulief eta Shabanak lotura indarrak, materiala eta motelgarritasuna hobeto deskribatu zituzten, energia analisisien bidez.

Azkenik, Lankarani eta Nikraveshek bi esferen arteko kontaktua eredutzeko histeresidun motelgarritasun funtzioa erabiltzea proposatu zuten. Horrela, kontaktuko gainazalen geometria, materiala eta itzultze-koefizientea aintzat hartzen dituen eredu gauzatu zuten. Hau gorputz anitzeko sistemetan aplikatzeko hedapena ere formulatu zuten. Horrela bada, gorputzen arteko indentazioa edo deformazio erlatiboa kontaktuko indarrarekin lotzea lortu zuten. Abiapuntutzat, Hertzen bi esfera isotroporen arteko kontaktuko indarraren adierazpena erabili zuten:

$$F = k \delta^n \quad \text{non } n = 1,5 \quad (2)$$

Motelgarritasuna aintzat hartzeko batugai bat erantsita:

$$F = k \delta^n + D \dot{\delta} \quad \text{non } D = \mu \delta^n \quad (3)$$

Lanaren eta energiaren printzipioa aplikatu eta garatuz, aipatutako kontaktuaren kasurako indarraren adierazpena lortzen da:

$$F(\delta, \dot{\delta}) = k \delta^n \left[1 + \frac{3}{4} (1 - C_{in}^2) \frac{\dot{\delta}}{\delta^-} \right] \quad (4)$$

non C_{in} barne itzultze-koefizientea den. Hau ez da kontaktuaren hasierako eta amaierako sartze-abiaduren arteko zatidura den C_{out} kanpo itzultze-koefizientearen baliokidea.

$$C_{out} = \frac{\text{kontaktuaren hasierako sartze} - \text{abiadura}}{\text{kontaktuaren amaierako sartze} - \text{abiadura}} = \frac{\delta^+}{\delta^-} \quad (5)$$

Izan ere, Lankarani eta Nikraveshek talkan disipatutako energia baztergarritzat jotzen dute, gorputzek metatutako energia elastikoaren aldean. Beste geometria batzuetarako garapen berdina egin daiteke, antzerako adierazpenak lortuz.

Izaera honetako indarrekin zenbakizko integrazioa modu eraginkorrean burutzeko, kontaktuaren iraupenaren eta sistemaren aldakuntzen arabera, kontaktuan zehar talkaren norabidea konstantea dela kontsideratzea onuragarria izan daiteke. Horrela, bigarren ordenako ekuazio diferentzial arruntak lortzen dira.

6. AUKEREN ANALISIA

Lan honen irismena eta gaurdaino ildo bereko argitalpenek egindako ekarpenak aintzat hartuta, biderkatzaile eolikoetako errodamenduen funtzionamendua simulatzea ahalbidetuko duen ereduaren oinarriak nola finkatu aukeratu da. Horretarako, hiru erabaki nagusi hartu dira: analisiaren izaera, planteamendu matematikoaren oinarriak eta ebazpen metodoa. Hauez gain, baliabide informatikoak eta fenomeno fisiko konkrituak deskribatzeko adierazpenak ere hautatu dira.

6.1. Analisiaren izaera

Arestian azaldu bezala, problema mekanikoak aztertzeke nagusiki planteamendu estatikoak eta dinamikoak bereizten dira. Bloke bi hauen arteko desberdintasun nagusia estatikak oreka mekanikoa aurreuposatzen duela da. Hau da, ez ditu aurreko ezta ondorengo aldiuneekin erlazioak ezartzen dituzten inertzia efektuak eta azelerazioak kontsideratzen. Bestalde, estatikaren eta dinamikaren tarteko analisiak ere egiten dira: kuasiestatikoak, eta sistemako fenomeno batzuk estatikoki eta beste batzuk dinamikoki tratatzen dituztenak.

Lan honi dagokion sistema fisikoan, inertzia efektuak mesprezatzea ez da bideragarria, baldin eta errodamenduaren funtzionamenduko edozein egoera eta, batez ere, erregimen iragankorra eredu nahi badira. Azken baten, erregimen iragankorra abio eta balaztatze eragiketekin erlazonatuta egoten denez, aldagai zinematikoen aldakuntza nabarmenak jasaten dira eta, osagai mekanikoen portaeran, inertzia efektuen eragina esanguratsua izaten da.

Horrenbestez, ikuskera dinamikoa hautatu da. Honek planteamenduaren konplexutasuna eta kalkulu metodoak desegonkortzeke arriskua areagotzen ditu, bereziki osagai dinamikoak nabarmenak diren aldiuneetan (talka anizkoitzak eta noranzko aldaketak, kasu). Dena den, problema behar bezala tratatzeko efektu dinamikoak kontuan hartzea ezinbestekoa da.

Planteamendu analitiko beharrean, EFM erabiltzea beste hautabide bat izan liteke. Hala ere, ikerketa lerro honen azken helburuetako bat den simulagailuak arrazoizko aldagai kopurua erabil dezan eta kodeak moldatu ahal izateko nolabaiteko erraztasuna eskain dezan, printzipio analitikoak aplikatu dira. Azken baten, EFM bidez dozenaka gorputz dituen sistemaren dinamika ebazteak konputazio eta denbora kostu onartezinak beharko lituzke, aukera hori erabat baztertuz. Dena den, EFM sarrerako aldagaiak balioztatzeko tresna lagungarri gisa erabil daiteke, kontaktu jakinetako zurruntasunak

kalkulatzeko. Prestakuntza lan honetan nahitaezkoa izan ez arren, azken simulagailuan zenbait parametro doitasunez definitzeko lagungarria izango da.

6.2. Planteamendu matematikoaren oinarriak

Sistema mekanikoen dinamika analitikoki eredutzeko, printzipioz zenbait metodok proposatzen dituzten ekuazioak ebatz daitezke (Newtonen ekuazio bektorialak, Lagrangeren ekuazioak eta Hamiltonen ekuazio kanonikoak, kasu).

Newtonen metodoak koordenatu sistema kartesiarrei elkartutako ekuazioak proposatzen dituen bitartean, Lagrangeren eta Hamiltonen dinamikaren formulazioetan askatasun gradu kopurua eta koordenatu orokortuen kopurua bat datoz. Horrela bada, metodo bakoitzaren adierazpen eta printzipioetan sakondu gabe, azken hauetan hasiera baten planteamendu bektorialak ekidin eta kalkuluak errazteko aukera dago.

Hala ere, Newtonen ekuazioak kontzeptualki sinpleagoak dira eta sistema fisikoak modu intuitiboagoan deskribatzeko aukera ematen dute. Honek lortzen diren ereduak erraztasun handiagoz aztertzeke eta egokitzeko aukera ematen du, programa moldagarriagoak lortuz. Dena den, koordenatu orokortuak erabiltzen ez direnez, Newtonen oinarritzko printzipioetatik abiatuz lortutako ekuazioak nahiko korapilatsuak izatera hel daitezke.

Lan honetarako, Newtonen dinamika aukeratzea lehenetsi da. Izan ere, gorputz anitzeko eta elkarrekintza askoko sistema da, erreferentzia sistema kartesiar lokalak erabiltzea lagungarria da, eta aldiunean aldiuneko analisia errazten du. Gainera, analisi laua egin denez, Newtonen ekuazioak bi dimentsiotan aztertu dira, aldagai bektorialetako hirugarren osagaiaren beharrezanik gabe. Aztertzen den sistema osatu ahala lortzen diren adierazpen analitikoak korapilatu arren, abiapuntua eta jarraitutako prozedura argi jasota, hauen gaiak identifikatzea eta errealitatearekin erlazionatzea posiblea da. Horrela, aldagai konkretuak xeheago aztertzeke aukera zabalik geratzen da, dinamika analitikoak adierazpen matematiko bakunagoen alde ulermen fisikoa ezkututzen duen bitartean.

6.3. Ebazpen metodoa

Planteamendua eginda ebazpena aurrera eramateko, metodo analitikoak baliagarriak ez direnez, zenbakizko ebazpena hobetsi da. Urrats tamaina txikiko eskema esplizituen bidez, agertzen diren kontaktu indar bortitzen dinamika modu sistematikoan azter

daitekeela aurreikusten da. Azkenean, sistemaren ebazpenak gorputzen aldagai dinamikoei eta zinematikoei buruzko informazio baliagarria ematea espero da.

Horrelako eginkizunetarako, bibliografian 4. ordenako Runge-Kutta metodoa nagusitzen da. Hau ekuazio diferentzial arruntak ebazteko urrats bakarreko metodo esplizitu erabiliena eta eraginkorrenetarikoa da. h eskema esplizituan erabilitako urratsa izanik, h^5 ordenako mozte-errore lokala eta h^4 ordenako errore globala ditu. Hau da dagokion eskema:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_j, y_j) \\ k_2 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_j + h, y_j + hk_3) \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right. \quad (6)$$

non x aldagai askea, y menpeko aldagaia eta $f(x, y(x)) = y'(x)$ diren.

Dena den, lan honen helburua ez denez numerikoki optimoak diren emaitzak eskuratzea, eraikitako programen ulermena erraztu eta hauen hedadura zein konputazio kostua mugatze aldera, Eulerren metodoa edo 1. ordenako Runge-Kutta metodoa aplikatu da. Honek h^2 ordenako mozte-errore lokala eta h ordenako errore globala ditu, eta honako eskema dagokio:

$$y_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j) \quad (7)$$

$h < 1$ izanik, 4. ordenako metodoak 1. ordenakoak baino arinago konbergitzen duela erraz ondoriozta daiteke. Honek praktikan denbora aurrezpen handia ekarriko lukeen arren, lan honetan formulazio sinpleak erabili dira, aurrerago metodo zehatzagoak txertatzeko aukera zabalik utziz.

6.4. Bestelako kontsiderazioak

Aurkeztutako guztia aurrera eramateko, programazio-lengoaia eraginkorra erabiltzea garrantzitsua da. Esaterako, GNU Octave edo Matlab-en M lengoaia baliokideak aproposak dira, matrizeekin lan egiteko erremintek datu kopuru eskerga modu errazean tratatzeko aukera ematen dutelako.

Errodamenduek jasaten dituzten fenomeno fisikoak eredutzeari dagokionez, hainbat dira simulagailuari txerta dakizkiokeenak: marruskadura, lubrifikazioa, talkak, solidoen

deformagarritasuna, efektu termikoak... Hauetako gehienak Newtonen ekuazioetan gehitu beharreko gaien bidez hartzen dira kontuan eta, horretarako, bibliografian hainbat proposamen aurki daitezke. Agerikoa denez, aztergai den sistemaren arabera, fenomeno hauetako batzuk beste batzuk baino esanguratsuagoak dira, bai sistemaren oinarritzko ezaugarriak direlako (demagun malgukiaren kasuan deformagarritasuna), bai aldiune jakinetan efektu dinamiko nabarmenak sorrarazten dituztelako (demagun talken eredutze egokia kolpe askoko sistemetan).

Lan honek ez ditu edonola ere fenomeno hauek guztiak aintzat hartzen, ezta bakoitzaren formulazio egokiena hautatzeko azterlan sakonik egiten. Batez ere, marruskadura, talka eta deformagarritasun fenomenoak kontsideratu dira. Horretarako, errodadurarekiko erresistentzia eta gorputzen arteko sartzeak kontuan hartu dira. Era berean, lehenengo saiakeretan solidoen arteko talka izaerako kontaktuetako indarra eredutzeko, Lankarani eta Nikraveshen eredu jarraitua [35]-[36] egokitu da. Berez, kanpo-talkak eredutzeko proposatu zutenez, lehen saiakeretako kanpo-talketan baino ez da erabili, eredu hau ez delako errodamenduen barneko talkak eredutzeko egokiena.

7. IRTENBIDEAREN DESKRIBAPENA

Aurretik arrazoitu den moduan, lan honetan biderkatzaile eolikoetako arrabola zilindrikodun eta kaioladun errodamenduen funtzionamenduaren eredu dinamikoa prestatu da, Newtonen ekuazioetatik abiatuta formulazio analitikoa osatuz eta Eulerren metodoaren bidez ekuazio diferentzial arruntak numerikoki ebatziz. Hau guztia analisi lau baten bidez garatu da, eta Matlab sistemarekin lan egin da. Eginkizuna bi bloketan banatu da: hasteko, edozein gorputz esferikoren dinamikan azal daitezkeen egoera batzuk deskribatu eta programatu dira; eta ondoren, oinarri hauek konbinatuz errodamendu osoaren dinamikaren planteamendua osatu da.

Analisi bidimentsionala izanik, hasierako saiakeretako esferen portaera eta errodamenduaren arrabola zilindrikoen portaera zuzenki lotuta daude. Beraz, lanaren lehen atalaren eta bigarrenaren arteko zubia errodamenduaren geometria ondo definitzea dela esan daiteke. Horrez gain, lehenengo saiakeretan kontaktuen kasuistika eta aldiberekotasuna mugatua den bitartean, eredu bateratuan kontaktu anizkoitzek zeresan handia dute. Dena den, eredu bateratuaren programazioa lan honen irismenetik at dagoenez, ondorengo orrialdeetan ez da kontaktu anizkoitzek eta errodamenduko murrizketa geometrikoek eskatzen duten kostu konputazionalaren gorakada ebaluatu.

Edonola ere, hasierako multzoko azken saiakeran, sistema fisikoetan murrizketa geometrikoak aljebraikoki txertatzeko aukera landu da eta honen egokitasuna ebaluatu da. Izan ere, errodamenduaren eraztunez gain, arrabolek kaiolaren murrizketak ere bete behar dituzte, eta hauek aljebraikoki aintzat hartzea kontsideratzekoa da. Dena den, hau ez da aukera bakarra, kaiola bere horretan ere gorputz bat delako eta, beronen dinamikaren ekuazioetatik arrabolek jasaten dituzten erreakzioak kalkulatzuz, murrizketa geometrikoa ere ebatz daitekeelako.

Horrela bada, ondorengo orrialdeetan azaltzen den lana honela dago egituratuta:

- Hasierako saiakerak:
 1. Geldiunetik abiatutako kontaktu gabeko erorketa askea:
Ebazpenerako eskema esplizitua eta aldagai zinematikoen arteko erlazioak ondo finkatzeko, grabitatearen efektua baino ez da aintzat hartu.
 2. Geldiunetik abiatutako kontaktudun erorketa askea:
Gainazal lau baten eta esferaren arteko kontaktua txertatu da, kanpo-talka gisa eredutuz eta oraindik koordenatu bakarrarekin lan eginez.
 3. Kontaktudun erorketa hasierako abiadura horizontalarekin:

Hasierako baldintzekin jokatuz, 3 askatasun graduako higidura eredutu da eta, horretarako, errodadurarekiko erresistentzia bezalako kontzeptuak txertatu dira.

4. Bi gorputzen erorketa askea kontaktu anizkoitzekin:

Bi esfera eta mugako hiru plano erabilia, "kutxa" baten izango luketen higidura simulatu da. Kasu honetan, kontaktu anizkoitzak eta, bereziki, bi gorputz mugikorren arteko kontaktua aztertu dira.

5. Bi gorputzen erorketa askea murrizketa geometrikoarekin:

Aurreko saiakerari esferen arteko distantzia konstante mantentzeko baldintza ezarri zaio, eta murrizketa geometriko hau eskema esplizituan aljebraikoki txertatu da.

- Dinamika osoaren planteamendua:

Biderkatzaile eolikoaren etapa paralelo azkarreko arraboladun errodamenduaren kasurako, osagai osoaren dinamika barneratzen duen eredu dinamikoa formulatu da. Honetarako, Zamudioko Gamesa Gearbox unitateak normalean eskuragarri izaten diren aldagaiak zeintzuk diren zehaztuta, eredu hauen eta beste aldagai batzuen arabera parametrizatu da. Aurreragoko lanetan planteamendu hau programatzea espero izatekoa denez, formulazioa ahalik eta zuzenen programatzeko modukoa izatea lortu nahi izan da.

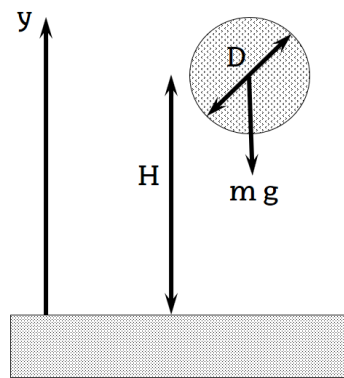
8. METODOLOGIA

8.1. Hasierako saiakerak

Lan hauen helburua problema bakunetatik abiatuz jomugako problemara hurbiltzea da, bidean aztertutako gorputzen dinamikarekin erlazionatutako fenomenoak jorratu eta hauek eredutzeko programa egokiak diseinatzu. Atal honetan programen egiturari sakondu ez arren, I. eranskinean aipatuko diren algoritmoen kodeak daude.

8.1.1. Geldiunetik abiatutako kontaktu gabeko erorketa askea

Deskribatutako metodoa jarraituz, lehen ataza erorketa askeko gorputz baten higiduraren ekuazioen eskema esplizituko zenbakizko ebazpena planteatzea da. Kasu honetan, sistema higidura bertikalari dagokion ekuazio bakarrak definitzen du. 4. irudiak egoerari dagozkion parametroen adierazpen grafikoa eskaintzen du.



4. irudia. Erorketa askeko gorputzaren eskema grafikoa.

Newtonen 2. legearen arabera, elkartutako ekuazioa honakoa da:

$$\sum F_y = ma_y \quad (8)$$

Erorketa askean grabitatearen eraginpean baino ez dagoenez:

$$-mg = m\ddot{y} \rightarrow \ddot{y} = -g \quad (9)$$

Kasu honetan, ebazpen analitikoa sinplea da:

$$\ddot{y} = -g \rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \rightarrow \dot{y} = -gt + A \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + A \rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B \quad (11)$$

non A eta B hastapen baldintzen bidez zehaztu beharreko integrazio konstanteak diren. Gorputz esferikoa H altueran geldiuonetik erortzen dela onartuz gero, hauexek dira hastapen baldintzak:

$$y(t = 0) = H \quad (12)$$

$$\dot{y}(t = 0) = 0 \quad (13)$$

Hastapen baldintzak eta higiduraren ekuazioak konbinatuz:

$$A = 0 \text{ eta } B = H \rightarrow y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad (14)$$

Zenbakizko integrazio eskema esplizitua lortzeko, zenbakizko deribatuak horrela definitu dira: \dot{y} denborarekiko lehen deribatua atzeranzko deribazio formularen bidez eta \ddot{y} denborarekiko bigarren deribatua aurreranzko deribazio formularen bidez.

$$\dot{y}_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \quad (15)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (16)$$

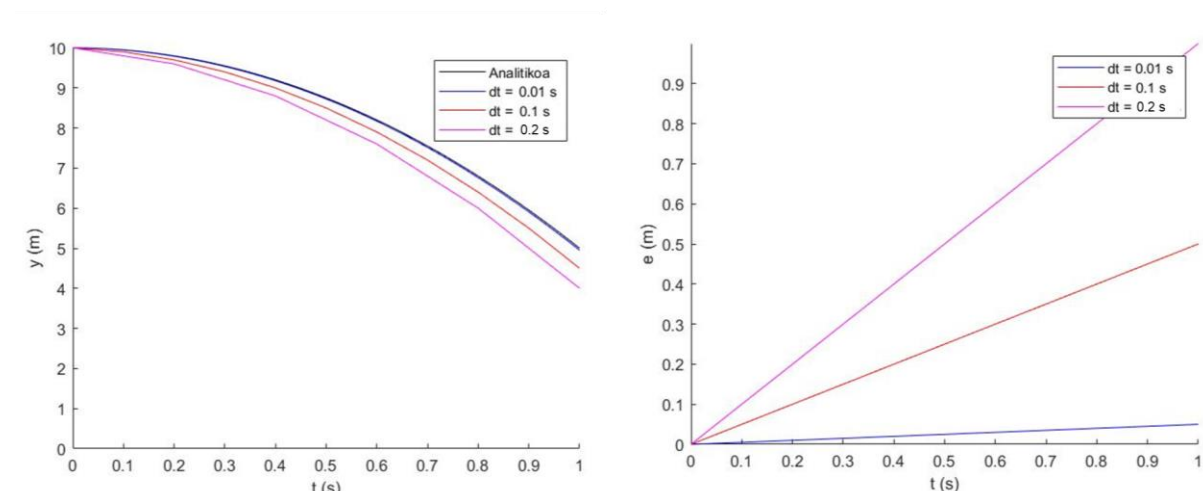
(9) higiduraren ekuazioa eta (16) adierazpena bateratuta, urratsez urrats zenbakizko deribatuak balioztatu ahal izateko integrazio eskema esplizitua lortzen da:

$$y_{i+1} = -g t^2 + 2 y_i - y_{i-1} \quad (17)$$

Ikus daitekeenez, zenbakizko ebazpenak ere bi hastapen baldintza behar ditu, y_{i+1} kalkulatzeko aurreko bi posizioak ezagutu behar direlako. (12) eta (13) hastapen baldintzak erabiliz gero, y_0 eta y_1 lortzeko (15) adierazpenari eragin behar zaio.

5. irudian, lan honetako kalkuluetakoko urrats tamainak emaitzetan duen eragina behatzen da. Izan ere, 10 metroko altueratik erorketa askea izan duen gorputzaren desplazamendu bertikalak nabarmen aldatzen dira, dt urrats tamainarekin jokaturik. Beraz, zenbat eta urrats tamaina txikiagoa erabili, orduan eta kostu konputazional eta zehaztasun handiagoko emaitzak lortzen dira, soluzio analitikora hurbilduaz batera.

Kasu honetan, 0,01 segundoko urratsa soluzio analitikoari nahiko ondo doitzen zaiola behatzen da, urratsez urrats errorea metatu arren.

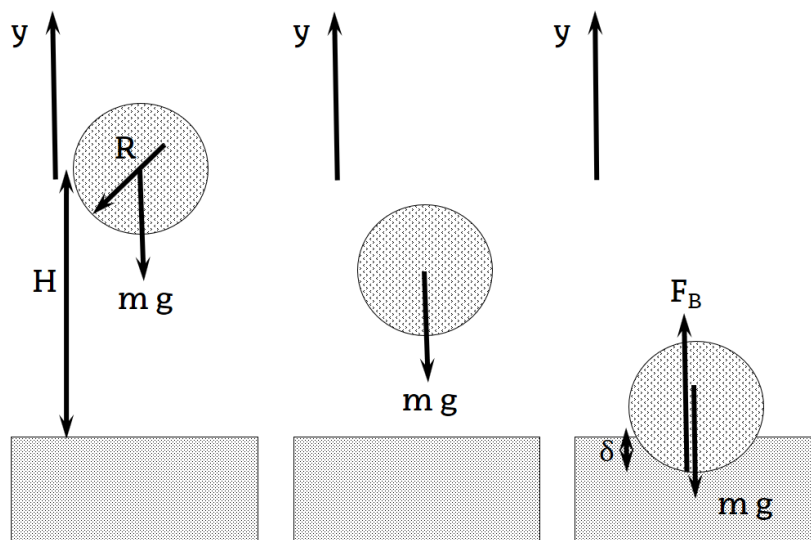


5. irudia. Urrats tamaina desberdinetarako erorketa askeko $y(t)$ emaitzak eta erroreak.

8.1.2. Geldiunetik abiatutako kontaktudun erorketa askea

Ataza honetan, erorketa askea duen gorputzaren eta zoruaren arteko talka eredutzen da; zehatz esanda, esfera baten eta plano horizontal baten arteko talka eta kontaktua. Horretarako, mugimendua norabide bertikalean mugatuta dagoenez, kontaktu indar bertikala definitu behar da. Bote bakoitzean desplazamendu maximoaren anplitudea murrizten denez, kontaktu indarrak efektu motelgarria du. Horrez gain, zorua solido zurrun gisa portatu arren, esferaren deformagarritasun elastikoa kontsideratzen da, sartzearen bidez. Hau guztia aintzat hartzeko, esferen arteko kontaktuetarako indar normalentzako Lankarani-Nikravesch ereduko (4) adierazpena hautatu da.

Beraz, H altueran geldiunean dagoen esferaren erorketa askearen eta, ondoren, zoruarekin izango dituen talken dinamika eredutzeko, bi egoera mota bereizten dira: kontaktu gabekoak eta kontaktudunak. Kasu honetan, esferaren zentroaren hasierako posizioan jatorria duen erreferentzia sistema erabili da. Horrela bada, 6. irudiak problemaren eskema grafikoa erakusten du.



6. irudia. kontaktu gabeko eta kontaktudun egoeretako eskema grafikoak.

Newtonen 2. legearen arabera ekuazioa honakoa da:

$$-m g + F_B = m \ddot{y} \rightarrow \ddot{y} = \frac{F_B}{m} - g \quad (18)$$

non F_B kontaktu indarraren balioa desplazamendu bertikalaren menpekoa den eta sartzea erlazio geometriko baten bidez lortzen den.

$$F_B = \begin{cases} 0 & \text{baldin } y \geq R - H \\ F(\delta, \delta) & \text{baldin } y < R - H \end{cases} \quad (19)$$

$$\delta = R - H - y \quad (20)$$

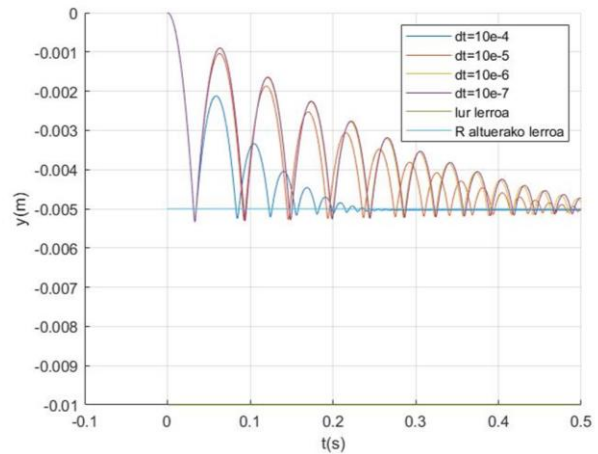
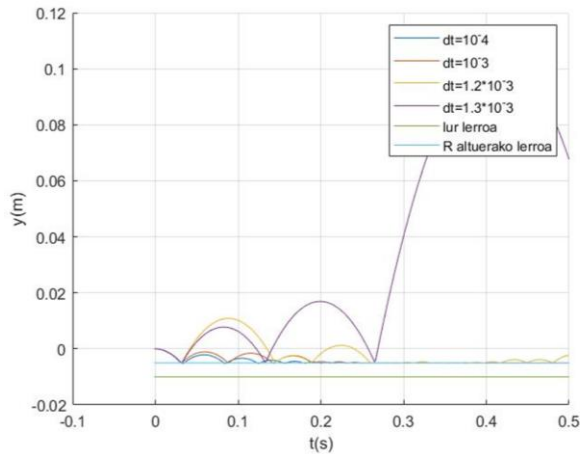
(15) eta (16) zenbakizko deribatuak eta (18) dinamikaren ekuazioa bateratuz, integrazio eskema esplizitua lortzen da:

$$y_{i+1} = \left(\frac{F_B}{m} - g \right) \Delta t^2 + 2 y_i - y_{i-1} \quad (21)$$

Jarraian zehaztutako sarrerako aldagaiekin eta urrats desberdinekin kalkuluak eginda, 7. irudian esferaren zentroaren ibilbide bertikala behatzen da.

- Parametro fisikoak:
 - $t_f = \text{amaierako unea} = 0,5 \text{ s}$
 - $m = 0,1 \text{ kg}$
 - $g = 10 \text{ m/s}^2$
- Hastapen baldintzak:
 - $y(t=0) = 0 \text{ m}$
 - $y'(t=0) = 0 \text{ m/s}$

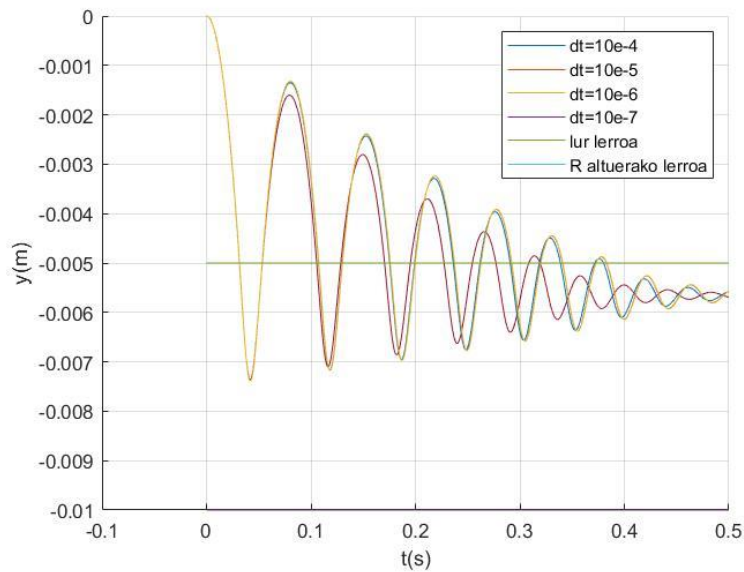
- $R = 0,005 \text{ m}$
- $H = 0,01 \text{ m}$
- $C_e = 0,9$
- $k = 6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^{1,5}$
- $n = 1,5$



7. irudia. Esferaren zentroaren posizio bertikalaren bilakaera ($y(t)$).

Erabilitako urratsa 10^{-3} segundo ingurukoa denean, emaitza konbergitzen eta kualitatiboki zentzua hartzen hasten da. Hau da, erantzunaren izaera moteldua behatzen hasten da, erabilitako algoritmoaren egokitasuna agerian utziz. Dena den, 10^{-6} segundo ordenako urratsak erabili arte erroreak nabarmenak dira. Aurreko atazan baino lau ordena txikiagoko urrats tamaina erabili behar diren arrazoia talken simulazioa da. Izan ere, sistemak jasaten dituen ekintzak zenbat eta denbora tarte laburragoetan aldatu, orduan eta doikuntza zehatzagoak behar dira efektu dinamikoak ondo eredutzeko.

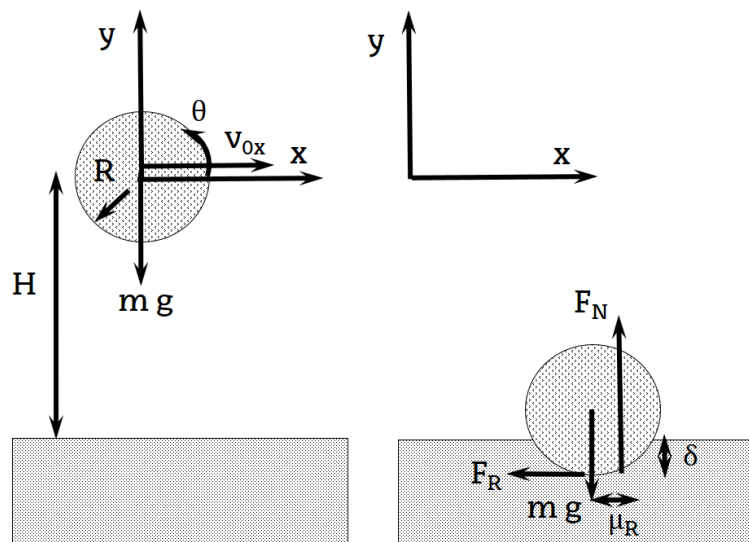
Horrez gain, kontaktuko zurruntasunaren eragina azpimarratzekoa da. Izan ere, zurruntasun handiekin kontaktuan indar handiagoak agertzen dira, kontaktuan zehar aldakuntza dinamiko handiagoak eraginez. Hau dela eta, zurruntasun handiekin konbergentzia lortzeko, urrats tamaina txikiagoa erabili behar da. 8. irudian, k konstante elastiko txikiagoarekin konbergentzia urrats tamaina handiagoarekin lortzen dela behatzen da, baita sartzeak handiagoak direla ere.



8. irudia. $k = 6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^{1.5}$ zurruntasunarekin, $y(t)$ -ren bilakaera.

8.1.3. Kontaktudun erorketa hasierako abiadura horizontalarekin

Erorketa askea izan beharrez, gorputzari hasierako abiadura horizontala ezartzen bazaio, higiduraren legeek mugimendu horizontala, bertikala eta biraketa zehaztu behar dituzte. Hau da, hiru dinamikaren ekuazio planteatu behar dira eta integrazio eskema esplizitua hiru adierazpenek osatzen dute. Eskema grafikoa 9. irudian behatzen da, erreferentzia sistemaren jatorria esferaren zentroaren hasierako posizioan finkatuta.



9. irudia. Esferaren hasierako egoera eta kontaktudun egoera.

Kasu honetan, kontaktudun egoeretan bi erreakzio indar azaltzen dira: kontaktuko indar normala (F_N) eta marruskadura indar elkarzuta (F_R). Lehenak bertikalarekiko μ_R eszentrikotasuna duela kontsideratu da, errodadurari erresistentzia eginez. Azken baten, μ_R esperimentalki egiaztatutako biraketaren balaztatzea eragiten duen indar-momentua lortzeko normalaren desfase parametroa da. Horrela bada, F_N Lankarani-Nikravesh ereduaren arabera definitu da eta F_R indar normalaren proportzionala da, proportzionaltasun konstantea marruskadura koefizientea izanik. Dena den, kontaktu puntuetako abiadura baxuetan, gorputzaren balaztatzea bermatze aldera, F_R nulua dela kontsideratu da. Horrela, geratzen den hondar-higidura arbuigarria izatea lortu da, portaera erreala nahiko ondo simulatuz. Hauexek dira kontaktu indarren adierazpenak:

$$F_N = \begin{cases} 0 & \text{baldin } y \geq R - H \\ k \delta^n \left[1 + \frac{3}{4} (1 - C_e^2) \frac{\dot{\delta}}{\delta} \right] & \text{baldin } y < R - H \end{cases} \quad (22)$$

$$F_R = \begin{cases} \mu F_N & \text{baldin } v_{rel} \geq \Delta v_{rel} \\ 0 & \text{baldin } v_{rel} < \Delta v_{rel} \end{cases} \quad (23)$$

non v_{rel} kontaktu puntu baxueneko abiadura den. Horrela balioesten da:

$$v_{rel} = \dot{x} + \dot{\theta} R \quad (24)$$

Aipatutako dinamikaren hiru ekuazioak:

$$\begin{cases} -F_R = m \ddot{x} \\ -m g + F_N = m \ddot{y} \\ F_N \mu_R - F_R R = I_G \ddot{\theta} \end{cases} \quad (25)$$

Hauek (15) eta (16) zenbakizko deribatuen adierazpenekin konbinatuz, x , y eta θ koordenatuen integrazio eskema esplizituak lortzen dira:

$$\begin{cases} x_{i+1} = \frac{-F_R}{m} \Delta t^2 + 2 x_i - x_{i-1} \\ y_{i+1} = \left(\frac{F_N}{m} - g \right) \Delta t^2 + 2 y_i - y_{i-1} \\ \theta_{i+1} = \frac{F_N \mu_R - F_R R}{I_G} \Delta t^2 + 2 \theta_i - \theta_{i-1} \end{cases} \quad (26)$$

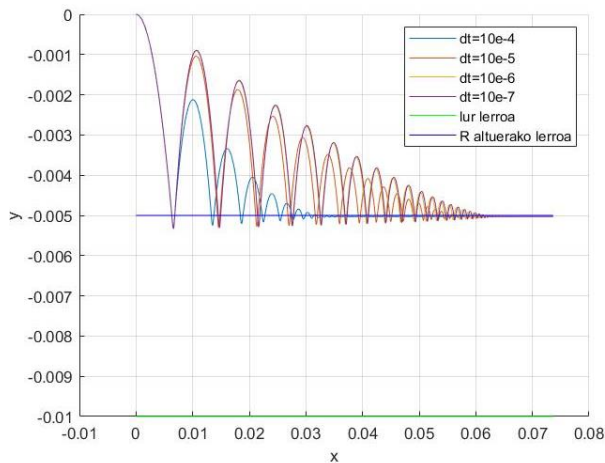
Jarraian zehaztutako sarrerako aldagaiekin eta denbora urrats desberdinekin kalkuluak eginda, 10. irudian eta 11. irudian esferaren denboran zeharreko ibilbidea behatzen da.

- Parametro fisikoak:

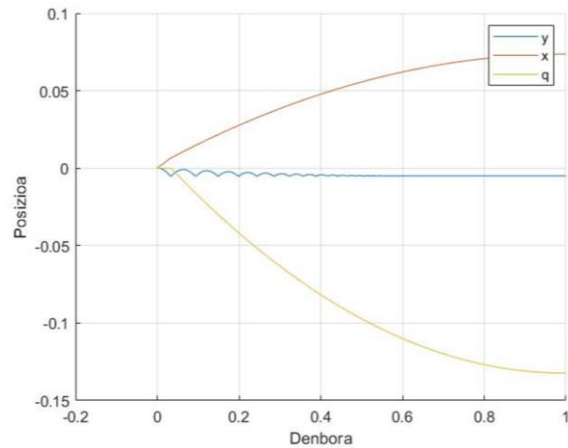
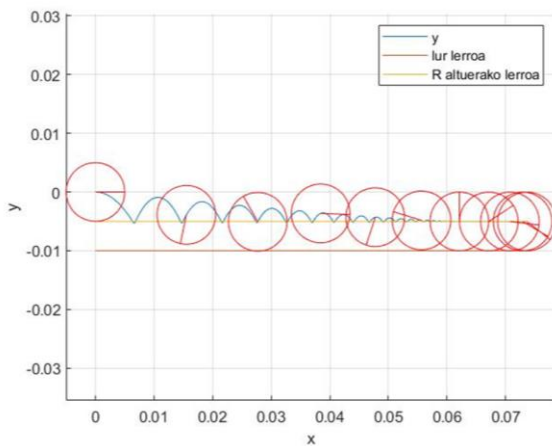
- o $t_f = \text{amaierako unea} = 1 \text{ s}$
- o $m = 0,1 \text{ kg}$
- o $g = 10 \text{ m/s}^2$
- o $R = 0,005 \text{ m}$
- o $H = 0,01 \text{ m}$
- o $C_e = 0,9$
- o $k = 6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^{1,5}$
- o $n = 1,5$
- o $\mu = 0,15$
- o $\mu_R = 10^{-4} \text{ m}$
- o $I_G = 2/5 m R^2 = 10^{-6} \text{ kg m}^2$
- o $\Delta v_{\text{rel}} = 0,001 \text{ m/s}$

- Hastapen baldintzak:

- o $y(t=0) = 0 \text{ m}$
- o $x(t=0) = 0 \text{ m}$
- o $\theta(t=0) = 0$
- o $x'(t=0) = 0,2 \text{ m/s}$
- o $y'(t=0) = 0 \text{ m/s}$
- o $\theta'(t=0) = 0 \text{ s}^{-1}$



10. irudia. Esferaren xy planoko ibilbidea dt desberdinekin.



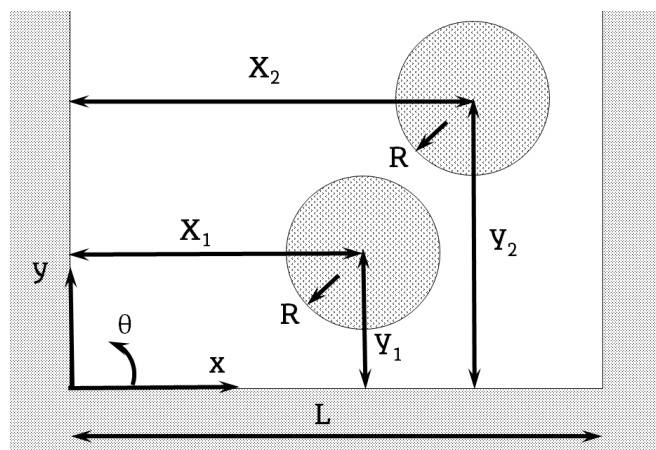
11. irudia. Esferaren ibilbidea eta x, y eta θ koordenatuen bilakaera ($dt = 10^{-6} \text{ s}$).

10^{-6} segundoko urratsa baino txikiagoekin lortzen den zehaztasun gehikuntza hutsala da, aldagaiak ondo konbergituz. Aipatzekoa da algoritmoa diseinatzean hasierako baldintza gehigarri batzuk ezarri direla, lehen urratsetako emaitzen balioak hobeto doitzeko:

$$\begin{cases} y(-\Delta t) = -v_{0x}\Delta t \\ \dot{y}(-\Delta t) = v_{0x} \end{cases} \quad (27)$$

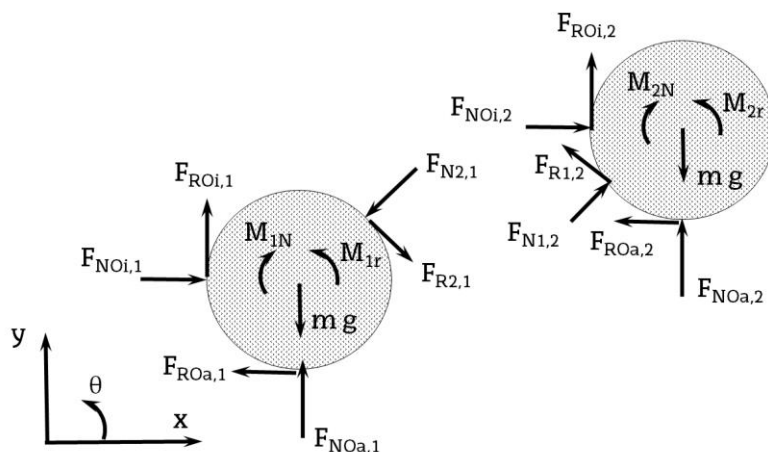
8.1.4. Bi gorputzen erorketa askea kontaktu anizkoitzekin

Dimentsio eta material bereko bi esferak hiru horma lauk mugatutako esparruan dituzten elkarrekintzak aztertu dira. Hau dela eta, analisisian aurrez joratu gabeko hiru aspektu txertatu dira: bi esferen arteko higidura erlatiboa, hauen arteko kontaktua eta gorputzen kontaktu anizkoitzak. Aurreko atazetan bezala, hormak solido zurrinak direla kontsideratu da eta esferen deformagarritasun elastikoa δ sartzearekin ereduatu da. Sei koordenaturekin lan egin da, eta jatorri kartesiarra ezkerrean planoen osatzen duten ertzean kokatu da (ikus 12. irudia).

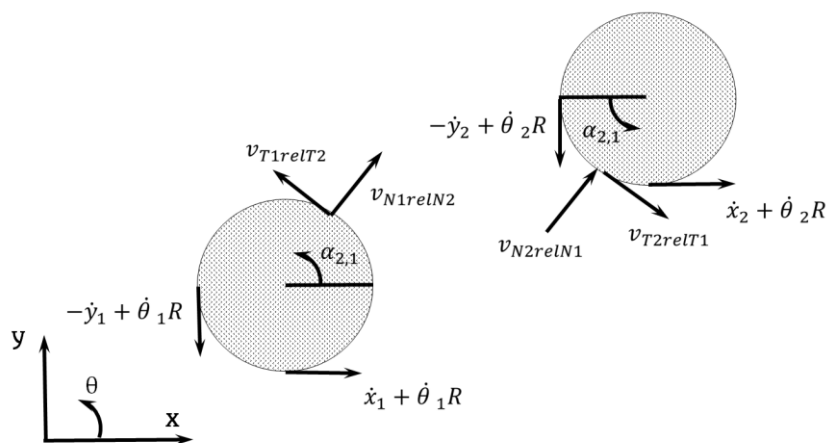


12. irudia. Esfera bikotearen hasierako kokapena.

13. irudian eta 14. irudian, esferen solido askeen diagramak eta aldagai zinematikoen esanguratsuen ageriak dira, hurrenez hurren. Kasu bietan, aldagaiak izendatzeko erabiliko den nomenklatura adierazten da. Horma bertikal biren lan egingo denez, eskema grafikoetan eskuin horma bertikaleko aldagaiak adierazi dira eta ezker horma bertikalekoak simetriaz lor daitezke (algoritmoetan parametro geometrikoak eta zeinuak doitu dira).



13. irudia. Esferen solido askeen diagramak.



14. irudia. Esferen aldagai zinematiko esanguratsuak.

13. irudian, M_{iN} eta M_{ir} momentuek errodaturari erresistentzia egiten diote, lehenek hormekin izandako kontaktuen indar normalen eszentrikotasunengatik eta bigarrenek esferen arteko kontaktuko indar normalaren eszentrikotasunagatik. Analitikoki definitzeko, zeinuak ondo esleitu behar zaizkie, esferen abiadura angeluarrak eta kontaktu puntuetako abiadura erlatiboak aintzat hartuz. M_{iN} -ren kasuan, momentuaren zeinua dagokion esferaren $\dot{\theta}_i$ abiadura angeluarraren araberakoa da:

$$\begin{cases} M_{1N} = \text{sign}(\dot{\theta}_1)\mu_r (F_{NOi,1} + F_{NOa,1}) \\ M_{2N} = \text{sign}(\dot{\theta}_2)\mu_r (F_{NOi,2} + F_{NOa,2}) \end{cases} \quad (28)$$

M_{iR} -ren kasuan, aldiz, esfera bien arteko kontaktu puntuko abiadura erlatiboa kontuan izan behar da. 13. irudiko zeinu hitzarmenarekin bat etorritz, $M_{1r} = M_{2r} = M_r$ egiaztatzen da eta M_r horrela balioesten da:

$$M_r = -\text{sign}(v_{T1relT2}) \mu_r F_{N2,1} \quad (29)$$

non $v_{T1relT2}$ kontaktu puntuko esferen arteko abiadura erlatiboaren osagai ukitzaila den, aurrerago zehaztuko den bezala kalkulatu. Bi esferen arteko kokapen erlatiboa definitzeko, $d_{2,1}$ aldagai lineala eta $\alpha_{2,1}$ aldagai angeluarra erabili dira:

$$d_{2,1} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \quad (30)$$

$$\alpha_{2,1} = \text{atan2}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \text{atan2}(y_2 - y_1, x_2 - x_1) \quad (31)$$

Zazpi kontaktu mota bereiz daitezkeenez, 1. taulak hauetako bakoitza gertatzeko baldintzak eta dagozkien Lankarani-Nikravesh ereduko (4) adierazpeneko konstanteak laburbiltzen ditu:

1. taula. Kontaktu posibleak eta hauen ezaugarriak.

Kontaktu mota	Kontaktu baldintza	Lankarani-Nikravesh ereduko parametroak	
		k (N/m ^{1,5})	n
1. esfera eta ezker horma bertikala	$d_{10i} = x_1(t) < R$	$6 \cdot 10^6$	1,2
1. esfera eta eskuin horma bertikala	$d_{10i} = x_1(t) > L - R$		
1. esfera eta horma horizontala	$d_{10a} = y_1(t) < R$		
2. esfera eta ezker horma bertikala	$d_{20i} = x_2(t) < R$		
2. esfera eta eskuin horma bertikala	$d_{20i} = x_2(t) > L - R$		
2. esfera eta horma horizontala	$d_{20a} = y_2(t) < R$		
1. esfera eta 2. esfera	$d_{21} < 2R$	$3 \cdot 10^6$	1,2

Esferen arteko abiadura erlatiboa aztertzeko, kontaktu planoarekiko osagai normala eta osagai ukitzaila bereizi dira. Horretarako, esfera bakoitzaren abiadura absolutuaren

osagaiak lortu eta diferentziak kalkulatu dira. Norabide normaleko abiadura erlatiboaren kasuan, (34) zein (35) adierazpenak baliagarriak dira (ataza honetarako diseinatutako algoritmoan bigarrena erabili da).

$$\begin{cases} v_{T1} = \dot{\theta}_1 R - \dot{x}_1 \sin \alpha_{2,1} + \dot{y}_1 \cos \alpha_{2,1} \\ v_{T2} = \dot{\theta}_2 R + \dot{x}_2 \sin \alpha_{2,1} - \dot{y}_2 \cos \alpha_{2,1} \\ v_{N1} = \dot{x}_1 \cos \alpha_{2,1} + \dot{y}_1 \sin \alpha_{2,1} \\ v_{N2} = \dot{x}_2 \cos \alpha_{2,1} + \dot{y}_2 \sin \alpha_{2,1} \end{cases} \quad (32)$$

$$v_{T1relT2} = v_{T2relT1} = v_{T1} + v_{T2} = (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) R + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \sin \alpha_{2,1} + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \cos \alpha_{2,1} \quad (33)$$

$$v_{N1relN2} = v_{N2relN1} = v_{N1} - v_{N2} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \cos \alpha_{2,1} + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \sin \alpha_{2,1} \quad (34)$$

$$v_{N1relN2} = v_{N2relN1} = \dot{d}_{2,1} = \frac{d_{2,1i} - d_{2,1i-1}}{\Delta t} = \frac{(y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{d_{2,1}} \quad (35)$$

Kontaktuko indar normalen balioespena (22) adierazpenaren arabera burutu da, δ sartzea, kontaktu baldintza eta konstanteak 1. taularen arabera egokituz.

Hau guztia aintzat hartuta, problemari dagozkion dinamikaren sei ekuazioak datozenak dira:

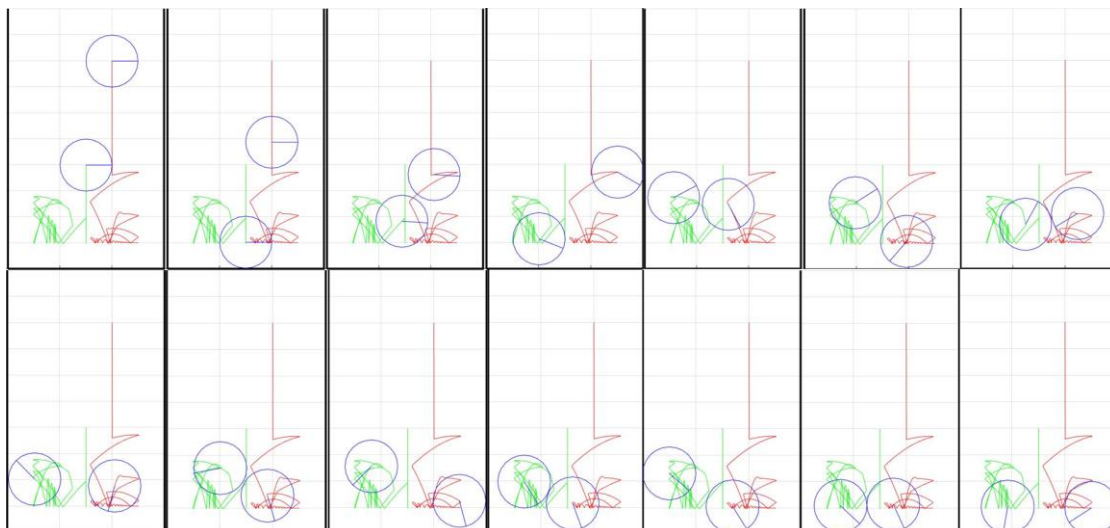
$$\begin{cases} -F_{ROa,1} + F_{NOi,1} - F_{N2,1} \cos \alpha_{2,1} + F_{R2,1} \sin \alpha_{2,1} = m_1 \ddot{x}_1 \rightarrow A = m_1 \ddot{x}_1 \\ F_{NOa,1} + F_{ROi,1} - F_{N2,1} \sin \alpha_{2,1} + F_{R2,1} \cos \alpha_{2,1} - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \rightarrow B = m_1 \ddot{y}_1 \\ -M_{1N} + M_{1r} - F_{R2,1} R - F_{ROa,1} R - F_{ROi,1} R = I_{G1} \ddot{\theta}_1 \rightarrow C = I_{G1} \ddot{\theta}_1 \\ -F_{ROa,2} + F_{NOi,2} + F_{N1,2} \cos \alpha_{2,1} - F_{R1,2} \sin \alpha_{2,1} = m_2 \ddot{x}_2 \rightarrow D = m_2 \ddot{x}_2 \\ F_{ROi,2} + F_{NOa,2} + F_{N1,2} \sin \alpha_{2,1} + F_{R1,2} \cos \alpha_{2,1} - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \rightarrow E = m_2 \ddot{y}_2 \\ -M_{2N} + M_{2r} - F_{R1,2} R - F_{ROa,2} R - F_{ROi,2} R = I_{G2} \ddot{\theta}_2 \rightarrow F = I_{G2} \ddot{\theta}_2 \end{cases} \quad (36)$$

non A, B, C, D, E eta F hizkiak erosotasunagatik adierazpenak laburtzeko erabili diren. (15) eta (16) zenbakizko deribatuak eta (36) dinamikaren ekuazio sorta bateratuz, integrazio eskema esplizitua lortzen da:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1i+1} = \frac{A}{m_1} \Delta t^2 + 2 x_{1i} - x_{1i-1} \\ y_{1i+1} = \frac{B}{m_1} \Delta t^2 + 2 y_{1i} - y_{1i-1} \\ \theta_{1i+1} = \frac{C}{I_{G1}} \Delta t^2 + 2 \theta_{1i} - \theta_{1i-1} \\ x_{2i+1} = \frac{D}{m_2} \Delta t^2 + 2 x_{2i} - x_{2i-1} \\ y_{2i+1} = \frac{E}{m_2} \Delta t^2 + 2 y_{2i} - y_{2i-1} \\ \theta_{2i+1} = \frac{F}{I_{G2}} \Delta t^2 + 2 \theta_{2i} - \theta_{2i-1} \end{array} \right. \quad (37)$$

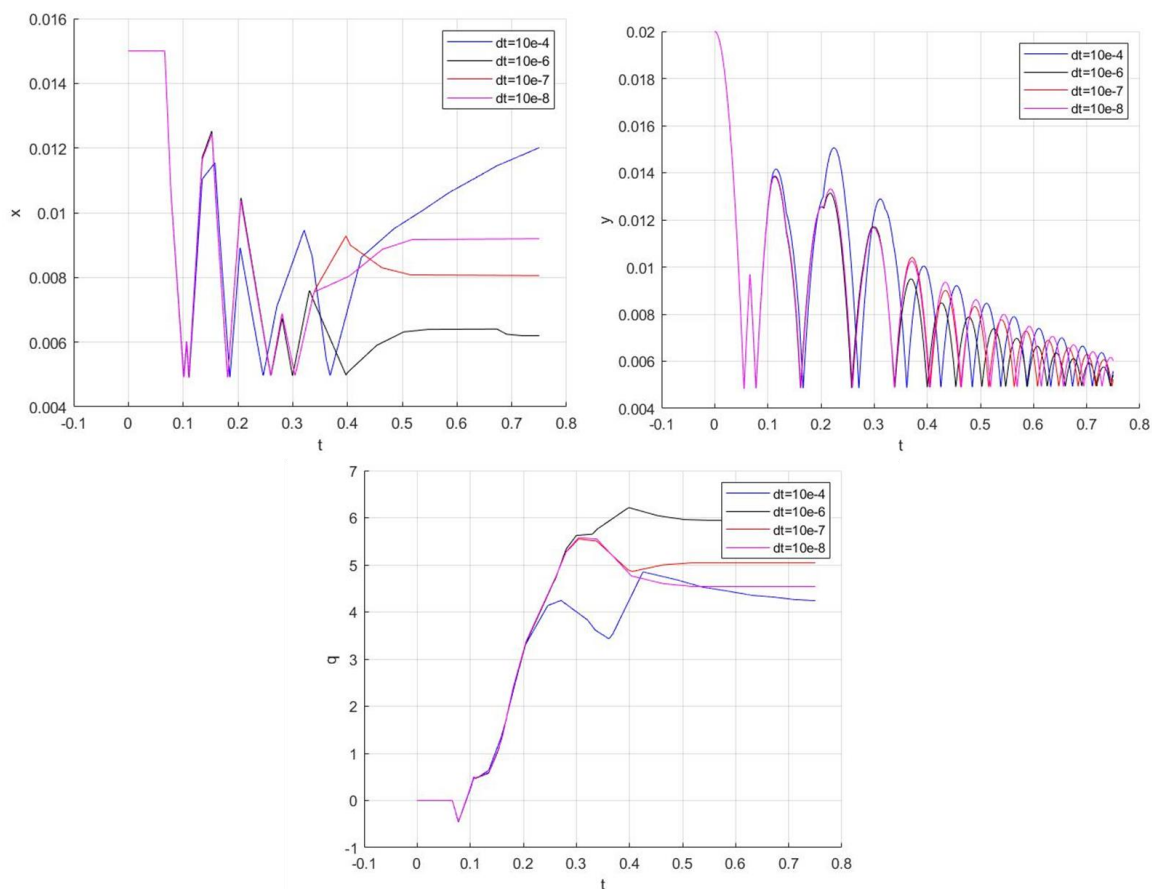
Jarraian zehaztutako sarrerako aldagaiekin kalkuluak eginda, 15. irudian esferek simulatutako ibilbidearen aldiune batzuetan dituzten posizioak ikus daitezke.

- Parametro fisikoak:
 - $dt = 10^{-8}$ s
 - $t_f =$ amaierako unea = 0,8 s
 - $m_1 = 0,1$ kg
 - $m_2 = 0,1$ kg
 - $g = 10$ m/s²
 - $R = 0,005$ m
 - $L = 6 R = 0,03$ m
 - $C_e = 0,9$
 - $\mu = 0,15$
 - $\mu_R = 10^{-4}$ m
 - $I_G = 2/5 m R^2 = 10^{-6}$ kg m²
 - $\Delta v_{rel} = 0,001$ m/s
- Hastapen baldintzak:
 - $y_1(t=0) = Y_1 = 0,02$ m
 - $x_1(t=0) = X_1 = 0,015$ m
 - $\theta_1(t=0) = 0$
 - $y_2(t=0) = Y_2 = 0,04$ m
 - $x_2(t=0) = X_2 = 0,02$ m
 - $\theta_2(t=0) = 0$
 - Abiadura nuluak



15. irudia. Esferen ibilbideak eta koordinatuen bilakaera.

16. irudian, dt urrats desberdinak erabilia lehenengo esferaren koordinatuek izandako bilakaera behatzen da. 10^{-7} segundo inguruko urratsekin errorea nahiko murriztea lortzen denez, arazoizkoena ataza honi dagokion problemean 10^{-7} - 10^{-8} arteko dt erabiltzea da.



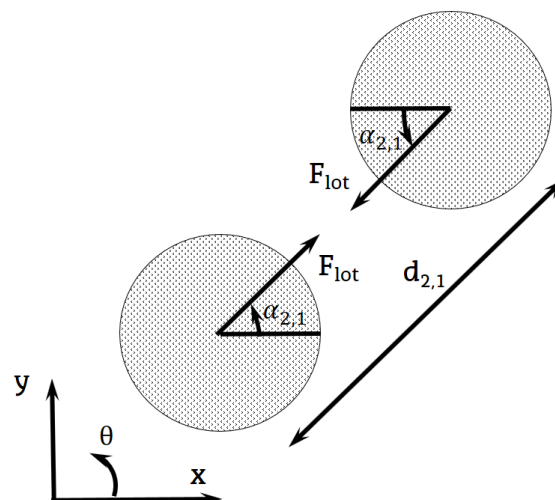
16. irudia. Lehenengo esferaren koordinatuen bilakaera dt desberdinekin.

Animazioek errealistak dirudite, parametroak aldatuz zentuzko emaitzak lortzen direlako. Algoritmoa diseinatzean, sistematizazio maila altuagoarekin lan egin behar da, gero eta datu gehiago prozesatzen direlako eta programek kasuistika zabalagoa barneratzen dutelako. Esaterako, esfortzuak bektore gisa antolatu dira eta, kontaktu anizkoitzak modu egokian tratatzeko, urratsaren tamaina txikiagotu da. Era berean, urrats tamaina desberdinekin lortutako emaitzak erkatzean, simulazioaren hasieran amaieran baino zehaztasun handiagoa lortzen dela behatu da.

8.1.5. Bi gorputzen erorketa askea murrizketa geometrikoarekin

Problema dinamikoan parte hartzen duten gorputzek murrizketa geometrikoak edo loturak bete behar izan ditzakete, dinamikaren legeekin batera. Horrelakoetan, murrizketa geometrikoak analitikoki adierazita, murrizketa aljebraiko gehigarriak lortzen dira eta eragiten dituzten ekintzak (indarrak zein momentuak) balio ezezagunekoak izaten dira. Problema dinamikoa ebazteko ekuazio sisteman, murrizketa aljebraiko bakoitzeko ekuazio eta ezezagun bana eransten dira.

Kasu honetan, aurreko ataza abiapuntu izanik sistemari $d_{2,1}$ bi esferen zentrozen arteko distantzia konstante mantentzea inposatu zaio. Distantzia hau esferen hasierako posizioak ezartzen du, (30) adierazpenean definitu bezala. Lotura honi elkartutako esfortzua esferak euren zentroak lotzen dituen norabidean jasaten duten F_{lot} indarra da. Beraz, egoera honetan 13. irudiko solido askeen diagramak 17. irudiko esfortzuekin osatzen dira.



17. irudia. Esferen arteko murrizketa geometrikoagatikoko lotura indarra.

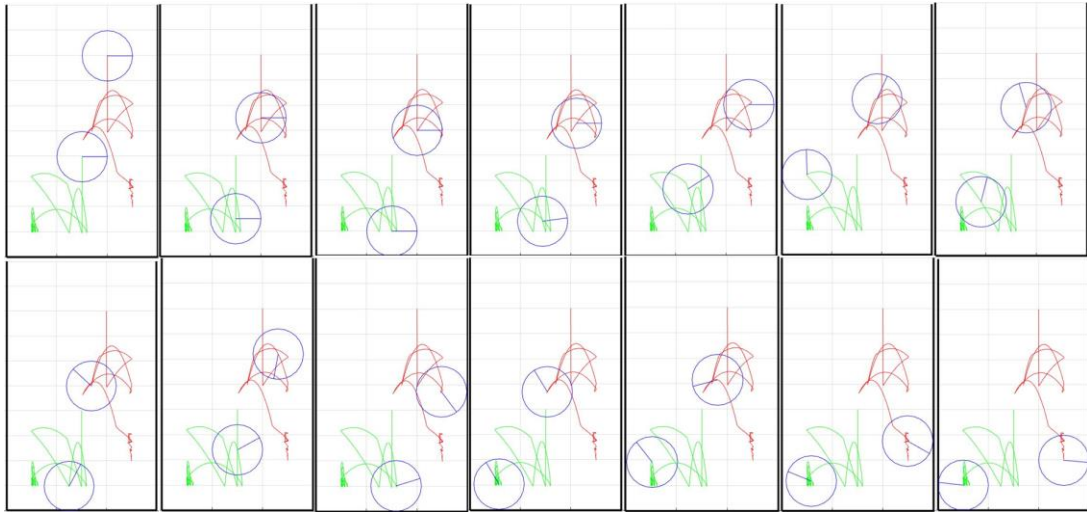
Hau guztia eta (37) integrazio eskema esplizitua aintzat hartuz, kasu honetan jarraitu beharreko eskema lortzen da:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1i+1} = \frac{A + F_{lot} \cos \alpha_{2,1}}{m_1} \Delta t^2 + 2 x_{1i} - x_{1i-1} \\ y_{1i+1} = \frac{B + F_{lot} \sin \alpha_{2,1}}{m_1} \Delta t^2 + 2 y_{1i} - y_{1i-1} \\ \theta_{1i+1} = \frac{C}{I_{G1}} \Delta t^2 + 2 \theta_{1i} - \theta_{1i-1} \\ x_{2i+1} = \frac{D - F_{lot} \cos \alpha_{2,1}}{m_2} \Delta t^2 + 2 x_{2i} - x_{2i-1} \\ y_{2i+1} = \frac{E - F_{lot} \sin \alpha_{2,1}}{m_2} \Delta t^2 + 2 y_{2i} - y_{2i-1} \\ \theta_{2i+1} = \frac{F}{I_{G2}} \Delta t^2 + 2 \theta_{2i} - \theta_{2i-1} \\ d_{2,1}^2 = (y_{2i+1} - y_{1i+1})^2 + (x_{2i+1} - x_{1i+1})^2 \end{array} \right. \quad (38)$$

Iterazio bakoitzeko 6 koordenatuak balioesteko, (38) adierazpeneko ekuazioek osatzen duten sistema ebatzi da. Koordenatu hauez gain, F_{lot} lotura indarraren balioa ere lortzen da. Ebazteko, programazio kodean *fsolve* erreminta erabil daiteke, iterazio bakoitzeko hastapen balioak aurreko iterazioko emaitzak izanik. Dena den, planteatutako murrizketaren kasuan, adierazpenei eraginda F_{lot} aldagaia bakantzen da. Horrela bada, (38) sistemak honako itxura hartzen du:

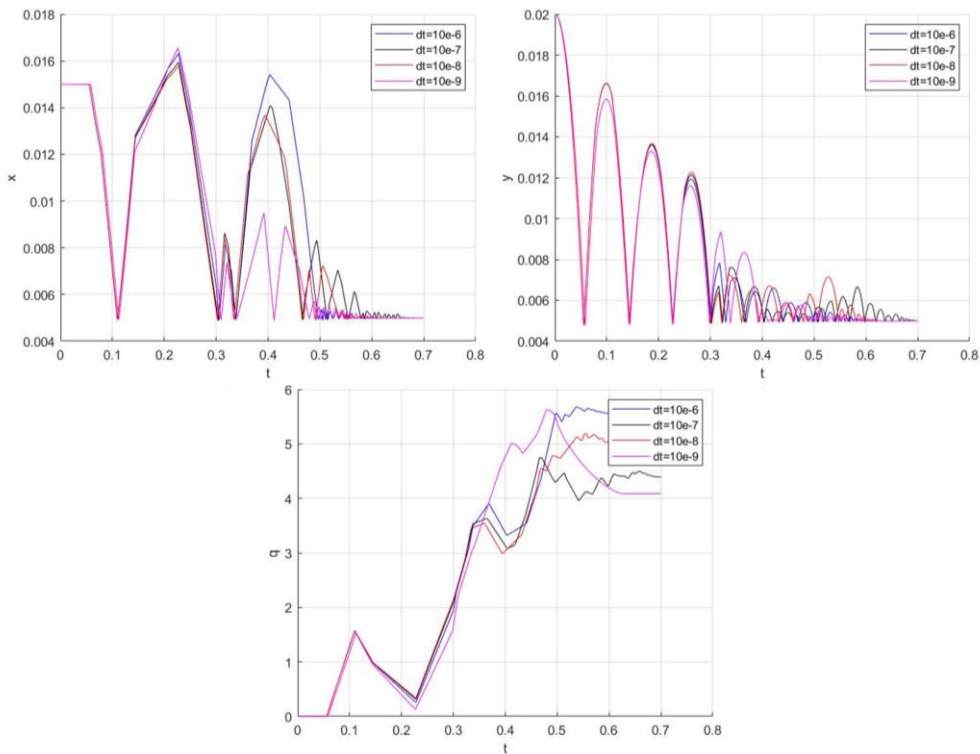
$$\left\{ \begin{array}{l} F_{lot} = \frac{\gamma \sin \alpha_{2,1} + \beta \cos \alpha_{2,1} - \sqrt{d_{2,1}^2 - (\gamma \cos \alpha_{2,1} - \beta \sin \alpha_{2,1})^2}}{\Delta t^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \\ \text{non } \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{E}{m_2} \Delta t^2 - \frac{B}{m_1} \Delta t^2 + 2 y_{2i} - y_{2i-1} - 2 y_{1i} + y_{1i-1} \\ \beta = \frac{D}{m_2} \Delta t^2 - \frac{A}{m_1} \Delta t^2 + 2 x_{2i} - x_{2i-1} - 2 x_{1i} + x_{1i-1} \end{array} \right. \\ x_{1i+1} = \frac{A + F_{lot} \cos \alpha_{2,1}}{m_1} \Delta t^2 + 2 x_{1i} - x_{1i-1} \\ y_{1i+1} = \frac{B + F_{lot} \sin \alpha_{2,1}}{m_1} \Delta t^2 + 2 y_{1i} - y_{1i-1} \\ \theta_{1i+1} = \frac{C}{I_{G1}} \Delta t^2 + 2 \theta_{1i} - \theta_{1i-1} \\ x_{2i+1} = \frac{D - F_{lot} \cos \alpha_{2,1}}{m_2} \Delta t^2 + 2 x_{2i} - x_{2i-1} \\ y_{2i+1} = \frac{E - F_{lot} \sin \alpha_{2,1}}{m_2} \Delta t^2 + 2 y_{2i} - y_{2i-1} \\ \theta_{2i+1} = \frac{F}{I_{G2}} \Delta t^2 + 2 \theta_{2i} - \theta_{2i-1} \end{array} \right. \quad (39)$$

Gainontzean, sarrerako aldagaiei laugarren atazako balio berdinak esleitu zaizkie eta 19. irudian esferen higiduraren simulazioa behatzen da.



18. irudia. Esferen ibilbideak eta koordinatuen bilakaera.

19. irudian, dt urrats desberdinak erabilia lehenengo esferaren koordinatuek izandako bilakaera behatzen da. Zehazki, 10^{-6} eta 10^{-9} segundo arteko urratsekin simulazioak egin dira eta konbergentziarik lortzen ez dela behatu da. Dena den, simulazioaren emaitzek zentzuzkoak diruditez, urrats tamaina are txikiagoren batekin konbergentzia lortzen dela aurreikus daiteke.



19. irudia. Lehenengo esferaren koordinatuen bilakaera dt desberdinekin.

Beraz, sistema hau konbergiarazteko urrats tamaina aurreko atazan baino 100 aldiz baino gehiago txikiagotu behar da, murrizketa aljebraiko bakarra txertatzearen. Honek konputazio denbora 100 aldiz baino gehiago handiagotzea dakar; adibidez, 10 minututako iraupeneko kalkuluak 16 ordu baino gehiago iraungo lukete. Horrenbestez, ahal den heinean murrizketa geometrikoak aljebraikoki txertatzeko aukera baztertzea zentzuzkoa da. Izan ere, kasu askotan badira murrizketok aintzat hartzeko modu eraginkorragoak; esaterako, murrizketa ezartzen duen gorputz fisikoaren dinamika aztertu eta dagozkion erreakzioak ebaztea.

8.2. Dinamika osoaren planteamendua

Atal honen helburua, biderkatzaile eolikoaren etapa paralelo azkarreko arraboladun errodamenduaren kasurako, osagai osoaren dinamika barneratzen duen eredua formulatzea da. Horretarako, aurreko atalean jorrotutako kasuak eta egiaztatutako programazio kodeak oinarritzat hartu dira, formulazio honen programazio lanak errazteko. Horrela bada, atal honen egitura hurrengoa da:

- Errodamendua makinan kokatzea.
- Errodamenduaren parametroak definitzea.
- Kalkulu prozedurako aldagaiak zehaztea.
- Dinamikaren ekuazioak formulatzea.
- Ekuazioak ebazteko eskema esplizitua planteatzea.

Hurrengo lerroetan, formulazioaren garapena eta deskribapena azaltzen dira, bertan definitzen diren aldagaien zerrenda II eranskinean jaso delarik. Horrez gain, eranskinean aldagai batzuen balio posible bana ageri da, kasu erreal bati ez dagozkion arren, sistemaren dimentsionamenduaren nolabaiteko ideia eskaini asmoz.

8.2.1. Errodamendua makinan kokatzea

Biderkatzaile eolikoaren ardatz azkarreko arrabola zilindrikodun errodamenduak eusten duen ardatza arrabola konikodun errodamendu bikote batek eutsi ohi du beste aldean. Ardatz honek (1 ardatza) engranaje bidezko transmisioz lortzen du potentzia biderkatzaileko aurreko ardatzetik (2 ardatza). Aztergai den errodamenduak karga erradiala konikoekin batera jasaten du, eta karga axiala osotasunean errodamendu konikoek jasaten dutela kontsidera daiteke.

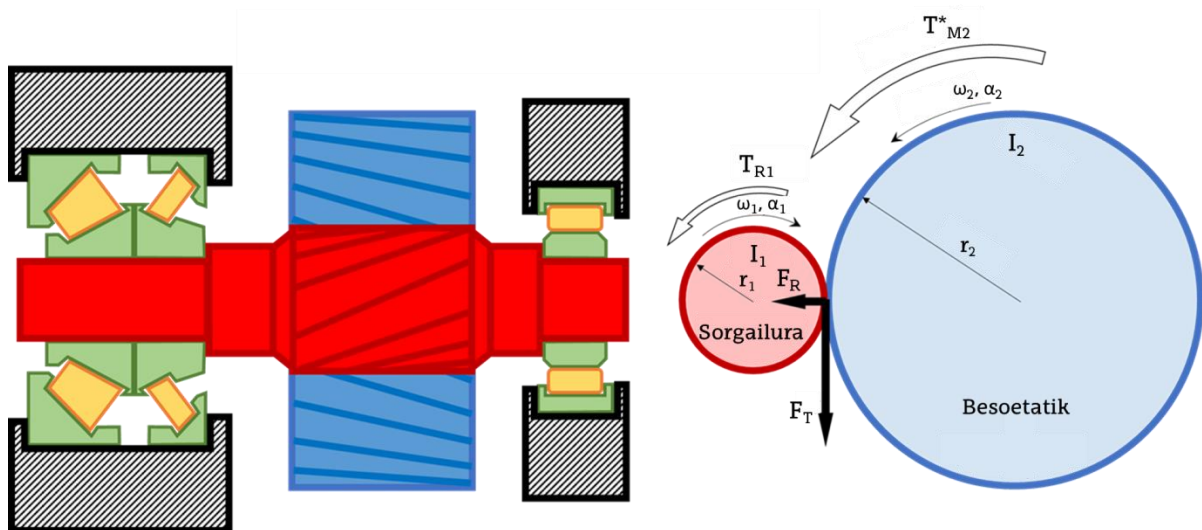
Horrenbestez, errodamenduaren dinamika erradiala eredutzeko, bi sarrera aldagai mota behar dira: denboran zehar jasan behar dituen esfortzu erradialen adierazpenak, eta denboran zehar dagokion ardatzak duen abiadura erregimena. Hauek honako parametroen menpekoak dira:

- T_{M2}^* : 2 ardatzean murriztutako aerosorgailuaren besoek sortutako momentu eragilea.
- T_{R1} : sorgailuak eta erresistentzia pasiboek eragindako 1 ardatzeko momentu erresistentea.
- I_1^* : 1 ardatzean murriztutako ardatzaren beraren eta sorgailuaren inertzia (aurrerantzean, I_1).
- I_2^* : 2 ardatzean murriztutako ardatzaren beraren eta aerosorgailuaren besoetarainoko trenaren inertzia (aurrerantzean, I_2).

Bi engranajeen arteko esfortzuak indar erradialak (F_R) eta ukitzailleak (F_T) zehazten dituzte, hauen arteko erlazioa hortzen presio-angeluak (φ) zehazten duelarik. Hartz zilindriko helikoidaldun engranajeen kasuan, angelu hau itxurazko presio-angeluari dagokio eta, hortzak normalak direnean, 20° balio du. Hau da:

$$F_R = F_T \tan \varphi \quad (40)$$

Bestalde, ardatzei dagozkien abiadura eta azelerazio angeluarrak (ω_1, α_1) eta (ω_2, α_2) dira, hurrenez hurren. 20. irudian, aurkeztutako multzoaren eskema ageri da, irudikatutako indarrak 1 ardatzak jasaten dituen noranzkoan adierazita.



20. irudia. Ardatz azkarreko osagai multzoaren eskema.

Sistema zehaztuta, ardatzen dinamikaren ekuazioak planteatu daitezke:

$$\begin{cases} 1 \text{ ardatza: } T_{R1} - F_T r_1 = -I_1 \alpha_1 \\ 2 \text{ ardatza: } T_{M2}^* - F_T r_2 = I_2 \alpha_2 \end{cases} \quad (41)$$

Ardatzen arteko engranatzeak honako baldintzak inplikatzeko dituzte:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \rightarrow \alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2 \quad (42)$$

Honek guztiak engranatze indarra eta multzoaren zinematika definitzea ahalbidetzen du. (41) eta (42) adierazpenei eraginda:

$$F_T = \frac{\frac{r_1}{I_1} T_{R1} + \frac{r_2}{I_2} T_{M2}^*}{\frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2}} \quad (43)$$

Era berean, 1 ardatzaren azelerazio angeluarra:

$$\alpha_1 = r_2 \frac{T_{R1} r_2 - T_{M2}^* r_1}{I_1 r_2^2 + I_2 r_1^2} \quad (44)$$

Engranatze esfortzuak eta ardatzaren pisu propioa aztergai den errodamenduaren zein pakete konikoaren artean nola banatzen diren kontuan izan behar da. Hau zehatz-mehatz definitzeko analisi sakonagoak egin behar direnez, hasierako parametrizazio posible bezala, errodamendu pakete bakoitzak esfortzu erradialen ehuneko bat jasaten duela kontsideratu da.

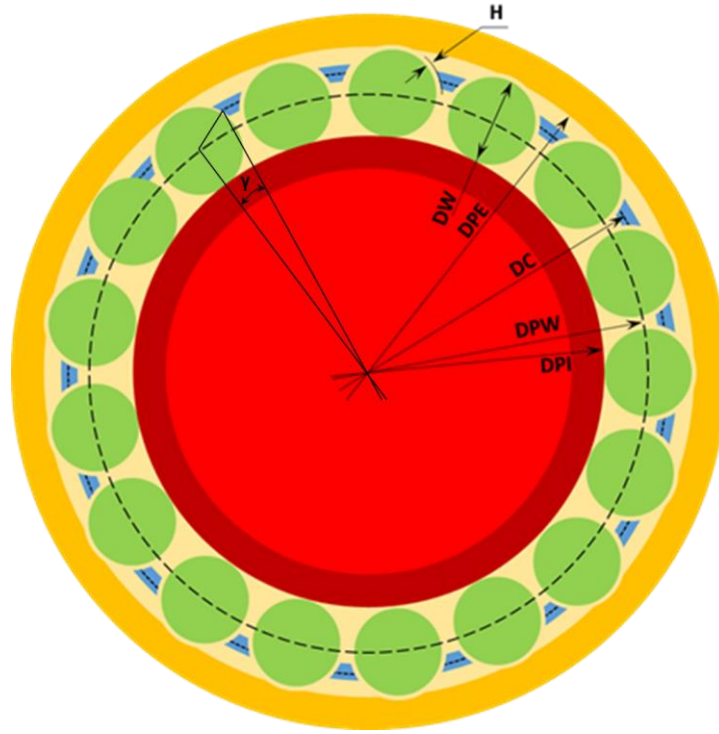
8.2.2. Errodamenduaren parametroak definitzea

Eredutzearekin jarraitzeko, errodamenduaren parametroak definitu dira. Hauek honela taldeka daitezke: dimentsionalak, masikoak eta inertzialak, eta indarrei eta zurruntasunari dagozkienak.

Hasteko, honako parametro dimentsionalak definitu eta 21. irudian adierazi dira:

- Z : arrabola kopurua.
- D_{pi} : barneko eraztunaren diametroa.
- D_{pe} : kanpoko eraztunaren diametroa.
- D_c : kaiolaren batezbesteko diametroa.
- D_{pw} : arrabolen zentroek osatzen duten batezbesteko diametroa.

- D_{wnom} : arrabolen diametro izendatua.
- L_w : arrabolen luzera.
- H : arrabolen eta kaiolaren arteko hasierako lasaiera edo lasaiera normala.
- γ : arrabolen zentroaren eta kaiolaren arteko hasierako angelua.



21. irudia. Errotamenduen parametro dimentsionalak.

γ angelua kalkulatzeko, adierazpen hau ondorioztatu da:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\left(\frac{DPW}{2}\right)^2 + \left(\frac{DC}{2}\right)^2 - \left(\frac{D_{wnom}}{2} + H\right)^2}{\frac{DPW \cdot DC}{2}}\right) \quad (45)$$

Jarraitzeko, parametro masikoak eta inertzialak definitu dira:

- ρ_a : altzairuaren dentsitatea, eraztun eta arrabolentzat.
- ρ_b : brontzearen dentsitatea, kaiolarentzat.
- m_f : barneko eraztunaren masa edo honek eusten duen masa, ardatzaren zati bat ere baitagokio.
- m_r : arrabola bakoitzaren masa.

$$m_r = \rho_a \pi L_w \frac{D_{wnom}^2}{4} \quad (46)$$

- I_r : arrabola bakoitzaren inertzia.

$$I_r = \frac{1}{2} m_r \frac{D_{wnom}^2}{4} \quad (47)$$

- m_c : kaiolaren masa.
- I_c : kaiolaren inertzia, D_c diametroan kontzentratutako masa bailitzan.

$$I_c = m_c \frac{D_c^2}{4} \quad (48)$$

Simulatu nahi den errodamenduaren arabera, parametro hauek errodamendu errealetan neurtu zein datu-baseetatik lortzeko aukera dago. m_r -ren kasua salbuespena da, errodamenduak eusten duen ardatzaren masa zatia zehaztu behar delako. Printzipioz, masa hori ardatzaren masa totalaren ehuneko bat dela kontsidera daiteke. Azkenik, indarrei eta zurruntasunari dagozkien parametroak definitu dira:

- μ_{roz} : marruskadura koefizientea.
- K_i eta N_i : arrabolen eta barneko eraztunaren arteko zurruntasun konstanteak.
- K_e eta N_e : arrabolen eta kanpoko eraztunaren arteko zurruntasun konstanteak.
- K_c eta N_c : arrabolen eta kaiolaren arteko zurruntasun konstanteak.

Zurruntasun konstanteek kontaktuko indar normalen eta deformazioen arteko erlazioak definitzen dituzte:

$$F_N = K \delta^N \quad (49)$$

Marruskadura koefizienteak kontaktuko indar normalen eta marruskadura indar ukitzailen arteko erlazioa ezartzen du. Printzipioz, balio konstantea duela suposa daiteke, baina indar normalaren balioaren eta abiadura erlatiboaren menpekotasuna kontsideratzea ere komeni izan daiteke.

$$F_R = \mu F_N \quad (50)$$

8.2.3. Kalkulu prozedurako aldagaiak zehaztea

Sistemaren ekuazioak zenbakizko metodoen bidez ebazteko, urrats tamaina (dt) eta integrazio denbora tarte (t_{int}) definitu beharra dago. Eskema esplizituek urrats tamaina oso txikiekin lan egingo dutenez, kalkulaturako datu guztiak memorian gordetzea ez da

beharrezkoa, ezta praktikoa ere. Hori dela eta, biltegitratzeko urrats tamaina (dt_{alm}) zehaztu da.

Horrez gain, (23) adierazpenak erakutsi bezala, bi gorputzen arteko kontaktuan marruskadura azaltzen deneko abiadura erlatibo minimoa (dv) ere definitu da. Hau balioztatzeko, aukerarik egokiena kontaktu mota bakoitzerako saiakuntza esperimentalak egitea da. Dena den, hasierako balio bat esleitu eta, simulazioak egin ahala, honen doitasuna egiaztatzea beste aukera bat izan daiteke.

Bestalde, problema ebaztean balioetsi beharreko deribatuak hiru aldiunetako aldagaiekin lortu dira, eskema esplizitua Eulerren metodoaren arabera planteatu dela aintzat hartuta. Hauen artetik, batzuk memorian gordetzen dira eta, horretarako, biltegitratze arau hauek proposatzen dira:

- Urrats bakoitzean erabiltzen diren aldiuneei atzizki bana dagokie:
 - t_{i+1} aldiuneari PAS atzizkia.
 - t_i aldiuneari PRE atzizkia.
 - t_{i+1} aldiuneari FUT atzizkia.
- Biltegitratu beharreko balioak ALM atzizkidun aldagaietan gordetzen dira:
 - PAS, PRE eta FUT aldagaiak eskalarrak badira, elkartutako ALM aldagaiak $1 \times t_{int}/dt_{alm}$ dimentsioko bektoreak dira.
 - PAS, PRE eta FUT aldagaiak bektoreak badira, elkartutako ALM aldagaiak $Z \times t_{int}/dt_{alm}$ dimentsioko matrizeak dira.

Hemendik aurrera, orokorrean aldagaiak izendatu baino ez dira egin, II eranskinean zerrenda xeheagoa eta aldagai bakoitzaren adierazpen analitikoa adierazi direlarik. Horrez gain, koordenatuei, abiadurei zein azelerazioei dagozkien aldagaiek aztertzen den planoko hiru askatasun graduak adierazten dituztela kontsideratu da; x eta y koordenatu linealei, eta θ koordenatu angeluarrari dagozkienak, alegia. Hau errespetatuz, 6 aldagai multzo definitu dira:

- Posizio eta integrazio aldagaiak: denbora absolutua (t), barne eraztunaren zentroaren koordenatuak, kaiolaren zentroaren koordenatuak eta arrabolen zentroen koordenatuak. Koordenatu hauen hasierako balioak egoera jakin batek zehatz ditzake edo, egoera orokor batetik abiatzekotan, nulutzat har daitezke. Arrabolen zentroen posizioak salbuespena izango lirerateke, hasieratik balio ez-nulua

izango bailukete. Hona hemen kasu horretan koordenatuak lortzeko erabili beharreko adierazpenak:

$$\begin{cases} y_k = \frac{D_{pw}}{2} \cos\left((k-1) \frac{360^\circ}{Z}\right) \\ x_k = \frac{D_{pw}}{2} \sin\left((k-1) \frac{360^\circ}{Z}\right) \end{cases} \quad \text{non } k = 1, 2 \dots Z \quad (51)$$

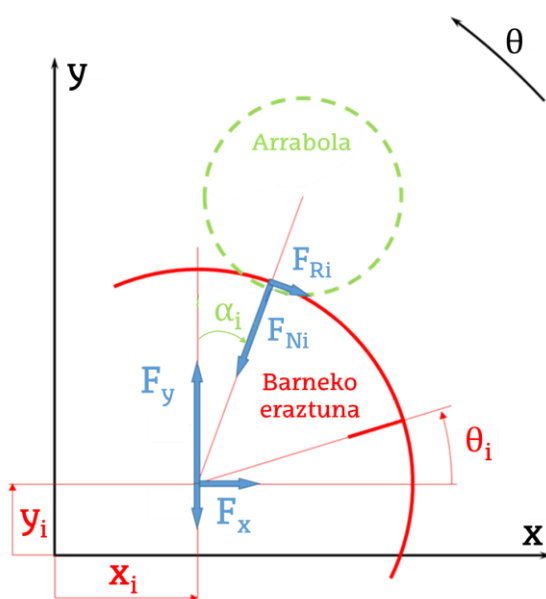
- Indarrak planteatzeko posizio aldagai laguntzaileak: arrabolen eta eraztunen zentroen arteko distantziak, arrabolen eta eraztunen arteko interferentziak, kaiolaren koordenatuak, kaiolaren eta arrabolen zentroen arteko distantziak, eta kaiolaren eta arrabolen arteko interferentziak. Aipatzekoa da kaiolaren koordenatuak arrabolekin kontaktua izan dezaketen kaiolako puntuei dagozkiela, eta interferentzietan lasaiera eta estuera kontsideratzen direla.
- Indarrak eta abiadura erlatiboak planteatzeko aldagai angeluar laguntzaileak: arrabolen eta eraztunen zentroen arteko angelua, arrabolen posizio angeluarrak, eta kaiolako kontaktu puntu posibleen posizio angeluarrak.
- Abiadura erlatiboak planteatzeko abiadura absolutuen aldagai laguntzaileak: barneko eraztunaren abiadura absolutuak, kaiolaren abiadura absolutuak eta arrabolen abiadura absolutuak.
- Indarrak planteatzeko abiadura erlatibo ukitzeailearen aldagai laguntzaileak: eraztunen eta arrabolen arteko abiadura erlatibo ukitzeaileak, eta kaiolaren eta arrabolen arteko abiadura erlatibo ukitzeaileak.
- Indar izaerako aldagaiak: eraztunen eta arrabolen arteko indarrak, eta kaiolaren eta arrabolen arteko indarrak. Multzo bietan, indarren osagai normalak eta ukitzeaileak bereizita formulatu dira.

8.2.4. Dinamikaren ekuazioak formulatzea

Dinamikaren ekuazioak Newtonen metodoaren arabera formulatu dira, aztergai den planoko hiru askatasun graduetan. Hona hemen erabili diren ekuazioen itxura orokorra:

$$\begin{cases} \sum F_x = m\ddot{x} \\ \sum F_y = m\ddot{y} \\ \sum M = I_G\ddot{\theta} \end{cases} \quad (52)$$

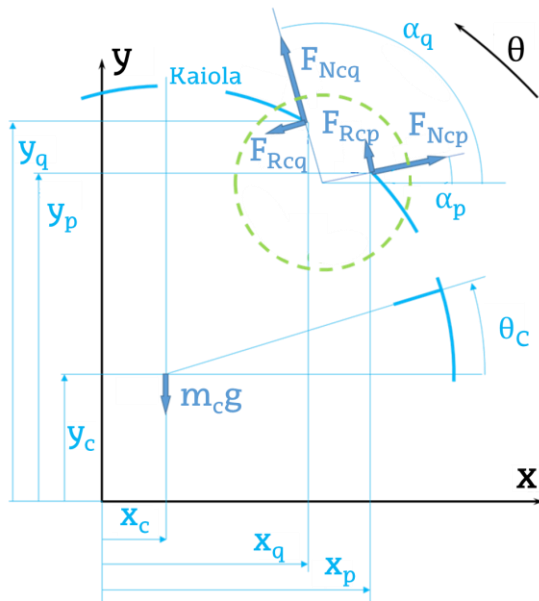
Ekuazio hauek sistemako gorputz bakoitzean aplikatu dira; zehatz esanda, barneko eraztunean, kaiolan eta arraboletan. Kaiolaren eta barneko eraztunaren kasuan, ekuazioetan azaltzen diren batukariek arrabola guztiekin dituzten kontaktuetako indarrak gehitu behar direla adierazten dute. Hasteko, barneko eraztuna aztertu da, solido askearen diagrama 22. irudian izanik.



22. irudia. Barneko eraztunaren solido askearen diagrama.

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = F_x + \sum -F_{Ni} \sin \alpha_i + F_{Ri} \cos \alpha_i \\ m_i\ddot{y}_i = F_y - m_i g - \sum F_{Ni} \cos \alpha_i + F_{Ri} \sin \alpha_i \\ \ddot{\theta} = \alpha \end{cases} \quad (53)$$

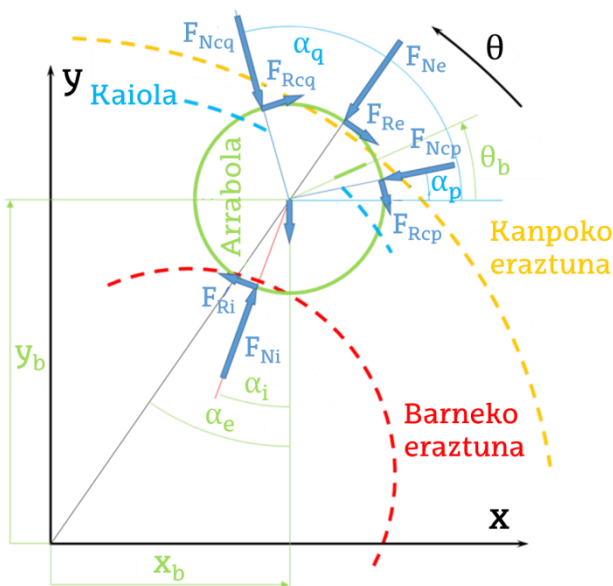
Kaiolaren kasuan, 23. irudian solido askearen diagrama dago eta jarraian ekuazioak planteatu dira:



23. irudia. Kaiolaren solido askearen diagrama.

$$\begin{cases} m_c \ddot{x}_c = \sum F_{Ncp} \cos \alpha_p + F_{Ncq} \cos \alpha_q - F_{Rcp} \sin \alpha_p - F_{Ncq} \sin \alpha_q \\ m_c \ddot{y}_c = -m_c g + \sum F_{Ncp} \sin \alpha_p + F_{Ncq} \sin \alpha_q + F_{Rcp} \cos \alpha_p + F_{Ncq} \cos \alpha_q \\ I_c \ddot{\theta} = \sum -F_{Ncp} y_p \cos \alpha_p + F_{Ncp} x_p \sin \alpha_p + F_{Rcp} y_p \sin \alpha_p + F_{Rcp} x_p \cos \alpha_p + \\ -F_{Ncq} y_q \cos \alpha_q + F_{Ncq} x_q \sin \alpha_q + F_{Rcq} y_q \sin \alpha_q + F_{Rcq} x_q \cos \alpha_q \end{cases} \quad (54)$$

Amaitzeko, 24. irudian arrabola orokor baten solido askearen diagrama dago eta jarraian ekuazioak planteatu dira:



24. irudia. Arrabolen solido askearen diagrama.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_r \ddot{x}_b = \sum F_{Ni} \sin \alpha_i - F_{Ri} \cos \alpha_i - F_{Ne} \sin \alpha_e + F_{Re} \cos \alpha_e + \\ \quad - F_{Ncp} \cos \alpha_p + F_{Rcp} \sin \alpha_p - F_{Ncq} \cos \alpha_q + F_{Rcq} \sin \alpha_q \\ m_r \ddot{y}_b = -m_r g + \sum F_{Ni} \cos \alpha_i + F_{Ri} \sin \alpha_i - F_{Ne} \cos \alpha_e - F_{Re} \sin \alpha_e + \\ \quad - F_{Ncp} \sin \alpha_p - F_{Rcp} \cos \alpha_p - F_{Ncq} \sin \alpha_q - F_{Rcq} \cos \alpha_q \\ I_r \ddot{\theta} = \frac{D_w}{2} (F_{Ri} + F_{Re} + F_{Rcp} + F_{Rcq}) \end{array} \right. \quad (55)$$

8.2.5. Ekuazioak ebazteko eskema esplizitua planteatzea

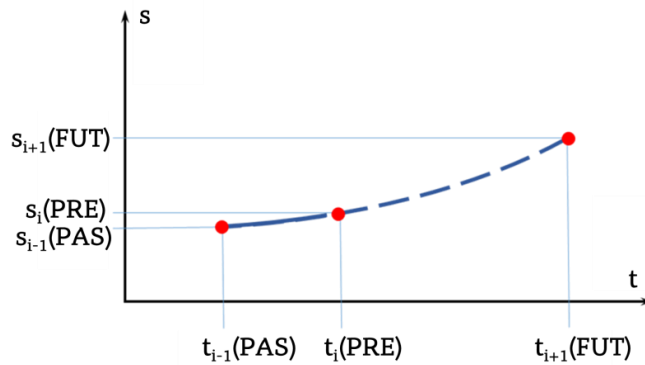
Aipatu bezala, zenbakizko ebazpenerako hautatutako metodoa Eulerren metodoa da. Horrela, t_i (PRE) aldiuneko abiadurak eta azelerazioak kalkulatzeko honako eskema erabili da, s koordenatu orokorraren kasuan:

$$\dot{s}_i = \frac{s_i - s_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad (56)$$

$$\ddot{s}_i = \frac{\frac{s_{i+1} - s_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{s_i - s_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}}{t_{i+1} - t_i} \quad (57)$$

Honen arabera, urrats tamaina desberdinak erabiltzea posiblea da, hau konbergentzia lortzeko beharrianetara egokituz (ikus 25. irudia). Era berean, (57) adierazpenetik s_{i+1} bakan daiteke, higiduraren ekuazioei eraginez, t_i aldiuneko azelerazioa posizioaren eta abiaduraren menpe adieraz badaiteke:

$$s_{i+1} = s_i + (s_i - s_{i-1}) \frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}} + \ddot{s}_i (t_{i+1} - t_i)^2 \quad \text{non} \quad \ddot{s}_i = f(s_i, \dot{s}_i) \quad (58)$$



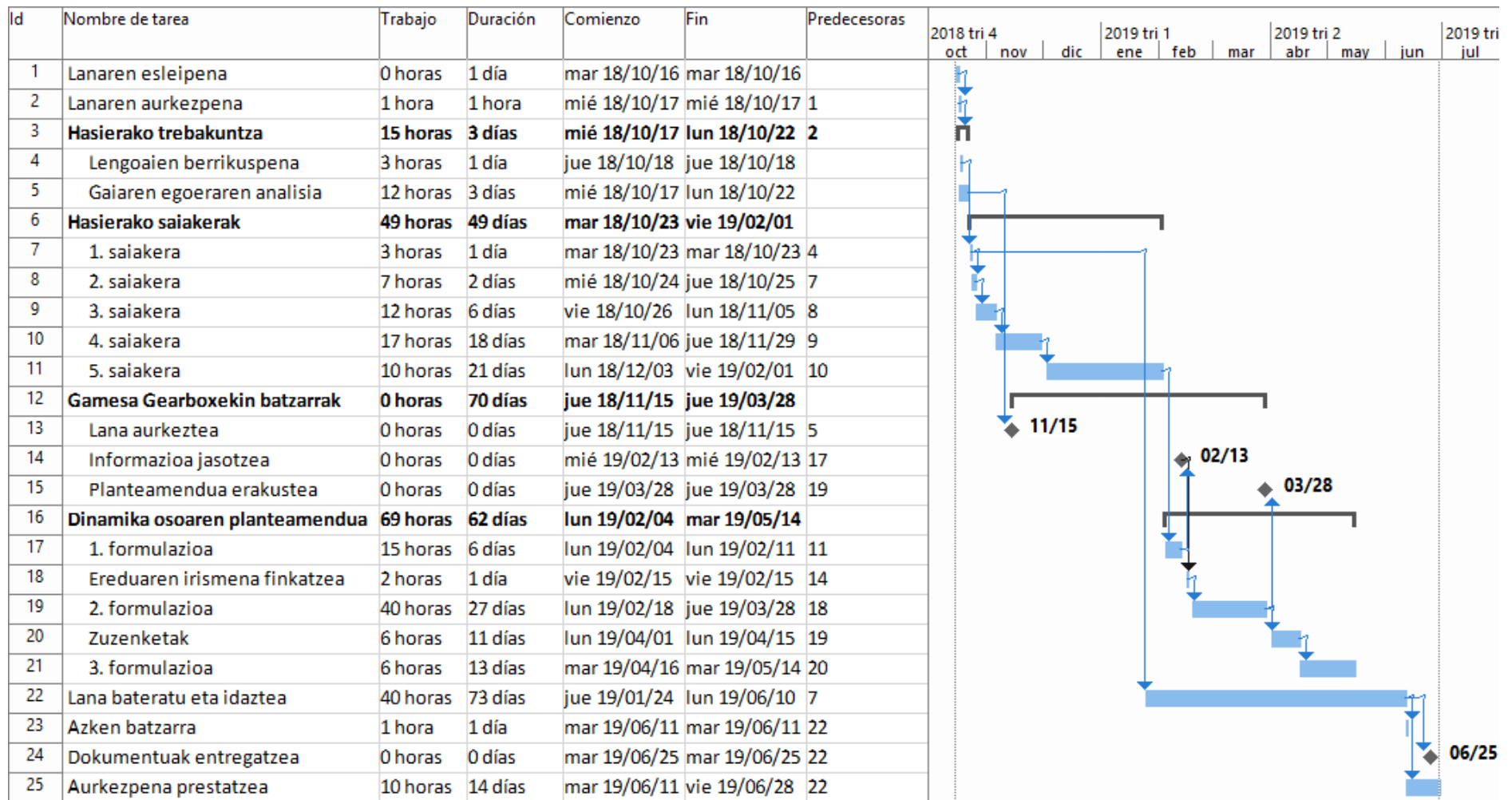
25. irudia. Urrats aldakorreko eskema esplizitua.

9. PLANGINTZA

Atal honetan, lanaren bilakaera nola antolatu den aurkezten da, atazen definizioa eta hauen arteko menpekotasunak adieraziz. Hein handi baten, lanaren eginbeharrak modalitate hauetan sailka daitezke: bibliografiaren azterketa, eredu analitikoaren planteamendua, programazioa, Gamesa Gearbox-ekin kontsulta bilerak eta emaitzen balioztapena. Era berean, lanak lau etapa izan ditu: makinaren eta osagaiaren funtzionamenduaren ulermena, fenomeno fisikoaren deskribapen dinamikoa, fenomeno fisikoaren banakako programazioa eta eredu dinamikoaren formulazio bateratua.

Horrela bada, eginbehar eta etapa hauetan oinarrituta, lanean zeharreko atazak zehaztu eta Microsoft Project softwarean eraturako Gantt diagrama osatu da (ikus 26. irudia). Bertan, atazen arteko menpekotasunak, lanaren iraupena eta mugarriak ere aintzat hartu dira. Mugarriak gehien bat Gamesa Gearbox-ekin izandako batzarrak izan dira, hauetara aurkeztu beharreko lana prestatuta eraman behar izan baita. Hauei Bilboko Ingeniaritza Eskolan idazkaritzako tramiteak egiteko epemugak gehitu zaizkie.

Azkenean, lana 2018ko urriaren 16an lana esleitu zenetik 2019ko ekainaren 25ean idazkaritzako tramiteak egiten hasi arte gauzatu da. Hau da, 253 egunetako iraupena izan du eta 185 ordutako lana izan duela estimatzen da. Eskolak ezarritako jaiegunetan eta azterketa garaian, ez zaio astirik eskaini eta, ikasturtean zehar, aktibitate handiagoko eta arinagoko aldiak izan dira.



26. irudia. Lanaren Gantt diagrama, Microsoft Project softwarean lortua.

10.GASTUEN AITORPENA

Lan honen gastuak zenbatesteko hiru kontu sail berezi dira: barne-orduak, amortizazioak eta gastuak. Lehenengoan, ingeniaritza eta programazio orduak desberdin daitezke, ingeniaritza izendapena diseinu eta planteamendu atazei dagokiari. Bigarrenean, erabilitako ekipo informatikoak eta softwareak daude. Nahiz eta programazioa GNU Octave zein Matlab-en gara daitekeen, Ingeniaritza Mekanikoa Saileko Kalkulu Zentroan Matlab instalatuta dagoenez, beronekin lan egin da. Azkenik, hiru gastu mota izan ditu proiektu honek: bulegoko materiala, energia elektrikoaren kontsumoa eta Gamesa Gearbox-en Zamudioko bulegoetara egindako bidaiak. Honen guztiaren islada da 2. taulako gastuen laburpena:

2. taula. Gastuen aitorpena.

Kontzeptua	Kopurua	Prezioa	Bizitza erabilgarria	Kostu unitarioa	Kostua
Barne-orduak					
Ingeniaritza orduak	100 h			30 €/h	3000,00 €
Programazio orduak	85 h			24 €/h	2040,00 €
Amortizazioak					
Ordenagailu pertsonala	117 h	549,00 €	6 urte	0,010 €/h	1,22 €
Kalkulu zentrok ordenagailua	164 h	1500,00 €	6 urte	0,029 €/h	4,68 €
Microsoft Office 365	142,5 h	154,80 €	1 urte	0,018 €/h	2,52 €
Matlab	181 h	800,00 €	1 urte	0,091 €/h	16,53 €
Gastuak					
Bulegoko materiala					8,00 €
Elektrizitatea	0,33 kW			0,12 €/kWh	11,13 €
Bidaiak	6 bidaiak			1,95 €/bidaiak	11,70 €
Guztira					5095,78 €

Gastuen guztizkoaren %98,9 barne-orduei dagokio, beste ingeniartza eta programazio lanetan gertatu ohi den bezala. Izan ere, gastu materialen eta baliabide informatikoen zatiak ez dira oso esanguratsuak, lanak alderdi esperimentalik ez duela eta aukeratutako tresna informatikoak errentagarriak direla agerian utziz.

11. ONDORIOAK

Lan honetan ateratako ondorio nagusiak honakoak dira:

- Biderkatzaile eolikoetako errodamenduen dinamikan eragiten duten fenomenoak modu bereizian integrazio esplizitu bidez ebaztea bideragarria dela erakutsi da.
- Aldiune bakoitzean, eragina duten fenomenoek ezaugarriek konbergentzia lortzeko urrats tamaina baldintzatzen dutela behatu da.
- Murrizketa geometrikoak aljebraikoki txertatzeak urrats nabarmen txikiagotzea eta, ondorioz, konputazio kostua asko areagotzea inplikutzen du, beste aukera batzuk hobetsi behar izanik.
- Eredu bateratuaren planteamendu analitikoak banan-banakako analisisietako programazio metodologiarekin jarraitzea ahalbidetzen du.

Hasteko, Newtonen ekuazioen bidez errodamenduetan azaltzen diren zenbait fenomeno dinamiko analitikoki deskribatu eta esplizituki integratzeko eskemak osatu dira. Honek errodamenduen simulazioan erabili beharreko formulazioak eta tresnak garatzea ahalbidetu du, beti ere ondoren GNU Octave eta Matlab inguruneetan programatzeko aukera gogoan edukiz. Planteamendu honen bideragarritasuna kasu sinpleen bidez egiaztatu da; arazo dinamikoa Eulerren metodoaren bidez ebatzita, aztertutako egoeretan konbergentzia lortzeko 10^{-7} - 10^{-8} s inguruko urrats tamaina behar dela behatuz. Eredu bateratua sistema erreal bati aplikatzean, urrats tamaina nabarmen txikiagotu beharko dela aurreikusten da, talka kopurua eta gorputzen zurruntasunak handiagoak izango baitira.

Analisi hauetan, aldiune bakoitzean eragiten duten fenomenoek aniztasunak eta hauen intentsitateak problemak konbergitzeko behar den urrats tamaina baldintzatzen dute. Batez ere, aztertutako kasuetan urrats tamaina txikiena eskatzen duten fenomenoak talkak eta, bereziki, talka anizkoitzak dira. Azken baten, egoera hauetan azaltzen diren kontaktu indar, deformazio eta aldagai zinematikoen aldaketak oso bortitzak izaten dira, aldiune batetik bestera balio aldakuntza handiak jasanez. Aldakuntza horiek behar bezala lantzeko, oreka dinamikoa sarriago aztertu beharra dago eta hau urrats tamainarekin zuzenki lotuta dago. Hau guztia dela eta, urrats tamaina aldakorreko algoritmoek abantailak dauzkate, bai aipatutako egoeretan urrats tamaina txikiagotzeko, bai aldakuntza gutxiko tartetean handiagotzeko.

Era berean, denboran zehar birplanteatu beharreko murrizketa geometrikoak aintzat hartzeko, hasiera baten probleman murrizketa aljebraikoak txertatzea kontsideratu da. Dena den, honek ebazpenean konbergentzia lortzeko konputazio kostua nabarmen handiagotzea eragiten duenez, beste aukeraren bat bilatzea onuragarria izan daitekeela egiaztatu da. Horren harira, errodamenduen kasuan murrizketa geometrikoen bidez eredutzekoa zen kaiola gorputz gisa aztertu da, gainerako gorputzekin dituen elkarrekintzak eta beronen dinamikaren ekuazioak ebatzita, murrizketa aljebraiko bezala tratatu beharra saihestuz.

Egokitzapen eta doikuntza prozesu honi esker, eredu bateratua planteatzeko irizpideak eta tresnak eraiki dira. Horrela, hasierako analisi bakunetatik errodamendu osoaren dinamika eredutzera jo da, formulazio orokorragoak eta adierazpen bektorialak nagusituz. Hau programatu ez arren, ereduaren planteamendua aurreragoko programazio lanetarako eroso eta eraginkorra izan dadila lortu nahi izan da. Hori dela eta, problema dinamikoaren aldagaiak eta ebazpen eskema bateratzen dituen terminologia erabili da, programatzeko jarraibide batzuk proposatzearekin batera.

Nahiz eta lan honetan zenbakizko metodoen hautaketa ez den jorratu, errodamendu osoaren dinamika simulatuko duen programa optimizatzeko, Eulerren metodoaren ordeztu ordena altuagoko metodoak inplementa litezke. Esaterako, bibliografian horrenbeste erabiltzen den 4. ordenako Runge-Kutta eskemarekin hobekuntzak lor litezke.

Azken baten, lan hau ikerketa lerro baten hastapena da eta lortutako emaitzak erdibideko produktu baino ez dira. Aurrerantzean egin dakioken jarraipenak ekarpen praktikoagoak izango lituzkeela bistakoa da, eta lan hau horien guztien oinarri izateko garatu da. Bestalde, lantzean behin Gamesa Gearbox-i lorpenak erakutsi eta beraien ikuspuntua ezagutzeak egindakoari sostengua ematen dio. Izan ere, sektore eolikoan errodamenduei buruzko ikerketak eta hauen portaera eredutzeko baliabideak ongiatorriak dira.

Honekin guztiarekin ikerketa lerroarekin jarraitzeko aukera dagoela behatzen da. Alde batetik, alderdi teknikoei dagokienez, hautatutako metodologia bideragarria da eta eredu bateratuari etorkizun oparoa begitantzen zaio. Bestetik, lan hau zentratu den sektorea egungo industrian estrategikoa da eta, gainera, ezarritako oinarriak beste makina osagai batzuetara hedatzeko aukera ere ez da baztertzekoa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Van Kuik, B. Ummels eta R. Hendriks, "Perspectives on wind energy", *Sustainable Energy Technologies: Options and Prospects*, K. Hanjali, R. Van de Krol eta A. Leki, 2008. DOI: 10.1007/978-1-4020-6724-2_4.
- [2] I. Komusanac *et al.*, "Wind energy in Europe in 2018. Trends and statistics", Wind Europe Business Intelligence, Wind Europe, ots., 2019.
- [3] A. Nghiem *et al.*, "Wind energy in Europe: Outlook to 2020", Wind Europe Business Intelligence, Wind Europe, ira., 2017.
- [4] A. Nghiem eta I. Pineda, "Wind energy in Europe: Scenarios for 2030", Wind Europe, ira., 2017.
- [5] A. Ragheb eta M. Ragheb, "Wind turbine gearbox technologies", *1st International Nuclear & Renewable Energy Conference (INREC), Amman, Jordania, mar. 21-24, 2010*, IEEE. Eskuragarri: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5462549>.
- [6] H. Al-Hamadani *et al.*, "System dynamic modelling of three different wind turbine gearbox designs under transient loading conditions", *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 18 bol., 11 zk., 1659-1668 orr., 2017. Eskuragarri: <https://search.proquest.com/docview/1962632053>. DOI: 10.1007/s12541-017-0194-1.
- [7] C. Angulo *et al.*, *Elementos De Máquinas*. Bilbao: Publicaciones - Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2007.
- [8] Robert Errichello eta Jane Muller, "Application requirements for wind turbine gearboxes", Geartech, National Renewable Energy Laboratory (NREL), Albany, California, ira., 1994.
- [9] G. Lundberg eta A. Palmgren, "Dynamic Capacity of Rolling Bearings", *Acta Polytechnica, Mechanical Engineering Series*, 1 bol., 3 zk., 1947.
- [10] A. B. Jones, "A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings Under Arbitrary Load and Speed Conditions", *Journal of Basic Engineering*, 82 bol., 2 zk., 309 orr., 1960. DOI: 10.1115/1.3662587.
- [11] T. A. Harris, "An Analytical Method to Predict Skidding in Thrust-Loaded, Angular-Contact Ball Bearings", *Journal of Lubrication Technology*, 93 bol., 1 zk., 17-23 orr., 1971. DOI: 10.1115/1.3451511.

- [12] T. A. Harris, "Ball Motion in Thrust-Loaded, Angular Contact Bearings With Coulomb Friction", *Journal of Lubrication Technology*, 93 bol., 1 zk., 32-38 orr., 1971. DOI: 10.1115/1.3451525.
- [13] R. J. Boness eta C. R. Gentle, "Ball motion in thrust loaded ball bearings", *Wear*, 35 bol., 1 zk., 131-148 orr., 1975. Eskuragarri: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0043164875901489>. DOI: 10.1016/0043-1648(75)90148-9.
- [14] F. Hirano, "Motion of a Ball in Angular-Contact Ball Bearing", *A S L E Transactions*, 8 bol., 4 zk., 425-434 orr., 1965. DOI: 10.1080/05698196508972112.
- [15] P. S. Kliman, "High-speed ball bearings. Limitation and thrust requirements", *Wear*, 8 bol., 2 zk., 150 or., 1965.
- [16] C. Bujoreanu, S. Cretu eta D. Nelias, "Scuffing Behaviour in Angular Contact Ball Bearings", *The Annals of University Dunarea De Jos of Galati*, 2003.
- [17] N. T. Liao eta J. F. Lin, "Ball Bearing Skidding Under Radial and Axial Loads", *Mechanism and Machine Theory*, 37 bol., 1 zk., 91-113 orr., urt., 2002. DOI: 10.1016/S0094-114X(01)00066-0.
- [18] C. T. Walters, "The Dynamics of Ball Bearings", *Journal of Lubrication Technology*, 93 bol., 1 zk., 1-10 orr., 1971. DOI: 10.1115/1.3451516.
- [19] P. K. Gupta, "Transient Ball Motion and Skid in Ball Bearings", *Journal of Lubrication Technology*, 97 bol., 2 zk., 261 orr., 1975. DOI: 10.1115/1.3452568.
- [20] L. Chang, C. Cusano eta T. F. Conry, "Analysis of High-Speed Cylindrical Roller Bearings Using a Full Elastohydrodynamic Lubrication Model. Part 1: Formulation", *Tribology Transactions*, 33 bol., 2 zk., 274-284 orr., 1990. DOI: 10.1080/10402009008981956.
- [21] L. Chang, T. F. Conry eta C. Cusano, "Analysis of High-Speed Cylindrical Roller Bearings Using a Full Elastohydrodynamic Lubrication Model. Part 2: Results", *Tribology Transactions*, 33 bol., 2 zk., 285-291 orr., 1990. DOI: 10.1080/10402009008981957.
- [22] C. R. Meeks eta L. Tran, "Ball Bearing Dynamic Analysis Using Computer Methods- Part I: Analysis", *Journal of Tribology*, 118 bol., 1 zk., 52 or., 1996. DOI: 10.1115/1.2837092.

- [23] L. Houpert, "CAGEDYN: A Contribution to Roller Bearing Dynamic Calculations. Part I: Basic Tribology Concepts", *Tribology Transactions*, 53 bol., 1 zk., 1-9 orr., 2009. DOI: 10.1080/10402000903132093.
- [24] L. Houpert, "CAGEDYN: A Contribution to Roller Bearing Dynamic Calculations. Part II: Description of the Numerical Tool and Its Outputs", *Tribology Transactions*, 53 bol., 1 zk., 10-21 orr., 2009. DOI: 10.1080/10402000903132101.
- [25] S. Jain eta H. Hunt, "A dynamic model to predict the occurrence of skidding in wind-turbine bearings", *Journal of Physics: Conference Series*, 305 bol., 2011. DOI: 10.1088/1742-6596/305/1/012027.
- [26] S. Jain, "Skidding and Fault Detection in the Bearings of Wind-Turbine Gearboxes", Doktorego tesia, Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge, 2012.
- [27] W. Tu, Y. Shao eta C. Mechefske, "An analytical model to investigate skidding in rolling element bearings during acceleration", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26 bol., 8 zk., 2451-2458 orr., 2012. Eskuragarri: <https://search.proquest.com/docview/1037771248>. DOI: 10.1007/s12206-012-0627-9.
- [28] Q. Han, X. Li eta F. Chu, "Skidding behavior of cylindrical roller bearings under time-variable load conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, 135 bol., 203-214 orr., 2018. Eskuragarri: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740317312456>.
- [29] E. Laniado-Jácome, J. Meneses-Alonso eta V. Diaz-López", "A study of sliding between rollers and races in a roller bearing with a numerical model for mechanical event simulations", *Tribology International*, 43 bol., 11 zk., 2175-2182 orr., 2010. Eskuragarri: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301679X10001684>.
- [30] A. Daidié, Z. Chaib eta A. Ghosn, "3D Simplified Finite Elements Analysis of Load and Contact Angle in a Slewing Ball Bearing", *Journal of Mechanical Design*, 130 bol., 8 zk., 2008. DOI: 10.1115/1.2918915.
- [31] J. H. Rumbarger, E. G. Filetti eta D. Gubernick, "Gas Turbine Engine Mainshaft Roller Bearing-System Analysis", *Journal of Lubrication Technology*, 95 bol., 4 zk., 401 or., 1973. DOI: 10.1115/1.3451843.

- [32] J. Pirvics eta R. J. Kleckner, "Prediction of ball and roller bearing thermal and kinematic performance by computer analysis", SKF Industries Inc., Filadelfia, urt., 1983. Eskuragarri: <http://www.dtic.mil/docs/citations/ADP000709>.
- [33] E. V. Lens eta A. Cardona, "Esquemas de Integración Temporal para Sistemas Multicuerpos con Restricciones", *Mecánica Computacional*, 21 bol., 1569-1590 orr., urr., 2002.
- [34] A. Cardona, "An Integrated Approach to Mechanism Analysis", Doktorego tesia, Faculté de Sciences Appliquées, Université de Liège, Lieja, 1989.
- [35] H. M. Lankarani eta P. E. Nikravesh, "A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems", *Journal of Mechanical Design*, 112 bol., 3 zk., 369 or., 1990. DOI: 10.1115/1.2912617.
- [36] H. M. Lankarani eta P. E. Nikravesh, "Continuous Contact Force Models for Impact Analysis in Multibody Systems", *Nonlinear dynamics*, 5 bol., 2 zk., 193-207 orr., mar., 1994. DOI: 10.1007/BF00045676.

IERANSKINA

o 1. ataza:

```
1 % m masako eta R erradioko gorputza H altueran geldiuonetik askatu
2 %Sarrerako datuak: H, g grabitate, dt denbora urratsa, tf iraupena
3 clear
4 clc
5 hold off
6 g=10; % m/s^2
7 H=10; %m
8 dt=0.01 ; % s
9 tf=1; %s
10
11 format long
12 ptkop=tf/dt+2; % balioztapen kopurua
13 y=zeros(ptkop,4); % datuen bektorea:
14 % (t denbora, y posizioa, y' abiadura, y'' azelerazioa)
15 % Hastapen baldintzak:
16 y(1,2)=H;
17 y(2,2)=H;
18 y(:,1)=-dt:dt:tf; % denboraren zutabea
19
20 % Aldagai zinematikoen balioespenak:
21 for j=3:ptkop;
22 y(j,2)=-g*dt^2+2*y(j-1,2)-y(j-2,2);
23 y(j,3)= (y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
24 y(j-1,4)= (y(j,2)-2*y(j-1,2)+y(j-2,2))/(dt^2); %errenkada bat beranduago
25 end
26
27 % Emaitzak irudikatzea:
28 % Posizioa:
29 figure(1)
30 hold on
31 plot(y(:,1),y(:,2))
32 plot(y(:,1),-H*ones(ptkop,1))
33 xlabel("t (s)")
34 ylabel("y (m)")
35 legend("y","lur lerroa")
36
37 % Abiadura eta azelerazioa:
38 figure(2)
39 hold on
40 plot(y(:,1),y(:,3))
41 plot(y(2:end-1,1),y(2:end-1,4))
42 xlabel("Denbora")
43 ylabel("y',y''")
44 legend("y'", "y''")
45
46 save('datuak.mat','y')
```

o 2. ataza:

```
1 % Bola erortzen utzi eta honek bote egin
2 % m masa, g grabitatea, R erradioa, H altuera, Ce itzultze koef.,
3 % k zurruntasuna, n Lankarani-Nikravesch ereduko koef.,
4 % dt denbora urratsa, tf iraupena
5
```

```

6 clear
7 clc
8
9 m=0.1; %kg
10 g=10; % m/s^2
11 R=0.005 ; %m
12 H=0.01; %m
13 Ce=0.9; %-
14 k=6*10^6; %N/m^1.5
15 n=1.5; %-
16 dt=10^-3 ; % s
17 tf=0.5; %s
18
19 format long
20 ptkop=int64(tf/dt+2); % balioztapen kopurua
21 y=zeros(ptkop,4); % datuen matrizea:
22 % (denbora, posizioa, abiadura, azelerazioa)
23 % Hastapen baldintzak: y(1,2)=0; y(2,2)=0; y(1,3)=0; y(2,3)=0;
24
25 y(:,1)=linspace(-dt,tf,ptkop); % denbora bektorea
26 j=3;
27 F=0;
28
29 % Aldagai zinematikoen balioespenak:
30 while j<=ptkop;
31
32 y(j,2)=(F/m-g)*dt^2+2*y(j-1,2)-y(j-2,2); %aske balego moduan
33
34 if y(j,2)>=R-H; %aske badago
35 F=0;
36 y(j,3)=(y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
37 y(j-1,4)=(y(j,2)-2*y(j-1,2)+y(j-2,2))/(dt^2); %errenkada bat beranduago
38 j=j+1;
39 lehen=1;
40
41 elseif y(j,2)<R-H ; %kontaktua badago
42
43 if lehen==1; %kontaktuko lehen aldiunea
44 lehen=0;
45 vmin=y(j-1,3) ;
46 y(j,3)=(y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
47 d=R-H-y(j,2); %deformazioa edo sartzea
48 F=(k*d^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*y(j,3)/vmin); %L-N eredua
49 y(j,2)=(F/m-g)*dt^2+2*y(j-1,2)-y(j-2,2); % posizioa zuzendu
50 y(j,3)=(y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
51 y(j-1,4)=(y(j,2)-2*y(j-1,2)+y(j-2,2))/(dt^2); %errenkada bat beranduago
52 F=(k*d^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*y(j,3)/vmin);
53 j=j+1;
54 elseif lehen==0 ; %kontaktuko aldiuneak, lehena salbu
55 y(j,3)=(y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
56 d=R-H-y(j,2); %deformazioa edo sartzea
57 F=(k*d^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*y(j,3)/vmin); %L-N eredua
58 y(j,2)=(F/m-g)*dt^2+2*y(j-1,2)-y(j-2,2); % posizioa zuzendu
59 y(j,3)=(y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
60 y(j-1,4)=(y(j,2)-2*y(j-1,2)+y(j-2,2))/(dt^2); %errenkada bat beranduago
61 F=(k*d^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*y(j,3)/vmin);
62 j=j+1;
63
64 end
65 end

```

```

66 end
67
68 % Emaitzak irudikatzea:
69 % Posizioa:
70 figure(1)
71 hold on
72 plot(y(:,1),y(:,2))
73 plot(y(:,1),-H*ones(ptkop,1))
74 plot(y(:,1),-R*ones(ptkop,1))
75 xlabel("Denbora")
76 ylabel("y")
77 legend("y","lur lerroa","R altuerako lerroa")
78 grid on
79 % Abiadura:
80 figure(2)
81 hold on
82 plot(y(:,1),y(:,3))
83 xlabel("Denbora")
84 ylabel("y'")
85 grid on
86 % Azelerazioa:
87 figure(3)
88 hold on
89 plot(y(2:end-1,1),y(2:end-1,4))
90 xlabel("Denbora")
91 ylabel("y''")
92 grid on
93
94 save('datuak.mat','y')

```

o 3. ataza:

```

1 % Bola erori eta bote egin, hasierako abiadura horizontalarekin
2 % m masa, g grabitatea, R erradioa, H altuera, Ce itzultze koef.,
3 % k zurruntasuna, n Lankarani-Nikravesh ereduko koef.,
4 % dt denbora urratsa, tf iraupena, v hasierako ab. horizontala
5 % u marruskadura koef., dvrel ab. erl. min., ur normalaren desfasea
6
7 clear
8 clc
9
10 %Datuak
11 m=0.1; %kg
12 g=10; % m/s^2
13 R=0.005 ; %m
14 H=0.01; %m
15 Ce=0.9; %-
16 k=6*10^6; %N/m^1.5
17 n=1.5; %-
18 dt=10^-6 ; % s
19 tf=1; %s
20 v=0.2; %m/s
21 u=0.15; %-
22 dvrel=0.001; % m/s
23 ur=10^-4; % m
24 I=2/5*m*R^2; %kg·m^2
25 mar=10; % Marraztutako aldiune kopurua
26 anim=2; % Animazio kopurua
27

```

```

28 format long
29 ptkop=round(tf/dt+2); % balioztapen kopurua
30 y=zeros(ptkop,10); % datuen matrizea:
31 % (t, y, y', y'', x, x', x'', q, q', q'')
32 % Hastapen baldintzak: Y: y(1,2)=0; y(2,2)=0; y(1,3)=0; y(2,3)=0;
33 % X: y(1,5)=-v*dt; y(2,5)=0; y(1,6)=v; y(2,6)=v;
34 % Q: y(1,8)=0; y(2,8)=0; y(1,9)=0; y(2,9)=0;
35
36 y(1,5)=-v*dt;
37 y(1,6)=v;
38 y(2,6)=v;
39 Fn=0;
40 Fr=0;
41 y(:,1)=linspace(-dt,tf,ptkop); % denbora zutabea
42 j=3;
43 lehen=1;
44
45 % Aldagai zinematikoen balioespena:
46 while j<=ptkop;
47
48 y(j,2)=(Fn/m-g)*dt^2+2*y(j-1,2)-y(j-2,2); %aske balego moduan
49
50 if y(j,2)>=R-H; %aske badago
51
52 Fn=0;
53 Fr=0;
54 %Y:
55 y(j,3)=(y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
56 y(j-1,4)=(y(j,2)-2*y(j-1,2)+y(j-2,2))/(dt^2);
57 %errenkada bat beranduago
58 %X:
59 y(j,5)=2*y(j-1,5)-y(j-2,5);
60 y(j,6)=(y(j,5)-y(j-1,5))/dt;
61 y(j-1,7)=(y(j,5)-2*y(j-1,5)+y(j-2,5))/(dt^2);
62 %errenkada bat beranduago
63 %Q:
64 y(j,8)=2*y(j-1,8)-y(j-2,8);
65 y(j,9)=(y(j,8)-y(j-1,8))/dt;
66 y(j-1,10)=(y(j,8)-2*y(j-1,8)+y(j-2,8))/(dt^2);
67 %errenkada bat beranduago
68
69 j=j+1;
70 lehen=1;
71
72 elseif y(j,2)<R-H ; %kontaktua badago
73
74
75 if lehen==1; %kontaktuko lehen aldiunea
76 lehen=0;
77 vmin=y(j-1,3) ;
78 end;
79
80 %Y:
81 y(j,3)=(y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
82 d=R-H-y(j,2); %Deformazioa edo sartzea
83 Fn=(k*d^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*y(j,3)/vmin); % L-N eredua
84 y(j,2)=(Fn/m-g)*dt^2+2*y(j-1,2)-y(j-2,2); % posizioa zuzendu
85 y(j,3)=(y(j,2)-y(j-1,2))/dt;
86 y(j-1,4)=(y(j,2)-2*y(j-1,2)+y(j-2,2))/(dt^2);
87 %errenkada bat beranduago

```



```

88 Fn=(k*d^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*y(j,3)/vmin);
89 %X:
90 vrel=y(j-1,6)+ y(j-1,9)*R;
91 if abs(vrel)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
92 Fr=sign(vrel)*u*Fn;
93 elseif abs(vrel)< dvrel;
94 Fr=0;
95 %Jada ez da talka, lurrean errodatzen ari da.
96 end;
97 y(j,5)=-Fr/m*dt^2+2*y(j-1,5)-y(j-2,5);
98 y(j,6)=(y(j,5)-y(j-1,5))/dt;
99 y(j-1,7)= (y(j,5)-2*y(j-1,5)+y(j-2,5))/(dt^2);
100 %errenkada bat beranduago
101 %Q:
102 if sign(y(j-1,9))==0;
103 a=1;
104 elseif sign(y(j-1,9)) ~= 0;
105 a=-sign(y(j-1,9));
106 end;
107 y(j,8)=(a*ur*Fn-Fr*R)/I*dt^2+2*y(j-1,8)-y(j-2,8);
108 y(j,9)=(y(j,8)-y(j-1,8))/dt;
109 y(j-1,10)= (y(j,8)-2*y(j-1,8)+y(j-2,8))/(dt^2);
110 %errenkada bat beranduago
111
112 j=j+1;
113 end
114 end
115
116 % Emaitzak irudikatzea:
117 % Posizioaren animazioa:
118 for j=1:anim;
119 figure(1)
120 hold on
121 h1=plot(y(:,5),y(:,2));
122 h2=plot(y(:,5),-H*ones(ptkop,1));
123 h3=plot(y(:,5),-(H-R)*ones(ptkop,1));
124 xlabel("x")
125 ylabel("y")
126
127 xlabel("x")
128 ylabel("y")
129
130 grid on
131 for n=1:round(ptkop/mar):ptkop;
132 theta = linspace(0,2*pi);
133 xx1 = R*cos(theta) + y(n,5);
134 yy1 = R*sin(theta) + y(n,2);
135
136 xx2=[0,R*cos(y(n,8))]+y(n,5);
137 yy2=[0,R*sin(y(n,8))]+y(n,2);
138 h4=plot(xx1, yy1,'r', xx2, yy2,'r');
139 axis equal
140 pause(0.1)
141 end;
142 if j ~=anim;
143
144 clf(figure(1))
145 end;
146 end;
147 legend("y","lur lerroa","R altuerako lerroa")

```

```

148
149 % Abiadurak:
150 figure(2)
151 hold on
152 plot(y(:,1),y(:,3))
153 plot(y(:,1),y(:,6))
154 plot(y(:,1),y(:,9)/100)
155 legend("y'", "x'", "q'")
156 xlabel("Denbora")
157 ylabel("Abiadura")
158 grid on
159 % Azelerazioak:
160 figure(3)
161 hold on
162 plot(y(2:end-1,1),y(2:end-1,4))
163 plot(y(2:end-1,1),y(2:end-1,7))
164 plot(y(2:end-1,1),y(2:end-1,10)/10000)
165 legend("y'", "x'", "q'")
166 xlabel("Denbora")
167 ylabel("Azelerazioa")
168 grid on
169 % Posizioak:
170 figure(4)
171 hold on
172 plot(y(:,1),y(:,2))
173 plot(y(:,1),y(:,5))
174 plot(y(:,1),y(:,8)/100)
175 legend("y", "x", "q")
176 xlabel("t(s)")
177 ylabel("Posizioa")
178 grid on

```

o 4. ataza:

```

1 % Bola bi erortzen utzi, eta euren artean eta hormekin kontaktuak
2 % m masa, g grabitatea, R erradioa,
3 % X1,X2,Y2,Y1 hasierako koordinatuak, Ce itzultze koef.,
4 % kh hormen kontaktuen zurruntasuna, kb bolen arteko kontaktuaren zur.,
5 % n Lankarani-Nikravesh ereduko koef.,
6 % dt denbora urratsa, tf iraupena,
7 % u marrusk. koef., dvrel abiadura erl. min., ur normalaren desfasea
8
9 clear
10 clc
11
12 % Datuak:
13 m=0.1; %kg
14 g=10; % m/s^2
15 R=0.005 ; %m
16 L=6*R; %m
17 X1=0.015; %m
18 Y1=0.02; %m
19 X2=0.02; %m
20 Y2=0.04; %m
21 Ce=0.9; %-
22 kh=6*10^6; %N/m^1.5
23 kb=3*10^6; %N/m^1.5
24 n=1.2; %-
25 dt=10^-8; % s

```

```

26 tf=0.8; %s
27 u=0.15; %-
28 dvrel=0.0001; % m/s
29 ur=10^-4; % m
30 I=2/5*m*R^2; %kg·m^2
31 mar=700; % marraztutako aldiune kopurua
32 anim=1; % animazio kopurua
33 tarte=0; % Figure(1)-eko itxaronaldia
34
35 format long
36 ptkop=round(tf/dt+2); % balioztapen kopurua
37 b1=zeros(ptkop,10); % 1. bolaren aldagaiak:
38 % (t, x, x', x'', y, y', y'', q, q', q'')
39 b2=zeros(ptkop,10); % 2. bolaren aldagaiak:
40 % (t, x, x', x'', y, y', y'', q, q', q'')
41 % Hastapen baldintzak: X: b1(1,2)=0; b1(2,2)=X1; b1(1,3)=0; b1(2,3)=0;
42 % b1=1. bola Y: b1(1,5)=0; b1(2,5)=Y1; b1(1,6)=0; b1(2,6)=0;
43 % Q: b1(1,8)=0; b1(2,8)=0; b1(1,9)=0; b1(2,9)=0;
44 % Hastapen baldintzak: X: b2(1,2)=0; b2(2,2)=X2; b2(1,3)=0; b2(2,3)=0;
45 % b2=2. bola Y: b2(1,5)=0; b2(2,5)=Y2; b2(1,6)=0; b2(2,6)=0;
46 % Q: b2(1,8)=0; b2(2,8)=0; b2(1,9)=0; b2(2,9)=0;
47
48 b1(1,2)=X1;
49 b1(1,5)=Y1;
50 b2(1,2)=X2;
51 b2(1,5)=Y2;
52 b1(2,2)=X1;
53 b1(2,5)=Y1;
54 b2(2,2)=X2;
55 b2(2,5)=Y2;
56 b1(:,1)=linspace(-dt,tf,ptkop);
57 b2(:,1)=b1(:,1);
58
59 % Indarrak eta momentuak:
60
61 %Indarren ordena:
62
63 %1->FRi1 1. bola eta bertikala, indar ukitzzailea
64 %2->FRi2 2. bola eta bertikala, indar ukitzzailea
65 %3->FNi1 1. bola eta bertikala, indar normala
66 %4->FNi2 2. bola eta bertikala, indar normala
67
68 %5->FRa1 1. bola eta horizontala, indar ukitzzailea
69 %6->FRa2 2. bola eta horizontala, indar ukitzzailea
70 %7->FNa1 1. bola eta horizontala, indar normala
71 %8->FNa2 2. bola eta horizontala, indar normala
72
73 %9->FN21 bolen kontaktu indarra (1. bolak jasandakoa), normala
74 %10->FN12=FN21 bolen kontaktu indarra (2. bolak jasandakoa), normala
75 % (zeinua dinamikaren ekuazioetan definitzen da)
76 %11->FR21 bolen kontaktu indarra (1. bolak jasandakoa), ukitzzailea
77 %12->FR12=FR21 bolen kontaktu indarra (2. bolak jasandakoa), ukitzzailea
78 % (zeinua dinamikaren ekuazioetan definitzen da)
79 % Indar normalen momentuak:
80 % 13->M1N: indar normalek 1. bolan
81 % 14->M2N: indar normalek 2. bolan
82 % 15->M1r: bolen arteko indar normalak 1. bolan
83 % 16->M2r=M1r: bolen arteko indar normalak 2. bolan
84
85 F=zeros(1,16);

```

```

86 lehen=ones(1,7); %kontaktuen bektorea: kontaktuak identifikatzeko
87
88 % (12,1bertezk,1hor,2bertezk,2hor,1bertesk,2bertesk)
89 vmin=zeros(1,7); %Kontaktuko hasierako abiaduren bektorea
90 % (12,1bertezk,1hor,2bertezk,2hor,1bertesk,2bertesk)
91 a=0;
92 vrelT=(b1(2,9)+ b2(2,9))*R+(b2(2,3)-b1(2,3))*sin(a) ...
93 +(b1(2,6)-b2(2,6))*cos(a);
94 % Aldagaien balioespenak:
95 for j=3:ptkop;
96 % Momentuen kalkulua:
97 F(13)=sign(b1(j-1,9))*ur*(F(3)+F(7));
98 F(14)=sign(b2(j-1,9))*ur*(F(4)+F(8));
99 F(15)=-sign(vrelT)*ur*F(9);
100 F(16)=F(15);
101
102 % Solido askeen diagramako indarren eta momentuen baturak:
103 % 1. bola:
104 A=-F(5)+F(3)-F(9)*cos(a)+F(11)*sin(a); %X
105 B=F(7)+F(1)-F(9)*sin(a)-F(11)*cos(a)-m*g; %Y
106 C=-F(13)+F(15)-F(11)*R-F(5)*R-F(1)*R; %Q
107 % 2. bola:
108 D=-F(6)+F(4)+F(10)*cos(a)-F(12)*sin(a); %X
109 E=F(2)+F(8)+F(10)*sin(a)+F(12)*cos(a)-m*g; %Y
110 F=-F(14)+F(16)-F(6)*R-F(12)*R-F(2)*R; %Q
111
112 %Posizioak:
113 %X
114 b1(j,2)=A/m*dt^2+2*b1(j-1,2)-b1(j-2,2);
115 b2(j,2)=D/m*dt^2+2*b2(j-1,2)-b2(j-2,2);
116
117 %Y
118 b1(j,5)=B/m*dt^2+2*b1(j-1,5)-b1(j-2,5);
119 b2(j,5)=E/m*dt^2+2*b2(j-1,5)-b2(j-2,5);
120
121 %Q
122 b1(j,8)=C/I*dt^2+2*b1(j-1,8)-b1(j-2,8);
123 b2(j,8)=F/I*dt^2+2*b2(j-1,8)-b2(j-2,8);
124
125 % Bolen zentroen arteko distantzia:
126 d=((b2(j,5)- b1(j,5))^2+(b1(j,2)-b2(j,2))^2)^0.5;
127 % Bolen zentroak lotzen dituen zuzenaren malda radianetan:
128 a= atan2(b2(j,5)-b1(j,5),b2(j,2)- b1(j,2));
129
130 % Abiadura eta azelerazioak:
131
132 %X:
133 b1(j,3)=(b1(j,2)-b1(j-1,2))/dt;
134 b1(j-1,4)=(b1(j,2)-2*b1(j-1,2)+b1(j-2,2))/(dt^2);
135 %errenkada bat beranduago
136 %Y:
137 b1(j,6)=(b1(j,5)-b1(j-1,5))/dt;
138 b1(j-1,7)=(b1(j,5)-2*b1(j-1,5)+b1(j-2,5))/(dt^2);
139 %errenkada bat beranduago
140 %Q:
141 b1(j,9)=(b1(j,8)-b1(j-1,8))/dt;
142 b1(j-1,10)=(b1(j,8)-2*b1(j-1,8)+b1(j-2,8))/(dt^2);
143 %errenkada bat beranduago
144
145 %X:

```

```

146 b2(j,3) = (b2(j,2)-b2(j-1,2))/dt;
147 b2(j-1,4) = (b2(j,2)-2*b2(j-1,2)+b2(j-2,2))/(dt^2);
148 %errenkada bat beranduago
149 %Y:
150 b2(j,6) = (b2(j,5)-b2(j-1,5))/dt;
151 b2(j-1,7) = (b2(j,5)-2*b2(j-1,5)+b2(j-2,5))/(dt^2);
152 %errenkada bat beranduago
153 %Q:
154 b2(j,9) = (b2(j,8)-b2(j-1,8))/dt;
155 b2(j-1,10) = (b2(j,8)-2*b2(j-1,8)+b2(j-2,8))/(dt^2);
156 %errenkada bat beranduago
157
158 %Abiadura erlatiboak:
159 vrelT=(b1(j,9)+ b2(j,9))*R+(b2(j,3)-b1(j,3))*sin(a) ...
160 +(b1(j,6)-b2(j,6))*cos(a);
161 vrelN=((b2(j,5)-b1(j,5))*(b2(j,6)-b1(j,6))+(b2(j,2) ...
162 -b1(j,2))*(b2(j,3)-b1(j,3)))/d;
163
164 F=zeros(1,16);
165
166 % Bola bien arteko kontaktua
167 if d<2*R;
168 if lehen(1)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
169 lehen(1)=0;
170 vmin(1)=vrelN;
171 end;
172
173 def=2*R-d; %sartzea edo deformazioa
174 F(9)=(kb*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*vrelN/vmin(1));%L-N eredua
175 F(10)=F(9);
176
177 if abs(vrelT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
178 F(11)=sign(vrelT)*u*F(9);
179 F(12)=F(11);
180 elseif abs(vrelT)< dvrel; %jada ez da talka
181 F(11)=0;
182 F(12)=0;
183 end;
184 else
185 lehen(1)=1;
186 end;
187
188 % 1. bola ezker horma bertikalarekin
189 if b1(j,2)<R;
190 if lehen(2)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
191 lehen(2)=0;
192 vmin(2)=b1(j,3);
193 end;
194
195 def=R-b1(j,2); %sartzea edo deformazioa
196 F(3)=(kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b1(j,3)/vmin(2)); %L-N eredua
197
198 vkonT=b1(j,9)*R-b1(j,6); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzalea
199 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
200 F(1)=sign(vkonT)*u*F(3);
201 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
202 F(1)=0;
203 end;
204 else
205 lehen(2)=1;

```

```

206 end;
207
208 % 2. bola ezker horma bertikalarekin
209 if b2(j,2)<R;
210 if lehen(4)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
211 lehen(4)=0;
212 vmin(4)=b2(j,3);
213 end;
214
215 def=R-b2(j,2); %sartzea edo deformazioa
216 F(4)=(kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b2(j,3)/vmin(4)); %L-N eredua
217
218 vkonT=b2(j,9)*R-b2(j,6); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitziailea
219 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
220 F(2)=sign(vkonT)*u*F(4);
221 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
222 F(2)=0;
223 end;
224 else
225 lehen(4)=1;
226 end;
227
228 % 1. bola eskuin horma bertikalarekin
229 if b1(j,2)>L-R;
230 if lehen(6)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
231 lehen(6)=0;
232 vmin(6)=b1(j,3);
233 end;
234
235 def=b1(j,2)-(L-R); %sartzea edo deformazioa
236 F(3)=- (kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b1(j,3)/vmin(6)); %L-N eredua
237
238 vkonT=b1(j,9)*R-b1(j,6); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitziailea
239 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
240 F(1)=-sign(vkonT)*u*F(3);
241 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
242 F(1)=0;
243 end;
244 else
245 lehen(6)=1;
246 end;
247
248 % 2. bola eskuin horma bertikalarekin
249 if b2(j,2)>L-R;
250 if lehen(7)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
251 lehen(7)=0;
252 vmin(7)=b2(j,3);
253 end;
254
255 def=b2(j,2)-(L-R); %sartzea edo deformazioa
256 F(4)=- (kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b2(j,3)/vmin(7)); %L-N eredua
257
258 vkonT=b2(j,9)*R-b2(j,6); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitziailea
259 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
260 F(2)=-sign(vkonT)*u*F(4);
261 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
262 F(2)=0;
263 end;
264 else
265 lehen(7)=1;

```

```

266 end;
267
268 % 1. bola horma horizontalarekin
269 if b1(j,5)<R;
270 if lehen(3)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
271 lehen(3)=0;
272 vmin(3)=b1(j,6);
273 end;
274
275 def=R-b1(j,5); %sartzea edo deformazioa
276 F(7)=(kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b1(j,6)/vmin(3)); %L-N eredua
277
278 vkonT=b1(j,9)*R+b1(j,3); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzalea
279 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
280 F(5)=sign(vkonT)*u*F(7);
281 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
282 F(5)=0;
283 end;
284 else
285 lehen(3)=1;
286 end;
287
288 % 2. bola horma horizontalarekin
289 if b2(j,5)<R;
290 if lehen(5)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
291 lehen(5)=0;
292 vmin(5)=b2(j,6);
293 end;
294
295 def=R-b2(j,5); %sartzea edo deformazioa
296 F(8)=(kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b2(j,6)/vmin(5)); %L-N eredua
297
298 vkonT=b2(j,9)*R+b2(j,3); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzalea
299 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
300 F(6)=sign(vkonT)*u*F(8);
301 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
302 F(6)=0;
303 end;
304 else
305 lehen(5)=1;
306 end;
307
308 end
309
310 % Emaitzak irudikatzea:
311 format short
312
313 for j=1:200;
314 i=round(ptkop/200*j);
315 figure(j);
316 hold on;
317 grid on;
318 plot(b1(:,2),b1(:,5),'g');
319 plot(b2(:,2),b2(:,5),'r');
320 plot([0,max([b1(:,2);b2(:,2)])+R],zeros(1,2),'k','Linewidth',2);
321 plot(zeros(1,2),[0,max([b1(:,5);b2(:,5)])+2*R],'k','Linewidth',2);
322 plot(L*ones(1,2),[0,max([b1(:,5);b2(:,5)])+2*R],'k','Linewidth',2);
323 m1=plot(0,0,'HandleVisibility','off');
324 theta = linspace(0,2*pi,25);
325

```

```

326 xx1 = R*cos(theta) + b1(i,2);
327 yy1 = R*sin(theta) + b1(i,5);
328 xx2=[0,R*cos(b1(i,8))]+b1(i,2);
329 yy2=[0,R*sin(b1(i,8))]+b1(i,5);
330
331 xx3 = R*cos(theta) + b2(i,2);
332 yy3 = R*sin(theta) + b2(i,5);
333 xx4=[0,R*cos(b2(i,8))]+b2(i,2);
334 yy4=[0,R*sin(b2(i,8))]+b2(i,5);
335
336 plot(xx1,yy1,'b',xx3,yy3,'b',xx2,yy2,'b',xx4,yy4,'b', ...
337 'HandleVisibility','off');
338 axis equal;
339
340 saveas(figure(j),sprintf('%d.jpg', j)) ;
341 close(figure(j));
342 end;
343
344 % Esferen ibilbidearen animazioa:
345 figure(201)
346 hold on
347 grid on
348 plot([0,max([b1(:,2);b2(:,2)])+R],zeros(1,2),'k','Linewidth',2);
349 plot(zeros(1,2),[0,max([b1(:,5);b2(:,5)])+2*R],'k','Linewidth',2);
350 plot(L*ones(1,2),[0,max([b1(:,5);b2(:,5)])+2*R],'k','Linewidth',2);
351 m1=plot(0,0,'HandleVisibility','off');
352
353 for j=1:anim;
354 n=0;
355 for i=1:round(ptkop/mar):ptkop;
356 n=n+1;
357 hold on
358 theta = linspace(0,2*pi,25);
359
360 xx1 = R*cos(theta) + b1(i,2);
361 yy1 = R*sin(theta) + b1(i,5);
362 xx2=[0,R*cos(b1(i,8))]+b1(i,2);
363 yy2=[0,R*sin(b1(i,8))]+b1(i,5);
364
365 xx3 = R*cos(theta) + b2(i,2);
366 yy3 = R*sin(theta) + b2(i,5);
367 xx4=[0,R*cos(b2(i,8))]+b2(i,2);
368 yy4=[0,R*sin(b2(i,8))]+b2(i,5);
369
370 m1=plot(xx1,yy1,'g',xx3,yy3,'r',xx2,yy2,'g',xx4,yy4,'r', ...
371 'HandleVisibility','off');
372 axis equal
373 pause(tarte)
374 G(n) = getframe(gcf) ;
375 delete(m1);
376 end;
377 end;
378 hold off;
379 %Bideoa
380 writerObj = VideoWriter('Bideoa.avi');
381 writerObj.FrameRate = 15;
382 open(writerObj);
383 for i=1:length(G)
384 writeVideo(writerObj, G(i) );
385 end

```



```

386 close(writerObj);
387
388 % Abiadurak:
389 figure(2)
390 hold on
391 plot(b1(:,1),b1(:,3))
392 plot(b1(:,1),b1(:,6))
393 plot(b1(:,1),b1(:,9)/100)
394 plot(b2(:,1),b2(:,3))
395 plot(b2(:,1),b2(:,6))
396 plot(b2(:,1),b2(:,9)/100)
397 legend("x1'", "y1'", "q1'", "x2'", "y2'", "q2'")
398 xlabel("Denbora")
399 ylabel("Abiadura")
400 grid on
401 % Azelerazioak:
402 figure(3)
403 hold on
404 plot(b1(2:end-1,1),b1(2:end-1,4))
405 plot(b1(2:end-1,1),b1(2:end-1,7))
406 plot(b1(2:end-1,1),b1(2:end-1,10)/10000)
407 plot(b2(2:end-1,1),b2(2:end-1,4))
408 plot(b2(2:end-1,1),b2(2:end-1,7))
409 plot(b2(2:end-1,1),b2(2:end-1,10)/10000)
410 legend("x1'", "y1'", "q1'", "x2'", "y2'", "q2'")
411 xlabel("Denbora")
412 ylabel("Azelerazioa")
413 grid on
414 % Posizioak:
415 figure(5)
416 hold on
417 plot(b1(:,1),b1(:,2))
418 plot(b1(:,1),b1(:,5))
419 plot(b1(:,1),b1(:,8)/100)
420 plot(b2(:,1),b2(:,2))
421 plot(b2(:,1),b2(:,5))
422 plot(b2(:,1),b2(:,8)/100)
423 legend("x1", "y1", "q1", "x2", "y2", "q2")
424 xlabel("Denbora")
425 ylabel("Posizioa")
426 grid on

```

o 5. ataza:

```

1 % Bola bi erortzen utzi, eta euren artean eta hormekin kontaktuak
2 % m masa, g grabitatea, R erradioa,
3 % X1,X2,Y2,Y1 hasierako koordinatuak, Ce itzultze koef.,
4 % kh hormen kontaktuen zurruntasuna, kb bolen arteko kontaktuaren zur.
5 % n Lankarani-Nikravesh ereduko koef.,
6 % dt denbora urratsa, tf iraupena
7 % u marrusk. koef., dvrel abiadura erl. min., ur normalaren desfasea
8
9 clear
10 clc
11
12 % Datuak:
13 m=0.1; %kg
14 g=10; % m/s^2
15 R=0.005 ; %m

```

```

16 L=6*R; %m
17 X1=0.015; %m
18 Y1=0.02; %m
19 X2=0.02; %m
20 Y2=0.04; %m
21 Ce=0.9; %-
22 kh=6*10^6; %N/m^1.5
23 kb=3*10^6; %N/m^1.5
24 n=1.2; %-
25 dt=10^-6 ; % s
26 tf=1; %s
27 u=0.15; %-
28 dvrel=0.0001; % m/s
29 ur=10^-4; % m
30 I=2/5*m*R^2; %kg·m^2
31 mar=250; % marraztutako aldiune kopurua
32 anim=1; % animazio kopurua
33 tarte=0.01; % Figure(1)-eko itxaronaldia
34
35 format long
36 ptkop=round(tf/dt+2); % balioztapen kopurua
37 b1=zeros(ptkop,10); % 1. bolaren aldagaiak:
38 % (t, x, x', x'', y, y', y'', q, q', q'')
39 b2=zeros(ptkop,10); % 2. bolaren aldagaiak:
40 % (t, x, x', x'', y, y', y'', q, q', q'')
41 % Hastapen baldintzak: X: b1(1,2)=0; b1(2,2)=X1; b1(1,3)=0; b1(2,3)=0;
42 % b1=1. bola Y: b1(1,5)=0; b1(2,5)=Y1; b1(1,6)=0; b1(2,6)=0;
43 % Q: b1(1,8)=0; b1(2,8)=0; b1(1,9)=0; b1(2,9)=0;
44 % Hastapen baldintzak: X: b2(1,2)=0; b2(2,2)=X2; b2(1,3)=0; b2(2,3)=0;
45 % b2=2. bola Y: b2(1,5)=0; b2(2,5)=Y2; b2(1,6)=0; b2(2,6)=0;
46 % Q: b2(1,8)=0; b2(2,8)=0; b2(1,9)=0; b2(2,9)=0;
47
48 b1(1,2)=X1;
49 b1(1,5)=Y1;
50 b2(1,2)=X2;
51 b2(1,5)=Y2;
52 b1(2,2)=X1;
53 b1(2,5)=Y1;
54 b2(2,2)=X2;
55 b2(2,5)=Y2;
56 b1(:,1)=linspace(-dt,tf,ptkop);
57 b2(:,1)=b1(:,1);
58 % Murrizketagatik esferen artean distantzia finkoa
59 d=((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2)^0.5;
60
61 % Indarrak eta momentuak:
62
63 %Indarren ordena:
64
65 %1->FRi1 1. bola eta bertikala, indar ukitzailea
66 %2->FRi2 2. bola eta bertikala, indar ukitzailea
67 %3->FNI1 1. bola eta bertikala, indar normala
68 %4->FNI2 2. bola eta bertikala, indar normala
69
70 %5->FRa1 1. bola eta horizontala, indar ukitzailea
71 %6->FRa2 2. bola eta horizontala, indar ukitzailea
72 %7->FNa1 1. bola eta horizontala, indar normala
73 %8->FNa2 2. bola eta horizontala, indar normala
74
75 %9->FN21 bolen kontaktu indarra (1. bolak jasandakoa), normala

```

```

76 %10->FN12=FN21 bolen kontaktu indarra (2. bolak jasandakoa), normala
77 % (zeinua dinamikaren ekuazioetan definitzen da)
78 %11->FR21 bolen kontaktu indarra (1. bolak jasandakoa), ukitzaila
79 %12->FR12=FR21 bolen kontaktu indarra (2. bolak jasandakoa), ukitzaila
80 % (zeinua dinamikaren ekuazioetan definitzen da)
81 % Indar normalen momentuak:
82 % 13->M1N: indar normalek 1. bolan
83 % 14->M2N: indar normalek 2. bolan
84 % 15->M1r: bolen arteko indar normalak 1. bolan
85 % 16->M2r=M1r: bolen arteko indar normalak 2. bolan
86
87 F=zeros(1,16);
88 lehen=ones(1,7); %Kontaktuen bektorea: kontaktuak identifikatzeko
89 % (12,1bertezk,1hor,2bertezk,2hor,1bertesk,2bertesk)
90 vmin=zeros(1,7); %Kontaktuko hasierako abiaduren bektorea
91 % (12,1bertezk,1hor,2bertezk,2hor,1bertesk,2bertesk)
92
93 a=0;
94 vrelT=(b1(2,9)+ b2(2,9))*R+(b2(2,3)-b1(2,3))*sin(a) ...
95 +(b1(2,6)-b2(2,6))*cos(a);
96
97 % Aldagaien balioespenak:
98 for j=3:ptkop;
99
100 % Momentuen kalkulua:
101 F(13)=sign(b1(j-1,9))*ur*(F(3)+F(7));
102 F(14)=sign(b2(j-1,9))*ur*(F(4)+F(8));
103 F(15)=-sign(vrelT)*ur*(F(9));
104 F(16)=F(15);
105
106 % Solido askeen diagramako indarren eta momentuen baturak:
107 % 1. bola:
108 A=-F(5)+F(3)-F(9)*cos(a)+F(11)*sin(a); %X
109 B=F(7)+F(1)-F(9)*sin(a)-F(11)*cos(a)-m*g; %Y
110 C=-F(13)+F(15)-F(11)*R-F(5)*R-F(1)*R; %Q
111 % 2. bola:
112 D=-F(6)+F(4)+F(10)*cos(a)-F(12)*sin(a); %X
113 E=F(2)+F(8)+F(10)*sin(a)+F(12)*cos(a)-m*g; %Y
114 F=-F(14)+F(16)-F(6)*R-F(12)*R-F(2)*R; %Q
115
116 g1=E/m^2*dt^2-B/m*dt^2+2*b2(j-1,5)-b2(j-2,5)-2*b1(j-1,5)+b1(j-2,5);
117 g2=D/m^2*dt^2-A/m*dt^2+2*b2(j-1,2)-b2(j-2,2)-2*b1(j-1,2)+b1(j-2,2);
118 Flot=(g1*sin(a)+g2*cos(a)-(d^2-(g1*cos(a)-g2*sin(a))^2)^0.5) ...
119 /(dt^2*(1/m+1/m));
120 %X
121 b1(j,2)=(A+Flot*cos(a))/m*dt^2+2*b1(j-1,2)-b1(j-2,2);
122 b2(j,2)=(D-Flot*cos(a))/m*dt^2+2*b2(j-1,2)-b2(j-2,2);
123 %Y
124 b1(j,5)=(B+Flot*sin(a))/m*dt^2+2*b1(j-1,5)-b1(j-2,5);
125 b2(j,5)=(E-Flot*sin(a))/m*dt^2+2*b2(j-1,5)-b2(j-2,5);
126 %Q
127 b1(j,8)=C/I*dt^2+2*b1(j-1,8)-b1(j-2,8);
128 b2(j,8)=F/I*dt^2+2*b2(j-1,8)-b2(j-2,8);
129
130 % Bolen zentroak lotzen dituen zuzenaren malda radianetan:
131 a= atan2(b2(j,5)-b1(j,5),b2(j,2)- b1(j,2));
132
133 % Abiadura eta azelerazioak:
134
135 %X:

```

```

136 b1(j,3) = (b1(j,2)-b1(j-1,2))/dt;
137 b1(j-1,4) = (b1(j,2)-2*b1(j-1,2)+b1(j-2,2))/(dt^2);
138 %errenkada bat beranduago
139 %Y:
140 b1(j,6) = (b1(j,5)-b1(j-1,5))/dt;
141 b1(j-1,7) = (b1(j,5)-2*b1(j-1,5)+b1(j-2,5))/(dt^2);
142 %errenkada bat beranduago
143 %Q:
144 b1(j,9) = (b1(j,8)-b1(j-1,8))/dt;
145 b1(j-1,10) = (b1(j,8)-2*b1(j-1,8)+b1(j-2,8))/(dt^2);
146 %errenkada bat beranduago
147
148 %X:
149 b2(j,3) = (b2(j,2)-b2(j-1,2))/dt;
150 b2(j-1,4) = (b2(j,2)-2*b2(j-1,2)+b2(j-2,2))/(dt^2);
151 %errenkada bat beranduago
152 %Y:
153 b2(j,6) = (b2(j,5)-b2(j-1,5))/dt;
154 b2(j-1,7) = (b2(j,5)-2*b2(j-1,5)+b2(j-2,5))/(dt^2);
155 %errenkada bat beranduago
156 %Q:
157 b2(j,9) = (b2(j,8)-b2(j-1,8))/dt;
158 b2(j-1,10) = (b2(j,8)-2*b2(j-1,8)+b2(j-2,8))/(dt^2);
159 %errenkada bat beranduago
160
161 %Abiadura erlatiboak:
162 vrelT=(b1(j,9)+ b2(j,9))*R+(b2(j,3)-b1(j,3))*sin(a) ...
163 +(b1(j,6)-b2(j,6))*cos(a);
164 vrelN=((b2(j,5)-b1(j,5))*(b2(j,6)-b1(j,6))+(b2(j,2) ...
165 -b1(j,2))*(b2(j,3)-b1(j,3)))/d;
166
167 F=zeros(1,16);
168
169 % 1. bola ezker horma bertikalarekin
170 if b1(j,2)<R;
171 if lehen(2)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
172 lehen(2)=0;
173 vmin(2)=b1(j,3);
174 end;
175
176 def=R-b1(j,2); %sartzea edo deformazioa
177 F(3)=(kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b1(j,3)/vmin(2)); %L-N eredua
178
179 vkonT=b1(j,9)*R-b1(j,6); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzalea
180 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
181 F(1)=sign(vkonT)*u*F(3);
182 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
183 F(1)=0;
184 end;
185 else
186 lehen(2)=1;
187 end;
188
189 % 2. bola ezker horma bertikalarekin
190 if b2(j,2)<R;
191 if lehen(4)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
192 lehen(4)=0;
193 vmin(4)=b2(j,3);
194 end;
195

```

```

196 def=R-b2(j,2); %sartzea edo deformazioa
197 F(4)=(kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b2(j,3)/vmin(4)); %L-N eredua
198
199 vkonT=b2(j,9)*R-b2(j,6); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzailea
200 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
201 F(2)=sign(vkonT)*u*F(4);
202 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
203 F(2)=0;
204 end;
205 else
206 lehen(4)=1;
207 end;
208
209 % 1. bola eskuin horma bertikalarekin
210 if b1(j,2)>L-R;
211 if lehen(6)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
212 lehen(6)=0;
213 vmin(6)=b1(j,3);
214 end;
215
216 def=b1(j,2)-(L-R); %sartzea edo deformazioa
217 F(3)=- (kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b1(j,3)/vmin(6)); %L-N eredua
218
219 vkonT=b1(j,9)*R-b1(j,6); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzailea
220 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
221 F(1)=-sign(vkonT)*u*F(3);
222 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
223 F(1)=0;
224 end;
225 else
226 lehen(6)=1;
227 end;
228
229 % 2. bola eskuin horma bertikalarekin
230 if b2(j,2)>L-R;
231 if lehen(7)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
232 lehen(7)=0;
233 vmin(7)=b2(j,3);
234 end;
235
236 def=b2(j,2)-(L-R); %sartzea edo deformazioa
237 F(4)=- (kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b2(j,3)/vmin(7)); %L-N eredua
238
239 vkonT=b2(j,9)*R-b2(j,6); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzailea
240 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
241 F(2)=-sign(vkonT)*u*F(4);
242 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
243 F(2)=0;
244 end;
245 else
246 lehen(7)=1;
247 end;
248
249 % 1. bola horma horizontalarekin
250 if b1(j,5)<R;
251 if lehen(3)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
252 lehen(3)=0;
253 vmin(3)=b1(j,6);
254 end;
255

```

```

256 def=R-b1(j,5); %sartzea edo deformazioa
257 F(7)=(kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b1(j,6)/vmin(3)); %L-N eredua
258
259 vkonT=b1(j,9)*R+b1(j,3); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzaillea
260 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
261 F(5)=sign(vkonT)*u*F(7);
262 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
263 F(5)=0;
264 end;
265 else
266 lehen(3)=1;
267 end;
268
269 % 2. bola horma horizontalarekin
270 if b2(j,5)<R;
271 if lehen(5)==1; %kontaktuko lehen aldiunea
272 lehen(5)=0;
273 vmin(5)=b2(j,6);
274 end;
275
276 def=R-b2(j,5); %sartzea edo deformazioa
277 F(8)=(kh*def^n)*(1+0.75*(1-Ce^2)*b2(j,6)/vmin(5)); %L-N eredua
278
279 vkonT=b2(j,9)*R+b2(j,3); %kontaktuko abiadura erlatibo ukitzaillea
280 if abs(vkonT)>= dvrel; %marruskadura indarra izateko baldintza
281 F(6)=sign(vkonT)*u*F(8);
282 elseif abs(vkonT)< dvrel; %jada ez da talka
283 F(6)=0;
284 end;
285 else
286 lehen(5)=1;
287 end;
288
289 end
290
291 % Emaitzak irudikatzea:
292 format short
293 % Esferen ibilbidearen animazioa:
294 figure(1)
295 hold on
296 grid on
297 plot([0,max([b1(:,2);b2(:,2)])+R],zeros(1,2),'k','Linewidth',2);
298 plot(zeros(1,2),[0,max([b1(:,5);b2(:,5)])+2*R],'k','Linewidth',2);
299 plot(L*ones(1,2),[0,max([b1(:,5);b2(:,5)])+2*R],'k','Linewidth',2);
300 m1=plot(0,0,'HandleVisibility','off');
301
302 for j=1:anim;
303 for i=1:round(ptkop/mar):ptkop;
304
305 theta = linspace(0,2*pi,25);
306
307 xx1 = R*cos(theta) + b1(i,2);
308 yy1 = R*sin(theta) + b1(i,5);
309 xx2=[0,R*cos(b1(i,8))]+b1(i,2);
310 yy2=[0,R*sin(b1(i,8))]+b1(i,5);
311
312 xx3 = R*cos(theta) + b2(i,2);
313 yy3 = R*sin(theta) + b2(i,5);
314 xx4=[0,R*cos(b2(i,8))]+b2(i,2);
315 yy4=[0,R*sin(b2(i,8))]+b2(i,5);

```

```

316
317 m2=m1;
318 delete(m2)
319 m1=plot(xx1,yy1,'g',xx3,yy3,'r',xx2,yy2,'g',xx4,yy4,'r', ...
320 'HandleVisibility','off');
321 axis equal
322 pause(tarte)
323 end;
324 end;
325
326 % Abiadurak:
327 figure(2)
328 hold on
329 plot(b1(:,1),b1(:,3))
330 plot(b1(:,1),b1(:,6))
331 plot(b1(:,1),b1(:,9)/100)
332 plot(b2(:,1),b2(:,3))
333 plot(b2(:,1),b2(:,6))
334 plot(b2(:,1),b2(:,9)/100)
335 legend("x1'", "y1'", "q1'", "x2'", "y2'", "q2'")
336 xlabel("Denbora")
337 ylabel("Abiadura")
338 grid on
339 % Azelerazioak:
340 figure(3)
341 hold on
342 plot(b1(2:end-1,1),b1(2:end-1,4))
343 plot(b1(2:end-1,1),b1(2:end-1,7))
344 plot(b1(2:end-1,1),b1(2:end-1,10)/10000)
345 plot(b2(2:end-1,1),b2(2:end-1,4))
346 plot(b2(2:end-1,1),b2(2:end-1,7))
347 plot(b2(2:end-1,1),b2(2:end-1,10)/10000)
348 legend("x1'", "y1'", "q1'", "x2'", "y2'", "q2'")
349 xlabel("Denbora")
350 ylabel("Azelerazioa")
351 grid on
352 % Posizioak:
353 figure(5)
354 hold on
355 plot(b1(:,1),b1(:,2))
356 plot(b1(:,1),b1(:,5))
357 plot(b1(:,1),b1(:,8)/100)
358 plot(b2(:,1),b2(:,2))
359 plot(b2(:,1),b2(:,5))
360 plot(b2(:,1),b2(:,8)/100)
361 legend("x1", "y1", "q1", "x2", "y2", "q2")
362 xlabel("Denbora")
363 ylabel("Posizioa")
364 grid on

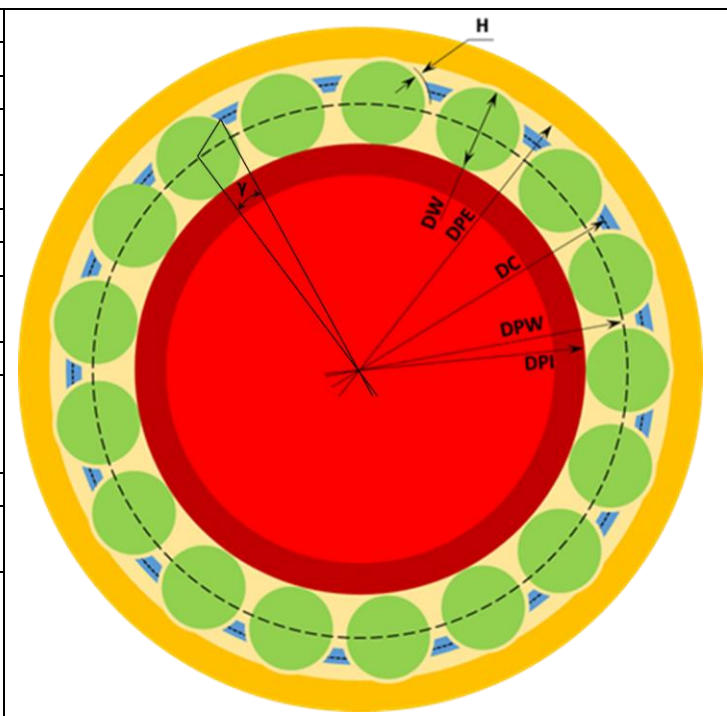
```


II ERANSKINA

FUNTZIONAMENDUKO PARAMETROAK			
		<p>Balioen zutabeen kasu hauek bereiztu dira: ?: analisi sakonagoak egin behar dira balioak estimatu ahal izateko. calc: deskribapeneko adierazpenarekin kalkulatzen da. Balio numerikoak dituzten parametroak ez dira kasu erreal baten balioak eta, kasu batzuetan, baliteke guztizko koherentziarik ez izatea. Batez ere, parametroek izan ditzaketen magnitude ordenak gogoan hartzeko dira. Simulagailua martxan jartzerakoan, egokiena errodamendu erreal baten datuak erabiltzea da.</p>	
Izena	Unitateak	Balioa	Deskribapena
I1	kg.m ²	?	Ardatz azkarrean (1 ardatza) murriztutako inertzia, ardatz azkarrarena eta sorgailuarena.
I2	kg.m ²	?	Ardatz geldoan (2 ardatza) murriztutako inertzia, ardatz geldoarena eta besoetarainoko tren osoarena.
R1	m	?	1 ardatzeko pinoiaren oinarritzko erradioa.
R2	m	?	2 ardatzeko engranajearen oinarritzko erradioa.
T1RA	N.m	?	T1R momentu erresistentea. Sorgailuaren momentu erresistentea (murriztuta dago, 1 ardatzean aplikatzen delako). Horrela definitu da: T1R= T1RA + T1RB *TPRE.
T1RB	N.m/s	?	
T2MA	N.m	?	T2M momentu eragile murriztua. Ekintza eragileen momentua (haizearengandik besoetan lortua), 2 ardatzean murriztuta. Horrela definitu da: T2M= T2MA + T2MB *TPRE.
T2MB	N.m/s	?	
ALPHA	rad/s ²	calc	1 ardatzaren azelerazio angeluarra. Horrela definitu da:

			$\text{ALPHA} = R2 \frac{T1R \cdot R2 - T2M \cdot R1}{I1 \cdot R2^2 + I2 \cdot R1^2}$
FT	N	calc	Engranatze indarraren osagai ukitzailea. Horrela definitu da: $\text{FT} = \frac{\frac{R1}{I1} \cdot T1R + \frac{R2}{I2} \cdot T2M}{\frac{R1^2}{I1} + \frac{R2^2}{I2}}$
FR	N	calc	Engranatze indarraren osagai erradiala. Horrela definitu da: $\text{FR} = 0.364 \cdot \text{FT}$
PORC	%	50	Aztergai den errodamenduak jasaten duen engranatze indarraren ehunekoa. Errodamenduak jasaten dituen indarrak horrela definitu dira: $\frac{\text{PORC}}{100} \text{FR eta } \frac{\text{PORC}}{100} \text{FT}$

AZTERGAI DEN ERRODAMENDUAREN PARAMETRO DIMENTSIONALAK			
Izena	Unitateak	Balioa	Deskribapena
Z	-	15	Arrabola kopurua.
{NUMROD}	-	{1,2,...,Z}	Arrabolaren zenbakia duen bektorea. Z dimentsioko bektorea.
DPI	m	0.210	Barneko eraztunaren diametroa.
DPE	m	0.260	Kanpoko pistaren diametroa.
DC	m	0.245	Kaiolaren batezbesteko diametroa.
DPW	m	0.237	Errodamenduaren batezbesteko diametroa (arrabolen zentroek osatzen duten diametroa).
DWNOM	m	0.047	Arrabolen diametro izendatua.
{DW}	m	{0.047}	Arrabolen diametroen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Arrabolen artean, mikra batzuetako aldeak egon daitezke, aurrekargak eta lasaierak direla eta.
LW	m	0.055	Arrabolen luzera.
H	m	0.001	Arrabolen eta kaiolaren arteko hasierako lasaiera (lasaiera normala).
GAMMA	°	calc	Arrabolen zentroaren eta kaiolaren arteko angelua. Horrela definitu da: $\text{GAMMA} = \cos^{-1} \left(\frac{\left(\frac{\text{DPW}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{DC}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{DWNOM}}{2} + \text{H}\right)^2}{\text{DPW} \cdot \text{DC}} \right)$



PARAMETRO MASIKOAK ETA INERTZIALAK			
Izena	Unitateak	Balioa	Deskribapena
RHOA	kg/m ³	7850	Altzairuaren dentsitatea (arrabolak eta eraztunak).
RHOB	kg/m ³	8890	Brontzearen dentsitatea (kaiola).
MI	kg	?	Barneko eraztunaren masa. Barneko eraztunak jasaten duen masa da, ardatzaren errodamenduaren aldeak eusten duena.
MR	kg	calc	Arrabola bakoitzaren masa. Horrela definitu da: $MR = RHOA \cdot \pi \cdot LW \cdot \frac{DWNOM^2}{4}$
IR	kg.m ²	calc	Arrabola bakoitzaren inertzia momentua. Horrela definitu da: $IR = \frac{1}{2} MR \cdot \frac{DWNOM^2}{4}$
MC	kg	?	Kaiolaren masa.
IC	kg.m ²	calc	Kaiolaren inertzia momentua. DC diametroan kontzentratutako masa. Horrela definitu da: $IC = MC \cdot \frac{DC^2}{4}$

INDAR ETA ZURRUNTASUN PARAMETROAK			
Izena	Unitateak	Balioa	Deskribapena
COEFROZ	-	0.1	Marruskadura koefizientea. Printzipioz, konstantea, baina indar normalen eta abiadura erlatiboen menpe adieraz daitekeena.
KI	N/m ^{NI}	3·10 ¹⁰	Formulako arrabolen eta barneko eraztunaren arteko zurruntasun konstanteak. $F_N = KI \cdot \delta^{NI}$
NI	-	1.3	
KE	N/m ^{NE}	4·10 ¹⁰	Formulako arrabolen eta kanpoko eraztunaren arteko zurruntasun konstanteak. $F_N = KE \cdot \delta^{NE}$
NE	-	1.3	
KC	N/m ^{NC}	?	Formulako arrabolen eta kaiolaren arteko zurruntasun konstanteak. $F_N = KC \cdot \delta^{NC}$
NC	-	?	

ERAGIKETA PARAMETROAK			
Izena	Unitateak	Balioa	Deskribapena
TINT	s	0.02	Integrazio denbora totala. Simulazioaren arabera doigarria.
AT	s	1/1800000	Integratzailearen hasierako denbora urratsaren tamaina.
ATALM	s	1/180000	Datuak biltegitzeko denbora urratsaren tamaina.
AV	m/s	0.01	Marruskadura efektuak desagertzen diren abiadura erlatiboa. Esperimentazio edo analisisen bidez doi daiteke.

KALKULU ALDAGAIK

“ t_i ” aldiunean deribatuak planteatzeko, posizio aldagai esanguratsu bakoitzaren 3 balio erabili dira, honako aldiuneei dagozkienak:

- Iragana t_{i-1} PAS atzizkidun aldagaiak
- Oraina t_i PRE atzizkidun aldagaiak
- Geroa t_{i+1} FUT atzizkidun aldagaiak

Denboran zehar, aurkeztutako aldagaiak ALM atzizkidun aldagaietan biltegitatu dira, ATALM aldagaiak zehaztutako denbora tarteak errespetatuz.

- PAS, PRE eta FUT aldagaiak eskalarrak badira, elkartutako ALM aldagaia $\{1 \times T/ATALM\}$ dimentsioko bektorea da.
- PAS, PRE eta FUT aldagaiak bektoreak badira, elkartutako ALM aldagaia $[Z \times T/ATALM]$ dimentsioko matrizea da.

POSIZIO ETA INTEGRAZIO ALDAGAIK					
AldPAS	AldPRE	AldFUT	AldALM	Unitateak	Deskribapena
TPAS	TPRE	TFUT	{TALM}	s	Denbora absolutua.
XIPAS	XIPRE	XIFUT	{XIALM}	m	Barneko eraztunaren X koordenatua. Hasieran = 0 edo aurreko analisi batetik lortutakoa.
YIPAS	YIPRE	YIFUT	{YIALM}	m	Barneko eraztunaren Y koordenatua. Hasieran = 0 edo aurreko analisi batetik lortutakoa.
WIPAS	WIPRE	WIFUT	{WIALM}	°	Barneko eraztunaren W koordenatua. Hasieran = 0 edo aurreko analisi batetik lortutakoa.
XCPAS	XCPRE	XCFUT	{XCALM}	m	Kaiolaren X koordenatua. Hasieran = 0 edo aurreko analisi batetik lortutakoa.
YCPAS	YCPRE	YCFUT	{YCALM}	m	Kaiolaren Y koordenatua. Hasieran = 0 edo aurreko analisi batetik lortutakoa.
WCPAS	WCPRE	WCFUT	{WCALM}	°	Kaiolaren W koordenatua. Hasieran = 0 edo aurreko analisi batetik lortutakoa.
{XBPAS}	{XBPRE}	{XBFUT}	{XBALM}	{m}	Arrabolen zentroen X koordenatuen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Hasieran = $\frac{DPW}{2} \cos\left(\left(\{NUMROD\} - 1\right) \cdot \frac{360}{Z}\right)$ edo aurreko analisi batetik lortutakoa.
{YBPAS}	{YBPRE}	{YBFUT}	{YBALM}	{m}	Arrabolen zentroen Y koordenatuen bektorea. Z dimentsioko bektorea.

					Hasieran = $\frac{DPW}{2} \sin\left(\left(\{NUMROD\} - 1\right) \cdot \frac{360}{Z}\right)$ edo aurreko analisi batetik lortutakoa.
{WBPAS}	{WBPRE}	{WBFUT}	[WBALM]	{°}	Arrabolen W koordinatu angeluarren bektorea. Z dimentsioko bektorea. Hasieran =0 edo aurreko analisi batetik lortutakoa.

INDARRAK PLANTEATZEKO POSIZIO ALDAGAI LAGUNTZAILEAK					
AldPAS	AldPRE	AldFUT	AldALM	Unitateak	Deskribapena
	{DIPRE}			{m}	Barneko eraztunaren zentrotik arrabolen zentrarainoko distantzien bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{DIPRE\} = \sqrt{(\{YBPRE\} - YIPRE)^2 + (\{XBPRE\} - XIPRE)^2}$
	{DEPRE}			{m}	Kanpoko eraztunaren zentrotik arrabolen zentrarainoko distantzien bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{DEPRE\} = \sqrt{(\{YBPRE\})^2 + (\{XBPRE\})^2}$
	{AIPRE}			{m}	Arrabolen eta barneko eraztunaren arteko interferentzien bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{AIPRE\} = \{DIPRE\} - \frac{1}{2} (DPI + \{DW\})$ Positiboa → lasaiera, Negatiboa → estuera
	{AEPRE}			{m}	Arrabolen eta kanpoko eraztunaren arteko interferentzien bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{AEPRE\} = -\{DEPRE\} + \frac{1}{2} (DPE - \{DW\})$ Positiboa → lasaiera, Negatiboa → estuera
	{XQPRE}			{m}	Kaiolaren X koordinatuen bektorea, ezkerrekoa (Q puntuak). Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{XQPRE\} = \frac{DC}{2} \cos\left(\left(\left(\{NUMROD\} - 1\right) \cdot \frac{360}{Z} + GAMMA\right) + WCPRE\right) + XCPRE$
	{YQPRE}			{m}	Kaiolaren Y koordinatuen bektorea, ezkerrekoa (Q puntuak). Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:

					$\{YQPRE\} = \frac{DC}{2} \sin \left(\left((\{NUMROD\} - 1) \cdot \frac{360}{Z} + GAMMA \right) + WCPRE \right) + YCPRE$
	{XPPRE}			{m}	Kaiolaren X koordenatuen bektorea, eskuinaldea (P puntuak). Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{XPPRE\} = \frac{DC}{2} \cos \left(\left((\{NUMROD\} - 1) \cdot \frac{360}{Z} - GAMMA \right) + WCPRE \right) + XCPRE$
	{YPPRE}			{m}	Kaiolaren Y koordenatuen bektorea, eskuinaldea (P puntuak). Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{YQPRE\} = \frac{DC}{2} \sin \left(\left((\{NUMROD\} - 1) \cdot \frac{360}{Z} - GAMMA \right) + WCPRE \right) + YCPRE$
	{DOQPRE}			{m}	Q puntuetatik (ezkerraldea) O puntuetarainoko (arrabolen zentroak) distantziak. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{DOQPRE\} = \sqrt{(\{XQPRE\} - \{XBPRE\})^2 + (\{YQPRE\} - \{YBPRE\})^2}$
	{DOPPRE}			{m}	P puntuetatik (eskuinaldea) O puntuetarainoko (arrabolen zentroak) distantziak. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{DOPPRE\} = \sqrt{(\{XPPRE\} - \{XBPRE\})^2 + (\{YPPRE\} - \{YBPRE\})^2}$
	{AQPRES}			{m}	Arrabolen eta kaiolaren arteko interferentzien bektorea, ezkerraldea (Q puntuak). Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{AQPRES\} = \{DOQPRE\} - \frac{\{DW\}}{2}$ Positiboa → lasaiera, Negatiboa → estuera
	{APPRES}			{m}	Arrabolen eta kaiolaren arteko interferentzien bektorea, eskuinaldea (P puntuak). Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{APPRES\} = \{DOPPRE\} - \frac{\{DW\}}{2}$ Positiboa → lasaiera, Negatiboa → estuera

ABIADURA ERLATIBOAK ETA INDARRAK PLANTEATZEKO ALDAGAI ANGELUAR LAGUNTZAILEAK					
AldPAS	AldPRE	AldFUT	AldALM	Unitateak	Deskribapena
	{ALFAIPRE}			{°}	Barneko eraztunaren zentrotik arrabolen zentroetarainoko Y ardatzarekiko angeluen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: {ALFAIPRE} = atan2({XBPRES} - XIPRE), ({YBPRES} - YIPRE))
	{ALFAEPRE}			{°}	Kanpoko eraztunaren zentrotik arrabolen zentroetarainoko Y ardatzarekiko angeluen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: {ALFAEPRE} = atan2({XBPRES}, {YBPRES})
	{ALFAPPRE}			{°}	Arrabolen zentroetatik P puntuetarainoko X ardatzarekiko angeluen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: {ALFAPPRE} = atan2({YPPRES} - {YBPRES}), ({XPPRES} - {XBPRES}))
	{ALFAQPRE}			{°}	Arrabolen zentroetatik Q puntuetarainoko X ardatzarekiko angeluen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: {ALFAQPRE} = atan2({YQPRE} - {YBPRES}), ({XQPRE} - {XBPRES}))
	{EPSPPRE}			{°}	Kaiolaren zentrotik P puntuetarainoko Y ardatzarekiko angeluen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: {EPSPPRE} = atan2({XPPRES} - XCPRE), ({YPPRES} - YCPRE))
	{EPSQPRE}			{°}	Kaiolaren zentrotik Q puntuetarainoko Y ardatzarekiko angeluen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: {EPSQPRE} = atan2({XQPRE} - XCPRE), ({YQPRE} - YCPRE))

ABIADURA ERLATIBOAK PLANTEATZEKO ABIADURA ABSOLUTUEN ALDAGAI LAGUNTZAILEAK					
AldPAS	AldPRE	AldFUT	AldALM	Unitateak	Deskribapena
	VXIPRE			m/s	Barneko eraztunaren zentroaren X norabideko abiadura. Horrela definitu da: $VXIPRE = \frac{(XIPRE - XIPAS)}{(TPRE - TPAS)}$
	VYIPRE			m/s	Barneko eraztunaren zentroaren Y norabideko abiadura. Horrela definitu da: $VYIPRE = \frac{(YIPRE - YIPAS)}{(TPRE - TPAS)}$
	VWIPRE			%/s	Barneko eraztunaren abiadura angeluarra. Horrela definitu da: $VWIPRE = \frac{(WIPRE - WIPAS)}{(TPRE - TPAS)}$
	VXCPRE			m/s	Kaiolaren zentroaren X norabideko abiadura. Horrela definitu da: $VXCPRE = \frac{(XCPRE - XCPAS)}{(TPRE - TPAS)}$
	VYCPRE			m/s	Kaiolaren zentroaren Y norabideko abiadura. Horrela definitu da: $VYCPRE = \frac{(YCPRE - YCPAS)}{(TPRE - TPAS)}$
	VWCPRE			m/s	Kaiolaren abiadura angeluarra. Horrela definitu da: $VWCPRE = \frac{(WCPRE - WCPAS)}{(TPRE - TPAS)}$
	{VXBPRE}			{m/s}	Arrabolen zentroen X norabideko abiaduren bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{VXBPRE\} = \frac{(\{XBPRE\} - \{XBPAS\})}{(TPRE - TPAS)}$
	{VYBPRE}			{m/s}	Arrabolen zentroen Y norabideko abiaduren bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{VYBPRE\} = \frac{(\{YBPRE\} - \{YBPAS\})}{(TPRE - TPAS)}$
	{VWBPRE}			{%/s}	Arrabolen abiadura angeluarren bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da: $\{VWBPRE\} = \frac{(\{WBPRE\} - \{WBPAS\})}{(TPRE - TPAS)}$

INDARRAK PLANTEATZEKO ABIADURA ERLATIBO UKITZAILEAREN ALDAGAI LAGUNTZAILEAK. ELEMENTU ERRODATZAILEKO PUNTUETAKO ABIADURA ERLATIBOAK GAINONTZEKO ELEMENTUEKIKO. ABIADURAK ELEMENTU ERRODATZAILEAREN BIRAKETA ABIADURAREN NORANZKO POSITIBOAN					
AldPAS	AldPRE	AldFUT	AldALM	Unitateak	Deskribapena
	{VARBPRES}			{m/s}	<p>Kontaktu puntuko barneko eraztunaren B puntuarekiko arrabolaren A puntuaren abiadura erlatibo ukitzailen bektorea.</p> <p>Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{VARBPRES\} = \{VWBPRE\} \cdot \left(\frac{\{DW\}}{2}\right) + VWIPRE \cdot \left(\frac{\{DPI\}}{2}\right) + (\{VXBPRES\} - VXIPRE) \cdot \cos(\{ALFAIPRES\}) - (\{VYBPRES\} - VYIPRE) \cdot \sin(\{ALFAIPRES\})$
	{VCRDPRES}			{m/s}	<p>Kontaktu puntuko kanpoko eraztunaren D puntuarekiko arrabolaren C puntuaren abiadura erlatibo ukitzailen bektorea. C puntuaren abiadura absolutu ukitzailerekin bat dator, kanpoko eraztuna finkoa delako.</p> <p>Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{VCRDPRES\} = \{VWBPRE\} \cdot \left(\frac{\{DW\}}{2}\right) - \{VXBPRES\} \cdot \cos(\{ALFAEPRES\}) + \{VYBPRES\} \cdot \sin(\{ALFAEPRES\})$
	{VPPRPPRES}			{m/s}	<p>Kaiolaren P puntuekiko arrabolen P' puntuen abiadura erlatibo ukitzaila.</p> <p>Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{VPPRPPRES\} = \{VWBPRE\} \cdot \left(\frac{\{DW\}}{2}\right) - VWCPRE \cdot \left(\frac{\{DC\}}{2}\right) \cdot \cos(90 - \{ALFAPPRES\} - \{EPSPPRES\}) + (\{VYBPRES\} - VYCPRE) \cdot \cos(\{ALFAPPRES\}) - (\{VXBPRES\} - VXCPRE) \cdot \sin(\{ALFAPPRES\})$
	{VQPRQPRE}			{m/s}	<p>Kaiolaren Q puntuekiko arrabolen Q' puntuen abiadura erlatibo ukitzaila.</p> <p>Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p>

					$\{VQPRQPRE\} = \{VWBPPE\} \cdot \left(\frac{\{DW\}}{2}\right) - VWCPPE$ $\cdot \left(\frac{DC}{2}\right) \cdot \cos(\{ALFAQPRE\} + \{EPSQPRE\} - 90)$ $+ (\{VYBPPE\} - VYCPPE) \cdot \cos(\{ALFAQPRE\})$ $- (\{VXBPPE\} - VXCPPE) \cdot \sin(\{ALFAQPRE\})$
--	--	--	--	--	--

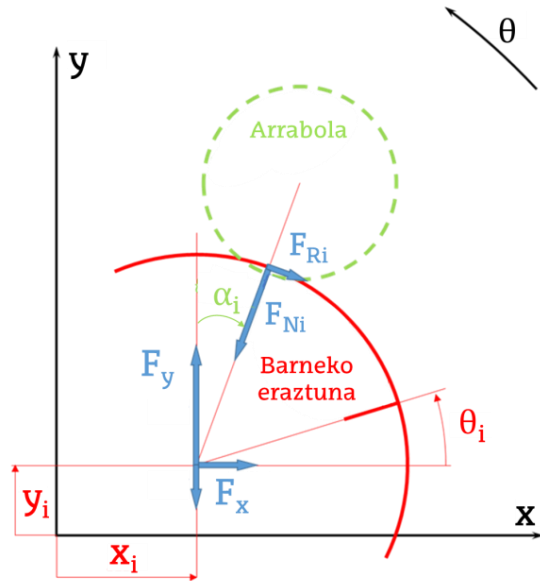
EKINTZA ALDAGAIAK. ELEMENTU ERRODATZAILEEN EKINTZAK GAINONTZEKOENGAN					
AldPAS	AldPRE	AldFUT	AldALM	Unitateak	Deskribapena
	{FNIPRE}			{N}	<p>Barneko eraztunaren eta arrabolen arteko indar normalen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{FNIPRE\} = KI \cdot \left(ABS \left(\frac{\{AIPRE\} - ABS(\{AIPRE\})}{2} \right) \right)^{NI}$ <p>{AIPRE} interferentzien balio negatiboak soilik aintzat hartzeko, $\frac{\{AIPRE\} - ABS(\{AIPRE\})}{2}$ eragiketa egiten da, eta ondoren berriz ere balio absolutua aplikatzen da berrekizuna positiboa izateko.</p>
	{FNEPRE}			{N}	<p>Kanpoko eraztunaren eta arrabolen arteko indar normalen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{FNEPRE\} = KE \cdot \left(ABS \left(\frac{\{AEPRE\} - ABS(\{AEPRE\})}{2} \right) \right)^{NE}$ <p>{AEPRE} interferentzien balio negatiboak soilik aintzat hartzeko, $\frac{\{AEPRE\} - ABS(\{AEPRE\})}{2}$ eragiketa egiten da, eta ondoren berriz ere balio absolutua aplikatzen da berrekizuna positiboa izateko.</p>
	{FNCQPRE}			{N}	<p>Kaiolako Q puntuen eta arrabolen arteko indar normalen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{FNCQPRE\} = KC \cdot \left(ABS \left(\frac{\{AQPRE\} - ABS(\{AQPRE\})}{2} \right) \right)^{NC}$ <p>{AQPRE} interferentzien balio negatiboak soilik aintzat hartzeko, $\frac{\{AQPRE\} - ABS(\{AQPRE\})}{2}$ eragiketa egiten da, eta ondoren berriz ere balio absolutua aplikatzen da berrekizuna positiboa izateko.</p>

	{FNCPPRE}			<p>{N}</p> <p>Kaiolako P puntuen eta arrabolen arteko indar normalen bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{FNCPPRE\} = KC \cdot \left(\text{ABS} \left(\frac{\{APPRE\} - \text{ABS}(\{APPRE\})}{2} \right) \right)^{NC}$ <p>{APPRE} interferentzien balio negatiboak soilik aintzat hartzeko, $\frac{\{APPRE\} - \text{ABS}(\{APPRE\})}{2}$ eragiketa egiten da, eta ondoren berriz ere balio absolutua aplikatzen da berrekizuna positiboa izateko.</p>
	{FRIPRE}			<p>{N}</p> <p>Barneko eraztunaren eta arrabolen arteko indar ukitzaien bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{FRIPRE\} = \text{Heaviside}(\text{ABS}(\{VARBPPE\}) - AV) \cdot \text{SIGNO}(\{VARBPPE\}) \cdot \text{COEFROZ} \cdot \{FNIPRE\}$ <p>Edo:</p> $\{FRIPRE\} = \text{Erf} \left(\frac{2 \cdot \{VARBPPE\}}{AV} \right) \cdot \text{COEFROZ} \cdot \{FNIPRE\}$
	{FREPRE}			<p>{N}</p> <p>Kanpoko eraztunaren eta arrabolen arteko indar ukitzaien bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{FREPRE\} = \text{Heaviside}(\text{ABS}(\{VCRDPPE\}) - AV) \cdot \text{SIGNO}(\{VCRDPPE\}) \cdot \text{COEFROZ} \cdot \{FNPRE\}$ <p>Edo:</p> $\{FREPRE\} = \text{Erf} \left(\frac{2 \cdot \{VCRDPPE\}}{AV} \right) \cdot \text{COEFROZ} \cdot \{FNPRE\}$
	{FRCQPRE}			<p>{N}</p> <p>Kaiolako Q puntuen eta arrabolen arteko indar ukitzaien bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{FRCQPRE\} = \text{Heaviside}(\text{ABS}(\{VQPRQPRE\}) - AV) \cdot \text{SIGNO}(\{VQPRQPRE\}) \cdot \text{COEFROZ} \cdot \{FNCQPRE\}$ <p>Edo:</p> $\{FRCQPRE\} = \text{Erf} \left(\frac{2 \cdot \{VQPRQPRE\}}{AV} \right) \cdot \text{COEFROZ} \cdot \{FNCQPRE\}$
	{FRCPPRE}			<p>{N}</p> <p>Kaiolako P puntuen eta arrabolen arteko indar ukitzaien bektorea. Z dimentsioko bektorea. Terminoz termino horrela definitu da:</p> $\{FRCPPRE\} = \text{Heaviside}(\text{ABS}(\{VPPRPPPE\}) - AV) \cdot \text{SIGNO}(\{VPPRPPPE\}) \cdot \text{COEFROZ} \cdot \{FNCPPRE\}$ <p>Edo:</p>

$$\{FRCPPRE\} = \text{Erf} \left(\frac{2 \cdot \{VPPRPPRE\}}{AV} \right) \cdot \text{COEFROZ} \cdot \{FNCPPRE\}$$

OREKA DINAMIKOAREN EKUAZIOAK. BARNEKO ERAZTUNA, KAIOLA ETA ARRABOLAK

Diagrama dinamiko

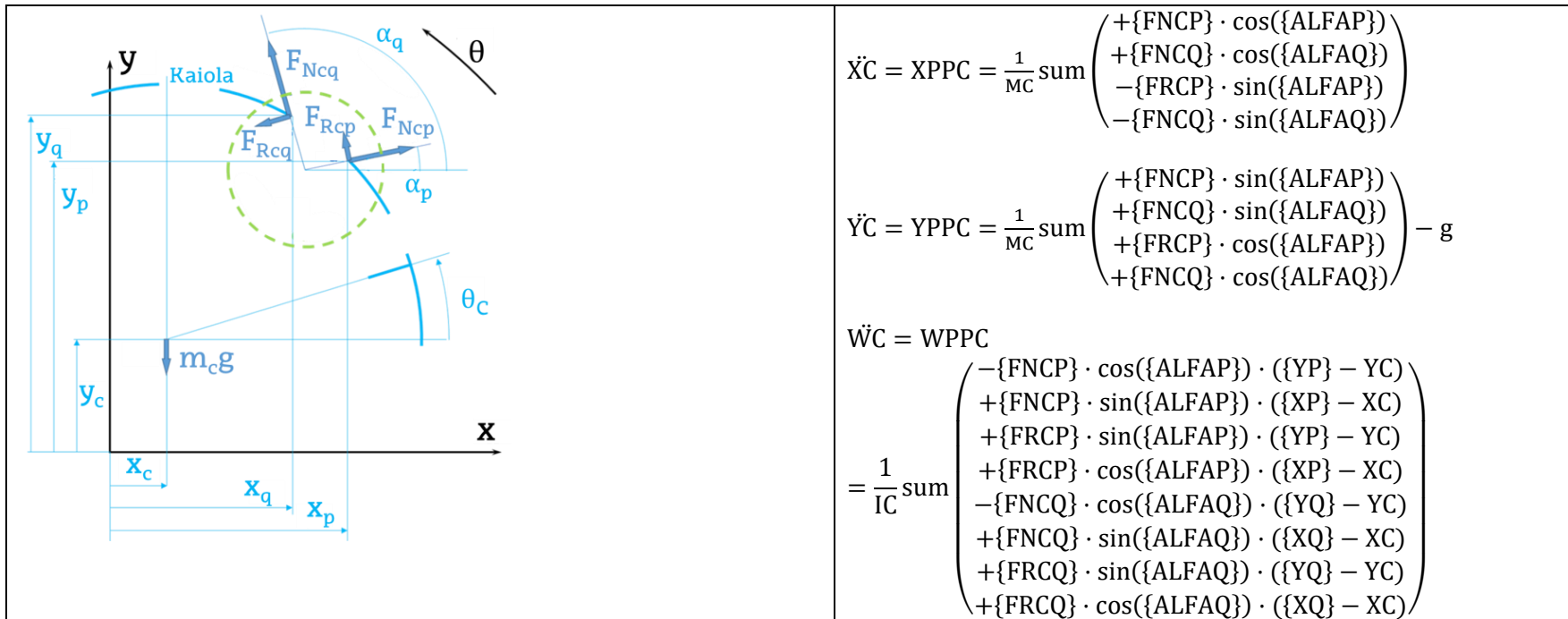


Oreka dinamikoaren ekuazioak

$$\ddot{X}I = XPPi = \frac{1}{MI} \langle \text{sum} \left(\begin{array}{l} -\{FNI\} \cdot \sin(\{ALFAI\}) \\ +\{FRI\} \cdot \cos(\{ALFAI\}) \end{array} \right) + FX \rangle$$

$$\ddot{Y}I = YPPI = \frac{1}{MI} \langle \text{sum} \left(\begin{array}{l} -\{FNI\} \cdot \cos(\{ALFAI\}) \\ -\{FRI\} \cdot \sin(\{ALFAI\}) \end{array} \right) + FY \rangle - g$$

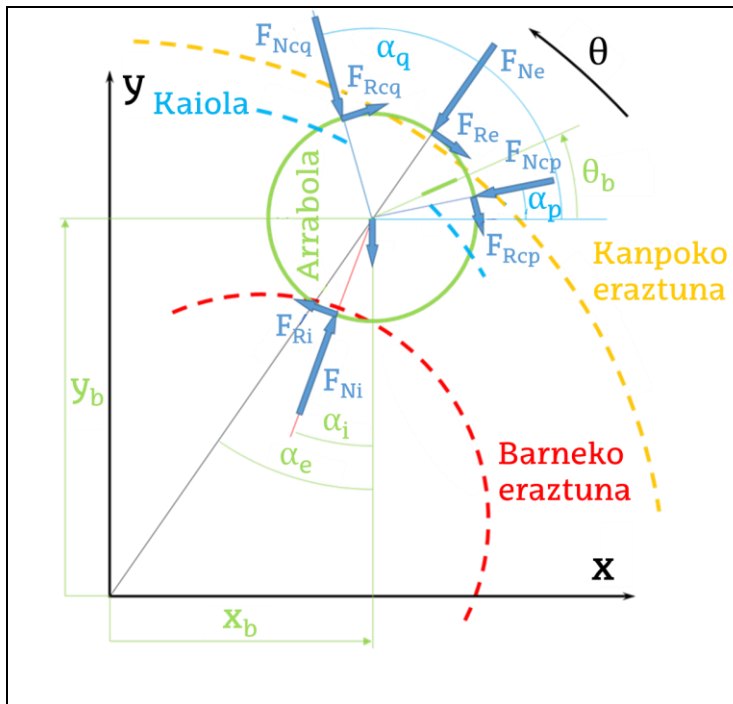
$$\ddot{W}I = WPPI = \text{ALPHA}$$



$$\ddot{X}_C = \dot{X}_{PPC} = \frac{1}{m_C} \sum \begin{pmatrix} +\{F_{NCP}\} \cdot \cos(\{ALFAP\}) \\ +\{F_{NCQ}\} \cdot \cos(\{ALFAQ\}) \\ -\{F_{RCP}\} \cdot \sin(\{ALFAP\}) \\ -\{F_{RCQ}\} \cdot \sin(\{ALFAQ\}) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{Y}_C = \dot{Y}_{PPC} = \frac{1}{m_C} \sum \begin{pmatrix} +\{F_{NCP}\} \cdot \sin(\{ALFAP\}) \\ +\{F_{NCQ}\} \cdot \sin(\{ALFAQ\}) \\ +\{F_{RCP}\} \cdot \cos(\{ALFAP\}) \\ +\{F_{RCQ}\} \cdot \cos(\{ALFAQ\}) \end{pmatrix} - g$$

$$\ddot{W}_C = \dot{W}_{PPC} = \frac{1}{I_C} \sum \begin{pmatrix} -\{F_{NCP}\} \cdot \cos(\{ALFAP\}) \cdot (\{Y_P\} - Y_C) \\ +\{F_{NCP}\} \cdot \sin(\{ALFAP\}) \cdot (\{X_P\} - X_C) \\ +\{F_{RCP}\} \cdot \sin(\{ALFAP\}) \cdot (\{Y_P\} - Y_C) \\ +\{F_{RCP}\} \cdot \cos(\{ALFAP\}) \cdot (\{X_P\} - X_C) \\ -\{F_{NCQ}\} \cdot \cos(\{ALFAQ\}) \cdot (\{Y_Q\} - Y_C) \\ +\{F_{NCQ}\} \cdot \sin(\{ALFAQ\}) \cdot (\{X_Q\} - X_C) \\ +\{F_{RCQ}\} \cdot \sin(\{ALFAQ\}) \cdot (\{Y_Q\} - Y_C) \\ +\{F_{RCQ}\} \cdot \cos(\{ALFAQ\}) \cdot (\{X_Q\} - X_C) \end{pmatrix}$$

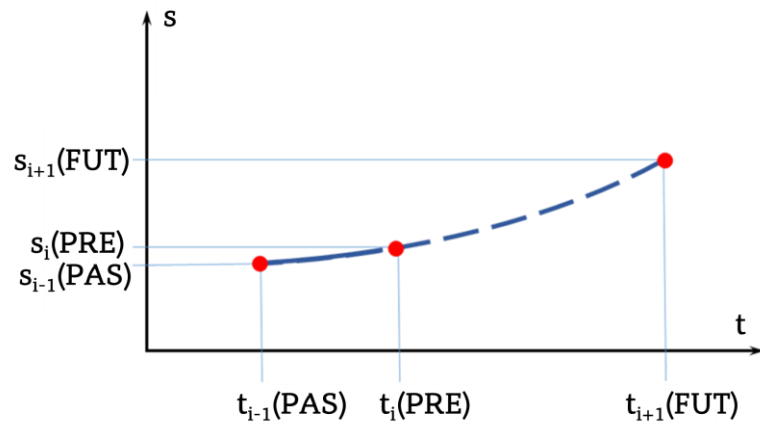


$$\{\dot{X}\dot{B}\} = \{XPPB\} = \frac{1}{MR} \begin{pmatrix} +\{FNI\} \cdot \sin\{ALFAI\} \\ -\{FRI\} \cdot \cos\{ALFAI\} \\ -\{FNE\} \cdot \sin\{ALFAE\} \\ +\{FRE\} \cdot \cos\{ALFAE\} \\ -\{FNCP\} \cdot \cos\{ALFAP\} \\ +\{FRCP\} \cdot \sin\{ALFAP\} \\ -\{FNCQ\} \cdot \cos\{ALFAQ\} \\ +\{FRCQ\} \cdot \sin\{ALFAQ\} \end{pmatrix}$$

$$\{\dot{Y}\dot{B}\} = \{YPPB\} = \frac{1}{MR} \begin{pmatrix} +\{FNI\} \cdot \cos\{ALFAI\} \\ +\{FRI\} \cdot \sin\{ALFAI\} \\ -\{FNE\} \cdot \cos\{ALFAE\} \\ -\{FRE\} \cdot \sin\{ALFAE\} \\ -\{FNCP\} \cdot \sin\{ALFAP\} \\ -\{FRCP\} \cdot \cos\{ALFAP\} \\ -\{FNCQ\} \cdot \sin\{ALFAQ\} \\ -\{FRCQ\} \cdot \cos\{ALFAQ\} \end{pmatrix} - g$$

$$\{\ddot{W}\dot{B}\} = \{WPPB\} = -\frac{\{DW\}}{2 \cdot JR} (\{FRI\} + \{FRE\} + \{FRCP\} + \{FRCQ\})$$

$\ddot{S} = f(t, S, \dot{S})$ ITXURAKO HIGIDURAREN EKUAZIOEN EBAZPENA



TPRES aldiunean abiadura eta azelerazioak planteatu dira, TFUT aldiunean ekarpena duen magnitude bakarra azelerazioa izateko. Konbergentzia beharizanen arabera denbora urrats tamaina desberdinak erabiliz gero, eskema erosoena honakoa da:

$$X\dot{P}RE = \frac{XPRE - XPAS}{TPRE - TPAS}$$

$$X\ddot{P}RE = \frac{\frac{XFUT - XPRE}{TFUT - TPRE} - \frac{XPRE - XPAS}{TPRE - TPAS}}{TFUT - TPRE}$$

Horrela, integratu beharreko ekuazioetan azelerazioa posizioaren eta abiaduraren menpe adieraziz gero ($\ddot{X} = f(X, \dot{X})$), X aldagaiaren hurrengo aldiuneko balioa aurreko ekuazioan aska daiteke:

$$XFUT = XPRE + (XPRE - XPAS) \cdot \frac{(TFUT - TPRE)}{(TPRE - TPAS)} + f(XPRE, X\dot{P}RE) \cdot (TFUT - TPRE)^2$$

