



Tres teoremas clásicos de geometría: Napoleón, Morley y Pascal

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Maite Puerta Beldarrain

Trabajo dirigido por
Raúl Ibañez Torres

Leioa, 21 de junio de 2019

Índice general

Introducción	v
1. Teorema de Napoleón	1
1.1. Historia	1
1.2. Enunciado	2
1.3. Conceptos básicos	3
1.4. Demostraciones	4
1.4.1. Usando el punto de Fermat	4
1.4.2. Usando rotaciones	6
1.4.3. Utilizando números complejos	8
1.5. Otras demostraciones y generalizaciones	9
2. Teorema de Morley	11
2.1. Historia	11
2.2. Enunciado	12
2.3. Demostraciones	12
2.3.1. Demostración propuesta por John Conway	12
2.3.2. Demostración propuesta por Alain Connes	15
3. Teorema de Pascal	17
3.1. Historia	17
3.2. Enunciado	17
3.3. Demostraciones en el plano afín	18
3.3.1. Utilizando el teorema de Menelao	19
3.3.2. Demostración 2	21
3.4. Demostraciones en el plano proyectivo	22
3.4.1. Conceptos básicos de geometría proyectiva	22
3.4.2. Usando la razón doble	29
3.4.3. Utilizando proyecciones y perspectivas	31
3.5. Demostraciones en el plano proyectivo sobre un cuerpo alge- braicamente cerrado	34

A. Demostraciones Teoremas de Base	39
A.1. Demostraciones plano proyectivo dual	39
A.2. Demostraciones de rectas proyectivas	39
A.3. Demostraciones de la razón doble	42
A.4. Demostraciones de cónicas proyectivas	43
B. Demostraciones en el plano proyectivo sobre un cuerpo al- gebraicamente cerrado	47
Bibliografía	51

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de tres teoremas clásicos de la geometría, que son el teorema de Napoleón, el teorema de Morley y el teorema del hexagrama místico de Pascal, analizando diferentes técnicas de demostración de los mismos. Se han incluido tanto demostraciones clásicas que fueron desarrolladas en la época en la cual fueron formulados los teoremas, como la demostración del teorema de Napoleón utilizando el punto de Fermat, así como pruebas que han sido obtenidas en función de las nuevas teorías matemáticas que se han ido introduciendo a lo largo de la historia de las matemáticas, como la geometría proyectiva o la geometría algebraica, para el teorema de Pascal, y e incluso demostraciones más modernas como las demostraciones de John Conway y Alain Connes del teorema de Morley. Así mismo el tipo de herramientas matemáticas utilizadas han sido muy diversas (geometría clásica, números complejos, teoría de grupos, geometría proyectiva, geometría algebraica).

El primer capítulo está dedicado al teorema de Napoleón. Este resultado nos asegura que dado un triángulo cualquiera, la unión de los centros de los triángulos equiláteros exteriores (respectivamente interiores) formados en los lados del triángulo inicial, es equilátero. Este triángulo equilátero se denomina triángulo exterior (respectivamente interior) de Napoleón. En este capítulo se realizarán tres demostraciones del teorema, la primera utilizando el punto de Fermat, la segunda rotaciones y la tercera números complejos.

El segundo capítulo está dedicado al teorema de Morley. Este teorema, descubierto en 1899, afirma que la intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera, determina un triángulo equilátero. En este capítulo se verán dos demostraciones, una constructiva, propuesta por John Conway en 1995, y otra algebraica, propuesta por Alain Connes en 2003.

El tercer capítulo está dedicado al teorema de Pascal. Este clásico teorema establece que, dado un hexágono inscrito en una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos del hexágono están alineados en una recta, llamada línea de Pascal. Este teorema se desarrollará, a diferencia de los dos primeros que solo se desarrollaron en el plano afín, en el plano proyectivo sobre un cuerpo cualquiera y sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. De este modo se irá aumentando gradualmente tanto el trabajo ne-

cesario para las demostraciones como las herramientas que intervienen en las mismas. Debido a esto, se verán una amplia variedad de demostraciones, entre ellas se encuentran dos demostraciones afines, las cuales serán únicamente para la circunferencia y en las que intervendrán el teorema de Menelao o propiedades de los cuadriláteros inscritos en circunferencias. También se incluirán dos demostraciones en el espacio proyectivo sobre un cuerpo cualquiera, que utilizaran herramientas como la razón doble, las proyectividades y las perspectivas y teoremas como el teorema de Chasles o la construcción de Steiner. Por último, se realizará una demostración utilizando curvas cúbicas, en el espacio proyectivo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, utilizando para ella el teorema de Cayley–Bacharach.

Capítulo 1

Teorema de Napoleón

1.1. Historia

Este primer capítulo está dedicado a un teorema clásico de geometría que lleva el nombre del emperador y general francés Napoleón Bonaparte (1769-1821), el Teorema de Napoleón.

Es sabido que Napoleón tenía mucho interés en la ciencia y especialmente en las matemáticas, sobre todo en la geometría. Entre sus amistades había muchos matemáticos, entre los que estaban Joseph Fourier (1768-1830), Gaspard Monge (1746-1818), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) ó Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

La primera publicación que se tiene actualmente de este teorema es en la revista *“The Ladies’ Diary”* en el año 1825. En esta publicación William Rutherford (1798–1871) expuso el siguiente enunciado

Trácese triángulos equiláteros (los vértices apuntando todos hacia fuera o todos hacia dentro) sobre los tres lados de un triángulo ABC: entonces las líneas que unen los centros de gravedad de estos tres triángulos rectángulos forman un triángulo equilátero. Se requiere demostración.

pidiendo a los lectores una demostración del actualmente conocido como teorema de Napoleón. Al año siguiente la revista publicó dos de las muchas demostraciones que recibió, una geométrica y otra analítica.

Además, después de ser publicado en *“The Ladies’ Diary”* este resultado fue redescubierto independientemente por muchas personas. También hay pruebas de que ya había aparecido, con anterioridad, en forma de tres ejercicios de un examen para obtener la Medalla de Oro de la Universidad de Dublín, en 1820. Estos hechos indican que, aunque no se tengan pruebas de ello, la primera vez que se enunció el teorema de Napoleón no fue en el año 1825.

Además, no hay constancia de que verdaderamente fuera Napoleón su descubridor. Son varios los autores que apoyan la opinión que Coxeter y Greitzer compartían en su libro *“Geometry revisited”* negando que el nivel matemático del general fuera suficiente para demostrar y enunciar este teorema. Muchos estudiosos citan a los matemáticos Evangelista Torricelli (1608-1647), Bonaventura Cavalieri (1598-1647) o Vincenzo Viviani (1622-1703) como descubridores del teorema, puesto que habían estudiado figuras en las que se disponían triángulos equiláteros en los lados de un triángulo y podrían haber obtenido el resultado. Otras fuentes apuntan al matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665).

Por tanto, este es un teorema que alberga mucho debate sobre sus orígenes y sobre su descubridor.

1.2. Enunciado

Este teorema nos muestra una construcción con la cual partiendo de un triángulo cualquiera se llega a un triángulo equilátero, ya sea el triángulo exterior o interior de Napoleón.

Teorema 1.2.1. Teorema de Napoleón *Dado un triángulo ABC cualquiera, entonces la unión de los centros de los tres triángulos equiláteros exteriores (respectivamente interiores), formados en los tres lados de dicho triángulo, forman un triángulo equilátero denominado triángulo exterior (respectivamente interior) de Napoleón.*

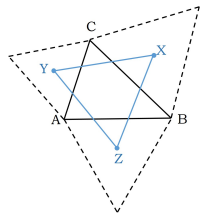


Figura 1.1: Triángulo exterior

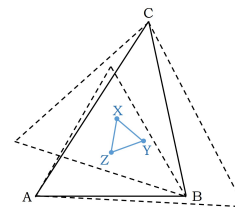


Figura 1.2: Triángulo interior

Algunas de las peculiaridades de este teorema son las siguientes:

Observación 1.2.1. La diferencia entre las áreas de los triángulos exterior e interior de Napoleón, es igual al área del triángulo inicial.

Demostración. Esta demostración puede encontrarse en [9], pág.64. □

Observación 1.2.2. El teorema es cierto si los tres puntos, A, B, C son colineales, es decir, en un triángulo degenerado.

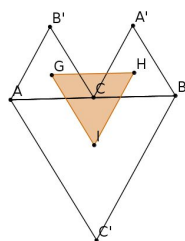


Figura 1.3: observación 1.2.2

En el caso de un triángulo degenerado no hay distinción entre el triángulo exterior e interior de Napoleón, ya que es una simetría respecto de la recta que contiene a los tres puntos. Mas adelante se comentarán las demostraciones del teorema de Napoleón, expuestas en este trabajo, que son válidas para un triángulo degenerado.

1.3. Conceptos básicos

Antes de realizar las demostraciones se recordarán algunas definiciones y propiedades básicas de geometría euclídea que serán muy recurrentes durante todo el trabajo, en especial en este primer capítulo.

Definición 1.3.1. El punto de Fermat de un triángulo es un punto tal que la suma de las distancias de los tres vértices del triángulo al mismo es la mínima posible.

Lema 1.3.1. *Un cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia, es decir, tiene sus cuatro vértices en una circunferencia, si y solo si sus ángulos opuestos son suplementarios.*

Lema 1.3.2. postulado LAL: *Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes a dos lados y al ángulo incluido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.*

Asociados a cada triángulo existen algunos lugares geométricos especiales que vamos a recordar:

Las **medianas** son cada una de las rectas que unen el punto medio de un lado del triángulo con el vértice opuesto. Las **mediatrices** son cada una de las rectas perpendiculares a un lado del triángulo en su punto medio. Las **bisectrices** son cada una de las rectas que dividen a cada uno de los ángulos del triángulo por la mitad. El **baricentro** (o centroide) es el punto de corte de las 3 medianas del triángulo. El **circuncentro** es el punto de corte de las tres mediatrices y es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo. El **incentro** es el punto de intersección de las tres bisectrices y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Proposición 1.3.3. *En un triángulo equilátero las medianas, las bisectrices y las mediatrices coinciden, por lo que el baricentro, incentro y circuncentro también coincide.*

1.4. Demostraciones

Este resultado posee un gran número de demostraciones que utilizan distintas herramientas matemáticas, que van desde la geometría analítica a los números complejos. En esta sección se expondrán tres de ellas.

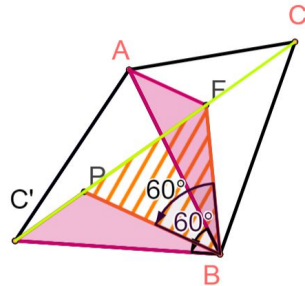
1.4.1. Usando el punto de Fermat

Esta es una demostración clásica de la geometría euclídea. Las herramientas matemáticas utilizadas en ella son las congruencias de triángulos y el punto de Fermat.

Demostración del teorema de Napoleón

Dado un triángulo ABC construimos los triángulos equiláteros exteriores ABC' , ACB' , BCA' con centros G , H e I respectivamente.

Vamos a utilizar el punto de Fermat del triángulo ABC para demostrar que los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ se cortan en un punto. Posteriormente se verá que este punto es también el punto de intersección de las tres circunferencias circunscritas de los triángulos equiláteros exteriores.



Sea F el punto de Fermat del triángulo ABC . Si rotamos 60° el triángulo BAF respecto a B , obtenemos el triángulo $BC'P$ ya que hemos llevado el punto A a C' y el punto F a P . Como la rotación es un movimiento rígido las longitudes se conservan por lo que, $\overline{BF} = \overline{BP}$ y $\overline{AF} = \overline{C'P}$.

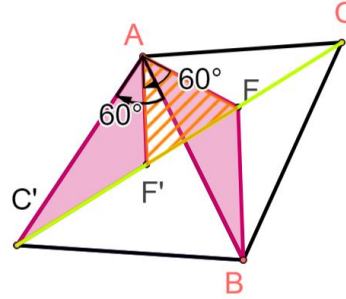
Podemos ver que el triángulo BFP es equilátero ya que debido a la rotación tiene dos lados iguales, $\overline{BF} = \overline{BP}$, y el ángulo inscrito entre estos dos lados es de 60° . Como consecuencia, sus aristas tienen la misma longitud: $\overline{BF} = \overline{FP}$. Como el punto de Fermat, F , es aquel que minimiza la distancia a los vértices A , B , C y además:

$$\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} = \overline{C'P} + \overline{PF} + \overline{CF},$$

claramente esta distancia va a ser mínima cuando C' , P , F y C están alineados. Por lo que F está en el segmento $\overline{CC'}$. Análogamente, F también está contenido en los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, por lo que es evidente que estos tres segmentos se cortan en el punto F .

Vamos a demostrar que F está en la circunferencia circunscrita de centro G . Para ello vamos a ver que el cuadrilátero $FAC'B$ tiene sus ángulos opuestos suplementarios.

Si de forma análoga a lo realizado anteriormente hacemos una rotación de 60° (en el sentido de las agujas del reloj) del triángulo AFB respecto a A , obtenemos el triángulo $AF'C'$. Utilizando la definición del punto de Fermat obtenemos que F' está en la recta CC' y que el triángulo AFF' es equilátero, por lo que $\angle AFF' = \angle AFC' = 60^\circ$.



Como los triángulos AFF' y BPF son equiláteros y los puntos F' y P colineales entonces, $\angle AFB = \angle AFF' + \angle PFB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. En conclusión, los ángulos $\angle AFB$ y $\angle BC'A$ son suplementarios.

Si miramos los otros dos ángulos del cuadrilátero:

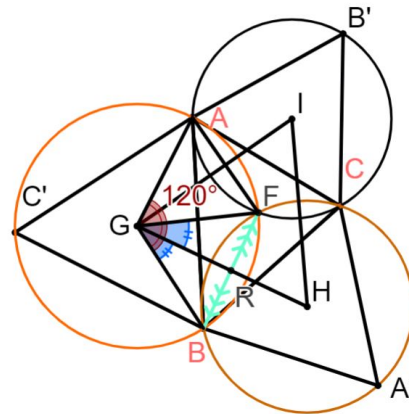
$$\angle FBC' + \angle C'AF = 60^\circ + 60^\circ + \angle ABF + \angle FAB = 120^\circ + (180^\circ - 120^\circ) = 180^\circ.$$

Por lo que también son complementarios. Por el lema 1.3.1, el cuadrilátero $FAC'B$ es inscriptible. Además, la circunferencia en la cual está inscrito es la misma que la del triángulo ABC' (que es única), de centro G .

Con el mismo argumento demostramos que F está en la circunferencia circunscrita de centros H e I . Por tanto, F está en la intersección de las tres circunferencias.

Una vez que sabemos que F es el punto de intersección de los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y de las tres circunferencias circunscritas podemos demostrar finalmente que GHI es un triángulo equilátero.

Sea R la intersección de los segmentos \overline{GH} y \overline{FB} . Como el segmento \overline{FB} tiene sus extremos en la intersección de las circunferencias de centros H y G se cumple que los segmentos son perpendicular y además como $\overline{GF} = \overline{GB}$ y $\overline{HB} = \overline{HF}$, los triángulos GFH y GHB son congruentes. Debido a esto sus alturas, son iguales, es decir, $\overline{BR} = \overline{RF}$. Aplicando el postulado LAL resulta que los triángulos BGR y RGF son congruentes, por lo que $\angle BGR = \angle RGF$. Es decir, $\angle BGH = \angle HGF$



Análogamente, $\angle FGI = \angle IGA$. Lo que nos permite llegar a la conclusión de que $\angle BGA = 2\angle HGI$. Por otro lado, por las propiedades de los triángulos equiláteros sabemos que $\angle ABG = \angle BAG = 30^\circ$. Por lo tanto, $\angle BGA = 120^\circ$.

Finalmente, como $\angle BGA = 2\angle HGI = 120^\circ$, se deduce que $\angle HGI = 60^\circ$. Análogamente, $\angle IHG = \angle GIH = 60^\circ$. Por lo que el triángulo GHI es equilátero. \square

Esta demostración no es aplicable a un triángulo degenerado. El principal motivo de ello es que, aunque va a haber un punto en el que se corten los tres segmentos y las tres circunferencias circunscritas, este punto no va a ser el punto de Fermat. Un ejemplo de esto lo observamos en la figura 1.4 donde el punto de Fermat es el punto B pero este punto no está en el segmento CC' .

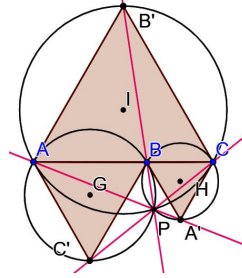


Figura 1.4: Triángulo degenerado

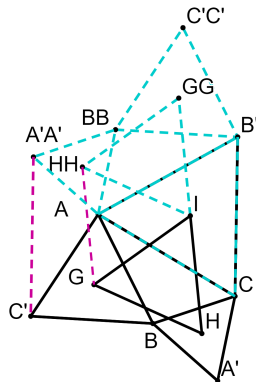
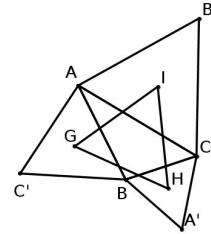
1.4.2. Usando rotaciones

Esta es una demostración clásica de la geometría euclidea que consiste en hacer rotaciones en torno a cada uno de los vértices del triángulo exterior de Napoleón con el fin de demostrar que es un triángulo equilátero.

Demostración del teorema de Napoleón

Dado un triángulo ABC , construimos los triángulos equiláteros exteriores ABC' , ACB' , BCA' con centros G , H , e I , respectivamente.

Realizamos una rotación del plano, Φ , de 120° con centro I en sentido horario. Denotaremos por TT a la rotación del punto T , mediante Φ .



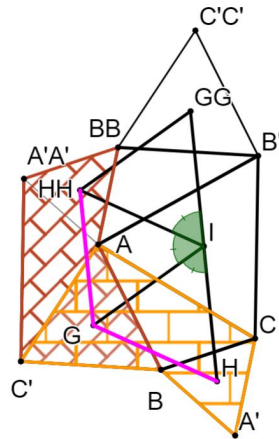
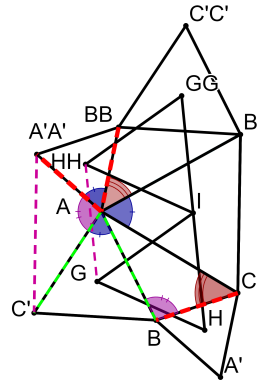
Se puede ver que el triángulo CAB' se mantiene invariante por la rotación, $\Phi(CAB') = CAB'$. Además Φ es un movimiento rígido, luego \overline{GHI} y $\overline{HH.GG.I}$ son congruentes y $\overline{GH} = \overline{GG.HH}$. Además $\angle BCA = \angle BB.A.B'$, $\angle GHI = \angle GG.HH.I$.

La suma de los ángulos cuyo vértice es A tiene que ser 360° , pero sabemos que los triángulos ABC' , ACB' y $A.A'A'.BB$ son equiláteros y sus ángulos son de 60° , en conclusión

$$\angle BAC + \angle BB.A.B' + \angle A'A'.A.C' = 180^\circ.$$

Como $\angle BAC + \angle BCA + \angle A'A'.A.C' = 180^\circ$, podemos concluir que, $\angle A'A'.A.C' = \angle ABC$.

Como los lados adyacentes de estos ángulos también son iguales, $C'A = BA$ y $A'A'.A = BB.A = BC$ (los lados de un triángulo equilátero son iguales y el giro preserva las longitudes), el postulado LAL permite afirmar que los triángulos ABC y $C'.A.A'A'$ son congruentes.

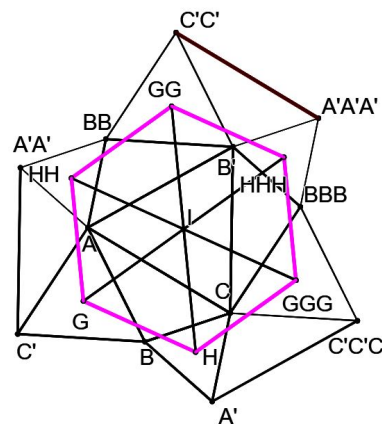


Ahora, utilizando la congruencia de los triángulos que los compone, podemos afirmar que los pentágonos $A.BB.A'A'.C'.B$ y $B.A'.C.A.C'$ son congruentes. De donde se concluye que $\overline{GH} = \overline{G.HH}$ y por tanto $\overline{GH} = \overline{GG.HH} = \overline{G.HH}$.

Por último, si observamos los triángulos $HH.G.I$ y GHI vemos que tienen un lado en común, \overline{GI} , y además $\overline{HH.I} = \overline{IH}$ y $\overline{G.HH} = \overline{GH}$, luego estos dos triángulos son congruentes. En particular, $\angle HIG = \angle G.I.HH = \angle HH.I.GG$.

Si hacemos otra rotación del plano de 120° con centro I y argumentamos del mismo modo que antes, obtenemos que $\overline{HH.GG} = \overline{GG.HHH} = \overline{HHH.GGG}$. y que los triángulos $GG.HH.I$, $GG.HHH.I$ y $GGG.HHH.I$ son congruentes.

Como $\Phi^3 = Id$ si repetimos de nuevo la rotación del plano no añadimos más elementos. Argumentando como antes podemos concluir que $\overline{H.GGG} = \overline{GH}$ y que los triángulos GHI , $GGG.H.I$ y $GGG.HHH.I$ son congruentes.



Con estas rotaciones hemos creado seis triángulos congruentes a GHI que han formado un hexágono regular con centro el punto I . Debido a estas congruencias el ángulo interior de cada uno de los triángulos en el vértice I es el mismo por lo que,

$$6\angle HIG = 360^\circ \implies \angle HIG = 60^\circ.$$

Análogamente con los ángulos $\angle IGH$ y $\angle GHI$. De este modo concluiremos que GHI es un triángulo equilátero. \square

Esta demostración es aplicable a un triángulo degenerado. Los polígonos utilizados para ver que los segmentos del tipo GH y $G.HH$ son congruentes, razonamiento que nos permite fundamentalmente demostrar el teorema, son en este caso los que vemos en verde en la figura 1.5 y es evidente que son congruentes. Una vez tenemos esta congruencia de polígonos es evidente que la demostración es válida para un triángulo degenerado.

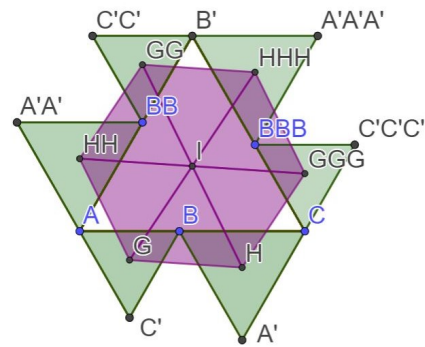


Figura 1.5: Triángulo degenerado

1.4.3. Utilizando números complejos

Esta es una demostración euclidea que se basa principalmente en la utilización de los números complejos como herramienta principal para demostrar el teorema de Napoleón.

En esta demostración se van a utilizar los números complejos como rotaciones en el plano de ángulo el argumento del número complejo. De este modo se dota de sentido a la multiplicación de un vector del plano por un número complejo. Hay que tener en cuenta que esta rotación es en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Lema 1.4.1. *Sea ABC un triángulo orientado positivamente, entonces, es un triángulo equilátero si y solo si se cumple $\vec{a} + j\vec{b} + j^2\vec{c} = 0$, donde j es la raíz cubica de la unidad y $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son los vectores de posición de los puntos A, B y C respectivamente.*

Demostración. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ los vectores de posición de los puntos A, B y C respectivamente, y j la raíz cubica de la unidad. Por tanto, el vector $\vec{a} - \vec{c}$ es el vector correspondiente al lado AC del segmento mientras que $\vec{b} - \vec{c}$ corresponde al lado BC .

El triángulo ABC es equilátero si y sólo si los vectores correspondientes a los lados del triángulo tienen la misma longitud y si una rotación de 60°

en sentido de las agujas del reloj, de centro el punto C, del vector $\vec{b} - \vec{c}$ da como resultado el vector $\vec{a} - \vec{c}$. Por tanto, si rotamos 120° el vector $\vec{b} - \vec{c}$ en dirección contrario al de las agujas del reloj entonces estos dos vectores están en direcciones opuestas. Por tanto la condición de que sea equilátero se cumplirá si y solo si, $\vec{a} - \vec{c} + j(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$, es decir, $\vec{a} + j\vec{b} - (1 + j)\vec{c} = \vec{0}$. Utilizando que $1 + j + j^2 = 0$. Obtenemos que $\vec{a} + j\vec{b} + j^2\vec{c} = \vec{0}$. \square

Demostración del teorema de Napoleón

Dado un triángulo cualquiera ABC orientado positivamente, definimos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ como los vectores de posición de los puntos A, B y C respectivamente y $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ la raíz cúbica de la unidad.

Construimos los triángulos equiláteros ABC', CAB', BCA' los cuales cumplen:

$$\vec{c}'j^2 + \vec{b}'j + \vec{a}' = 0, \quad \vec{b}'j^2 + \vec{a}'j + \vec{c}' = 0, \quad \vec{a}'j^2 + \vec{c}'j + \vec{b}' = 0.$$

Entonces si G, H e I son los centros de los triángulos ABC', CAB', BCA' , sus vectores de posición respectivamente son:

$$\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{c}' + \vec{b}' + \vec{a}'), \quad \vec{h} = \frac{1}{3}(\vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}'), \quad \vec{i} = \frac{1}{3}(\vec{b}' + \vec{c}' + \vec{a}').$$

Si calculamos,

$$\begin{aligned} 3(\vec{g} + \vec{h}j + \vec{i}j^2) &= \vec{c}' + \vec{b}' + \vec{a}' + j(\vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}') + j^2(\vec{b}' + \vec{c}' + \vec{a}') \\ &= (\vec{b}' + j\vec{c}' + j^2\vec{a}') + j(\vec{a}' + j\vec{b}' + j^2\vec{c}') + j^2(\vec{c}' + j\vec{a}' + j^2\vec{b}') = 0 \end{aligned}$$

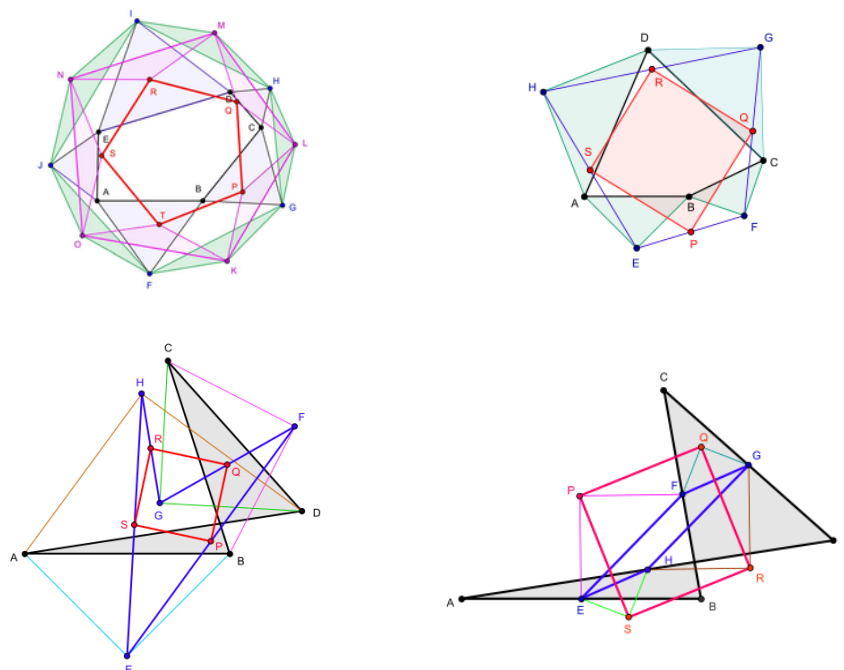
Por lo que el triángulo GHI es equilátero. \square

Esta demostración también es válida para un triángulo degenerado ya que no depende en ningún momento del triángulo ABC o de la disposición de dichos puntos.

1.5. Otras demostraciones y generalizaciones

Hemos explicado tres demostraciones de este teorema clásico de la geometría, pero se dejará a disposición del lector otras como son las demostradas en [13]. En este artículo se encuentran principalmente otras tres demostraciones distintas que utilizan herramientas matemáticas como trigonometría elemental, análisis y números complejos. También se pueden encontrar demostraciones basadas más en el álgebra lineal como en [15].

Existen algunas generalizaciones del teorema de Napoleón, como el teorema de Petr–Douglas–Neumann. Este teorema afirma que partiendo de un polígono de n lados se puede obtener un polígono regular n lados en n-2 transformaciones cada una de las cuales también dará un polígono de n lados.



Lógicamente en el caso de que el polígono tenga tres lados tenemos el teorema de Napoleón. La demostración de esta generalización la podemos encontrar en [16].

Capítulo 2

Teorema de Morley

2.1. Historia

Este capítulo está dedicado al teorema de Morley, un resultado sorprendente de la geometría euclídea que generó mucha curiosidad e interés.

Frank Morley (1860-1937) fue un matemático conocido principalmente por su enseñanza e investigación en los campos del álgebra y la geometría.

Morley descubrió este teorema en 1899 y lo publicó en 1900 en el artículo “*On the Metric Geometry of the Plane n -line*” (véase [17]) en la revista American Mathematical Society Translations. En esta publicación Morley demostró varios teoremas, aunque no estaban enunciados con la estructura habitual matemática de teorema demostración. Morley no demostró ni enunció de forma directa este resultado ya que era una consecuencia de su trabajo principal, en el cual presentó los 18 casos de triángulos equiláteros de Morley.

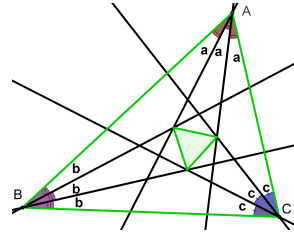
Con la popularización y la proliferación de pruebas, se han transmitido muchos errores sobre el origen, y sobre las primeras pruebas impresas de este teorema. Además, durante las primeras publicaciones este teorema no fue acompañado del nombre de Morley. Fue en 1913 donde por primera vez se publicó una demostración de este teorema, aunque este artículo tampoco reconoció a Morley como autor.

A pesar de que Morley no publicó una demostración directa, debido a la sorpresa que causó este resultado, en poco tiempo aparecieron varias demostraciones. Existen al menos 27 pruebas diferentes entre las que se encuentran las presentadas por autores como Alain Connes, John Conway, Edsger Dijkstra, D.J. Newmann, Roger Penrose, M.R.F. Smyth, Brian Stonebridge, entre otros autores. Las demostraciones son muy variadas, realizadas con diferentes herramientas matemáticas, las hay trigonométricas, algebraicas, analíticas o constructivas.

2.2. Enunciado

Este es un teorema clásico de geometría cuya belleza radica en la gran geometría que tiene la construcción que como fin te da el triángulo de Morley.

Teorema 2.2.1. Teorema de Morley *Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera son los vértices de un triángulo equilátero. Este triángulo equilátero se llama triángulo de Morley.*



A diferencia de muchos otros resultados geométricos el teorema de Morley no tiene un resultado análogo para geometrías esféricas e hiperbólicas.

2.3. Demostraciones

En esta sección se van a exponer dos demostraciones del teorema de Morley, las propuestas por John Conway y Alain Connes. La primera es una demostración constructiva mientras que la segunda es algebraica.

2.3.1. Demostración propuesta por John Conway

El matemático inglés John Conway (1937), inventor del conocido juego de la vida y que ha trabajado en campos muy diversos de las matemáticas, como la teoría de grupos finitos, la teoría de cuerdas, la teoría de números, la teoría combinatoria de juegos y la teoría de la codificación, presentó su demostración del teorema de Morley en 1995.

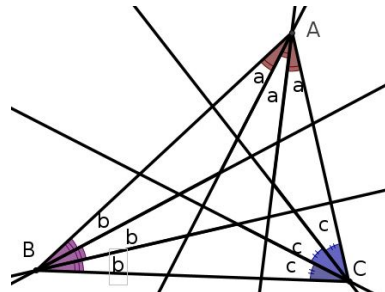
Demostración del Teorema de Morley

Dado un triángulo ABC definimos:

$$a = \frac{\angle BAC}{3}, b = \frac{\angle CBA}{3}, c = \frac{\angle ACB}{3}.$$

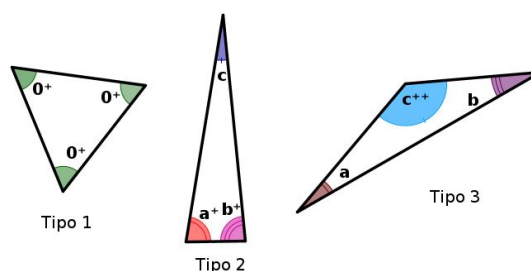
Debido a que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , entonces $a + b + c = 60^\circ$. Dado un ángulo x , se denota $x^+ = x + 60^\circ$.

A partir de los ángulos a , b , c del triángulo ABC se van a construir tres tipos de triángulos:



- (i) Tipo 1: triángulo equilátero, $\{0^+, 0^+, 0^+\}$.

- (ii) Tipo 2: triángulos en los que hay dos ángulos mayores de 60° , es decir, hay dos ángulos del tipo x^+ ,
 $\{a, b^+, c^+\}$, $\{a^+, b, c^+\}$, $\{a^+, b^+, c\}$.
- (iii) Tipo 3: triángulos en los que un ángulo es mayor de 120° , es decir, del tipo x^{++} ,
 $\{a^{++}, b, c\}$, $\{a, b^{++}, c\}$, $\{a, b, c^{++}\}$.



Se puede comprobar que estas agrupaciones son verdaderamente triángulos, es decir, sus ángulos suman 180° .

En los próximos pasos vamos a construir un triángulo $A'B'C'$ mediante una construcción que nos asegurara que este triángulo cumple el teorema de Morley.

Comenzamos considerando un triángulo FED del tipo $\{0^+, 0^+, 0^+\}$ con lados de longitud uno. A continuación, se añaden los tres triángulos de tipo dos, con bases de longitud uno, al triángulo equilátero anterior (véase figura 2.2).

Finalmente, se van a encajar tres triángulos de tipo tres en la construcción anterior (véase figura 2.2). El tamaño de los siguientes triángulos se debe a la siguiente propiedad; se trazan dos segmentos desde el vértice de ángulo x^{++} al lado opuesto, de forma que formen un ángulo x^+ con dicho lado y tengan longitud uno, es decir, forman un triángulo isósceles dentro del triángulo de tipo tres (véase figura 2.1).

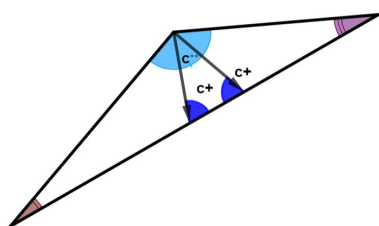


Figura 2.1: Tipo 3

Claramente en la construcción que hemos realizado los ángulos al rededor de los vértices E, F, y D del triángulo equilátero suman 360° .

Lo que vamos a demostrar en las siguientes líneas es que esta construcción, que como resultado nos da el triángulo $A'B'C'$, es verdaderamente un triángulo y además es equivalente al triángulo ABC.

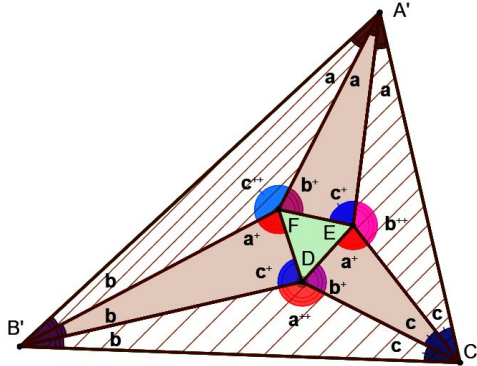


Figura 2.2: Construcción

Consideramos un triángulo del tipo tres junto a un triángulo de tipo dos adjuntado, por ejemplo, el triángulo $B'DC'$, de ángulos a^{++} , b , c , donde se denota por H el punto del lado $B'C'$ determinado por la construcción, con ángulo a^+ y de los posibles el más alejado del triángulo del tipo dos considerado (véase figura 2.3), y el triángulo $B'DF$. Por la consideración de antes se tiene:

- (i) $\angle B'HD = \angle B'FD = a^+$
- (ii) $\angle DB'H = \angle FB'D = b$

luego los triángulos $DB'H$ y $FB'D$ tiene sus ángulos iguales por lo que son proporcionales. Como además $\overline{FD} = \overline{DH} = 1$, ambos son congruentes. Por tanto, la construcción realizada es realmente un triángulo, que además tiene los mismos ángulos que el triángulo ABC , luego es proporcional a este. En conclusión, el triángulo determinado por las bisectrices de ABC , que salvo tamaño es DEF , es un triángulo equilátero.

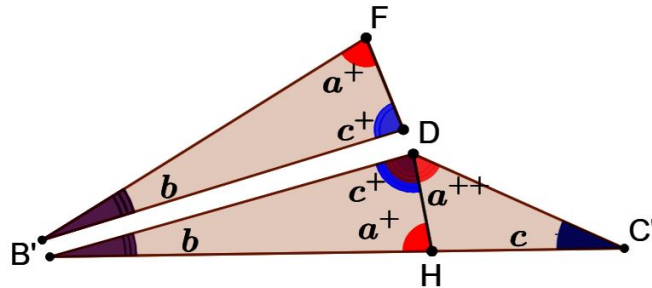


Figura 2.3: Ensamblaje

□

2.3.2. Demostración propuesta por Alain Connes

El matemático francés Alain Connes (1947), que trabaja en clasificación de operadores, K-teoría y teoría índices, publicó su demostración del teorema de Morley en 1998.

La demostración que vamos a realizar es una demostración algebraica para la cual se utiliza el subgrupo afín, cuya definición recordaremos a continuación.

Sea K un cuerpo conmutativo de característica distinta de 3 y G el grupo afín sobre K , formado por las matrices 2×2 , de la forma $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $a \neq 0$ y a, b pertenecen a K . Se define sobre este grupo el morfismo

$$\begin{aligned} \delta : G &\rightarrow K^* \\ g &\rightarrow \delta(g) = a \in K^*. \end{aligned}$$

El subgrupo $T = \text{Ker } \delta$ es el grupo de traslaciones, luego el grupo aditivo de K . Cada elemento $g \in G$, define la transformación,

$$g(x) = ax + b, \quad \forall x \in K,$$

la cual, si $a \neq 1$, tiene un punto fijo, el punto, $x = \frac{b}{1-a}$.

Teorema 2.3.1. Sean g_1, g_2, g_3 elementos de G tales que g_1g_2, g_3g_1, g_2g_3 , y $g_1g_2g_3$ no son traslaciones, es decir, no pertenecen al subgrupo T , y sea $j = \delta(g_1g_2g_3)$. Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

i) $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$,

ii) $j^3 = 1$, y $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, donde α, β, γ son los puntos fijos de las transformaciones asociadas a g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1 , respectivamente.

Demostración. Sea $g_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $g_i g_j = \begin{pmatrix} a_i a_j & a_i b_j + b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, el punto fijo de la transformación asociada al elemento $g_i g_j$ es $\frac{a_i b_j + b_i}{1 - a_i a_j}$.

La forma matricial del elemento $g_1^3 g_2^3 g_3^3$ es

$$g_1^3 g_2^3 g_3^3 = \begin{pmatrix} a_1^3 a_2^3 a_3^3 & b_3 a_1^3 a_2^3 (a_3^3 + a_3 + 1) + a_1^3 b_2 (a_2^2 + a_2 + 1) + b_1 (a_1^2 + a_1 + 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que la traslación asociada a este elemento, lo denotaremos por b , es $b = b_3 a_1^3 a_2^3 (a_3^3 + a_3 + 1) + a_1^3 b_2 (a_2^2 + a_2 + 1) + b_1 (a_1^2 + a_1 + 1)$.

Una vez vistas estas expresiones vamos a pasar a ver que las afirmaciones del enunciado son equivalentes. Lógicamente, si se cumple $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$ entonces $g_1^3 g_2^3 g_3^3(x) = x + 0$, por lo que esta condición es equivalente a que cumpla $\delta(g_1^3 g_2^3 g_3^3) = 1$, y $b = 0$. Además, $\delta(g_1^3 g_2^3 g_3^3) = 1$, es exactamente $j^3 = 1$. Además, $j \neq 1$ ya que por hipotiposis $g_1 g_2 g_3$ no pertenecen a T .

Lo único que tenemos que ver es que efectivamente $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ es equivalente a que $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$.

Sabemos que la expresión de \mathbf{b} , es la siguiente:

$$\mathbf{b} = b_3 a_1^3 a_2^3 (a_3^3 + a_3 + 1) + a_1^3 b_2 (a_2^2 + a_2 + 1) + b_1 (a_1^2 + a_1 + 1).$$

Utilizamos que $j = a_1 a_2 a_3$, entonces

$$\mathbf{b} = -j a_1^2 a_2 (a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(\alpha + j\beta + j^2\gamma),$$

donde α , β , γ son los puntos fijos de las transformaciones asociadas a los elementos $g_1 g_2$, $g_2 g_3$, $g_3 g_1$, respectivamente. Es decir serán:

$$\alpha = \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1 a_2}, \quad \beta = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3}, \quad \gamma = \frac{a_3 b_1 + b_3}{1 - a_3 a_1}$$

Como $a_i - j \neq 0$ ya que $j = a_1 a_2 a_3$ y ninguna combinación de dos a_i es 1 ya que por hipótesis, los elementos $g_i g_j$ no son traslaciones, por lo que j es distinto de a_k para todo $k \in \{1, 2, 3\}$. Por lo que entonces $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ si, y sólo, si $(\alpha + j\beta + j^2\gamma) = 0$. \square

Demostración del teorema de Morley

Consideramos $K = \mathbb{C}$ y g_1 la rotación centrada en el vértice A de ángulo $2a$, donde $3a = \angle BAC$, de forma similar se definen los elementos g_2 , g_3 .

Sabemos que $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$ ya que es una rotación de 360° . Los puntos fijos de las rotaciones $g_1 g_2$, $g_2 g_3$, $g_3 g_1$, se corresponden con los vértices del triángulo de Morley. Utilizando el teorema anterior vemos que $(\alpha + j\beta + j^2\gamma) = 0$, lo cual demuestra que el triángulo formado por la intersección de las trisectrices adyacentes es un triángulo equilátero. \square

Capítulo 3

Teorema de Pascal

3.1. Historia

El teorema del “hexagrama místico” de Pascal o teorema de Pascal muestra una propiedad básica de hexágonos inscritos en una cónica, y es uno de los resultados fundamentales de la geometría proyectiva plana.

Pascal fue un niño prodigio educado en casa por su padre. Además de ser un matemático muy brillante también hizo grandes contribuciones al estudio de fluidos y aclaro conceptos como la presión y el vacío. Además formuló junto a Fermat la teoría matemática de la probabilidad, fundamental en las matemáticas, la estadísticas y en los cálculos de la física teórica. Desgraciadamente Pascal tuvo una salud muy débil desde los 18 años y murió a los pocos meses de cumplir 39 años. Sus últimas palabras fueron “Que Dios nunca me abandone”.

Este teorema fue descubierto y demostrado en 1640 por Blaise Pascal (1623-1662) a la edad de 16 años. No se conoce cómo llegó el joven Pascal a su demostración, ya que su escrito original se perdió. Sin embargo en la actualidad hay multitud de demostraciones de este teorema.

Es una generalización del Teorema del hexágono de Pappus y del dual proyectivo del Teorema de Brianchon.

3.2. Enunciado

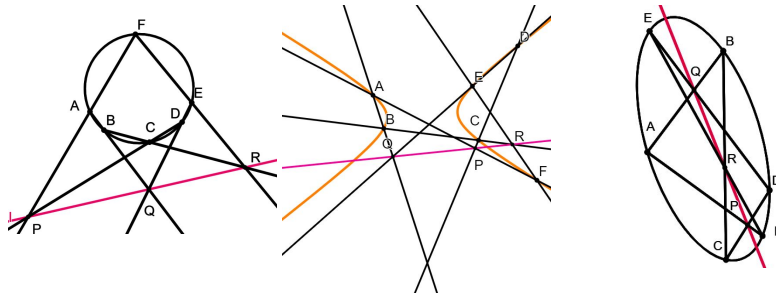
Se denotará por \mathbb{A}_K^n al espacio afín de dimensión n sobre el cuerpo K . Se puede identificar el espacio afín de dimensión n con K^n . También se denotará la recta que une dos puntos, por ejemplo A y B , como la recta AB .

El teorema de Pascal es un resultado de geometría que relaciona seis puntos de una cónica, es decir, un hexágono inscrito en una cónica, con la recta que contiene los tres puntos de intersección de los pares de lados opuestos (extendidos si es necesario). Este sorprendente resultado se puede enunciar tanto en el plano afín, \mathbb{A}_K^2 , como en el plano proyectivo, \mathbb{P}_K^2 .

Teorema 3.2.1. Teorema de Pascal: Sean A, B, C, D, E, F seis puntos distintos del plano y $P = AF \cap CD$, $Q = AB \cap DE$, $R = FE \cap BC$ la intersección de los pares de lados opuestos (extendidos si es necesario) del hexágono formado por estos puntos. Entonces, A, B, C, D, E, F son puntos de una cónica si y solo si P, Q y R están contenidos en una recta, llamada línea de Pascal.

En el plano proyectivo dos rectas siempre se cortan por lo que la existencia de los puntos P, Q y R del teorema de Pascal esta asegurada. Sin embargo, esto no ocurre en el plano afín, debido a esto se tienen las siguientes consideraciones: Si el hexágono solo tiene un par de lados opuestos paralelos, entonces, la línea de Pascal sera la unión de los dos puntos de intersección de los otros dos pares de lados opuestos, y esta recta sera paralela a los lados paralelos del hexágono. Si hay dos pares de lados opuestos paralelos, entonces, el hexágono es regular y no existe la línea de Pascal en el plano afín, por lo que se considera como línea de Pascal la línea del infinito del plano afín extendido.

En las siguientes imágenes se encuentran tres ejemplos de hexágonos inscritos en cónicas. En color rosa se ha destacado la línea de Pascal resultante.



Dados seis puntos en una cónica hay sesenta formas de unirlos haciendo un hexágono por lo que dado seis puntos en una cónica existen sesenta líneas de Pascal. obtenemos solo 60 líneas de Pascal.

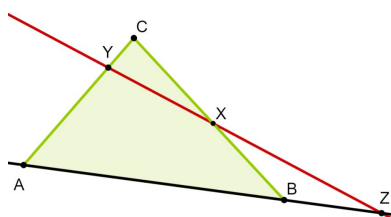
A pesar de que el teorema de Pascal es un resultado proyectivo como también se puede plantear en el espacio afín, primero se expondrán las demostraciones afines de este teorema y posteriormente las demostraciones proyectivas sobre un cuerpo cualquiera y sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

3.3. Demostraciones en el plano afín

Vamos a realizar dos demostraciones afines sobre una cónica específica, la circunferencia, ya que para realizar estas demostraciones se utilizan proposiciones que unicamente se cumplen en la circunferencia. En ambas demostraciones solo se demostrará la primera implicación del teorema.

3.3.1. Utilizando el teorema de Menelao

La siguiente demostración hace uso de un teorema clásico de geometría, conocido como el teorema de Menelao, ya que se le atribuye al matemático griego Menelao de Alejandría (aprox. 70-140 d.c.). En opinión de H.S.M. Coxeter y S.L. Greitzer (Geometry revised) esta podría ser la demostración que habría realizado Blaise Pascal.



Teorema 3.3.1. Teorema de Menelao: Dado el triángulo ABC, y los puntos X, Y, Z que se encuentran en las líneas de BC, AC, AB, entonces el teorema establece que X, Y, Z son colineales si y sólo si:

$$\frac{BX}{CX} \times \frac{CY}{AY} \times \frac{AZ}{BZ} = 1$$

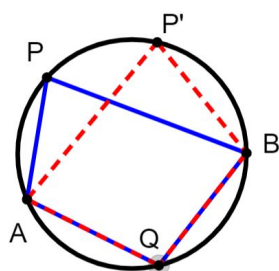
Una demostración de este resultado se puede encontrar en [9] en la página 66.

Además, necesitamos los siguientes resultados.

Lema 3.3.2. Dados cuatro puntos de modo que los puntos P, P' estén en el mismo arco de circunferencia que une los puntos A, B de una circunferencia dada, entonces:

$$\angle APB = \angle AP'B.$$

Demostración. Tenemos un punto Q distinto de los puntos dados que esté en el arco de circunferencia en el que no están los puntos P y P'.



Entonces como se ve en la imagen adjunta, tenemos dos cuadriláteros APBQ y AP'BQ inscritos en una circunferencia. Por el lema 1.3.1 se verifica que los dos ángulos $\angle APB$ y $\angle AP'B$ son ambos ángulos complementarios al ángulo opuesto en los cuadriláteros, que es en ambos casos el ángulo $\angle AQB$, por lo que son iguales.

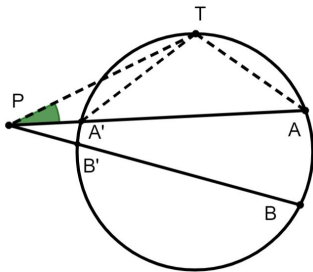
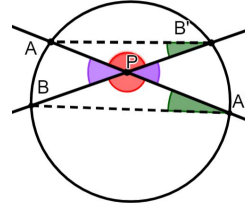
□

Lema 3.3.3. Si dos líneas pasan por un punto P e intersecan a una circunferencia en los puntos A, A' (los cuales pueden coincidir) y en los puntos B, B' (los cuales pueden coincidir), respectivamente, entonces $PA \times PA' = PB \times PB'$.

Demostración. Para demostrar este resultado vamos a considerar dos casos, cuando el punto P está dentro de la circunferencia y cuando está fuera.

En el primer caso, si consideramos los triángulos PAB' y PBA', es fácil observar, utilizando el lema 3.3.2, que $\angle AB'B = \angle AA'B$ y además, $\angle APB' = \angle BPA'$, por lo que los dos triángulos tiene los tres ángulos iguales por lo que:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PB'}, \text{ es decir, } PA \times PA' = PB \times PA'$$



Si el punto P está en el exterior, se tomara un punto T cualquiera en la circunferencia. Si miramos los triángulos PTA y PTA', tienen el mismo ángulo en el vértice P, por lo que, $\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PA'}$, es decir, $PA \times PA' = PT^2$.

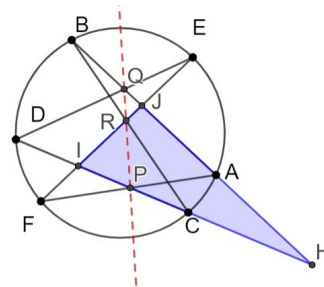
Si repetimos este argumento con los triángulos PBT y PTB' entonces tenemos: $PB \times PB' = PT^2$. Si juntamos las dos ecuaciones obtenemos: $PA \times PA' = PB \times PB'$ □

Demostración del Teorema de Pascal

Sean A, B, C, D, E, F puntos arbitrarios en la circunferencia debemos comprobar que los puntos $Q = AB \cap DE$, $R = BC \cap EF$, $P = CD \cap FA$ están alineados. Definimos los siguientes puntos,

$$\begin{aligned} Q &= AB \cap DE & H &= AB \cap CD \\ R &= BC \cap EF & I &= CD \cap EF \\ P &= CD \cap FA & J &= EF \cap AB \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el teorema de Menelao tres veces en el triángulo HIJ con las rectas BC, DE y FA y multiplicamos los tres ecuaciones obtenemos:



$$\left(\frac{HC}{CI} \times \frac{IQ}{QJ} \times \frac{JB}{BH}\right) \times \left(\frac{HD}{DI} \times \frac{IE}{EJ} \times \frac{JP}{PH}\right) \times \left(\frac{HR}{RI} \times \frac{IF}{FJ} \times \frac{JA}{AH}\right) = -1 \quad (3.1)$$

Ademas si usamos el lema 3.3.3 con el punto I y las rectas IF y CI concluimos, $IE \times IF = CI \times DI = (-CI) \times (-DI)$, es decir, $\frac{IE}{CI} \times \frac{IF}{DI} = 1$.

Si repetimos este argumentos con los puntos J y las rectas JB, EJ y con el punto H y las rectas HC, BH, obtenemos, $\frac{JB}{EJ} \times \frac{JA}{FJ} = 1$, y, $\frac{HC}{BH} \times \frac{HD}{AH} = 1$.

Por tanto, si volvemos a la ecuación 3.1 y sustituimos los resultados que acabamos de obtener la ecuación es la siguiente

$$\frac{DR}{RE} \times \frac{EQ}{QF} \times \frac{FQ}{PQ} = -1.$$

Por el teorema de Menelao, P, Q, R son colineales.

□

3.3.2. Demostración 2

Esta demostración es una demostración que usa cuadriláteros inscritos en circunferencias.

Denotamos la recta que pasa por el puntos A y B por $AB \equiv l_{AB} = 0$ donde l_{AB} es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

Lema 3.3.4. Sean A, B, C y D puntos en una circunferencia definida por $f = 0$, donde f es un polinomio de segundo grado entonces, $f = \lambda l_{AB} l_{CD} + \mu l_{BC} l_{AD}$ donde λ, μ son algún numero real.

Demostración. Sea X un punto de la circunferencia diferente a A, B, C y D. Por lo tanto, ninguno de estos términos $l_{AB}(X), l_{CD}(X), l_{BC}(X), l_{AD}(X)$ es 0. Entonces es posible encontrar λ, μ tal que:

$$\lambda l_{AB}(x) l_{CD}(x) + \mu l_{BC}(x) l_{AD}(x) = 0.$$

Definimos $f_1 = \lambda l_{AB}(x) l_{CD}(x) + \mu l_{BC}(x) l_{AD}(x)$. Claramente, $f_1(A) = f_1(B) = f_1(C) = f_1(D) = f_1(X) = 0$. Como 5 puntos definen una cónica salvo una constante multiplicativa $f_1 = \alpha f$ para una constante α . □

Demostración del teorema de Pascal

Sean los seis puntos A, B, C, D, E, F sobre una circunferencias, entonces, debemos demostrar que los puntos $Q = AB \cap DE, R = BC \cap EF, P = CD \cap FA$ son colineales.

Tenemos los cuadriláteros ABCD, AFED, BEFC inscritos en una circunferencia definido por $f = 0$, donde f es un polinomio de segundo grado, entonces f se puede expresar de estas 3 formas según el lema 3.3.4:

- $f = \lambda_1 l_{AB} l_{CD} + \mu_1 l_{BC} l_{AD}$

- $f = \lambda_2 l_{AF|ED} + \mu_2 l_{AD|EF}$
- $f = \lambda_3 l_{BE|CF} + \mu_3 l_{BC|EF}$

Restando las dos primeras ecuaciones obtenemos:

$$\lambda_1 l_{AB|CD} - \lambda_2 l_{AF|ED} = (\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}) l_{AD}.$$

Sea $X = AB \cap ED$ entonces $l_{AB}(X) = 0 = l_{ED}(X)$. Por tanto, $l_{AB|CD}$ y $l_{AF|ED}$ se anulan en el punto X . Mientras que $l_{AD}(x) \neq 0$ entonces $\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}$ se anula en X . En otras palabras, X vive en la recta $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$.

Si actuamos de forma similar con el punto $CD \cap AF$ se concluye que vive en la recta $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$ y además está claro que en esta rectas también está el punto $BC \cap EF$. Por tanto, los tres puntos están alineados.

□

3.4. Demostraciones en el plano proyectivo

Esta sección se desarrollará el teorema de Pascal en \mathbb{P}_K^2 con K un cuerpo cualquiera.

La primera parte de esta sección son unos conceptos básicos de la geometría proyectiva, posteriormente se expondrán las demostraciones del teorema de Pascal. En esta sección se van a definir conceptos como la razón doble, las proyectividades o las perspectividades, y teoremas fundamentales de la geometría proyectiva como el teorema de Chasles o la construcción de Steiner.

3.4.1. Conceptos básicos de geometría proyectiva

Antes de exponer las demostraciones proyectivas del teorema de Pascal vamos a explicar unos conceptos y herramientas fundamentales para llevarlas a cabo.

Todas las demostraciones, a excepción de aquellas que intervengan directamente en la demostración del teorema de Pascal, se expondrán en el apéndice A, que se encuentra en la página 39.

Definiciones básicas

Recordaremos la definición de espacio proyectivo y daremos sentido a los polinomios en el espacio proyectivo. Estas definiciones se darán para un espacio proyectivo de dimensión n aunque después únicamente se utilizarán aplicadas a $n = 2$.

Definición 3.4.1. El espacio proyectivo de dimensión n sobre el cuerpo K , \mathbb{P}_K^n , es el cociente de $\mathbb{A}_K^{n+1} - \{0, \dots, 0\}$ entre la relación de equivalencia, \sim , definida del siguiente modo:

Dados dos puntos $(x_0, \dots, x_n), (x'_0, \dots, x'_n)$ de $\mathbb{A}_K^{n+1} - \{0, \dots, 0\}$, entonces $(x_0, \dots, x_n) \sim (x'_0, \dots, x'_n)$ si, y sólo si, existe $\lambda \in K - \{0\}$ tal que

$$(x_0, \dots, x_n) = \lambda(x'_0, \dots, x'_n).$$

Las clases de equivalencia, es decir, los puntos del espacio proyectivo, se van a expresar como $(x_0 : \dots : x_n) = \{\lambda(x_0, \dots, x_n), \text{ tal que } \lambda \in K - \{0\}, (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1} - \{0, \dots, 0\}\}$.

Lo siguiente que nos vamos a plantear es como son los polinomios en el espacio proyectivo, esto nos permitirá definir las curvas proyectivas que intervienen en el enunciado del teorema de Pascal.

Definición 3.4.2. Un polinomio F en $K[X_0, \dots, X_n]$ de grado d es un polinomio homogéneo si todos sus monomios son de grado d .

La propiedad que caracteriza a los polinomios homogéneos es que, dado $\lambda \in K - \{0\}$, entonces $F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n)$.

Un polinomio $f \in K[x_0, \dots, x_n]$ no es una función del espacio proyectivo sino una función en K^{n+1} . Para estar bien definida en el espacio proyectivo el polinomio debe ser un polinomio homogéneo ya que estos son los únicos que si se anulan en (x_0, \dots, x_n) , entonces, se anulan en todos los puntos que son proporcionales a él, es decir, en un punto del espacio proyectivo $(x_0 : \dots : x_n)$.

Definición 3.4.3. Sea f en $K[X_0, \dots, X_n]$ un polinomio homogéneo de grado d , entonces una curva proyectiva de grado d es el conjunto de puntos de \mathbb{P}_K^n que se anulan en f .

Una curva proyectiva de grado uno recibe el nombre de recta proyectiva, si es de grado dos, cónica proyectiva y si es de grado tres, cúbica proyectiva. Por ejemplo, en \mathbb{P}_K^2 una recta proyectiva tiene como ecuación un polinomio homogéneo de grado uno, $u_0x + u_1y + u_2z = 0$.

Plano proyectivo dual

En esta sección en concreto se definirá el plano proyectivo dual ya que la dualidad es una herramienta muy útil que utilizaremos para muchas demostraciones.

Para definir el plano proyectivo dual vamos a definir una relación de equivalencia entre las rectas del plano proyectivo del siguiente modo:

Sean $u_0x + u_1y + u_2z = 0$, $u'_0z + u'_1y + u'_2z = 0$ dos rectas de \mathbb{P}_K^2 , entonces: $u_0x + u_1y + u_2z = 0 \sim u'_0x + u'_1y + u'_2z = 0$ si y solo si existe $\lambda \in K - \{0\}$ tal que $u_0 = \lambda u'_0$, $u_1 = \lambda u'_1$, $u_2 = \lambda u'_2$.

Definición 3.4.4. Llamamos plano proyectivo dual, \mathbb{P}_K^{2*} , al conjunto de rectas del plano proyectivo bajo la relación de equivalencia que hemos definido antes.

El plano proyectivo dual es un plano proyectivo en el sentido de que a cada recta $u_0x + u_1y + u_2z = 0$ de \mathbb{P}_K^2 le asociamos el punto $(u_0 : u_1 : u_2)$.

Por dualidad mandamos puntos a rectas y rectas a puntos pero además las mandamos de manera que si un punto, pertenece a una recta, en el dual, la correspondiente recta pasa por dicho punto, y si una recta pasa por un punto, en el dual es un punto que está dentro de una recta.

Proposición 3.4.1. (Apéndice A.1) *Una recta de \mathbb{P}_K^{2*} se identifica con un haz de rectas de \mathbb{P}_K^2 , es decir, un conjunto de rectas de \mathbb{P}_K^2 que pasa por un punto fijo.*

Como la dualidad conserva la operación de enviar puntos a rectas y rectas a puntos entonces por la proposición que acabamos de demostrar podemos ver que efectivamente una recta de \mathbb{P}_K^2 se identifica con un haz de rectas de $(\mathbb{P}_K^2)^*$.

Denotamos por $\Omega(A)$ al haz de rectas centradas en el punto A del plano proyectivo.

Rectas proyectivas

En esta sección vamos a ver cómo definir y parametrización una recta proyectiva en función de dos puntos de dicha recta. También vamos a definir dos aplicaciones entre rectas proyectivas muy importantes: las proyectividades y perspectivas.

Proposición 3.4.2. (Apéndice A.2) *Sea L una recta en el plano proyectivo y $(x' : y' : z')$ y $(x'' : y'' : z'')$ dos puntos distintos de L , entonces $(x : y : z)$ está en la recta L si y solo si existen $\lambda, \mu \in K$, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tal que $(x : y : z)$ puede expresarse del siguiente modo:*

$$(x : y : z) = (\lambda x' + \mu x'' : \lambda y' + \mu y'' : \lambda z' + \mu z'').$$

Además, dos puntos en la recta serán iguales si los coeficientes λ, μ asociados a ellos son proporcionales.

Definición 3.4.5. Una parametrización de una recta L del plano proyectivo es una función biyectiva definida del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}_K^1 &\longrightarrow L \subseteq \mathbb{P}_K^2 \\ (t_0 : t_1) &\longmapsto (x't_0 + x''t_1 : y't_0 + y''t_1 : z't_0 + z''t_1). \end{aligned}$$

El siguiente teorema prueba la unidad de la parametrización fijados tres puntos de una recta proyectiva.

Proposición 3.4.3. (Apéndice A.2) *Dada L una recta en el plano proyectivo y $(x' : y' : z')$, $(x'' : y'' : z'')$, $(x''' : y''' : z''')$ tres puntos distintos de L , entonces existe una única parametrización $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \longrightarrow L \subseteq \mathbb{P}_K^2$ que verifique*

$$\varphi(1 : 0) = (x' : y' : z'), \quad \varphi(0 : 1) = (x'' : y'' : z''), \quad \varphi(1 : 1) = (x''' : y''' : z''').$$

Las definiciones de aplicaciones proyectivas y perspectivas, que se expondrán a continuación, son un caso particular de proyecciones y perspectivas ya que solo se definirán como aplicaciones entre rectas proyectivas.

Definición 3.4.6. Una proyectividad entre dos rectas proyectivas es una aplicación $f : L \rightarrow L'$, tal que para toda parametrización de L , $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow L$, $f \circ \varphi$ es una parametrización de L' .

En esta definición no hace falta que las dos rectas pertenezcan al mismo espacio proyectivo, por lo que L puede estar en el plano proyectivo y L' en el plano proyectivo dual, y recíprocamente.

Proposición 3.4.4. (Apéndice A.2) Sean L y L' dos rectas distintas, A, B, C tres puntos distintos de L y A', B', C' otros tres puntos distintos de L' , entonces existe una única proyectividad $f : L \rightarrow L'$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

A continuación, se expondrán dos ejemplos de proyectividades.

Proposición 3.4.5. (Apéndice A.2) Sea L una recta de \mathbb{P}_K^2 y A un punto que no está en L . Consideramos $\Omega(A)$ al haz de rectas del plano proyectivo centrado en el punto A , entonces,

- (i) $f : L \rightarrow \Omega(A)$ que asocia a cada punto $P \in L$ la recta que pasa por A y P es una proyectividad.
- (ii) $g : \Omega(A) \rightarrow L$ que asocia a cada recta del haz su intersección con la recta L es una proyectividad.

Las proyectividades de la proposición anterior están bien definidas porque el haz de rectas del plano proyectivo es una recta del plano proyectivo dual.

Definición 3.4.7. Sean L, L' dos rectas distintas y sea A un punto de \mathbb{P}_K^2 que no está en L ni en L' . A la aplicación $f : L \rightarrow L'$ que asocia a cada punto $P \in L$ el punto de intersección de la recta AP con la recta L' se le llama una perspectiva entre las dos rectas proyectivas. El punto A se llama centro de la perspectiva.

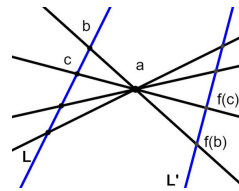


Figura 3.1: Perspectividad

Proposición 3.4.6. (Apéndice A.2) Todo perspectiva es una proyectividad.

El recíproco de esta proposición únicamente se dará en el siguiente caso.

Teorema 3.4.7. Sean L y L' dos rectas distintas que se intersecan en un punto A . Entonces una proyectividad $f : L \rightarrow L'$ es una perspectividad si y solo si $f(A) = A$.

Demostración. Sean B y C dos puntos distintos de L y que no son A y sean $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$. Dado Q el punto de intersección de la rectas BB' y CC' , definimos $\Pi_Q : L \rightarrow L'$ como la perspectividad de centro Q . Es evidente que $\Pi_Q(A) = A$, $\Pi_Q(B) = B'$ y $\Pi_Q(C) = C'$. Como las perspectividades son proyectividades, por la unicidad de estas fijados tres punto de ambas rectas (véase proposición 3.4.4) entonces $f = \Pi_Q$ \square

Razón doble

Ahora definiremos uno de los conceptos mas importantes en la geometría proyectiva, la razón doble. Al igual que la razón simple es importante en geometría afín porque se conserva por afinidades, es decir, conserva proporciones, la razón doble es importante en geometría proyectiva porque, aunque no conserva proporciones, conserva el cociente entre proporciones.

Definición 3.4.8. Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos de una recta L y $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow L$ la única parametrización de L tal que $\varphi(1 : 0) = A$, $\varphi(0 : 1) = B$, $\varphi(1 : 1) = C$. Si $D = \varphi(\lambda, \mu)$, entonces la razón doble de estos cuatro puntos es $[A, B, C, D] := \frac{\lambda}{\mu}$.

La siguiente proposición demuestra que la razón doble se conserva por proyectividades.

Proposición 3.4.8. (Apéndice A.3) Sea $f : L \rightarrow L'$ una aplicación inyectiva entre dos rectas, entonces f es una proyectividad si y solos si dados cuatro puntos distintos de la recta L , A, B, C, D , se cumple que $[A, B, C, D] = [f(A), f(B), f(C), f(D)]$.

Corolario 3.4.9. (Apéndice A.3) Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos de una misma recta y A', B', C', D' otro cuatro puntos alienados de otra recta. Entonces $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$ si y solo si existe una proyectividad que manda una cuaterna en otra.

Observación 3.4.1. Dados cinco puntos A', B', C', D', E' en una recta tales que $[A', B', C', D'] = [A', B', C', E']$ entonces $D' = E'$.

Observación 3.4.2. Dadas cuatro rectas L_1, L_2, L_3, L_4 que pasan por un punto A , tiene sentido hablar de su razón doble, ya que son cuatro rectas del haz $\Omega(A)$, Además, dada cualquier recta L que no pase por A , podemos definir una proyectividad, como en la proposición 3.4.5, $f : \Omega(A) \rightarrow L$ donde la imagen de una recta del haz es la intersección de esta recta con L y utilizando el proposición 3.4.8, $[L_1, L_2, L_3, L_4] = [A_1, A_2, A_3, A_4]$.

Cónicas proyectivas

En este apartado vamos a clasificar las cónicas proyectivas, así como demostrar que todas las cónicas proyectivas no degeneradas son equivalentes. También se expondrán y demostrarán dos resultados muy importantes de la geometría proyectiva, el teorema de Chasles y las construcciones de Steiner.

Definición 3.4.9. Una curva cónica en \mathbb{P}_K^2 es una ecuación de la forma

$$u_{00}X^2 + 2u_{01}XY + 2u_{02}XZ + u_{11}Y^2 + 2u_{12}YZ + u_{22}Z^2 = 0.$$

Dos cónicas son iguales si sus ecuaciones son proporcionales. Cuando la característica del cuerpo es distinta de 2 la ecuación se puede escribir en forma matricial

$$(X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ u_{01} & u_{11} & u_{12} \\ u_{02} & u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0.$$

Llamaremos M a la matriz tres por tres de la ecuación de arriba. Además, como toda matriz M simétrica se puede diagonalizar con matriz de paso ortogonal, entonces existe P una matriz ortogonal y D una matriz diagonal, (formada por los valores propios de M) tal que $M = P^tDP$. Por lo tanto, toda ecuación de una cónica se puede escribir como

$$(X \ Y \ Z) P^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0.$$

Si realizamos el siguiente cambio de coordenadas,

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

la ecuación de la cónica se quedará de la siguiente forma:

$$\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2 = 0.$$

Podemos clasificar los tipos de cónicas según los diferentes valores de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Hay que recordar que el rango de la matriz M es el número de λ_i distintos de ceros.

Si $\text{Rango}(M) = 1$, podemos suponer que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Por lo tanto, la ecuación de la cónica es $\lambda_0 X'^2 = 0$, es decir, $X'^2 = 0$. Si $P = (p_{ij})$, entonces resolviendo el cambio de variable: $X' = p_{00}X + p_{01}Y + p_{02}Z$, y por tanto la ecuación original de la cónica es una recta doble,

$$(p_{00}X + p_{01}Y + p_{02}Z)^2 = 0.$$

Si $\text{Rango}(M) = 2$, supongamos que $\lambda_2 = 0$. Por lo tanto, la ecuación de la cónica es

$$\lambda_0 X'^2 + \lambda_1 Y'^2 = 0,$$

que es equivalente a $X' = \pm \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0}} Y'$ y si resolvemos el cambio de coordenadas salen dos rectas distintas:

$$\begin{aligned} (p_{00} + \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0}} p_{10})X + (p_{01} + \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0}} p_{11})Y + (p_{02} + \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0}} p_{12})Z &= 0 \\ (p_{00} - \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0}} p_{10})X + (p_{01} - \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0}} p_{11})Y + (p_{02} - \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0}} p_{12})Z &= 0 \end{aligned}$$

Si K no es un cuerpo algebraicamente cerrado, puede ocurrir que $\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0}}$ no pertenezca a K y por tanto las dos rectas serían imaginarias conjugadas.

Si $\text{Rango}(M) = 3$. Si K es algebraicamente cerrado entonces a la hora de diagonalizar podemos suponer que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, y la ecuación de la cónica es $X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0$. Si $K = \mathbb{R}$, se distinguen dos casos:

- Si la signatura de M es $(3,0)$, podemos obtener $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, y la ecuación es la cónica es $X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0$, que es una cónica no degenerada imaginaria. Lo mismo ocurre si la asignatura es $(0,3)$, ya que simplemente la ecuación de la cónica tiene signo contrario.
- Si la asignatura de M es $(2,1)$, podemos obtener $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, con lo que la ecuación de la cónica es $X'^2 + Y'^2 - Z'^2 = 0$, que es una cónica no degenerada real. Lo mismo ocurre si la signatura es $(1,2)$.

Definición 3.4.10. Llamaremos cónica no degenerada a una cónica que está asociada con una matriz de rango 3. Un conjunto de puntos se llaman concónicos si están en una cónica no degenerada.

Vamos a realizar una serie de resultados sobre la intersección de cónicas y rectas.

Proposición 3.4.10. (Apéndice A.4) Sea C una cónica no degenerada de matriz M y $A = (a_0 : a_1 : a_2)$ un punto de C . Para cada punto $B = (b_0 : b_1 : b_2)$ distinto de A , la recta AB corta a C en un único punto distinto de A , excepto si se cumple la siguiente condición,

$$(a_0 \ a_1 \ a_2) M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0,$$

en la cual la intersección se compone únicamente por el punto A .

Corolario 3.4.11. (Apéndice A.4) Una cónica no degenerada C no contiene tres puntos alineados y, en particular, no contiene rectas.

A continuación, vamos definir y ver algunas propiedades de la parametrización de una cónica.

Definición 3.4.11. Sea C una cónica no degenerada, A un punto de la cónica C , L una recta que no pasa por A , $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow L$ una parametrización de L , y $\Phi : L \rightarrow C$ una aplicación que asocia a cada punto P de L el segundo punto de intersección con la recta AP con C . Entonces la biyección $\Phi \circ \varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow C$ es una parametrización de la cónica C .

Proposición 3.4.12. (Apéndice A.4) *Toda parametrización de una cónica no degenerada, C , tiene la siguiente forma:*

$$(t_0 : t_1) \mapsto \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^2 \\ t_0 t_1 \\ t_1^2 \end{pmatrix}$$

siendo $P = (c_{ij})$ una matriz invertible.

El siguiente resultado resalta por su importancia en el espacio proyectivo, ya que gracias a el todas las cónicas no degeneradas pueden describirse con la misma ecuación.

Proposición 3.4.13. (Apéndice A.4) *Toda cónica no degenerada puede transformarse, mediante un cambio de coordenadas, en una cónica de ecuación $XZ - Y^2 = 0$.*

Proposición 3.4.14. (Apéndice A.4) *Sea C una cónica no degenerada y $\varphi' : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow C$ es una parametrización de C . Entonces, para cualquier $A \in C$, se puede definir $\psi : \Omega(A) \subseteq \mathbb{P}_K^2 \rightarrow C$ la aplicación que asocia a cada recta L' que pasa por A el segundo punto de intersección de L' con C . Entonces $(\psi)^{-1} \circ (\varphi') : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \Omega(A) \subseteq \mathbb{P}_K^{2*}$ es una parametrización de $\Omega(A)$.*

Una vez expuestos los conceptos básicos y necesarios para las demostraciones vamos a proceder a ellos. Vamos a ver dos demostraciones del teorema de Pascal en el plano proyectivo sobre un cuerpo cualquiera, K . En la primera se usa el teorema de Charles y la razón doble, en la segunda proyectividades y perspectivas. En la primera demostración solo se demostrará la primera implicación del teorema mientras que en la segunda se realizan las dos implicaciones.

3.4.2. Usando la razón doble

Solo se va a demostrar la primera implicación del teorema de Pascal. Esta demostración utiliza el teorema de Chasles y la razón doble.

Teorema 3.4.15. Teorema de Chasles: *Sea C una cónica no degenerada y sean A y $A' \in C$. Consideramos la aplicación $f : \Omega(A) \rightarrow \Omega(A')$ que asocia*

a cada recta L que pase por A la recta generada por A' y el punto de intersección de L con C distinto de A (Entendiendo que cuando L es tangente a C se define $f(L) = AA'$, y que además $f(AA')$ es la recta tangente a C en A'), Entonces f es una proyectividad.

Demostración. Sean $\psi : \Omega(A) \rightarrow C$ y $\psi' : \Omega(A') \rightarrow C$ las aplicaciones que a cada recta del haz le hacen corresponder al segundo punto de intersección de dicha recta con la cónica. Definimos $f = \psi'^{-1} \circ \psi$. Sea $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow C$ una parametrización cualquiera de C . Por la proposición 3.4.14 sabemos que $\psi^{-1}\varphi$ y $\psi'^{-1}\varphi$ son parametrizaciones de $\Omega(A)$ y $\Omega(A')$ respectivamente.

Evidentemente $\psi'^{-1}\varphi = f \circ \psi^{-1}\varphi$, por lo que $f \circ \psi^{-1}\varphi$ es una parametrización de $\Omega(A')$ por lo que f es una proyectividad. \square

El teorema anterior es de gran importancia porque implica que dados cinco puntos en una cónica no degenerada, A, B, C, D, P , la razón doble de las cuatro rectas PA, PB, PC, PD no depende de la elección del punto P . Esto se debe a que gracias al teorema de Chasles dado otro punto distinto a los anteriores, P' , siempre existe una proyectividad $f : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P')$ tal que $f(PA) = P'A$, $f(PB) = P'B$, $f(PC) = P'C$ y $f(PD) = P'D$ y como la razón doble se conserva por proyectividades tenemos: $[PA, PB, PC, PD] = [P'A, P'B, P'C, P'D]$.

Demostración del Teorema de Pascal:

Supongamos que los puntos A, B, C, D, E, F están en una cónica proyectiva, vamos a demostrar que los puntos $P = AB \cap DE$, $Q = CD \cap FA$ y $EF \cap BC$ están aliados. Para ello definiremos los siguientes puntos y rectas:

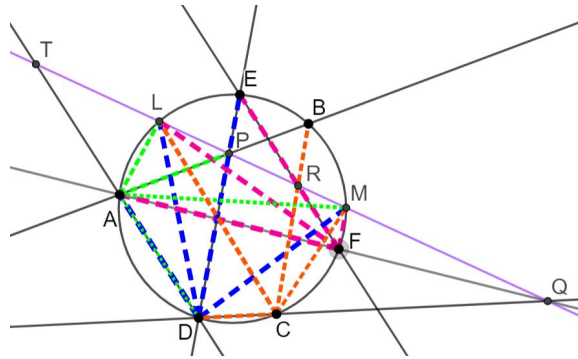
$$\begin{aligned} P &= AB \cap DE, & Q &= CD \cap FA, & p &= PQ, & L, M &= \text{cónica} \cap p, \\ R &= EF \cap p, & S &= BC \cap p, & T &= AD \cap p \end{aligned}$$

Si demostramos que $S = R$, entonces estaríamos demostrando que el punto $EF \cap BC$ está en la línea formada por los puntos PQ , es decir la recta p , por lo que habríamos demostrado el teorema. En esta demostración se utilizan tres argumentos:

- * La aplicación antes comentada del teorema de Charles.
- ** Como se comentó en la observación 3.4.2 la razón doble de cuatro puntos es igual a la razón doble de las rectas que unen esos cuatro puntos con otro punto y recíprocamente.
- *** La tercera argumentación se usará para obtener una igualdad entre la razón doble de cuatro rectas con la razón doble de estas mismas cuatro rectas pero con los puntos que las definen en la cónica. Esto nos facilitará aplicar el teorema la primera argumentación.

$$\begin{aligned}
 [L, Q, R, M] &\stackrel{**}{=} [FL, FQ, FR, FM] \stackrel{***}{=} [FL, FA, FE, FM] \stackrel{*}{=} [DL, DA, DE, DM] \\
 &\stackrel{**}{=} [L, T, P, M] \stackrel{**}{=} [AL, AT, AP, AM] \stackrel{***}{=} [AL, AD, AB, AM] \\
 &\stackrel{*}{=} [CL, CD, CB, CM] \stackrel{**}{=} [L, Q, S, M]
 \end{aligned}$$

Usando la observación 3.4.1, podemos concluir que $R = S$.



□

3.4.3. Utilizando proyecciones y perspectividades

Esta demostración se vale de varias herramientas como es la construcción de Steiner, la razón doble y proyectividades. En esta demostración realizaremos las dos implicaciones.

Teorema 3.4.16. Construcción de Steiner Sea $A, A' \in \mathbb{P}_K^2$ dos puntos distintos y sea $f : \Omega(A) \rightarrow \Omega(A')$ una proyectividad tal que $f(AA') \neq AA'$, entonces el conjunto $C = \{L \cap f(L) \mid L \in \Omega(A)\}$ es un cónica no degeneradas que pasa por A y A' .

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \Omega(A)$ una parametrización de $\Omega(A)$ que va venir dada por la parametrización de la recta del plano proyectivo asociada al haz del dual $\Omega(A)$, tendrá al siguiente aspecto:

$$(t_0 : t_1) \mapsto (l_0 : l_1 : l_2)$$

donde l_0, l_1, l_2 son expresiones lineales homogéneas en t_0, t_1 . Como f es una proyectividad, $f \circ \varphi$ es una parametrización de $\Omega(A')$, que tendrá por tanto el aspecto:

$$(t_0 : t_1) \mapsto (l'_0 : l'_1 : l'_2)$$

donde l'_0, l'_1, l'_2 son de nuevo expresiones lineales homogéneas en t_0, t_1 . Para cada t_0, t_1 fijo los puntos del plano proyectivo (l_0, l_1, l_2) y (l'_0, l'_1, l'_2) definen,

en el plano proyectivo dual, las siguientes rectas

$$\begin{aligned} l_0X_0 + l_1X_1 + l_2X_2 &= 0 \\ l'_0X_0 + l'_1X_1 + l'_2X_2 &= 0 \end{aligned}$$

La intersección de estas rectas para cada par de puntos (t_0, t_1) no da un punto de conjunto C y estos puntos tiene la siguiente forma $(l_1l'_2 - l_2l'_1 : l_2l'_0 - l_0l'_2 : l_0l'_1 - l_1l'_0)$. Por tanto el conjunto C puede parametrizarse del siguiente modo:

$$(t_0 : t_1) \mapsto (l_1l'_2 - l_2l'_1 : l_2l'_0 - l_0l'_2 : l_0l'_1 - l_1l'_0)$$

Por la Proposición 3.4.13 el teorema estará demostrado si demostramos que las expresiones cuadráticas homogéneas $l_1l'_2 - l_2l'_1$, $l_2l'_0 - l_0l'_2$, $l_0l'_1 - l_1l'_0$ son linealmente independientes. Si no fueran independientes el conjunto C estaría contenido en una recta L' . Por tanto para recta, L de $\Omega(A)$, $L \cap f(L)$ es un punto de L' . Si lo miramos en el plano dual tendríamos una perspectividad entre dos recta que siempre pasa por un punto fijo, por lo que f es una perspectividad. Dualmente f es una perspectividad de centro L . Esto es absurdo porque la imagen de la recta AA' (que es la intersección de $\Omega(A)$ y $\Omega(A')$) no es AA' . Por tanto tenemos una proyectividad que evidentemente es una perspectividad pero no verifica la condición del teorema dual de teorema 3.4.7. \square

El siguiente corolario es de gran importancia ya gracias a él podemos identificar unívocamente una cónica con solo cinco puntos que estén en ella.

Corolario 3.4.17. *Sean P_1, \dots, P_5 puntos distintos tales que no hay tres de ellos colineales, entonces existe una única cónica no degenerada que pasa por los 5 puntos.*

Demostración. Si fuera una cónica degenerada, entonces la cónica en cuestión sería una recta doble o un par de rectas, pero en los dos casos dados cinco puntos siempre hay tres de ellos colineales, por lo que de existir una cónica debe ser no degenerada.

Si C es una cónica no degenerada que pasa por P_1, \dots, P_5 , entonces se puede definir $f : \Omega(P_1) \rightarrow \Omega(P_2)$ la proyectividad definida en el teorema de Chasles, por tanto f verificará que $f(P_1P_4) = P_2P_4$, $f(P_1P_3) = P_2P_3$, $f(P_1P_5) = P_2P_5$ y como esta proyectividad cumple las condiciones de la construcción de Steiner podemos concluir que (teorema 3.4.16) $C = \{L \cap f(L) \text{ tal que } L \in \Omega(P_1)\}$. Como f esta determinada de forma única por la imagen de P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5 , existe única C . \square

Demostración del teorema de Pascal:

Utilizando el teorema de Chasles (teorema 3.4.15), como A y C son puntos de la cónica proyectiva entonces la aplicación $g : \Omega(A) \rightarrow \Omega(C)$ es una

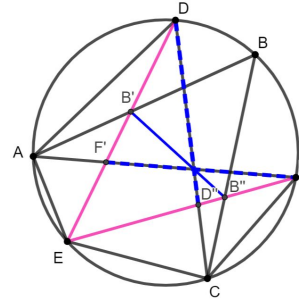
proyectividad tal que $g(AD) = CD$, $g(AE) = CE$, $g(AB) = CB$, $g(AF) = CF$. Esto nos permite afirmar $[AB, AD, AE, AF] = [CB, CB, CE, CF]$.

Aunque es evidente, por como esta construida g , la construcción de Steiner nos permite describir los puntos de la cónica en la que esta inscrita el hexágono, como los puntos $L \cap g(L)$, donde $L \in \Omega(A)$.

Consideramos las rectas ED y EF . La recta ED corta a las rectas AB , AD , AE , AF del haz centrado en A en los puntos B' , D' , E' , F' . Del mismo modo, la recta EF corta a las rectas CB , CD , CE , CF del haz centrado en C en los puntos B'' , D'' , E'' , F'' . Utilizando la observación 3.4.2 podemos ver que, $[AB, AD, AE, AF] = [B', D', E', F']$, y $[CB, CD, CE, CF] = [B'', D'', E'', F'']$.

Por tanto, $[B', D', E', F'] = [B'', D'', E'', F'']$. Usando el corolario 3.4.9, existe una proyectividad $f : ED \rightarrow EF$ tal que $f(B') = B''$, $f(D') = D''$, $f(E') = E''$ y $f(F') = F''$.

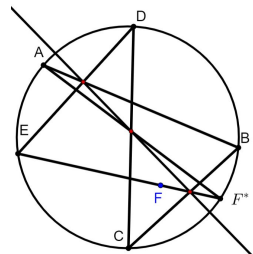
Como la proyectividad entre las rectas ED y EF tienen un punto cuya imagen es el mismo, ya que $E' = E''$, la proyectividad es un perspectividad (teorema 3.4.7).



Como tenemos una perspectividad existe un centro, al cual llamaremos Z , que será el punto de intersección de las rectas $B'B''$, $D'D''$ y $F'F''$. Además se verifica que $D' = D$ y $F'' = F$, por lo que, la recta $D'D''$ es igual a la recta DC y la recta $F'F''$ es igual a la recta AF .

Como es una perspectividad entonces B' , Z y B'' son colineales y como estos puntos pueden expresarse del siguiente modo, $B' = AB \cap ED = Q$, $B'' = BC \cap EF = R$, $Z = CD \cap FA = P$, entonces hemos demostrado la primera implicación del teorema de Pascal.

Recíprocamente, queremos demostrar que si los puntos $P' = AB \cap DE$, $Q' = BC \cap EF$, $R' = CD \cap FA$ están alineados entonces el hexágono formado por los puntos A, B, C, D, E, F tiene sus vértices en una cónica.



Por el corolario 3.4.17, demostrado usando la construcción de Steiner, sabemos que existe una única cónica que pasa por los puntos A, B, C, D, E . Supongamos por reducción al absurdo, que no pasa por el punto F . Sea F' el punto de intersección de la cónica con la línea EF .

Como tenemos un hexágono inscrito en una cónica podemos aplicar la primera implicación del teorema de Pascal al hexágono $ABCDEF'$, obtenien-

do que los puntos $Q = AB \cap DE$, $R = BC \cap EF = BC \cap DE$, y $P = AF' \cap CD$ están alineados.

Como $EF = EF'$, entonces $R' = R$ y $Q' = Q$. P, Q, y R son colineales podemos deducir que $P = QR \cap CD = QR \cap F'A$. Con esta información podemos ver que una expresión del punto F' es, $F' = AP \cap EF$, ya que sabemos que F' está en los dos rectas.

Del mismo modo podemos obtener una expresión el punto F , ya que sabemos que $P' = QP \cap CD = P$, por lo que $F = AP' \cap EF = AP \cap EF$, por tanto $F = F'$, lo que es una contradicción.

□

3.5. Demostraciones en el plano proyectivo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado

Esta sección se desarrollará en \mathbb{P}_K^2 con K un cuerpo íntegramente cerrado. En esta sección se utilizará la geometría algebraica para demostrar el resultado de Pascal. Se demostrarán las dos implicaciones de dicho teorema. Antes de exponer la demostración se introducirían algunos conceptos básicos de geometría algebraica. Como estamos trabajando en un cuerpo algebraicamente cerrado también nos referiremos a las curvas proyectivas como ecuaciones.

Teorema 3.5.1. Pequeño caso del teorema de Bézout: *Sea L una recta proyectiva (respectivamente C una cónica proyectiva) y sea $D \subset \mathbb{P}_K^2$ una curva proyectiva de grado d . Si $L \not\subset D$ (respectivamente $C \not\subset D$), entonces el número de puntos en los que L y D (respectivamente C y D) se intersejan es menor o igual que d (respectivamente $2d$).*

Demostración. Sea $G \in K[X, Y, Z]$ un polinomio homogéneo de grado d , los puntos que verifican $G(X, Y, Z) = 0$ definen una curva de grado d . Para ver la intersección de la recta con la curva que describe el polinomio G sustituimos en G una parametrización de la recta obteniendo así un polinomio homogéneo en las variables t_0, t_1 . Si esta ecuación es idénticamente nula entonces la recta está dentro de la curva que representa el polinomio homogéneo. Si no es idénticamente nula entonces el polinomio homogéneo en las variables t_0 y t_1 tiene como mucho d ceros (debido a que K es un cuerpo algebraicamente cerrado), es decir, el punto de intersección de la recta con la curva son d puntos. □

Denotamos por S_d al conjunto de polinomios homogéneos de grado d de $K[X, Y, Z]$. Además, se considera el polinomio 0 como un polinomio homogéneo de grado d , para cualquier d .

Proposición 3.5.2. *El espacio vectorial S_d de los polinomios homogéneos de grado d en $K[X, Y, Z]$ entonces $\dim S_d = \binom{d+2}{2}$*

Demostración. Una base de S_d son todos los monomios de grado d que se pueden formar con las variables x, y, z . Claramente este cardinal es $\binom{d+2}{2} = \binom{d+2}{d}$, que son las combinaciones con repetición de tres elementos tomados de d en d . \square

Definición 3.5.1. Sean $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}_K^2$, definimos $S_d(P_1, P_2, \dots, P_n) = \{F \in S_d \mid F(P_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n\}$. Es decir, los polinomios de S_d que se anulan en los puntos dados.

Proposición 3.5.3. Dados $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}_K^2$ entonces $\text{Dim } S_d(P_1, P_2, \dots, P_n) \geq \binom{d+2}{2} - n$.

Demostración. Por cada uno de las condiciones $F(P_i) = 0$ es una condición lineal de F , por tanto para cada polinomio de $S_d(P_1, \dots, P_n)$ son al menos n restricciones, por lo que $\text{Dim } S_d(P_1, P_2, \dots, P_n) \geq \binom{d+2}{2} - n$. \square

Proposición 3.5.4. (Apéndice B) Supongamos K un cuerpo no finito y $F \in S_d$:

- (i) Sea L una recta proyectiva cuya ecuación es H ($L \equiv H = 0$). Si F se anula en todos los puntos de L , entonces $F = HF'$, donde $F' \in S_{d-2}$, es decir, F es divisible por H en $K[X, Y, Z]$.
- (ii) Sea C una cónica no degenerada de ecuación Q ($C \equiv Q = 0$). Si F se anula en todos los puntos de Q , entonces, $F = QF'$, donde $F' \in S_{d-2}$, es decir, F es divisible por Q en $K[X, Y, Z]$.

Corolario 3.5.5. (Apéndice B) Sean P_1, \dots, P_n puntos del plano proyectivo. Fijado d ,

- (i) Sea L una recta proyectiva dada por $L \equiv H = 0$. Si P_1, \dots, P_a puntos de la recta L , P_{a+1}, \dots, P_n puntos que no están en L , con $a > d$, entonces tenemos:

$$S_d(P_1, \dots, P_n) = H \cdot S_{d-1}(P_{a+1}, \dots, P_n)$$

- (ii) Sea C una cónica no degenerada dada por $L \equiv Q = 0$. Si P_1, \dots, P_a puntos que están en L , P_{a+1}, \dots, P_n puntos que no están en L con $a > 2d$, entonces tenemos:

$$S_d(P_1, \dots, P_n) = Q \cdot S_{d-2}(P_{a+1}, \dots, P_n).$$

Proposición 3.5.6. (Apéndice B) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y P_1, \dots, P_8 puntos distintos de modo que cuatro de ellos no estén aliados, ni siete de ellos sean concónicos, entonces:

$$\text{Dim } S_3(P_1, P_2, \dots, P_8) = 2.$$

El siguiente resultado es el teorema de Cayley-Bacharach y es un resultado sobre intersección de curvas cúbicas muy conocido en geometría algebraica.

Teorema 3.5.7. Teorema de Cayley–Bacharach: Sean dos curvas cúbicas C_1 y C_2 cuya intersección consiste en nueve puntos distintos, $C_1 \cap C_2 = \{P_1, \dots, P_9\}$, entonces toda cúbica D que pase por ocho de estos puntos pasa también por el noveno.

Demostración. Sean $C_1 \equiv F_1 = 0$, $C_2 \equiv F_2 = 0$, $D \equiv G = 0$. Supongamos que D es una curva cúbica, distinta de C_1 y de C_2 , que pasa por los puntos P_1, \dots, P_8 .

Vamos a comprobar que se verifican las condiciones de la proposición 3.5.6. Para ello supongamos que hay cuatro de estos ocho puntos en una recta L . Debido a esto, la recta corta a C_1 y C_2 en al menos cuatro puntos. Si utilizamos el teorema de Bézout llegamos a una contradicción a no ser que $L \subset C_i$, $i = 1, 2$. Si la recta está contenida en las dos cúbicas, entonces está contenida en su intersección, que son nueve puntos. Como K es algebraicamente cerrado la recta tiene infinitos puntos por lo que no tiene estar contenida en nueve puntos, llegamos así a una contradicción. Se razona de forma análoga si hay siete puntos de la intersección de las cúbicas en una cónica.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis de la proposición 3.5.6, es decir,

$$\text{Dim } S_3(P_1, \dots, P_8) = 2.$$

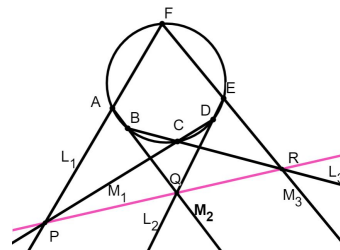
Como $F_1 \neq F_2$ y ambos están en $S_3(P_1, \dots, P_8)$, son linealmente independientes y forman una base de este espacio vectorial. Por otro lado sabemos que $G \in S_3(P_1, \dots, P_8)$, ya que es una cúbica que se anula en estos ocho puntos, por lo que $\exists \lambda, \mu \in K$ tal que $G = \lambda F_1 + \mu F_2$. Como F_1 y F_2 se anulan en el punto P_9 entonces G se anula en este punto, lo que implica que la cúbica D pasa por el noveno punto. \square

Con toda esta base sobre curvas cúbicas podemos hacer una demostración (en ambos sentidos) del teorema de Pascal.

Demostración del Teorema de Pascal:

Consideramos las rectas:
 $L_1 = PAF$, $L_2 = QED$, $L_3 = RBC$,
 $M_1 = PCD$, $M_2 = QAB$, $M_3 = REF$.
 Sean $C_1 = L_1 + L_2 + L_3$ y $C_2 = M_1 + M_2 + M_3$ dos cúbicas cuya intersección es:

$$C_1 \cap C_2 = \{A, B, C, D, E, F, P, Q, R\}$$



Para la primera implicación supongamos que los puntos $\{A, B, C, D, E, F\}$ está en una cónica no degenerada γ , y sea L la recta que une los puntos P y Q . Entonces, $L + \gamma$ es una cúbica que pasa por $\{A, B, C, D, E, F, P, Q\}$. Por el teorema 3.5.7 como $L + \gamma$ pasa por ocho de los nueve puntos de la intersección de C_1 y C_2 , entonces, también por el noveno, R .

Como en la demostración de este teorema se demuestra que no hay siete puntos en una cónica no degenerada $R \notin \gamma \Rightarrow R \in L$. Por tanto P, Q y R son colineales.

Recíprocamente, supongamos que P, Q, R son colineales, y forman la recta L . Sea γ la cónica no degenerada que pasa por $\{A, B, C, D, E\}$ (su existencia y unicidad esta asegurada por el corolario 3.4.17). Consideremos la cúbica $L + \gamma$ que pasa por los puntos, $\{A, B, C, D, E, P, Q, R\}$, y por el teorema 3.5.7 como $L + \gamma$ es una cubica que pasa por ocho de los nueva puntos de la intersección de C_1 y C_2 puede concluirse que también pasa por el noveno, F . Como se ha demostrado en este corolario que no puede haber cuatro de estos nueve puntos colineales entonces $F \notin L$ por lo que $F \in \gamma$.

□

Apéndice A

Demostraciones Teoremas de Base

A.1. Demostraciones plano proyectivo dual

Demostración proposición 3.4.1:

Demostración. Sea $a_0x' + a_1y' + a_2z' = 0$ una recta del plano proyectivo dual. Para todo punto de esta recta, supongamos $(b_0 : b_1 : b_2)$ existe una recta en el plano proyectivo $b_0x + b_1y + b_2z = 0$ que pasa por el punto $(a_0 : a_1 : a_2)$, por lo que en el plano proyectivo tenemos todo un haz de rectas que pasan por dicho punto.

Del mismo si tenemos un haz de rectas en el plano proyectivo que pasan por $(a_0 : a_1 : a_2)$, dicho punto tiene asociado una recta en el plano proyectivo dual $a_0x' + a_1y' + a_2z' = 0$. Además, cada recta $b_0x + b_1y + b_2z = 0$ de dicho haz, tiene asociado un punto en el espacio proyectivo dual, $(b_0 : b_1 : b_2)$. Como la recta $b_0x + b_1y + b_2z = 0$ pasa por el punto $(a_0 : a_1 : a_2)$, entonces el punto del plano dual $(b_0 : b_1 : b_2)$ esta en la recta dual $a_0x' + a_1y' + a_2z' = 0$. \square

A.2. Demostraciones de rectas proyectivas

Demostración proposición 3.4.2:

Demostración. Dados dos puntos distintos $(x' : y' : z'), (x'' : y'' : z'') \in \mathbb{P}_K^2$, la única recta del plano proyectivo que pasa por ellos es:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

Como los dos puntos dados son distintos, entonces son linealmente independientes, por lo que el punto $(x : y : z)$ estará en la recta si y solo si es combinación lineal de los puntos dados. $(x : y : z) \in L \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in K$ tales que:

$$(x : y : z) = \lambda(x' : y' : z') + \mu(x'' : y'' : z'')$$

Además $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, porque $(x : y : z) \neq (0 : 0 : 0)$ ya es un punto del plano proyectivo. □

Demostración proposición 3.4.3:

Demostración. Primero vamos a demostrar la unicidad. Supongamos que tenemos otra parametrización de L distinta de φ, ψ dada por:

$$(t_0, t_1) \mapsto (a_0 t_0 + b_0 t_1 : a_1 t_0 + b_1 t_1 : a_2 t_0 + b_2 t_1)$$

de como que cumple

$$\begin{aligned} \psi(1 : 0) &= (a_0 : a_1 : a_2) = (x' : y' : z'), \\ \psi(0 : 1) &= (b_0 : b_1 : b_2) = (x'' : y'' : z''), \\ \psi(1 : 1) &= (a_0 + b_0 : a_1 + b_1 : a_2 + b_2) = (x''' : y''' : z'''). \end{aligned}$$

Por lo tanto existe $\lambda, \mu, v \in K - \{0\}$ tales que:

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, a_2) &= \lambda(x', y', z'), \\ (b_0, b_1, b_2) &= \mu(x'', y'', z''), \\ (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2) &= v(x''', y''', z'''). \end{aligned}$$

Si sumando las dos primeras igualdad tenemos:

$$\lambda(x', y', z') + \mu(x'', y'', z'') = v(x''', y''', z''')$$

Por lo tanto, podemos deducir que:

$$\begin{vmatrix} \lambda x' & \lambda y' & \lambda z' \\ \mu x'' & \mu y'' & \mu z'' \\ v x''' & v y''' & v z''' \end{vmatrix} = 0$$

Por lo que el tercer punto es combinación lineal de los primeros por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda(x', y', z') + \mu(x'', y'', z'') &= v\alpha(x', y', z') + v\beta(x'', y'', z'') \\ \Leftrightarrow (\lambda - v\alpha)(x', y', z') &= (v\beta - \mu)(x'', y'', z'') \end{aligned}$$

Como (x', y', z') y (x'', y'', z'') son linealmente independientes, ya que en el espacio proyectivo son puntos distintos, entonces se sigue que: $\lambda = \nu\alpha$ y $\mu = \nu\beta$ de donde concluimos que $\exists\alpha, \beta \in K$ tales que:

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, a_2) &= \nu\alpha(x', y', z') \\ (b_0, b_1, b_2) &= \nu\beta(x'', y'', z'') \end{aligned}$$

y por tanto la parametrización debe ser:

$$\begin{aligned} (t_0, t_1) &\mapsto (\nu\alpha x' t_0 + \nu\beta x'' t_1 : \nu\alpha y' t_0 + \nu\beta y'' t_1 : \nu\alpha z' t_0 + \nu\beta z'' t_1) \\ &= (\alpha x' t_0 + \beta x'' t_1 : \alpha y' t_0 + \beta y'' t_1 : \alpha z' t_0 + \beta z'' t_1) \end{aligned}$$

Como α y β están determinado de forma unívoca por el determinante, la parametrización es única. Además, es evidente que es una parametrización lo que concluye esta demostración. \square

Demostración del proposición 3.4.4:

Demostración. Aplicando el proposición 3.4.3 sea $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow L$ la única parametrización de L tal que $\varphi(1 : 0) = a$, $\varphi(0 : 1) = b$, $\varphi(1 : 1) = c$ y $\varphi' : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow L'$ la única parametrización de L' tal que $\varphi'(1 : 0) = a'$, $\varphi'(0 : 1) = b'$, $\varphi'(1 : 1) = c'$. Entonces $f = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ es una proyectividad porque evidentemente $f \circ \varphi = \varphi'$ es un parametrización de L' . Además si existiera otra f' en la misma condiciones, tendríamos que $f' \circ \varphi$ es una parametrización de L' que cumple las condiciones del proposición 3.4.3 por lo que $f = f'$. \square

Demostración de la proposición 3.4.5:

Demostración. Primero vamos a demostrar que (i) es una proyectividad. Sea $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow L$ una parametrización dada por:

$$\varphi(t_0 : t_1) = (l_0(t_0, t_1) : l_1(t_0, t_1) : l_2(t_0, t_1))$$

donde l_0, l_1, l_2 son formas lineales en las variables t_0, t_1 . Entonces si $f \circ \varphi(t_0, t_1)$ es una parametrización de una de las rectas del haz centrado en el punto $A = (a_0 : a_1 : a_2)$ el teorema estaría demostrado.

$f(\varphi(t_0, t_1))$ es la recta que pasa por $\varphi(t_0, t_1)$ y $(a_0 : a_1 : a_2)$, por lo que esta recta tendrá la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ l_0(t_0, t_1) & l_1(t_0, t_1) & l_2(t_0, t_1) \end{vmatrix} = 0$$

que en el plano proyectivo dual esta recta esta asociada al punto $(a_1 l_2 - a_2 l_1 : a_2 l_0 - a_0 l_2 : a_0 l_1 - a_1 l_0)$ por lo tanto una parametrizaciones de la recta dual asociada a $\Omega(a)$ es

$$(t_0, t_1) \mapsto (a_1 l_2 - a_2 l_1 : a_2 l_0 - a_0 l_2 : a_0 l_1 - a_1 l_0).$$

La parametrización de esta recta en el espacio proyectivo dual nos da una parametrización del haz de rectas centrados en a , por lo que $f \circ \varphi$ es una parametrización de $\Omega(A)$, o de su recta dual asociada a ella.

La aplicación (ii) es la inversa de f por lo que es una proyectividad. \square

Demostración de la proposición 3.4.6:

Demostración. Es evidente porque es la composición de las proyectividades vistas en el Proposición 3.4.5. $f(P)$ es la recta que pasa por P y A . Mientras que $g(f(P))$ dada la recta $f(P)$ le asocia el punto de intersección de dicha recta con L' . Por tanto $g \circ f : L \rightarrow L'$ lleva puntos de L en puntos de L' y como es composición de proyectividad es una proyectividad. \square

A.3. Demostraciones de la razón doble

Demostración del proposición 3.4.8:

Demostración. Supongamos en primer lugar que f es una proyectividad y sean $A, B, C, D \in L$ cuatro puntos distintos. Sea $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow L$ la única parametrización de L que manda $(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)$ a los puntos A, B, C respectivamente. Si $\lambda = [A, B, C, D]$ entonces $\varphi(\lambda : 1) = D$. Por otra parte $f \circ \varphi$ es la única parametrización de L' que manda los puntos $(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)$ a $f(A), f(B), f(C), f(D)$ respectivamente. Como $f \circ \varphi(\lambda : 1) = f(D)$ se sigue que $[f(A), f(B), f(C), f(D)] = \lambda$ y por tanto $[A, B, C, D] = [f(A), f(B), f(C), f(D)]$.

Recíprocamente supongamos que f conserva la razón doble. Fijados tres puntos distintos $A, B, C \in L$ y considerando la única proyectividad $g : L \rightarrow L'$ tal que $g(A) = f(A), g(B) = f(B), g(C) = f(C)$. Como por hipótesis f es inyectiva son tres puntos distintos. Nuestro objetivo es ver que $f = g$. Para ello tomamos cualquier otro punto $d \in L$ y vamos a comprobar que $g(D) = f(D)$. Por hipótesis, $[A, B, C, D] = [f(A), f(B), f(C), f(D)]$ mientras que por la primera implicación (ya demostrada) de este teorema tenemos

$$[g(A), g(B), g(C), g(D)] = [A, B, C, D] = [f(A), f(B), f(C), f(D)].$$

Por tanto $[f(A), f(B), f(C), f(D)] = [f(A), f(B), f(C), g(D)]$. Sea $\varphi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow L'$ la única parametrización tal que $(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)$ van a parar respectivamente a $f(A), f(B), f(C)$. Por definición de razón doble, si $\lambda = [f(A), f(B), f(C), f(D)]$ entonces $\varphi(\lambda : 1) = f(D)$ y como también $\lambda = [f(A), f(B), f(C), g(D)]$ entonces $\varphi(\lambda : 1) = g(D)$ luego $f(D) = g(D)$. \square

Demostración del corolario 3.4.9:

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición 3.4.8. \square

Demostración de la observación 3.4.1:

Demostración. Este resultado se demuestra en la demostración del proposición 3.4.8. \square

A.4. Demostraciones de cónicas proyectivas

Demostración de la proposición 3.4.10:

Demostración. Una parametrización de la recta que pasa por A y B se expresa del siguiente modo $(t_0 : t_1) \rightarrow (a_0 t_0 + b_0 t_1 : a_1 t_0 + b_1 t_1 : a_2 t_0 + b_2 t_1)$. Si sustituimos en la ecuación de la cónica un punto de esta recta obtenemos que los puntos de la intersección de la recta y la cónica corresponden a las soluciones de:

$$(a_0, a_1, a_2)M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t_0^2 + 2(a_0, a_1, a_2)M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t_0 t_1 + (b_0, b_1, b_2)M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t_1^2 = 0$$

El coeficiente de t_0^2 es cero, ya que a esta en la cónica con lo que las soluciones son $t_1 = 0$ (que da el punto a) y las soluciones de:

$$2(a_0, a_1, a_2)M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t_0 + (b_0, b_1, b_2)M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t_1 = 0 \quad (\text{A.1})$$

Si esta ecuación no es idénticamente nula tendremos una segunda solución que coincidirá en función de t_0, t_1 . Esta solución coincidirá con la solución $t_1 = 0$, es decir el punto A si y solo si

$$(a_0, a_1, a_2)M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Si la ecuación es idénticamente nula entonces

$$(a_0, a_1, a_2)M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (b_0, b_1, b_2)M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto A como B verifican las ecuaciones

$$(a_0, a_1, a_2)M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0, \quad (b_0, b_1, b_2)M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

es decir que ambas ecuaciones representan la recta AB y por tanto son proporcionales, existe $\lambda \in K$ tal que $(a_0, a_1, a_2)M = \lambda(b_0, b_1, b_2)M$ Multiplicando esto por M^{-1} obtendríamos $(a_0, a_1, a_2) = \lambda(b_0, b_1, b_2)$ lo que es absurdo porque $(a_0 : a_1 : a_2) \neq (b_0 : b_1 : b_2)$. \square

Demostración del corolario 3.4.11:

Demostración. En la demostración de la proposición 3.4.10, para que la cónica se anule en tres puntos aliados entonces la ecuación A.1 debe ser idénticamente nula porque si una ecuación de grado dos se anula en tres puntos es idénticamente nula en un cuerpo algebraicamente cerrado. Sin embargo se ve en dicha demostración que esto es imposible.

La segunda se obtiene del hecho de que cualquier recta proyectiva contiene al menos tres puntos distintos (ya que esta en biyección con \mathbb{P}_K^1 , que contiene los puntos distintos $(1 : 0)$, $(0 : 1)$, $(1 : 1)$). \square

Demostración de la proposición 3.4.12:

Demostración. Para simplificar escribiremos la parametrización φ de una recta del siguiente modo $\varphi((t_0 : t_1)) = (l_0 : l_1 : l_2)$ donde l_0, l_1, l_2 representan expresiones lineales homogéneas en t_0, t_1 .

Una parametrización de la recta que pasa por $\mathbf{a} = (a_0 : a_1 : a_2)$ y el punto $(l_0 : l_1 : l_2)$ (fijados un t_0, t_1) tendrá la siguiente parametrización:

$$(s_0 : s_1) \mapsto (a_0 s_0 + l_0 s_1 : a_1 s_0 + l_1 s_1 : a_2 s_0 + l_2 s_1)$$

que al sustituirlo en la ecuación de la cónica nos dará una expresión de la forma (véase el procedimiento para hallarla en la demostración de la proposición 3.4.10).

$$l s_0 s_1 - q s_1^2 = 0$$

donde l es una expresión lineal homogénea en t_0, t_1 y q es una expresión cuadrática homogénea en t_0, t_1 . Como la solución $(s_0 : s_1) = (1 : 0)$ es la que nos da el punto \mathbf{a} , $\Phi(l_0 : l_1 : l_2) = (q_0 : q_1 : q_2)$ donde q_0, q_1, q_2 son expresiones cuadráticas homogéneas en t_0, t_1 va ser la solución asociada a la intersección de la cónica y la recta para $(s_0 : s_1) = (q : l)$.

El resultado estará demostrado si vemos que q_0, q_1, q_2 son formas lineales independientes ya que sino sera una cónica degenerada. En caso de que no fueran independientes existirá una relación $u_0 q_0 + u_1 q_1 + u_2 q_2 = 0$ lo que implicaría que la cónica C estaría contenida en la recta $u_0 x + u_1 y + u_2 z = 0$. Por lo tanto esta recta estaría dentro de la cónica C en contradicción con el corolario 3.4.11. \square

Demostración de la proposición 3.4.13:

Demostración. Dada una parametrización de la cónica, del siguiente modo:

$$(t_0 : t_1) \mapsto \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^2 \\ t_0 t_1 \\ t_1^2 \end{pmatrix}$$

siendo $P = (c_{ij})$ una matriz inservible. Haciendo el cambio de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

el conjunto sera construido por los puntos de la forma $(x' : y' : z') = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$ que es precisamente la cónica $X'Z' - Y'^2 = 0$. Además es evidente que matriz $P^{-1}P$ sigue siendo una matriz inservible por lo que al realizar el cambio de coordenadas tenemos otra parametrización de la cónica. \square

Demostración de la proposición 3.4.14:

Demostración. Escribimos $\varphi' : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{C}$ de forma $(t_0 : t_1) \rightarrow (q_0 : q_1 : q_2)$ donde $q_i = Q_i(t_0, t_1)$ siendo $Q_0, Q_1, Q_2 \in K[T_0, T_1]$ formas cuadráticas homólogas (independientes). Necesitamos ver que $\psi^{-1} \circ \varphi'$ es una parametrización φ de $\Omega(a)$, es decir que tiene una expresión lineal en t_0, t_1 . La imagen de $(t_0 : t_1)$ sera la recta que pase por $a = (a_1 : a_2 : a_3)$ y $(q_0 : q_1 : q_2)$, es decir, la recta

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

que es el punto de \mathbb{P}_K^{2*} de coordenadas:

$$(u_0 : u_1 : u_2) = (a_1 q_2 - a_2 q_1 : a_2 q_0 - a_0 q_2 : a_0 q_1 - a_1 q_2)$$

Vamos a demostrar que esta expresión es una expresión lineal no cuadrática en s_0, s_1 . En efecto, el punto a está en \mathbb{C} , por lo que se podrá escribir

$$(a_0 : a_1 : a_2) = (Q_0(s_0, s_1) : Q_1(s_0, s_1) : Q_2(s_0, s_1))$$

para algún $(s_0, s_1) \in \mathbb{P}_K^1$ luego los polinomios $a_1 Q_2 - a_2 Q_1$, $a_2 Q_0 - a_0 Q_2$, $a_0 Q_1 - a_1 Q_2$ tiene a (s_0, s_1) como raíz. Por tanto, son divisibles por $s_1 T_0 - s_0 T_1$. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} a_1 Q_2 - a_2 Q_1 &= (s_1 T_0 - s_0 T_1) A_0 \\ a_2 Q_0 - a_0 Q_2 &= (s_1 T_0 - s_0 T_1) A_1 \\ a_0 Q_1 - a_1 Q_0 &= (s_1 T_0 - s_0 T_1) A_2 \end{aligned}$$

donde $A_0, A_1, A_2 \in K[T_0, T_1]$ son formas lineales homogéneas. Es decir, cancelando el factor común podemos escribir

$$(u_0 : u_1 : u_2) = (A_0(t_0, t_1) : A_1(t_0, t_1) : A_2(t_0, t_1))$$

que ahora ya presenta una parametrización de $\Omega(a)$. \square

Apéndice B

Demostraciones en el plano proyectivo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado

Demostración de la proposición 3.5.4:

Demostración. **Dem (i)** Con un cambio de coordenada podemos asumir que $H = X$, entonces F puede describirse de forma única como $F = XF'_d + G(Y, Z)$ agrupando términos que tienen X en el primer factor. Entonces:

$$F \equiv 0 \text{ en } L \Leftrightarrow G \equiv 0 \text{ en } L \Leftrightarrow G(Y, Z) = 0$$

Como G claramente no contiene a la recta $X = 0$, ya que es independiente de dicha recta, si aplicamos el teorema de Bezout (3.5.1) el numero de puntos de intersección de la recta con un polinomio G deben ser como mucho d , pero como G se anula en todo \mathbb{P}_K^1 , que tiene mas de d puntos, entonces G es idénticamente nula.

Dem (ii) Con un cambio de coordenadas, $Q = XZ - Y^2$, por lo que como F puede escribirse de forma única como $F = QF'_{d-2} + A(X, Z) + YB(X, Z)$ ya que se puede sustituir $(XZ - Q)$ por Y^2 in F , quedándonos con los términos de grado menos o igual que 1 en Y en el segundo y tercer termino. Tal y como hemos demostrado en el corolario 3.4.13, la cónica C la podemos parametrización sel siguiente modo: $X = t_0^2$, $Y = t_1 t_0$, $Z = t_1^2$ y obtenemos

$$\begin{aligned} F \equiv 0 \text{ en } C &\Leftrightarrow A(t_0^2, t_1^2) + t_0 t_1 B(t_0^2, t_1^2) \equiv 0 \text{ en } C \\ &\Leftrightarrow A(t_0^2, t_1^2) + t_0 t_1 B[t_0^2, t_1^2] \equiv 0 \in K[t_0, t_1] \\ &\Leftrightarrow A(X, Z) = 0 = B(X, Z) \end{aligned}$$

El ultimo paso es porque $A(t_0^2, t_1^2)$ solo tienen termino en t_0 y t_1 de exponente par mientras que $t_0 t_1 B(t_0^2, t_1^2)$ solo tiene termino con exponente

impar. Debido a esto no se anulan entre ellos por lo que todos los términos deben ser cero. □

Demostración del corolario 3.5.5:

Demostración. Caso i: Supongamos F un polinomio homogéneo de grado d y D la curva dada por $D \equiv F = 0$. Si D intrínseca a L en los puntos P_1, \dots, P_a donde $a > d$, entonces por el teorema de Bézout, L debe estar contenida en D , es decir, $L \subseteq D$, por lo que F se anula en todo L , y debido a la proposición 3.5.4 tenemos que $F = H \cdot F'$ donde $F' \in S_{d-1}$. Ya que $P_{a+1}, \dots, P_n \notin L$ tenemos que $F' \in S_{d-1}(P_{a+1}, \dots, P_n)$.

Caso ii: Análogo. □

Demostración de la proposición 3.5.6:

Demostración. Por la proposición 3.5.3 sabemos que:

$$\text{Dim}(S_3(P_1, \dots, P_8)) \geq \binom{3+2}{2} - 8 = 2 \quad (\text{B.1})$$

Ahora vamos a demostrar que no puede ser mayor que 3 y para ello vamos a hacer tres casos:

- 1 Si no hay 3 puntos colineales y no hay 6 en una cónica degenerada. Supongamos por contradicción que $\text{Dim } S_3(P_1, \dots, P_8) \geq 3$.

Sea P_9, P_{10} dos puntos distintos en la línea $L = P_1P_2$. Entonces como los puntos P_9, P_{10} no suman ninguna condición extra:

$$\text{Dim } S_3(P_1, \dots, P_{10}) \geq \text{dim} S_3(P_1, \dots, P_8) - 2 \geq 1$$

Esto implica que que existe $0 \neq F \in S_3(P_1, \dots, P_{10})$. por el corolario 3.5.5, $F = LQ$ con $Q \in S_2(P_3, \dots, P_8)$. Q es un cónica y tanto si es no degenerada o si es una cónica degenerada, en cuyo caso siempre hay tres puntos aliados, tenemos una contradicción con la hipótesis del caso.

- 2 **Primer caso degenerado:** Supongamos $P_1, P_2, P_3 \in L$, es decir, con colineales, y sea $L \equiv (H = 0)$. Sea P_9 un cuarto punto de esta línea. Entonces por el Corolario 3.5.5, $S_3(P_1, \dots, P_9) = H \cdot S_2(P_4, \dots, P_8)$. Como entre estos cinco puntos no hay cuatro colineales y cinco puntos definen una cónica de forma única $\text{Dim } S_2(P_4, \dots, P_8) = 1$ por lo tanto $\text{Dim} S_3(P_1, \dots, P_9) = 1$.

Como $\text{Dim } S_3(P_1, \dots, P_9) \geq \text{Dim } S_3(P_1, \dots, P_8) - 1$, entonces

$$\text{Dim } S_3(P_1, \dots, P_8) \leq 2.$$

3 *Segundo caso degenerado:* Supongamos que P_1, \dots, P_6 están en una cónica no degenerada C , $C \equiv (Q = 0)$. Entonces escogemos $P_9 \in C$ un punto distinto de los seis que ya tenemos. Por el corolario 3.5.5, $S_3(P_1, \dots, P_9) = QS_1(P_7, P_8)$. Como una línea es única dados dos puntos de ella $\dim S_1(P_7, P_8) = 1$ por lo que $\dim S_3(P_1, \dots, P_9) = 1$.

Como $\dim S_3(P_1, \dots, P_9) \geq \dim S_3(P_1, \dots, P_8) - 1$,

$$\dim S_3(P_1, \dots, P_8) \leq 2.$$

□

Bibliografía

- [1] Heinrich Dorrie-100 Great Problems of Elementary Mathematics, THEIR HISTORY AND SOLUTION.
[Capítulo 61- Pascal's Hexagon Theorem](#)
- [2] John Wesley Young, *Geometria*, Projective Geometry, The mathematical Association Of America, number 4, Menasha Wisconsin USA, Abril 1930..
- [3] Prof. Juan Manuel Conde, Teorema de Morley, universidad del Alicenta, Departamento de Análisis matemático. [Teorema de Morley](#)
- [4] By Dr. Scott Brodie, M.D., Ph.D. Mount Sinai School of Medicine, NY, Napoleon's theorem, two simple Proofs, [cut-the-know](#)
- [5] Napoleon's Theorem, Third proof with complex numbers, [cut-the-know](#)
- [6] Napoleon's Theorem, A second proof with complex numbers [cut-the-know](#)
- [7] [J.conway's Proof](#)
- [8] Niko Desgiades' Proof, [link](#).
- [9] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer, Geometry Revisited, The mathematical association of America, Volumen 19, 1967.
- [10] Raúl Ibáñez, Variaciones artísticas del teorema de Napoleón, [Diario de Cultura científica](#)
- [11] Enrique Arrondo, Apuntes de Geometría Proyectiva. version del 7 enero de 2009, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain.
- [12] [Yet Another Analytic Proof of Napoleon's Theorem](#), J.A. Grzesik, The American Mathematical Monthly, 13 Dec 2017,
- [13] Proving Napoleon's Theorem, Jennifer Ogden, Department of Mathematics, Saint Mary's College of California, Spring 2017.
- [14] [Angles in a Circle and Cyclic Quadrilateral](#),

-
- [15] Napoleon's Theorem by Vectors and Trigonometry, [cut-the-know](#).
- [16] Napoleon's Theorem, [cut-the-know](#).
- [17] F.Morley, On the metric geometry of the plane n-line, Haverford College, January, 1900.
- [18] Alain Connes, A new proof of Morley's theorem, par Alain Connes, les relations entre les mathematiques et la physique theorique, Hautes Sci, Bures, 1998, pp. 43-46.
- [19] Morley's Miracle, [cut-the-know](#).
- [20] Omid Ali Shahni Karamzadeh, Is The Mystery of Morley's Trisector Theorem Resolved?, Forum Geometricorum Volume 18 (2018) 297–306
- [21] Cletus O.Oakley and Justine C.Baker, The Morley Trisector Theorem, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 9 (Nov., 1978), pp. 737-745
- [22] Pascal Lines: Steiner and Kirkman Theorems, [cut-the-know](#).