# Fourieren serieen eragina XIX. mendeko Matematikan

*Javier Duoandikoetxea*

Matematika saila
Euskal Herriko Unibertsitatea / Zientzia Fakultatea
644 p.k., 48080 Bilbo

**Laburpena:** Matematikaren kontzeptu askoren definizio zehatza XIX. mendean egin zen. Fourieren serieen konbergentzia aztertzean agertu ziren kontzeptu batzuen mugak eta argitzeko edo zabaltzeko beharra. Artikulu honetan Fourieren serieen konbergentzian oinarritutiko bilakaera historikoa aurkezten dugu, kontzeptu horien garapenean izan zuten garrantzia erakutsiz.

## 1. SARRERA

Antoni Zygmundek berba hauek idatzi zituen bere *Trigononometric Series* liburuan (1958):

> Teoria hau ideia berrien iturri izan da analistentzat azken mende bietan eta hala izango da seguruenik hurrengo urteetan ere. Funtzioen teoriako oinarrizko nozio eta emaitza asko serie trigonometrikoen gainean lan eginez lortu dira. Arrazoizkoa da pentsatzea testuinguru desberdinetan ere aurkikuntza hauek lor zitezkeela, baina serie trigonometrikoen teoriari lotuta jaio ziren. Ez zen kasualitatea izan gaur egun orokorki onartzen den funtzioaren nozioa Dirichletek Fourieren serieen konbergentziaz idatzitako memoria ospetsuan (1837) formulatu izana, edo Riemannen integralaren definizioa modu orokorrean serie trigonometrikoei buruzko Riemannen *Habilitationschrift* delakoan agertu izana, edo multzoen teoria, XIX. mendeko Matematikaren garapenik garrantzizkoenetakoa dena, Cantorek serie trigonometrikoen bakartasun-multzoen problema ebazteko saioetan sortu izana. Berrikiago, Lebesgueren integrala Fourieren serieen teoriarekin lotura estuan garatu zen eta funtzio orokortuen (banaketak) teoria, Fourieren integralarekin.

Matematikaren zein arlok duen kontzeptuen garapenean eskubide gehiago eztabaidatzen hasi barik, artikulu honen helburua Fourieren serieen inguruko lanek XIX. mendean zenbait kontzeptu definitzeko orduan izan zuten eragina aztertzea da.

## 2. FOURIEREN SERIEAK

Jean Baptiste Joseph Fourier Auxerren (Frantzia) jaio zen 1768an. Biografo bati sinetsiz gero «irakasle, polizia sekretua, preso politikoa, Egiptoko gobernadorea, Isère eta Rhôneko prefeta, Napoleonen laguna eta Zientzia Akademiako idazkaria» izan zen Fourier. Ez zuen aspertzeko astirik izan! Pariseko Ecole Polytechnique delakoaren irakasle zela, 1798an Napoleonek Egiptora egin zuen espedizioan parte hartzeko deitu zuten. Itzultzean Isèreko prefeta izendatu zuten eta Grenobleko postuan berrekin zien beroaren hedapenari buruzko ikerketei. 1807an *Mémoire de la propagation de la chaleur* izeneko lana aurkeztu zuen Institut de Francen eta kritikekin onartu zen; Institutuak urtero deitzen zuen lehiaketa bat eta gai honen gainean deitu zuen 1811koa. Lan bi aurkeztu ziren eta Fourierena izen zen irabazle, nahiz eta «orokortasun eta zorroztasun» eskasekoa zela esan zuten. Lan hauek ez ziren garai horretan argitara eman. Baina 1822an, Zientzia Akademiako Idazkari izendatu zuten urte berean, *Théorie de la propagation de la chaleur* izeneko liburua argitaratu zuen. Sommerfeld fisikariak Fisika matematikoaren Bibliatzat jo zuen liburua. Fourier 1830ean hil zen.

Fourieren lanaren helburua beroaren hedapena ematen duen deribatu partzialetako ekuazioa ebaztea zen. Ez gara lanaren azterketa horretan hasiko hemen; esan dezagun soilik *aldagaien banantze-metodoa* izenaz ezagutzen dugun ebazpidea asmatu zuela eta horrela ekuazioaren emaitza funtzio-serie baten bidez idatzi zuela. Fourieren metodo hori oinarrizkoa dugu gaur egun eta deribatu partzialetako ekuazioen ikastaroetan irakasten da. Seriearen zenbakizko koefizienteak lortzeko hasierako datua serie trigonometriko modura idazteko beharra zuen eta hauxe da lan honen abiapuntua.

Demagun $f$ funtzioak $2\pi$ periodoa duela (edo $2\pi$ luzerako tarte batean definiturik dagoela, hortik kanpora hedapen periodikoa egingo dugu behar izanez gero); posible da funtzioa serie trigonometriko baten bidez adieraztea? Zehatzago esanda,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

berdintza posible den ala ez aztertzen ari gara. Eta honekin batera galderak pilatu egiten dira, oinarrizkoena hauxe: zeintzuk dira $\{a_k\}$ eta $\{b_k\}$ koefizienteak? Fourierek berak eman zigun erantzuna:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \qquad \text{eta} \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

aukeratu behar dira ($a_0$-ren formula besteen berdina izan dadin idazten da $a_0/2$ seriean). Koefizienteen formula hauek lortzeko modurik errazena hau da: biderkatu funtzioa eta seriea cos $kt$ (edo sin $kt$) faktoreaz eta integratu $(-\pi,\pi)$ tartean, batukaria eta integralen ordena trukatu (oro har justifikazioa beharko luke urrats honek, baina baldintza batzuetan onargarria da) eta funtzio trigonometrikoen *ortogonalitate-erlazioak* erabiliz amaitzen da. Ortogonalitate-erlazio direlako horiek hurrengoak dira:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt \, dt = \begin{cases} \pi, & n = k \text{ bada;} \\ 0, & n \neq k \text{ bada;} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin kt \, dt = 0, \quad n \text{ eta } k \text{ guztietarako.}$$

Bide hau errazena den arren, Fourierek liburuan beste bat proposatzen du lehenago, funtzioa infinitu bider deribatzen dela onartuta.

Badakigu koefizienteen aukera egiten baina horrek bakarrik seriea konbergente egiten du? Eta konbergentea denean, batura $f$ da? Adibide zehatz batzuk agertzen dira Fourieren lanean baina ez arrazoibide orokorrik; hala ere, esan daiteke Fourierek sinesten zuela berdintzaren egian. Galdera plazaratuta zegoen eta erantzun bila aritu ziren matematikariek ikusi zutenez, ez zen zirt edo zart egitekoa, berrituz joan zen gainera eta oso oparoa suertatu da haren ekarpena. Hemen jarraituko dugun biderako puntuz puntuko konbergentzia nahikoa da; XIX. mendeko azken herenean konbergentzia uniformea ere aztertu zen eta XX. mendeak konbergentzia-mota berriak ekarri zituen espazio funtzionalak sortu ahala. Puntuz puntu begiratzen dugunez, batura partzialak egiten dira

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

eta $t$ bakoitzerako $\lim_{N\to\infty} S_N(t)$ begiratzen da.

Gaur egungo irizpidea hartuta ezin esan dezakegu Fourieren lanak zehaztasun osoa zuenik, baina bere merituen artean jarri behar dugu problema bideratu eta plazaratu izana eta funtzioaren eta koefizienteen arteko korrespondentzia beste inork baino lehenago nabaritu izana. Korrespondentzia hau norabide batean *analisia* da ($f$ bere osagaien bidez) eta bestean, *sintesia* (osagaietatik $f$-rantz).

## 3. AINTZINDARIAK ETA FUNTZIOAREN KONTZEPTUA

Funtzio bat serie trigonometriko moduan idazteko proposamena Fourier baino lehenago ere agertu zen, XVIII. mendeko erdi aldera hain zuzen ere. Hemen ere deribatu partzialetako ekuazio bati lotuta ageri zen, hari baten bibrazioak (gitarrarenak, esaterako) adierazten duenari alegia. Honela idazten dugu dimentsio bateko uhin-ekuazioa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

D'Alemberten proposamena

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$$

erako ebazpena zen ($\varphi$ aurrerantz eta $\psi$ atzerantz mugitzen diren uhinak dira). Geroago Eulerek zehaztu zituen funtzio bi hauek hasierako posizioa eta abiadura ezagututa. Aldi berean Daniel Bernoullik beste era bateko ebazpena proposatu zuen, serie baten bidez. Seriearen gai bakoitza higidura posible bat zen eta *gainezarmenaren printzipioa* erabiliz (ekuazioaren linealtasuna esango genuke matematikariok) batura ere ebazpena zela erabaki zuen, baturak infinitu gai (seriea) izanik ere. Gaiak funtzio trigonometrikoek emanak ziren eta hasierako datuak adierazi behar izanez gero Fourieren problema aurkituko genuke. Eztabaida luze bat hasi zen hiru lagunen artean, besteren bat ere sartu zelarik (Laplace ezaguna adibidez urte batzuk beranduago). Ez ziren ebazpenak zalantzan jartzen, bai ordea orokorrena zein zen. Bernoullik infinitu koefiziente zituelako aukeran aldarrikatzen zuen edozein funtzio adierazteko ahalmena, baina ez zuen zehaztu zergatik eta bere lanetan ez da inondik agertzen koefizienteen aukera egokia zein den. Garaia ez zen heldua behar zen moduko eztabaida bideratzeko.

Interesgarria da, hala ere, goi-mailako zientzialari hauen liskarra, funtzioa zer den ulertzeko zailtasuna agerian uzten duelako. Izenak gorabehera, funtzio-mota bi onartzen ziren, formula batek emandakoak eta grafiko batez adierazitakoak. Funtzio bat serie trigonometriko baten bidez ematea formula biren berdintasuna aitortzea zen eta orduan, zelan izango zen posible periodikoa ez den funtzio bat periodikoa baden serie baten berdina izatea? Gaur egun badakigu hau erantzuten, problema planteatzerakoan aurreko atalean egin dugun moduan, formula $2\pi$ luzerako tartean onartuz eta hortik kanpora hedapen periodikoa eginez (periodo bakoitzean formula desberdina erabiliz seguruenik). Hau, ordea, funtzioa korrespondentzia modura ulertzetik dator eta jauzia ez da nolanahikoa, abstrakzio-maila altuagoa eskatzen baitu. Urte asko pasatu behar izan ziren arazoa argitzeko, Dirichleten lanak heldu arte gutxienez. Irakurleak dagoeneko nabarituko zuen XVIII. mendeko matematikarien oztopo bera dutela askotan ikasleek, formula edo grafikotik aldentzeko zailtasuna; irakasleok oso kontuan hartu beharko genuke erraza iruditzen zaigun kontzeptua ematen duen baino sakonagoa izan daitekeela.

## 4. CAUCHY ETA INTEGRALA

Koefizienteen formulek integralak dakartzate. Zer da integrala? Fourierek ez zuen zalantzan jarri koefizienteen existentzia integrala kurba baten azpiko azalera dela argudiatuz. Funtzioaren nozio zabal batek interpretazio hori zalantzan jar zezakeen baina Fourierek esku artean zerabiltzan funtzioetarako ez zen funtsezko eztabaida.

Matematikan zehaztasuna ezartzeko ahalegin berezia hasi zen XIX. mendeko lehen zatian, Fourierek bere lana prestatu zuen garaian hain zuzen. B. Bolzano (1781-1848) Pragan eta A. L. Cauchy (1789-1857) Parisen nabarmendu ziren ahaleginean. Azken honek 1821eko *Cours d'Analyse (de l'École Polytechnique)* delakoan berba esanguratsuak idatzi zituen:

> Metodoei dagokien aldetik, Geometrian eskatzen den zehaztasun guztia ematen saiatu naiz, horrela Algebraren orokortasunetik ateratako arrazoibiderik ez erabiltzeko. Modu honetako arrazoibideak, onartzen diren arren, batez ere serie konbergenteetatik dibergenteetara eta kantitate errealetatik irudikarietara pasatzeko, noizean behin egia zein den barruntatzeko indukziotzat bakarrik har daitezkeela uste dut eta ez datoz bat zientzia matematikorako aldarrikatzen den zehaztasunarekin.

Kontzeptuak aldez aurretik definitu gura ditu eta arrazoibideak sendotu, kontu hutsetan galdu barik. Honen ondorioz integrala ere definitu behar zuen eta bera izan zen lehena lan hori hartzen, ordura arte deribatuaren alderantzizkotzat baitzuten. Aipaturiko liburu horretan barik, 1823ko *Resumé des leçons* delakoan aurki daiteke; tarte batean definituriko funtzio jarraiki baterako eman zuen eta hauxe da:

$$\lim (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

non $x_0, x_1, \ldots, x_n$ puntuek definizio-tartearen partiketa diren eta limitea egiteko partiketak ematen dituen tarteen luzerek zerorantz jotzen duten. Dena zehatz jartzeko, limitea existitzen dela ikusi behar zuen; ohikoa da esatea puntuz puntuko jarraikitasuna ez ezik, jarraikitasun uniformea erabili zuela Cauchyk, betetzen dela frogatu barik, eta halaxe zen, baina zuzenketa hori onartuta integrala ondo definituta gelditzen zen eta honenbestez Kalkuluaren oinarrizko teorema (hau da, integrazioaren eta deribazioaren alderantzizko erlazioa) frogatu zuen aurreneko aldiz.

Baliteke irakurlea harritzea Cauchyren integral hau Riemannen integrala deitzen dugunaren berdina dela nabaritzean (eta artean Riemann ez zen jaio!). Aurrerago itzuliko gara puntu honetara eta saiatuko gara argitzen.

## 5. DIRICHLET ETA KONBERGENTZIA

P. L. Lejeune-Dirichlet (1805-1859) Alemaniatik Parisera bidali zuen aitak Matematika ikastera 1822an, maisurik onenak han aurkituko zituelakoan. Dirichleten aitaren iritzia zuzena zen, frantziarrak baitziren nagusi XIX. mendeko lehen zatiko Matematikan. Dirichletek ondo hartu zuen Pariseko giroa eta pilpilean zegoen Fourieren serieen konbergentziaren azterketari ekin zion, baina Cauchyren metodoen zorroztasuna baliatuz. Honen ondorioz, 1829an Fourieren serieen izaeraz ezagutzen dugun lehen emaitza garrantzitsua eskaini zuen: *biz f bornatua eta zatika jarraikia eta demagun f-ren maximo eta minimoak kopuru finituan agertzen direla; orduan f-ren Fourieren seriea konbergentea da eta seriearen batura* $(f(x+)+f(x-))/2$ *da,* $f(x+)$ *eta* $f(x-)$ *funtzioaren albo-limiteak izanik.* Jarraikia den puntuetan $f(x)$ balioa berreskuratzen dugu, hortaz.

Dirichleten lana alde askotatik da aipagarria. Batetik, funtzio-multzo bat hartzen du helburutzat, ez funtzio «guztiak»; bestela esanda, baldintza nahikoak bilatzen ditu. Gainera, integrala ondo definiturik egon dadin behar du zehaztasuna gordetzeko eta funtzioa zatika jarraikia izanik, Cauchyren definizioa aski du. Batura partzialetarako adierazpen integral bat asmatu zuen, gaur egun *Dirichleten nukleoa* deitzen dugunaren bitartez, eta integral hau zati bitan banatuz, bakoitzari arrazoibide desberdin bat ezarri zion (Kahaneren arabera *tour de force* bat, egin zen garairako). Erabat modernotzat jo dezakegu Dirichleten lana eta oraindik ere liburu batzuetan jatorrizko artikuluan bezala erakusten da emaitza honen frogapena.

Lanaren amaieran infinitu eten-puntu edo infinitu mutur dauden kasua aztertzeko saioa egiten du eta, besteak beste, integralaren definizioarekin egiten du topo. Hurrengo lan batean aztertzeko utzi zuen arren, bigarren lan hori ez zuen inoiz burutu. Integragarritasunerako beharrezko uste duen baldintza baten ondoren hurrengo iruzkin mamitsua dakar:

> [Integragarritasun] baldintza betetzen ez duen funtzio bat dugu hurrengoa hartuz gero, $\varphi(x)$ $c$ konstantea da $x$-en balioa arrazionala denean eta beste konstante desberdin bat $d$, aldagaia irrazionala bada. Honela definituriko funtzioak balio finitu eta zehatzat ditu $x$ guztietarako eta, hala ere, ez dago [Fourieren] seriean ordezkatzerik, seriean sartzen diren integralek esangura guztia galduko luketelako.

Hona hemen non agertzen den integralen kontradibideetan gehien erabiltzen dugun funtzioa. Eta berehala nabaritzen da esangura galtzea ikuspuntu geometrikotik ere hartu behar dela, ez baitago funtzio horren azpiko azalera zein den esaterik (Neurriaren teoria asmatu arte behintzat). Arazoak argitzea aurrerapauso handia da beti. Bestalde, Dirichletek erabiltzen duen funtzioaren kontzeptua modernoa dela onartzen dute autore gehienek, nahiz eta inon ez zuen eman definizio zehatza.

## 6. RIEMANN, INTEGRALA ETA SERIE TRIGONOMETRIKOAK

Harrigarria da G. B. Riemannek (1826-1846) Matematikari egin zion ekarpena. Bere lan guztien bilduma liburuki batean sartzen den arren, hainbat alorretan ireki zituen bide berriek leku nagusia ematen diote Matematikaren historian. Aztertzen ari garen problemarekin lotura Dirichletengandik etorri zitzaion eta Alemaniako unibertsitateetan irakasle izateko baimena ematen zuen habilitazioa lortzeko egin behar izan zuen lan idatzian *(Habilitationschrift)* aritu zen gaiaz; *Funtzio baten serie trigonometrikoaren bidezko garapenaz* zen lanaren izenburua. Hasteko, ordura arteko bidea berrikusten du; gero, integralaren auzia aztertu zuen eta azkenik serie trigonometrikoak landu zituen.

Integralaz ari dela, Cauchyren definiziotik haratago joateko aitzakia behar duela dirudi; hona hemen zer dioen:

> Denbora eta lekuaren bidez infinituki txikian indarrak eta materiaren egoerak zelan aldatzen diren ezezagunak bazaizkigu ere, seguru izan gaitezke Dirichleten emaitzak ezin aplikatu zaizkien funtzioek ez dutela fenomeno naturaletan parte hartzen. Hala ere, Dirichletek aztertu ez dituen kasu hauek interesgarriak dirudite arrazoi birengatik.
>
> Lehenengo, Dirichletek berak lanaren amaieran esaten duenez, gai hau Kalkulu infinitesimalaren oinarriei oso lotuta dago eta oinarri horiei argitasun eta seguritate handiagoa emateko balio dezake. Ikuspegi honetatik berehalako interesa du azterketa honek.
>
> Bigarrenik, Fourieren serieak ez dira bakarrik agertzen ikerketa fisikoetan, gaur egun matematika hutseko alor batean ere arrakasta handiz aplikatzen dira, zenbakien teorian hain zuzen ere, eta hemen garrantzizkoak diren funtzioak, Dirichletek serie trigonometrikoen garapena aztertu ez dienak dirateke.

Riemannen integrala ezaguna da irakurlearentzat oinarrizko kurtsoetan irakasten delako. Itzul gaitezen bada gorago bidean utzi dugun galderara: zein da Cauchyren eta Riemannen integralen arteko desberdintasuna? Ñabarduraren bat gorabehera esan daiteke ez dagoela desberdintasunik definizioan. Riemannek Cauchyren definizioari etekin osoa atereaz, limitea existitzen denean funtzioa integragarria dela esaten du (*Riemann-integragarria* esaten zaio gaur) eta ondoren funtzio hauen ezaugarriak bilatzen ditu. Bi lortu zituen, funtzioaren oszilazioan oinarrituta, eta funtzio integragarri «harrigarriak» eraiki zituen, eten-puntuen multzoa dentsoa zuten zenbait funtzio, esaterako. Esan dezakegu Riemannek Cauchyk baino abstrakzio-maila altuagoarekin jokatu zuela, helburua integrala izan beharrean funtzio integragarrien multzoa izanik. Hemen bilatu behar da bien arteko benetako desberdintasuna, eta ez integralaren definizioan. Irakasleentzako galdera bat uzten digu honek guztiak: ikasle guztiei integral eredu berbera irakatsi behar zaie? Nire ustez, ikaslearen maila edo egiten ari den karrera kontuan hartuta erabaki beharko genuke integrala soilik irakastea (eta beraz zatika jarraikiak diren funtzioetarako) edo funtzio integragarriak lantzea.

Riemannen lanaren azken zatia serie trigonometrikoen azterketaz ari da. Fourieren koefizienteen bitartez ez ezik, serie trigonometriko orokorren baturen multzoaz arduratzen da (berriro ere funtzio-multzo baten propietateak zehaztu gura ditu multzoa ezagutzeko). Gaiz gai bi bider integratuz seriaren batura jarraikia da, ondo definituta dago hortaz, eta ondoren bigarren deribatu orokortu bat aplikatu zion honi jatorrizko seriaren batura ulertzeko. Testuinguru moderno batean banaketen teoriara eramango gintuzke bide honek.

Lan horiek lantzeak xehetasun tekniko zailetan sarraraziko gintuzke eta horretan utziko dugu. Aipagarriak dira, hala ere, Fourieren serieei dagozkien emaitza bi: (i) funtzio integragarri baten Fourieren koefizienteen segidek zerorantz jotzen dute; (ii) Fourieren seriearen izaera puntu batean funtzioak puntuaren ingurune batean hartzen dituen balioen menpekoa da soil-soilik *(lokalizazio-printzipioa)*. Bigarren propietatea harrigarri xamarra gerta daiteke eta merezi du ondo ulertzea: tarte batetik kanpo funtzioa erabat aldatzen badugu, haren Fourieren koefizienteak ere aldatzen dira, hauek lortzeko formuletan tarte osoko integralak agertzen baitira; hala ere, Riemannen emaitzak esaten digunez hasierako funtzioaren eta berriaren Fourieren serieak izaera berdina dute tartearen barruko puntuetan (biak konbergenteak dira eta limite berdinerantz edo biak dibergenteak).

## 7. CANTOR ETA BAKARTASUNA

Georg Cantor (1845-1918) serie trigonometrikoen azterketan aritu zen Riemannen ildotik. Serie trigonometriko biren limitea berdina bada puntu guztietan koefizienteak nahitaez berdinak izan behar dutela ondorioztatu zuen.

Ondoren aurreko informazio hori puntu guztietan ezagutu beharrean azpimultzo batean ezagutzen duguneko kasua ikusi zuen. Honek bilakaera garrantzizkoa izan duen problema bat dakar: demagun $E \subset [-\pi, \pi]$ multzoa dugula eta serie trigonometriko biren limitea $[-\pi, \pi] \setminus E$ multzoan berdina dela; serieen koefizienteak berdinak dira nahitaez? Erantzuna E-ren araberakoa izango da, jakina, eta baiezkoa denean E *bakartasun-multzoa* dela esaten da; honelako multzoetatik kanpo seriearen batura finkatzen badugu aukera bakarra dago koefizienteetarako. Serie biren kendura hartuta beste modu honetan ere ezar daiteke problema: $[-\pi, \pi] \setminus E$ multzoan serie trigonometriko baten batura 0 dela jakinik, erabaki ea koefiziente guztiek 0 izan behar duten. Aurrerapenak egin diren arren, bakartasun-multzoen deskribapen osoa ezezaguna da oraindik. Cantorenak dira lehen emaitzak.

Puntu bakarreko multzoak bakartasunezkoak direla ikusi zuen lehenbizi eta, beraz, multzo finituak ere bai; hurrengo urratsa multzo infinituak aztertzea zen. Hauen artean lehen emaitza positiboa metatze-puntuak kopuru finituan dituzten multzoetarako lortu zuen eta horrela ondoz ondoko multzo deribatuak (metatze-puntuen multzoak) eginez inoiz multzo hutsa ateratzen bazen nahikoa zela ikusi ahal izan zuen. Lan honek zuzen errealaren egitura hobeto ulertzera bultzatu zuen eta multzoen topologiako oinarrizko kontzeptuak aterarazi zizkion. Multzo infinituen estudiorako ere iturrietako bat hau izan zuen.

## 8. DU BOIS-REYMOND ETA LEHEN EMAITZA NEGATIBOA

Dirichleten teoremaren baldintzak betetzeko funtzioa jarraikia izatea ez da nahikoa baina itxaroteko kontua zela zirudien, lehenago edo beranduago baten batek erakutsiko zuen funtzio jarraiki guztietarako konbergentzia zegoela. Baina ez! Harrigarria bazirudien ere 1873an P. du Bois-Reymondek (1831-1889) hurrengoa erakutsi zuen: *funtzio jarraiki baten Fourieren seriea dibergentea izan daiteke puntu batean.*

Serie bidezko eraiketa bat eginez aipaturiko teorema frogatzeko balio zion funtzio bat lortu zuen. Aldaketa batzuk sartu arren antzeko frogapenak egin ziren geroago. XX. mende hasierako Analisi Funtzionalaren garapenak eraiketa egin gabeko existentzia frogatzeko bide bat eskaintzen du: bornapen uniformearen printzipioa (edo Banach-Steinhausen teorema); honen bitartez ematen da frogapena gaur egun liburu askotan.

Geroago, Du Bois-Reymondek berak emaitza are bihurriago bat lortu zuen: dibergentzia multzo dentso batean funtzio jarraiki baterako. Alde positiboan ere badu emaitza interesgarririk, hurrengoa adibidez: serie trigonometriko baten batura funtzio integragarria bada, seriea derrigorrean funtzioaren Fourieren seriea da.

## 9. WEIERSTRASS ETA FUNTZIO EZ-DIFERENTZIAGARRIA

Aurrekoaren garaikide, Weierstrassen emaitza bat ere harrigarria suertatu zen matematikarien artean: *badaude inon ere deribaturik ez duten funtzio jarraikiak.* Erraza da puntu batean deribaturik ez duen funtzio jarraiki bat ematea, baina inon ere ez duenik! Weierstrassek eman zuen adibidea serie trigonometriko modura agertu zen eta horrexegatik uztartu dugu artikuluaren gai nagusiarekin. Esate baterako,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(3^k x)}{2^k}$$

serieak definitzen duen funtzioak betetzen du Weierstrassek aldarrikatzen duena. Konbergentzia uniformearen kontzeptua erabat menperatuta gelditu zen Weierstrassekin eta honek funtzio-serieetarako lortutako M-testak berehala erakusten digu idatzi dugun seriearen batura funtzio jarraikia dela (eta konbergentzia uniformea izanik, seriea bera da baturaren Fourieren seriea). Gaiz gai deribatuz lortzen den seriea ez da konbergentea baina hori ez da nahikoa baturaren ez-deribagarritasuna ondorioztatzeko, lan gehiago behar da.

Emaitzaz gain aipagarria da segidak eta serieak funtzioen definizio modura izan dezaketen zeregina azpimarratzea. Weierstrassen moduan Riemannek ere argi zeukan hau, gorago aipatu ditugun funtzio integragarri berezi haiek ere serie modura eman baitzituen. Eta du Bois-Reymondi sinetsiz gero, Riemannek ere deribaturik ez duen funtzio jarraiki baterako hautagaia zuen,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$$

serieak definiturikoa, hain zuzen ere. Urte asko behar izan ziren ikusteko adibide honek ez zuela balio zenbait puntutan deribagarria badelako (1970). Funtzioen kasuan ez ezik, zenbakien kasuan ere segidak eta serieak erabiltzen ditugu definizio modura (hor ditugu $e$ zenbakiaren ohiko definizioak) eta esan daiteke zenbaki irrazional bat beti zeharbidez ezagutzen dugula, garapen hamartarra edo beste hurbilketa baten bitartez.

## 10. FEJER ETA BATUKORTASUNA

Funtzioaren Fourieren koefizienteak emanda seriearen batura partzialen limitean jarri dugu funtzioa berreskuratzeko esperantza. Du Bois-Reymondek erakutsi duenez bide hori ez da beti egokia, ba al dago bestela egiterik? Lipot Féjer (1880-1959) gazte hungariarrak 1900ean funtzioa berreskuratzeko beste bide bat proposatu zuen, erabateko arrakasta lortuz eta Fourieren programari «galdutako ospea» itzuliz.

Aspalditik zen ezaguna segida konbergente baten gaien batezbestekoak eginez lortzen den segidak limite berbera duela (berriaren $n$-garren gaia hasierako segidaren lehen $n$ gaien batezbestekoa da). Badaude, ordea, segida dibergenteak batezbestekoen prozedurak konbergente bihurtzen dituenak. Gauza bera egin daiteke, hortaz, serieekin. Adibidez, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ seriea ez da konbergentea baina batura partzialen batezbestekoen limitea 1/2 da. Jolasteko modu bat ala zerbait sakonagoa dago honen atzean?

Féjerek Fourieren serieari aplikatu zion bide hau. Aldez aurretik konbergenteak ziren serieek hala izaten jarraituko zuten, eta besteak? Arrakasta izan zuen Féjeren asmoak: *funtzio jarraiki baten Fourieren seriearen batura partzialen batezbestekoen limitea hasierako funtzioa da* (limite uniformea dugu gainera). Badugu, beraz, bide seguru bat funtzio jarraikia (eta beste asko, aipatzen ez ditugun arren) Fourieren koefizienteetatik berreskuratzeko.

Serie baten *batura* zer den ere zalantzan jar daiteke honenbestez. Zergatik batura partzialen limitea eta ez beste zerbait? Aurrekoaren arabera, beste bide batzuek ere badute beren garrantzia. Gaur egun, *konbergentzia* esaten zaio batura partzialen limitea egiteari eta *batukortasuna* proposatu dugunaren moduko hedapenei. Oinarrizko erregela bat bete behar dute: seriea konbergentea denean baturaren balio berbera eman. Poissonek 1820an Fourieren serieen konbergentzia frogatzeko egin zuen lana oker zegoen baina batukortasuna ulertuaz batera ikusi zen Poissonen bidea ere berreskuratzeko modukoa zela; konbergentzia aztertzen ari zelakoan, batukortasun-metodo bat erabiltzen ari zen.

«Serie dibergenteak ez du baturarik» idatzi zuen Cauchyk aipatu dugun *Cours d'Analyse*-ko sarreran eta «serie dibergenteak deabruaren asmakuntza dira eta lotsagarria da euren gainean frogapen bat oinarritu gura izatea» utzi zigun Abelek garai bertsuan. 1901ean Emile Borelen *Leçons sur les séries divergentes* liburua argitaratu zen, eta urte batzuk lehenago matematikari askok serie dibergenteen gainean zeresanik ez zegoela uste zuten!

## 11. XX. MENDEKO BIDEAZ ZERBAIT

Arrasto sakona utzi zuten Fourieren serieek XIX. mendeko Matematikan. XX. mendean bide berriak hartu zituzten, bai ikuspuntu teorikotik, bai aplikazio praktikoetan.

Orain arte aztertu dugun problema teorikotik aldendu barik, mende hasieran Lebesgueren integrazio teoria berriak (1902an argitaratua) Fourieren seriea definitzeko balio zuten funtzio integragarrien eremua zabaldu egin zuen eta Lebesguek berak ekin zion problemen azterketari. Bestalde, laster agertu ziren espazio metriko berriak eta konbergentzia eta batukortasun problemak ostera aztergai gelditu ziren espazio hauetariko bakoitzari zegokion distantziaren arabera. Hilberten espazioen garapenak ere kokaleku bat aurkitu zion sistema trigonometrikoari $L^2(-\pi, \pi)$ deitzen dugun espazioko oinarri hilbertiarra (ortonormala) dela azalduz. Honek Geometria euklidearraren antz handia du, baina infinitu dimentsioko espazio batera hedatua.

Integrazioaren teoria berrian zero neurriko multzoek aparteko garrantzia dute. (Multzo bat zero neurrikoa da $\varepsilon > 0$ bakoitzerako tarte-segida batekin estali ahal bada, tarteen luzeren batura $\varepsilon$ baino txikiagoa izanik.) Zero neurriko multzo batetik kanpora betetzen diren propietateak *ia nonahi* betetzen direla esaten da; adibidez, funtzio bi berdinak badira zero neurriko multzo batean izan ezik, ia nonahi berdinak direla esaten da. Fourieren seriearen baturak jatorrizko funtzioa ematen ez badu ere, gutxienez ia nonahi funtzioaren berdina den batura ematen du? Ez zegoen neurriaren teoria garatu aurretik galdera hau egiterik, baina orain bai eta, besteak beste, baiezko erantzunak Du Bois-Reymonden emaitza negatiboari muga bat jarriko lioke. Lennart Carleson matematikari suediarrak 1966an erakutsi zuenez, aurreko galderaren erantzuna baiezkoa da $L^2$-ko funtzioetarako eta, ondorioz, jarraikietarako ere bai. Oso emaitza sakona eta frogatzeko zaila da hau. Askoz lehenago, 1926an, Kolmogorovek emaitza guztiz negatibo bat aurkitu zuen: *Fourieren serie puntu guztietan dibergentea duen funtzio integragarri bat badago.*

Gaur egun aldagai bateko funtzioetarako Fourieren serieen teoria ondo menperatzen dela esan daiteke. Aldagai gehiagorekin, ordea, oinarrizko problema batzuetarako erantzunaren zain jarraitzen dugu.

## 11. ZENBAIT IRUZKIN BIBLIOGRAFIAZ

Fourieren serieen oinarrizko teoria ikasteko Analisi orokorreko liburuetara jo daiteke, ez dira beharrezkoak lan bereziak. Adibide modura liburu bi sartu ditugu bibliografian eta [1]-eko 11. kapituluan eta [2]-ko 10. kapituluan aurkituko du irakurleak gaia. [3] liburua klasikoa da, Riemannen integralarekin egiten du lan eta sarrera historiko aipagarria du (eta Doveren edizio merke batean eskura daiteke oraindik).

J.P. Kahane matematikari frantsesak idatzi duen [4] liburuko lehen erdia da Fourieren serieen azterketa historikorik onena, nire ustez. [5] ere oso gomendagarria da, azterketa sakona egiten baitu. M. Klineren [6] liburu ederra entziklopedikoa da; izenburuak dioena gorabehera, ez da XX. mendeko lehen herenetik pasatzen; hala ere, hemen aztergai hartu dugun epea betetzen du. Kalkuluaren oinarrizko kontzeptuen azalpen historikoa [7]-n ere irakur daiteke, baina ez dakar informazio askorik Fourieren serieez.

[8] eta [9] artikuluak oso interesgarriak dira. Lehenak hemen aztertu ditugun gaiak eta beste zenbait gehiago ikusten ditu, alde historikotik egin ere. Bigarrena, errusiar matematikari ospetsu batek duela 50 bat urte idatzia da (1998ko data itzulpenari dagokio) eta funtzioaren nozioa du ardatz, guk eman dugun baino zehaztasun gehiago emanez.

Azkenik, [10] liburua Fourieren jatorrizko lanaren faksimile-edizioa da.

## BIBLIOGRAFIA

[1] T.M. Apóstol. 1988. *Análisis matemático,* 2.ª edición. Reverté, Bartzelona.
[2] J.E. Marsden eta M.J. Hoffman. 1998. *Análisis clásico elemental.* Addison Wesley Iberoamericana. Wilmington.
[3] H.S. Carslaw. 1950. *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.* 3. edizioa. Dover. New York.
[4] J.P. Kahane eta P.G. Lemarie-Rieusset. 1995. *Fourier series and wavelets.* Gordon and Breach. Amsterdam.
[5] I. Grattan-Guinness (ed.). 1984. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Alianza. Madril.
[6] M. Kline. 1992. *El pensamiento matemático de la Antigüedad hasta nuestros días (3.er tomo).* Alianza. Madril.
[7] A.J. Durán. 1996. *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* Alianza. Madril.
[8] E.A. González-Velasco. 1992. «Connections in mathematical analysis: the case of Fourier series». *Amer. Math. Monthly* **99**, 427-441.
[9] N. Luzin. 1998. «Function: Part I» eta «Function: Part II». *Amer. Math. Monthly* **105**, 59-67 eta 263-270.
[10] J. Fourier. 1988. *Théorie analytique de la chaleur.* Jacques Gabay. Paris.