La diferencia entre lógicas y el cambio de significado de las conectivas: Un enfoque categorista

(Differences between Logics and Meaning-Variance: A Categorial Approach)

Luis ESTRADA GONZÁLEZ e Ivonne Victoria PALLARES VEGA

Recibido: 8.01.2011
Versión Final: 25.04.2011

BIBLID [0495-4548 (2011) 26: 71; pp. 133-154]

RESUMEN: En este artículo tratamos de hacer plausible la hipótesis de que las conectivas de diferentes lógicas no necesariamente difieren en significado. Utilizando el tratamiento categorista de las conectivas, argumentaremos contra la tesis quineana de que la diferencia de lógicas implica diferencia de significado entre sus conectivas, y ubicamos el cambio de tema en la diferencia de objetos más que en una tal diferencia de significado. Finalmente, intentamos mostrar que ese tratamiento categorista es una forma de minimalismo semántico, de acuerdo con el cual no todos los elementos semánticos usuales son relevantes para determinar el significado de las conectivas.

Descriptores: conectivas lógicas; diferencia de lógicas; tesis quineana (débil); minimalismo semántico categorista.

ABSTRACT: *We argue here that the meanings of logical connectives need not differ in different logics. treatment of the logical connectives, we argue against the well-known Quinean thesis that a difference between logics implies a difference in the meanings of connectives. We thus locate this change in the difference between certain objects rather than in the difference between the meaning of connectives. Finally, we try to show that the category-theoretic treatment of logical connectives is a form of semantic minimalism, according to which not all the usual semantic components are relevant in fixing the meaning of a connective.*

Keywords: *logical connectives; difference between logics; (weak) Quinean thesis; categorial semantic minimalism.*

1. *Introducción*

La noción categorista[1] de 'topos' puede considerarse una formulación precisa de la noción de 'universo de conjuntos abstractos variables' y la teoría de topos como teoría de conjuntos generalizada.[2] Al igual que la teoría de conjuntos, o más exactamente, al igual que algunos modelos de las teorías axiomáticas de conjuntos, cada topos puede

[1] En inglés es muy común encontrar la expresión '*categorical*' para referirse a algo relativo a la teoría de categorías, con la excepción de Goldblatt y algunos pocos seguidores quienes usan '*categorial*'. En español se ha utilizado también 'categórico' como traducción de '*categorical*'. Utilizaremos el término 'categorista' y sus derivados porque 'categórico' ya tiene usos muy arraigados en lógica, matemática y filosofía (como en los trabajos de Aristóteles y en la investigación de la axiomática) y porque 'categorial' y sus derivados, sugeridos por Goldblatt (1984), aunque menos susceptibles de confusión que 'categórico' y sus derivados, también tienen un uso filosófico (en la fenomenología husserliana). Además, 'categorista' semeja a 'conjuntista'.

[2] Esta elucidación ampliamente difundida de la noción de topos en términos conjuntistas se debe a Lawvere (véase por ejemplo Lawvere 1975). Sin embargo, hay otras elucidaciones no conjuntistas como las que se mencionan en (Johnstone 2002).

verse como un marco para desarrollar grandes partes de la matemática hasta ahora conocida, quizá toda la matemática conocida con la excepción de la teoría de categorías misma. Lo que aquí nos interesa en particular es la reconstrucción categorista de las conectivas lógicas de orden cero usuales (conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicación ($\Rightarrow$) y negación ($\neg$)), así como el planteamiento de problemas en filosofía de la lógica utilizando la perspectiva categorista.

El problema que abordamos en este trabajo es el siguiente: si las leyes lógicas que valen en un topos son diferentes a las que valen en otro, ¿se debe esto a que las conectivas lógicas tienen distintos significados en cada uno de esos topos, como sugeriría Quine?

La discusión del problema del cambio de lógica ha seguido en lo esencial los lineamientos propuestos en (Quine 1970), para quien todo cambio de lógica es cambio de tema, es decir, cambio en el significado de las conectivas lógicas, lo cual consiste en cambiar sus condiciones de verdad y las colecciones de teoremas e inferencias válidas en los cuales aparecen esas conectivas.[3] Pocas veces se ha cuestionado esta idea quineana; la mayoría de las veces se intenta mostrar que si se propone un cambio de lógica y, por ende, un cambio de significado de las conectivas, es porque es necesario para algún propósito. Otra opción ha sido aceptar que hay cambio de tema, pero que lo que cambia no es el significado de las conectivas lógicas sino la noción de deducibilidad (cfr. Morado 2007). Una intuición común a varios proponentes de lógicas diferentes a la clásica es que si ha de modificarse la colección de teoremas clásicos es porque algunas teorías con cierto valor para nuestro cuerpo de conocimientos requieren lógicas diferentes (cfr. por ejemplo Priest 1975, 2006; da Costa 1982). Por ejemplo, si al estudiar los fenómenos cuánticos hay que utilizar una lógica diferente a la clásica es porque las partículas subatómicas tienen propiedades cuyo tratamiento en términos clásicos es inadecuado o, cuando menos, complica demasiado su estudio. Pero, como ya señalamos, argumentos como los anteriores no cuestionan la tesis quineana, ya que sólo muestran que un cambio en la colección de teoremas y en el significado de las conectivas o en la relación de deducibilidad se debe a que ciertas teorías así lo requieren.

Cuando hablamos del problema del significado de las conectivas lógicas no nos referiremos al problema, quizá más discutido, de saber cuáles son las constantes lógicas, ya sea en una teoría formal o en el lenguaje ordinario. El problema no es saber cuáles o cuántas constantes lógicas hay, sino más bien qué es lo que determina su significado, independientemente de cuáles y cuántas sean. No obstante, quizá sea ocioso discutir el problema sin conocer al menos algunas conectivas pero tampoco podremos referirnos a todas, de ahí que sólo consideraremos dos casos casi incontrovertibles, a saber, la negación y la disyunción, y que son de especial relevancia para el debate acerca del significado de las conectivas lógicas.[4] En este debate hay dos grupos de teorías predominantes. Uno es el de las teorías "representacionalistas", basadas en la semántica modelo-teórica, cuya

---

[3] Aunque lo correcto es hablar de las condiciones de verdad de las proposiciones en las que aparecen las conectivas, por simplicidad en ocasiones hablaremos de las "condiciones de verdad de las conectivas".

[4] Dado que en la lógica intuicionista no es válida la inferencia de a $\neg\neg p$ a p y que $p \vee \neg p$ no es teorema, se ha pensado que el significado de la negación o de la disyunción es el responsable de la diferencia entre la lógica clásica y la lógica intuicionista. Sin embargo, es de notar que si se añade la llamada "ley de Peirce" $(((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p)$ a la lógica intuicionista se obtiene la lógica clásica del mismo modo que si se le hubiera añadido $p \vee \neg p$ o la ley de la doble negación, pese a que la ley de Peirce no

tesis es que el significado de una conectiva lógica se determina por su contribución a las condiciones de verdad de las fórmulas que la contienen; el otro grupo lo constituyen las teorías "inferencialistas", las cuales están basadas en la semántica de la teoría de pruebas. De acuerdo con este grupo de teorías, el significado de una conectiva lógica se determina por su contribución al rol inferencial de las fórmulas que la contienen.[5]

Típicamente, tanto el representacionalismo como el inferencialismo son *maximalistas* en el sentido de que suponen que *todos* los elementos de una semántica modelo-teórica (respectivamente, una semántica de teoría de pruebas) son relevantes en la determinación del significado de las conectivas, por ejemplo, el número exacto de valores de verdad, la noción de consecuencia lógica subyacente, etc. De acuerdo con una propuesta *minimalista*, en contraste, sólo algunos elementos modelo-teóricos (respectivamente, inferenciales) relacionados con las conectivas son semánticamente relevantes y otros, aunque importantes, no contribuyen a la determinación del significado de las conectivas (cfr. Hjortland 2007).

En el presente trabajo discutimos el problema del significado de las conectivas lógicas a partir de la caracterización de éstas en la teoría de categorías (específicamente, a partir de la caracterización de dichas conectivas en un topos). En la sección 2 presentamos con cierto detalle algunas propuestas tradicionales acerca de los cambios de lógica y su relación con el significado de las conectivas lógicas. Ahí distinguimos entre, por un lado, la tesis quineana débil, a saber, que la diferencia entre lógicas implica diferencia de significados en sus conectivas; y, por otro lado, la tesis fuerte, de acuerdo con la cual cambio de lógica es cambio de tema y cambio global. En la sección 3 presentamos la versión categorista de la lógica de orden cero con las correspondientes definiciones de la negación y la disyunción y mostramos el conocido resultado de que, en general, la lógica interna de un topos no es clásica sino intuicionista. Finalmente, en la sección 4 trataremos de hacer plausibles las siguientes dos hipótesis:

(1) que la caracterización de las conectivas en un topos puede considerarse una forma de minimalismo, pues dicha caracterización especifica cuáles elementos relacionados con una conectiva son semánticamente relevantes y cuáles no;

(2) que es la estructura de los objetos de un topos, y no un cambio de significado en las conectivas, lo que, al pasar de un topos a otro, genera la diferencia en la colección de teoremas de sus respectivas lógicas internas.

De este modo, las lógicas internas proporcionarían un ejemplo de lógicas diferentes pero cuyas conectivas no difieren en significado.

Cabe indicar que discutir la tesis fuerte implica revisar y discutir prácticamente toda la filosofía de Quine, incluyendo temas como el de qué es la lógica, cuál es su lugar en nuestro cuerpo total de conocimientos, cómo se eligen y cambian teorías, etc. Esto excede los propósitos y la naturaleza de este trabajo, por lo que sólo trataremos de

---

contiene ni negaciones ni disyunciones.

[5] Tomamos la terminología y la descripción de (Brandom 2000, 45). A diferencia de lo que se sugiere en (Barceló 2007, 63s), consideramos que el "regimentismo", la idea de que el significado de las constantes lógicas captura cierto sentido de las "palabras lógicas" 'y', 'o', etc. del lenguaje natural, no ha sido una teoría del significado de las conectivas, sino más bien un desiderátum de muchas lógicas y de varias teorías del significado de las conectivas.

mostrar, usando herramientas categoristas, que la tesis quineana débil es incorrecta. Esto, creemos, todavía constituye una aportación sustantiva.

Hemos omitido la definición de, por ejemplo, la implicación, la conjunción y los cuantificadores pues el incluirlas hubiera requerido a su vez definir y explicar otras nociones que habrían hecho innecesariamente extenso el presente trabajo. En un apéndice hemos incluido las definiciones que consideramos necesarias para los argumentos que presentamos. Confiamos en que los dos ejemplos de topos que hemos elegido —**Conjuntos** y la categoría $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ de multi-gráficas dirigidas irreflexivas— así como las conectivas correspondientes a la negación y a la disyunción, sean suficientes para ilustrar nuestra tesis. Aunque este es un trabajo de filosofía de la matemática y de la lógica, es prácticamente imposible dar una explicación completa de todos los temas aquí discutidos o mencionados. Cuando ha sido necesario presentar nociones o resultados más complicados, lo hemos hecho de una manera lo más informal posible. Otras nociones complejas o resultados más avanzados son sólo mencionados si no se requiere mucho más para entender los problemas que ellos sugieren; del mismo modo, hemos intentado dar referencias para todos los resultados que utilizamos.

2. Diferencia entre lógicas y cambio de tema: algunas propuestas tradicionales

Quine (1970) estableció las líneas generales en las que los problemas de la diferencia entre lógicas y la elección entre ellas habrían de discutirse y defendió la tesis de que todo cambio de lógica (todo cambio en la colección de teoremas o inferencias válidas de una lógica dada) es cambio de tema (cambio en el significado de las conectivas lógicas[6]):

> Mi opinión acerca del diálogo [entre quienes creen que puede haber oraciones verdaderas de la forma $p \wedge \neg p$ y quienes no] es que ninguna parte sabe de lo que está hablando. Piensan que están hablando de la negación, '[$\neg$]', 'no', pero la noción seguramente ha dejado de ser reconocible como la negación cuando consideraron algunas conjunciones de la forma [$p \wedge \neg p$] como verdaderas y dejaron de considerar que tales oraciones implican a todas las demás. Evidentemente, este es el predicamento del lógico divergente: cuando trata de negar la doctrina simplemente cambia de tema. (Quine 1970, 81)

Abstrayendo los elementos particulares del ejemplo (las lógicas involucradas y la conectiva discutida), la tesis de Quine es que al cambiar de la lógica $\mathcal{L}_1$ a la lógica $\mathcal{L}_2$ se cambia de tema. *Grosso modo*, dos lógicas son diferentes si y sólo si son diferentes sus colecciones de tautologías, contingencias o falsedades lógicas. Según Quine, el cambio de tema consiste en cambiar la manera de entender las conectivas, en cambiar su significado, lo cual a su vez consistiría en cambiar los valores que toma una oración en determinadas condiciones y también en modificar las implicaciones entre ciertas oraciones. Entonces 'cambio de tema' quiere decir "cambio de significado de las conectivas lógicas", lo cual a su vez quiere decir "cambio en los valores de verdad de ciertas fórmulas, presumiblemente atribuible a un cambio en la manera de evaluar las conectivas, y cambio en las inferencias válidas entre ciertas fórmulas". Para Quine (1960) el significado-estímulo de las conectivas queda determinado a través de sus condiciones de asentimiento y disentimiento (y suspensión del juicio, según añade en (Quine 1974)). Si se omiten sus

[6] Aunque Quine no lo expresaría así dado su escepticismo acerca del significado. Cfr. *infra*.

limitaciones a la conducta observable y las complicaciones introducidas en (Quine 1974), puede afirmarse que para él el significado de una conectiva está determinado por las condiciones de verdad de las oraciones en las que aparece, que esas condiciones de verdad validan ciertos teoremas, a saber, los de la lógica clásica, y por el hecho de que esas condiciones de verdad reproducen de la manera más fiel posible el uso de sus contrapartes en el lenguaje ordinario.

Como mencionamos en la introducción, pocas veces se ha cuestionado esta tesis; la mayoría de las veces se intenta mostrar que cambiar el significado de las conectivas es legítimo o incluso necesario para algún propósito. Al decir que el cambio de tema puede ser legítimo, los críticos de Quine han aceptado la tesis de que cambiar de lógica es cambiar de tema y que, a su vez, cambiar de tema es cambiar el significado de las conectivas, y ciertamente parece haber buenas razones para aceptarla. Por ejemplo, la semántica de mundos posibles parece hacer explícita la diferencia de significado entre la negación clásica y la intuicionista del siguiente modo (donde v es una valuación, m y m' son mundos posibles y $\geq$ es una relación de orden o accesibilidad entre mundos):

Negación clásica: $v(\neg A, m) = 1$ si y sólo si $v(A, m) = 0$.

Negación intuicionista: $v(\neg A, m) = 1$ si y sólo si para todo $m' \geq m, v(A, m') = 0$.

Otra opción, menos explorada y que ya habíamos mencionado antes pero que no consideraremos aquí, ha sido la de aceptar que sí hay un cambio de tema, pero que lo que cambia no es el significado de las conectivas lógicas sino la noción de deducibilidad (cfr. Morado 2007).

En las filosofías quineanas de la lógica y de la ciencia se mantiene que, al cambiar de lógica, al cambiar de herramienta inferencial, este cambio debe ser global y no meramente local. Por ejemplo, no cabría mantener la lógica clásica para todos los dominios y cambiarla sólo, digamos, en el ámbito de los fenómenos subatómicos. Así, la tesis de Quine es que cambio de lógica es cambio tema, pero es también cambio global. No estamos interesados en discutir esta tesis fuerte, que además involucra discutir temas como el de qué es la lógica, cuáles son los criterios para la elección entre lógicas, etc. Nos interesa discutir solamente una versión debilitada de la tesis quineana, a saber, que si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos lógicas diferentes entonces sus conectivas difieren en significado. Cuando en adelante hablemos de "la tesis quineana" o "la tesis de Quine" nos referiremos a esta versión débil.[7]

La tesis de Quine ha sido ampliamente aceptada incluso por quienes tienen visiones diferentes acerca del significado de las conectivas lógicas. Como ya dos grupos de teorías predominantes en el debate actual acerca del significado de las conectivas lógicas: las teorías *representacionalistas* y las *inferencialistas*. Así, por ejemplo, de acuerdo con estas últimas, el significado de la conjunción consistiría en que de $p \wedge q$ se pueden inferir tanto p como q (regla de eliminación de la conjunción), y de que p y de q se puede concluir $p \wedge q$ (regla de introducción de la conjunción). Esa sería la contribución de la conjunción al rol inferencial de las fórmulas en las que aparece y ese sería su significado. Tanto los correlatos representacionalistas como los inferencialistas de la tesis de Quine

[7] Esta tesis es muy común entre los lógicos en la práctica, más que la versión fuerte. En la literatura, esta tesis ha sido explícitamente defendida en (Priest 2006, cap. 10) para el caso específico de las lógicas clásica e intuicionista.

suelen ser aceptados, esto es, para los representacionalistas cambiar de lógica es cambiar las condiciones de verdad de las conectivas y para los inferencialistas cambiar de lógica es cambiar la colección de inferencias válidas o las reglas para el uso de las conectivas.

Entre los pocos objetores de la tesis de Quine están Hilary Putnam (por ejemplo, Putnam 1957, 1962, 1968), Adam Morton (cfr. Morton 1973) y, más recientemente, J.C. Beall y Greg Restall (Beall y Restall 2001, 2006), Francesco Paoli (cfr. Paoli 2003, 2007) y Stephen Read (véase Read 2008). Cada uno de estos autores acepta lo que en (Hjortland 2007) se denomina "minimalismo para (el significado de) las conectivas lógicas", a saber, la tesis de que sólo algunos elementos modelo-teóricos (respectivamente, inferenciales) son semánticamente relevantes y otros, aunque importantes, no contribuyen a la determinación del significado de las conectivas.

Putnam (1962, 51) defiende tres tesis: (1) que las conectivas tienen un "significado central" o "nuclear" (*core meaning*) el cual es independiente de muchos de los teoremas (o de las inferencias válidas, si se prefiere hablar en términos inferencialistas); esto es, para Putnam, Quine no caracteriza adecuadamente el significado de una conectiva; (2) que si por "cambio de significado" se entiende la modificación del uso global de una conectiva, esto es, si "cambio de significado" quiere decir que los teoremas (o inferencias válidas) asociados a una conectiva no coinciden para dos lógicas dadas, entonces cambiar de lógica sí es cambiar de significado; (3) que si la tesis "cambio de lógica es cambio de tema" significa que un cambio de lógica involucra *solamente* un cambio de significado en las conectivas entonces la tesis es falsa, pues un cambio de lógica también afecta la relación de deducibilidad. Por supuesto, las tesis (2) y (3) son importantes sólo en el caso de que el significado de las conectivas fuera otro que su significado central. Así, sólo nos ocuparemos de la tesis (1) (que niega el antecedente de la tesis (2)) y de la defensa que Putnam hace de ella en (Putnam 1968, 187-197).

Putnam distingue, aunque un tanto implícitamente, entre los teoremas (respectivamente, las inferencias válidas) de una lógica $\mathcal{L}$ y las propiedades que tiene que satisfacer una conectiva c para ser c (aunque dichas propiedades pueden validar ciertos teoremas o inferencias). En el contexto de una discusión acerca de la lógica de la mecánica cuántica, Putnam introduce la idea de un "significado operacional" de las conectivas lógicas. Así, una cosa serían los teoremas en los que aparece la disyunción, que pueden diferir de una lógica a otra, y otra cosa serían las características que tiene que cumplir una conectiva para ser una disyunción. Omitiendo su discusión acerca de la mecánica cuántica y modificando un poco su presentación, un significado operacional para las conectivas se especificaría como sigue. Supóngase una semántica en la que hay al menos dos valores de verdad (digamos, $\mathit{verdadero}$ y falso) y que éstos forman un orden parcial. Los significados operacionales de las conectivas serían los siguientes:

— el significado operacional de $p \wedge q$ consiste en que su valor de verdad es el ínfimo del valor de los conyuntos;
— el significado operacional de $p \vee q$ consiste en que su valor de verdad es el supremo del valor de los disyuntos;
— el significado operacional de $\neg p$ consiste en que el valor de verdad de la conjunción de $\neg p$ con p es igual a falso y que el valor de verdad de la disyunción de $\neg p$ con p es igual a $\mathit{verdadero}$.[8]

[8] Esta propuesta de Putnam no es todo lo general que uno desearía: la definición operacional para la

Las conectivas de la lógica cuántica y de la clásica tienen este significado operacional; además, no es difícil verificar que a partir de ese significado operacional pueden caracterizarse los teoremas clásicos restringiendo la colección de valores de verdad al caso en el que sólo hay dos valores. Así, según Putnam, en la discusión acerca de la relación entre la lógica clásica y la lógica cuántica, el número de valores de verdad y la (in)validez de algunas fórmulas como $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ son elementos irrelevantes en la determinación del significado de las conectivas. Tomando en cuenta sólo los significados operacionales presentados líneas arriba, las conectivas de la lógica clásica y la lógica cuántica no tienen distintos significados.

Morton (1973) va más lejos que Putnam al decir que no tiene que haber una sola colección de inferencias (respectivamente, teoremas) que tenga que ser compartida por las conectivas c, c' y c'' para que éstas sean similares; para que las tres sean, por ejemplo, disyunciones. Morton sugiere que dos conectivas c' y c'' son *similares* si entre c' y c'' hay alguna colección común I^* de inferencias válidas (teoremas). Sin embargo, *similitud* no implica *igualdad de significado*, que es lo que se necesitaría para tratar de rebatir la tesis de Quine. Dado que la relación de similitud no es transitiva, una conectiva c''' puede parecerse a la conectiva c' si comparten alguna colección I^{**} de inferencias válidas (teoremas) aunque I^* y I^{**} no sean la misma colección de inferencias válidas (teoremas) e incluso sean disjuntas (y, por tanto, sin que c'' y c''' sean similares). La propuesta de Putnam no tiene este problema porque para que dos conectivas c y c' sean, digamos, una conjunción, ambas tienen que validar cierta colección de teoremas o inferencias.

En el marco del "enfoque inferencial" de la lógica[9], una *regla operacional* para una conectiva c en una lógica $\mathcal{L}$ dice cómo se usa c en las pruebas de $\mathcal{L}$; estas reglas pueden ser de introducción o eliminación.[10] En las *reglas estructurales* de una lógica $\mathcal{L}$ no aparecen conectivas. Hay lógicas que no difieren en las reglas operacionales, sólo en las estructurales, por lo que es al menos dudoso que el significado de las conectivas difiera de una lógica a otra. Sin embargo, los teóricos inferencialistas no han logrado consenso acerca de si el significado de las conectivas se determina sólo por las reglas operacionales o si las reglas estructurales también hacen alguna contribución. Wansing (2000) asegura que en la práctica los lógicos frecuentemente dicen que las conectivas tienen dos tipos de significado: uno "operacional", determinado por las reglas operacionales de introducción y eliminación de conectivas, y otro "global", en el cual se toma en cuenta la contribución de las reglas estructurales.[11] No obstante, la postulación de estos dos tipos de significado no es de mucha utilidad para tratar de refutar la tesis quineana, pues de cualquier modo

negación no serviría ni para la lógica intuicionista ni para muchas lógicas tolerantes a la inconsistencia. Por supuesto, en el texto discutido Putnam (1968) sólo trata de mostrar que hay un significado operacional común a la lógica clásica y la lógica cuántica, pero en otros textos, por ejemplo (Putnam 1957), explícitamente dice que la validez de $p \vee \neg p$ no forma parte del significado ni de la disyunción ni de la negación.

[9] Este no es el lugar para presentar ni siquiera los rasgos fundamentales de esta propuesta o de sus variantes más importantes; para un rápido panorama puede verse (Paoli 2002, 8-11).

[10] Gentzen (1969, 80) sugirió que el significado de una conectiva queda especificado por su correspondiente regla (operacional) de introducción. Este punto de vista ha sido desarrollado en (Dummett 1978; Prawitz 1981) y (Došen 1989), entre otros.

[11] Téngase en cuenta que el significado operacional del que se habla en el contexto inferencialista no es igual al significado operacional del que habla Putnam.

habría al menos un sentido en el que cambio de lógica es cambio de tema, a saber, cuando a pesar de coincidir en su significado operacional, las conectivas de dos lógicas difieren en su significado global.

Paoli está consciente de esa dificultad, pero aún así sostiene que puede haber cambio de lógica, específicamente rivalidad entre lógicas, sin cambio de significado, pues las conectivas en distintas lógicas pueden tener el mismo significado operacional, esto es, las mismas reglas de introducción y eliminación (cfr. Paoli 2003, 539). De cualquier modo, esta propuesta enfrenta un problema similar a la de Morton. Que las reglas operacionales para una conectiva sean las mismas en dos lógicas dice a lo sumo que ambas conectivas son el mismo tipo de conectiva (una negación, por ejemplo); incluso puede decirse que el que las conectivas de dos lógicas obedezcan las mismas reglas operacionales implica que las conectivas comparten algún significado común. Sin embargo, ello no garantiza que esas reglas basten para especificar el significado completo de las conectivas, lo cual deja espacio para que haya de hecho un cambio de significado de las conectivas de una lógica a otra si cambian las reglas estructurales.

Aunque atractiva, la tesis minimalista tiene todavía tiene muchas dificultades tanto en su misma enunciación como en la formulación de una propuesta más o menos acabada. Nosotros sostenemos que la caracterización categorista de las conectivas puede servir para dotar de mayor contenido a la tesis del minimalismo, ayudando a señalar cuáles elementos son relevantes para determinar el significado de las conectivas y cuáles no. Las lógicas internas de los topos proporcionan un ejemplo de lógicas diferentes cuyas conectivas no tienen distinto significado; antes bien, la diferencia en las lógicas se debe a las diferencias en las características de los objetos, características dadas por los morfismos entre los objetos de la categoría. No obstante, antes de discutir con detalle la versión categorista de la tesis minimalista es indispensable presentar algunos rudimentos de la caracterización categorista de las conectivas.[12]

3. El tratamiento categorista de las conectivas lógicas

Las categorías que nos interesan son los *topos*. Más adelante daremos una definición precisa, pero por el momento piénsese en un objeto X de un topos como un tipo, colección de cosas o conjunto generalizado —los Xs.[13] Así, un objeto X es el objeto de xs, del mismo modo que un producto $X \times Y$ es el objeto de pares $<x, y>$ tales

[12] Cabe señalar que en lo que sigue emplearemos por simplicidad métodos de corte modelo-teórico. Para presentar la teoría de pruebas de la lógica interna de un topos tendríamos que introducir algunas complicaciones expositivas en el trabajo. Con ello no estamos sugiriendo, pues, que haya una superioridad de los enfoques modelo-teóricos sobre los inferencialistas al determinar cuál es el significado de una conectiva, ni que los enfoques modelo-teóricos estén exentos de problemas o que el inferencialista no pueda resolver las dificultades aquí recontadas. De hecho, consideramos que resultados como los de Barceló (2008) y Béziau (2001) acerca de la intertraducibiliad (relativa) de los métodos modelo-teóricos y los inferencialistas necesitarían ser evaluados con detalle antes de tomar partido en el debate representacionalismo-inferencialismo.

[13] No necesitaremos todas las propiedades de un topos en este trabajo; en el apéndice están definidas las que sí son necesarias. Una de las mejores introducciones a la teoría de categorías en general, y de topos en particular, es (McLarty 1995). También pueden verse (Awodey 2006) y (Lawvere y Schanuel 2000).

que x está en X y y está en Y. El modo básico de obtener una lógica en un topos es a través de una noción generalizada de comprehensión de subobjetos por "propiedades". Las propiedades son *locales*, es decir, una propiedad es siempre la propiedad de los xs de algún X; toda propiedad tiene un dominio de significación fijo. Las propiedades son proposiciones variables: Si φ es una propiedad con dominio de significación X y a es un elemento constante de tipo X, $\varphi(a)$ es una proposición. De este modo, llamaremos *función proposicional en* X a una propiedad con dominio de significación X. Toda función debe tener un codominio, así que un topos incluirá un objeto Ω de proposiciones o valores de verdad. Sus elementos $p\colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ son proposiciones y sus elementos generalizados $\varphi\colon X \longrightarrow \Omega$ son proposiciones variables y por tanto funciones proposicionales. Si la proposición p se descompone como $p = \varphi(a)\colon \mathbf{1} \longrightarrow X \longrightarrow \Omega$, entonces p resulta de evaluar la función proposicional φ para el elemento a de X.

Asumiremos que hay una proposición $\mathit{verdadero}\colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$. Entonces, para cualquier objeto X en un topos, la composición $\mathit{verdadero} \circ !_X\colon \mathbf{1} \longrightarrow X \longrightarrow \Omega$ denota una función proposicional constante en X, cuyo valor es $\mathit{verdadero}$, que denotaremos $\mathit{verdadero}_X$. Las funciones proposicionales especifican subobjetos del siguiente modo. Dada una función proposicional $\varphi\colon X \longrightarrow \Omega$, la parte de los xs para los cuales φ es verdadera se obtiene como un igualador de φ y $\mathit{verdadero}_X$. Tal igualador es un subobjeto $m\colon M \rightarrowtail X$ que será llamado *extensión* de la función proposicional φ. Un *clasificador de subobjetos* para una categoría con objeto terminal e igualadores se define como un morfismo $\mathit{verdadero}\colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ tal que, para cada función proposicional $\varphi\colon X \longrightarrow \Omega$, hay un igualador de φ y $\mathit{verdadero}_X$: Cada monomorfismo $m\colon M \rightarrowtail X$ es dicho igualador para una única φ.

Aprovecharemos ciertas propiedades de los igualadores y los productos fibrados para definir la noción de clasificador de subobjetos de la siguiente manera alternativa, que es la que usaremos en el resto del trabajo[14]: Un clasificador de subobjetos en una categoría **C** con objeto terminal y productos fibrados está dado por un objeto Ω junto con un morfismo $\mathit{verdadero}\colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ tal que para cualquier monomorfismo $m\colon M \rightarrowtail X$ hay un único morfismo $\varphi\colon X \longrightarrow \Omega$ que hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\mathit{verdadero}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

donde '!' denota al único morfismo de M a $\mathbf{1}$ que por hipótesis existe en **C**. φ suele denominarse también "morfismo característico de m" y para hacer explícito esto escribiremos φ_m.[15]

[14] La propiedad de la que nos valemos es que el diagrama de abajo es un producto fibrado si y sólo si m es un igualador de φ y $\mathit{verdadero}_X$. Véase una prueba en (Awodey 1996, 227s).

[15] La categoría **Conjuntos**, cuyos objetos son conjuntos y los morfismos son funciones entre conjuntos, es un topos. Por ejemplo, cualquier conjunto unitario es un objeto terminal; el conjunto vacío es el único objeto inicial; un subobjeto (subconjunto) de un conjunto C es una clase de equivalencia de funciones inyectivas cuyo codominio es C; cualquier conjunto de dos elementos puede servir como objeto de valores de verdad y una función de un conjunto unitario cualquiera a ese conjunto con dos elementos

La noción de topos puede definirse de muchas maneras equivalentes, aunque para nuestros propósitos servirá considerar la siguiente. Un topos es una categoría $\mathcal{E}$ que tiene objeto terminal (**1**), objeto inicial (**0**), productos fibrados, sumas amalgamadas (o coproductos fibrados[16]), exponenciales (Y^X) para cualesquiera objetos X y Y de $\mathcal{E}$ y que cuenta además con un clasificador de subobjetos.[17]

En cualquier topos dado, el morfismo llamado "*falso*" es, por definición, el morfismo característico de $0_1 : \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$; en otras palabras, $\mathit{falso} \colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ es el único morfismo que hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado:[18]

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "\mathit{falso} =_{\mathrm{def}} \varphi_{0_1}"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\mathit{verdadero}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

En un topos, para cualquier número natural n, una conectiva n-aria de orden cero, k, se define como un morfismo $k \colon \Omega^n \longrightarrow \Omega$, donde $\Omega^n = \Omega \times \cdots \times \Omega$ n veces. La negación (que es una conectiva unaria) y la disyunción (que es binaria) se definen como sigue.

Negación: $\neg \colon \Omega \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de $\mathit{falso} \colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$, es decir, es el único morfismo que hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "\mathit{falso}"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \arrow[d, "\neg =_{\mathrm{def}} \varphi_{\mathit{falso}}"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\mathit{verdadero}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

La negación de una proposición $p \colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ se denota como $\neg p$ y se define como la composición $\neg p \colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$. De esta definición se sigue que $\neg p = \mathit{verdadero}$ si y sólo si $p = \mathit{falso}$ y $\neg p = \mathit{falso}$ en cualquier otro caso.

servirá para especificar el valor "verdadero"; dadas dos funciones $f \colon A \longrightarrow C$ y $g \colon B \longrightarrow C$, un producto fibrado para f y g es el conjunto $D = \{(a, b) \in A \times B | f(a) = g(b)\}$ junto con las respectivas proyecciones $f_1 : D \longrightarrow A$ y $g_1 : D \longrightarrow B$ tales que $f_1((a, b)) = a$ y $g_1((a, b)) = b$, etc. Una introducción comprehensiva a este topos puede encontrarse en (Lawvere y Rosebrugh 2003).

[16] En español se usan cada vez con mayor frecuencia los términos en inglés "*pullbacks*" y "*pushouts*" para los productos fibrados y las sumas amalgamadas (o coproductos fibrados), respectivamente.

[17] Adicionalmente, pediremos que el topos sea no degenerado, i.e. que no todos sus objetos sean isomorfos. Una manera de evitar el carácter degenerado de un topos es estipular que no haya morfismos cuyo codominio sea **0**, un objeto inicial. Si hay morfismos cuyo codominio es **0**, un objeto inicial sería isomorfo a un objeto terminal y, lo que es más, todos los objetos del topos serían isomorfos (cfr. Goldblatt 1984, §3.16)), con la consecuencia de que $p = q$ para cualesquiera dos proposiciones p y q.

[18] Recordemos que un objeto terminal **1** tiene la propiedad de que, para cada objeto X, sólo hay un morfismo $f : X \longrightarrow \mathbf{1}$, lo cual aplica en particular para el objeto **0**. En un topos no degenerado $\mathcal{E}$, el (único) morfismo $0_1 : \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$ es un monomorfismo, como lo requiere la definición de la noción de clasificador de subobjetos. Véase la prueba en (Goldblatt 1984, §3.16, Teorema 1).

Disyunción: La disyunción $\vee\colon \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ se define como el morfismo característico de la imagen del morfismo $[\langle verdadero, id_\Omega\rangle\,, \langle id_\Omega, verdadero\rangle] : \Omega+\Omega \longrightarrow \Omega\times\Omega$,[19] esto es, $\vee\colon \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ es por definición el único morfismo que hace que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega+\Omega \arrow[rr, "Im{[\langle verdadero, id_\Omega\rangle,\, \langle id_\Omega, verdadero\rangle]}"] \arrow[d, "!"'] & & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\vee=_{\mathrm{def}}\varphi_{Im[\langle verdadero, id_\Omega\rangle, \langle id_\Omega, verdadero\rangle]}"] \\
\mathbf{1} \arrow[rr, "verdadero"'] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

sea un producto fibrado. Esto implica que $(p \vee q) = verdadero$ si y sólo si $p = verdadero$ ó $q = verdadero$ y, en general, que $(p\vee q) = \sup_{\leq}(p,q)$ (donde '$\leq$' denota el orden parcial que forman los elementos de Ω).[20]

La lógica clásica de orden cero tiene asociada un álgebra booleana, a saber, el álgebra que consta de dos elementos (los valores de verdad), y de diversas operaciones (una por cada conectiva lógica) que satisfacen las condiciones dadas por las conocidas tablas de verdad. De manera análoga, la lógica interna (de orden cero) de un topos $\mathcal{E}$ tiene también asociada un álgebra; en este caso el álgebra correspondiente es Ω, el objeto de proposiciones o valores de verdad. Dicho de otro modo, la lógica interna de $\mathcal{E}$ es el álgebra de sus proposiciones. El siguiente resultado, que sólo enunciamos, establece condiciones necesarias y suficientes para que una proposición $p\colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ sea el mismo morfismo que $verdadero$ en un topos dado $\mathcal{E}$. Si con '$p \models_{\mathcal{E}} q$' abreviamos la afirmación de que si el morfismo p es el mismo morfismo que $verdadero$ entonces también q lo es ('$\models_{\mathcal{E}} p$ significa por tanto que en $\mathcal{E}$ p es el morfismo $verdadero$), y si $\models_I$ es la relación de consecuencia de la lógica intuicionista, entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1. *Para toda proposición p,* $\models_{\mathcal{E}} p$ *para todo topos* $\mathcal{E}$ *si y sólo si* $\models_I p$.

es decir, en general Ω es un álgebra de Heyting.[21] La lógica interna de $\mathcal{E}$ es clásica sólo si Ω es un álgebra booleana.

La lógica interna de la categoría **Conjuntos**, donde Ω tiene dos elementos, es clásica. Un ejemplo de un topos cuya lógica interna no es clásica es la categoría de

---

[19] Pese a lo aparatoso de su nombre, este morfismo tiene un origen simple (aunque requiere conocer la noción de producto). En la definición de coproducto del apéndice, supóngase que $A = B = \Omega$, $A + B = \Omega+\Omega$ y $D = \Omega\times\Omega$. De este modo, $f = \langle id_\Omega, verdadero\rangle : \Omega \longrightarrow \Omega\times\Omega$ y $g = \langle verdadero, id_\Omega\rangle : \Omega \longrightarrow \Omega\times\Omega$; el único morfismo h que hará que se cumpla la definición de coproducto se denotará, de acuerdo con la convención,

$$[\langle verdadero, id_\Omega\rangle\,, \langle id_\Omega, verdadero\rangle] : \Omega+\Omega \longrightarrow \Omega\times\Omega\,.$$

[20] Las condiciones de verdad derivadas de las definiciones de las conectivas de orden cero en un topos, incluyendo las no expuestas aquí, la conjunción y la implicación, corresponden a las de las lógicas de Gödel (1932).

[21] Una prueba puede encontrarse en (Goldblatt 1984, §8.3 (la parte de corrección) y §10.6 (la parte de compleción)). En este trabajo hemos hablado exclusivamente de lógicas de orden cero. Las fórmulas de primer orden y orden superior que valen en cualquier topos son los teoremas de la lógica intuicionista *libre* de orden superior. Para esto véase también (Goldblatt 1984).

multi-gráficas dirigidas irreflexivas, $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$.[22] $\Omega_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ tiene tres elementos, es decir, hay tres diferentes morfismos $\mathbf{1} \longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ a los que llamaremos $verdadero_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$, $falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ y $\mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ (un valor intermedio) con el orden $falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} < \mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} < verdadero_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$. El morfismo negación en esta categoría da las siguientes igualdades de morfismos:

$$\neg verdadero_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} = falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} \quad \neg \mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} = falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} \quad \neg falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} = verdadero_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}\ .$$

En la categoría $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$, cuando $p = \mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$, se tiene que $\neg \circ \neg \circ p \neq p$, pues $\neg \mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} = falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ y por tanto $\neg\neg \mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} = \neg falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} = verdadero_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}} \neq \mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$.[23] También se puede demostrar que $p \vee \neg p$ no es una proposición válida en la lógica interna de $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$. Para que la composición $\vee \circ \langle p, \neg p \rangle$ sea igual al morfismo $verdadero$ es necesario que alguna de las proposiciones p ó $\neg p$ sea igual a $verdadero$. Si $p = \mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ entonces $\neg p = falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$. Como ninguna de esas proposiciones es igual a $verdadero_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ entonces la composición $\vee \circ \langle p, \neg p \rangle$ tampoco es igual a $verdadero_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$. En resumen, $\Omega_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ no es un álgebra booleana y la lógica interna de $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ no es clásica.

Cabe mencionar que la lógica interna de un topos no tiene que ser sólo o intuicionista o clásica, también puede ser una lógica superintuicionista. Una lógica superintuicionista o "intermedia" es una lógica que añade axiomas a la lógica intuicionista pero sin que la lógica resultante colapse en la lógica clásica. Una de las lógicas intermedias más conocida es la de Dummett (1959), que añade a la lógica intuicionista el axioma $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$; esta lógica es la lógica interna de cualquier topos de la forma $\mathbf{Conjuntos}^{\mathbf{P}}$(es decir, topos cuyos objetos son functores de $\mathbf{P}$ a la categoría **Conjuntos**), donde $\mathbf{P}$ es un preorden infinito linealmente ordenado como, por ejemplo ω, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$ (cfr. Goldblatt 1984, §10.6).

Los resultados anteriores son los que motivan esta investigación. En la siguiente sección analizaremos, a partir del tratamiento categorista aquí expuesto de las conectivas lógicas $\neg$ y $\vee$, la tesis quineana débil de que la diferencia de lógicas implica una diferencia de significado entre sus respectivas conectivas.

4. *El minimalismo categorista y el significado de las conectivas lógicas*

Cuando se dice, por ejemplo, que el significado de una conectiva consiste en sus condiciones de verdad, suele tomarse algo más que simplemente las condiciones de verdad como parte del significado de las conectivas. En las evaluaciones semánticas de una conectiva están involucrados los siguientes elementos:

[22] Un objeto de $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ es cualquier par de conjuntos F y V con un par de funciones $s\colon F \longrightarrow V$ y $t\colon F \longrightarrow V$, donde F es un conjunto de "flechas" y V un conjunto de vértices. Si x es un elemento de F, una flecha, $s(x)$ es su vértice de "salida" u "origen", mientras que $t(x)$ es su vértice de llegada. Un morfismo en $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ es un mapeo f que preserva las relaciones de salida y llegada entre gráficas. Omitiremos la prueba de que $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ es un topos. Para una breve pero cuidadosa exposición de algunas características de esta categoría véase (Vigna 1997) o (Lawvere y Schanuel 2000, 141ss y 338ss (pp. 155ss y 377ss de la edición en castellano)).

[23] Como vimos antes, una proposición p es válida en cualquier topos si y sólo si p es intuicionistamente válida, de ahí que aunque la igualdad $\neg\neg p = p$ no sea válida en todo topos, $\neg\neg\neg p = \neg p$ sí lo es. Véase (Goldblatt 1984).

(1) Las condiciones de verdad propiamente dichas, condiciones que presuponen:

(1a) un número mínimo de valores de verdad; y

(1b) un número máximo de valores de verdad;

(2) ciertas nociones de validez y consecuencia lógica, nociones que a su vez presuponen

(2a) un determinado modo de separar los valores de verdad.

En lógica clásica las condiciones de verdad de, pongamos por caso, la disyunción, consisten en que $v(A \vee B) = \sup(v(A), v(B))$, con respecto a un orden entre al menos dos valores de verdad: verdadero y falso. Si son las condiciones de verdad las que determinan el significado de las conectivas, la cláusula anterior expresa el significado de la disyunción. En muchas otras lógicas, particularmente en las que aquí nos interesan, la intuicionista y las superintuicionistas, esas son también las condiciones de verdad de la disyunción, de ahí que pueda decirse que su significado no cambia de la lógica clásica a las lógicas intuicionista y superintuicionista. Esas lógicas también comparten con la clásica la condición de que hay al menos dos valores de verdad, así como la noción de validez y el modo de separar los valores de verdad (sólo se tiene un valor distinguido, que es el valor $verdadero$, $\top$ ó 1, etc., según se denote, y el resto son no distinguidos[24]). Sin embargo, la diferencia de lógicas, la diferencia de teoremas o de inferencias válidas, se da porque el número máximo de valores de verdad en la lógica clásica es dos, mientras que en las otras lógicas esto no es así. El minimalista semántico diría que sólo las condiciones de verdad junto con un número mínimo de valores de verdad determinan el significado de las conectivas, en tanto que el maximalista sostendría que el resto de los elementos involucrados (incisos (1b), (2) y (2a)) también contribuyen a determinar dicho significado.[25]

La caracterización de las conectivas en un topos constituye una versión del minimalismo semántico: El tratamiento categorista muestra de manera perspicua qué deberíamos considerar como el significado de una conectiva, así como qué elementos contribuyen a determinar el significado de una conectiva y cuáles no. La caracterización de las conectivas en cualquier topos dado es muy general, pues las conectivas son morfismos que tienen la propiedad de hacer que ciertos diagramas sean productos fibrados. Así, desde la perspectiva categorista, el significado de una conectiva dada, definida ésta como un morfismo con cierta propiedad, consiste en la contribución que la conectiva en cuestión hace a la igualdad entre ciertos otros morfismos; específicamente, en cómo

[24] A grandes rasgos, un valor es *distinguido* si es uno de los valores que una proposición debe tomar siempre para ser considerada un teorema (en términos de inferencias, si es uno de los valores que deben preservarse de las premisas a la conclusión para que la inferencia sea considerada válida). Incluso en lógicas multivaluadas es común tomar sólo un valor distinguido, aquel que represente "(lo) verdadero".

[25] Hay diferentes condiciones de verdad para las conectivas que en general resultan equivalentes en la lógica clásica. Aquí nos hemos concentrado sólo en aquella versión que resulta de la caracterización categorista y que exhibe un significado común para las lógicas clásica, intuicionista y superintuicionistas. Independientemente de si tienen interpretaciones filosóficas plausibles, las semánticas con más de dos valores de verdad son bien conocidas. En (Wansing y Shramko 2008) puede encontrarse una buena explicación de qué otras nociones de validez y de consecuencia lógica puede haber y de cómo obtenerlas a partir de diferentes maneras de separar los valores de verdad.

contribuye la conectiva (*qua* morfismo) a que ciertos diagramas sean productos fibrados. Los elementos que contribuyen a determinar el significado de las conectivas son los morfismos (y objetos) que aparecen en esos diagramas. Para poder definir las conectivas en una categoría cualquiera **C** con productos, coproductos, objeto terminal y productos fibrados, lo único que se requiere es que **C** tenga clasificador de subobjetos y al menos dos valores de verdad distintos, $verdadero\colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ y $falso\colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$.[26] Características adicionales, como que Ω tenga sólo dos valores de verdad o más de dos, no intervienen en la definición de las conectivas. Estas características adicionales tampoco afectan a los objetos terminales *qua* objetos terminales ni a los productos $(\Omega \times \Omega)$ *qua* productos y, por tanto, las definiciones de las conectivas no dependen de características adicionales de un objeto terminal o un producto más allá de las que hacen que éstos sean un objeto terminal y un producto en una categoría dada. Como las conectivas están definidas para cualquier topos, tampoco interviene en su definición la estructura particular de algún objeto o subobjeto del topos en cuestión, esto es, en la definición de las conectivas no se especifica que las definiciones valgan para categorías cuyos objetos y morfismos tengan tales o cuales características *adicionales* a las que los objetos y los morfismos de todo topos debe tener. El único aspecto semánticamente relevante es el hecho de que las conectivas son los únicos morfismos que hacen que en determinadas categorías ciertos diagramas sean productos fibrados. Dicha caracterización está dada para cualquier topos, es decir, no cambia de un topos a otro, por lo que la diferencia de teoremas de las lógicas internas no depende de un cambio en dicha caracterización.

De acuerdo con los ejemplos de la sección previa, la ausencia de algunos teoremas clásicos en ciertos topos se debe a las características y propiedades de sus objetos y morfismos, no a un cambio en la definición de las conectivas. Dado que las conectivas están definidas para un topos cualquiera, el que en algunos topos la fórmula $p \vee \neg p$ no sea un teorema no se debe a que en ellos la negación se defina de manera diferente, como se afirmaba por ejemplo en el caso de la semántica relacional. En la sección anterior también señalamos que una diferencia importante entre los objetos y subobjetos de $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ y los de **Conjuntos**, que influye para que sus lógicas internas sean distintas, es que Ω en **Conjuntos** tiene sólo dos elementos, pero en $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ no. En **Conjuntos**, cualquier proposición $p\colon \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ es tal que $p = verdadero$ ó $p = falso$, sin opciones adicionales. Con esto en cuenta, en **Conjuntos** valdrán todas las leyes clásicas. Pero en la lógica interna de $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ una proposición puede ser igual a $verdadero_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$, puede ser

[26] En rigor, para definir las conectivas en un topos no se requieren dos morfismos distintos, $verdadero$ y $falso$. El carácter no degenerado de los topos considerados aquí implica que hay un morfismo $falso$ distinto de $verdadero$. Nótese que los topos degenerados, en los que $p = q$ para cualesquiera valores de verdad p y q, no presentan dificultad alguna para nuestra tesis. Al contrario. En primer lugar, para ellos también vale el Teorema 1, pues si $p = verdadero$ para toda p, en particular tendremos $p = verdadero$ para todas las proposiciones p que sean teoremas de la lógica intuicionista. En segundo lugar, como las conectivas se definen del mismo modo en los topos no degenerados y en los degenerados, lo que genera la diferencia de lógicas, en este caso el que la lógica de éstos sea trivial (en el sentido de que $p = verdadero$ para toda p), son las características propias de los objetos de los topos degenerados, a saber, que hay morfismos de un objeto terminal a un objeto inicial, lo cual es independiente de las definiciones del clasificador o de las conectivas. Véase la nota 17.

igual a $falso_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$ y a otro valor "intermedio" ($\mu_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}$). Estas diferencias entre los topos son lógicamente independientes de la definición de las conectivas. Si lo que hemos expuesto anteriormente es correcto, no toda igualdad (entre morfismos) del tipo $\Phi = verdadero$, donde Φ contiene al menos una conectiva, forma parte del significado de dicha conectiva, sino sólo aquellas igualdades que se siguen directamente de la definición de la conectiva. Por ejemplo, que en **Conjuntos** $p \vee \neg p$ sea el mismo morfismo que $verdadero$ es resultado de la definición de las conectivas involucradas *más* las características propias de **Conjuntos** (en este caso, que sólo hay dos valores de verdad). De este modo, la diferencia de lógicas, la diferencia de teoremas en las lógicas internas, no se debe a una diferencia entre las condiciones de verdad de la negación o la disyunción entre un topos y otro, sino a cuántos valores de verdad haya, esto es, a la estructura del objeto Ω. A su vez, las diferencias en la estructura de Ω de uno a otro topos se deben a las características de sus respectivos objetos, las cuales están determinadas por los morfismos entre ellos.

Una objeción tradicional a las propuestas minimalistas sería que, desde un punto de vista algebraico, las conectivas están definidas por ciertos axiomas y es claro que, digamos, los axiomas para la negación son diferentes en un álgebra de Boole y en un álgebra de Heyting. Así, dado que la negación en cada una de esas álgebras está caracterizada por axiomas diferentes se trata de hecho de negaciones diferentes. Nos parece que la precisión pertinente aquí es la siguiente: un axioma como $\neg\neg x = x$ en el álgebra booleana expresa el hecho de que entre los objetos del álgebra es cierto que la doble negación es igual a la identidad, no *prescribe* la forma en que deben relacionarse los objetos. Sería incorrecto suponer que los objetos del álgebra van a satisfacer la eliminación de la doble negación simplemente porque se introduce un axioma que dice que así debe ser. El axioma es prescriptivo en el sentido de que excluye a ciertos dominios, no en el sentido de que fuerza a cualquier objeto del dominio en cuestión a que se ajuste a él, lo cual sería como pensar que, por ejemplo, la lógica interna de la categoría $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ va a cambiar sólo porque se le añada como axioma que $\neg \circ \neg = id_{\Omega_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}}$. La estructura de los objetos y los subobjetos en $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$ excluye que $\neg \circ \neg = id_{\Omega_{\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}}}$, no se puede añadir ese axioma sin cambiar los objetos (y morfismos) de la categoría (y por ende sin cambiar la categoría misma), aunque la negación se defina igual para todos los topos, independientemente de si su lógica interna es clásica o no.

Otra objeción proveniente del álgebra sería que esta propuesta categorista no es novedosa, no es esclarecedora y que el tratamiento categorista no es esencial para desarrollar una postura minimalista contra la tesis quineana. Ya que Ω es en general un álgebra de Heyting, podría haberse argumentado directamente en términos algebraicos usuales que el significado de, digamos, la disyunción, consiste en que su valor de verdad es el supremo de los valores de los conyuntos, sin apelar a las nociones y construcciones categoristas. En este sentido nuestra tesis no es novedosa y el tratamiento categorista no es esencial. La propuesta de Putnam (1968), expuesta en la sección 2, es similar a la que recién acabamos de delinear, sólo que él, para argumentar en favor de la identidad de significado de las conectivas de la lógica clásica y las de cierta lógica cuántica, usa un retículo complementado no distributivo en lugar de un álgebra de Heyting. Así, de manera general podría argumentarse que para cualquier par de lógicas que tengan asociado un retículo (sin importar si es distributivo o no, etc.), sus conjunciones y sus disyunciones no diferirán en significado.

Sin embargo, el tratamiento categorista sí que resulta esclarecedor. Pese a existir los antecedentes ya mencionados de autores que están en desacuerdo con la tesis quineana, algunos de ellos tratando de desarrollar posturas minimalistas, no había gran claridad en cuánto a qué elementos usados en la semántica sí deberían considerarse contribuyentes a la determinación del significado de una conectiva y cuáles no. Al inicio de esta sección vimos que, cuando se dice que las condiciones de verdad de una conectiva determinan su significado, en realidad también se estaban tomando en cuenta elementos adicionales a las condiciones de verdad. De hecho, el que la anterior objeción algebraica fuera posible – que el significado de, digamos, la negación, se determina por un grupo de axiomas y que por tanto la negación de la lógica clásica y la de la intuicionista difieren– se debe a que no resulta perspicuo desde el tratamiento algebraico cuáles son los elementos que contribuyen a determinar el significado de una conectiva y cuáles no. En el tratamiento categorista sí: para definir una conectiva en un topos no degenerado se necesita que haya al menos dos valores de verdad, pero no necesariamente solamente dos, y que se cumplan ciertas identidades entre morfismos, las cuales coinciden con las condiciones de verdad de las conectivas para las lógicas de Gödel.[27]

5. *Conclusiones*

En la segunda sección de este trabajo expusimos algunas propuestas tradicionales acerca del problema del significado de las conectivas de diferentes lógicas, especialmente las ideas de Quine (quien defiende la variación de significado), Putnam (quien formuló la idea de un "significado operacional" común a las conectivas de diferentes lógicas) y las recientes propuestas para distinguir entre teorías "maximalistas" y teorías "minimalistas". Según el maximalismo, todo aspecto relacionado con una conectiva contribuye a su significado; para el minimalismo sólo algunos de esos elementos hacen una contribución semántica. Así, Quine, y con él gran parte de filósofos de la lógica, sería un maximalista, en tanto que autores como Putnam, Beall, Read y Paoli serían minimalistas. Ahí distinguimos entre la tesis quineana débil ("la diferencia entre lógicas implica diferencia de significados en sus conectivas") y la tesis fuerte ("cambio de lógica es cambio de tema y cambio global"). Discutir la tesis fuerte implica revisar prácticamente toda la filosofía de Quine y discutir contra ella, lo cual excede nuestros intereses y capacidades actuales, además de que la tesis comúnmente aceptada es más bien la débil. Así, indicamos que nos avocaríamos, usando herramientas categoristas, a tratar de mostrar que la tesis débil es incorrecta. Después, en la sección 3, ejemplificamos la caracterización de las conectivas lógicas de orden cero en un topos con los casos de la negación y la disyunción. En la sección 4 argumentamos que dicha caracterización puede considerarse como una versión muy sofisticada del minimalismo semántico, que incluye una precisión en lo que debería entenderse por "elemento que contribuye a determinar el significado de una

[27] Y también se presupone la noción usual de validez, como puede verse más arriba, justo antes de enunciar el Teorema 1. Sin embargo, si el significado de una conectiva está determinado por sus condiciones de verdad, es razonable suponer que el significado de una conectiva no se altere en presencia de otra noción de validez. Con otras nociones de validez, una misma condición de verdad podría arrojar diferentes teoremas o inferencias válidas, pero esto no constituye un cambio de significado.

conectiva". También argumentamos que la diferencia de teoremas en la lógica interna de distintos topos no involucra un cambio en el significado de las conectivas lógicas. El componente no clásico está dado por los objetos, pues es la estructura de éstos la que determina la estructura de Ω, esto es, si las proposiciones sólo son o verdaderas o falsas y si las condiciones de verdad arrojan teoremas clásicos, o si Ω tiene, como en $\mathbf{S}^{\downarrow\downarrow}$, otros valores además de *verdadero* y *falso* y si ciertos teoremas clásicos no son válidos. Lo que hace diferente a las lógicas internas de los topos, cuando lo son, son las características particulares de los objetos en cada topos, características dadas por los morfismos entre los objetos, las cuales no desempeñan papel alguno en la definición de las conectivas, de ahí que lo que cambia no sea el significado de las conectivas. La principal contribución de las definiciones categoristas frente a los análisis algebraicos más comunes es que en aquellas es claro cuáles son los elementos que sí están haciendo una contribución a la determinación del significado de una conectiva y cuáles no.

Entre los problemas abiertos que podríamos enumerar sólo señalaremos uno, que nos parece uno de los más importantes y del que trataremos en un trabajo posterior. Chris Mortensen (1995, 2003) ha mostrado que los topos pueden definirse de una manera diferente, aunque indistinguible de manera categorista, usando un "clasificador complementario" (que usa el morfismo *falso* en lugar de *verdadero*) y en la que se da una definición dual de las conectivas.[28] Sin embargo, esta caracterización sólo sirve para dar un significado común a las conectivas de la lógica clásica y de un tipo de lógicas duales a la intuicionista y las superintuicionistas. El problema es si hay un modo categorista de dar una caracterización que revele un significado común a las conectivas de las lógicas clásica, intuicionista, superintuicionistas y sus duales. En general resta el problema de saber si es posible argumentar de manera categorista en favor de un significado común para un grupo de lógicas mucho mayor que las comprendidas entre la intuicionista, las intermedias (o las duales de éstas) y la clásica.

Apéndice. Algunas nociones y construcciones categoristas

Una *categoría* **C** consta de una colección de *objetos* y una de *morfismos* que satisfacen las siguientes condiciones:

Morfismos: Para todo par X, Y de objetos en una categoría **C** hay una colección de *morfismos* de X a Y en **C**.[29] Cada morfismo f tiene asociados dos objetos, no necesariamente distintos entre sí, uno de los cuales es llamado "dominio de f" y el otro "codominio de f". Lo anterior se denota $f\colon X \longrightarrow Y$, donde X es el dominio y Y el codominio.

Composición: Para todo par de morfismos $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ tales que el dominio de uno es el codominio del otro, hay un morfismo que es *la composición de f y g*, denotada $(g \circ f)\colon X \longrightarrow Z$. '$(g \circ f)$' se lee "$f$ seguida de g", "g de f", "g tras f" o también "g (se hace o ejecuta) después de (hacer o ejecutar) f".

[28] Para detalles véanse los textos mencionados de Mortensen y también (Estrada-González 2010).

[29] El subíndice "**C**" indica de qué categoría se trata y puede omitirse cuando el contexto permite saber cuál es.

Identidad: Para todo objeto X hay un morfismo id_X (ó 1_X), llamado "identidad en X", en el que el dominio y el codominio son el mismo (X).

La identidad, los morfismos y la composición satisfacen dos axiomas:
Identidad: Para cualquier morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ de **C**,

$$(id_Y \circ f) = f \qquad \text{y} \qquad (f \circ id_X) = f$$

Asociatividad: Para cualesquiera morfismos $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ y $h\colon Z \longrightarrow W$ de **C**,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\,.$$

Una manera alternativa para expresar determinadas igualdades entre morfismos consiste en afirmar que ciertos *diagramas* conmutan, donde un diagrama consiste en cierta organización de flechas (morfismos) y vértices (objetos) en una categoría dada. Se dice que un diagrama *conmuta* si para cada par X, Y de objetos en una categoría dada **C**, cualquier morfismo en **C** de X a Y es representada como el mismo morfismo en **C**. Por ejemplo, supongamos que $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon X \longrightarrow Z$ y $h\colon Z \longrightarrow Y$ son morfismos en una categoría dada **C** cuyo diagrama es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "h"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Decir que el diagrama conmuta significa que $h \circ g = f$; este tipo de igualdades serán importantes en otras construcciones. Un ejemplo de diagramas conmutativos lo dan los axiomas para los morfismos identidad, $(id_Y \circ f) = f$ y $(f \circ id_X) = f$, representados a continuación mediante diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "id_Y"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[ur, "id_X"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Invitamos al lector a que, en su caso, dibuje los diagramas conmutativos de las nociones definidas a continuación.

Sea **C** una categoría dada. Un objeto Y de **C** es un *objeto terminal* si para cada objeto X de C hay exactamente un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$. Un objeto terminal suele denotarse '**1**'. Un objeto W de C es un *objeto inicial* si para cualquier objeto Z hay un único morfismo $f\colon W \longrightarrow Z$. Un objeto inicial suele denotarse '**0**'.

Se denomina "elemento de A" a cualquier morfismo $f\colon \mathbf{1} \longrightarrow A$ y "elemento generalizado de A" a cualquier morfismo $x\colon X \longrightarrow A$. Si $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon A \longrightarrow B$ son morfismos en una categoría dada, la igualdad $g = h$ implica que, para todo elemento generalizado x de A, $g \circ x = h \circ x$.

Sea $m\colon M \longrightarrow X$ un morfismo de una categoría dada $\mathbf{C}$. Se dice que m es un *monomorfismo en* C si para cualquier par de morfismos s_1 y s_2 de un objeto Y a M, $m \circ s_1 = m \circ s_2$ implica que $s_1 = s_2$. De una forma contrapositiva, un morfismo $m\colon M \longrightarrow X$ es un monomorfismo si $s_1 \neq s_2$ implica que $m \circ s_1 \neq m \circ s_2$. Los monomorfismos suelen representarse con una flecha especial: $M \rightarrowtail X$. Sean S y Z dos objetos de una categoría dada. Un *subobjeto* s *de* Z *(con forma* S*)* es (una clase de equivalencia de) un monomorfismo s de S a Z. Por tanto, un subobjeto s de Z con forma S preserva la distinción de elementos (generalizados) de S.

Sea O un objeto de una categoría dada $\mathbf{C}$ y sean $s\colon S \rightarrowtail O$ un subobjeto de O (de forma S) y $x\colon X \longrightarrow O$ un elemento (generalizado) de O. Se dice que x *está en el subobjeto* s, simbolizado como '$x \in s$' si hay algún morfismo $h\colon X \longrightarrow S$ en $\mathbf{C}$ tal que $x = s \circ h$. Dados dos subobjetos de O, $s\colon S \rightarrowtail O$ y $t\colon T \rightarrowtail O$, se dice que s *es anterior (menor) o igual a* t, simbolizado '$s \leq t$', si hay algún morfismo $f\colon S \longrightarrow T$ de C tal que $s = t \circ f$. s es estrictamente menor que t si tal f es único.

Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon X \longrightarrow Y$ morfismos de una categoría dada $\mathbf{C}$. Un *igualador* en $\mathbf{C}$ para f y g está dado por un objeto W y un morfismo $i\colon W \longrightarrow X$ de $\mathbf{C}$ con las siguientes dos propiedades: (1) $f \circ i = g \circ i$; y (2) para cualquier morfismo dado $h\colon Z \longrightarrow X$ de $\mathbf{C}$, si $f \circ h = g \circ h$ entonces hay exactamente un morfismo en $\mathbf{C}$ $k\colon Z \longrightarrow W$ para el cual $h = i \circ k$.

Sean $f\colon X \longrightarrow Z$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ dos morfismos cualesquiera de una categoría dada $\mathbf{C}$. Entonces un *producto fibrado* para f y g consiste en un objeto W de $\mathbf{C}$ y un par de morfismos $f_1\colon W \longrightarrow X$ y $g_1\colon W \longrightarrow Y$ tales que $f \circ f_1 = g \circ g_1$ y para cualquier objeto T de $\mathbf{C}$ y cualesquiera morfismos $f_2\colon T \longrightarrow X$ y $g_2\colon T \longrightarrow Y$, si $f \circ f_2 = g \circ g_2$, entonces existe un único morfismo $h\colon T \longrightarrow W$ tal que $h \circ f_1 = f_2$ y $h \circ g_1 = g_2$.

Un objeto $X \times Y$ de una categoría $\mathbf{C}$ junto con un par de morfismos $p_1\colon X \times Y \longrightarrow X$ y $p_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$ es un *producto* (*binario*) para X y Y si para cada $\mathbf{C}$-objeto W y cada par de morfismos $f_1\colon W \longrightarrow X$ y $f_2\colon W \longrightarrow Y$ hay exactamente un morfismo $f\colon W \longrightarrow X \times Y$ para el cual se cumple que $f_1 = p_1 \circ f$ y $f_2 = p_2 \circ f$. Los morfismos p_1 y p_2 se llaman "morfismos proyección" (primera y segunda proyección, respectivamente). El morfismo $f\colon W \longrightarrow X \times Y$ también suele denotarse como $\langle f_1, f_2 \rangle\colon W \longrightarrow X \times Y$.

Considérese ahora un par de objetos X y Y cualesquiera de una categoría dada $\mathbf{C}$. Un *coproducto para* X y Y en $\mathbf{C}$ está dado por un objeto $X + Y$ y dos morfismos $i_1\colon X \longrightarrow X + Y$ y $i_2\colon Y \longrightarrow X + Y$ de $\mathbf{C}$ con la siguiente propiedad: para cualquier objeto W y cualquier par de morfismos $f\colon X \longrightarrow W$ y $g\colon Y \longrightarrow W$ de $\mathbf{C}$, hay exactamente un morfismo $h\colon X + Y \longrightarrow W$ que satisface $h \circ i_1 = f$ y $h \circ i_2 = g$. El morfismo h también suele denotarse $[g, f]\colon X + Y \longrightarrow W$.

Se dice que una categoría dada "tiene productos (coproductos) binarios" si hay un producto (coproducto) para cualesquiera dos objetos de esa categoría. Del mismo modo, se dice que "tiene productos fibrados" si para cualesquiera dos morfismos de la categoría hay un producto fibrado.

La *imagen* de un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ en una categoría $\mathbf{C}$ se define como un monomorfismo $h\colon I \rightarrowtail Y$ que cumple las siguientes dos condiciones: (1) hay un morfismo $g\colon X \longrightarrow I$ tal que $f = h \circ g$; (2) para cualquier objeto W y morfismos $k\colon X \longrightarrow W$ y $l\colon W \rightarrowtail Y$ tales que $f = l \circ k$, hay un único morfismo $m\colon I \longrightarrow W$ tal que $k = m \circ g$ y $h = l \circ m$.

Agradecimientos

Agradecemos a dos árbitros anónimos sus muy valiosas observaciones y sugerencias, así como al equipo editorial de *Theoria* por su paciencia con nuestras idiosincrasias computacionales. El primer autor desea agradecer también a Axel Arturo Barceló Aspeitia, Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez, Carlos César Jiménez Jiménez, Federico Marulanda Rey, Claudia Olmedo García y Zbigniew Oziewicz Kwass por sus valiosos comentarios a versiones previas de este texto y a otros discutiendo ideas relacionadas. Dos condiciones necesarias para que el primer autor llevara a cabo esta investigación fueron la beca para estudios de posgrado número 172475 otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, así como la Beca Erasmus Mundus Lote 20 para una estancia de investigación en la Universidad de Groningen durante el año académico 2010–2011. Los diagramas se dibujaron utilizando la versión 3.93 del paquete diagrams de Paul Taylor.

REFERENCIAS

Awodey, S. 1996. Structure in mathematics and logic: A categorical perspective. *Philosophia Mathematica* 4(3): 209-237.

Awodey, S. 2006. *Category Theory*. Oxford: Clarendon Press.

Barceló, A. 2007. Sobre la naturaleza múltiple de las constantes lógicas. En *Orayen: de la forma lógica al significado*, ed. M. Ezcurdia, 61-82. México: IIF-UNAM.

Barceló, A. 2008. Patrones inferenciales. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía 40*(120):3-35.

Beall, J. y G. Restall 2001. Defending Logical Pluralism. En *Logical Consequence: Rival Approaches*, eds. J. Woods y B. Brown, 1-22. Hermes Scientific Publishers.

Beall, J. y G. Restall 2006. *Logical Pluralism*. Oxford: Oxford University Press.

Béziau, J.-Y. 2001. Sequents and bivaluations. *Logique et Analyse* 44(176): 373-394.

Brandom, R. 2000. *Articulating Reasons: An Introduction to Inferentialism*. Cambridge: Harvard University Press.

da Costa, N. C. A. 1982. The philosophical import of paraconsistent logic. *Journal of Non-Classical Logic* 1(1): 1-19.

Došen, K. 1989. Logical constants as punctuation marks. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 30(3): 362-381.

Dummett, M. 1959. A propositional calculus with denumerable matrix. *Journal of Symbolic Logic* 24(2): 97-106.

Dummett, M. 1978. *Truth and Other Enigmas*. Londres: Duckworth.

Estrada-González, L. 2010. Complement-topoi and dual intuitionistic logic. *Australasian Journal of Logic* 9: 26-44.

Gentzen, G. 1969. Investigations into logical deduction. En *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, ed. M. E. Szabó, 68-131. Ámsterdam: North Holland. Publicado originalmente como "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, 1935.

Gödel, K. 1932. Zum intuitionistischen aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie die Wissenschaften in Wien* 69: 65-66.

Goldblatt, R. 1984. *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, vol. 98 de *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Ámsterdam: North Holland Publishing Co. Edición revisada.

Hjortland, O. T. 2007. Proof-theoretic harmony and structural assumptions. Manuscrito disponible en olethhjortland.googlepages.com/Cambridge.pdf.

Johnstone, P. 2002. *Sketches of an Elephant: A Compendium of Topos Theory*, vol. 1. Gran Bretaña: Oxford University Press.

Lawvere, F. W. 1975. Continuously variable sets: Algebraic geometry=geometric logic. En *Logic Colloquium'73 (Bristol, 1973)*, eds. H. E. Rose y J. C. Shepherdson, 135-156. Ámsterdam: North Holland.

Lawvere, F. W. y R. Rosebrugh 2003. *Sets for Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lawvere, F. W. y S. H. Schanuel 2000. *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*. Cambridge University Press. Segunda reimpresión. Versión castellana: *Matemáticas conceptuales. Una primera introducción a categorías*, México: Siglo XXI, 2002. Traducción de Francisco Marmolejo Rivas, con asistencia de Ivonne Pallares Vega.

McLarty, C. 1995. *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Toronto: Oxford Clarendon Press.

Morado, R. 2007. Quine y Fland: ¿Podemos cambiar el significado de las conectivas lógicas? *Analogía Filosófica* 21(2): 165-176.

Mortensen, C. 1995. *Inconsistent Mathematics*. Kluwer Mathematics and Its Applications Series. Kluwer Academic Publishers.

Mortensen, C. 2003. Closed set logic. En *Relevant Logics and Their Rivals*, ed. R. T. Brady, vol. II, 254-262. Ashgate Publishing.

Morton, A. 1973. Denying the doctrine and changing the subject. *The Journal of Philosophy* 70(15): 503-510.

Paoli, F. 2002. *Substructural Logics. A Primer*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Paoli, F. 2003. Quine and Slater on paraconsistency and deviance. *Journal of Philosophical Logic* 32(5): 531-548.

Paoli, F. 2007. Implicational paradoxes and the meaning of logical constants. *Australasian Journal of Philosophy* 85(4): 553-579.

Prawitz, D. 1981. Philosophical aspects of proof theory. En *Contemporary Philosophy: A New Survey*, eds. G. Fløistad y G. H. von Wright, vol. 1, 235-278. La Haya: Nijhoff.

Priest, G. 1975. Review of *Deviant Logics*. *The Philosophical Quarterly* 25(101): 371-373.

Priest, G. 2006. *Doubt Truth to Be a Liar*. Oxford: Oxford University Press.

Putnam, H. 1957. Three-valued logic. *Philosophical Studies* 8(5). Reimpreso en (Putnam 1980, pp. 166-173). Se cita de esta edición.

Putnam, H. 1962. The analytic and the synthetic. En *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, eds. H. Feigl y G. Maxwell, 358-397. Minneápolis: University of Minnesota Press. Reimpreso en *Mind, Language, and Reality. Philosophical Papers*, vol. 2, Nueva York: Cambridge University Press, 1975, pp. 33-69. Se cita de esta edición.

Putnam, H. 1968. Is logic empirical? En *Boston Studies in the Philosophy of Science*, eds. R. S. Cohen y M. W. Wartofsky, vol. 5. Dordrecth: Reidel. Reimpreso como "The Logic of Quantum Mechanics" en (Putnam 1980, pp. 216-241). Se cita de esta edición.

Putnam, H. 1980. *Mathematics, Matter, and Method*. Massachusetts: Cambridge University Press. Séptima reimpresión de la segunda edición.

Quine, W. V. 1960. *Word and Object*. Cambridge: The MIT Press.

Quine, W. V. 1970. *Philosophy of Logic*. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice Hall.

Quine, W. V. 1974. *The Roots of Reference*. LaSalle: Open Court.

Read, S. 2008. Harmony and modality. En *On Dialogues, Logics and Other Strange Things*, eds. C. Dégremont, K. Laurent, y H. Rückert, 285-303. Londres: King's College Publications.

Vigna, S. 1997. A guided tour in the topos of graphs. Informe técnico 199-7, Università di Milano, Dipartimento di Scienze dell'Informazione. Disponible en http://vigna.dsi.unimi.it/papers.ToposGraphs.pdf.

Wansing, H. 2000. The idea of a proof-theoretic semantics and the meaning of the logical operations. *Studia Logica* 64(1): 3-20.

Wansing, H. y Y. Shramko 2008. Suszko's thesis, inferential many-valuedness and the notion of logical system. *Studia Logica* 88(1). Véase también la fe de erratas en el vol. *89*, p. 147, 2008.

Luis ESTRADA GONZÁLEZ estudia el doctorado en filosofía contemporánea en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos y actualmente realiza una estancia de investigación en la Universidad de Groningen. Su área de interés comprende la intersección de la lógica, la filosofía de la lógica y la teoría de categorías.

DIRECCIÓN: Instituto Johann Bernoulli de Matemáticas y Ciencias de la Computación, Universidad de Groningen. Nijenborgh 9, 9747 AG, Groningen, Países Bajos.

Ivonne Victoria PALLARES VEGA obtuvo su doctorado en la State University of New York at Buffalo y actualmente se desempeña como profesora-investigadora tiempo completo en el Departamento de Filosofía de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Sus principales áreas de investigación son la lógica, la filosofía de las matemáticas y la teoría de las categorías.

DIRECCIÓN: Departamento de Filosofía, Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Av. Universidad 1001. Col. Chamilpa, C. P. 62209, Cuernavaca, Morelos, México.