Los juicios de la Matemática y el modo de existencia de sus objetos

Por MIGUEL SANCHEZ-MAZAS

PRIMERA PARTE

I

La polémica en torno al modo de existencia de los objetos matemáticos es acaso la más antigua e ilustre de las polémicas filosóficas planteadas por la ciencia abstracta. Apenas había dado sus primeros pasos la Matemática griega, cuando surgió la gran cuestión que había de conmover la Filosofía del tiempo platónico y preocupar, por sus consecuencias, al mismo Aristóteles: ¿Existen en sí mismos, de alguna manera los números? (1) ¿Tienen alguna existencia las figuras, fuera de los cuerpos figurados? (2). ¿Tienen los entes matemáticos alguna realidad, aparte de las cosas sensibles a las que se aplican? ¿Cómo se explicaría —en caso contrario— la inmovilidad y eternidad de tales entes frente a la mutabilidad y corruptibilidad (3) del mundo sensible? Estas cuestiones impresionaron profundamente el alma de los griegos, hasta dar origen a ese misticismo matemático que, sin discontinuidad alguna, se transmite en la historia del pensamiento occidental, pasando de

---

(1) La pregunta fundamental acerca del modo de existencia de los números surge, en realidad, de la filosofía platónica y adquiere por primera vez un sentido preciso en Aristóteles. Los pitagóricos fueron, es cierto, los primeros que advirtieron el carácter inmutable de las leyes numéricas y pusieron en los números el verdadero ser permanente de las cosas; pero en su pensamiento aún no había aparecido con claridad la bifurcación del ser, en sus dos aspectos de *esencia* y *existencia*, y, por lo tanto, no tenía sentido la cuestión estricta de cómo y dónde el número *existe*, sino sólo la de lo que el número *es*. Su propósito era principalmente descubrir la *esencia* de las cosas, y en el fondo de ella encontraron los números. Esto significa que, por una parte, vieron en los números el fundamento racional y explicativo de las cosas, aquello que las hace inteligibles, según el conocido fragmento de Filolao: «Todo lo cognoscible *tiene* número, que sin número no habría modo de entender ni de conocer cosa alguna» (Juan David García Bacca: *Los presocráticos*, México, 1944, II, pág. 83); y por otra, que vieron también en ellos el principio genético del mundo corpóreo, el cual se constituye a través de una determinación matemática de lo ilimitado, del espacio. Claro que, como observa Windelband (*Historia de la Filosofía*, 2.ª edición castellana, México, 1948. I. «La filosofía de los griegos», pág. 63), para los pitagóricos, sobre todo los de la última época, «los números no son principios de las cosas en la misma forma como pueden serlo las materias o elementos de otros sistemas». Más que originarse las cosas de ellos se constituyen o conforman con arreglo a ellos, o, para usar su expresión, *las cosas son imitaciones de los números*.

Es difícil comprender y representarse con exactitud el proceso seguido por el problema del número, que se traslada desde los pitagóricos a Aristóteles, pasando por Platón, de un planteamiento en un plano fundamentalmente *esencial* a un planteamiento en el terreno de las sustancias y de la *existencia*. Uno de los primeros pasos, empero, es el que nos explica Aristóteles: «los pitagóricos dicen que las cosas que existen son por *imitación* de los números. Platón, sin embargo, cambiando la palabra, dice que por *participación*». (Met., lib. I, 987 b, 10). Ahora bien, es claro que el concepto de *imitación* alude a la forma, a la esencia, mientras que el de *participación* se refiere al ser en su íntegro sentido, que comprende también la *existencia*. Se entiende, por lo tanto, el hecho de que, en Aristóteles, el problema de los números alcance ya un rango plenamente metafísico.

(2) Qué clase de realidad objetiva puedan tener las figuras de que se ocupa la Geometría, independientemente de los objetos sensibles configurados según ellas, es cuestión que no puede examinarse sin hallar inmediatamente multitud de circunstancias antinómicas. Santo Tomás, comentando en el libro III de la Metafísica de Aristóteles los argumentos con que el Filósofo intenta rebatir las tesis platónicas, muestra una de ellas que parece expresar la imposibilidad de que las figuras matemáticas tengan un ser distinto del de las cosas sensibles y a la vez residan en éstas como su fundamento. «Si los entes matemáticos —dice Santo Tomás— son otros que los sensibles, y, no obstante, están en ellos, siendo un cuerpo algo matemático, se sigue que el cuerpo matemático está al mismo tiempo en lo mismo con el cuerpo sensible, luego dos sólidos, esto es, dos cuerpos, estarán en el mismo lugar; lo cual es imposible, no sólo de dos cuerpos sensibles, sino también de un cuerpo sensible y uno matemático, porque ambos tienen dimensiones por razón de las cuales dos cuerpos no pueden estar en el mismo lugar.» (*In Metaphys.* Cathala, 3.ª ed., lib. III, lect. VII, 419, pág. 140.)

(3) La razón fundamental —al decir de Aristóteles— por la que Platón puso los entes matemáticos como sustancias separadas de las cosas sensibles es precisamente «porque las cosas sensibles son corruptibles y móviles, mientras que las matemáticas, sempiternas e inmóviles». (*In Metaphys*, Cathala, 3.ª ed., lib. I, lect. X, 157, pág. 55.) A lo cual responde Santo Tomás que Platón cae en un error al creer que «el modo de la cosa entendida en su ser es como el modo de entender la cosa misma. Y así, como encuentra que nuestro entendimiento entiende de dos modos lo abstracto, a saber, de un modo al entender lo universal abstraído de lo singular, y de otro al entender lo matemático abstraído de lo sensible, establece que ambas abstracciones del intelecto responden a abstracciones en las esencias de las cosas: por lo cual dijo que tanto las cosas matemáticas como las especies están separadas. Pero esto no es necesario... pues uno es el modo de entender, según el cual el intelecto entiende y otro el modo de ser según el cual la cosa existe... De donde, si bien el intelecto entiende las cosas matemáticas no entendiendo al mismo tiempo las sensibles, y las universales aparte de las particulares, no es preciso, sin embargo, que las matemáticas sean aparte de las sensibles y las universales aparte de las particulares.» (Ibíd., 158, pág. 55.)

Platón y Plotino a San Agustín, de Leibniz a Jacobi y Gauss, de Kronecker a Cantor, en un incesante preguntar: ¿Dónde, cómo y en qué plano de la realidad y de la mente tienen existencia los números, las figuras, las funciones y relaciones de la Ciencia exacta? En la concepción platónica este tema se enlaza poderosamente al del ser de las ideas: unas veces las ideas se distinguen de los números (4), otras veces se reducen a éstos; otras, finalmente, los números son entes intermedios entre las ideas y las cosas sensibles (5). Tan hondo había calado este problema en el espíritu heleno, a través de las fases sucesivas de pitagorismo y platonismo, que aparece como motivo insoslayable en el texto que representa la madurez ontológica del pensamiento antitguo: la *Metafísica* de Aristóteles (6).

Desde la época griega, los objetos matemáticos entran, pues, en el campo de la especulación filosófica. Decir en qué consiste la distinción entre un tratamiento matemático y un tratamiento filosófico de los mismos no nos parece, en verdad, lo más difícil. La ciencia exacta se sirve de ciertos entes para formular unas proposiciones que, de algún modo, aspiran al nombre de *verdaderas*: en alguna ocasión —fase o forma *empírica*— esta verdad se manifiesta por una sanción favorable de la experiencia, en otras palabras, por medio de una comprobación en el mundo sensible (7); en otras —fase o forma *intuitiva*— se admite como intuitivamente evidente por sí misma, o es el resultado de una larga exploración intuitiva; en algunas, finalmente —fase o forma *lógica*—, se fundamenta en una correcta demostración a partir de verdades de alguno de los dos tipos anteriores (empírico o intuitivo), o sencillamente a partir de proposiciones aceptadas en virtud de una convención (8). Pero, en todo caso, es *establecer la verdad de sus aserciones*, entendida en alguno de estos sentidos citados, lo que la Matemática pretende, y en modo alguno *hacerse cuestión del ser*, de la *esencia* o de la *existencia* de

---

(4) Al tratar Aristóteles, en el libro XII de su *Metafísica*, de la división de la sustancia en tres géneros, dos de ellos correspondientes a la sustancia sensible y el tercero a la inmóvil, explica cómo algunos filósofos hacen a ésta separable de las cosas sensibles. Pero la opinión de éstos se diversifica, dice. «Pues algunos de ellos —comenta Santo Tomás— dividen la sustancia separable en dos géneros: que son las especies a las que llaman ideas, y los entes matemáticos... pero otros reducen a estas dos, es decir, a las especies y a las cosas matemáticas, a una sola naturaleza. Unos y otros eran platónicos. Unos, finalmente, o sea, los pitagóricos, no ponían las especies, sino sólo los entes matemáticos.» (*In Metaphys*, Cathala, 3.ª edición, lib. XII, lect. II, 2426, pág. 286.)

(5) Aunque Platón distingue claramente los entes matemáticos de las cosas del mundo sensible, no por eso identifica siempre dichos entes con las ideas o las puras esencias, sino que los sitúa en un plano intermedio. En efecto, los entes matemáticos se diferencian profundamente de las especies en una cosa: en que en ellos «se encuentran diferencias —dice Santo Tomás— según el número», esto es, de carácter individual dentro de la misma especie. «De otro modo —continúa—, no se salvarían las demostraciones de la ciencia matemática. Pues si no hubiera dos triángulos de la misma especie, vanamente demostraría el geómetra que algunos triángulos son semejantes, y del mismo modo en las otras figuras. Ahora bien, esto no ocurre en el caso de las especies.» (*In Metaphys*, Cathala, 3.ª ed., lib. I, lect. X, 157, pág. 55.) Uno de los puntos en que Aristóteles se ocupa más largamente de esta opinión de Platón es hacia la mitad del libro III de su *Metafísica* .El comentador dice: «otros pusieron ciertas sustancias intermedias entre las especies y las cosas sensibles, a saber: las cosas matemáticas, de las cuales decían que tratan las ciencias matemáticas. Y la razón de esto es que ponían una doble abstracción de las cosas: esto es, de un modo la abstracción del intelecto, que dice abstraer lo universal de lo particular, y junto a esta abstracción ponía las especies separadas subsistentes *per se*. De otro modo, la abstracción de ciertas formas de la materia sensible, en cuya definición no se pone la materia sensible, así como el círculo se abstrae del bronce. Junto a esta abstracción ponían las cosas matemáticas abstractas, que decían intermedias entre las especies y las cosas sensibles, y que convienen con ambas. Con las especies, en cuanto que son separadas de la materia sensible, y son las cosas sensibles, en cuanto que se encuentran muchas de ellas en una sola especie, por ejemplo, muchos círculos y muchas líneas». (*In Metaphys*, Cathala, 3.ª ed., lib. III, lect. VII, 404-405, pág. 137.)

Al comentar el siguiente texto de Filolao: «el número tiene dos especies cidéticas propias, impar y par, y una tercera mezcla de entrambas, la par-impar. Y en ambas especies cidéticas hay muchas formas que por sí mismo indica cada número», dice García Bacca, «la última afirmación de que cada número dentro de las tres especies posee su forma (μορφή) propia, dará lugar a la afirmación posterior, como patrimonio de los filósofos, de que cada número es una especie y que se especifica por su última unidad. Los matemáticos no se servirán de tal distinción y caracteres cidéticos por ineficaces para la estructura matemática en cuanto ciencia formal y deductiva (O. P., pág. 89). En efecto, como veremos luego, no sólo es impropio considerar a cada número como una especie en el sentido estricto, sino, de acuerdo con las conclusiones de Skolem, ni siquiera la noción «número entero» lo es, en cuanto que no es rigurosamente definible ni caracterizable por vía formal.

(6) En la *Metafísica* de Aristóteles se dedica un amplio espacio a discutir las concepciones pitagórico-platónicas acerca de los entes matemáticos como realidades separadas (libro I, III, XI y XII, principalmente). Dichos textos aristotélicos son la principal fuente que nos transmite las ideas de la última época de Platón y nos enlaza a su teoría de los números ideales, pues se han perdido las obras platónicas correspondientes. (Véase Leon Robin: *La théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote*. Paris, Alcan, 1908; y G. Milhaud: *Les philosophes-géomètres de la Grèce. Platon et ses prédéceseurs*. Paris, Alcan, 1900. Un breve resumen puede encontrarse en Paul Natorp: *Platón*.)

(7) Entendemos, naturalmente, que a través de una inducción incompleta.

(8) La concepción de la Matemática como mera ciencia *hipotético-deductiva*, que sólo afirma implicaciones, concepción hoy muy extendida, no atribuye, naturalmente, más que un valor convencional y pragmático a los axiomas de partida. Así, por ejemplo, Bertrand Russell escribe, refiriéndose al problema de las geometrías no euclidianas: «Lo que la Matemática pura asegura es, simplemente, que las proposiciones euclídeas es deducen de los axiomas euclídeos; es decir, afirma una implicación: cualquier espacio que tiene tales y tales propiedades posee también tales y tales otras. Así, mientras nos hallamos en el campo de la Matemática pura las geometrías euclídeas y no euclídeas son igualmente verdaderas. En cada una de ellas no se afirma nada, salvo implicaciones. (Bertrand Rusell: *Los principios de la Matemática*, edición española. Buenos Aires, 1949, págs. 31-32.) Esta concepción de la Matemática nos parece, naturalmente, insuficiente, si esta ciencia ha de suministrar algún conocimiento sobre la naturaleza y ha de distinguirse de una mera Lógica formal.

los objetos, al parecer aludidos en la formulación de dichas aserciones: números, figuras, funciones, etc. Podría preguntarse, tal vez, si dichas proposiciones no contendrán, de modo implícito, un saber acerca del ser de los entes matemáticos, o no habrá en ellas, al menos, elementos suficientes para *inferir conclusiones* en este sentido. Mas, aun contestando afirmativamente a esta cuestión, habría que precisar que la extracción de un tal saber o la inferencia de unas conclusiones de ese género no podría ser asunto de la Matemática, ya que esta ciencia no es apta para formular de modo explícito verdad alguna que no esté sometida a su *tipo peculiar de verificación*, ya empírica, ya intuitiva, ya lógica. Ahora bien, ¿cómo podría someterse una proposición acerca del *ser*, la *esencia* última o la *existencia* de los entes matemáticos a una de estas formas de verificación? Parece, pues, que este tema, no obstante referirse a los objetos de la matemática, está fuera de esta Ciencia (9): pertenece por entero a la Filosofía (10).

Podemos, así, responder al problema que nos propusimos al principio, relativo a la distinción entre un tratamiento matemático y uno filosófico de los objetos de la ciencia exacta, indicando que las proposiciones de la Matemática enuncian verdades que se refieren explícitamente a las propiedades y relaciones de dichos objetos, pero nunca de un modo directo a su ser, mientras que la filosofía apunta a éste.

Parece bastante obvio que una investigación acerca del ser y de la existencia de los objetos de que una ciencia cualquiera trata no habrá de consistir, por de pronto, en una pregunta radical como la que inquiriese si tales objetos *son* o *no son*, a secas, es decir, *existen* o *no existen*, sino en una cuestión más compleja: en un problema de *modalidad de ser o de existencia*, podríamos decir. Aclararemos lo dicho con las consideraciones siguientes. Desde el momento en que tiene sentido plantearse la cuestión de la *verdad* o *falsedad* de unas proposiciones cuyos sujetos son *números, conjuntos de puntos, figuras*, como, por ejemplo:

a) Un número par *es* siempre la suma de dos números primos (11).

b) Un conjunto de infinitos puntos *tiene* siempre, al menos, un punto de acumulación (12).

c) Un exágono inscrito en una cónica *es tal* que los lados opuestos se cortan en puntos situados en una recta (13),

parece necesario aceptar que tales entes tienen, en algún sentido, una *realidad* propia, un *modo de ser*, más bien que otro, que sirve de fundamento a la formulación de esas proposiciones. Por otra parte, nos encontramos también, en todas las ramas de la Matemática, con juicios que adoptan la forma existencial, como los siguientes:

a') *No existen* raíces enteras de la ecuación $x^n + y^n = z^n$ cuando n es mayor que 2 (14).

b') *Hay* funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto (15).

c') *Existen* infinitos números primos (16), los cuales nos llevan a pensar si no habrá que aceptar un peculiar sentido de existencia matemática (17).

Preguntamos, pues, en resumen, si, en la medida en que es posible afirmar y negar de los entes matemáticos ciertas propiedades, no debe serlo también decir que tienen una *esencia* constituída por éstas, y si, en la medida en que estos entes se ofrecen a nuestra consideración como *dados*, con caracteres *fijos*, o sea, como *objetos* independientes de nuestro entendimiento y voluntad, no deba decirse que *existen*. A nuestro juicio, no cabe plantear la cuestión investigando *si* los números y las figuras son o existen, sino más bien inquiriendo *cómo* son o *existen*, es decir, estableciendo su *modalidad* de ser o de existencia y encuadrando ésta en un esquema general que nos permita compararla con otras modalidades ontológicas. Tendremos así una verdadera ontología del objeto matemático.

Si en la fase platónico-aristotélica de la polémica acerca de la existencia de los objetos matemáticos pudo adoptar la pregunta un carácter más radical fué poque en ella se sobreentendía la referencia a un modo específico de ser y de existencia, a un modo supremo: el de las *sustancias*. Así, en realidad, en la *Metafísica* de Aristóteles el asunto se reduce, funda-

(9) A pesar de que modernamente las mayores contribuciones a este problema se deban a matemáticos: Cantor, Hilbert, Brouwer.

(10) La legitimidad de una disciplina filosófica llamada Filosofía de las Matemáticas y de una rama de la Ontología que trata del ente matemático, continúa, no obstante, siendo puesta en duda injustamente por multitud de filósofos.

(11) Conjetura de Goldbach (ruso, 1690-1774), que ha intentado demostrar modernamente Vinogradov, el cual, en 1937, llegó a la proposición siguiente: todo número impar superior a uno dado es suma de tres números primos impares.

(12) Teorema de Bolzano-Weierstrass, de la *Teoría de conjuntos.*

(13) Teorema de Pascal, de la *Geometría proyectiva.*

(14) Ultimo teorema de Fermat, que dijo haber encontrado en 1637 una demostración maravillosa hasta hoy desconocida. El teorema permanece aún sin demostrar.

(15) El primero que encontró funciones de esta suerte fué el matemático Weierstrass en 1872.

(16) Proposición demostrada con todo rigor, como es sabido, por Euclides.

(171) Algunos modernos filósofos de la ciencia, entre ellos Eddington, niegan la legitimidad del concepto de existencia en general: «Me resulta difícil entender libros de Filosofía porque en ellos se habla mucho de la *existencia* y no sé lo que se quiere decir con eso.» (*La filosofía de la ciencia física.* Ed. española. Buenos Aires, 1944, pág. 213.) *A fortiori* rehusan comprender en qué sentido puede hablarse de existencia en Matemáticas: «No necesitamos examinar la afirmación elíptica precisa con la cual un matemático asegura que la raíz de una ecuación existe, diciendo que la ecuación tiene raíz. En este caso, basta decir que él no piensa solicitar la inclusión de la raíz de una ecuación matemática en la categoría de casos de los cuales los filósofos hablan como *realmente existentes.*» (Ibídem, página 216.)

mentalmente, a una interrogación concreta: *¿Tienen los entes matemáticos el carácter de sustancias separadas?* Es decir, *¿existen con independencia de las cosas sensibles?* Y este estudio queda, por consiguiente, vinculado a la crítica de la concepción platónica acerca de la *independencia y existencia separada de las ideas* (18).

Mas si la idea de *ser* tenía ya en la época helénica una amplitud verdaderamente prodigiosa de valores y sentidos, hay que reconocer que el término *existencia* ha logrado alcanzar, sobre todo en la época moderna, una riqueza de significaciones y matices comparable. Desde un punto de vista científico elemental, empero, es preciso destacar ciertas direcciones del citado término, cuya importancia no puede negarse en un examen general del panorama de la ciencia físicomatemática. Estas direcciones son:

1. Una que apunta a aquello que es *dado* inmediatamente en la *experiencia* o en la *intuición*; en este sentido cabe decir que existen los *fenómenos* externos registrados por nuestros sentidos —con o sin el auxilio de aparatos— o las realidades que nos revela un invencible sentimiento interno, como el hecho de la *continuidad* apariencial del espacio y del tiempo.

2. Otra que señala a aquello que de algún modo —y en un sentido mucho más amplio que el de la Metafísica tradicional— *subsiste* o *permanece* con independencia del sujeto y de sus variaciones temporales: así las *propiedades de los números*. Estos dos sentidos de existencia son divergentes, pero ambos primarios en la mentalidad científica moderna.

Sin embargo, el desarrollo histórico concreto del problema de la existencia matemática a partir de Leibniz nos obliga a tomar como fundamental en nuestro estudio un punto de referencia: el de la relación de los objetos matemáticos con ese modo de existencia que ha solido llamarse *existencia lógica*. Un ente existe lógicamente desde el momento en que ha sido *definido* de manera correcta o, lo que es lo mismo, sin una contradicción explícita ni implícita. Un objeto que existe de este modo no participa, en general, evidentemente de los caracteres de aquello que es *dado*, pues nadie dice que una definición correcta deba necesariamente ser una definición *real* en el sentido aristotélico; por el contrario, será, en general, una definición *nominal*.

En cuanto a su *permanencia*, a su subsistencia, ésta no es absoluta, sino *relativa* a la de los conceptos a base de los cuales se ha constituído la definición. Pero en tanto en cuanto sólo se haga uso de aquel aspecto del concepto que deriva directamente de la mera estructura formal de la definición y se prescinda de la materia de ésta —tal el modo de proceder en una posición formalista—, se habrá eliminado todo elemento de variabilidad y se habrá logrado un aspecto de permanencia.

Puede decirse que el problema fundamental que nos ocupa consiste en decidir si la existencia de los entes matemáticos es de este modo últimamente señalado —o sea, una *existencia lógica*—, o bien, en caso contrario, dónde está la diferencia.

II

Llegamos, en realidad, como ahora mostraremos, a un punto muy conocido, fundamental en la Filosofía de los últimos dos siglos. La cuestión no ha hecho sino girar, profundizándose sin cesar en torno de la preocupación de Kant, cuando éste se preguntaba *si los juicios de la Matemática son analíticos o sintéticos*. El *princeps mathematicorum*, Carlos Federico Gauss, no tenía razón alguna al desdeñar como trivial o falsa la famosa distinción de su compatriota. El planteamiento, en lo que se refiere a los fundamentos de la Matemática, se ha perfeccionado cada vez más, pero, en esencia, ha permanecido el mismo. Toda una serie de consecuencias importantes para la teoría general del conocimiento y para una concepción de la ciencia yacen latentes en el problema de la distinción o identificación de Lógica y Matemática. Es preciso, a nuestro juicio, arrancar de Leibniz y seguir el planteamiento del dilema hasta nuestros días para poder dar una respuesta adecuada y precisa a esta cuestión. Es errónea la afirmación de que en la fase Leibniz-Kant y en la fase Russell-Hilbert-Brouwer-Gödel-Skolem se trata de asuntos esencialmente distintos. Este volver la espalda a las raíces y el origen filosófico del problema —propio de muchos contemporáneos— no hace sino oscurecer las cosas y sumirnos en un laberinto sin asideros y puntos firmes de referencia.

Nuestra intención es, pues, iniciar la tarea de situar algunas de las principales conclusiones de la investigación lógico-matemática actual en el marco del planteamiento clásico. En este sentido nos interesa hoy interpretar el teorema de Skolem: para poder hacerlo de modo adecuado es absolutamente preciso tomar como punto de partida las ideas de Leibniz y de Kant.

La más famosa distinción de Leibniz es la que estableció entre *verdades de razón* y *verdades de hecho* (19). Una verdad será *de razón* cuando la vinculación entre sujeto y predicado que expresa aparezca como lógicamente necesaria o, lo que es lo mismo, cuando esté patente la *razón* de esa vinculación. (En seguida veremos cómo puede ocurrir ésto, según el pensamiento de Leibniz.) Por el contrario, una verdad *de hecho* es aquella que expresa una vinculación que, *de hecho*, se dé entre un sujeto y un predicado, pero sin que la razón tenga elementos (*razones*) para mostrar que *se tiene que dar*. Por eso dice Leibniz que las verdades de razón

(18) Aristóteles define en el libro XI de su *Metafísica* a la Filosofía primera como la ciencia que trata de las *sustancias separadas*. A continuación se pregunta cuáles son estas sustancias y demuestra que quedan excluídas tanto las especies como las cosas matemáticas.

(19) Véase la *Monadología*, párrafo 33.

son *necesarias*, y las de hecho, *contingentes* (20).

Para el filósofo de Leipzig, Lógica y Matemáticas están enteramente constituídas por verdades *de razón* (y, por lo tanto, necesarias), mientras que todas las verdades obtenidas por vía empírica son *de hecho* (y, por ende, contingentes). Sería excesivo discutir aquí todo este esquema general de Leibniz y su fundamento. En realidad, no es preciso para lo que nos proponemos. Como, al menos, la distinción del filósofo entre *verdades de razón* y *verdades de hecho* está correctamente formulada (sean ciertas o no las consecuencias que luego pretende extraer Leibniz), vamos a limitarnos a discutir, independientemente de todo lo demás, la exactitud de la inclusión de las verdades matemáticas entre las *de razón,* planteando el problema en el terreno del filósofo y con sus propios términos.

Ya se sabe cuál es para Leibniz el fundamento último de las verdades de razón: el *principio de identidad* y el de no contradicción (21). Todas las verdades de razón de forma afirmativa son como maneras distintas del principio de identidad; en el fondo, versiones diferentes que se distinguen de aquél en la expresión, pero no esencialmente. Ahora bien, cómo sean lógica y prácticamente posible éstas distintas versiones nos lo explica la teoría leibniziana de la definición, como clave de la Ciencia *a priori.*

La Ciencia *a priori* (o sea, la ciencia compuesta por las verdades *de razón*) —y vamos a concretarnos ya a la Matemática— se constituye del siguiente modo:

Se definen los entes fundamentales de que trata la Ciencia en cuestión. Estas definiciones establecen el cuadro de relaciones básicas o esenciales entre dichos entes, las cuales contienen implícitamente todas las restantes relaciones, o sea, todas las demás proposiciones verdaderas de la Ciencia; es decir, toda la Ciencia. ¿Qué significa que las definiciones de partida contienen *implícitamente* toda la Ciencia? Sencillamente esto: que cualquier proposición verdadera de la Ciencia puede demostrarse de modo riguroso haciendo uso solamente de dichas definiciones básicas y del *principio de identidad* o alguno de los axiomas lógicos que se reducen a él. Si esto es cierto para la Matemática, como creía Leibniz, quiere decir que la Ciencia del número se deduce totalmente de modo lógico de su sistema de definiciones básico.

Es tan amplia la región ocupada en las Matemáticas por las demostraciones de carácter rigurosamente lógico, que siempre ha habido y habrá multitud de filósofos, de matemáticos y de personas de toda condición dispuestas a poner la mano en el fuego, aceptando a cierraojos la afirmación precedente. Sin embargo, ésta, como instituyó Kant, como ha explicado el genio de Poincaré y como sostiene el moderno *intuicionismo* matemático, está bien lejos de ser cierta. Hay un famoso pasaje de los «Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano» en que el personaje Teófilo (que representa el pensamiento de Leibniz) pretende demostrar a Filatetes (Locke), valiéndose de un ejemplo bien trivial, pero suficiente para el caso, el carácter *analítico* —o *de razón*— de las verdades de la Matemática. Queremos iniciar con la crítica de esta pretendida demostración nuestro paso del planteamiento de Leibniz a las posiciones que sostienen la presencia de aspectos sintéticos y radicalmente intuitivos en la Ciencia del número.

El ejemplo es, como se sabe, la deducción de la proposición verdadera $2 + 2 = 4$. Si esta proposición es *analítica,* debe resultar directamente de las definiciones de sus términos y de algún axioma lógico reductible al *principio de identidad.*

Claro está que no podría plantearse siquiera el problema —y con esto salimos al paso de una fácil y obvia objeción inicial— si al definir los términos previamente al análisis de la proposición dada, definiéramos '4' como '2 + 2', pues entonces la proposición dada se identificaría con esta definición, es decir, ya no sería una proposición *cuyo análisis tuviese sentido.* El sentido del análisis comienza, sea cual fuere su resultado, desde el momento en que definamos '4' de distinto modo al expresado por la proposición que vamos a analizar, o sea, por ejemplo, como '3 + 1'. Y esto es lo que hace Leibniz. Tomando a 1 como concepto inicial y como definiciones básicas a $2 = 1 + 1$, a $3 = 2 + 1$ y a $4 = 3 + 1$, pretende mostrar cómo la definición $2 + 2 = 4$ resulta *analítica.*

Dejemos hablar a los personajes.

«Filatetes: Nuestro hábil autor dice aquí: Yo desearía preguntar a esos señores que pretenden que *todo conocimiento que no sea de hecho depende de principios generales innatos y evidentes por sí mismos,* ¿qué principios necesitan para probar que dos y dos son cuatro? Porque, según él, se conoce la verdad de esta clase de proposiciones sin el auxilio de ninguna prueba.

Teófilo: Digo que os esperaba bien preparado. No es una verdad absolutamente inmediata la de que dos y dos son cuatro, en el supuesto

(20) Ibíd. Véase también el *Discurso de Metafísica,* donde Leibniz dice: «La conexión o consecución es de dos maneras: una es absolutamente necesaria; su contrario implica contradicción, y esta deducción se realiza en las verdades eternas, como son las de geometría; la otra, sólo es necesaria *ex hypothesi,* y, por decirlo así, accidentalmente, y es contingente en sí misma cuando, al contrario, no implica contradicción (§ 13). Y más adelante: «Y nada cuyo opuesto sea posible es necesario... Todas las proposiciones contingentes tienen razones para ser así más bien que de otro modo... pero no tienen demostraciones de necesidad, puesto que estas razones sólo están fundadas en el principio de la contingencia o de la existencia de las cosas... mientras que las verdades necesarias están fundadas en el principio de contradicción y en la posibilidad o imposibilidad de las esencias mismas.» (Ibíd.)

(21) «Primae veritates sunt quae idem de se ipso enuntiant aut oppositum de ipso opposito negant... Omnes autem reliquae veritates reducuntur ad primas ope definitionum, in que consistit *probatio a priori,* independens ab experimento.» (*Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits de manuscrits de la Bibliothèque Royale de Hanovve,* por L. Couturet. Paris, Alcan, 1903, fragmento Phil., VIII, 6-7, pág. 518.)

de que cuatro signifique tres y uno. Se puede demostrar, y he aquí cómo:

Definiciones: 1) Dos es uno y uno.
2) Tres es dos y uno.
3) Cuatro es tres y uno.

Axioma: Colocando cosas iguales en lugar de otras iguales, la igualdad subsiste.

Demostración: 2 y 2 son 2 y 1 y 1 (por la definición 1).
2 y 1 y 1 son 3 y 1 (por la definición 2).
3 y 1 son 4 (por la definición 3).

Luego (conforme al axioma) 2 y 2 son 4; que es lo que se trataba de demostrar» (22).

¿Qué decir de estas razones? El asunto no es nada sencillo, sino, pese a la aparente trivialidad del tema, acaso uno de los más duros que pueden presentarse al entendimiento humano. Si las razones de Leibniz en el párrafo anterior son buenas, los juicios aritméticos elementales son analíticos y demostrables a partir de puras definiciones. Ahora bien, examinada la cosa superficialmente, no parece fácil encontrar salida en la breve y cerrada argumentación precedente. Así, Poincaré, examinando, dos siglos más tarde, el razonamiento leibniziano, afirma: «No se podría negar que este razonamiento es puramente analítico» (23). Y sólo sabe oponer el siguiente reparo: «Pero interrogad a un matemático cualquiera: No es una demostración propiamente dicha, os responderá; es una verificación. Uno se ha limitado a comparar dos definiciones convencionales y se ha comprobado su identidad; no se ha aprendido nada nuevo. La *verificación* difiere precisamente de la verdadera demostración porque es puramente analítica y porque es estéril. Estéril porque la conclusión no es más que la tradución de las premisas a otro lenguaje. Por el contrario, la demostración verdadera es fecunda porque su conclusión tiene un sentido más general que las premisas» (24).

Entendemos perfectamente lo que quiere decir Poincaré, sobre todo conociendo el curso posterior de sus ideas en ese prodigio de agudeza crítica que se llama la *Ciencia y la hipótesis*. Para el gran matemático francés el razonamiento propiamente matemático es algo radicalmente distinto de la deducción lógica ordinaria. Esto ocurre porque mientras la deducción clásica —por ejemplo, la silogística— procede de juicios generales a juicios particulares o menos generales, en un continuo descenso de generalidad, la Matemática aspira, por el contrario, a seguir el camino inverso, remontándose siempre a un nivel más alto de generalidad (25). Debe así ser considerada la Matemática como una Ciencia *inductiva* más, aunque el tipo de *inducción* que emplee, la *inducción completa matemática,* nada tiene que ver con la que se da en las Ciencias Físicas y Naturales (26). El razonamiento *por recurrencia* es así un rasgo característico de la demostración específicamente matemática. Este modo de razonamiento es tan riguroso como puede serlo el silogístico, pero nada tiene que ver con el pensar lógico ordinario: es una *lógica de lo infinito,* privativa de las Matemáticas. Equivale, como hace notar el mismo Poincaré, a una cadena infinita de silogismos (27). Sin él, la Matemática sería prisionera de lo finito y se perdería en constataciones y verificaciones triviales. No sería la Ciencia que es.

Precisamente por su carácter *infinitista* el principio de recurrencia o principio de inducción matemática no es *analítico.* Nadie podría *analizar* su verdad y reducirla a los principios lógicos básicos como el de identidad o no contradicción (28). Pero, si no es analítico, ¿diremos acaso que es un principio derivado de la *experiencia,* o sea, que es un principio *empírico?* (29). Forzado por lo absurdo del dilema lógica-experiencia, encontrándose como Hume ante el principio de causalidad, Poincaré encuentra como una ventana abierta la *tercera salida* inventada por Kant. Kant le ofrece el *sintético "a priori",* y de él cuelga el filósofo francés el principio de inducción matemática. «La inducción matemática —escribe—, es decir, la demostración por recurrencia, se impone necesariamente porque no es más que *la afirmación de una propiedad del espíritu mismo»* (30).

Sin embargo, hay una diferencia importante entre la concepción kantiana de la Matemática y la concepción de Poincaré. Para Poincaré el contenido esencial de la Ciencia matemática es de carácter *sintético,* pero es precisamente por intervención del *razonamiento inductivo* por lo que lo es. El principio de recurrencia hace, se-

---

(22) *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano,* Libro IV, 7 («De los axiomas»).

(23) *La ciencia y la hipótesis,* 2.ª ed. castellana. Buenos Aires, 1945, pág. 21.

(24) Ibíd., págs. 21-22.

(25) «He tenido ocasión de estudiar la naturaleza del razonamiento matemático y he mostrado cómo este razonamiento, sin dejar de ser absolutamente riguroso, podía elevarnos de lo particular a lo general por un procedimiento que he llamado *inducción matemática.*» (Poincaré: *El valor de la ciencia,* ed. castellana. Buenos Aires, 1946, 1.ª parte, «Las ciencias matemáticas», pág. 30.) De este modo, en la Matemática «los analistas no son simples hacedores de silogismos a la manera de los escolásticos». (Ibíd.)

(26) Véase en este mismo número de THEORIA, Juan Zaragüeta: «El proceso de la inducción», nota de la Redacción al pie.

(27) «Esta serie de silogismos, que no terminaría jamás, se encuentra así, reducida a una frase de pocas líneas.» (*La ciencia y la hipótesis,* 2.ª ed. castellana. Buenos Aires, 1945, pág. 27.)

(28) «No se puede, pues, sustraerse a la conclusión de que la regla del razonamiento por recurrencia es irreductible al principio de contradicción.» (Ibíd., página 29.)

(29) «Esta regla tampoco puede venirnos de la experiencia; lo que la experiencia podría enseñarnos es que la regla es cierta para los 10, para los 100 primeros números, por ejemplo; no puede abarcar la sucesión indefinida de los números.» (Ibíd., pág. 29.)

(30) Ibíd., pág. 30.

gún él, fundamentalmente *sintética* a toda la Matemática. No obstante, proposiciones singulares de la Aritmética, como $2 + 2 = 4$ —ya lo hemos visto antes—, le parecen *analíticas,* lo mismo que a Leibniz. Kant es, por el contrario, en este aspecto mucho más radical. La proposición $7 + 5 = 12$ es sintética —dice en la *Crítica de la razón pura*—, y toda proposición aritmética lo es. Recordemos algunos fragmentos: «Los juicios matemáticos son todos sintéticos. Esta proposición parece haber escapado hasta hoy a la observación de todos aquellos que han analizado la razón humana, y parece incluso en oposición con todas sus suposiciones; es, no obstante, incontestablemente cierta, y tiene, por sus resultados, una gran importancia» (31). Y más adelante: «uno está tentado de creer, a primera vista, que esta proporción $7 + 5 = 12$ es una proposición puramente analítica, que resulta, según el principio de contradicción, del concepto de la suma de 7 y de 5. Pero, cuando se mira más de cerca, se encuentra que el concepto de la suma de 7 y de 5 no contiene otra cosa que la reunión de dos números en uno solo, y que esto no nos hace conocer en modo alguno cuál es este número único que contiene los otros dos. La idea de 12 no es concebida en modo alguno por el solo hecho de que yo conciba esta reunión de 5 y de 7, y yo podría analizar detenidamente mi concepto de una tal suma posible sin encontrar ciertamente el número 12» (32). Y finalmente: *"Las proposiciones aritméticas son siempre sintéticas"* (33).

Examinadas las tesis de Kant y de Poincaré, vemos, pues, una zona de acuerdo y una zona de discrepancia. Acuerdo en cuanto al carácter esencial de lo específicamente *matemático,* que es para ambos *sintético "a priori"*; en otras palabras, la Matemática alcanza, en todo caso, conocimientos distintos de aquellos que hubieran podido obtenerse por demostración a partir de puras definiciones y haciendo uso de principios estrictamente lógicos; por otra parte, este conocimiento tampoco deriva de la experiencia, sino que es *a priori.*

La Matemática aparece así como un tipo de conocimiento absolutamente distinto de la Lógica, por un lado, y por otro, del que aportaría una experiencia enteramente *a posteriori* —para Kant, como se sabe, imposible, ya que las *formas "a priori"* de nuestro espíritu están presentes en todo *fenómeno,* inseparables de su materia (34).

Pero es acaso más importante el punto de discrepancia. Este aparece cuando los dos pensadores tratan de precisar el origen del conocimiento sintético en la Matemática. Para Kant, lo sintético está ya en las proposiciones iniciales de la Aritmética, en juicios como $2 + 2 = 4$ ó $7 + 5 = 12$, y los razonamientos de esta Ciencia, que proceden en su opinión todos, según el principio de contradicción no hacen sino trasladar, transformar analíticamente este conocimiento sintético base (35). La posición de Poincaré es diametralmente opuesta. Proposiciones como las señaladas son, sin duda alguna, analíticas, y es precisamente el razonamiento matemático específico, el razonamiento por recurrencia, *el que aporta el elemento sintético* presente en todas las proposiciones de carácter general, que sólo pueden ser demostradas por medio de dicho razonamiento.

Es extraordinariamente sugestiva la posición de Poincaré, y constituye una adquisición grande y definitiva del pensamiento su genial contraposición de una *Lógica de lo finito, deductiva* o *descendente,* en cuanto al nivel de generalidad, y una *Lógica de lo infinito, inductiva* o *ascendente,* privativa del pensar matemático. Después de él no parece ya admisible la identificación de Lógica y Matemática sostenida por la escuela de Russell (36). Y, sin embargo, ¿es suficiente el punto de vista de Poincaré para una distinción adecuada de ambas ciencias? ¿Puede sostenerse el carácter analítico de una proposición aritmética singular como $7 + 5 = 12$? ¿Puede aceptarse la afirmación de que *es suficiente un análisis lógico* para demostrar y poner de manifiesto la verdad de semejantes proposiciones?

En oposición a esta tesis, *creemos en el carácter sintético de todas las proposiciones en que intervenga la idea de número,* porque sostenemos —y las conclusiones de Skolem apoyan, a nuestro juicio, esta concepción— que *la idea de número no es un concepto definible lógicamente, sino una intuición irreductible del espíritu humano.*

Volvamos al ejemplo de Leibniz y analicemos detenidamente su pretendida demostración de $2 + 2 = 4$ con el fin de contrastar los dos puntos de vista. Aceptemos las tres definiciones de partida: I), $2 = 1 + 1$; II), $3 = 2 + 1$; III), $4 = 3 + 1$, irreprochables si se toman *en sentido formal,* o sea, desentendiéndose, como admite Poincaré, del significado de los términos

(31) Kant: *Crítica de la razón pura,* Introducción, § V.: «Todas las ciencias teoréticas de la razón contienen juicios sintéticos que les sirven de principios.»
(32) Ibíd.
(33) Ibíd.
(34) «El objeto indeterminado de una intuición empírica se llama *fenómeno.* Lo que en el fenómeno corresponde a la sensación, lo llamo *materia* del fenómeno; pero lo que hace que lo que hay en él de diverso (Das Manningfaltige) pueda ser ordenado según ciertas relaciones, lo llamo la *forma* del fenómeno.» (Kant: *Crítica de la razón pura,* I, «Teoría trascendental de los elementos», primera parte, «Estética trascendental», § 1.)

(35) «Como se encontró que los razonamientos de los matemáticos procedían todos según el principio de contradicción (tal y como lo exige la naturaleza de toda certeza apodíctica), se creyó que sus principios debían ser conocidos también por medio del principio de contradicción, en lo cual se cometió un error; porque si el principio de contradicción puede hacernos admitir una proposición sintética, esto no puede ser sino en tanto se presuponga otra proposición sintética de donde pueda ser deducida, pero en sí misma ella no sabría derivarse.» (Kant: *Crítica de la razón pura,* Introducción, § V.)
(36) «La tesis fundamental de que la Matemática y la Lógica son idénticas es tal que hasta ahora nunca he visto la necesidad de modificarla.» (Bertrand Russell: *Los principios de la Matemática,* ed. española. Buenos Aires, 1948, pág. 7.)

primitivos que aparecen en ellas, como "1" y "+" (37). Aceptemos también, como principio lógico, equivalente al de identidad, el axioma de que se vale Leibniz: «Colocando cosas iguales en lugar de otras iguales, la igualdad subsiste.» Este principio será el único que pueda regir nuestras sustituciones.

Después de lo cual veamos la demostración. Leibniz pone:

a) $2 + 2 = 2 + 1 + 1$ (por la definición I).
b) $2 + 1 + 1 = 3 + 1$ (por la definición II).
c) $3 + 1 = 4$ (por la definición III).

Luego, conforme al axioma que nos permite ir haciendo sustituciones de cosas iguales por iguales, el primer miembro de la primera igualdad puede igualarse al segundo miembro de la tercera igualdad, y parece lícito poner como resultado $2 + 2 = 4$.

Examinada superficialmente la demostración leibniziana, nos parece correcta. Cada una de las proposiciones *a*), *b*) y *c*) es en sí *verdadera.* Pero aquí *no se trata de esto.* Se trata de comprobar si las hemos establecido *haciendo uso exclusivamente de las tres definiciones de partida y del axioma,* porque ése y no otro era el propósito de Leibniz; y sólo de ese modo podría llamarse *analítica* la proposición demostrada.

La demostración parece correcta, y el propósito de Leibniz, cumplido, pero *los ojos nos engañan* y vamos a decir la razón: los ojos están acostumbrados al uso del signo "+", cuyo manejo correcto es *uno de los ingredientes esenciales de nuestra intuición aritmética.* Pero si queremos que el análisis lógico sea riguroso, debemos desprendernos, inhibirnos, al realizarlo, de todo conocimiento *que no sea el explícitamente formulado en las proposiciones de partida,* las cuales bastan, según asegura Leibniz, para la demostración.

Pues bien, Leibniz dice *más* en las proposiciones *a*) *b*) y *c*) de lo que lícitamente tendría derecho a decir si sólo se fundara en las definiciones I, II y III y en el axioma. Esto lo reconoce implícitamente Poincaré cuando, saliendo de la estricta fidelidad al texto leibniziano. *se permite el uso de paréntesis* al formular las proposiciones *a*), *b*) y *c*). Y esto lo reconoce implícitamente, incluso el mismo Leibniz, cuando unas líneas más abajo esquematiza su demostración del modo siguiente:

$$\begin{array}{c} 2 + \quad 2 \\ 2 + (1 + 1) \\ (2 + 1) + 1 \\ 3 \quad + 1 \end{array}$$

¿Qué queremos decir con ésto? Sencillamente, una cosa. Las definiciones iniciales nos enseñan cuál debe ser la consecuencia de usar el signo "+" en ciertos casos particulares; pero si nos decidimos a tomarlas *en un sentido estrictamente formal,* inhibiéndonos de todo otro conocimiento acerca de la operación *suma* que pudiéramos obtener de distinta fuente —y esto parece indispensable si hemos de proceder *analíticamente* y no *intuitivamente*—, tales definiciones nada nos dicen acerca de lo que debe hacerse en expresiones que estén compuestas *por más de dos términos* y en que aparezca *más de uno de tales signos,* sino sólo en expresiones rigurosamente *isomorfas* a las definiciones. Pero si aceptamos tal limitación —y no se comprende cómo podría procederse de otro modo—, nos vemos llevados al uso de paréntesis, y las consecuencias de esto vamos a verlas ahora.

La expresión correcta de las proposiciones sería entonces como sigue:

a′) $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$ (se sustituye dentro del paréntesis conforme a la definición I).
b′) $(2 + 1) + 1 = 3 + 1$ (se sustituye dentro del paréntesis conforme a la definición II).
c′) $3 + 1 = 4$ (se sustituye conforme a la definición III).

Procediendo de esta manera, o sea no haciendo uso del signo de *suma* más que en el caso de dos términos (de acuerdo con lo que nos permiten las definiciones iniciales), *observamos que las tres nuevas proposiciones, a′), b′) y c′) ya no constituyen una cadena,* puesto que el segundo miembro de a′) no coincide formalmente —no es *isomorfo*— con el primer miembro de b′), y, por lo tanto, ya no hay demostración si sólo hemos de hacer uso del principio de sustitución de miembros iguales por iguales.

Si queremos restaurar la cadena demostrativa, hemos de introducir un eslabón entre a′) y b′). Este eslabón es el siguiente:

a″) $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$

Dado nuestro conocimiento del uso del signo "+", obtenido de una fuente distinta de las definiciones leibnizianas y del principio de identidad, sabemos perfectamente que la proposición a″) es correcta en la aritmética de los números enteros ordinarios, puesto que no es más que un caso particular de la *propiedad asociativa* de la suma. Pero ¿acaso puede probarnos Leibniz que esa propiedad asociativa se deriva meramente del principio de identidad y es equivalente a un principio lógico anterior a la Aritmética? No. La proposición a″) no es *ni un principio lógico ni una definición de un ente matemático* que pudiera acompañar a I, II y III. La proposición a″) es un caso particular de la *ley asociativa,* y esta ley asociativa es *un elemento integrante de la intuición específicamente aritmética o intuición del número* (38), y sólo puede ser demostrada como ex-

(37) Esto es indispensable en toda demostración analítica, la cual se apoya siempre en el aspecto meramente formal o estructural de las definiciones y proposiciones de partida, por una limitación obvia del entendimiento humano, ya que, según dice Aristóteles, *no puede definirse todo.*

(38) Versión, en cierto modo, de la idea de que para constituir por agregación de elementos un cierto número es indiferente el orden en que se tomen dichos elementos; idea que dió origen a la definición cantoniana de potencia o número cardinal de un conjunto.

plica el propio Poincaré, haciendo uso de la *inducción matemática*. Es, pues, un principio *sintético*, y sintética es, por lo tanto, la proposición a″), indispensable en la cadena demostrativa de $2 + 2 = 4$, y sintética resulta, finalmente, por haberse demostrado con su ayuda, la misma proposición $2 + 2 = 4$, al igual que todas las proposiciones aritméticas, por simples que parezcan, de acuerdo con la genial intuición de Kant.

III

Examinemos ahora el problema de los *objetos* de que trata la ciencia del número y de su modo específico de *ser*. Este problema aparece en primer lugar estrechamente vinculado a la cuestión del carácter de los juicios matemáticos, de la que acabamos de ocuparnos. En efecto, una solución del dilema *juicios analíticos-juicios sintéticos*, aplicado a las proposiciones matemáticas, trae necesariamente consigo una solución pareja en lo que se refiere a los entes de la Ciencia exacta. Si las proposiciones matemáticas son analíticas, es decir, si su conocimiento puede extraerse como una consecuencia directa del *concepto* de los entes matemáticos, expresado por su definición, es señal que tal concepto existe y que tal definición es posible. La recíproca en este caso es también cierta: si admitimos la posibilidad de una definición rigurosa y exhaustiva de los objetos de la Ciencia exacta y éstos pueden ser tratados como conceptos lógicamente desentrañables, habremos de aceptar también la posibilidad de desenvolver deductivamente todas las relaciones entre dichos entes, a que se reduce el saber matemático, como meras consecuencias implícitas en las definiciones dadas. El saber matemático no sería entonces otra cosa que el desarrollo o despliegue lógico de un sistema de definiciones. Por lo tanto, es preciso considerar como equivalentes las proposiciones siguientes:

1) *Los juicios matemáticos son todos analíticos.*

2) *La Matemática es una ciencia enteramente deductiva apoyada sobre meras definiciones.*

3) *Los entes matemáticos son verdaderos conceptos, rigurosamente definibles y lógicamente analizables.*

4) *La existencia matemática se identifica con la existencia lógica o mera ausencia de contradicción interna.*

Por lo contrario, si los juicios matemáticos son *sintéticos*, el conocimiento de las proposiciones de la Ciencia exacta no puede derivarse meramente del *concepto* de los entes. Entre el conocimiento de los entes y el de las proposiciones hay *una distancia que no puede salvarse con medios puramente lógicos*, o sea, por cadenas deductivas. Claro está que si hemos de seguir concibiendo a la Matemática como a una Ciencia, algún nexo debe existir entre las *proposiciones* que establece y los *entes* a que estas proposiciones se refieren. Mas es el caso que este nexo puede manifestársenos bajo formas muy distintas de la forma *lógica*, formas que han solido rotularse con una palabra: *intuición*. Sin embargo, desgraciadamente, esta palabra ha solido cubrir, a lo largo de la historia del problema que nos ocupa, mercancías tan distintas que ya no sirve apenas para entenderse si no se precisa en cada caso el sentido, de entre los muchísimos posibles, en que se quiere emplear.

De todas maneras, cuando se afirme el carácter *sintético* de las proposiciones matemáticas se habrá afirmado simultáneamente, o bien la existencia en la Matemática de algún proceso demostrativo *no deductivo*, capaz de aportar por su propia virtualidad creadora y sintética conocimientos no contenidos previamente en los conceptos de partida —y ésta es, como hemos visto, la tesis de Poincaré, para el cual el *principio de inducción completa* es un proceso semejante—, o bien el hecho de que los entes matemáticos *no puedan ser considerados como conceptos propiamente dichos* ni ser analizados suficientemente por vía lógica hasta el punto de explicar las consecuencias, o sea, que *no pueden ser definidos de un modo estricto.*

Creemos que las dos alternativas citadas son independientes, pero no se excluyen. Puede haber en la Matemática ese proceso *no deductivo* de que hablaba Poincaré: y de hecho *lo hay*. Pero esto no impide que *al mismo tiempo* los entes matemáticos sean tales que no se dejen analizar por vía lógica. En este caso *ni las demostraciones ni las definiciones de la Lógica serían suficientes para constituir el saber matemático*. Las proposiciones matemáticas precisarían de métodos demostrativos propios; pero también los entes matemáticos deberían quedar determinados por un procedimiento propio, y los modos clásicos de definición serían impotentes para captarlos.

En este orden de ideas queremos situar las conclusiones del gran matemático noruego Thorans Skolem relativas a la Aritmética de los números enteros. El alcance filosófico de dichas conclusiones es tal, a nuestro juicio, que sugiere toda una concepción de los entes matemáticos y de la Matemática.

La proposición fundamental de Skolem es una de las grandes proposiciones lógicomatemáticas que han venido a marcar en los últimos decenios *las limitaciones intrínsecas de la posición formalista* en la Ciencia exacta. En muchas direcciones se han señalado *fronteras* que el formalismo no podría traspasar. Gödel, por ejemplo, mostró una de las más importantes al indicar (39) cómo es esencialmente imposible demostrar la no-contradictoriedad o consistencia de un sistema lógicomatemático que contenga la Aritmética elemental, sirviéndose exclusivamente de los medios de este sistema; por el contrario, es necesario añadir medios esencialmente nuevos no expresables en el sistema mismo. En otras palabras: toda Aritmé-

(39) K. Gödel: *Über formale unentsckeidbare Sätze.* Monatshefte für Math. u. Phys., 1931.

tica será siempre formalmente *incompleta* (40); en todo sistema formal que incluya la Aritmética existe siempre alguna proposición aritmética acerca de la cual el sistema mismo no podrá decidir si es verdadera o falsa.

Parece que la aportación de Gödel es definitiva y que los pasos dados por Gentzen verdaderamente originales y nuevos para salir de la limitación impuesta (41) a través de la negación del principio de *tertium non datur* y de ciertos métodos transfinitos no han llevado al resultado propuesto.

Pero si la proposición gödeliana afecta esencialmente a lo que podríamos llamar una *teoría de la demostración* (42), la proposición de Skolem que vamos a examinar afecta a una *teoría de la definición* de los entes matemáticos y marca en esta dirección una nueva frontera del formalismo. Con lo cual reaparece el paralelismo *demostración-definición*, o lo que es lo mismo, *proposición-objeto*, que antes hemos considerado.

Los intentos de definición rigurosa de *número natural* por medio de un sistema de axiomas definitorios se remontan a Peano, a fines del siglo pasado. Peano estableció cinco axiomas (43) que debían caracterizar el concepto de *número* de la serie natural. Los términos básicos en que estaban formulados estos axiomas eran únicamente los de «cero» «número» y «sucesivo»; uno de los cinco axiomas era, además, una versión del *principio de inducción completa*.

Poco después de la formulación peaniana Russell demostró (44) que los cinco axiomas podrían servir para caracterizar términos de muy distintas sucesiones, tanto como los de la sucesión natural; por ejemplo, los números pares, etc., sin más que atribuir a las expresiones «cero», «número» y «sucesivo» distintos contenidos intuitivos. En efecto, los cinco axiomas no establecen —y ningún axioma complementario podría establecer— en qué sentido intuitivo deben ser tomados sus términos, sino sólo *las relaciones formales* entre los mismos.

La observación de Russell tenía el significado siguiente: Las proposiciones de Peano convienen ciertamente al concepto de número natural, pero no son suficientes para distinguir este concepto de otros conceptos distintos, con lo cual se nos presenta un dilema: o llamamos *número natural* a todo objeto de una sucesión *que satisfaga los axiomas de Peano*, sin preocuparnos de distinguir entre sí las distintas especies de entes tales, o bien buscamos un nuevo sistema de axiomas más exigente que *sólo convenga a lo que se contiene en nuestra noción intuitiva de número natural*. La primera solución es propia de un superformalismo que desdeñe por completo las exigencias intuitivas de la ciencia del número y no admita la necesidad de hacer coincidir los entes construídos por vía formal —o sea, *axiomática*— con los entes de que viene tratando tradicionalmente la Matemática desde su nacimiento (45). Por su parte, la segunda solución, único camino de conciliación de las exigencias de rigor formal y de intuitividad es la que parece haber sido cerrada, prohibida, por el *teorema de Skolem*. Puede calcularse con ello la importancia del citado teorema que vamos a formular inmediatamente.

Si empleamos palabras del lenguaje vulgar, la conclusión del matemático noruego puede expresarse así (46):

«Es imposible caracterizar plenamente los números de la sucesión natural por medio de un sistema finito de axiomas. Todo enunciado valedero para la Aritmética de los números naturales vale también para sistemas enteramente distintos. Es, pues, absurdo, querer descubrir alguna propiedad intrínseca de la sucesión de los números que la distinga de toda otra sucesión» (47).

Esta sorprendente proposición ¿no sugiere inmediatamente un *problema de la individuación* específicamente matemático? ¿Qué son los números? ¿Qué son los entes matemáticos? ¿Cómo se *individúan*, y cómo quedan determi-

(40) Cf. F. Waismann: *Introduzione al pensiero matematico*. Torino, Einaudi, 1942, págs. 142-143.

(41) G. Gentzen: *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. Math. Ann., 112.

(42) Empleamos esta expresión en una acepción restringida, correspondiente a su sentido literal, y no en la acepción amplia, según la cual abarca todas las investigaciones *meta-matemáticas*. (Beweistheorie.)

(43) Dichos axiomas son los siguientes:
1) Cero es un número.
2) El sucesivo de cada número es un número.
3) No existen dos números con el mismo sucesivo.
4) Cero no es el sucesivo de ningún número.
5) Toda propiedad de que goza cero, y también el sucesivo de todo número que goce de aquella propiedad, pertenece a todos los números.

(Cf. Bertrand Russell: *Introduction to mathematical Philosophy*. 2.ª edic., 2.ª reimpr. London. Allen & Unwin, 1930, p. 8.)

(44) B. Russell: Ibíd., p. 9.

(45) «La definición lógica de los números se relaciona —dice Russell— con el mundo real de los objetos contables que llega a nuestro entendimiento. La *teoría formalista, no.»* (*Los principios de la Matemática*, página 8). Pero los intuicionistas no conceden ni siquiera a Russell que sus «definiciones lógicas» de entes matemáticos correspondan a la realidad intuitiva de tales entes.

(46) Thoraus Skolem: *Über dis Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems*. Norsk. Math. Forenings Skrifter, Ser. II, 1933.

(47) Una de las formas prácticas adoptadas por el teorema de Skolem es la siguiente: para todo sistema de axiomas expresivo de las propiedades de los números naturales es posible *construir* un conjunto de *entes* totalmente diversos de aquéllos, que los satisfacen. Por ejemplo, las propiedades de la ordenación lineal, suma, resta, multiplicación, etc., son satisfechas de un modo enteramente análogo al de los números enteros por los *polinomios:*

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... a_1 t + a_0$$

Tales, que a_0, $a_1 \dots a_n$ son enteros. Una transformación de este género que nos haga pasar de los números naturales a otros entes, idénticos a ellos desde un punto de vista formal, y, no obstante, distintos, es siempre posible para todo sistema formal.—Puede verse: Thoraus Skolem, «Über einige Grundlagenfragen der Mathematik», en *Skrifter Norske Vid. Akad.*, Oslo, I Mat. Nat. Kl., 1929.

nados en nuestro espíritu? El teorema de Skolem parece cerrar el paso a todo intento de determinación formal de la realidad intuitiva 'número entero'. Los números no son *esencias* en el sentido tradicional. *No puede darse una definición esencial de número entero* (48). No pueden enumerarse exhaustivamente las propiedades de los objetos de que trata la Ciencia exacta.

Consideremos el problema de individuación propiamente dicho: el problema de la individuación de las sustancias. Según la concepción de Santo Tomás, las sustancias no se individúan por la *forma,* sino por la *materia*: «signata quantitate». La definición esencial de una sustancia individual se detiene, impotente, ante una barrera: la *especie* a que la sustancia pertenece. Más allá no cabe definición esencial: la determinación formal no puede avanzar más. Algo análogo ocurre con los números, con los entes matemáticos: hay siempre en todo objeto de la Ciencia exacta algo irreductible a ese tipo de determinación. Claros y simples en nuestra intuición, los números enteros se resisten a ser definidos; del mismo modo que la Filosofía tomista no acepta la esencia «Sócrates» y rechaza todo intento de definir esencialmente la «socraticidad», así Skolem niega la esencia «número entero». Con ello las sustancias individuales y los entes matemáticos parecen quedar en una situación pareja.

Sin embargo, no olvidemos un detalle de las conclusiones de Skolem: los números enteros no pueden ser definidos por un sistema *finito* de axiomas. La restricción que trae consigo la palabra *finito* es esencial. Naturalmente que puede surgir la pregunta: ¿Acaso podemos imaginarnos lo que sería un sistema *infinito* de axiomas? Ciertamente, no; pero tengamos en cuenta algunas ideas de Leibniz, importantes al propósito.

(*Continuará.*)

(48) Piénsese en las aplicaciones escolares, pedagógicas de esta sencilla proposición.

R E V I S T A S

The Journal of Symbolic Logic, volumen 17, núm. I. Marzo 1952. Contiene:

«On direct products of theories», por Andrzej Mostowski, pág. 1.

«An extension of computational logic», por Alan Rose, pág. 32.

«The system LD», por Haskell B. Curry, pág. 35.

«On the interpretation of non-finitist proofs». Part. II, por G. Kreisel, página 43.

Reviews, pág. 59.

Pensamiento, vol. 8, núm. 30, abril-junio 1952. Madrid. Contiene:

«Autocrítica histórica del hilomorfismo», por Jaime Echarri, S. J., página 147.

«¿Responde la filosofía moderna a las exigencias del hombre moderno?», por Jesús Muñoz, S. J.

Notas, textos, comentarios, página 187.

«Las pruebas de la existencia de Dios a la luz de la ciencia natural moderna». Discurso de S. S. Pío XII en la Pontificia Academia de las Ciencias, pág. 215.

«Las directrices del pensamiento español en el siglo XIX, según Menéndez Pelayo», por Miguel Gascón, S. J., pág. 228.

Bibliografía:

I. *Libros.* — S. Honkavaara: *On the psychology of artistic Enjoyment.* M. F. Sciacca: *Historia de la Filosofía.*—L. Farré: *Estética.*—F. María Palmés: *Metapsíquica y espiritismo.*—C. Galli: *Due studi di filosofia greca.*—C. Galli: *Saggio sulla dialettica della realté spirituale.* — S. Bretón: *"L'esse in" et "l'esse ad" dans la méta physique de la rélation.* C. Giacon: *La seconda scolastica. I problemi guiridico-politici.*—E. Cisquiere: *Deus Dominus: praelectiones Theodiceae.*—F. Albergamo: *La critica della scienza nel novecento.*—O. N. Derisi: *Los fundamentos metafísicos del orden moral.*—J. Todoli: *El bien común.*—Santo Tomás de Aquino: *Suma contra los gentiles.*—L. Stefanini: *Esistenzialismo ateo ed esistenzialismo teistico.* — J. Ferrater Mora: *Diccionario de Filosofía.* J. Maréchal: *Precis d'histoire de la Philosophie moderne.*—J. Balmes: *Obras completas, escritos políticos.*—San Isidoro de Sevilla: *Etimologías,* página 235.

II. *Revistas.*—«Historia de la filosofía moderna y contemporánea», página 258.

Crónica, pág. 283.

Libros recibidos, pág. 285.