EN EL CENTENARIO DE TORRES QUEVEDO, AUTOR DEL AJEDRECISTA MECANICO

SOBRE EL PROBLEMA MATEMATICO DEL AJEDREZ

Por MIGUEL SANCHEZ-MAZAS

1. Preliminares.

El problema del ajedrez, planteado según una perspectiva lógico-matemática, es un problema ya clásico. Con ocasión del reciente triunfo obtenido por el famoso autómata apedrecista de Torres Quevedo, en la Exposición Cibernética de París, puede decirse que este problema cobra de nuevo actualidad e interés. En esta breve nota sólo nos proponemos estudiar, siguiendo criterios matemáticos elementales, algunas cuestiones relativas a lo que hay de teóricamente *determinable*, y a lo que ha de quedar por siempre *indeterminado* en el ilustre y milenario juego.

De ordinario se emplea el adjetivo «matemático», aplicado a problemas diversos, con el valor de «determinable por vía de conclusiones necesarias», y, en consecuencia, con exactitud. Así, cuando se dice que el ajedrez es «el juego matemático por excelencia», se quiere dar a entender que en él impera, más que en ningún otro juego, lo necesario, y, por ello, lo exacto, sobre su opuesto, lo meramente probable, es decir, el azar. Por qué razón ha sido la matemática, más aún que la lógica, la ciencia representativa de lo necesario y de lo exacto, a pesar de poseer la ciencia lógica, de hecho, un grado de necesidad y de universalidad más elevado, es cosa que habría que explicar por razones epistemológicas e históricas.

De todos modos, es conveniente deshacer un concepto estrecho de lo matemático al tratar del problema del ajedrez. En páginas inmortales, el gran Poincaré estableció, hace ya cincuenta años, de qué modo se enlazan en la ciencia matemática lo exactamente determinado y lo debido a libre decisión humana, lo fundado en puras reglas de deducción lógica y lo que no se explica sin tener en cuenta la intuición. Aunque la polémica dura todavía, sus observaciones son tan luminosas que no pueden leerse sin tener la evidencia de su fundamental acierto (1). En cierta medida, puede decirse que la matemática, contemplada como arquitectura ya terminada en las partes en que esto sea posible, aparece dotada de una estructura cuyas conexiones gozan de necesidad lógica (2). No obstante, sería falso añadir a esta verdad indiscutible la afirmación de que ha sido también por necesidad lógica por lo que se ha elegido, mientras que se la estaba construyendo, un cierto camino demostrativo en lugar de otro, igualmente concluyente, o una generalización determinada en lugar de otras muchas posibles e igualmente impecables. Estas elecciones han sido elecciones libres del yugo de la lógica, aunque nunca arbitrarias, en el sentido de caprichosas. Otros criterios, aparte de las reglas expresivas de la necesidad deductiva, las inspiraban: criterios de *unidad*, de *analogía*, de *armonía*, de *aplicabilidad práctica*. En resumen, criterios o bien fundamentalmente *estéticos* o bien (otras veces) *pragmáticos* que indicaban que la matemática no es un inflexible juego mecánico que realice simplemente el desarrollo de todas las consecuencias *implícitas* en unos postulados elementales, todas las generalizaciones y particularizaciones de unas relaciones y estructuras, sino un organismo sensible a todos los rasgos característicos del paisaje físico y espiritual del hombre; en definitiva, sensible a todos los criterios *selectivos* y *valorativos* humanos, no directamente manifestados, por lo general, sino ocultos en la *intuición* estética o práctica. Si así no fuera, podría concebirse una máquina que desenvolviera la ciencia matemática entera, y ésta no merecería estar incluída en el cuadro de los conocimientos propiamente *científicos*. Pues creemos a una máquina incapaz de *crear* ciencia, aunque sí con el poder de desarrollar la ya creada.

Se ha dicho que la matemática, tal como ha sido concebida por un *formalismo* extremo, es decir, por una posición indiferente a estos criterios valorativos de que hablamos, semejaría un juego de ajedrez; pero aquí tenemos que establecer ya una primera distinción importante. Si se conviene en llamar *jugar al ajedrez*, jugar simplemente siguiendo las reglas, sin preocuparse de otra cosa, es evidente que en ese juego —así definido— no habría intervención alguna de *valores*. Pero eso no sería propiamente un juego. Un juego —en el sentido que aquí nos interesa— está caracterizado por la existencia (convencional) de unos valores, *ganar* y *perder;* la diferencia entre un juego y otras actividades humanas radica precisamente en el hecho de que los valores establecidos como criterios del juego son valores *artificiales, convencionales, ficticios* y *no reales* en la vida humana. *Son pseudovalores.*

No obstante, la posibilidad teórica de jugar un juego como el ajedrez de dos maneras: *a)*, atendiendo solamente a las reglas (criterios *puramente formales*), sin hacer intervenir por sistema otro criterio de selección, y *b)*, atendiendo a las reglas, y, *además*, al objetivo de dar mate, evitando el del contrario (criterios *formales* y *valorativos* a la vez), es precisamente lo que ha permitido a Henri Poincaré presentar este juego, en sus dos maneras, como alegoría de dos maneras posibles de la matemática, que podríamos caracterizar, con el fin de permanecer en un nivel de máxima generalidad, por encima de las discusiones entre *formalistas* e *intuicionistas*, con los nombre de: a), *matemática indiferente* o inhumana, y b), *matemática valorativa* o humana; ambos de significado extremadamente amplio.

Dice así el gran matemático francés:

«Si asistís a una partida de ajedrez, para comprenderla no os bastará saber las reglas del movimiento de las piezas. Esto os pemitirá solamente reconocer que cada jugada ha sido hecha conforme a esas reglas, y esta ventaja tendrá verdaderamente muy poco valor. Es, sin embargo, lo que haría un lector de un libro de matemáticas, si no fuera más que lógico. Comprender la partida es enteramente otra cosa; es saber *por qué* el jugador avanza tal pieza más bien que tal otra que habría podido mover sin violar las reglas del juego. Es advertir la razón íntima que hace de esta serie de jugadas sucesivas una especie de todo organizado. Con mayor razón, esta facultad es necesaria al jugador mismo, es decir, al inventor.» (3).

Parece, pues, deducirse de aquí que lo que guía al jugador de ajedrez, aparte de las reglas de juego, es algo así como lo que guía al inventor o al artista, o al matemático cuando, entre las mil direcciones (y modos) que se le ofrecen para extender su ciencia, todas igualmente rigurosas, elige precisamente, en cada caso, la dirección más *simple*, más *bella* o más *oportuna*. Algo, pues, decididamente espiritual. No obstante, la presencia en una importante exposición extranjera (en la Exposición Cibernética) del autómata ajedrecista de Torres Quevedo, y la admiración que ha despertado (4), a pesar de sus limitaciones, en el *Primer Coloquio internacional acerca de las máquinas de calcular y el pensamiento humano*, celebrado el año pasado en París (5), así como la creencia de algunos importantes sabios, como Ashby, de que se llegará a construir un *robot* capaz de jugar al ajedrez (se entiende de modo perfecto, o sea, sin las limitaciones del de Torres), dan cierto interés al problema que consiste en decidir, con argumentos lógico-matemáticos, *dónde reside exactamente la dificultad* —si es que esa dificultad existe— *para construir un ajedrecista mecánico perfecto y otras máquinas semejantes*. Problema que roza la gran cuestión matemática y filosófica de todos los tiempos que se pregunta *qué sea lo determinable con precisión, qué lo mecanizable y qué lo que, por esencia escapa a ambas cosas.* ¿Es, como cree Brouwer, la matemática, la ciencia general *expresiva de todos los pensamientos exactos*? ¿*Constituye*, como repetidamente declara Husserl (6), *la solución rigurosa de todos los problemas formales, el dominio propio de dicha ciencia*? *¿Es que*, por otra parte, *toda estructura, susceptible de ser definida o construída por la matemática, ha de ser siempre, y por este solo hecho, apta para la realización mecánica, al menos en teoría?* (7). Nadie puede negar que estos problemas, preocupación constante desde el alborear de esta técnica época moderna, con los que se inquietó el alma de Descartes, y principalmente de Leibniz, están ahora, de nuevo, con el perfeccionamiento de las grandes máquinas calculadoras por los métodos electrónicos, y por el auxilio precioso de la *lógica simbólica*, entre los que principalmente interesan a sabios y filósofos. De su solución dependerá, en gran medida, la extensión y las limitaciones de un *nuevo racionalismo*, que viene desarrollándose, paso a paso, en nuestra cultura, pese al aparente predominio de las corrientes de lo intuitivo, lo vital espontáneo y lo existencial.

Un tema trivial, pero clásico, como el del ajedrez, nos permitirá tocar tangencialmente, y en forma muy modesta, esos problemas.

2. Qué entendemos por determinación del problema del ajedrez.

Determinar un problema general —en el sentido matemático— significa expresar, en forma genérica, la relación o mutua dependencia que existe entre unos elementos o aspectos del problema y otros, de modo que, conocido el carácter o valor de los primeros, en un caso particular, pudiera inmediatamente deducirse el carácter o valor de los segundos en ese mismo caso. Para la determinación de un mismo problema puede haber distintas expresiones. En el caso del ajedrez, una determinación (parcial) sería, por ejemplo, una que permitiese deducir, dada una situación de las piezas, *todo el conjunto de consecuencias* a que conduciría cada una de las jugadas posibles o lícitas. O, también, una que permitiese establecer, dada también una situación del tablero, *todos los posibles desarrollos* de una partida que, jugada desde el principio, fuese a concluir en la situación dada.

Pero decimos que estas determinaciones serían parciales, porque en el ajedrez cabe hablar de algo más que de meras *consecuencias*, se hacen intervenir juicios de *valor*, tales como «esta jugada es *buena*», «esta otra es *mala*», «aquélla es *peor* que ésta», «la de más allá es la *mejor* jugada que podía hacerse en tales circunstancias». Siendo así, ¿no debería una determinación perfecta del problema permitir, en un caso sometido a examen, decidir si una jugada es *buena* o *mala*, ordenar o *jerarquizar* un conjunto de jugadas posibles según su mayor, igual o menor *bondad* (conveniencia), y establecer, para una cierta situación del tablero, la *mejor* jugada, o más aún, las *mejores* series de jugadas posibles, compatibles y en relación con las debidas a la libre iniciativa del contrario?

Apuntemos dos posibles definiciones, dos acepciones distintas del hipotético jugador mecánico *perfecto*. Una de ellas es: el jugador capaz de *ganar siempre*, sean cuales fueren los movimientos del contrario. La otra: el jugador capaz de *hacer en cada momento, a lo largo de una partida completa, la mejor jugada a su alcance.* ¿Es teóricamente posible el primer jugador, o envuelve contradicción, o carece de sentido preciso su concepto? ¿Es teóricamente posible el segundo? En todo caso, ¿representan el mismo hipotético jugador o se trata de jugadores distintos?

Hemos explicado lo que es determinar un problema general. Ahora, cuando se quiere saber hasta qué punto una cuestión es determinable (en el sentido matemático), hay que comenzar, en la práctica, por determinar en ella inmediatamente lo que se pueda, y extender luego progresivamente el radio hasta la determinación total o hasta encontrar *las fronteras* que separan lo matemático —en el sentido de determinable—

de lo que, por esencia, es indeterminable. No siempre estas fronteras se alcanzan, pues es difícil verlas con claridad. A menudo, zonas de un problema que se resisten a un cierto tipo de *tratamiento* matemático (de *álgebra* elemental o de *cálculo de probabilidades*, por ejemplo), luego se muestran resolubles por la aplicación de un método distinto o de orden superior (como la *teoría de transformaciones y de grupos).*

La primera tarea del matemático, en cualquier campo, consiste siempre en *poner nombres* a los aspectos que ve claramente *definidos* en una cuestión. Lo que el matemático designa y distingue con un nombre es algo que, en algún sentido, puede considerarse *determinado. El profano cree muy a menudo* —y erróneamente— que esa tarea está en sí vacía de significado, y que el modo de distinguir y designar es indiferente para la efectiva solución del problema, afectando sólo a la *comodidad.* Lejos de ser así, desde que se aprende lo que es el planteamiento de un problema elemental, en álgebra, se entiende que la parte decisiva de ese planteamiento radica en la *elección* de los elementos que han de distinguirse mediante un nombre o un símbolo y en el establecimiento del *tipo* de símbolo (*) (de constante, variable, función, grupo, estructura) propio para cada elemento. «Plantear el problema —decía Torres Quevedo hablando de la Automática— es casi resolverle.»

Ahora bien; lo que aquí pretendemos no es la solución de una cuestión relativa a una partida determinada, sino al juego del ajedrez, *en general,* y, por consiguiente, los resultados han de ser de carácter general también.

Al estudiar el juego del ajedrez, lo primero que nos interesa representar es:

a) Una situación determinada del tablero.

b) Los movimientos de las distintas piezas.

c) El curso de una partida.

Establecida teóricamente la posibilidad de estas representaciones y su forma característica, pueden plantearse las cuestiones relativas a la *representabilidad del conjunto de todas las partidas posibles,* a la *terminabilidad o no terminabilidad de cada partida,* a la *posibilidad o imposibilidad de prever la victoria o la derrota,* y, finalmente, a la posible expresión matemática de *una buena jugada, una mala jugada* y *la mejor jugada posible,* relativa a una determinada situación de las piezas.

Si estos últimos problemas se resolvieran, *el esquema teórico para la construcción del perfecto jugador mecánico de ajedrez estaría preparado.*

3. Representación de los elementos fundamentales de una partida.

Una situación determinada de las piezas sobre el tablero, correspondiente a un momento posible de la partida, puede, en general, quedar caracterizada de dos maneras:

a) Por un método de representación que indique para cada una de las 64 casillas del tablero *qué* pieza exactamente la ocupa, o si no la ocupa *ninguna* pieza.

b) Por un método de representación que establezca, para cada una de las 32 piezas que componen el ajedrez completo, qué casilla ocupa (o si ya no ocupa ninguna casilla por haber sido tomada).

Creemos que el primer método es más conveniente por dos razones: 1.ª Porque, a lo largo de la partida, se van eliminando piezas, y en el segundo método sería innecesario y complicaría las cosas establecer, para una pieza tomada, el hecho de no ocupar ya *ninguna casilla;* en realidad, esas piezas —las piezas tomadas— carecen ya de interés para el juego y no tenemos por qué ocuparnos de ellas. 2.ª Porque, en un momento dado de la partida es indiferente, para los fines del juego, saber, por ejemplo, si la torre que ocupa una casilla es la torre-rey o la torre-dama, dado que las posibilidades de juego de ambas son las mismas. (Lo importante es que una pieza —proceda de donde proceda— haya llegado a donde está.) Ahora bien, en el segundo método tenemos por fuerza que arrastrar este dato inútil, que impide concentrar la atención sobre aquello que, exclusivamente, influye en el juego.

Adoptaremos, pues, el primer método, expresando en él, por ejemplo, las piezas blancas por letras minúsculas (t, c, a, d, r, p) y las negras por letras mayúsculas (T, C, D, A, R, P). El signo «0», cero, indicará *que ninguna pieza ocupa una casilla.* De este modo, la posición inicial, por ejemplo, podría expresarse por el conjunto de símbolos:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
11T & 12C & 13A & 14D & 15R & 16A & 17C & 18T \\
21P & 22P & 23P & 24P & 25P & 26P & 27P & 28P \\
310 & 320 & 330 & 340 & 350 & 360 & 370 & 380 \\
410 & 420 & 430 & 440 & 450 & 460 & 470 & 480 \\
510 & 520 & 530 & 540 & 550 & 560 & 570 & 580 \\
610 & 620 & 630 & 640 & 650 & 660 & 670 & 680 \\
71p & 72p & 73p & 74p & 75p & 76p & 77p & 78p \\
81t & 82c & 83a & 84d & 85r & 86a & 87c & 88t
\end{array}\right\}$$

en los que se ha tomado, para designar las casillas, un sistema de coordenadas que son siempre números enteros 1 y 8. Más abreviadamente, podríamos caracterizar una situación del tablero por un esquema, semejante a una matriz de 8.º orden, aunque, naturalmente, dotado de propiedades enteramente distintas. La situación inicial del tablero quedaría representada entonces así:

$$T_0 = \left|\begin{array}{c}
\mathrm{TCADRACT} \\
\mathrm{PPPPPPPP} \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
\mathrm{p\,p\,p\,p\,p\,p\,p\,p} \\
\mathrm{t\,c\,a\,d\,r\,a\,c\,t}
\end{array}\right|$$

Todas las situaciones posibles del tablero podrían deducirse de esta inicial T_0 en virtud de ciertas *transformaciones* correspondientes a los movimientos u operaciones lícitos de las piezas. Cada una de estas transformaciones consistiría en algún cambio mutuo de lugar o permutación de una letra y un cero —movimiento simple—; en alguna sustitución de una letra minúscula por una mayúscula, o viceversa, con simultánea sustitución de una letra por un cero —movimiento con toma

(*) Piénsese que el gran supuesto filosófico sobre el que se apoya la concepción de la «Characteristica Universalis» de Leibniz, fundamental aportación de este filósofo al problema de la determinación racional de los objetos e ideas, no es otro que el descubrimiento de la dependencia existente entre la resolubilidad de una cuestión y el tipo de signos o símbolos elegidos. La importancia de esta idea puede medirse por el hecho de que la Lógica Matemática, por un lado, y el Cálculo Infinitesimal, por otro, se derivan en el pensamiento leibniziano como consecuencia de una elección apropiada de caracteres.

de una pieza—, o en una cierta combinación de estas cosas, que luego estableceremos.

Designaremos, en general, toda situación posible del tablero mediante la letra T con subíndices y sobreíndices. Una situación del tablero que exprese un estado actual de mate dado por el blanco, o sea, una *victoria blanca*, será representada, en general, por T_b; si expresa *victoria o mate negro*, por T_n, y si expresa empate o *tablas*, por T_t. Una *transformación general* del tablero desde la situación inicial T_0 hasta el final de una partida podrá ser indicada abreviadamente de estas tres maneras (donde la letra griega τ significa transformación):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \ (T_0 \rightarrow T_b) \\ \tau' \ (T_0 \rightarrow T_n) \\ \tau'' \ (T_0 \rightarrow T_t) \end{array} \right\}$$

o, de un modo general, por $\tau^* (T_0 \rightarrow T +)$, significando T + *tablero final de una partida* (en general, sin especificar la clase de final).

Podemos considerar que una transformación general τ es la resultante o *producto* de varias transformaciones elementales sucesivas: $\tau = \tau_n \cdot \tau_{n-1} \cdot \tau_{n-2} \cdots \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_0$ (cada una de las cuales representa una jugada).

Tendremos también: $T_1 = \tau_0 (T_0)$; $T_2 = \tau_1 (T_1) = \tau_1 \cdot \tau_0 (T_0)$, etc.

Un tablero, resultante del inicial T_0, a través de una sola transformación elemental τ_0, se llamará, en general, *tablero de primer orden*, y se representará mediante el subíndice $_1$, o sea, T_1. Así, sucesivamente, para los tableros de 2.°, 3.°... orden, sin perjuicio de que un tablero que aparece de segundo orden o, en general, de orden n, en el curso de una partida, pueda aparecer como de tercero, o, en general de orden m (con $n \neq m$) en el curso de otra. En breves palabras, *el orden de una situación determinada del tablero es función de la sucesión de transformaciones elementales a que el tablero inicial ha sido sometido.*

El conjunto de tableros posibles es función del conjunto de transformaciones admitidas de T_0.

Dado un tablero T′, el conjunto C′ de movimientos que admite o jugadas que pueden hacerse en el *tiempo* o *movimiento* siguiente (en el sentido en que se habla de *tiempo* en el ajedrez, o sea, en el de *intervalo en que se hace o puede hacerse una jugada*), estará representada por la *reunión lógica* (v) —según la expresión de la lógica simbólica— de los movimientos que puede realizar cada una de las piezas aún no eliminadas del bando al que corresponde mover. Si llamamos a tales piezas $a_1, a_2 \ldots a_n$ y a sus movimientos posibles correspondientes, en la situación T′, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, tendremos:

$$C' = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \ldots \vee \alpha_n,$$

donde el signo v representa *reunión* o *suma lógica* (*vel* latino). Cada uno de estos $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, a su vez, dependerá de tres factores:

1. La *naturaleza* de la pieza de que se trate, que lleva consigo una característica *movilidad.*
2. El *lugar* o *posición* ocupada por dicha pieza.
3. La existencia de otras piezas en *situación intermedia* entre su *posición de origen* y la que es *término de su movimiento teóricamente posible,* atendido 1 y 2.

Consideremos, uno a uno, estos tres factores:

La *movilidad* de cada una de las piezas del ajedrez puede expresarse mediante un operador μ del tipo $\mu = \mu_1 \vee \mu_2 \vee \ldots = (\Delta_1 x, \Delta_1 y) \vee (\Delta_2 x, \Delta_2 y) \ldots$ (donde $\Delta_i x$ y $\Delta_i y$ pueden representar, según los casos, constantes enteras o variables, susceptibles sólo de adoptar valores enteros, y acotadas entre ciertos límites). Dicho *operador* indica los movimientos posibles, *referidos a la posición de partida de cada pieza,* en forma de *incrementos enteros* de sus dos coordenadas (cada unidad representa la distancia entre un cuadro y otro adyacente). Se descompone, en general, como veremos, en una *suma lógica* de varios operadores, que pueden también considerarse como *vectores* aplicados a la posición de partida de la pieza. Llamando θ a la movilidad característica de la torre, κ a la del caballo, α a la del alfil, δ a la de la dama, ρ a la del rey, π a la del peón blanco, π a la del peón negro, π_1 a la del peón blanco en salida, Π_1 a la del peón negro en salida, tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = (0\,,\ +k) \vee (+k, 0) & 0 < |k| < 8 \\ K = (\pm 1\,, \pm 2) \vee (\pm 2\,, \pm 1) & \\ \alpha = (\pm k\,, \pm k) & 0 < k < 8 \\ \partial = \theta \vee \alpha & \\ \rho = (\pm 1\,, 0) \vee (0\,, \pm 1) \vee (\pm 1\,, \pm 1) & \\ \pi = (0\,, +1)\,;\ \pi_1 = \pi \vee (0\,, +2) & \\ \Pi = (0\,, -1)\,;\ \Pi_1 = \Pi \vee (0\,, -2) & \end{array} \right\}$$

Expresadas, de un modo análogo, las restantes *facultades* de las piezas que designamos con los nombres de *enroque, dama* y *toma de una pieza contraria*, tendremos precisadas, por lo que hace al factor 1, todas las posibilidades de movimiento. Si hacemos intervenir ahora también las *limitaciones* aportadas por los factores 2 y 3, obtendremos la ley de movimientos realmente posibles para una situación cualquiera del tablero.

Si llamamos l_n a una coordenada de la posición ocupada por una pieza l en un cierto tablero y μ_l a la componente, con relación al eje respectivo, de su movilidad, que puede descomponerse en varios movimientos teóricamente posibles, *por lo que hace a 1* (que son 4 para el caballo y 3 para el rey, por ejemplo), del modo siguiente $\mu_l = \mu_{l_1} \vee \mu_{l_2} \vee \ldots\ldots \vee \mu_{l_{n-1}} \vee \mu_{l_n}$, entonces la expresión de la limitación más importante exigida por 2 será:

$$1 \leq \mu_{li}\,(l_n) = l_{n+1} \leq 8$$

A ésta habrá que añadir la representada por la *prohibición* para el rey de ir a casilla en que estaría en jaque, así como otras relativas al enroque, etc.

En cuanto al factor 3, que afecta a la torre, alfil, dama y peón en salida, puede expresarse como sigue:

a) Para la torre: Sea la posición inicial de una torre $t_0\,(x_t, y_t)$, sea μ_i el conjunto de los movimientos permitidos *por lo que hace a los factores 1 y 2.* Sean $t_1\,(x_{t1}, y_{t1})$, $t_2\,(x_{t2}, y_{t2}) \ldots$ las posiciones que alcanzaría por efecto de los movimientos $\mu_1, \mu_2 \ldots$ Sean, por otra parte, x_p, y_p las coordenadas de una pieza cualquiera propia o del contrario.

En estas circunstancias (8):

$$(i) \quad (x_t < x_p < x_{ti}) \cdot (y_p = y_t) \vee (x_{ti} < x_p < x_t) \cdot (y_p = y_t) \vee \vee (y_t < y_p < y_{ti})\,(x_p = x_{ti}) \vee (y_{ti} < y_p < y_t)\,(x_p = x_t) \supset \sim \mu_i$$

b) Para el alfil:

$$(i) \quad (x_a < x_p < x_{ai}) \cdot (y_{ai} < y_p < y_a)\,(|x_a - x_p| = |y_a - y_p|) \vee (x_{ai} < x_p < x_a) \cdot (y_a < y_p < y_{ai})\,(|x_a - x_p| = |y_e - y_p|) \vee (x_a < x_p < x_{ai}) \cdot (y_a < y_p < y_{ai}) \cdot (|x_a - x_p| = |y_a - y_p|) \vee (x_{ai} < x_p < x_a) \cdot (y_{ai} < y_p < y_a) \cdot (|x_a - x_p| = |y_a - y_p|) \supset \sim \mu_i$$

Y análogamente para las otras piezas a que afecta 3.

Una expresión más breve sería empleando la notación de Lukasiewicz, y poniendo, por ejemplo, en lugar de $(x_t < x_p < x_{ti}) \vee (x_{ti} < x_p < x_t)$ el símbolo $(x_t x_p x_{ti}$, y análogamente para los y:

$$\textit{Torre} \quad \text{(i)} \quad C\,A\,K\,(x_t x_p x_{ti})\,(y_p = y_t)\,K\,(y_t y_p y_{ti})\,(x_p = x_t)\,N\mu i$$

$$\textit{Alfil} \quad \text{(i)} \quad C\,K\,(x_{ai} x_p x_a)\,(y_{ai} y_p y_a)\,(\,|\,x_a - x_p\,| = |\,y_a - y_p\,|\,)\,N\mu i$$

Establecida, mediante 1, 2 y 3, la ley general de movimiento de las piezas, vemos que el significado matemático de dichas piezas es meramente el de *operadores que trasladan su punto de aplicación de unas casillas a otras*. En realidad, la presencia material de los objetos de madera o de marfil no sería precisa. Se trata sólo, evidentemente, de *señales* o símbolos que recuerdan a la *memoria intuitiva* del jugador, mediante su *forma*, el tipo de *operador* abstracto que hay aplicado a cada casilla.

4. Problemas matemáticos generales que plantea el desarrollo de una partida de ajedrez.

Supongamos ahora que nos hallamos al comienzo de una partida de ajedrez, es decir, en la situación que hemos convenido en designar por T_0. Los movimientos elementales —o jugadas— que se hallan en dicho momento a nuestro alcance, constituyen un conjunto finito, bien determinado, que expresaremos así:

$$\tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2 \ldots \tau_k$$

La aplicación a la situación T_0 de cualquiera de estos movimientos nos conduciría a un tablero de primer orden T_1. Habrá tantos tableros distintos de primer orden como movimientos distintos posibles en la posición T_0, y, por consiguiente, designaremos los tableros distintos de primer orden con una notación en correspondencia con la de los $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_k$. Sean

$$T_1^1\ ,\ T_1^2\ \ldots\ldots\ T_1^k$$

En cada uno de estos tableros de primer orden estarán, a su vez, a nuestro alcance diversos movimientos distintos que designaremos del siguiente modo:

$$\tau_{11}^1\ ,\ \tau_{12}^1\ \ldots\ldots\ \tau_{1h'}^1 \quad \text{para el tablero} \quad T_1^1$$

$$\tau_{11}^2\ ,\ \tau_{12}^2\ \ldots\ldots\ \tau_{1h''}^2 \quad \text{para el tablero} \quad T_1^2$$

. . . .

$$\tau_{11}^k\ ,\ \tau_{12}^k\ \ldots\ldots\ \tau_{1h}^k\ k \quad \text{para el tablero} \quad T_1^k$$

Si representamos como *bifurcaciones* de una situación inicial única los tableros de primer orden, y como bifurcaciones de estos últimos los de segundo, y así sucesivamente, podremos decir que hemos comenzado de este modo la construcción del árbol representativo de todas las jugadas, situaciones y partidas posibles. En una palabra, *el esquema del ajedrez entero*. Como hemos visto, comenzar este árbol no ofrece dificultad alguna. Ahora bien, ¿podrá igualmente *concluirse*, por lo menos en teoría? Es decir, ¿no hay dificultades teóricas que nos impidan siquiera imaginarnos un esquema semejante concluído?

Antes de intentar contestar a esta pregunta, que plantea el primer problema matemático importante del ajedrez, precisemos una circunstancia de interés. Es la siguiente: a medida que vamos desarrollando el árbol irán apareciendo situaciones o tableros que *no ofrezcan posibilidad de continuación*. Estos tableros pertenecerán necesariamente a uno de estos tres conjuntos:

1. El conjunto B de todas las situaciones que representen victoria de las blancas.
2. El conjunto N de todas las situaciones que representen victoria de las negras.
3. El conjunto T de todos los tableros que representen tablas.

Es elemental ver que estos tres conjuntos son finitos, así como su reunión, ya que el número de situaciones distintas posibles de 32 piezas sobre 64 casillas es finito.

Tenemos así que las situaciones terminales son finitas. ¿Se desprende de aquí necesariamente que el número de partidas posibles es finito? Reflexionemos sobre este problema.

Toda partida es una sucesión de situaciones o tableros. Si el número de situaciones posibles es finito, cosa ya establecida, y *si cada situación no se repite nunca o se repite un número de veces superior a un cierto valor k*, la partida más larga posible se compondrá de un número de situaciones que será inferior a un cierto valor n fácil de calcular. Pero, ¿se cumple esta segunda condición?

A su vez, si cada situación sólo puede darse en partidas distintas un número de veces inferior a un valor k′, sólo podrá haber un número finito de partidas, o mejor, inferior a un cierto valor n′ calculable. Aquí también, ¿sabemos si se cumple la condición?

Si las dos condiciones se cumplen, el esquema ordenado de todo el ajedrez es posible. Habremos dado un paso importante.

Veamos primero si es admisible que una misma situación se repita un número indefinido de veces a lo largo de una partida. A esta cuestión hay que dar una contestación negativa si exigimos que se juegue el ajedrez seriamente. En efecto, pongámonos en la jugada anterior a una posible primera repetición de una situación dada. En ella sólo puede suceder una de estas dos cosas: O bien sólo es posible la jugada que lleva a la repetición, o bien hay posibilidad de otras jugadas. Si hay posibilidad de otras jugadas, el juez del juego debe exigir que se hagan y evitar la repetición. Si la repetición es inevitable, se está en situación de tablas. Por consiguiente, está demostrado que toda partida termina, es decir, llega a su propio término, perteneciente al conjunto B, N o T.

Veamos ahora *si es indefinido el número de partidas diferentes*. Esto ocurriría tal vez *si una misma situación pudiera repetirse indefinidas veces en partidas diferentes*. ¿Puede esto ocurrir? Consideremos un tablero T′ y preguntémonos de cuántas maneras posibles podría llegarse hasta él jugando desde el principio. Sabemos que el conjunto de situaciones posibles es finito; llamemos N a su número. Ahora bien, como hemos establecido que una situación no puede repetirse en una misma partida, los caminos distintos capaces de llegar hasta T′ tendrán cada uno que pasar por situaciones distintas entre sí, en número inferior, o, en todo caso, igual a N. Por otra parte, dos caminos c y c′ se diferenciarán entre sí, o porque los conjuntos de situaciones por las que pasan son distintos, o porque, pasando por el mismo conjunto de situaciones, pasan según un orden distinto. De todos modos, el número de caminos distintos para llegar a T′, igual al número de partidas distintas en que puede aparecer T′, será inferior al que represente el conjunto de permutaciones posibles entre los elementos de cada uno de los subconjuntos del conjunto de situaciones. Por consiguiente, es finito.

Como este razonamiento puede hacerse *para cualquier situación o tablero arbitrariamente dado T′*, resulta que el número de partidas en que un tablero dado puede aparecer es finito, y dependerá del tablero de que se trate. Llamaremos a este número r(T). De aquí resulta que el árbol o esquema sólo tiene un número finito de elementos a base de los cuales constituirse, a saber, la suma de todos los r(T) correspondientes a todas las situaciones distintas. En otras palabras, *el árbol puede hacerse.*

Terminada la tarea de representar esquemáticamente en un árbol único todo el ajedrez, y ordenadas matemáticamente todas las partidas posibles, desde el doble aspecto de la *sucesión* y de la *simultaneidad* lógicas, hemos hecho la claridad suficiente para asomarnos desde el ángulo matemático a las cuestiones que hacen propiamente del ajedrez un *juego:* las cuestiones relativas al *ganar y perder.*

Hasta ahora, sólo tenemos un gigantesco árbol simbólico, semejante a los que representan genealogías de reyes, que, partiendo del tablero de apertura, que es único, va a parar, por bifurcaciones y siempre nuevas bifurcaciones, a los *terminales,* que son como los frutos de ese árbol y representan el conjunto de mates de las blancas, de mates de las negras y de tablas. Hay terminales a pocos movimientos de distancia del principio T_0; hay otros, por el contrario, que distan 100 y más jugadas de la apertura. ¿Qué decir de esta inmensa red? ¿Pueden extraerse para el *ajedrecista mecánico* instrucciones valiosas o normas infalibles?

Terminada la etapa *analítica* del estudio de la *estructura matemática* del juego de ajedrez, llega el momento *sintético* de *construir* (9) el autómata, y, ante todo, es necesario establecer qué criterios, aparte de las reglas del juego, han de regir los movimientos de la férrea mano del robot.

En una palabra, ¿cómo queremos que juegue el autómata? O, ¿qué fin preciso se debe proponer con sus jugadas? La respuesta parece sencilla. Intenta dar mate al contrario evitando que el contrario se lo dé a él.

Ahora bien, la pretendida sencillez de la respuesta se desvanece en el momento en que repliquemos: ¿significa esto *algo matemáticamente preciso*? O también cuando exijamos la expresión lógico-matemática de ese criterio de juego.

Tal vez sea preciso explicar lo que queremos decir. Un criterio de juego es una norma valorativa de diversas posibilidades de movimiento —o jugadas— de modo que una o alguna de estas jugadas sean preferidas a otras que se rechacen. Jugar bien o jugar mal es algo psicológicamente bien definido, pero hasta este momento matemáticamente incierto. Y bien, ¿qué entendemos, desde un punto de vista matemático, por *una buena jugada* en ajedrez? O también, ¿entendemos algo preciso al hablar de *un error*? Supongamos hecha la disección de todo el ajedrez, construída la serie de consecuencias de cada jugada hasta el fin. ¿Es esto suficiente para permitirnos *decidir* en cada caso, entre dos o muchas jugadas posibles, cuál debemos escoger?

Antes de contestar con precisión a esta cuestión, preguntémonos si es verosímil que nos propongamos como fin, al construir el autómata ajedrecista, el de que *gane siempre* o *evite siempre el mate* del contrario. Los criterios que rigen el jugador de ajedrez de Torres Quevedo se basan en la restricción de que la partida esté virtualmente ganada, y sería interesante plantear el problema con más generalidad. Veamos. El carácter fundamental de una partida de ajedrez es la participación de ambos jugadores en su evolución. Si existiera en algún momento de la partida una jugada del blanco tal que, para toda evolución posible sucesiva del juego, provocada por el contrario, llevara inevitablemente a la victoria propia, impidiera toda posibilidad de victoria contraria, diríamos que esa jugada *equivalía* ya matemáticamente al mate blanco o a las tablas, y tomábamos como punto de partida la meta, precisamente a la que queríamos llegar. Un ajedrecista mecánico que partiera ya de una situación de *victoria virtual* —este es el caso del ajedrecista de Torres Quevedo—, aunque no estuviera definido con precisión *qué mate* terminaría por dar, pues esa elección dependería siempre, en el caso más general, del contrario, es un ajedrecista que se limitaría a cumplir órdenes precisas para manifestar externamente un triunfo de hecho ya logrado al comenzar. Ese ajedrecista *eludiría el problema que nos planteamos,* el problema de elegir entre diversas posibilidades de juego, todas ellas susceptibles, aun sin cometer «errores», de victoria blanca o negra o tablas; como son, por ejemplo, al menos las aperturas; problema basado en la decisión de qué es lo que debe entenderse con precisión por *buena jugada* cuando aún se puede ganar y perder en todos los casos (*).

Una vez indicado el modo de *jerarquizar* todas las jugadas posibles en mejores y peores, mediante un criterio de carácter matemático, es muy simple dotar al autómata de la posibilidad de decir *sí* a la mejor y rechazar las otras. Todas las máquinas calculadoras en gran escala, construídas modernamente, están precisamente dotadas de un *mecanismo de opción* fundado en un criterio matemático preciso (10). Es este criterio lo único que aquí de hecho falta.

Supongamos que nos hallamos en un momento determinado de una partida, ante un tablero T′, que nos permite elegir entre un cierto número m de jugadas distintas. Tenemos ante nuestra vista el árbol o esquema de todas las partidas posibles, y en él examinamos las consecuencias que podrían deducirse, hasta llegar a los *terminales,* de cada una de las m jugadas en cuestión. Pongamos que se deducirían, por ejemplo, de la jugada A, b_a mates posibles de las blancas (propios), n_a mates posibles de las negras (contrarios), t_a tablas posibles; de la jugada B, b_b mates posibles de las blancas, n_b mates posibles de las negras, t_b tablas posibles. Y así sucesivamente para C, D, etc. ¿Qué jugada es mejor? Un criterio muy simple, *basado en las posibilidades ofensivas,* consistiría en decir: es mejor aquella jugada que ofrece, en absoluto, *más opciones de victoria blanca,* es decir: elíjase el mayor entre los números b_a, b_b, b_d ... y tómese la jugada correspondiente.

Otro criterio, también simple, pero *basado en las*

(*) Observemos lo que dice Torres Quevedo de su autómata respecto de este punto: «El *ajedrecista* juega con el rey blanco y la torre contra el rey negro, su partida está ganada, desde luego; pero es preciso que sepa jugar para ganarla.» (L. Torres Quevedo: *Máquinas y autómatas,* en «Mis inventos», pág. 51, Madrid, 1917.)

posibilidades defensivas, aconsejaría: es mejor aquella jugada que ofrece, en absoluto, *menos opciones de victoria negra,* o, lo que es lo mismo: elíjase el menor entre los números n_a, n_b, n_d... y hágase la jugada correspondiente.

No faltará tampoco quien pretenda deducir de los dos criterios uno sólo, que reúna las ventajas de ambos a la vez, y que diga: es mejor aquella jugada *que hace máximo el exceso de posibilidades de victoria blanca sobre las de victoria negra.* Entonces, compararíamos entre sí todos los números

$$\left\{\begin{array}{l} e_a = b_a - n_a \\ e_b = b_b - n_b \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

y, elegido el mayor, escogeríamos la jugada correspondiente. [Tampoco habría dificultad alguna en estas *elecciones,* resultado de *comparación,* por parte de la máquina, como lo demuestran las *calculadoras de raíces cuadradas,* como la «Z Automatic Computer» y otras muchas (11).]

El último criterio señalado sería un criterio ecléctico ofensivo-defensivo. Como vemos, los criterios posibles son varios. Y no parece haber argumentos demasiado concluyentes para preferir siempre y exclusivamente uno de ellos, despreciando los demás. Pero, puestos en este camino, veremos que no hemos hecho otra cosa que empezar. En efecto, nos hemos dejado guiar hasta ahora sólo por el *número* de posibles victorias o derrotas que, según la tabla, podrían deducirse de cada jugada, pero no hemos prestado atención a una circunstancia importante, la *distancia* o *número de jugadas* que separan esos posibles finales del momento o tablero que tenemos delante. Por ejemplo: si una jugada A tiene como posibles consecuencias

$$\left\{\begin{array}{l} \text{4 mates blancos a 20 jugadas de distancia} \\ \text{2 mates negros a 3 jugadas de distancia} \end{array}\right\}$$

y otra B, sin embargo,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{3 mates blancos a 2 jugadas de distancia} \\ \text{3 mates negros a 30 jugadas de distancia} \end{array}\right\}$$

no es evidente, pese a las reglas anteriores, que deba preferirse A, sino, tal vez, lo contrario.

Henos aquí, pues, ante la necesidad de hacer intervenir en nuestro *criterio matemático,* además de la *especie* de consecuencias finales posibles de cada jugada, también la mayor o menor *proximidad* de esas posibles consecuencias. Un segundo número, el *número de jugadas hasta el final* positivo o negativo, debe ser considerado, y su influencia en nuestra valoración de la jugada debe ser precisamente inversa a la ejercida por el número de consecuencias de victoria o derrota.

Señalemos, de conformidad con esto, una nueva serie de *números índices.* Llamando al número de posibles mates blancos a una jugada de distancia b_{a1}; a dos, b_{a2}, etc., y análogamente al de negros, n_{a1}, n_{a2}, etcétera, tendremos, como número índice de A, el siguiente:

$$I_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{ai}}{i} - \sum_{l=1}^{m} \frac{n_{al}}{l}$$

Deducido este número índice para todas las jugadas posibles, el máximo número entre los I_A, I_B, I_C, etc., expresaría cuál era la jugada que debía escogerse.

De los cuatro criterios señalados, ¿cuál es el mejor? No puede contestarse de modo concluyente a esta pregunta, y *aquí radica el principal nudo del problema matemático del ajedrez.* ¿Cuál es el mejor? «Según la psicología y el modo de jugar del contrario», es lo único que podemos decir. Los criterios apuntados son todos criterios que pretenden definir la máxima probabilidad de victoria, pero enfocando esa probabilidad cada uno de distinto modo. Todos pueden ser útiles y todos deben ser empleados espontáneamente por un buen jugador, según las circunstancias. Y he aquí el gran fallo del ajedrecista mecánico. Este sólo puede emplear invariablemente *una,* a elección, pero no más, de las citadas reglas de juego. *Tiene facultad de opción entre las jugadas cuando la norma de juego sea rígida, pero no tiene facultad de opción entre normas de juego,* según le aconseje el rostro y carácter del jugador contrario. Eso sólo está reservado al hombre.

En otras palabras: el problema de construir un jugador mecánico que se subordine a uno de estos tipos de valoración de *la mejor jugada* es cosa fácil. Pero todos estos jugadores mecánicos son jugadores unilaterales y parciales rígidos. El jugador humano empleará siempre espontáneamente, bien uno, bien otro de estos criterios matemático-probabilísticos, y aun combinaciones de ellos, según la psicología y el tipo de jugador que tenga enfrente. El incluir la psicología del contrario, aparte de criterios rígidos de probabilidad, entre los factores de juego es operación privativa de jugadores dotados de inteligencia *intuitiva* y *sintética,* además de la *matemático-analítica;* es decir, de seres con espíritu.

NOTAS

(1) Léase, especialmente, el primer capítulo de *El valor de la ciencia,* titulado «La intuición y la lógica en matemáticas», y también el capítulo tercero del libro segundo de *Ciencia y método,* titulado «Las matemáticas y la lógica», en que se halla una de las más certeras críticas del pensamiento de Couturat Russell e Hilbert, así como el capítulo tercero del libro primero de la misma obra, titulado «La invención matemática».

(2) Decimos que en una proposición se manifiesta la nceesidad lógica, cuando su negación implica contradicción.

(3) *El valor de la ciencia.* Buenos Aires Espasa Calpe, 1946, págs. 28-29.

(4) Véase el interesante reportaje de Luis Calvo, titulado «La era de los robots. Triunfo del sabio español Torres Quevedo en la Exposición Cibernética de París», aparecido en *ABC* el 25 de agosto de 1951.

(5) Véase el informe elevado al C. S. I. C. por el representante español de dicho organismo, don Tomás Rodríguez Bachiller, publicado en la *Revista Matemática Hispano-Americana,* 4.ª serie, tomo IX, números 1 y 2, 1951.

(6) *Investigaciones lógicas,* tomo I, último capítulo, titulado «La idea de la lógica pura». Son especialmente interesantes a este respecto las páginas 254-257 de la edición española de la *Revista de Occidente.*

(7) Una estructura «realizable mecánicamente, al menos en teoría», puede parecer a algunos un concepto que envuelve una contradicción. Sin embargo, no es así. Hay máquinas que pueden ser imaginadas, y aun descritas, y que son teóricamente realizables, aunque en su realización práctica efectiva no deba pensarse por su inmenso costo, por el tiempo que se tardaría, o por los problemas técnicos secundarios. De esta manera pueden considerarse cuatro escalones: lo no-matematizable, las estructuras que puede considerar la matemática, las que pueden ser realizadas por una máquina que puede ser descrita y las que efectivamente se construyen. Ahora bien: es evidente que todo lo teóricamente mecanizable es *a fortiori* matematizable. La recíproca no ha sido demostrada. ¿Será cierta? Tal vez el problema no está definido si no se especifica el tipo de máquinas que pueden emplearse, o si no se define mejor el concepto de máquina.

(8) Los signos de Lógica simbólica empleados, a saber, $\vee, \cdot, \supset, \sim$ e (i) tienen el valor usual en *Principia Mathemática*, de Russell y Whitehead.

(9) El papel del análisis y de la síntesis en los problemas fué extraordinariamente bien explicado por Leibniz. La forma más interesante por él dada a esta cuestión es tal vez la basada en la identificación del método sintético con el combinatorio. En este trabajo hacemos uso de ese sentido de lo sintético. (Véase, por ejemplo, el escrito «Combinatoria», editado por Couturat en los *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, París, Alcan, 1903, pág. 572.)

(10) Véase, por ejemplo, el artículo de Edmund C. Berkeley, «The relations between Symbolic Logic and Large-Scale Calculating Machines», aparecido en *Science*, de Washington, en octubre de 1950. En él el autor explica algunos tipos de calculadoras modernas y señala cómo su operación no puede calificarse de matemática exclusivamente, sino también de lógica. En efecto, una de las partes esenciales del programa de una ZAC, pongamos por caso, es «deciding wheter to repeat or not». «We have to provide —dice Berkeley— for the machine's deciding for itself when it will stop using a formula and, instead, give out the answer; this, too, is logic rather than mathematics» (pág. 398).

(11) Edmund C. Berkeley, loc. cit.