Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung

Von PAUL BERNAYS

Wenn gegenwärtig von der Situation der Beweistheorie die Rede ist, so findet man sich der Ansicht gegenüber, dass das Unternehmen der Beweistheorie grundsätzlich gescheitert sei. Dieses wird als Konsequenz der Gödel'schen Unvollständigkeitssätze angesehen. Die Auseinandersetzung mit dieser Auffassung mag uns als Leitlinie für einen überblick über die bestehende Sachlage dienen. Die folgenden Gesichtspunkte und Tatsachen seien hervorgehoben.

1) Der methodische Ansatz der Beweistheorie, wie er in den Publikationen von Hilbert, Ackermann und Herbrand, etwa in den Jahren 1920-1930, zum Ausdruck kam, war selbst schon das Resultat eines Kompromisses mit gewissen theoretischen Erfordernissen; insofern hat die Modifikation der Aufgabestellung, welche durch die Gödel'schen Ergebnisse sich als notwendig erwies, einen nicht so radikalen Charakter, wie es zunächst scheinen kann.

Wesentlich für die Aufgabe der beweistheoretischen Untersuchung ist die Gegenüberstellung von Mathematik als Theorie einer axiomatisch zu beschreibenden Gegenständlichkeit (auch die Analysis und Mengenlehre kann ja in solcher Weise betrieben werden) und "konstruktiver" Mathematik, bei welcher die Objekte überhaupt erst anhand der anschaulich konstitutiven Konzeptionen zustande kommen.

Der Gesichtspunkt des Konstruktiven kann in strikterem und loserem Sinne angewandt werden. Durch eine Lockerung der Anforderung des Konstruktiven gegenüber dem vorherigen "finiten" Standpunkt erwächst insbesondere auch die Möglichkeit die Bedingung der restlosen Formalisierung der metamathematisch zu betrachtenden Beweise abzuschwächen.

2) Die erreichten Ergebnisse in der Frage der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik sind nicht auf die "reine Zahlentheorie" beschränkt. Gentzen selbst hatte sich schon überlegt, dass die Methode seines Widerspruchsfreiheitsbeweises im Prinzip für die Behandlung der verzweigten Stufentheorie ausreicht. Eine solche Ausdehnung der Gentzen'schen Methode ist seither tatsächlich durch die Untersunchungen von Lorenzen, Schütte und Ackermann verwirklicht worden, wobei es zuletzt sogar gelang, die Schwerfälligkeit des Stufenkalkuls abzustreifen. Die unter diese Widerspruchsfreiheitsbeweise fallenden formalen Systems umfassen den von H. Weyl in seiner Schrift "das Kontinuum" abgesteckten Bereich der Analysis.

3) Die Aufgaben der Beweistheorie wurden von Hilbert keineswegs auf den Nachweis von Widerspruchsfreiheit beschränkt, vielmehr hat er bereits in seinem Vortrag "Axiomatisches Denken" die Behandlung der Fragen der effektiven Entscheidbarkeit als Aufgabe für die Metamathematik in Aussicht genommen und hernach in seinem Bologneser Vortrag Probleme der Vollständigkeit formuliert. Wenngleich verschiedene der hier von Hilbert geäusserten Vermutungen sich als trügerisch erwiesen, so gelang es doch, die von ihm gestellte Aufgabe des Nachweises für die Vollständigkeit des Prädikatenkalkuls im positiven Sinne zu lösen, und die in Verbindung mit diesem Nachweis erlangten Resultate von Gödel und Henkin erwiesen sich sogar auch für Anwendungen auf die gebräuchliche Mathematik als fruchtbar.

Ferner war es in Ansehung der Fragen der Entscheidbarkeit schon ein gar nicht selbstverständlicher Erfolg, dass es überhaupt gelang, diesem Begriff eine solche Präzisierung zu geben, dass auf Grund davon systematische Resultate ermöglicht wurden. Zwei markante Ergebnisse dieser Art sind der zuerst von Church erbrachte Nachweis der Unmöglichkeit einer allgemeinen Lösung des Entscheidungsproblems für den Prädikatenkalkul, und andererseits Tarski's Aufweisung eines Entscheidungsverfahrens für den Bereich der reellen Algebra, womit zugleich die Vollständigkeit eines diesen Bereich kennzeichnenden formalen Systems erwiesen wurde. Durch Verwertung der genannten Ergebnisse gelang es dann, für viele Bereiche der Mathematik die Frage nach der Existenz eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens positiv bzw. negativ zu beantworten. Freilich müssen hierfür die zu betrachtenden Gebiete im Sinne logisch relevanter Unterscheidungen abgegrenzt werden. Dass die landläufigen Sonderungen mathematischer Disziplinen von keiner grundsätzlichen Bedeutung sind, ist heute wohl jedem Mathematiker bewusst. Auch in dieser Richtung erweisst sich die beweistheoretische Betrachtung als förderlich, indem wir aus ihr die vom logisch-methodischen Standpunkt bedeutsamen Abgrenzungen mathematischer Bereiche gewinnen.

4) Wie bekannt hat Hilbert an die Beweistheorie auch einen Ansatz zur Behandlung des Cantor'schen Kontinuumproblems geknüpft. Es gelang Gödel, diesem in der anfänglichen Anlage umwegsamen Beweisgedanken eine solche Wendung zu geben, dass ein Nachweis der relativen Widerspruchsfreiheit für das Auswahlaxiom und die verallgemeinerte Cantor'sche Kontinuumhypothese, betrachtet in Rahmen der axiomatischen Mengenlehre, resultierte. Die Bedeutsamkeit dieses Ergebnisses ist offensichtlich, wenn man sich vergegenwärtigt, dass ja das Auswahlaxiom von Anbeginn besonderen Anfechtungen umterworfen war. Zugleich wurde durch diese Gödel'sche Untersuchung die Axiomatik der Mengenlehre in engeren Zusammenhang mit der Beweistheorie gebracht, während sie vordem sozusagen ausserhalb stand.

5) In dem gegebenen Überblick sind nur solche

Untersuchungen genannt, deren Ergebnisse in engerer Weise an die Hilbert'schen Problemstellungen für die Beweistheorie anknüpfen. Diese Problemstellungen sind jedoch in verschiedener Hinsicht ergänzt und erweitert worden. So ist man einerseits auf die Konstruktion formaler Systeme ausgegangen in welche gewissermassen direkt auch ihre Metamathematik mit eingebaut ist. (In dieser Hinsicht sind die Untersuchungen von Chwistek und Hetper und die neueren von Fitch und Myhill zu nennen.) Andererseits haben Kreisel und Stenius die Frage der konstruktiven Interpretation des Resultates eines formalen Beweises in Angriff genommen.

Selbst hiermit sind aber noch keineswegs die Untersuchungen und Resultate erschöpft, welche methodisch mit der Beweistheorie zusammengehören, wie z. B. die Betrachtung der rekursiven Funktionen und die formale Ausgestaltung der rekursiven Zahlentheorie. Im Ganzen finden wir hier noch einen grossen Reichtum an Ergebnissen und Einsichten vor uns.

Andererseits wird man sich kaum des Eindruckes erwehren können, dass die Erkenntnislage in der Grundlagenforschung etwas sehr Unabgeschlossenes hat. Dieser Umstand lässt eine Zurückhaltung in der philosophischen Stellungnahme als angezeigt erscheinen, wie sie gegenwärtig auch wohl von der grösseren Anzahl der Grundlagenforscher geübt wird. In der Tat hat es den Anschein, dass wir erst noch weiter in den Ergebnissen unseres geistigen Experimentierens fortgeschritten sein müssen, ehe es sich lohnen kann, an eine philosophische Durcharbeitung und Ausdeutung der Ergebnisse heranzugehen.

Bodmerstrasse 11
ZURICH (Suisse).