Les logiques modales

(Thémes de discussion)

Par ROBERT FEYS

1.—Au sens *strict* du terme, une logique modale est une logique comportant les notions de nécessité et de possibilité. Les logiques plurivalentes et intuitionnistes sont des logiques modales en un sens *large*.

Nous nous bornons aux logiques modales formalisées, et aux logiques modales au sense strict (voir toutefois la remarque précédant le nº 10).

Les logiques modales ont été formalisées correctement selon diverses méthodes. *Deux principaux problèmes* appellent encore une solution: 1.º Ramener à l' unité, au moins par l'énoncé de correspondances précises, les résultats plutôt touffus et disparates obtenus par les diverses méthodes, 2.º Voir si les logiques modales comportent des interprétations et applications intéressantes.

Nous emploierons "L" comme opératur de nécessité appliqué à une proposition (statement). "Lp" aura le sens du "Lp" de Behmann et du "nec-p" de Quine (sur le "Nec" de Quine voir nº 12); dans un sens différent, Lukassiewiez écrit "Γp" por "p est nésessaire". Nous écrirons "M" comme opérateur de possibilité; "Mp" équivaudra au "Γp" de Behmann; dans un sens différent Lukasiewicz écrira "Δ p" pour "p est possible". Nous userons de "$\prec$" pour l'implication stricte et de "$\supset$" pour l'implication matérielle-le terme "implication" étant pris au sens de Lewis et autres et pas au sens de Quine.

Iᵉ SEANCE

18 août matin.

CONCEPTION EXTENSIVE DES MODALITES

2.—Cette *conception* "extensive" rappelée dans l'exposé de BEHMANN, part de l'analogie entre une affirmation de nécessité et une affirmation universelle, entre une affirmation de possibilité et une affirmation particulière. On peut y déduire les thèses de logique modale à partir de postulats analogues à ceux de la généralisation, ou analogues à ceux de la logique des classes, ou à partir d'autres postulats semblables (Wajsberg). On a énoncé (von Wright) des méthodes de décision à leur sujet.

3.—*Quels systèmes* peut-on déduire de la sorte? (sur la numérotation des systèmes, voir nº 7).

a) L'analogie conduit aisément au système S 5 (Système M3 de von Wright).

b) En introduisant certains postulats appropriés, on arrive au système M2 de von Wright (équivalent à S4) et au système M1 de von Wright, qui, comme, S2, ne comporte pas de réductions de modalités multiples.

c) On ignore s'il existe des systèmes "extensifs" équivalents à S3 ou à des sous-systèmes de S2.

d) D'autre part il y aurait place, par analogie avec la logique des classes pour des logiques "purement modales", sans propositions non affectées de modalités.

4.—On peut de la sorte (Behmann) construire des logiques *plurivalentes modales.*

5.—Il est possible de construire des *méthodes de déduction naturelle* pour logiques modales, analogues aux méthodes de déduction naturelle pour les propositions quantifiées.

a) De telles méthodes ont notamment été énoncées par Curry (pour la nécessité dans S4), par Fitch (pour S2, S4, S5). On trouvera, comme Appendice II, un système de ce genre, particulièrement simple, pour S5.

b) L'intérêt de tels systèmes est qu'ils permettent une déduction aisée de logiques modales du type intuitionniste. Si, comme Curry l'a prouvé pour son système, ils satisfont au "théorème d'élimination" ils comportent des méthodes de décision.

6.—L'interpretation extensive des modalités paraît naturelle aux uns et soulève les critiques des autres.

a) Elle est *techniquemente commode,* au point de rendre banal un système comme S5, qui ne diffère d'un système quantifié que parce que la variable lié est inexprimée (ex. pour autant, laissée dans la "confusion").

b) L'idée d'une proposition vraie "dans tous les cas" ou "dans certains cas" parait confuse. Peut-être l'enfant pense-t-il confusément en termes de modalités; il raisonnera sur des affirmations "parfois vraies", "peut-être vraies". Mais il progresse dans le sens de la pensée scientifique à mesure qu'il raisonne sur des affirmations déterminément vraies ou fausses (et sans doute est-ce un progrès ultérieur de penser selon des logiques d'un type intuitionniste). Si par nécessité on arrive à entendre l'universalité sous un rapport déterminé, mieux vaut recourir à des quantificateurs. Des affirmations leibniziennes sur les mondes possibles paraîtront à beaucoup plus inquiétantes encore que des affirmations platonisantes sur des ensembles de propriétés. Mais nous serions disposés à considérer avec Curry des emboîtements de systèmes formels (inner, outer system), les propositions nécessaires étant démontrables dans le système le plus exigeant.

II[e] SEANCE

18 août - après midi.

A.—LOGIQUES MODALES INTENSIVES

7.—La plupart des logiques modales se présentent comme *intensives,* notament les *logiques de Lewis* dont les pricipaux systèmes sont:

S5, où toute modalité multiple se réduit à une modalité simple; (elle n'a que 6 modalités irréductibles: vrai, nécessaire, possible, faux, non-nécessaire, impossible).

S4, où toute modalite itérée se réduit à une modalité simple (S4 ne comporte que 14 modalités);

S3, comportant exactement (Parry) 42 modalités irréductibles;

S2, comportant une infinité de modalités irréductibles;

S1, où la "règle de Becker" et la distributivité des modalités ne sont pas valables, et qui comporte un sous-système où Lp ⥽p n'est pas démontrable, bien qu'on ait un schéma concluant de Lp à p.

Quelques remarques sus les systèmes de Lewis.

a) L'axiomatique de Lewis pour l'implication stricte a été calquée sur celle des Principia Mathematica pour l'implication matérielle. Les démonstrations existantes dépendent étroitement de définitions en termes de négation et de substitutions par équivalences strictes.

b) Les résultats les plus spectaculaires —mais auxquels nul ne voit d'interprétation— concernent l'irréductibilité èt les *réductions* de modalités multiples (Mc Kinsey, Parry, etc.). Les réductions de Parry utilisent les propriétés classiques de la négation et les théorèmes "paradoxaux" (2) ci-dessous. Mais on trouvera ci-après en Appendice I une réduction des modalités de S4, valide en logique positive et n'utilisant pas les théorèmes "paradoxaux" (2). D' autre part, bien qu'on saisisse mal le sens intuitif des 14 modalités de S4, leur irréductibilité est à la base de l'interprétation de la logique intuitionniste par Gödel (n.º 11b ci-après).

c) Les logiques de Lewis ont été créées afin d'éliminer les "paradoxes" *de l'implication matérielle.* Ce but n'est pas parfaitement atteint.

Si

(1) $q \supset (p \supset q)$, non - $p \supset (p \supset q)$

sont paradoxaux, on ne peut dire que

(2) Lq ⥽ (p ⥽ q) L(non-p) ⥽ (p ⥽ q)

sont exempts de paradoxe.

Pour autant qu'une connexion de propositions peut traduire le "si p, alors q", il nous paraît que cette connexion est l'implication de la logique D de Curry (voir n.º 11 b).

8.—M. LUKASIEWICZ développe un système de logiques modales lié à la tradition d'Aristote, et qui rejette explicitement le point de vue extensif du n.º 2. Mais ses règles pour les variable δ de foncteurs propositionnels entraînent une forme de monotonie (M. Lukasiewicz parlera d'"extensionality") par rapport à ces foncteurs; d'où p. ex.

(3) Δ (p et q) équivaut à Δ p et Δ q,

alors que Lewis a seulement

(4) Δ (p et q) ⥽ Δ p et Δ q

et qu'en effet, intuitivement, le "compossible" entraîne les possibilités et pas inversement. Le système de Lukasiewicz est intéressant de divers points de vue (voir n.º 10). Peut-on l'obtenir à partir des autres systèmes, par adjonction d'axiomes — et peut-être de "rejections"?

9.—Il y a place pour des multiples systèmes complexes des modalités, notamment pour les *modalités relatives* de von WRIGHT (Vol. V des Actes, pp. 59-63) et les modalités "physiques et techniques" de APOSTEL (voir n.º 14).

B.—LOGIQUES MODALES AU SENS LARGE

Il a paru intéressant de communiquer aux participants les textes de MM. JOHANNSON et JUHOS, bien qu'ils ne relèvent pas de la logique modale au sens strict. Mais nous rappelons qu'il existe des correspondances entre certaines formes de logique modale au sens large et des logiques modales au sens strict.

10.—a) Certaines thèses Aristotéliciennes sur les modalités semblent mieux s' interpréter en termes de *logique trivalente* qu'en termes de logique modale au sens strict. C'est à partir de ce point de départ, apparenté à celui du n.º 8, que Lukasiewicz introduit une de ses études (1930) sur la logique trivalente.

b) *Post* énonce une correspondance entre des logiques plurivalentes et certaines systèmes énoncés en termes de logique bivalente. Ces derniers pourront être des systèmes modaux (constituant des extensions de la logique bivalente) du type de la logique du n.º 8.

11.—a) *Gödel* a énoncé une traduction des thèses de la logique intuitionniste en termes de la logique S4.

Cette correspondance est particulièrement intéressante en tant qu'il caractérise *algébriquement* l'opérateur M de possibilité comme un opérateur de *fermeture;* elle permet des interprétations topologiques de S4 et révèle ainsi la possibilité d'appliquer des logiques modales à la solution de problèmes des mathématiques ordinaires.

b) Par ailleurs on remarquera que l'implication $p \supset q$ des logiques de type intuitionniste correspond exactement à l'idée que, si pest affirmable, q est affirmable. Tel est le point de départ d'interprétations sémantiques données par Kleene et Curry, et que ce dernier utilise pour justifier les schémas des logiques L de déduction naturelle.

L'interprétation "naturelle" d'une conditionnelle "Si p, alors q" est donc, en première approximation, celle de l'"implication" intuitionniste. Mais la pensée usuelle admet le tiers - exclu et considère comme paradoxal le "ex falso sequitur quodlibet" une des formules (1) ci-dessus. Curry semble donc avoir de bonnes raisons de présenter en principe la *logique "D"* (minimale avec tiers-exclu) comme *"logique de l'implication stricte"*.

III^e^ SEANCE

19 août - matin.

A.—APPLICATIONS DES LOGIQUES MODALES

12.—On connaît l'interprétation *sémantique* de S5 donnée par Carnap. (Une interprétation conduisant à S4 a été donnée par Mc Kinsey). L'opératur "Nec" de Quine énonce également une propriété sémantique d'expressions propositionnelles.

Halldén a recouru aux modalités pour exprimer "ce qui a un sens" et Jaskowski pour raisonner sur ce qui est introduit "à titre discursif".

13.—Des interprétations de la logique modale par des jugements *normatifs* ont été énoncées par von Wright (An essay on Modal Logic), V. O. Becker et autres.

14.—Une communication de Mme. FEVRIER-DESTOUCHES propose des interprétations *physiques* de logiques modales. Il y a lieu de mentionner également ici les modalités "physiques et techniques" de M. APOSTEL. Jaskowski (1951) énonce des fonctions causales en rapport avec des modalités.

15.—Nul ne contestera que les interprétations des numéros 12, 13, 14 seient *plausibles*. Mais qu'est ce à dire? Sauf pour les interprétations sémantiques, ce qui se constate à première vue est simplement le fait que les modalités sont "idoines" à exprimer certaines conceptions des sciences physiquès et les sciences humaines.

Mais la thèse de Mme. Février est que, dans une certaine mesure, l'usage des modalités est *nécessaire* pour l'expression de certaines thèmes de la physique moderne, sous peine d'arriver à certaines inconsistances dans la formalisation de celles-ci.

Il serait grandement intéressant de montrer que les interprétations normatives et physiques des modalités ont une valeur *constructive*, en ce sens qu'elles permettraint la déduction de thèses scientifiques qui ne pourraient être prouvées (ou du moins ne pourraient être prouvées aisément) sans elles.

B. DIFFICULTES DES LOGIQUES MODALES

16.—D'autre part les logiques modales conduisent, non pas à des antinomies, mais à des résultats *paradoxaux*, au sens originel de ce terme: des résultats qui font momentanément difficulté, du fait qu'ils dérangent des opinions jusque là plausibles.

S'il faut distinguer entre l'identité définie par l'implication matérielle et une identité stricte, définie par l'implication stricte, il faut distinguer entre diverses formes de *descriptions*. Les situations paradoxales ainsi crées ont été discutées il y a quelques années par Carnap, Church et Quine.

Rappelons d'autre part le résultat de Barcan, d'après lequel une identité stricte et une identité usuelle sont strictement équivalentes dans S4 et S5. (Voir dejà la formule 52 de Quine).

17.—L'exposé de QUINE reprend sous une série d'aspects variés, les difficultés que soulève l'usage des modalités comme opérations applicables aux propositions; il fait ressortir la portée philosophique de ces difficultés.

La distinction entre objets formellement différents et matériellement identiques est une distinction scolastique; la distinction entre essentiel et accidentel est aristotélicienne.

Mais p. ex. les juristes de tous les temps sont conduits à distinguer des caractères juridiques essentiels et accidentels, et diverses personnalités juridiques dans un même individu physique, de même qu'un poète distinguera entre l'Etoile du Soir et l'Etoile du Matin. Toute tentative de reconstruire idéalement le monde (dans des systèmes explicatifs ou normatifs) favorise la végétation de multiples distinctions scolastiques. Le tout est, pour une logique scientifique, de savoir relever les distinctions qui, dans certains contextes, apparaissent fécondes, en tant qu'elles se prêtent à des raisonnements précis et non banals.

APPENDICE I

Preuve qu'il y a au plus 7 modalités affirmatives irréductibles dans S4.

Nous écrivons $=$ et $\prec$ respectivement pour l'équivalence stricte et pour l'implication stricte.

I. *Présuppositions* (valables dans S4).

1. $Lp \prec Mp$

2. $\dfrac{P \prec Q}{LP \prec LQ}$ 3. $\dfrac{P \prec Q}{MP \prec MQ}$

4. $LLp = Lp$ 5. $MMp \prec Mp$

II. *Lemmes.*

6. $Lp \prec LMLp$

Preuve.	(1)	$LLp \prec MLp$	Subst. dans 1.
	(2)	$LLLp \prec LMLp$	Par 2.
	(3)	$Lp \prec LMLp$	Par 4.

7. $MLMp \prec Mp$

De même, en usant de 3 et 5 lieu de 2 at 4.

8. $LMp = LMLMp$

Preuve.	(1)	$LMp \prec LMLMp$	Subst. dans 6.
	(2)	$MLMp \prec Mp$	7
	(3)	$LMLMp \prec LMp$	Par 2
	(4)	$LMp = LMLMp$	Par (1) et (3).

9. $MLp = MLMLp$

De même, en usant de 7, 6, 3, ou lieu de 6, 7, 2.

III. *Rèduction.*

Il y a, comme modalités affirmatives irréductibles (non strictment équivalentes à une autre plus simple):

Une modalité avec 0 signe de modalité: p;
Deux modalités avec 1 signe de modalité: Lp et Mp;
Deux modalités avec 2 signes de modalité: LMp et MLp; car LLp et MMp se réduisent, par 4 et 5;

Deux modalités avec 3 signes de modalités: MLMp et LMLp; car LLMp et MMLp se réduisent, par 4 et 5;

Aucune modalité avec 4 signes de modalité, car LMLMp, MMLMp, LLMLp, MLMLp se réduisent, respectivamente par 8, 5, 4, 9.

IV. La réduction ci-dessus est valable même en logique positive. En logique classique avec négation il a de même modalités négatives irréductibles, donc 14 modalités irréductibles, en tout.

L'interpretation des modalités multiples irréductibles affirmatives de S4 (LMp, MLp, LMLp, MLMp) dans le cadre de la correspondance de Gödel pourrait servir de "test case" pour l'utilité de telles modalités.

APPENDICE II

Schémas de logique pour S5.

Nous *définissons* S5 (définition valable même en logique non classique): un système où, si P est une proposition atomique modale (c'est-à-dire comportant au moins un signe de modalité), MP = P et LP = P.

La notation est celle de Curry; le signe de déductibilité est remplacé par:

j *Les 4 schemas*

$$\text{Ll} \quad \frac{X,\ \mathrm{P}\ ::\ Y}{X,\ \mathrm{LP}\ ::\ Y} \qquad \text{Lr} \quad \frac{X\ ::\ \mathrm{P}, Z}{X\ ::\ \mathrm{LP},\ Z}$$

$$\text{Ml} \quad \frac{X,\ \mathrm{P}\ ::\ Y}{X,\ \mathrm{MP}\ ::\ Y} \qquad \text{Mr} \quad \frac{X\ ::\ \mathrm{P},\ Z}{X\ ::\ \mathrm{MP},\ Z}$$

Conditions pour l'usage des schémas en logique non-classique.

Y est singulier ou vide, Z est vide.

Dans Lr et Ml, X et Y sont formés uniquement de propositions modales.

Conditions pour l'usage des schémas en logique classique.

Dans Lr et Ml, X, Y et Z sont formés uniquement de propositions modales.

Rue de Tirlemont, 108.
LOUVAIN (Belgique.)