Formalización de la lógica, según la perspectiva de la comprehensión

Por MIGUEL SANCHEZ-MAZAS

«...J'ay même trouvé une chose estonnante, c'est qu'on peut representer par les Nombres toutes sortes de verités et consequences...»

LEIBNIZ

A) RAZON Y ORIGEN DE ESTE ESTUDIO

Los recientes trabajos de BOCHENSKI (1) y de IVO THOMAS (2) sobre la silogística han demostrado cumplidamente el interés y la riqueza de problemas que ofrece el objetivo de reconstruir o reelaborar todo el cuerpo de la lógica clásica de acuerdo con los métodos de formalización rigurosa que pone a nuestra disposición la lógica matemática moderna.

Tales trabajos, que han revelado nuevos aspectos y relaciones internas, hasta hoy desapercibidas, en las estructuras tradicionales —así las relativas a la consideración de la «clase vacía»— se desenvuelven paralelamente a la reinterpretación de la lógica aristotélica, emprendida por JAN LUKASIEWICZ (3) y los numerosos estudios actuales de historia de la lógica (4).

Los resultados obtenidos en los sistemas CS, de BOCHENSKI, y en su perfeccionamiento CS(n), de IVO THOMAS, que introduce, con el nuevo operador «n», la posibilidad de considerar la negación de las variables nominales, dentro de las proposiciones, son importantes, como lo prueba la atención a ellos dedicada por CHURCH en el *Journal of Symbolic Logic* (5) y, sobre todo, por MENNE (6) en un libro trascendental que acaba de publicar. BOCHENSKI y el mismo MENNE, que forman actualmente la que puede llamarse escuela de Friburgo-Letmathe (en conexión con el grupo de Münster—*Institut für Mathematische Logik*—donde trabajan SCHOLZ, HERMES y ACKERMANN), han reunido dichos resultados en un libro escrito en colaboración (7), en el que MENNE interpreta el sistema de la silogística desde el punto de vista de la *lógica de las clases*, con una notación propia (8).

La *lógica de las clases* está basada, como se sabe, en la perspectiva de la extensión. La orientación *extensiva* domina en todos estos trabajos, como por otra parte ocurre, salvo raras excepciones, en el conjunto de las investigaciones y de los sistemas logísticos, desde hace cincuenta años. Las relaciones características de la *comprehensión* no habían sido puestas de relieve en ningún sistema formalizado que fuera suficiente para deducir toda la silogística, como si hubiera que dar la razón a COUTURAT, cuando afirma que sólo sobre la *extensión* es posible lograr tal objetivo (9) por ser la *comprehensión* esencialmente refractaria al tratamiento matemático (10).

Desde hace tiempo, sin embargo, opinábamos lo contrario. En anteriores trabajos hemos sostenido, por un lado, el valor y sentido de la preferencia de LEIBNIZ por la perspectiva de la *comprehensión* (11) y por otro, hemos intentado desarrollar un cálculo *com-*

(1) I. M. BOCHENSKI, O. P.: *On the categorical syllogism*, Dominican Studies, Oxford, Vol. I, N.° 1, 1948, pp. 35-57.

(2) IVO THOMAS, *O. P.*: *CS(n)*; *An extension of CS*, Dominican Studies, Oxford, Vol. II, N.° 2, 1949, pp. 145-160.

(3) JAN LUKASIEWICZ; *Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford, 1951.

(4) Puede verse nuestro trabajo: *Las recientes investigaciones de historia de la lógica antigua: la escuela de Lukasiewicz*, Theoria, Vol. II, N.° 7-8, 1954, pp. 177-180.

(5) *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 15, N.° 2, 1950, pp. 140-142.

(6) A. MENNE: *Logik und Existenz*, Eine logistische Analyse der kategorischen Syllogismusfunktoren und das Problem der Nullklasse, Meisenheim am Glan, 1954.

(7) BOCHENSKI-MENNE: *Grundriss der Logistik*, Paderborn, 1954. Es una edición alemana, traducida y ampliada por MENNE, del libro de BOCHENSKI: *Précis de logique mathématique*, Bussum, Pays-Bas, 1948.

prehensivo, basado en la gran concepción que se inicia con «De Arte Combinatoria» (12) y se perfecciona en los Ensayos de abril de 1679 (13) aunque sin lograr llevar plenamente a cabo el objetivo propuesto (14): la deducción matemática de la silogística.

Después de haber desarrollado también, siguiendo la tendencia general, un sistema silogístico fundado en la *extensión* (15), hace unos meses hemos querido ver si, adoptando el sistema de los dos números característicos, empleado por LEIBNIZ en la segunda fase de los Ensayos de 1679 (16), podía construirse una *lógica comprehensiva* completa y coherente. Y si esta lógica era rigurosamente formalizable.

Expuesta la cosa en el mes de mayo de este año al mismo BOCHENSKI, éste nos animó a proseguir tal estudio, confirmándonos en su interés y originalidad pero advirtiéndonos, al mismo tiempo, de las dificultades, debido sobre todo al problema de la «clase vacía» a cuya solución LEIBNIZ no había previsto.

Al fin, el éxito parece haber coronado el intento. Empleando —aparte de un grupo de tautologías de la lógica proposicional ordinaria (17)—sólo dos axiomas específicos, que se reducen a uno solo (el carácter simétrico de la relación de *incidencia comprehensiva* entre dos términos) si no se considera la «clase vacía», y valiéndonos de un solo operador primitivo, además del de incidencia, logramos formalizar en pocas cuartillas, basándonos en la *comprehensión,* todo el cuerpo de la lógica formal clásica, dando así plena razón a las geniales intuiciones de LEIBNIZ (18) y rebatiendo de un modo rotundo los puntos de vista de COUTURAT (19) en este asunto.

Advertencias.—El axioma 4.22 equivale al axioma que figura con el número 16 en el trabajo original de BOCHENSKI y con el 27.16 en el «Grundriss der Logistik» (20), es decir, el que tiene la expresión «I*aa*». La demostración de tal equivalencia es inmediata, a partir de la tautología del cálculo proposicional «CCpqCCqpEpKpq», que designaremos por «4.127» para seguir nuestra numeración. En efecto:

4.127. p/a) (a′, q/a′) (a × 2.7. b′/a′, b/a =
= C5.2. b/a′ − C5.2. a/a,′ b/a − (Eq.)

(Eq.) E4.22I*aa*

Si se suprime nuestro axioma 4.22, dejan de ser válidos—como en el sistema CS de BOCHENSKI al suprimir el equivalente 27.16—los modos «Darapti», «Felapton», «Bamalip» y «Fesapo» y los subalternos «Barbari», «Cesaro», «Celaront», «Camestrop» y «Camenop» (o «Calemop»), así como las leyes de la contradicción y conversión «per accidens». En realidad, nuestro 4.22, como el 27.16 de BOCHENSKI tiene el sentido de excluir el caso de la «clase nula» o «clase vacía» (21). Esos modos silogísticos son, por otra parte, los que tampoco HILBERT-ACKERMANN (22) y todos los que se fundan en la lógica de BOOLE (23) pueden demostrar.

Aparte de los símbolos de operadores que nosotros introducimos de modo expreso y definimos rigurosamente, no utilizamos otros que los de LUKASIEWICZ para el cálculo proposicional, a saber, «A», «K», «C», «E» y «N», de matrices, respectivamente, (1,1,1,0), (1,0,0,0), (1,0,1,1), (1,0,0,1) y (0,1) que, como se sabe, se sitúan inmediatamente antes de sus respectivos argumentos, y los del propio BOCHENS-

(8) Véanse las pp. 102-103 del libro citado en (7).

(9) L. COUTURAT: *La logique de Leibniz,* París, 1901, Cap. I (La Syllogistique), p. 24.

(10) *Ibid.,* pp. 22 y 32.

(11) *Ibid.,* p. 23. Véanse también los significativos párrafos de Leibniz en *Elementa Calculi* («Verum malui spectare notiones universales sive ideas earumque compositiones, quia ab individuorum existentia non pendent...») y en *Regulae ex quibus de bonitate consequentiarum formisque et modis syllogismorum categoricorum judicari potest, per numeros* («...sed considero genus ut partem speciei, quia notio speciei ex notione generis et differentiae conflatur. Et huic principio hanc calculandi rationem inaedificavi, quia non individua sed ideas spectavi»), que figuran en las páginas 53 y 81-82 de los *Opuscules et fragments inedits de Leibniz,* ed. por COUTURAT, París, 1903.

(12) G. W. LEIBNIZ: *Dissertatio de Arte Combinatoria,* 1666. Se encuentra en God. Guil. Leibnitii. *Opera Philosophica,* Erdmann, Berolini, MDCCCXL pp. 6-44.

(13) Son los siguientes: *Elementa Characteristicae Universalis, Elementa Calculi, Calculi Universalis Elementa, Calculi Universalis Investigationes, Modus examinandi consequentias per numeros, Regulae ex quibus de bonitate consequentiarum formisque et modis syllogismorum categoricorum judicari potest, per numeros* y *Calculus consequentiarum,* que ocupan entre todos las páginas 42-92 de los *Opuscules...,* ed. por COUTURAT, citados en nota (11).

(14) LEIBNIZ se equivoca en el fragmento «Sur les nombres caractéristiques» creyendo que de su sistema se deduce un modo de silogismo no válido (AOO de la tercera figura), pero esto, en realidad, no ocurre si se procede rigurosamente. COUTURAT afirma, no obstante (o. c., p. 334) que es a causa de tales supuestos defectos por lo que el sistema fué abandonado por su autor.

KI para designar las cuatro proposiciones categóricas, «A» para la universal afirmativa, «E» para la universal negativa, «I» para la particular afirmativa y «O» para la particular negativa. Como él, no hemos temido que haya confusión entre unos y otros, por tener distintos argumentos, es decir, los primeros variables proposicionales y proposiciones y los segundos variables nominales.

Los versículos probativos o demostrativos tienen aquí la forma que tienen en los autores de la escuela de LUKASIEWICZ. Ejemplo: la expresión de la demostración de la tesis 5.2. es la siguiente:

«4.110. p/a()b, q/b()a × 2.3. × 2.3. a/b, b/a=C4.21.−5.2.»,

y su sentido es:
«Tómese el axioma 4.110, sustitúyase en él (en virtud de la regla de sustitución 3.1. (a)), p por a()b, y q por b()a, aplíquese después la definición 2.3. primero, y de nuevo la misma definición 2.3. después de haber efectuado en ella la sustitución de a por b y de b por a, a continuación (en virtud de la regla de sustitución por definición 3.2.); la expresión que resulta está compuesta de «C», seguido del axioma 4.21. y de la expresión 5.2. Aplicando la regla de dedivación (3.4.) puede, pues, afirmarse 5.2. como ley»:

Repetimos para el profano lo que es un sistema formalizado (24): «Es un sistema axiomático cuyas reglas conciernen exclusivamente la forma gráfica de las expresiones y en el que todos los axiomas y reglas son explícitamente formulados. Una vez establecidos sus axiomas y sus reglas, el sistema formalizado debe ser desarrollado sin ninguna referencia al sentido de las expresiones utilizadas, en virtud de las reglas solas».

Finalmente, diremos que hemos logrado, desde el punto de vista material, superar un inconveniente habitual en la expresión de las teorías de lógica matemática: el inconveniente que se deriva del empleo de símbolos extraños a la tipografía habitual; en nuestro caso, por el contrario, los símbolos han sido elegidos de modo que cualquier máquina de escribir los pueda reproducir y, por lo tanto, «a fortiori» cualquier imprenta; condición que empieza por cumplir el simbolismo de LUKASIEWICZ.

Con la abreviatura «PK» designamos el cálculo proposicional clásico, de acuerdo con la costumbre extendida entre los lógicos actuales (Propositional-Kalkül).

Hemos creído oportuna la publicación en estas páginas del sistema formalizado estricto, con anterioridad a la más laboriosa de un trabajo completo (tesis doctoral) que incluye la discusión filosófica del mismo y el análisis de los textos leibnizianos de donde la idea ha arrancado. Y lo hemos creído porque juzgamos conveniente evitar cuestiones de prioridad que más adelante, de lo contrario, pudieran presentarse.

Agradecemos al maestro BOCHENSKI las agudas observaciones hechas, por lo mucho que nos han orientado, así como el interés que se ha tomado en el asunto, interés que en el solar patrio no hubiéramos podido hallar dada la escasez de especialistas españoles en esta materia, y la ausencia de España aún de esos pocos.

Fribourg (Suiza) - Junio de 1955.

M. S. M.

(15) *La teoría del silogismo desarrollada en forma de álgebra*, Theoria, Vol. II, N.º 7-8, 1954, pp. 95-109.

(16) Los ensayos citados en quinto, sexto y séptimo lugares, así como el fragmento «Sur les nombres caracteristiques» (*Opuscules*, pp. 245-247).

(17) Como hacen también BOCHENSKI en CS y THOMAS en CS(n).

(18) «...Cum enim invenissem cuilibet sive Termino sive notioni, suum ascribi posse *numerum characteristicum*, cujus interventu idem futurum est calculare et ratiocinari...» (Op., p. 85).

(19) Compárese, en efecto, el resultado obtenido, con las expresiones de COUTURAT (o. c., p. 24), entre las cuales está la siguiente: «...C'est au point de vue de l'extension, comme nous venons de le dire, qu'il (Leibniz) a reussi a formuler et à justifier les règles du syllogisme de la manière la plus précise et la plus complète; et il ne pouvait pas y réussir par une autre méthode...».

(20) BOCHENSKI-MENNE, o. c., p. 99.

(21) El sistema derivado, que carece de este axioma, es llamado por BOCHENSKI «System N I» y es comentado en el sentido que apuntamos por CHURCH en su reseña del «Journal of Symbolic Logic».

(22) HILBERT - ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen Logik*, Dritte Auflage, Berlin 1949, p. 48.

(23) Por ejemplo, BASSON-O'CONNOR: *Introduction to Symbolic Logic*, London, 1953, p. 155.

(24) BOCHENSKI: *Précis de logique mathématique*, ya citado, p. 29.

B) EL SISTEMA FORMALIZADO S

0. Consideraciones introductorias

0.1. El sistema formalizado que sigue incluye, aparte de las variables proposicionales tomadas de la lógica de las proposiciones PK, dos clases de términos variables nominales: los términos «enteros» y los términos «fraccionarios».

0.2. Los términos enteros «a», «a′», «b», «b′», «m», «m′» y «c» son los argumentos de cuatro operadores diádicos «( )» (incidencia), «)» (comprensión), «)̸» (no-comprensión) y «) (» (no-incidencia), cada uno de los cuales, al aplicarse a dos términos, establece una determinada relación entre ellos, en forma de proposición. Las expresiones simbólicas y verbales de las cuatro proposiciones resultantes se ofrecen en el siguiente cuadro sinóptico:

Símbolo	Expresión verbal
a( )b	a incide con b
a)b	a comprende b
a)̸b	a no comprende b
a) (b	a no incide con b

De los cuatro operadores, el único que se toma en el sistema como primitivo es «( )», y los otros tres se definen a partir de él y de las constantes «C» y «N» de PK.

0.3. Los términos fraccionarios «*a*», «*b*» y «*m*» se introducen en el sistema a partir de los enteros por intermedio del operador «/» (división), que se toma como primitivo. Aplicado «/» a dos términos enteros «a» y «a′», con la condición de que a no incida con a′ (en símbolos «a) (a′»), el resultado es un término fraccionario «a/a′», abreviadamente «*a*». Su expresión verbal es: «a dividido por a′».

0.4. Los términos fraccionarios son los argumentos de cuatro operadores diádicos «A» (inclusión), «E» (exclusión), «I» (no-exclusión) y «O» (no-inclusión), cada uno de los cuales, al aplicarse a dos términos, establece una determinada relación entre ellos, en forma de proposición. Las expresiones simbólicas y verbales de las cuatro proposiciones resultantes se ofrecen en el siguiente cuadro sinóptico:

Símbolo	Expresión verbal
A*ab*	*a* incluye *b*
E*ab*	*a* excluye *b*
I*ab*	*a* no excluye *b*
O*ab*	*a* no incluye *b*

0.5. Las relaciones entre los términos fraccionarios dependen de las relaciones entre los términos enteros de que se forman, por intermedio del operador «/». Esta dependencia se manifiesta, expresando los términos fraccionarios en su forma analizada «a/a′», «b/b′», por medio de las cuatro definiciones que enunciamos aquí verbalmente:

«a/a′ incluye b/b′» por «a comprende b y a′ comprende b′».

«a/a′ excluye b/b′» por «a incide con b′ o a′ incide con b».

«a/a′ no incluye b/b′» por «a no comprende b o a′ no comprende b′».

«a/a′ no excluye b/b′» por «a no incide con b′ y a′ no incide con b».

RESUMEN

El sistema que se ofrece realiza la formalización de la lógica clásica de las proposiciones y del silogismo categórico, según la perspectiva de la comprehensión, a partir de 2 únicos operadores primitivos y de 2 únicos axiomas específicos.

Los términos primitivos son variables nominales a a′, b, etc., entre las cuales se consideran 4 relaciones fundamentales a()b (a incide con b), a)b (a comprende b), a)̸b (a no comprende b) y a)(b (a no incide con b), siendo definidos todos los operadores a partir del único primitivo ( ) (incidencia).

Mediante el nuevo operador / (división), se pasa del grupo de variables nominales primitivas a un grupo derivado, *a*=a/a′, *b*=b/b′, etc. Las relaciones consideradas entre estas nuevas variables son A*ab* (*a* incluye *b*), E*ab* (*a* excluye *b*), I*ab* (*a* no excluye *b*), y O*ab* (*a* no incluye *b*), que corresponden a las 4 proposiciones categóricas de la lógica clásica. Todas las nuevas expresiones se definen a partir de las ya conocidas.

Empleando los dos axiomas Ca( )bb( )a y a′)(a, aparte de un grupo de tautologías del cálculo proposicional ordinario, se demuestran, en virtud de las reglas de sustitución, composición y derivación, todas las leyes de conversión y del cuadrado lógico y los 24 modos silogísticos.

Una variante importante, que da origen a un sistema parcial o reducido, consiste en la supresión del axioma a′)(a, cuyo papel en el sistema originario es el de excluir de las proposiciones la «clase nula» (representada en el sistema por el término a/a′, cuando a′( )a, es decir, cuando a′ incide con a). Con tal supresión dejan de ser válidas aquellas leyes y aquellos modos de silogismo que dejan de serlo cuando se pasa del sistema CS de Bochenski al sistema derivado NI, por supresión del axioma I*aa*, cuya equivalencia lógica con el nuestro a′()a demostramos.

El sistema, por ser puramente formal, admite varias interpretaciones o *modelos*, según las interpretación que se dé a las expresiones primitivas a( )b y a/a′. He aquí dos interpretaciones principales, la primera lógica, la segunda aritmética: (1) a( )b significa que a tiene algún predicado común con b; a/a′ expresa el término

0.6. Dados $a=$a/a′, $b=$b/b′ y $m=$m/m′, llamaremos respectivamente «a», «elemento positivo de a», «b», «elemento positivo de b», «m», «elemento positivo de m», así como «a′», «b′» y «m′» «elementos negativos» correspondientes. Los elementos positivos de dos términos se dirán entre sí «homólogos», y del mismo modo los negativos. Un elemento positivo de un término y uno negativo de otro se dirán entre sí «oblicuos». Con esto podemos encontrar una expresión más sencilla de las definiciones anteriores:

«a incluye b» por «*los* elementos de a comprenden los homólogos de b».

«a excluye b» por «*algún* elemento de a incide con su oblicuo de b».

«a no incluye b» por «*algún* elemento de a no comprende su homólogo de b».

«a no excluye b» por «*ningún* elemento de a incide con su oblicuo de b».

0.7. La *interpretación* de los operadores que relacionan entre sí las dos clases de variables depende de la *interpretación* que se dé a los dos únicos primitivos o no definidos que hay entre ellos: «( )» (incidencia) y «/» (división). Demos a ambos una doble *interpretación*: lógica y aritmética. Interpretemos «incidir», lógicamente, por «tener un predicado común» y, aritméticamente, por «tener un divisor común». Al mismo tiempo, interpretemos «a dividido por a′», lógicamente, por «a multiplicada lógicamente por la negación de a′» y aritméticamente por «a dividida por a′». Entonces, habremos atribuído implícitamente una interpretación a todos los demás operadores, a través de los primitivos, y tendremos el cuadro sinóptico siguiente:

Símbolo	Significado lógico	Significado aritmético
a( )b	a tiene algún predicado común con b.	a tiene algún divisor común con b.
a)b	a tiene b como predicado.	a tiene b como divisor.
a}b	a no tiene algún predicado de b.	a no tiene algún divisor de b.
a)(b	a no tiene predicados comunes con b.	a y b son primos entre sí.
a/a′	el término que tiene los predicados de a y de no-a′ (y sólo ellos).	la fracción de numerador a y denominador a′.
Aa/a′b/b′ Expr. abreviada A*ab*	a tiene como predicado b y a′ tiene como predicado b′	a es divisible por b y a′ por b′.
Ea/a′b/b′ Expr. abreviada E*ab*	a y b′ o a′ y b tienen algún predicado común.	la fracción ab/a′b′ es reducible.
Ia/a′b/b′ Expr. abreviada I*ab*	a y b′ no tienen predicados comunes ni tampoco a′ y b.	la fracción ab/a′b′ es irreducible.
Oa/a′b/b′ Expr. abreviada O*ab*	a no tiene algún predicado de b o a′ no tiene algún predicado de b′.	a no es múltiplo o divisible por b, o a′ no es múltiplo o divisible por b′.

0.8. Tenemos, pues, dos interpretaciones posibles para nuestro grupo de símbolos: una interpretación en términos de lógica, otra en términos de aritmética. Si ahora construimos utilizando este gru-

que tiene conjuntamente los predicados de a y de no-a′. (2) a( )b significa que a tiene algún divisor común con b; a/a′ expresa la fracción de numerador a y denominador a′. Esta doble interpretación permite demostrar las leyes lógicas bien directamente, a partir del sistema formalizado, bien a partir de la aritmética, teniendo en cuenta la correspondencia números-términos lógicos establecida, la cual resulta ser una ampliación y desarrollo coherente de la ideada por Leibniz en los últimos Ensayos de abril 1679; con lo cual quedan refutadas las afirmaciones de Couturat en «La Logique de Leibniz» relativas a una falta de aptitud esencial de la perspectiva comprehensiva, para un desarrollo completo y matemáticamente riguroso de la lógica formal.

RÉSUMÉ

Le système que nous présentons réalise la formalisation de la logique classique des propositions et du syllogisme catégorique, au point de vue de la compréhension, en se servant de 2 seuls opérateurs primitifs et de 2 seuls axiomes spécifiques.

Les termes primitifs sont des variables nominales a, a′, b, etc. On considère entre eux 4 relations fondamentales a( )b (a est incident avec b), a)b (a comprend b), a}b (a ne comprend pas b) et a)(b (a n'es pas incident avec b). L'opérateur ( ) (incidence) est le seul primitif, tous les autres étant définis.

Moyennant l'opérateur / (division), on passe du groupe de variables nominales primitives au groupe dérivé $a=$a/a′ $b=$b/b′, etc. Les relations qu'on considère entre ces nouvelles variables sont A*ab* (a inclut b), E*ab* (a exclut b), I*ab* (a n'exclut pas b) et O*ab* (a n'inclut pas b) qui correspondent aux 4 propositions catégoriques de la logique classique. Ces expressions sont définies en employant les expressions dejà établies.

Avec les axiomes Ca( )bb( )a et a′)(a —abstraction faite d'un grope de tautologies du calcul propositionnel— on démontre, en vertu des règles de substitution, composition et derivation, toutes les lois de conversion et du carré logique et les 24 modes du syllogisme.

Une variante importante, qui donne origine à un système partiel ou réduit, consiste à la suppression de l'axiome a′)(a, dont le rôle dans le

po de símbolos un *sistema axiomático formalizado* S, resultará que toda *tesis formal* en él demostrada admitirá también una doble *interpretación*; en otras palabras, podrá ser convertida, mediante la oportuna traducción, ya en una tesis de lógica, ya en una tesis de aritmética.

En la *interpretación lógica* todo *término,* entero o fraccionario de S, es un *término lógico,* en el sentido de *sujeto* o *predicado* de una *proposición categórica* y considerado según la perspectiva de la *comprehensión.* Entonces «A*ab*», «E*ab*», «I*ab*» y «O*ab*» tienen el valor de las cuatro *proposiciones categóricas* de la *lógica clásica,* respectivamente:

Todo *a* es *b*	(Universal afirmativa)
Ningún *a* es *b*	(Universal negativa)
Algún *a* es *b*	(Particular afirmativa)
Algún *a* no es *b*	(Particular negativa)

En la *interpretación aritmética* todo *término* de S es un *número* entero o fraccionario. Cualquier *divisor d* de un *número entero n* corresponde, en la *interpretación lógica* a una *nota* (o *predicado*) incluída en la comprehensión del *término lógico* correspondiente a *n.*

En esta situación tenemos dos caminos posibles para establecer las leyes lógicas:

1. O bien dar por admitidas las leyes de la aritmética y transformarlas en las respectivas proposiciones lógicas *isomorfas,* en virtud de la correspondencia derivada de las dos posibles interpretaciones del sistema formal S.

2. O bien demostrar directamente, a partir de las definiciones y axiomas de S unas tesis puramente formales a las que dar luego una interpretación lógica.

En un caso, fundaremos la lógica en la aritmética, gracias a la correspondencia establecida por S; en el otro fundaremos la lógica en S mismo, tomando una de sus dos interpretaciones posibles.

El camino 1 lo hemos seguido en una tesis que pronto verá la luz. El camino 2 es el que vamos a seguir en las páginas próximas.

DESARROLLO DEL SISTEMA

1. Téminos primitivos, reglas de definición y de formación

1.1. *Términos primitivos*:

(a) los términos primitivos y definidos de la lógica de proposiciones PK;

(b) variables nominales «a», «a′», «b», «b′», «m», «m′» y «c»;

(c) operadores diádicos «( )» y «/», cuyos argumentos son «a», «a′», «b», «b′», «m», «m′» y «c».

1.2. *Regla de la definición*:

Para introducir en el sistema un término nuevo debe formarse una expresión llamada «definición», la cual se compondrá sucesivamente de:

système originaire est d'exclure des propositions la «classe nulle» (représentée dans le système par le terme a/a′, quand a′( )a, c'est à dire, quand a′ incide avec a). Avec une telle suppression il y a des lois et des modes du syllogisme qui ne sont plus valides et ceux-ci ne le sont plus quand on passe du système CS de Bochenski au système dérivé NI, par suppression de l'axiome I*aa*, dont l'equivalence logique avec notre a′)(a nous démonstrons.

Le système, étant purement formel, admet plusieurs interprétations ou modèles, selon l'interprétation que l'on donne aux expressions primitives a( )b et a/a′. Voici deux interpretations principales, la première logique, la deuxiéme, arithmétique: (1) a( )b signifie que a a quelque attribut commun avec b; a/a′ exprime le terme qui contient les attributs de a et de non-a′. (2) a( )b signifie que a a quelque diviseur commun avec b, a/a′ exprime la fraction qui a le numérateur a et le dénominateur a′. Cette double interpretation permet de démontrer les lois logiques directement, à partir du systeme formalisé, ou bien à partir de l'arithmétique, tenant compte de la correspondance établie numeros-termes logiques, laquelle devient une ampliation et une developpement cohrent de la établie par Leibniz dans les derniers essais d'avril 1679; avec quoi les affirmations de Couturat dans «La logique de Leibniz» relatives à un manque d'aptitude essentiel de la perspective compréhensive, en sont réfutees, en vue d'un développement complet et mathématiquement rigoureux de la logique formelle.

SUMMARY

The system that we present realize the formalization of the classic logic of the propositions and of the categorical syllogism according to the intensional point of view, starting from only two primitive operators and of only two specific axioms.

The primitive terms are nominal variables a, a′, b, etc. We consider between them four fondamental relations a( )b (a is incident with b), a)b (a comprises b), a}b (a does not comprise b) and a)(b (a is not incident with b). The operator ( ) (incidence) is the only primitive one, all others being defined.

By means of the new operator / (division), we pass from the group of

(1) una expresión que contiene el término nuevo, siendo todos los restantes ya términos del sistema;

(2) «=»;

(3) una expresión compuesta exclusivamente de términos primitivos o ya definidos.

1.3. *Proposiciones*:

(a) las de la lógica de proposiciones PK;

(b) grupos compuestos por dos letras «a», «a′», «b», «b′», «m», «m′» o «c» y un operador «( )», «)», «)‑(» o «)(» situado entre ellas:

(c) grupos compuestos por dos letras «*a*», «*b*» o «*m*» y un operador «A», «E», «I» u «O» situado antes de ellas;

(d) proposiciones de PK cuyas variables han sido sustituídas por proposiciones.

2. Definiciones

2.1. a)b = Cc( )bc( )a
2.2. a)‑(b = Na)b
2.3. a)(b = Na( )b
2.4. *a* = a/a′
2.5. A*ab* = Ka)ba′)b′
2.6. E*ab* = Aa( )b′a′( )b
2.7. I*ab* = Ka)(b′a′)(b
2.8. O*ab* = Aa)‑(ba′)‑(b′

3. Reglas de la deducción

3.1. *Reglas de la sustitución*:

(a) una variable proposicional puede ser sustituída por una proposición;

(b) una variable «a», «a′», «b», «b′», «m», «m′» o «c» puede ser sustituída por una variable «a», «a′», «b», «b′», «m», «m′» o «c»;

(c) una variable «*a*», «*b*» o «*m*» puede ser sustituída por una variable «*a*», «*b*» o «*m*».

3.2. *Regla de la sustitución por definición*:

Una expresión puede ser sustituída en una proposición por la expresión que la define y recíprocamente, sin sustituir las otras expresiones isomorfas de la proposición.

3.3. *Regla de la composición de leyes*:

Una proposición compuesta sucesivamente por «K» y por dos proposiciones isomorfas a dos leyes del sistema puede ser establecida como ley del sistema.

3.4. *Regla de la derivación*:

Si una proposición compuesta sucesivamente por «C» y por dos proposiciones es una ley del sistema, y si una proposición isomorfa a la primera de aquellas proposiciones es una ley del sistema, entonces una proposición isoforma a la segunda puede ser establecida como ley del sistema.

primitive nominal variables to one derived group *a*=a/a′, *b*=b/b′, etc. The relations that we consider between these new variable are: A*ab* (*a* includes *b*), E*ab* (*a* excludes *b*), I*ab* (*a* does not exclude *b*) and O*ab* (*a* does not include *b*), that correspond to the four categorical propositions of the classic logic. All new expressions are defined in function of the already known.

By using the two axioms Ca( )bb( )a and a′)(a, abstraction of a group of tautologies of the propositional calculus, we demonstrate by virtue of the rules of substitution, composition and derivation all laws of conversion and of the logical square, and the 24 syllogistical moods.

One important variant that given origin to a partial and reduced system consist of the suppression of the axiom a′)(a, whose role in the original system is to exclude from the propositions the «núll class». This class is represented in the system by the term a/a′ when a′( )a, that is to say, when a′ is incident with a. By this suppresión become invalids the same laws and syllogistical moods that in Bochenski's CS system become invalids too by suppression of the axiom I*aa* (to give place to the partial system NI). We demonstrate the logical equivalence between our oxiom a′)(a and Bochenski's axiom I*aa*.

The system, being purely formal, admits several interpretations or models, according to the interpretations that we may to give to the primitive expressions a( )b and a/a′. The two principal interpretations, the first one logic, the second one arithmetic, are as following: (1) a( )b means that a has a common predicate with b; a/a′ expresses the term that has at the same time the predicates of a and not a′. (2) a( )b means that a has a common divisor with b; a/a′ expresses tre fraction whose numerator is a and denominator a′. This double interpretation allows to demonstrate the logical laws directly starting out from the formalized system or starting out from the arithmetic, taking in consideration the stablished correlation numbers-logical terms. The correlation shows to be an amplification and development of the one divised by Leibniz in the last essays in April 1679; in this way are refuted Couturat's affirmation in «La Logique de Leibniz», related to a lack of essential aptitude of the intensional point of view for a complete and mathematically rigorous development of the formal logic.

4. Axiomas

4.1. *Axiomas asumidos de PK:*

4.101. Cpp
4.102. CKpqKqp
4.103. CNKpqANpNq
4.104. CANpNqNKpq
4.105. CKpCpqq
4.106. CKNqCpqNp
4.107. CKpNqNCpq
4.108. CKCpqCqrCpr
4.109. CCpqCCqrCpr
4.110. CCpqCNqNp
4.111. CCpNqCqNp
4.112. CCNpqCNqp
4.113. CCKpqrCpCqr
4.114. CCKpqrCKpNrNq
4.115. CCKpqrCKNrqNp
4.116. CCKpqrCCspCKsqr
4.117. CCKpqrCCsqCKpsr
4.118. CKCpqCrsCAprAsq
4.119. CKCpqCrsCKprKqs
4.120. CKCKpqrCKstvCKKpsKqtKrv
4.121. CKCKpqrCKstvCKKpsKtqKvr
4.122. CKCKpqrCKstvCKApsKqtArv
4.123. CKCKpqrCKstvCKApsKtqAvr
4.124. CKCKpqrCKstvCKKpsAtqAvr
4.125. CNKNpNqApq
4.126. CApqNKNpNq

4.2. *Axiomas específicos:*

4.21. Ca( )bb( )a
4.22. a′)(a

5. Deducción de las leyes fundamentales

4.101. p/c( )a × 2.1. b/a = 5.1.
5.1. a)a
4.110. p/a( )b, q/b( )a × 2.3. × 2.3. a/b, b/a = C4.21. – 5.2.
5.2. Cb)(aa)(b
4.108. p/c( )b, q/c( )m, r/c( )a × 2.1. × 2.1. a/m × 2.1. b/m = 5.3.
5.3. CKm)ba)ma)b
4.105. p/b( )m, q/b( )a × 2.1. b/m, c/b = 5.4.
5.4. CKb( )ma)mb( )a
4.106. p/a( )b, q/a( )m × 2.3. × 2.3. b/m × 2.1. a/m, c/a = 5.5.
5.5. CKa)(mm)ba)(b
4.107. p/m( )b, q/m( )a × 2.3. a/m, b/a × 2.1. c/m × 2.2. = 5.6.
5.6. CKm( )bm)(aa)b
4.114. p/b)m, q/a)b, r/a)m × 2.2. × 2.2. b/m = C5.3. m/b, b/m –
– 5.7.
5.7 CKb)ma) ma)b

6. Deducción de la conversión y del cuadrado lógico

6.1. *Conversión de la universal negativa y de la particular afirmativa:*

K4.21. b/b' 4.21 a/a' × 3.3. = (1)
(1) KCa( )b'b'( )aCa'( )bb( )a'
4.118. p/a( )b', q/b'( )a, r/a'( )b, s/b( )a' × 2.6. ×
× 2.6. a/b, a'/b', b/a, b'/a' = C(1)—6.11.

6.11. CE*ab*E*ba*
K5.2. b/a, a/b' 5.2. b/a', a/b × 3.3. = (2)
(2) KCa) (b'b') (aCa') (bb) (a'
4.119. p/a) (b', q/b') (a, r/a') (b, s/b) (a' × 2.7. ×
× 2.7. a/b, a'/b', b/a, b'/a' = C(2)—6.12.

6.12. CI*ab*I*ba*

6.2. *Oposiciones contradictorias:*

4.125. p/a( )b', q/a'( )b × 2.3. b/b' × 2.3. a/a' × 2.7 × 2.6. = 6.21.
6.21. CNI*ab*E*ab*
4.126. p/a( )b', q/a'( )b × 2.3. b/b' × 2.3. a/a' × 2.7. × 2.6. = 6.22.
6.22. CE*ab*NI*ab*
4.112. p/I*ab*, q/E*ab* = C6.21.—6.23.
6.23. CNE*ab*I*ab*
4.111. p/E*ab*, q/I*ab* = C6.22.—6.24.
6.24. CI*ab*NE*ab*
4.103. p/a)b, q/a')b' × 2.5. × 2.2. × 2.2. a/a', b/b' × 2.8. = 6.25.
6.25. CNA*ab*O*ab*
4.104. p/a)b, q/a')b' × 2.5. × 2.2. × 2.2. a/a', b/b' × 2.8. = 6.26.
6.26. CO*ab*NA*ab*
4.112. p/A*ab*, q/O*ab* = C6.25.—6.27.
6.27. CNO*ab*A*ab*
4.111. p/O*ab*, q/A*ab* = C6.26.—6.28.
6.28. CA*ab*NO*ab*

6.3. *Subalternación de la particular afirmativa por la universal afirmativa:*

4.113. p/a') (a, q/a)b, r/a') (b = C5.5 a/a', m/a—C4.22.—(1)
(1) Ca)ba') (b
K(1) (1) a/a', b/b', a'/a, b'/b × 3.3. = (2)
4.118. p/a)b, q/a') (b, r/a')b', s/a) (b' × 2.5. × 2.7. = C(2)—6.31.
6.31. CA*ab*I*ab*
4.110. p/A*ab*, q/I*ab* = C6.31.—6.32.
6.32. CNI*ab*NA*ab*

6.4. *Oposición contraria entre la universal afirmativa y la universal negativa:*

4.109. p/Aab, *q*/I*ab*, r/NE*ab* = C6.31.—C6.24.—6.41.
6.41. CA*ab*NE*ab*
4.111. p/A*ab*, q/E*ab* = C6.41.—6.42.
6.42. CE*ab*NA*ab*

6.5. *Subalternación de la particular negativa por la universal negativa:*

4.109. p/E*ab*, q/NA*ab*, r/O*ab* = C6.42 – C6.25 – 6.51

6.51. CE*ab*O*ab*

4.109. p/NO*ab*, q/A*ab*, r/NE*ab* = C6.27. – C.6.41. – 6.52.

6.52. CNO*ab*NE*ab*

6.6 *Oposición subcontraria entre la particular afirmativa y la particular negativa:*

4.109. p/NI*ab*, q/NA*ab*, r/O*ab* = C6.32. – C6.25. – 6.61.

6.61. CNI*ab*O*ab*

4.109. p/NO*ab*, q/A*ab*, r/I*ab* = C6.27. – C6.31. – 6.62.

6.62. CNO*ab*I*ab*

6.7. *Conversión «per accidens» de la universal afirmativa:*

4.109. p/A*ab*, q/I*ab*, r/I*ba* = C6.31. – C6.12. – 6.71.

6.71. CA*ab*I*ba*

6.8. *Conversión «per accidens» de la universal negativa:*

4.109. pE*ab*, q/E*ba*, r/O*ba* = C6.11 – C6.51 a/b, b/a – 6.81.

6.81. CE*ab*O*ba*

7. Deducción de los modos del silogismo

Primera figura

Barbara:

K5.3. 5.3. a/a′, b/b′, m/m′ × 3.3. = (1)
(1) KCKm)ba)ma)bCKm′)b′a′)m′a′)b′

4.120. p/m)b, q/a)m, r/a)b, s/m′)b′, t/a′)m′,
v/a′)b′ × 2.5. × 2.5. a/m, a′/m′ × 2.5. b/m,
b′/m′ = C(1) – 7.01.

7.01. CKA*mb*A*am*A*ab*

Celarent:

4.109. p/Kb′( )ma)m, q/b′( )a, r/a( )b′ = C5.4. b/b′ –
– C4.21. a/b′, b/a – (1)
(1) CKb′( )ma)ma( )b′

4.116. p/b′()m, q/a)m, r/a()b′, s/m()b′ = C(1) –
– C4.21. a/m, b/b′ – (2)
(2) CKm( )b′a)ma( )b′
K(2) (2) a/a′, b/b′, m/m′ × 3.3 = (3)
(3) KCKm( )b′a)ma( )b′CKm′( )ba′)m′a′( )b

4.122. p/m( )b′, q/a)m, r/a( )b′, s/m′( )b, t/a′)m′,
v/a′( )b × 2.6. × 2.6. a/m, a′/m′ × 2.5. b/m, b′/m′ =
= C(3) – 7.02.

7.02. CKE*mb*A*am*E*ab*

Darii:

4.102. p/m)b, q/a′) (m = (1)
(1) CKm)ba′) (mKa′) (mm)b

4.109. p/Km)ba') (m, q/Ka') (mm)b, r/a') (b=
=C(1)−C5.5. a/a'−(2)
(2) CKm)ba') (ma') (b
K(2) (2) a/a', b/b', m/m' × 3.3.=(3)
(3) KCKm)ba') (ma') (bCKm')b'a) (m'a) (b'
4.121. p/m)b, q/a') (m, r/a') (b, s/m')b', t/a) (m'
v/a) (b' × 2.7. × 2.5. a/m, a'/m' × 2.7. b/m, b'/m'=
=C(3)−7.03.
7.03. CKA*mb*I*am*I*ab*

Ferio:

4.117. p/m( )b', q/m) (a', r/a'⟩b', s/a') (m=
=C5.6. a/a', b/b'−C5.2. b/a', a/m−(1)
(1) CKm( )b'a') (ma'⟩b'
K(1) (1) m/m', a'/a, b'/b × 3.3.=(2)
(2) KCKm()b'a') (ma'⟩ b'CKm'( )ba) (m'a⟩b
4.123. p/m( )b', q/a') (m, r/a'⟩b', s/m'( )b,
t/a) (m', v/a⟩b × 2.8. × 2.6. a/m, a'/m' × 2.7.
b/m, b'/m'=C(2)−7.04.
7.04. CKE*mb*I*am*O*ab*

Segunda figura

Camestres:

4.102. p/b)m, q/a'( )m=(1)
(1) CKb)ma'( )mKa'( )mb)m
4.109. p/Kb)ma'( )m, q/Ka'( )mb)m, r/a'( )b=
=C(1)−C5.4. b/a', a/b−(2)
(2) CKb)ma'( )ma'( )b
K(2) (2) a'/a, b/b', m/m' × 3.3.=(3)
(3) KCKb)ma'( )ma'( )bCKb')m'a( )m'a( )b'
4.124. p/b)m, q/a'( )m, r/a'( )b, s/b')m', t/a( )m',
v/a()b' × 2.6.2.5. a/b, b/m, a'/b , b'/m' ×
× 2.5. b/m=C(2)−7.06
2.6. b/m, b'/m'=C(3)−7.05.
7.05. CKA*bm*E*am*E*ab*

Cesare:

4.109. p/Kb'( )ma)m, q/b'( )a, r/a( )b'=C5.4. b/b'−
−C4.21. a/b', b/a−(1)
(1) CKb'( )ma)ma( )b'
K(1) b'/b, a/a', m/m' (1) × 3.3.=(2)
(2) KCKb( )m'a')m'a'( )bCKb'( )ma)ma( )b'
4.123. p/b( )m', q/a')m', r/a'( )b, s/b'( )m, t/a)m,
× 2.5. b/m=C(2)−7,06
7.06. CKE*bm*A*am*E*ab*

Baroco:

K5.7. 5.7. a/a', b/b', m/m' × 3.3.=(1)
(1) KCKb)ma⟩ ma⟩bCKb') m'a'⟩ m'a'⟩b'
4.120. p/b)m, q/a⟩m, r/a⟩b, s/b')m', t/a'⟩m',
v/a'⟩b' × 2.8. × 2.5. a/b, a'/b', b/m, b'/m' ×
2.8. b/m, b'/m'=C(1)−7.07.
7.07. CKA*bm*O*am*O*ab*

Festino:

4.116. p/E*mb*, q/I*am*, r/O*ab*, s/E*bm*=C7.04–
–C6.11 a/b, b/m–7.08.

7.08. CKE*bm*I*am*O*ab*

Tercera figura

Darapti:

4.117. p/A*mb*, q/I*am*, r/I*ab*, s/A*ma*=C7.03.–
–C6.71. a/m, b/a–7.09.

7.09. CKA*mb*A*ma*I*ab*

Felapton:

4.117. p/E*mb*, q/I*am*, r/O*ab*, s/A*ma*=C7.04.–
–6.71. a/m, b/a–7.10.

7.10. CKE*mb*A*ma*O*ab*

Datisi:

4.117. p/A*mb*, q/I*am*, r/I*ab*, s/I*ma*=C7.03–
–C6.12 a/m, b/a–7.11.

7.11. CKA*mb*I*ma*I*ab*

Ferison:

4.117. p/E*mb*, q/I*am*, r/O*ab*, s/I*ma*=C7.04.–
–C6.12. a/m, b/a–7.12.

7.12. CKE*mb*I*ma*O*ab*

Disamis:

4.116. p/b′)(m, q/m)a, r/b′)(a, s/m)(b′=
=C5.5. a/b′, b/a–C5.2. b/b′, a/m–(1)
(1) CKm)(b′m)ab′)(a

4.109. p/Km)(b′m)a, q/b′)(a, r/a)(b′=C(1)–
–C5.2. b/b′–(2)
(2) CKm)(b′m)aa)(b′
K(2)(2) a/′, b′/b, m/m′ × 3.3.=(3)
(3) KCKm)(b′m)aa)(b′CKm′)(bm′)a′a′)(b

4.120. p/m)(b′, q/m)a, r/a)(b′, s/m′)(b, t/m′)a,
v/a′)(b × 2.7. × 2.7. a/m, a′/m′ × 2,5. a/m, a′/m′,
b/a, b′/a′=C(3)–7.13.

7.13. CKI*mb*A*ma*I*ab*

Bocardo:

4.115. p/a)b, q/m)a, r/m)b × 2.2. × 2.2. a/m=
=C5.3. m/a, a/m–(1)
(1) CKm)̵bm)aa)̵b
K(1)(1) a/a′, b/b′, m/m′ × 3.3.=(2)
(2) KCKm)̵bm)aa)̵bCKm′)̵b′m′)a′a′)̵b′

4.122. p/m)̵b, q/m)a, r/a)̵b, s/m′)̵b′, t/m′)a′,
v/a′)̵b′ × 2.8. × 2.8. a/m, a′/m′ × 2.5. a/m, a′/m′,
b/a, b′/a′=C(2)–7.14.

7.14. CKO*mb*A*ma*O*ab*

Cuarta figura

Bamalip:

4.116. p/I*mb*, q/A*ma*, r/I*ab*, s/A*bm*=C7.13.—
C6.71. a/b, b/m—7.15.

7.15. CKA*bm*A*ma*I*ab*

Calemes:

4.117. p/A*bm*, q/E*am*, r/E*ab*, s/E*ma*=C7.05—
—C6.11. a/m, b/a—7.16.

7.16. CKA*bm*E*ma*E*ab*

Fesapo:

4.116. p/E*mb*, q/A*ma*, r/O*ab*, s/E*bm*=C7.10.—
—C6.11. a/b, b/m—7.17.

7.17. CKE*bm*A*ma*O*ab*

Fresison:

4.116. p/E*mb*, q/I*ma*, r/O*ab*, s/E*bm*=C7.12.—
—C6.11. a/b, b/m—7.18.

7.18. CKE*bm*I*ma*O*ab*

Dimatis:

4.116. p/I*mb*, q/A*ma*, r/I*ab*, s/I*bm*=C7.13.—
—C6.12. a/b, b/m—7.19.

7.19. CKI*bm*A*ma*I*ab*

Modos subalternos

Barbari:

4.109. p/KA*mb*A*am*, q/A*ab*, r/I*ab*=C7.01.—
—C6.31,—7.20.

7.20 CKA*mb*A*am*I*ab*

Celaront:

4.109. p/KE*mb*A*am*, q/E*ab*, r/O*ab*=C7.02.—
—C6.51.—7.21.

7.21. CKE*mb*A*am*O*ab*

Camestrop:

4.109. p/KA*bm*E*am*, q/E*ab*, r/O*ab*=C7.05.—
—C6.51.—7.22.

7 .22. CKA*bm*E*am*O*ab*

Cesaro:

4.109. p/KE*bm*A*am*, q/E*ab*, r/O*ab*=C7.06.—
—C6.51.—7.23.

7.23. CKE*bm*A*am*O*ab*

Calemop:

4.109. p/KA*bm*E*ma*, q/E*ab*, r/O*ab*=C7.16.—
—C6.51.—7.24.

7.24. CKA*bm*E*ma*O*ab*