PASCAL Y LOS INDIVISIBLES

Javier de LORENZO

ABSTRACT

The pascalian use of *indivisibles* is here considered in the context of the theological and mathematical debates of the time, by distinguishing it clearly from this of Cavalieri. The combinatory and geometrical approaches are closely linked in Pascal's work. His use of indivisibles has a heuristic, inventive character and not only a demonstrative one. Ontologically speaking, it stems out from the acceptance of *actual infinite*. The use of the symmetry axiom of Archimedes is the basis of the pascalian use of the *infinitesimals*, which has, in other respects, some close connexions with the Leibnizian conception of *infinitesimals*.

Si toda historia está al servicio de cualquier enfoque del pasado que en cada instante de tiempo se realice, ha de verse condicionada tanto por previas investigaciones sobre ese pasado como por nuevos desarrollos en el campo del que se hace la historia; en este caso, en el hacer matemático. A. Robinson ha realizado una aportación metodológica al revisar la creación del Cálculo Infinitesimal a la luz del Análisis no-standard. Mostrando en la práctica su metodología, Robinson principió su revisión por Leibniz y la prosiguió, muy esquemáticamente, hasta Cauchy. Cabe la posibilidad de dar un paso más y observar el problema desde sus inicios. Es lo que pretendo bosquejar en lo que sigue tratando el problema en Pascal y, haciendo camino, puede observarse que algunos argumentos de Leibniz están expuestos, ya, en los escritos pascalianos. Advierto que sólo me detendré en las consideraciones de fundamentos y no en los resultados concretos o de contenido matemático puro -si es que el mismo puede darse-.

Si la historia ha de enfocarse como historia recurrente, con sus bucles de retroalimentación, las palabras del último párrafo implican más de un problema. Sin entrar en su discusión, parto del principio de que la historia de cualquier disciplina no puede desgajar, arbitrariamente, el núcleo de la "metafísica" que lo entorna; ni siquiera la Matemática. Y ello exige situar el hacer matemático en el contexto, en las redes tanto conceptuales como de creencias que, en cada momento, constituyen la

THEORIA - Segunda Época,
Año I (1985), N° 1, pp. 87-120.

burbuja conceptual a la que ese hacer pertenece. En el caso del siglo XVII, no hago referencia por modo exclusivo a la comunidad de matemáticos enlazados a través de Mersenne, tema ya muy estudiado, sino a un contexto mucho más general. Contexto que no puede silenciarse, por lo que dedico, en lo que sigue, unos párrafos para la exposición de algunos de sus temas y, con ello, situar coherentemente la obra de Pascal.

1. CONTEXTO GENERAL

1. Los nuevos modos de producción y de relación comercial obligan a la apertura de los burgos durante el Renacimiento; apertura que es simultánea a la creación de una visión nueva del espacio. Estudiada, manejada y plasmada en un primer momento, y fundamentalmente, por los artistas. Frente a la concepción bizantina del espacio de superposición y confección de las figuras en tamaño relativo según el orden simbólico de los personajes, surge la perspectiva artificial. Enfrentada a la natural, posibilita representar cuerpos tridimensionales en un plano en proporción y relación espacial adecuada. La perspectiva artificial exige, para su plasmación, de la geometría descriptiva, ciertamente, pero también de un modo nuevo de ver el espacio. Visión ayudada por el empleo de métodos como el enladrillado que supone el manejo de cuadrículas y ejes coordenados. Métodos que mostrarán toda su eficacia no sólo en pintura, sino en la cartografía. El enladrillado exige la aparición tanto del punto de fuga como de la línea de tierra y, básicamente, procesos de proyección y sección -ambos pueden verse, desde la praxis del pintor, en algunos grabados de Durero-.

Nuevo espacio, el perspectivo, que obliga a la creación de nuevos métodos para manejarlo y, lo que es más importante, nuevos conceptos y problemas. Así, la mencionada noción de punto de fuga y la de punto en el infinito, a la vez que la aparición de transformaciones mediante la proyección y sección conducen a que ya el mismo Alberti se pregunte por el tipo de propiedades que permanecen invariantes en tales transformaciones. Pregunta sin sentido en una visión espacial como la bizantina. A la vez, en ésta tenía la luz un sentido simbólico extremado: ahora, con las cámaras oscuras utilizadas por algunos pintores, con los problemas de la pirámide visual en la proyección, con el empleo del espejo para invertir el cuadro y estudiar así el grado de coherencia del mismo, con el paso de la luz a través de las lentes, la luz va a incidir en la problemática del espacio como rayo o trayectoria que puede, o no, deformarse. La luz manejada ahora a través de la Optica y la perspectiva dando paso a cuestiones en torno a trayectorias, deformaciones, ampliaciones de cuerpos y, con ello, de la propia visión ...

El paso a otro tipo de cosmovisión entraña, para aquellos que viven inmersos en el mismo, la aparición de multitud de problemas. Los agrupo, esquematizados, en los siguientes:

1.1. Internos a la Matemática. Planteamiento de una Geometría en la que no se trata de sólo figuras, sino que es el espacio como tal el que se vuelve objeto. En él, pueden realizarse transformaciones de una figura que involucran el espacio como total, preguntándose entonces por los invariantes del mismo. Esas transformaciones posibilitan cambiar, de modo continuo, unas figuras en otras. En Pintura la anamorfosis juega un gran papel en algunos pintores; en Música, las variaciones y los <u>ricercare</u> tanto en el canon como en la fuga permiten la investigación de cómo un tema puede ir variando sin cambiar la componente melódica. En el hacer matemático, estudiar cómo un objeto matemático puede ir transformándose en otro de modo continuo. Así, si un foco de una elipse se va alejando "hasta el infinito", dicha elipse se transforma en una parábola, mientras que si dicho foco aparece "por el otro lado del infinito", se ha convertido en una hipérbola ... Y el tema de la transformación de las cónicas se convierte en <u>leit-motiv</u> para Kepler, Desargues, Pascal ..., como el ejemplo más claro de este tipo de transformación continua, que va a llevar al manejo de la figura sin forma, como el triángulo característico en el que un arco de curva y un segmento de tangente van a coincidir, coincidencia cuando en el proceso de transformación dichas magnitudes, en el fondo, desaparecen. Figura sin forma que posibilita la curva general y no sólo las cónicas. Curva convertida en nuevo objeto de estudio y que, como tal, se enfocará desde dos perspectivas: como construída por el movimiento -enfoque mecánico- de un cuerpo, uno de cuyos puntos establece la figura: o como ya dada, en cuyo caso puede analizarse atendiendo a la situación de sus puntos -enfoque analítico o algebraico- y entonces podrá caracterizarse atendiendo a su expresión analítica. Por supuesto, esta división, tan nítida, la hago desde aquí, porque ambos enfoques, en muchos momentos, aparecen confundidos en los autores matemáticos del XVII.

Y si el principio de transformación continua se va a admitir, de modo implícito, como uno de los fundamentos del hacer matemático, la aparición del espacio como perspectivo conduce al manejo de nuevos métodos que, al igual que el principio, se quieren con validez absoluta, total. Así, si se razona sobre una figura, ésta se considera como general, no particular; si se hace referencia a un número éste es un número cualquiera. Cuando Descartes intenta plasmar el enfoque algebraico o analítico lo intenta como un modo de razonar absolutamente general que hace pasar del estudio del "problema" particular a un método que abarque todos los problemas del mismo tipo; de modo análogo, Desargues y Pascal, cuando plasman el enfoque sintético, insistirán en la generalidad de su procedimiento, incluso mayor que el cartesiano porque, con él, pueden desarrollar cientos de proposiciones... Con una advertencia, el objeto que se maneja, por ejemplo, la curva, no es la plasmación de una función, sino que es el objeto en sí, cosa que algunos historiadores no parecen tener en cuenta; y es esa curva la que se estudia, como dato primario, atendiendo a sus variables, a sus componentes, entre las cuales se dará, o no, una relación expresable en ecuación algebraica o trascendente. Curva-Variable, componente-Ecuación algebraica ..., nunca función.

1.2. Los matemáticos del XVII no pueden desprenderse -como he hecho yo, arbitrariamente, en el punto 1.1.- de otra serie de problemas que se entrecruzan con los anteriores. Problemas, básicamente, teológicos. La nueva visión espacial implica que un punto pueda ir hasta el infinito y regresar de ese infinito, por uno u otro lado. El espacio, por tanto, ha de ser no sólo ilimitado, sino infinito, y con infinitas componentes que puedan llegar a sumarse. Y aquí se choca con las concepciones religiosas. El único infinito posible, el infinito actual o categoremático, pertenece a un orden distinto, al de los atributos divinos y sólo puede quedar el infinito potencial, el que está compuesto de partes. Problema teológico que obliga a rechazar el infinito actual, pero en nombre de lo religioso, y serán argumentos teológicos los que empleen desde Descartes hasta Leibniz pasando por Pascal para discutir tal rechazo, y no argumentos de carácter matemático. Si tomo Leibniz, indicará, Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano, 1703: *"no hay número infinito, ni línea ni cualquier otra cantidad que sea infinita ... En rigor, el verdadero infinito sólo está en lo absoluto ..."* Y, más adelante: *"El au-*

téntico infinito no es una modificación, es lo absoluto. La idea de absoluto referida al espacio no es otra cosa que la inmensidad de Dios y, por tanto, de sus atributos. Pero se equivoca quien quiera imaginarse un todo infinito compuesto de partes; no hay tal, es una noción que implica contradicción, y esos todos infinitos, como sus opuestos infinitamente pequeños, no son usados más que en el cálculo de los geómetras, como en álgebra se usan las raíces imaginarias".

Problema teológico que no deja inmunes a los matemáticos porque, en realidad, ninguno es matemático en el sentido de especialización con el que se utiliza actualmente este término. Y el objetivo de Descartes es probar la existencia de Dios, metódicamente; y Pascal apostará mediante el cálculo de probabilidades por dicha existencia; y el mismo Newton terminará considerando el espacio como sensorium dei ... Y aunque empleen los métodos y conceptos matemáticos, todos andarán rondando la heterodoxia y más de uno verá sus obras incluídas en el Indice. El "matemático infiel" no es creación de Berkeley en su Analista: ya Savonarola había utilizado el término ...

1.3. Problema teológico que se enmaraña con otro de carácter epistemológico: Si el conocimiento procede o no de la sensación-percepción o de la razón; y, si de la razón, encontrada o no con la fe. En otras palabras, si los conceptos matemáticos proceden de las facultades sensoriales o de las intelectuales.

En este campo hay que tener presente el estatuto de los distintos tipos de números: todavía se discute si la unidad es o no número. Por supuesto los "imaginarios", que surgen de la resolución de ecuaciones, se rechazan, así, Descartes, así Leibniz, y no son más que meras ficciones. Los irracionales se enfocan como símbolos para representar las magnitudes geométricas y, aunque con ellos se alcanzan resultados que no se logran con los números "reales", no son verdaderos números porque en su representación decimal no se les puede aprehender con sólo un número finito de cifras -y es el argumento de Stifel de 1544-. Todavía Barrow los estima como símbolos cuya existencia depende de la magnitud geométrica. Y, sin embargo, tanto los irracionales como los imaginarios, como los negativos, se manejan y no hay otra opción: se imponen al propio matemático. Incluso se crean "números artificiales" como los logaritmos. Manejo obligado por el propio càlculo del cual proceden, aunque carezcan de cualquier correlato en lo geométrico, en lo perceptivo. Y si surgen del álgebra, de la resolución de ecuaciones, entonces a esta misma álgebra se la considerará no como auténtica ciencia que da conocimiento del mundo, sino como un método para descubrir y para conducir el razonamiento al manejar cantidades abstractas y desconocidas: el álgebra como arte de mecanización, incluso, de la matemática y del cálculo lógico, pero nunca en el mismo nivel que la mecánica o la geometría. Bien entendido, en cualquier caso, que son elementos que surgen del propio hacer matemático, sin correlato alguno con lo "real". Un hacer que también necesita justificación, y un Wallis sostendrá, en 1685, que los procesos del álgebra son tan legítimos como los geométricos, manifestando la pugna que durante todo el siglo se tendrá entre las relaciones de lo discreto y lo continuo, de los órdenes de magnitudes ...

No sólo en lo discreto, también en lo más seguro, en lo geométrico. Ya he mencionado el principio de continuidad en perspectiva. Es tema que, intentando arrebatárselo a los pintores, encuentra su formulación matemática en la obra de Desargues: su objetivo, estudiar las propiedades comunes a todas las secciones cónicas, consideradas conjuntamente y no separadas como en Apolonio; propiedades que, al depender de los métodos de proyección y sección, no pueden ser las métricas, sino las proyectivas. Su procedimiento implica dos puntos fundamentales: método global radicalmente intuitivo; pero, a la vez, contradictorio con el sentido común, con esa perspectiva visual radical: se está obligado a admitir, conceptualmente, lo que no se puede concebir o imaginar. Tomo unas afirmaciones de Desargues:

> *Si el vértice del rodillo está a distancia infinita el resultado es inimaginable, y el entendimiento es incapaz de comprender cómo pueden ser los sucesos que el razonamiento le hace concluir ...*

Desargues va más allá: asegura que la geometría no puede fundamentarse en la evidencia directa, en lo perceptivo. Y el entendimiento está obligado a admitir la existencia de rectas en el infinito y, a la vez, de rectas en la pequeñez y de tal manera que esas rectas tengan sus extremos opuestos unidos entre sí. Algo que ese entendimiento "se siente incapaz de comprender". Términos que su discípulo Pascal retomará y elevará a carácter de categoría conceptual y no sólo literaria en alguno de sus Pensamientos.

Desde lo numérico o discreto, desde lo geométrico, el matemático se ve obligado a "crear" nuevos objetos que nada tienen que ver con lo perceptivo, que no encuentran correlato alguno con la naturaleza. Y si el entendimiento no encuentra motivos para su admisión, el razonamiento le obligará a aceptarlos, aunque pueda discutir su estatuto ontológico. Aceptación ya realizada por Stevin y que culminará en Leibniz cuando establece el principio de continuidad, en la obra ya citada: *"el número en toda su generalidad, incluyendo al quebrado, al sordo, al trascendente y a todo lo que se pueda tomar entre dos números enteros, es proporcional a la línea"*. Aceptación que no siempre ocurre. Y cito a Berkeley, y no al Analista, sino Of infinites, recientemente publicado, escrito bajo la muy directa influencia de Locke:

> *Para mí está claro que no deberíamos hacer uso de ningún símbolo sin tener una idea que le corresponda, y no es menos claro que no tenemos la idea de una línea infinitamente pequeña; incluso lo que tenemos es la evidencia imposible de que nada de eso existe porque toda línea por mínima que sea es aún divisible en partes más pequeñas que ella misma; por lo que no podría existir tal cosa como una línea quavis data minor o infinitamente pequeña. (...) Los matemáticos piensan que hay líneas insensibles. Ellos hablan, las cortan desde todos los ángulos, las dividen al infinito. Nosotros, irlandeses, no podemos representarnos parecidas líneas.*

De lo que se trata, en el fondo, es de la creación de un espacio conceptual frente al simbólico de la fe, pero también frente al espacio perceptivo. Se trata de una escisión en campos o burbujas distintas que exigen principios constitutivos distintos y, además, procedimientos también distintos en cada campo. En ese campo conceptual es la razón discursiva la que predomina y no la imagen sensible ni la fe. Sin embargo, en ese campo propio de la razón se produce una escisión muy profunda: como los nuevos objetos no pueden manejarse atendiendo a los métodos perceptivos, incluso la geometría se pone en entredicho respecto a la intuición sensible, han de crearse nuevos procesos de manejo y, en principio, tales procesos carecen de fundamento alguno. Son aceptados no por fundamento alguno, sino porque dan resultado -aunque se remitan a los procesos de los clásicos, los de los antiguos como prueba de rigor, de exactitud-. La razón conceptual, así, se enfoca desde una vertiente radicalmente pragmática, utilitaria. Se la va a emplear porque, con ella, se lograrán resultados que, de otra forma, eran imposibles. Y la matemática se va a poner al servicio de la aprehensión de la naturaleza a través de la mecánica, la óptica y, sobre todo, para el dominio de esa naturaleza. Es lo que terminará haciendo Descartes, a quien la Matemática en sí llega a aburrir. La otra rama de la escisión continúa en el propio hacer matemático, en su interior: la razón pura, la matemática por la matemática y búsqueda de unos fundamentos de la misma. Una geometría proyectiva, estrictamente cualitativa, carecerá de aplicaciones; una teoría de números, tampoco las tendrá. Es una escisión que conlleva dos enfoques: desde el pragmático lo que va a importar es lo formal algebraico, analítico, que posibilita sumaciones y cálculos numéricos, métricos; desde el de la razón pura, lo que importa es lo cualitativo, lo geométrico puro o proyectivo. En cualquier caso, se pretenderá una libertad de la razón frente a lo perceptivo, frente a la fe. Es tema en el que insistirá Pascal con sus dos tipos de razón, al igual que Descartes ... y culminará en la arrogancia de Laplace indicando que no necesita, ya, de la hipótesis de Dios para establecer su sistema del mundo, pura creación mecánica de la razón conceptual.

La creación de un espacio conceptual, aun en sus dos enfoques, no sólo conduce a la dicotomía entre verdades de razón y verdades de hecho o entre juicios analíticos y sintéticos. Conduce a la relación entre el espacio conceptual matemático y el espacio de la naturaleza. Y Dios intervendrá, en un primer momento, para hacer que ese espacio de la naturaleza no sea más que una copia imperfecta del conceptual, o para codificar una armonía preestablecida ...

No voy seguir con otros problemas, así el antropológico. Sólo subrayar que todos ellos inciden en el hacer matemático o, con más precisión, que este hacer se encuentra en el corazón mismo de todos estos problemas, de los que sólo arbitrariamente puede desgajarse. Porque la gran obra de los matemáticos de la época, aun con sus dudas, con su falta de "rigor", su pragmatismo, se centra, precisamente, en la creación de un espacio conceptual que posibilitará la creación de la física experimental, entre otras disciplinas.

En cualquier caso, lo que me interesa destacar es que la nueva cosmovisión hace surgir una serie de problemas. Así, y por un lado, el estatuto ontológico y epistemológico del espacio; por otro, la aparición de métodos que posibiliten el manejo tanto de ese espacio como de los objetos en él contenidos. En otras palabras, se requieren tanto unos principios constitutivos como unos regulativos. Destacar, además, que tanto unos como otros no se dan de una vez por todas, sino que han de irse construyendo, paso a paso, con permanentes polémicas entre los creadores, con permanentes cambios de lectura, de interpretaciones entre los mismos. En este sentido, la nueva cosmovisión afecta a la minoría de cabezas pensantes que se dan cita en el XVII. A todos. Lo cual provoca, por supuesto, polémica en cuanto a prioridades, enfoqües, simpatías personales, pertenencia a escuela religiosa enfrentada a otra tendencia religiosa y a los usos del poder tanto desde Roma como desde cada uno de los centros de las nuevas nacionalidades europeas ... Es un momento de auténtica pulsión creadora tanto en el hacer matemático como en otros campos, que no siempre es de guante blanco.

2. CONTEXTO MATEMATICO

2. Pasando del contexto general al terreno del hacer matemático, cabe señalar que los problemas antes planteados desembocan en elementos como los siguientes:

2.1. Los matemáticos, cuando no se insultan entre sí polemizando, han de emplear un lenguaje base específico. Hoy el que se emplea es el vocabulario conjuntista. En el XVII, ese papel lo va a desempeñar el lenguaje geométrico. He indicado cómo hasta los irracionales se ven como símbolos de magnitudes geométricas. Hay que hacer constar que si el álgebra se adopta como método de descubrimiento, propedéutica en el sentir de Descartes para la propia lógica, su simbolismo se está desarrollando -y corresponde a Descartes, precisamente, la fijación de tal simbolismo-; aún más, lo que no se considera es el carácter abstracto de esa álgebra, la potencia de sus métodos. No puede servir, por tanto, de apoyatura. Esta se centra en el esquema geométrico, pero bien entendido que se razona sobre el esquema, no sobre la figura concreta. Incluso el propio Newton, que no empleará ecuaciones diferenciales en Principia Mathematica, razonará sobre la figura geométrica, al estilo euclídeo, para hallar las sumas y las sumas de las sumas correspondientes. Sólo encuentro dos excepciones: por un lado, en el terreno geométrico puro, la geometría proyectiva se trata como tema en sí, no en función de apoyatura para lo numérico. Por otro, y en lo numérico, la creación de nuevos modos de razonar que se quieren autónomos: así, el descenso de Fermat y, sobre todo, la inducción completa que Pascal va a manejar por vez primera, ligándolo de modo exclusivo a lo aritmético. Y digo inducción completa y no inducción simple.

La apoyatura en lo geométrico implica el paso de un razonamiento discreto a un razonamiento en el que entre en juego el continuo; quiero decir, al apoyarse en el esquema continuo, el matemático va a hacer entrar en sus razonamientos sobre lo discreto el infinito, aun cuando tal infinito lo considere sólo en su sentido potencial. Y ésta puede considerarse como una de las claves para el nacimiento del cálculo: la introducción de tal infinito, pero entreverado entre lo discreto y lo continuo.

2.2. Cubriendo el lenguaje geométrico, que sirve como apoyatura para el razonamiento, se pretende que éste sea absolutamente general, universal. La pretensión de todos los matemáticos en su trabajo se centra en la potencia de sus métodos y no sólo en el resultado obtenido, y son los métodos los que se pretenden contrastar. Frente a la universalidad querida por la geometría de Descartes, la algebraica o analítica, La Hire sostendrá en 1685 que la geometría proyectiva es más universal aún, por encerrar en tratamiento único a todas las cónicas y derivar de ella, de modo simple y fácil el teorema de Pappus, origen del trabajo cartesiano.

Junto a este deseo de universalidad se tiene la adopción de principios como los siguientes:

El de continuidad, que posibilita pasar de una figura, de una entidad matemática, a otra. Válido también para lo aritmético en el sentido de que, apoyándose en él, se puede pasar de lo infinitamente pequeño a lo infinitamente grande. En lo geométrico, he mencionado el tema de las cónicas y, en Pascal, tras su exagrama místico, teorema que hoy lleva su nombre, se puede pasar de las propiedades del exágono a las del pentágono y de las de éste a las de los cuadriláteros mediante la transformación continua que hace unir dos vértices consecutivos...

Ligado a la continuidad surge el concepto de transformación y, consecuentemente, el principio de invariancia. Con el de proyección y sección se centrará en lo geométrico puro, sintético, pero no por ello dejará de tener sus repercusiones en el hacer matemático general.

2.3. En el caso de las figuras geométricas, la escisión mencionada en cuanto al enfoque de tales figuras, especialmente en cuanto a las curvas. Dos eran los enfoques mencionados: el sintético -Kepler, Galileo, Roberval, Pascal, ...- desde el cual se las ve como compuestas de infinitos elementos, sean o no indivisibles; el analítico -Cavalieri, Descartes, Fermat, ...- desde el cual se trata de evitar el empleo de ese infinito y se enfocan las curvas como totalidades, objeto único aunque posea elementos constitutivos, pero en ningún caso estos elementos darán, por sumas, el total que constituye el objeto.

Dos enfoques que tienen su raíz en el diferente estatuto ontológico que se da a los últimos componentes de las figuras geométricas, de lo que, para distinguirlo de lo numérico o discreto, recibe el nombre de continuo. Diferente estatuto ontológico que conlleva distinto método para tratar los problemas involucrados. Métodos que, de modo ya clásico, se escinden en cuatro categorías básicas:

a. Exhaución -término de Saint-Gregory- o de los antiguos y que se estima modélico en el sentido de que lo que se pueda demostrar por cualquier otro procedimiento sólo alcanzará validez si puede comprobarse por el método de los antiguos. Exige de dos razonamientos por el absurdo y, básicamente, es comparativo entre algo que ya se conoce y aquello que se pretende lograr. Por este tipo de comparación se estima como método demostrativo por modo único y no inventivo.

b. Mecánico o de Roberval, en el que las curvas se adoptan como generadas o construídas por el movimiento de un punto de un sólido o cuerpo, considerando la tangente en un punto como la dirección del movimiento de ese punto, a la vez que tal movimiento es el resultado de dos componentes distintas que permiten utilizar la regla del paralelogramo.

c. De indeterminadas de Descartes-Fermat en el que se llegan a identificar puntos consecutivos en la curva.

d. De indivisibles.

Los tres primeros evitan, o al menos lo pretenden, el manejo del infinitamente pequeño. Concepto de infinitamente pequeño que origina una serie de problemas y paradojas: así, la posible confusión entre los distintos órdenes de magnitudes que llegaría a atentar, entre otros principios, contra la homogeneidad del espacio; así, el que siendo infinitamente pequeños puedan ser compuestos de manera que den magnitudes finitas; así, que en lo infinito, el todo pueda ser igual que alguna de sus partes ...

En cuanto al método de indivisibles se requieren unas precisiones. El término es de Cavalieri y, de modo tradicional, se interpreta en un sentido opuesto al querido por su autor, que trataba de la Geometría de los continuos y no de la geometría de los indivisibles. La idea de Kepler, apoyada en el principio de continuidad, de que una curva puede estimarse como compuesta de infinitas rectas infinitamente pequeñas, el área como la suma de rectángulos infinitamente pequeños e infinitamente numerosos ... es considerada como un ataque a la lógica dado que, de esta idea, parece desprenderse que una línea se compone de puntos, una superficie de líneas, un cuerpo de superficies ... lo que claramente atenta al principio de homogeneidad del espacio, salvo que se acepte la existencia de elementos infinitesimales para cada uno de los citados órdenes de magnitud. Frente a este concepción Cavalieri alza su método de los continuos correspondientes a cada orden de magnitud y que no son, nunca, infinitamente pequeños sino los elementos constitutivos de cada cuerpo según el orden inferior, lo que equivale a decir que indivisible de una superficie es una línea, la de una línea, el punto. Y tales indivisibles son los elementos constitutivos, no los componentes, de cada orden superior. Con esto último lo que quiero indicar es que Cavalieri no parte de los indivisibles para componer una figura, sino que parte de esa figura como ya dada y lo que pretende es analizarla, descomponerla pero en descomposición no prolongada al infinito. Como ha señalado Koyré, cuando Cavalieri habla de omnes lineae o de omnia plana de una figura geométrica, no considera en momento alguno la suma de todas las líneas o la suma de todos los planos, sumas que para él carecen de sentido. Lo que importa en Cavalieri son las figuras en sí para poder compararlas. Y esa comparación la realiza atendiendo a los elementos constitutivos de órdenes inferiores.

Realmente, el método de Cavalieri nada tiene que ver con lo discreto y, consecuentemente, con lo algebraico o sumatorio. El método de Cavalieri se centra en el principio de la equivalencia de una figura con el total de sus elementos constitutivos, lo que posibilita la comparación entre dos figuras atendiendo a la correspondencia biyectiva que pueda establecerse entre los elementos constitutivos. Correspondencia no directa, sino a través de la regula o directriz que va recorriendo los elementos correspondientes de las dos figuras. Y hay que subrayar lo de elementos correspondientes, como hace Cavalieri, porque la correspondencia no se realiza entre los elementos constitutivos sin más, sino entre los que guardan la misma posición en cada una de las figuras a comparar, de ahí el cuidado que ha de tenerse en el método de la regula communis para establecer tanto la directriz como la tangens opposita.

Desde lo ontológico, Cavalieri rechaza la existencia de los infinitamente pequeños; desde lo metódico, no emplea, para nada, los procedimientos de sumación, quedando en la comparación de proporcionalidades estrictamente geométricas.

Y, sin embargo, sus propios contemporáneos, y prácticamente todos los historiadores, le van a atribuir, precisamente, esos dos puntos. En cuanto a lo metódico, para Guldin, Tacquet, Roberval, ..., lo que quiere Cavalieri es componer líneas con puntos, superficies con líneas, cuerpos con planos ... En palabras de Tacquet de 1651:

> *Estimo que no es legítimo y conforme a la geometría admitir el método de demostración por los indivisibles o, como tengo por costumbre llamarlos, por los heterogéneos, que el célebre geómetra Buenaventura Cavalieri ha creado. Este método célebre pasa de las líneas a las superficies, de las superficies a los sólidos, y una igualdad o proporción encontrada para las líneas, da una conclusión aplicada a las superficies. Por esta forma de razonar no se llega absolutamente a nada seguro.*

En cuanto a lo ontológico, Leibniz va a tomar el término "indivisible" en el sentido de lo infinitamente pequeño, atribuyendo esta noción a Cavalieri que, de modo expreso, la rechaza.

Sin embargo, el término "indivisible" va a ser adoptado por Roberval -y no entro en las discusiones de prioridad respecto al método sostenidas con Cavalieri tanto por Roberval como por Pascal, y en las que también las palabras citadas de Tacquet hacían referencia y tomaban partido- y Pascal, aunque no en la línea de Cavalieri sino en la de Kepler. El enfoque supone invertir la concepción analítica de Cavalieri y considerar una figura como compuesta de elementos de carácter infinitesimal cuya suma da paso a una magnitud de carácter finito y prácticamente igual a la magnitud original. Es claro que es esta admisión la que supone enlazar lo discreto, reino de la cantidad finita, con lo continuo, reino de la magnitud infinita, a través de las sumas reiteradas, único proceso posible para la problemática que se plantea en cuanto a cuadratura de superficies, cálculo de centros de gravedad, rectificación de curvas ... de figuras cualesquiera y no de las clásicas pirámides, prismas, cilindros ... Sólo este enlace entre lo discreto y lo continuo, en el manejo de sumas con multitud "indefinida" o infinita de sumandos, permite superar el tratamiento estrictamente geométrico de Cavalieri, al igual que posibilita superar el tratamiento de los tres métodos que he citado. Y aunque el término "indivisible" esté utilizado tanto por los adictos a Cavalieri como por Pascal, los referenciales son totalmente distintos: uno es meramente comparativo geométrico, el otro es combinatorio-geométrico.

Pero también es claro que la admisión de estas magnitudes infinitesimales plantea los riesgos que Cavalieri quería sortear: así, el de los órdenes de magnitud, aparte de su estatuto ontológico. Pero, sobre todo, supone primar no ya la separación entre lo aritmético y lo geométrico, sino la autonomía de lo propio aritmético. Autonomía que culminará posteriormente en Wallis y, básicamente, en Leibniz que abandonan ya todo el soporte geométrico que ha posibilitado la unión con lo combinatorio y el papel decisivo de éste. A partir de Wallis y Leibniz, y de 1685 como mínimo, tomarán primacía los procesos estrictamente algorítmicos, sin el soporte geométrico. Primacía que todavía encuentra la enemiga de un Berkeley, por ejemplo, quien, contra Wallis, todavía sostendrá que

> *la aritmética o los números no son más que líneas o proporciones de líneas aplicadas a la geometría.*

3. AMOS DETTONVILLE O BLAS PASCAL

Estos últimos son algunos de los problemas en los que se centra Pascal, además de manejar los indivisibles con un estilo combinatorio-geométrico euclídeo sin parangón, o la geometría proyectiva o la combinatoria ... En lo que sigue trataré de la visión que de esos problemas tiene Pascal y, aunque de modo algo esquemático, podrá observarse la incidencia en el pensador francés de toda la problemática apuntada en los contextos antes citados.

Incidencia que, en Pascal, muestra una unidad casi total, porque en él no pueden escincirse más o menos arbitrariamente los problemas teológicos, epistemológicos o antropológicos de los "puramente" matemáticos. Todos son aspectos de una misma unidad, aunque esa unidad se muestra existencialmente escindida en facetas. Y una petición al lector: que excuse la brevedad, obligada. Con ella se distorsionan algunos elementos entre los que no puedo dejar de mencionar que cuando Pascal escribe, o más bien A. Dettonville, sus Tratados de la ruleta, donde expone y maneja su método de indivisibles, lo hace en reto y polémica tanto de prioridades como de conceptos y capacidad resolutiva de cualquier tipo de problemas. Y no se puede olvidar que al reto acuden jesuitas -Amos Dettonville es la anamorfosis de Lvis de Montalte-, y también Wallis quien solicita plazo más largo y envía intentos de solución ... y la respuesta de Pascal es, públicamente, muy dura y no sólo por mostrar que tanto los resultados como los métodos de Wallis son erróneos, sino por el tono francés antibritánico que rezuma en su respuesta. Los nacionalismos ... Y si los jesuitas no perdonan, tampoco Wallis ni los restantes matemáticos de las Islas. Muchas otras distorsiones tendrán que aparecer. Es el precio de todo intento de aprehensión que se plasma en lo discursivo ...

3. La Geometría y el espacio. Ligándose al nuevo enfoque, a la nueva cosmovisión, Pascal pretende, en algún momento, exponer el objeto de la Geometría. Algo que, para la época, suponía novedad ya que se admitía, de modo implícito, que la Geometría era la ciencia de la extensión, una parte de la matemática que era la ciencia que trataba de la extensión, el número, el movimiento, el tiempo, ..., es decir, de aquellas magnitudes que aumentaban o disminuían al agregar o restar, respectivamente, magnitudes del mismo orden. Influído por sus trabajos en geometría proyectiva, donde tales magnitudes quedaban marginadas, y por lo tanto, frente a esta admisión, Pascal pretende una clarificación conceptual ligando la Geometría al espacio. Hay que tener presente que el término spatium se empleaba con los significados de intervalo de distancias, áreas, tiempos ... mientras que en geometría, como ciencia de la extensión, se hablaba de sólidos o, desde los cartesianos, de cuerpos, que po-

dían ocupar un lugar. Problema de espacio ligado al teológico por las acepciones de la existencia real o no de ese espacio y si en él puede o no fundarse la verdad eterna de la geometría; y digo problema teológico porque es punto en el que se termina introduciendo, claramente, a Dios. Por supuesto ello enlaza con el problema epistemológico de si tal espacio es percibido o aprehendido sólo conceptualmente y si cabe concebir espacios de más de cuatro dimensiones, lo que afirma reiteradamente Pascal, aunque lo admita en aceptación racional, no perceptiva.

En su praxis educacional, Pascal busca una reforma educativa y, como texto escolar, compone Introducción a la Geometría. Como de tantos de sus papeles sólo ha quedado un fragmento de este texto, el copiado por Leibniz. Lo reproduzco, porque es el primer texto en el que se admite que el objeto de la geometría no es ya el tratar con los sólidos, sino el espacio en su totalidad, pero un espacio conceptual. Por supuesto, marca su influencia en Leibniz, en Nuevos elementos de Geometría de Arnauld, 1667 y 1683.

> *Principio 1. El objeto de la geometría pura es el espacio, en el que se considera la triple extensión en tres sentidos diversos que se llaman dimensiones, las cuales se distinguen por los nombres de longitud, anchura y profundidad, dando indiferentemente cada uno de estos nombres a cada una de estas dimensiones, siempre que no se dé el mismo a dos a la vez. Ello supone que todos estos términos sean conocidos por sí mismos.*
>
> *Principio 2. El espacio es infinito según todas las dimensiones.*
>
> *Principio 3. e inmóvil en todas y cada una de sus partes.*

La definición de cuerpo geométrico, así como los principios 4 a 6 no los copia Leibniz. Al ser el término "cuerpo" más propio del lenguaje cartesiano, es posible una extrapolación de Leibniz. En cualquier caso, queda en el aire la concepción pascaliana.

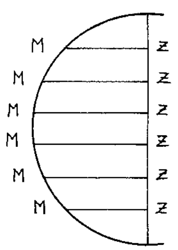
> *Principio 7. Los puntos no difieren más que por la posición.*
>
> *Principio 8. Las líneas por la situación, magnitud, dirección y forma, las rectas por el camino más corto.*
>
> *Principio 9. La distancia de dos puntos es la línea recta.*
>
> *Principio 10. Las superficies pueden diferir por situación, longitud, anchura, contenido, dirección.*

4. Los indivisibles. En ese espacio, para cuadrar cualquier tipo de curvas, y no sólo las cónicas, hallar sus centros de gravedad o rectificar las mismas, Pascal va a hacer uso del 'auténtico' método de indivisibles.

Por lo pronto, sea la magnitud irregular o no, el primer proceso geométrico consiste en sustituírla por porciones 'regulares'; en otras palabras, se sustituyen las porciones de la curva por sus cuerdas o arcos, las de la trilínea por los rectángulos construídos sobre porciones iguales sobre su eje y las ordenadas, las de los sólidos por ingletes ... Sustitución que viene avalada por la continuidad y la 'multitud indefinida' de tales porciones que hacen que "*la suma de las porciones sustituídas no difiere de la suma de las verdaderas más que en una cantidad menor que cualquiera dada*".

Y en ello se encuentra la posibilidad del empleo de los indivisibles. Que, en método, consiste básicamente en dos partes: Una geométrica; la otra aritmética o combinatoria.

4.1. La geometría la enfoca Pascal como un lenguaje. Afirma describiendo el paso geométrico



no tendré dificultad alguna en lo que sigue de usar el lenguaje de indivisibles, la suma de las líneas, o la suma de los planos; y así cuando considere por ejemplo (ver fig.) el diámetro de un semicírculo dividido en un número indefinido de partes iguales en los puntos Z, de donde se llevan las ordenadas ZM, no tendré dificultad alguna en usar de esta expresión la suma de ordenadas, que parece no ser geométrica a quienes no entienden la doctrina de los indivisibles, y que se imaginan que es pecar contra la geometría expresar un plano por un número indefinido de líneas; lo que no viene más que de su falta de inteligencia, ya que no se entiende por ello sino la suma de un número indefinido de rectángulos hechos de cada ordenada con cada una de las pequeñas porciones iguales del diámetro, cuya suma es ciertamente un plano, que no difiere del espacio del semicírculo más que en una cantidad menor que cualquiera dada.

De modo análogo podrá hablarse de la suma de los senos, que se diferencian de las ordenadas en que nacen de las divisiones iguales de la curva mientras que las ordenadas nacen de los ejes o base. Igualmente, el lenguaje de indivisibles posibilita mencionar la suma de los cuadrados de los arcos, de los cuadrados de los senos o de las ordenadas, y así sucesivamente.

Bien entendido, en todos los casos, que "*me serviré frecuentemente de esta expresión, una multitud indefinida, o un número indefinido de magnitudes, o de partes, etc., por lo que no entiendo sino una multitud o un número mayor que cualquier número dado*".

Y Pascal lo ha ejemplificado señalando que al realizar una partición bien en el eje, bien en el arco, puede reiterarse la misma tomando el punto medio entre cada dos senos o dos ordenadas por lo que se obtiene otra partición y, mediante su suma, se alcanza un error menor que el anterior, por lo que puede obtenerse, siempre, un error menor que cualquier número previamente dado con respecto al valor verdadero.

Desde lo geométrico, creo que aparece bien clara la diferencia respecto al procedimiento de Cavalieri. Superficialmente parece emplear el mismo lenguaje, pero sólo superficialmente. Cavalieri no habla de la 'suma de las líneas' sino de 'todas las líneas', etc. En Pascal la división de las particiones supone, siempre, la posibilidad de reiteración, que es lo contenido en esa 'multitud de partes', pero siempre para obtener nuevas sumas. Además, Pascal exige que esas particiones sobre el eje o sobre el arco sean de la misma longitud, lo que en el caso de Cavalieri no ocurre porque la regula va a pasar, en su proceso fluente, por todas las líneas o los planos ...; no le hace falta equidistancia alguna, exigencia esencial en el proceso sumatorio pascaliano como después señalaré.

4.2. Realizada la descomposición geométrica, todo el problema se centra en el cálculo de esos rectángulos o de los ingletes en el caso de los volúmenes. En otras palabras, en el paso de lo continuo a lo discreto, y vuelta. A este paso ha dedicado Pascal un breve ensayo: Potestatum numericarum summa. En él plantea una cuestión de carácter estrictamente técnico, numérico: Calcular la suma de las potencias de grado cualquiera de la sucesión de los números naturales empezando por la unidad o por cualquier otro número y, generalizando, la suma de las potencias de cualquier progresión dada. "*Cosa notable, un método único y general bastará para tratar todos estos casos diferentes*". Y Pascal va obteniendo dichas sumas. Por dos ejemplos:

$$S_1 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$S_2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

Tras resolver esta cuestión numérica pasa en la Conclusión al enlace con lo continuo a través de los indivisibles, ya que "*estos resultados permitirán cuadrar inmediatamente todos los géneros de parábolas y una infinidad de otras curvas*". Pascal, aquí, se limita a las curvas de ecuación $y = x^n$. Y las reglas de este paso, a través del método de indivisibles, se centran en las siguientes:

Reglas relativas a la progresión natural que comienza por la unidad:

La suma de un cierto número de líneas es al cuadrado de la mayor como 1 es a 2.

La suma de los cuadrados de las mismas líneas es al cubo de la mayor como 1 es a 3.

La suma de sus cubos es a la cuarta potencia de la mayor como 1 es a 4.

Regla general relativa a la progresión natural que comienza por la unidad:

La suma de las mismas potencias de un cierto número de líneas es a la potencia de grado inmediatamente superior de la mayor de entre ellas, como la unidad es al exponente de esta misma potencia.

En los ejemplos anteriores se tendría, al pasar de la magnitud discreta a la continua:

$$\frac{S_1}{n^3} = \frac{1}{3} \qquad \frac{S_2}{n^4} = \frac{1}{4}$$

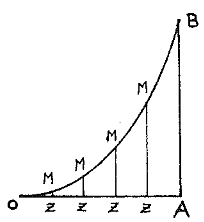
mientras que la regla general establece

$$\frac{S}{a^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

que, en cualquier historia de la matemática al uso se interpreta en lenguaje actual de integrales como

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

En el caso más simple, puede indicarse el primer procedimiento de indivisibles con el ejemplo siguiente, que en las historias se quiere como el único de dicho proceso:



Sea la trilínea OAB que corresponde a la cúbica, es decir, a la curva cuya expresión algebraica sea $y = x^3$. Se divide el eje OA por una multitud indefinida de ordenadas equidistantes ZM. La razón de la trilínea OAB al rectángulo AB en OA viene dada por

$$\frac{S}{OA.OB} = \frac{1^3 + \ldots + n^3}{OA.OB} = \frac{\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}}{n.n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

pero la tercera regla especifica que esta relación o proporción es, únicamente, $\frac{1}{4}$. Es decir que han desaparecido, aquí, los sumandos $\frac{1}{2n}$ y $\frac{1}{4n^2}$, se han desvanecido. Y ello porque Pascal establece la propiedad siguiente como propiedad básica de los indivisibles:

> *No se aumenta una magnitud continua cuando se le agrega, en el número que se quiera, magnitudes de un orden inferior (...) de suerte que se pueden despreciar, como nulas, las cantidades de orden inferior.*

4.3. Es un principio aceptable, en general, pero Pascal no indica cómo realizar su aplicación, al menos, en el ejemplo anterior. Sólo en los Tratados de la ruleta aclarará tal principio. Y ello porque en este Tratado pretende exponer el método y no dar los resultados por modo exclusivo. Y el método pascaliano no es sólo el de los indivisibles como hasta aquí se ha expuesto. Va más allá. Porque lo liga con los distintos órdenes de magnitud y éstos con lo geométrico y serán el punto, la recta, la superficie, el sólido, el plano-plano -o figura en un espacio de cuatro dimensiones-, y así sucesivamente. Estos órdenes viene justificados desde lo discreto y lo combinatorio a través de las sumas ordinarias, triangulares, piramidales ... Las primeras engendran un plano, las segundas una superficie, las piramidales, sólidos ... Y así, en una de las Advertencias en la Historia de la ruleta, se leerá:

> *Porque siendo estos cuadrados 1, 4, 9, etc., se sigue que la suma de las ordenadas, multiplicadas cada una por cada uno de estos cuadrados, es lo mismo que su suma piramidal tomada dos veces, menos su suma triangular tomada una vez. Ahora bien esta suma triangular no es más que un indivisible respecto a las sumas piramidales, ya que tiene una dimensión menos, y es lo mismo que un punto respecto a una línea, o una línea respecto a un plano, o un plano respecto a un sólido, o en fin que un finito respecto al infinito; lo que no cambia la igualdad.*
>
> *Porque es preciso notar que, como la simple suma de estas líneas hace un plano, así su suma triangular hace un sólido, que está compuesto de tantos planos como divisiones haya en el eje; tales planos están formados cada uno por las simples sumas particulares (de las ordenadas) cuya suma total hace la suma triangular. (...) Igualmente, la suma piramidal de las mismas ordenadas hace un plano-plano, compuesto de tantos sólidos como porciones haya en el eje, cuyos sólidos están formados cada uno por las sumas triangulares particulares, cuya suma total hace la suma piramidal...*

Se trata, desde lo geométrico, de una diferencia de homogeneidad espacial y una recta nada agrega a un plano; o un plano a un sólido, etc. En cuanto a lo combinatorio Pascal ha partido de un método heurístico que es geométrico y combinatorio a la vez: el de la balanza. Se divide una 'balanza' A, B, C ... en partes iguales y desde cada uno de los puntos de la división se toman unos pesos. Suponiendo que la balanza está en equilibrio ello implica que la suma triangular de los pesos que soporta un brazo sea igual a la suma triangular de los pesos que soporta el otro brazo. Y la suma triangular de unas cantidades, a empezar por una de ellas, A, por ejemplo, viene dada por

A B C D
B C D
C D
D

que, en lenguaje combinatorio no es más que

$$1A + 2B + 3C + 4D + \ldots$$

Si se van tomando ahora las sumas triangulares de todas las cantidades, más la suma de todas excepto la primera, más la de todas excepto las dos primeras, etc., lo que se obtiene es la suma piramidal,

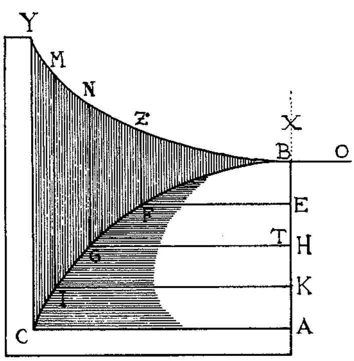
A B C D
B C D
C D
D
———
B C D
C D
D
———
C D
D
———
D

en la cual se observa la expresión

$$1A + 3B + 6C + 10D + \ldots$$

Como señalará Pascal: en las magnitudes triangulares la primera se toma una vez, la segunda dos, la tercera tres ... según el orden de los números naturales. En las piramidales, la primera se toma una vez, la segunda tres, la tercera 6, la cuarta diez, es decir, se toma según el orden de los números triangulares. Y la relación que enlaza la suma piramidal y la triangular viene dada por: Todo número triangular, tomado dos veces y disminuído de su exponente, es igual al cuadrado de su exponente. Pero entonces, si hay tantas cantidades como se quiera y tales que la primera venga multiplicada por 1, la segunda por el cuadrado de 2, la tercera por el cuadrado de 3, etc., su suma será igual a dos veces su suma piramidal menos su suma triangular. Expresión combinatoria, pero que Pascal la aplicará de modo inmediato a lo continuo, como he citado antes.

Una advertencia al lector: Observe las figuras que forman las sumas triangulares y las piramidales: las primeras son planos o trilíneas discretas; en las segundas debe superponer cada capa triangular sobre la anterior para obtener una pirámide discreta, recta en D. Si lo pasa a lo continuo, observará en una figura como la adjunta que la trilínea BCA



es un plano; pero si va superponiendo las sumas triangulares de origen CA, obtendrá una 'pirámide' -recordar lo antes dicho respecto a las figuras 'irregulares'-. En esta pirámide, cada plano IK es un indivisible, evidentemente, respecto al sólido total; pero como viene dado, en lo combinatorio, por una suma triangular, ésta es la que se muestra como indivisible respecto a la suma piramidal, por lo que se le puede hacer desvanecer sin más. Y aquí no hay comparación, como en el ejemplo simple que antes mostré.

Todo el arte matemático de Pascal se va a centrar en la búsqueda de un eje, sea en la base o en la curva, que haga el papel de balanza. Dividirlo en partes iguales y, en cada punto, buscar las sumas ordinarias, las triangulares, piramidales ... o las de sus cuadrados o cubos ... y relacionarlas entre sí. Esto último en el sentido de buscar las equivalencias entre las sumas cuyo eje es el de ordenadas, por ejemplo, o el que soporta la curva, con lo cual obtendrá tanto la rectificación y centro de gravedad de la cicloide como procesos que hoy se califican de integración doble, cambios de variable, integración por partes, etc. Con ello no sólo hará la comparación de una trilínea con el rectángulo que la contiene, sino que buscará las sumas de los distintos órdenes de modo directo, mediante los distintos 'pesos' que pueda atribuir a cada punto de la balanza. No hay, por ello, comparación como en Cavalieri, como proceso único, sino comparación más búsqueda combinatoria directa, mediante una mezcla entre la intuición geométrica y los procesos puramente combinatorios. Que es a lo que hace referencia Leibniz cuando en carta a Jacques Bernouilli de 1703 comenta: " *Miraba con gusto aquellas sumas y las* *sumas de aquellas sumas, los sólidos que de ellas nacían y sus demostraciones ..."*

Insisto en el hecho: Observar el papel que, en el pensamiento de Pascal tiene lo geométrico y lo combinatorio en mezcla radical. Y el paso de una pirámide combinatoria a una pirámide continua mediante una multitud indefinida de planos triangulares, y recíprocamente. Multitud indefinida que entraña tanto el infinito en grandeza como el infinito en pequeñez, porque se puede ir desde la figura continua hasta sus indivisibles, como desde éstos hasta la figura total.

En esa mezcla se encuentra toda la grandeza de Pascal como matemático en cuanto al Cálculo, pero también las limitaciones de éste. Sólo desprenderse de las consideraciones geométricas posibilitará un desarrollo autónomo, algorítmico, de ese Cálculo. Y sólo un matemático no condicionado por la visión geométrica como lo estaba Pascal podía realizar tal paso.

5. Justificaciones. Pascal justifica el empleo del lenguaje de indivisibles en dos vertientes. Por un lado:

> *todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos; y así, uno de los métodos no difiere del otro más que en la manera de hablar.*

Y ello porque Pascal es consciente de que no maneja sólo el lenguaje de indivisibles como lo interpretan sus coetáneos, sino que ha ido más allá mediante un procedimiento de carácter heurístico. Reconoce que su manera de demostrar no es común. Y tiene que justificarla mediante esa llamada, clásica en su tiempo, al método de los antiguos, al método no sólo euclídeo, en cuanto al estilo geométrico expositivo de postulados, definiciones, proposiciones y demostraciones, sino en cuanto al procedimiento de exhaución o agotamiento. Es claro que, una vez realizada esta advertencia, Pascal ya no considera oportuno realizar las demostraciones al modo antiguo. Podría hacerse, pero ...

Por otro lado, el procedimiento apoyado no sólo en los indivisibles, sino en la balanza, es un procedimiento heurístico, apto para la invención y no sólo para la demostración. Mezclado con lo combinatorio permite alcanzar nuevas verdades matemáticas. Constituye un método, por tanto, inventivo y no sólo demostrativo. Y, como tal, debe darlo a conocer y es el objetivo de la Carta de Dettonville a Carcavi, para que otros se beneficien y puedan, a su vez, inventar, crear nuevas proposiciones. En este caso concreto, que consigan cuadrar o rectificar o calcular el centro de gravedad de curvas cualesquiera y no sólo de la ruleta como había concretado en el desafío.

6. Fundamentos: Los principios regulativos; ordenes de magnitud; estatuto ontológico de los indivisibles. Hasta aquí he intentado describir el método de indivisibles pascaliano así como la justificación que de dicho lenguaje realiza. Pero Pascal va más allá. Pretende no sólo justificar dicho lenguaje, sino que lo estima fundamentado, apoyado en unos principios regulativos básicos. Principios regulativos que se condensan en los tres siguientes:

1. Una línea curva se considera como compuesta por un número indefinido de segmentos rectilíneos; una superficie o trilínea, por un número indefinido de rectángulos ... Pero sólo en cuanto elementos del espacio geométrico, conceptual.

2. Dos magnitudes continuas son iguales aunque difieran en magnitudes de orden inferior.

3. Las leyes que rigen las cantidades finitas o discretas, lo numérico, son las mismas que las que rigen las magnitudes continuas. Estas están formadas tanto por lo discreto como por lo continuo.

Ahora bien, estos tres principios se apoyan, a su vez, en algo más profundo. Cuando en Potestatum numericarum summa señala que una magnitud continua no varía al agregársele magnitudes de orden inferior, en el número que se quiera -y que es otra formulación del principio 2- Pascal agrega una advertencia que estimo fundamental, la de que ese principio es la manifestación del

> *enlace, siempre admirable, que la naturaleza, enamorada de unidad, establece entre las cosas más alejadas en apariencia.*

Precisamente este enlace es el que fundamenta los principios 2 y 3 anteriores.

Es creencia sobre la que Pascal insistirá. En De l'esprit géométrique, cuando considera cuatro tipos de magnitudes: espacio, tiempo, movimiento, número como propias del hacer matemático, señala:

> *cualquier movimiento, cualquier número, cualquier espacio, cualquier tiempo que se tenga, hay siempre un mayor y un menor: de forma que se sostienen todos entre la nada y el*

> *infinito, estando siempre infinitamente alejados de esos extremos.*

Y esos extremos se encuentran, en su lejanía, enlazados por el deseo de unidad de la naturaleza. Deseo de unidad que se manifiesta, entre otros, en el principio de continuidad y, sobre todo, en la existencia de propiedades comunes a todas las cosas

> *cuyo conocimiento abre el espíritu a las más grandes maravillas de la naturaleza. La principal comprende las dos infinidades que se encuentran en todo: la una, de grandeza; la otra, de pequeñez.*

Y Pascal concluirá con el enfoque antropológico, después de señalar que sólo es geómetra quien maneje esas dos infinidades pero que, a la vez, se puede ser 'hábil hombre y mal geómetra':

> *Pero aquellos que ven claramente estas verdades podrán admirar la grandeza y la potencia de la naturaleza en esta doble infinidad que nos entorna, y aprender por esta consideración maravillosa a conocerse a sí mismos, considerándose situados entre una infinidad y una nada de extensión, entre un infinito y un nada de número, entre una infinidad y una nada de movimiento, entre un infinito y una nada de tiempo. Por lo cual se puede aprender a estimarse en su justo precio, y formar reflexiones que valen más que todo el resto de la geometría.*

Por supuesto, para un historiador de la matemática al uso, para quien separa la escoria o metafísica o creencias de las 'auténticas' matemáticas, las palabras anteriores no indican más que un difuso principio metafísico-filosófico que debe quedar marginado. El enlace entre lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande cabe justificarlo por lo geométrico, por el papel de la transformación continua que hace pasar de una elipse a una parábola; mera justificación literaria. Entre otros, Morris Kline.

Pascal no sólo hace literatura -y muy buena, por cierto-. Pascal precisamente lo que pretende es fundamentar lo que los historiadores consideran que fundamenta. En De l'esprit géométrique, tras señalar el papel que tiene la abstracción y el hecho de que al hablar de un número no se hable de uno concreto, sino del número general, del número cualquiera, pasa a establecer el tipo de órdenes entre los objetos matemáticos, los distintos niveles existentes entre las magnitudes. Y lo realiza atendiendo a la homogeneidad o no de las magnitudes que se consideren. Pascal reclama la autoridad clásica para esta clasificación. Indicará que ya la misma quedó establecida en Euclides cuando escribió: "*Las magnitudes* -dice- *son llamadas del mismo género, cuando la una estando multiplicada varias veces puede llegar a sobrepasar a la otra*". Inmediatamente saca la consecuencia, frente al mismo Euclides, de que la unidad también es un número porque "*estando multiplicando varias veces*" puede sobrepasar a cualquier número; o también

$$\forall n, \exists m, \quad 1 + 1 + \ldots + 1 = n < m$$

Pascal continúa ligándose ahora al concepto de indivisible respecto a una extensión. No sólo difiere en cuanto al carácter nominal del término, sino en cuanto al género. Ya que

> *un indivisible multiplicado tantas veces como se quiera, está tan alejado de poder sobrepasar una extensión, que no puede formar jamás más que un solo y único indivisible.*

Son términos que requieren unas precisiones mínimas y, para ello, la formalización se muestra imprescindible -para todo lo que sigue, Gardies, 1981-. Por lo pronto, la cita realizada de Euclides no es otra cosa que el Axioma de Arquímedes. En las ediciones de la época era la Definición 5 del Libro V; en las ediciones actuales es la Definición 4 del mismo Libro. Esta Definición, según la edición francesa de 1632, establecía:

> *las magnitudes se dicen tener razón una a la otra, cuando estando multiplicadas pueden excederse una a la otra.*

El axioma de Arquímedes puede simbolizarse

$$\forall x, \forall y \ (x < y \Rightarrow m \ (m \in N \wedge mx > y))$$

Para los indivisibles no rige, según Pascal, este principio, sino el siguiente

$$\forall x, \forall y \ (x < y \Rightarrow m \ (m \quad N \wedge mx < y))$$

Y Pascal va a indicar que es el que sustenta a los indivisibles. Con él es claro el anterior Principio 2 regulativo, en la formulación de que una magnitud continua no varía si se le agregan o sustraen magnitudes de orden inferior en número cualquiera. Recuérdese el ejemplo dado en 4.2. Allí se desvanecían $\frac{1}{2n}$ y $\frac{1}{4n^2}$. Y ello porque, para $\frac{1}{2n}$, se puede escribir $x = \frac{1}{2}$ y para todo $\underline{y}$ mayor que $\frac{1}{2}$, existe siempre un $\underline{n}$ tal que

$\frac{1}{2n}$ sigue siendo menor que $\underline{y}$. De aquí que estas cantidades que se desvanecen, lo hacen porque son de orden de magnitud inferior, son heterogéneas respecto a la extensión dada por la trilínea. De modo análogo puede realizarse en el caso citado respecto a las sumas triangulares en comparación con las piramidales, y no sólo en cuanto a la interpretación geométrica de las mismas, sino en cuanto a la expresión numérica correspondiente.

Mientras que el segundo axioma condiciona el manejo de magnitudes heterogéneas, y con ellas los indivisibles, el de Arquímedes es el que posibilita alcanzar el infinito en grandeza, es decir, la prolongación de cualquier magnitud mediante la reiteración aditiva. Así, estos dos axiomas son los que regulan el paso hasta lo infinitamente grande -axioma de Arquímedes- y el paso a lo infinitamente pequeño -axioma simétrico de Arquímedes-. El primero regula lo discreto; el segundo, lo continuo.

No sólo son los principios que establecen las dos infinitudes sino que, para Pascal, permiten establecer los distintos órdenes de magnitud. Y ello frente a la concepción de la época, hasta el extremo de que posteriormente Arnauld invertirá nuevamente el pensamiento pascaliano. Para Pascal serán magnitudes del mismo orden u homogéneas aquellas que satisfagan el Axioma de Arquímedes; de distinto orden o heterogéneas, las que satisfagan el 'simétrico' de dicho Axioma. Pascal adopta estos dos axiomas como caracterizadores de las distintas magnitudes en lugar de estimar que éstas ya vienen dadas y entonces buscar alguna nota caracterizadora.

Y como la naturaleza se encuentra ansiosa de unidad, resulta que estos dos principios también regularán los distintos órdenes en cualesquiera otros campos. Pascal unifica terrenos como los teológico y antropológico con el matemático en función de estos fundamentos; y así, el orden de los cuerpos, el de los espíritus, el de la gracia o caridad, constituyen magnitudes homogéneas entre sí, admitidas como totales, porque satisfacen siempre el axioma de Arquímedes, pero si se relacionan entre sí son heterogéneas porque, en este caso, vienen reguladas por el axioma simétrico que imposibilita saltar de uno a otro orden, de una a otra magnitud.

En este sentido Pascal no sólo está admitiendo el infinito potencial en cuanto a cada uno de los órdenes de magnitud homogénea -así, entre los números siempre hay uno mayor que uno dado-, sino que cabe admitir que acepta el infinito actual en cuanto a lo heterogéneo ya que cada orden es un absoluto respecto a su orden inferior -la línea es un absoluto respecto a cada uno de sus puntos-. Y a ello hace referencia cuando de modo insistente compara Instante-Tiempo, punto-línea, línea-superficie, finito-infinito ... Y basta recordar que es lo absoluto lo que entraña el infinito actual, no compuesto de partes. La diferencia de órdenes implica, precisamente, el salto de lo finito numerable a lo infinito no numerable, a lo absoluto. Pero ello indica, a la vez, que tal absoluto no puede estar compuesto de partes, como la línea no puede estar compuesta de puntos -dirá Pascal.

Y esto último se va a relacionar con el estatuto ontológico de los indivisibles. Pascal escribe:

> *Un indivisible es lo que no tiene parte alguna, y la extensión es lo que tiene diversas partes separadas.*

Si un indivisible no tiene extensión es porque constituye un límite respecto a la operación de división realizada en un orden de magnitud determinado, por lo que no puede pertenecer a dicho orden, sino en todo caso al que le es inferior. De aquí que el punto no sea un elemento de la recta sino un indivisible suyo, límite por decirlo así de la división de un segmento de recta. Un indivisible es, pues, un concepto relativo a los distintos órdenes. No es objeto alguno, no puede ser extensión. Porque, de serlo, impediría la división infinita entre otras cuestiones. Y Pascal es tajante en este punto:

> *No hay geómetra que no crea el espacio divisible al infinito.*

Y nuevamente enlaza con el problema epistemológico en cuanto a la diferencia entre el concebir y el razonar. Toma la posición de Desargues en cuanto a esa diferencia y trata de comprender el por qué existen personas que no aceptan tal división infinita y, con ello, admiten la existencia real de indivisibles. La causa la encuentra Pascal en que esas personas son incapaces de concebir un contenido divisible al infinito. En búsqueda de certeza racional va a emplear la razón a partir de la reducción al absurdo: si una proposición es inconcebible, se toma su contraria y si ésta es falsa, se afirma la primera, por incomprensible o no intuitiva que parezca. Y los tres argumentos de Pascal se centran en: a. Idea de contacto; b. Divisibilidad infinita; c. Figuras compuestas. No entro en tales argumentos. Sí en el hecho de que, al concluir, Pascal hace una afirmación que ejemplifica tanto en lo numérico como en la extensión, el movimiento y el tiempo:

> *agregaré que esos dos infinitos, aunque infinitamente diferentes, son sin embargo relativos uno al otro, de tal manera que el conocimiento de uno conduce necesariamente al del otro.*

El ejemplo numérico: cualquier número puede multiplicarse hasta 100.000, por ejemplo; por lo que puede dividirse por ese mismo número. "*De manera que el aumento infinito encierra necesariamente también la división infinita*". Si lo que se pretende es afirmar que de uno de ellos puede demostrarse el otro, sería una afirmación incorrecta, al menos en la formalización establecida. Si el enlace es de otro carácter, nada habría que objetar a la afirmación pascaliana.

En cualquier caso, en lo que conviene insistir es, por un lado, en que Pascal fundamenta el empleo de los indivisibles no en la literatura, sino en un principio formalizable, el axioma simétrico de Arquímedes. Es este principio quien regula la heterogeneidad en los órdenes de magnitud y, con ello, regula el manejo de cantidades infinitesimales en lo continuo. Enlazado con el axioma de Arquímedes, fundamentan tanto el infinito en grandeza como en pequeñez y el paso de uno a otro, es decir, fundamentan el principio de continuidad y, a su través, el de las transformaciones continuas. Simultáneamente, fundamentan el paso de lo continuo a lo discreto y recíproco, el enlace entre cosas muy alejadas en apariencia.

Por otro lado, el hecho de que Pascal remarca, nítidamente, la diferencia entre el espacio perceptivo y lo que el entendimiento puede concebir, y el espacio conceptual donde es la razón la que prima y obliga a que el entendimiento acepte aun sin intuirlo o sentirlo distintamente. Incluso pretende una búsqueda de causas para aquellos que priman la intuición de lo claro y distinto y se niegan a aceptar lo que la razón obliga. Causa que no es otra que la distinta personalidad, el diferente carácter de los individuos: y es su clasificación entre los espíritus geométricos y los espíritus de finesse.

4. PASCAL Y LEIBNIZ

6. Creado el marco conceptual por los matemáticos de la primera mitad del siglo XVII, es a otros a quienes corresponde, hasta cierto punto, la sistematización y plasmación ya coherentes de todo el distinto contenido y métodos que han ido surgiendo. Sistematización reguladora que posibilite, ahora sí, los aportes técnicos tanto conceptuales como algorítmicos propios de ese marco conceptual. Y va a corresponder a Leibniz dar una de las posibles regulaciones a una parte de ese hacer matemático, el Cálculo Infinitesimal. En este punto voy a seguir el aporte metodológico de Robinson en Non-standard Analysis, en su estudio sobre las contribuciones de Leibniz, por el paralelo tan claro que sugiere con los aportes de Pascal.

Por lo pronto Leibniz aceptará en 1684, Acta Eruditorum, que toda línea puede considerarse como una totalidad de segmentos rectilíneos infinitamente pequeños: quod figura curvilinea causanda sit aequipollere polygono infinitorum laterum ...

En 1695, en carta al marqués de L' Hôpital:

> *... y yo cuento por iguales las cantidades cuya diferencia les es incomparable. Llamo magnitudes incomparables aquellas que multiplicadas por algún número finito cualquiera, no sabría exceder a la otra, de igual manera que Euclides lo ha tomado en su quinta definición del quinto libro.*

Leibniz comete un error, porque la Definición a la que hace referencia es el axioma de Arquímedes y, sin embargo, lo que él dice no está en Euclides ni es la Definición quinta ni es el Axioma de Arquímedes. A lo que hace referencia Leibniz es, precisamente, al Axioma simétrico de Arquímedes. Y Leibniz viene a repetir la clasificación de ordenes de magnitudes que no está así en Euclides, sino en Pascal. Y viene a apoyarse en el axioma simétrico arquimediano para establecer los diversos órdenes de infinitésimos o indivisibles.

Y también los acepta no sólo por órdenes diferentes, sino en cuanto a la posibilidad de un error menos que una cantidad dada. En carta de enero de 1690 a Wallis,

> *Es útil considerar cantidades infinitamente pequeñas tales que cuando se pide su razón, no puedan ser consideradas cero pero que son rechazadas cuando ocurren con cantidades incompara-*

> *blemente mayores. Así si tenemos dx + x, dx es rechazado. Pero es diferente si pedimos la diferencia entre x + dx y x. Análogamente no podemos tener xdx y dxdx juntos. De aquí si vamos a diferenciar y escribimos (x + dx)(y + dy) -xy = xdy + ydx + dxdy. Pero aquí dxdy debe ser rechazado como incomparablemente menor que xdy y ydx. Así en cualquier caso particular, el error es menor que cualquier cantidad finita.*

Rechazo de cantidades evanescentes apoyado en el simétrico del Axioma de Arquímedes, que es el que posibilita la creación de magnitudes de órdenes diferentes. Postulado que, junto al de Arquímedes, fundamentan tanto la idea de continuidad como las reglas operativas con magnitudes infinitesimales por un lado y númericas o discretas por otro. Y ello porque, como indicará en 1703:

> *para tener un conocimiento distinto de la magnitud hay que recurrir, partiendo de la cantidad continua, a la cantidad discreta.*

Y que sigan las mismas leyes operacionales lo indicará en carta de 1701:

> *... y se encuentra que las reglas de lo finito permanecen en lo infinito como si hubiera átomos (es decir elementos asignables de la naturaleza), aunque no pueda ser la materia subdividida actualmente sin fin; y viceversa, las reglas de lo infinito permanecen en lo finito; como si hubiera infinitésimos metafísicos, aunque no se tengan; y que la división de la materia no alcanzará jamás a parcelas infinitesimales es por lo que todo se gobierna por la razón, y que de otra forma no habría ni ciencia ni regla, lo que no estaría conforme con la naturaleza del soberano principio.*

Leibniz, como Pascal, no pierde ocasión: plantea, desde la existencia o no de los infinitésimos, el problema epistemológico.

Si Leibniz retoma los principios regulativos pascalianos y los fundamenta en el Axioma de Arquímedes y su simétrico, también cae en controversia y polémica. Porque la unión de estos principios entraña aparente contradicción, como ya se lo hicieron notar a Pascal tanto Tacquet como Lalouere. Contradicción por la que dos magnitudes pueden ser iguales al diferir en un infinitesimal, cuando en ocasiones éste se muestra como nulo y en ocasiones como distinto a esa nulidad. Es la crítica que Nieuwemtijdt hará a Leibniz: No entiende cómo los infinitésimos difieren de cero y, sin embargo, puede operarse con ellos e incluso dar una suma diferente de cero mientras que en otras ocasiones llegan a desvanecerse. Leibniz responde en 1695, Acta Eroditorum, con cuatro argumentos:

a. Es un método de invención más que de demostración

b. No difiere del de Arquímedes más que en la manera de hablar

c. El error que se comete al tomar el Cálculo de diferencias o de indivisibles es menor que cualquier número dado

d. Se pueden tomar en el mismo sentido con el que los algebristas manejan los imaginarios.

Si los tres primeros puntos hacen referencia, idéntica, a las justificaciones empleadas por Pascal, el último entra en el terreno ontológico, existencial, de los infinitésimos. Los indivisibles, para Leibniz, son inextensa y no son puntos matemáticos, sino entidades cuyas partes son "*indistantes, cujus magnitudo est inconsiderabilis, inassignabilis, minor quam quae ratione, nisi infinita ad aliam sensibilem exponi possit; minor quam quae dari potest*" (LMS II, t. 2, p. 68). Los indivisibles como elementos inextensos. Llegará a la admisión de que los infinitésimos no son más que ficciones, útiles para el cálculo, pero sin existencia real alguna. En 1701, y en un estilo literario que no alcanza el pascaliano, indicará:

> *.... no se tiene necesidad de tomar aquí el infinito en sentido estricto, sino sólo como cuando se dice en óptica que los rayos del sol vienen de un punto infinitamente alejado y así se estiman paralelos. Y cuando hay varios grados de infinito o infinitamente pequeños, es como el globo de la tierra estimado como un punto respecto a la distancia de las fijas, y una bola que manejemos es también un punto en comparación al semidiámetro del globo de la tierra, de manera que la distancia de las fijas es un infinitamente infinito o infinito del infinito respecto al diámetro de la bola. Porque en lugar del infinito o de lo infinitamente pequeño, se toman cantidades tan grandes y tan pequeñas como haga falta para que el error sea menor que el error dado, de manera que no se difiera del estilo de Arquímedes más que en las expresiones, que son más directas en nuestro método y más conforme al arte de in-*

ventar.

Y ésta última era la justificación pascaliana que todavía faltaba por aparecer.

OBRAS CITADAS

BERKELEY: "Of Infinites". Etudes philosophiques, nº 1 En. Marzo 1982, pp. 45-57. (Versión inglesa y traducción francesa).

GARDIES, J.L.: "Pascal et l'axiome d'Archimède". Revue Philosophique nº 4 Oct. 1981. pp. 425-440.

KLINE, M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford Un. Press, 1972.

KOYRE, A.: "Bonaventura Cavalieri y la Geometría de los continuos". Estudios de historia del pensamiento científico. Ed. s. XXI. Madrid, 1973.

LEIBNIZ, 1703: Nuevos Ensayos sobre el entendimiento humano. Ed. Nacional, Ed. a cargo de Javier Echeverría. Madrid, 1977.

PASCAL: Oeuvres complètes. Ed. du Seuil, París 1963.

ROBINSON: Non-Standard Analysis. North-Holland, 1974.

Departamento de Matemáticas

Escuela Universitaria de

Formación del Profesorado

Universidad Complutense

Madrid.