UN LENGUAJE ARITMETICO COMO INSTRUMENTO DE ANALISIS Y DE DECISION EN LOGICA Y EN DERECHO*

Miguel SANCHEZ-MAZAS

ABSTRACT

An arithmetical language, whose words are natural numbers written in hexadecimal numeration system, is defined and its applications for the representation, analysis and decision of formulae of some logical and normative systems are described and illustrated.

The formulae, operations and relations of the represented system are associated as follows respectively to the numbers and the arithmetical operations and relations of the proposed language:

1. Each well-formed-formula of the system is associated to a number of a set of natural numbers between zero (associated to all tautologies and theses) and the binary supremum Φ of the set (Φ is associated to all contradictions and antitheses and his value is 2^n-1, n depending on system's dimensions and structure).

2. Negation of a formula and disjonction and conjonction of two other more formulae of the system are associated respectively to the binary complement Φ-N(f) of the number associated to the first and to the binary infimun and supremum of the numbers associated to the last.

3. The logical relations "f_1 implies f_2" ($f_1 \rightarrow f_2$), "f_1 is incompatible with f_2" ($f_1 | f_2$), "f_1 is the contradictory opposite of f_2" ($f_1 w f_2$) and "f_1 is alternative to f_2" ($f_1 v f_2$) are true in the represented system if and only if the associated

---

*Adelantamos aquí la publicación de la primera parta de la ponencia presentada en la tarde del 2 de octubre de 1987, en el acto de clausura del III Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales, organizado en Sitges (Barcelona) del 28 de septiembre al 2 de octubre de 1987 por la Sección de Lingüística General de la Universidad de Barcelona, bajo la dirección del Profesor Carlos Martín Vide. La ponencia completa se publicará en las Actas correspondientes en los primeros meses de 1988.

THEORIA - Segunda Época - Año II
Curso 1986-87, nº 5-6, pp. 503-566

arithmetical relations, respectively "$N(f_1)$ absorbs arithmetically $N(f_2)$", "binary supremum of $N(f_1)$ and $N(f_2)$ is equal to Φ", "sum of of $N(f_1)$ and $N(f_2)$ is equal to Φ" and "binary infimum of $N(f_1)$ and $N(f_2)$ is equal to 0", are true.

The applications of the proposed arithmetical language as very rapid and simplified tool of analysis and decision method are shown for the following systems: propositional logic, syllogistic, some deontic and alethic modal systems and some normative systems of statutory law:

1. In the propositional logic, after fixing the maximum of variables considered, the numbers associated to these variables and to the contradictions are calculated. On this permanent basis, the evaluation of a formula (especially in the case of many occurrences of many variables) is performed by the calculation of the associated number faster as in the traditional way.

2. In the syllogistic, after the calculation of the number associated to each type of premise or conclusion, an arithmetical table of syllogisms shows that a proposed syllogism is valid if and only if the binary supremum of the numbers associated to the premises absorbs arithmetically the number associated to the conclusion. It is well-known that the search of this sort of arithmetization of syllogistic and the study of its possibilitiy has been a recurrent topic in modern logic, from Leibniz to Łukasiewicz and to-day.

3. In a deontic equivalential system who includes Von Wright's deontic system of 1982 for norms of the first order, the calculation of the numbers associated to all types of permission and obligation sentences allows the immediate arithmetical verification of all the classical relations between those sentences. The same is shown for an alethic modal system including the modalities of the first order of Lewis's S5.

4. For normative systems of statutory law, the arithmetical verification of the logical and normative relations is shown in precedent author's papers -especially in recent "The 'Ars Judicandi' Programme"-, though not yet in hexadecimal numeration system but only in binary and decimal ones.

In all the represented systems, the arithmetical verification of the metalogical properties of the system -consistency and completeness- is performed in a very easy and rapid manner, after the arithmetic representation of the axiomatic basis of the latter by a system of equations.

ÍNDICE

I. El lenguaje aritmético.

Pretendemos en esta ponencia proponer un **lenguaje aritmético** de fácil manejo destinado a simplificar y a agilizar **procedimientos** tanto **teóricos** como **prácticos**, tanto **manuales** como **informáticos**, de **análisis** y de **decisión** en distintos **sistemas lógicos** y **normativos**.

Desde el punto de vista del **análisis**, tal **lenguaje** debe permitir, para cualquier **fórmula bien formada** de una **teoría formal**, del mismo modo que para cualquier **enunciado normativo** de un **sistema jurídico positivo**, la **identificación**, mediante **cálculos elementales**, de un **invariante numérico** asociado, en virtud de ciertas correspondencias **lógico-aritméticas**, a la **clase de equivalencia** a la que pertenece la **fórmula** o **enunciado** en cuestión.

El simple **análisis** de la **composición aritmética**, **binaria** o **hexadecimal**, de ese **invariante numérico**, debe proporcionar, correlativamente, el **análisis** de la **composición lógico-formal** de la **fórmula** o **enunciado** traducido, revelando, por así decirlo, la **radiografía** de la

estructura profunda de una o de otro, al margen o más allá de su expresión en **lenguaje natural**, escribiendo así lo que hemos solido llamar su auténtica **tarjeta de identidad lógica.**

Como es natural, la **identificación** de ese **invariante numérico** es especialmente significativa, concluyente y decisiva cuando la **fórmula** o el **enunciado** examinado pertenece a la **clase de equivalencia** de las **tautologías** o a la de las **contradicciones** o permite **identificar** una **tesis** o una **antítesis** (es decir, la negación de una **tesis**) del **sistema** estudiado[1], pues con ello aporta directamente un **método aritmético de decisión** especialmente elocuente.

Desde este segundo punto de vista -el de la **decisión**-, el lenguaje **numérico** puede facilitar y simplificar también la **verificación aritmética** de las **propiedades metalógicas** del **sistema** por él traducido, fundamentalmente su **consistencia** y su **completitud**, traduciendo en **condiciones aritméticas** las **condiciones lógicas** para disfrutar de esas **propiedades**, y ésto -como hemos demostrado en trabajos anteriores y recientemente en nuestro **"Ars Judicandi"**[2]- igualmente en el caso de **sistemas** que son, desgraciadamente, con frecuencia, esencialmente **incompletos**[3] (o, si se quiere, con **lagunas**[4]) tanto como esencialmente **incoherentes**[5], es decir, con **casos** que admiten más de una **solución maximal**[6], como ocurre con la mayoría de los **sistemas jurídicos positivos** que conocemos.

En el **lenguaje aritmético** que proponemos pueden considerarse dos partes o aspectos distintos, el primero de carácter **general** o, si se quiere, **común** a los distintos **sistemas** aquí elegidos como **ejemplos de aplicación** del mismo, el segundo más **específico** de las **modalidades** de **aplicación** a uno cualquiera de ellos.

El **aspecto general** o **común** puede resumirse de la siguiente manera:

Los **signos** o **componentes básicos** del **lenguaje** -dejando a un lado los **símbolos** que designan las **operaciones** sobre los primeros o las **relaciones** entre los primeros o los de valor meramente **sintáctico**, como ciertos puntos, comas o paréntesis- son las **cifras** utilizadas en el **sistema de numeración hexadecimal** para construir en el mismo las **palabras** básicas del **lenguaje** propuesto, a saber, los **números naturales** (o, si se quiere, los **enteros positivos** más el **cero**) de un **conjunto finito** y **cerrado** formado por los **enteros** comprendidos entre el **cero** y un cierto **número máximo** o **supremo absoluto** del **conjunto**, al que designaremos por la letra griega Φ ("**phi**") y en ocasiones llamaremos indistintamente "**número hipersaturado**"[7] del conjunto o "**número de la contradicción**", porque siempre resulta asociado, en las principales aplicaciones de nuestro **lenguaje**, a alguna de las distintas **formas de contradicción** que pueden darse en los sistemas considerados, al igual que el **cero** ha de resultar asociado, al revés de lo que suele ser lo habitual o, cuando menos, lo más frecuente, a todas las **tautologías** de los **sistemas** considerados, por el hecho de basarnos para la construcción de nuestros **modelos aritméticos** en una perspectiva **lógica** y **filosófica** de carácter esencialmente **intensional** o **comprehensivo**, opuesta a la que ha venido siendo dominante, aunque fuera la preferida por **Leibniz**[8] y desde hace tiempo vuelve a tener una importancia creciente.

El **supremo absoluto** o **número hipersaturado** del conjunto finito de **números naturales** que son las **palabras** del **lenguaje aritmético** que estamos describiendo es siempre igual a **la suma de las n primeras potencias de 2** (incluyendo 2^0 **que es igual a la unidad)** y, por lo tanto, ese **supremo absoluto** tiene siempre el **valor** de 2^n-1, donde **n** es un **entero positivo** cualquiera, generalmente definido o establecido con arreglo a las exigencias específicas del **sistema lógico** o **jurídico** al que en cada caso se esté aplicando el **lenguaje numérico. En algunas ocasiones**[9], ese **número n** ha sido designado por nosotros o por el equipo que ha venido experimentando nuestros **modelos aritméticos para la informática jurídica** en el **Istituto per la Documentazione Giuridica** del **C.N.R.** en Florencia[10] con el nombre de "**número de dimensiones**" del **sistema** tratado y de su **modelo aritmético**, siendo ese **número**, en las **aplicaciones jurídicas** del **lenguaje aritmético**, igual al **número de casos estrictamente saturados**[11] **del sistema (es decir, estrictamente determinantes de soluciones en el mismo**, a no ser que sean **lagunas**), siempre **asociados a los números saturados**[12] del **modelo aritmético** de aquél.

El interés teórico y el alcance práctico de la elección del **sistema de numeración hexadecimal** para el **lenguaje numérico** propuesto y la drástica simplificación de esfuerzos, tanto **manuales** como **informáticos**, que esa elección puede representar a la hora de la manipulación de ese lenguaje, podrá empezar a calibrarse a continuación, cuando procedamos a describir las **operaciones** y **relaciones** con las que está dotado el **conjunto de números** que sirve de base al **lenguaje**, en virtud de las cuales éste adquiere la **estructura** de un **retículo de Boole**, por la que resulta idóneo como **modelo aritmético**, en sentido estricto, de **sistemas lógicos** como el **cálculo proposicional**, que tiene esa misma **estructura**, y en sentido amplio, de otros **sistemas** que tienen una **estructura** más sofisticada y no siempre definida con precisión como los **sistemas jurídicos positivos** a que nos hemos venido refiriendo.

En el <u>CUADRO I.</u>, en efecto se definen y describen las tres **operaciones aritméticas** básicas sobre los **números naturales** que constituyen las **palabras** del **lenguaje** considerado -a saber, el **complemento binario** de un **número** respecto del **número hipersaturado**, el **ínfimo binario** de **dos o más números** y el **supremo binario** de **dos o más números**, así como las cuatro **relaciones aritméticas** básicas entre aquéllos -a saber, la **absorción arit-**

métrica de un número por otro y la **igualdad, incompatibilidad** y **disyunción aritméticas entre dos números** que ya definimos en nuestro **"Ars Judicandi"**[13]. Basándonos en dichas **definiciones** y en las **propiedades** que de las mismas se derivan, podemos justificar nuestras anteriores afirmaciones sobre las ventajas del medio de expresión **hexadecimal** que sirve de vehículo a nuestro **lenguaje aritmético.**

Sabemos, en efecto, que el **sistema hexadecimal** utiliza un número de cifras que es **potencia de 2**, a saber, las **16 cifras** del **0 al 9** y de la **A** (que corresponde al **10 decimal**) a la **F** (que corresponde al **15 decimal**).

Pues bien, en este marco **binario**, es inmediato comprobar que, en lo tocante a las **operaciones** antes definidas, **cada cifra** del **complemento** de un **número** dado es, a su vez, el **complemento** de la **cifra** del **mismo orden** de éste, así como que **cada cifra** del **ínfimo** o del **supremo** de **dos números** es también, respectivamente, el **ínfimo** o el **supremo** de las **cifras** del **mismo orden** de éstos últimos.

Igualmente, en lo que atañe a las **relaciones**, se puede constatar que un **número** dado **absorbe aritméticamente** otro si y sólo si cada una de las **cifras** del primero **absorbe** la **cifra** del mismo orden del último. Y así sucesivamente.

Estas propiedades convierten en un juego de niños la **realización de las operaciones** y, lo que es aún más importante, la **verificación de las relaciones** que en nuestras aplicaciones están cargadas de **significación extra-aritmética**. por ser **portadoras de relaciones lógicas, jurídicas** o de otro tipo, pero siempre en una esfera de carácter esencialmente cualitativo.

Los resultados de las **operaciones** y la **evidencia** de las **relaciones** están con ello siempre, por así decirlo, delante de los ojos, sin necesidad de calculadora, y la manipulación de los **sistemas** a los que el **lenguaje aritmético** de **base hexadecimal** se aplica se transforma en un proceso que tiene, como es deseable en las operaciones del pensamiento humano, a la vez las ventajas de lo **racional** y de lo **intuitivo** autorizándonos a manifestar nuestro entusiasmo, como lo hizo Leibniz, descubridor, al menos en Occidente, del **sistema binario**, antecesor del **hexadecimal**, en su famosa **"carta de Año Nuevo"** de 1697 al conde Rudolf August von Braunschweig-Wolfenbüttel.

El **conjunto** de **números naturales** que sirve de base al **lenguaje aritmético** que proponemos es **cerrado** respecto de las **operaciones** que definimos en el <u>**Cuadro I.**</u>: **complemento**, **ínfimo** y **supremo binarios**. Al ser un **retículo** y un **álgebra de Boole**, el **lenguaje** construido sobre el mismo tiene propiedades formalmente análogas a las **leyes de De Morgan**, de la **distributividad** o de la **doble negación** del **cálculo proposicional**.

De este modo, la correspondencia de las **operaciones**, **relaciones** y **constantes aritméticas** de nuestro **lenguaje** respectivamente con las **operaciones**, **relaciones** y **constantes lógicas** del **cálculo proposicional** resulta inmediata, aunque pudiera hacerse sobre bases distintas e inversas una de otra, aunque análogas, una de perspectiva **extensional** y otra **intensional**.

En la nuestra, que es **intensional** -y que consideramos muy preferibe a la otra para las aplicaciones deseeadas- las **operaciones lógicas conjunción, disyunción** y **negación**, por una parte, y las **relaciones lógicas implicación** y **equivalencia**, por otra, son **aritméticamente representadas**, respectivamente por las **operaciones aritméticas supremo binario**[14], **infimo binario**[15] y **complemento binario**[16] las primeras y por las **relaciones aritméticas absorción binaria**[17] e **igualdad** las últimas.

Al reducirse de modo inmediato, como hemos dicho, todas las **operaciones** y **relaciones** de este **lenguaje**, en su modo de expresión **hexadecimal**, a **operaciones** sobre y **relaciones** entre **números de una sola cifra**, es siempre suficiente, para los **cálculos** necesarios, tener presentes, cuando no se hayan memorizado, las **tablas** para **números** comprendidos **entre 0 y F**.

A este respecto, el CUADRO II. nos ofrece la **tabla del ínfimo binario**, el CUADRO III. la del **supremo binario** y el CUADRO IV. la tabla de pares ordenados de números de una sola cifra para los cuales la **relación X absorbe Y** es **verdadera**.

Quisiéramos mencionar y evocar sucintamente hoy aquí, como posibles aplicaciones del **lenguaje numérico** descrito, el **cálculo proposicional**, la **silogística**, algún **sistema** de **lógica deóntica** y de **lógica modal alética** para **modalidades de primer grado** y algún **sistema normativo** del **Derecho positivo**.

II. Aplicaciones al cálculo proposicional.

Comencemos por el **cálculo proposicional** donde el primer objetivo de la aplicación del **lenguaje aritmético** es establecer un procedimiento que permita **asociar**, de un modo **recursivo**, a cada **fórmula bien formada** del **cálculo** un **número natural**, de tal forma que quede siempre satisfecho el **principio de equivalencia**, que enunciaremos como sigue:

La condición necesaria y suficiente para que dos fórmulas sean equivalentes es que sus respectivos números característicos sean iguales.

En otras palabras, se trata de que el **número asociado** a una **fórmula** dada cualquiera sea efectivamente un **invariante** de la **clase de equivalencia** de la misma.

Para ello, y teniendo en cuenta la **correspondencia** ya mencionada entre las **operaciones** y **relaciones** del **lenguaje aritmético**, por un lado, y las del **cálculo proposicional**, por otro, que convierte en **isomorfos** los dos **sistemas**, hemos aplicado los criterios siguientes:

Es necesario, ante todo, establecer una **asociación inicial** entre **fórmulas elementales** del **cálculo proposicional** y **números** convenientemente elegidos para que de la misma puedan derivarse **recursivamente** todas las demás, utilizando la repetida **correspondencia** entre **operaciones** de los dos **sistemas**.

Con este fin, y al estar fundado el **lenguaje aritmético** propuesto en la perspectiva **intensional**, es necesario **asociar** a las **fórmulas intensionalmente más pobres** -con excepción de las **tautologías**, a las que ya se ha **asociado** el **cero**- los **números** de **composición binaria más pobre**, es decir, las **potencias de 2**, escritas en **hexadecimal**.

Ahora bien, esas **fórmulas intensionalmente más pobres** son, una vez fijado el **número máximo de variables proposicionales** que convenga en cada caso a nuestros objetivos de **análisis** y/o de **decisión**, las **disyunciones elementales** correspondientes a ese número máximo de variables utilizadas.

El <u>CUADRO V.</u> muestra, a este respecto, de qué modo, en los casos de **2, 3, 4** y **5 variables proposicionales**, se ha **asociado**, primero, a cada una de las **disyunciones elementales** correspondientes a cada nivel, una **potencia de 2** diferente escrita en **hexadecimal** (columna de la izquierda) y de qué forma se han obtenido, después, de tales **asociaciones iniciales**, aplicando **recursivamente** a esas **potencias de 2** la **operación aritmética** correspondiente a la **conjunción** -es decir, el **supremo binario**- los **números asociados** a cada una de las **variables proposicionales** consideradas y a la **constante de falsedad** (columna de la derecha).

De hecho, son sólo esos **números** asociados a las **variables proposicionales** a cada nivel los que conviene retener de una vez por todas como clave de esta nueva **aritmetización** del **cálculo proposicional**, del mismo modo que en la antigua o clásica, fundada en el **0** y el **1**, es necesario retener las **matrices asociadas a cada función.**

En efecto, como veremos a continuación en distintos ejemplos de aplicación del **modelo aritmético** descrito a problemas de **decisión**, el conocimiento de esos **números** y la aplicación **recursiva** de las **operaciones aritméticas** que exija la estructura de cada **fórmula del cálculo proposicional** analizada o testada permitirá resolver cada problema particular.

Observemos, de paso, que el **número** que quede asociado a cada **fórmula** del **cálculo proposicional** utilizando el procedimiento indicado nos proporciona automáticamente la **forma normal conjuntiva** de la **fórmula**, que corresponde al **análisis** de su **número característico** como **suma de potencias de 2**, de realización mucho más rápida y sencilla que los procedimientos habituales de reducción de una fórmula a su **forma normal conjuntiva** (o **disyuntiva**), sobre todo en el caso de muchas variables, que es donde la **nueva aritmetización** se impone sin lugar a dudas.

Precisemos ahora que, una vez que toda **fórmula bien formada**, arbitrariamente elegida, del **cálculo proposicional** posee su **número característico** propio, **calculable** a la mano en unos segundos, el **método de**

decisión para **todas las fórmulas del sistema** se reduce a las **tres constataciones** que siguen:

1. Si el **número** que resulta **asociado** a una fórmula **es igual a 0**, la fórmula es una **tautología** o **tesis del sistema**;

2. Si el **número** que resulta asociado a la **fórmula** es el **número de la contradicción** correspondiente al **nivel** o **número de variables** considerado, la fórmula es una **contradicción** o **antítesis** (opuesta a una **tesis**) **del sistema**;

3. Si el **número** que resulta **asociado** a una fórmula es **mayor que 0** y **menor que el número de la contradicción**, la **fórmula** es **contingente** (**no necesaria** y **no imposible**) y puede ser **verdadera** o **falsa** según los casos.

En este nuevo marco de **aritmetización** del **cálculo proposicional**, el <u>CUADRO VI.</u> nos muestra de qué modo, en la **asociación** establecida, una **relación lógica** entre **2 de las fórmulas** que, acompañadas de sus **números característicos**, ocupan puntos de la periferia o del interior del cuadrado exhibido es **verdadera** si y sólo si la **relación aritmética** correspondiente entre esos **números** es **verdadera**. El **símbolo de la relación lógica** que vincula **dos fórmulas** cualesquiera está marcado en la recta que une los puntos ocupados por las mismas.

El <u>CUADRO VII.</u> nos ofrece algunos ejemplos de **verificación** de **equivalencias** clásicas del **cálculo proposicional** -como la ley de **contraposición simple**, la ley de **contraposición silogística** y la ley **distributiva** de la **disyunción**- mediante la comprobación de la **igualdad** de sus respectivos **números característicos**.

En el CUADRO VIII. mostramos lo sencillo que resulta, utilizando el **lenguaje aritmético** propuesto, **evaluar** a mano, sin utilizar la calculadora, una fórmula tan larga y compleja como el **axioma único** establecido en 1953 por Meredith[18] para **axiomatizar**, con su sola ayuda, el **cálculo proposicional**. El citado **axioma**, que incluye **10 ocurrencias** de **5 variables proposicionales** distintas más la **constante de falsedad**, exigiría para su evaluación siguiendo los métodos habituales una tabla de **32 filas** y **15 columnas**, es decir, con **480 casillas** de **datos** y/o **resultados intermedios o finales** y **9 operaciones** por fila, es decir, un total de **288 operaciones**, aunque éstas consistan en aplicaciones reiteradas de las **matrices** clásicas a **valores 0** y **1**.

No olvidemos, en efecto, que el **número de clases de equivalencia** de fórmulas de hasta **5 variables** es 2^{32}, que en **hexadecimal** se escribe **100.000.000** y en **decimal 4.294.967.296**

No obstante, una vez que se tienen a mano, de modo permanente, los pocos **números asociados a las variables proposicionales** en el **modelo aritmético** utilizado, tales operaciones se realizan a mano, como decimos, en media holandesa (9 líneas), como se ve en el Cuadro VIII. o, si se prefiere, en pocos segundos en una calculadora de bolsillo Hewlett-Packard 16 C.

III. Aplicaciones a la silogística.

Pasemos ahora a la **silogística**, cuya **aritmetización** ha venido constituyendo, desde los intentos de Leibniz, sobre todo en sus geniales ensayos de **abril de 1679** y de los años **1686** y **1690**, un verdadero reto para **lógicos** y **matemáticos** y al que tanta atención dedicaron **lógicos** modernos de la talla de un Łukasiewicz, en su famoso libro sobre la **silogística**, desde el punto de vista de la **lógica formal moderna**[19].

En este terreno, las aportaciones que hemos venido realizando en el pasado, en sucesivas publicaciones[20], han consistido especialmente en presentaciones más propiamente **algebráicas** que **aritméticas**, aunque generalmente las **variables** asociadas a los **términos silogísticos** debían tomar sus **valores** en **conjuntos de números enteros**.

En esta ocasión, sin embargo, hemos optado, como en el caso del **cálculo proposicional**, por una **aritmetización**, en un sentido más estricto, de las **fórmulas** o, más precisamente, de las **proposiciones categóricas** que desempeñan un papel en la **teoría silogística**.

A cada tipo de **proposición categórica** que puede figurar como **premisa** o como **conclusión** de un **silogismo categórico** se le **asocia** un **número natural**, siempre escrito en **hexadecimal**, de tal modo que el **número asociado a la conjunción de las premisas** -que es el **supremo** de los **números asociados** a éstas- **absorbe aritméticamente el número asociado a la conclusión si y sólo si** el correspondiente **silogismo** es **válido**.

El CUADRO IX.A. muestra de qué manera hemos procedido para lograr esa **asociación** tan buscada.

Asociamos inicialmente una **suma de dos potencias de 2** a cada una de las 8 **fórmulas del cálculo de predicados** de la forma **"para todo x, x tiene la propiedad m** o **x tiene la propiedad p** o **x tiene la propiedad s"** que pueden formarse al considerar las **8 disyunciones elementales** de los **tres predicados** o sus **negaciones.**

En todos los casos, la **mayor** de las dos **potencias de 2** cuya **suma** se asocia a una de las fórmulas mencionadas se escribirá en hexadecimal, como puede verse en el cuadro, igual que la **menor** seguida de **dos ceros**, de modo que los **8 números** asociados a las fórmulas de partida tendrán siempre **dos cifras iguales a distancia de dos dígitos.**

Tales **números** y todos los **números característicos** construidos a partir de ellos se considerarán divididos en **dos secciones** distintas y consecutivas, una formada por **las dos últimas cifras** del número y la otra por las **anteriores.** Las **dos secciones** de cada número se separarán por un punto y, cuando sean iguales -cosa que ocurre, como se verá, en todos los **números** asociados a **proposiciones universales**-, se considerarán portadoras, en forma redundante de una misma **información aritmética** sobre la **proposición** a la que el número del que forman parte está asociado.

A partir de los **números** asociados a las **fórmulas anteriores** pueden calcularse los **números** que han de quedar asociados a todos los **tipos de proposiciones categóricas universales** que pueden figurar como **premisas** o **conclusiones** de **silogismos categóricos**, ya que cualquiera de ellas puede expresarse en forma de una **conjunción de dos de las precedentes fórmulas.**

En cuanto a los **números asociados** a las **proposiciones particulares**, éstos se obtendrán calculando primero el **número complementario** de la **proposición universal contradictoria de la dada** y tomando después la **2ª sección** de tal **complementario** en el caso de las **mayores**, la **1ª sección** en el caso de las **menores** y cualquiera de las dos en el caso de las **conclusiones.**

El distinto tratamiento otorgado, por un lado a las **universales** -cuya **información aritmética** se repite, de forma **redundante** -como ocurre, y de modo justificado y provechoso, con muchas de las **informaciones** que transitan por nuestro cerebro y organismo-, y, por otro, a las **particulares** -cuya **información aritmética** se codifica **en una sola sección** del **número asociado** a cada una de ellas -a saber, la 2ª si son **mayores** y la **1ª** si son menores-, de tal forma que, si **las dos** premisas son particulares, sus respectivas informaciones aritméticas no pueden combinarse en una misma sección de la eventual conclusión, evitando con ello que ésta se produzca, responde al siguiente criterio:

Pensamos que para reflejar el mecanismo íntimo de la esencial incombinabilidad de dos premisas particulares -cuya clave es que los individuos a las que se refieren sus afirmaciones o negaciones no son nunca fozosamente los mismos en una y en otra-, es más adecuado y natural, desde el punto de vista racional, que cada premisa lleve su información numérica en una sección distinta de su número asociado, que introducir expresamente, interfiriendo en el libre mecanismo combinatorio de sus números una restricción externa del tipo de "ex duo particularibus nihil sequitur", sin justificación lógica ni traducción aritmética.

El <u>CUADRO IX.B.</u> muestra de qué modo nuestro lenguaje numérico permite representar el cálculo aritmético que traduce o refleja el mecanismo de la deducción silogística como una combinación de dados numerados según las potencias de 2 (en hexadecimal), donde cada una de las proposiciones universales -a las que reducimos aquí nuestro esquema- tiene como número asociado la suma de los números de dos dados contiguos y donde hay silogismo válido si y sólo si cada una de las premisas aporta a la eventual conclusión uno de los dados del par cuya suma numérica define a ésta última.

Los CUADROS X., XI. y XII. muestran las aplicaciones de los **números asociados** a las **clases de equivalencia** de los distintos tipos de **proposiciones categóricas** que intervienen en la **silogística** a la **verificación** de las **equivalencias** establecidas por Hacker[21] en sus famosos **octógonos**.

El CUADRO XIII. es una **tabla aritmética de la silogística** o el resultado de nuestra **aritmetización** de la misma, que es el siguiente:

Un silogismo es válido si y sólo si el supremo binario de los números asociados a las premisas absorbe aritméticamente el número asociado a la conclusión.

Creo que es una solución de este tipo la que buscaba Leibniz y, hasta donde alcanzan mis noticias es éste el primer juego de números asociados a las proposiciones categóricas racionalmente obtenido que satisface sus aspiraciones.

Nota complementaria. - Como extrapolación al infinito de mi **aritmetización** de la **lógica clásica** de **términos** o **nociones** y de la **silogística**, muestro en un trabajo reciente, de próxima aparición en Argumentation, revista editada por **Reidel** (SANCHEZ-MAZAS [1988a]) que es posible utilizar los **números reales** para representar un **análisis infinito** de **nociones individuales** en una **infinidad de mundos posibles.**

Represento primero un **retículo de Boole de nociones universales** por un **retículo de Boole** asociado de **números racionales** cuyos **generadores** son **potencias negativas de 2** escritas en el **sistema de base 4.**

Pero como la **noción de un individuo** (por ejemplo, la **noción** de **Julio César)** no admite, como ya señaló Leibniz, una definición análoga a la de una **universal** mediante un **número finito de predicados**, procedo del modo siguiente:

1. Defino el **"grado de identificación de una noción individual"**, representable por un **número racional; 2.** Muestro cómo una **noción individual** puede ser definida por una **sucesión convergente** de **grados de identificación; 3.** Muestro cómo el **número real** que ha de quedar asociado a tal **noción individual** puede ser definido por una **sucesión convergente** (asociada a la primera) **de números racionales**, que satisface las **condiciones de Cauchy** para la **convergencia de las sucesiones.**

IV. Aplicaciones a sistemas de lógica deóntica y de lógica modal alética.

Examinemos ahora el modo de utilización de nuestro **lenguaje aritmético** como instrumento de **análisis** y de **decisión** en la esfera de la **lógica deóntica**.

Hemos elegido como **sistema** de partida, para dar un ejemplo muy preciso de aplicación del **lenguaje** a una **teoría** muy conocida y muy actual, el **sistema de lógica deóntica** para **normas de primer orden** presentado en Florencia en 1981 por Von Wright en el marco de su ponencia sobre **"Normas, verdad y lógica"** en el **II Congreso Internacional de Lógica, Informática y Derecho**[22].

Hemos transformado después este sistema en un sistema puramente **equivalencial**[23], es decir, que no incluye en su **base axiomática**, dejando a un lado las **tautologías** tomadas del **cálculo proposicional**, más que **axiomas** que tienen la forma de **equivalencias**.

Esta táctica nos ha facilitado, en efecto, el **cálculo** sistemático del **invariante numérico** que hay que asociar a cada **clase de equivalencia** de las **fórmulas** del **sistema**, en función de los **números** asociados inicialmente, y, al menos en parte, arbitrariamente a los **componentes elementales**[24], desde el punto de vista **intensional** o **conjuntivo**, de las mencionadas **fórmulas**.

El CUADRO XIV. nos muestra la **base axiomática del sistema equivalencial** mencionado y las **ecuaciones** asociadas a la misma, en virtud de la **traducción aritmética** de las **operaciones** y de las **constantes lógicas**.

Para **traducir aritméticamente**, a su vez, las **fórmulas deónticas** obtenidas de la aplicación de los **functores deónticos** clásicos, como **es obligatorio que** (O), **está permitido que** (P), **es facultativo que** (Fac[25]) y **está prohibido que** (Ph[26]) a **argumentos proposicionales** de cualquier número de variables, hemos elegido **números característicos naturales** (**enteros positivos** o **cero**) escritos en el sistema de numeración **hexadecimal**.

Dado que las **condiciones aritméticas** que han de satisfacer los **invariantes numéricos** que deberán asociarse a cada una de las **clases de equivalencia** de las **fórmulas del sistema** han de ser dictadas con precisión por la **base axiomática** del mismo, hemos creido indispensable traducir las **equivalencias lógicas** que constituyen la mencionada **base** por **ecuaciones** o **igualdades aritméticas** cuya satisfacción debe constituir el punto de partida para la búsqueda de los repetidos **invariantes**. En efecto, una vez desarrolladas y aplicadas a todos los niveles de construcción de los **números característicos** de las **fórmulas del sistema**, mencionadas **ecuaciones**, que traducen estrictamente los **axiomas** y las **definiciones**, representan leyes de construcción suficientes para hacernos llegar al **número** que le corresponde a cada **fórmula** y constituye su **tarjeta de identidad lógica**.

Las consecuencias de este hecho son claras. Si los **númeos asociados** a todas las **fórmulas** satisfacen las **ecuaciones** que representan la **base axiomática** del sistema, entonces el **conjunto de esos números** **constituye** **un modelo adecuado del sistema** y, por lo tanto, **un instrumento de decisión** idóneo.

El <u>CUADRO XV.</u> nos muestra el **sistema axiomático** inicial de Von Wright que, como hemos demostrado en la nota 18 de nuestra ponencia "A **new arithmetical decision method for equivalential deontic systems**" en el **VIII Congreso Internacional de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia** que ha tenido lugar el mes de agosto último en Moscú está incluido en el nuestro[27]. Ahora bien, a la vista de tal sistema, que no incluye sólo equivalencias, podemos afirmar que no hubiera sido posible aplicar los criterios arriba indicados si hubiéramos partido del mismo, sin modificación. Al no estar compuesta la base axiomática sólo de equivalencias, no podríamos representarlo sólo con ecuaciones.

El <u>CUADRO XVI.</u> nos muestra los fundamentos de la **aritmetización** de nuestro **sistema equivalencial de lógica deóntica.** Como puede comprobarse, en el proceso de hallazgo de los **números característicos** exigidos por los diferentes tipos de **fórmulas deónticas**, y apoyándonos en la **interdefinibilidad recíproca** de las **fórmulas de obligación**, por un lado, y las **fórmulas de permisión**, por otro, precisada en la **Definición 1**, hemos abordado primeramente la búsqueda de los **números característicos** de las **fórmulas permisivas**, para calcular después los de las **fórmulas precriptivas contradictorias** de las primeras, en función de los **números asociados** a éstas y del **número FFF asociado a la contradicción.**

Hemos analizado, pues, la **composición conjuntiva** o **intensional** de los diferentes tipos de **fórmulas permisivas,** fundándonos en las **ecuaciones** asociadas a la **base axiomática del sistema.** Esta investigación nos ha permitido identificar como **átomos** del **sistema,** desde el punto de vista **conjuntivo** o **intensional**, las **12 fórmulas** que vemos asociadas a las **12 primeras potencias de 2**, escritas en **hexadecimal**, en la parte superior del Cuadro XVI.

En la fase siguiente, hemos asociado a cada una de las **fórmulas compuestas**, equivalentes a la **conjunción** de varias de las fórmulas anteriores, el **supremo** de las **potencias de 2** asociadas a las mismas. El **principio de equivalencia** ha quedado preservado a través de todo este proceso.

El CUADRO XVII. resume las **operaciones** que han llevado a los distintos **grupos de fórmulas.**

La **demostración** de la **completitud** y de la **consistencia** del **sistema** adopta una forma muy sencilla, que enunciamos a continuación:

Las leyes de asociación atribuyen a toda fórmula bien formada del sistema un número característico único y bien determinado.

Este número debe, necesariamente, o bien ser igual a cero -y en este caso la fórmula considerada es una tesis del sistema o tautología deóntica-, o bien ser diferente de cero -y en este caso la fórmula en cuestión no es una tesis del sistema. El sistema es, pues, completo.

Por otra parte, si el número asociado a cualquier fórmula bien formada del sistema es igual a cero, entonces el número asociado a la negación de la fórmula será no sólo diferente de cero, sino además, más precisamente, igual al complemento binario de cero, es decir, al número FFF, asociado a la clase de equivalencia de las contradicciones del sistema. El sistema es, pues, consistente.

El CUADRO XVIII. reproduce el hexágono deóntico que algunos lógicos conocen como "hexágono de Blanché"[28] y del que también me he ocupado en algunos trabajos[29], sobre todo en relación con mis modelos aritméticos para la informática jurídica.

Sobre esta figura es posible verificar que entre dos fórmulas que ocupan dos vértices del hexágono existe la relación lógica marcada sobre la recta que une esos vértices si y sólo si entre los números asociados a aquéllas (escritos a su lado) existe la relación aritmética asociada a la primera[30].

El CUADRO XIX.; una **verificación análoga** para las relaciones entre **fórmulas modales aléticas**[31].

El CUADRO XX.A. muestra, para la **lògica deóntica**, de qué modo las **cadenas de implicaciones lógicas** entre **fórmulas** quedan traducidas o reveladas por **cadenas de absorciones** entre sus **números característicos**.

Finalmente, el CUADRO XX.B. nos muestra lo mismo para la **lógica modal alética**[32].

Otra esfera, que me parece importante, de aplicación de mi **lenguaje aritmético** es el **análisis aritmético de los sistemas normativos**, que el equipo de investigadores dedicado desde hace años en el **Istituto per la Documenzione Giuridica** del **C.N.R.** en Florencia a experimentar y aplicar mis modelos al **Código civil italiano** prefiere denominar "**análisis automático de la legislación**"[33].

Vengo ocupándome sistemáticamente del tema desde que en 1978, en un colectivo sobre **Lógica, Informática y Derecho** editado precisamente en Florencia, publiqué mi trabajo "**Modelli aritmetici per l'informatica giuridica**" que desde entonces ha venido constituyendo el punto de referencia obligado en la materia[34].

El jurista polaco Wroblewski se ha referido a mis trabajos en esa esfera calificándolos de "**matematización del Derecho**"[35]. Yo prefiero hablar de "**Derecho analítico**"[36], para destacar el hecho de que la aplicación de mis **números característicos** al **análisis de los sistemas normativos** significa la introducción en la **esfera jurídica** de unas **coordenadas** que, lejos de ser **cuantitativas** y **métricas** como las **cartesianas**, son portadoras de **relaciones deónticas, cualitativas e intensionales**.

Me referiré en la última parte de esta ponencia a la aplicación de mi **lenguaje aritmético** a esta esfera.

CUADRO I.

Operaciones y relaciones aritméticas sobre (resp. entre) los números del conjunto α sobre el que se define el lenguaje aritmético $L\alpha$ y expresión de las mismas en el sistema de numeración hexadecimal.

$$\alpha = \{0, 1, 2, \ldots, X_i, \ldots, \Phi\}$$

Expresión binaria de un número X_i:

$$X_i = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ij} \times 2^j = X_{i0} \times 2^0 + X_{i1} \times 2^1 + \ldots + X_{i(n-1)} \times 2^{n-1}$$

donde los coeficientes X_{ij} pueden adoptar los valores 0, 1.

Número Φ (hipersaturado):

$$\Phi =_{df} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Operaciones aritméticas:

Complemento binario $\bar{\bar{X}}$: $\bar{\bar{X}} =_{df} \Phi - X$

Ínfimo (resp. supremo) binario (X, Y) (resp. [X, Y]) de dos números es el número en cuya expresión binaria figura una potencia de 2 si y sólo si la misma figura en la expresión binaria de X y (resp. o) en la de Y.

Relaciones aritméticas:

X absorbe aritméticamente Y si y sólo si toda potencia de 2 que figura en la expresión binaria de Y figura también en la de X.

X es igual a Y si y sólo si X e Y se absorben recíprocamente.

Dos números son incompatibles (resp. disjuntos) si y sólo si su supremo es igual a Φ (resp. su ínfimo es igual a 0).

Expresión de las operaciones y relaciones en hexadecimal:

1. Cada una de las cifras del resultado de una operación binaria sobre números escritos en hexadecimal es el resultado de esa operación sobre las cifras del mismo orden de lo^ primeros;

2. Una relación entre dos números escritos en hexadecimal es verdadera si y sólo si lo es entre las cifras del mismo orden de los primeros.

CUADRO II.

TABLA DE VALORES DEL INFIMO BINARIO (X,Y) de dos números X e Y de una sola cifra hexadecimal.

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	0	1	0	1	4	5	4	5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	0	0	2	2	4	4	6	6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8
9	0	1	0	1	0	1	0	1	8	9	8	9	8	9	8	9
A 10	0	0	2	2	0	0	2	2	8	8	A	A	8	8	A	A
B 11	0	1	2	3	0	1	2	3	8	9	A	B	8	9	A	B
C 12	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8	C	C	C	C
D 13	0	1	0	1	4	5	4	5	8	9	8	9	C	D	C	D
E 14	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	A	A	C	C	E	E
F 15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

CUADRO III.

TABLA DE VALORES DEL SUPREMO BINARIO [X, Y] de dos números X e Y de una sola cifra hexadecimal.

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9	B	B	D	D	F	F
2	2	3	2	3	6	7	6	7	A	B	A	B	E	F	E	F
3	3	3	3	3	7	7	7	7	B	B	B	B	F	F	F	F
4	4	5	6	7	4	5	6	7	C	D	E	F	C	D	E	F
5	5	5	7	7	5	5	7	7	D	D	F	F	D	D	F	F
6	6	7	6	7	6	7	6	7	E	F	E	F	E	F	E	F
7	7	7	7	7	7	7	7	7	F	F	F	F	F	F	F	F
8	8	9	A	B	C	D	E	F	8	9	A	B	C	D	E	F
9	9	9	B	B	D	D	F	F	9	9	B	B	D	D	F	F
A 10	A	B	A	B	E	F	E	F	A	B	A	B	E	F	E	F
B 11	B	B	B	B	F	F	F	F	B	B	B	B	F	F	F	F
C 12	C	D	E	F	C	D	E	F	C	D	E	F	C	D	E	F
D 13	D	D	F	F	D	D	F	F	D	D	F	F	D	D	F	F
E 14	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F
F 15	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

CUADRO IV.

TABLA INDICADORA DE LOS PARES ORDENADOS <X, Y> DE NÚMEROS X, Y DE UNA SOLA CIFRA HEXADECIMAL PARA LOS QUE LA RELACION X ÷ Y (X ABSORBE Y) ES VERDADERA (V)

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
0	V															
1	V	V														
2	V		V													
3	V	V	V	V												
4	V				V											
5	V	V			V	V										
6	V		V		V		V									
7	V	V	V	V	V	V	V	V								
8	V								V							
9	V	V							V	V						
A 10	V		V						V		V					
B 11	V	V	V	V					V	V	V	V				
C 12	V				V				V				V			
D 13	V	V			V	V			V	V			V	V		
E 14	V		V		V		V		V		V		V		V	
F 15	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

CUADRO V.

Asociación de números en hexadecimal a las variables proposicionales para analizar las equivalencias y evaluar rápidamente las fórmulas

1. Asociación inicial de potencias de 2 a a las disyunciones elementales

2. Cálculo ulterior de los números asociados a las variables

hasta 2 variables

$N(p \vee q) = 1$
$N(p \vee \sim q) = 2$
$N(\sim p \vee q) = 4$
$N(\sim p \vee \sim q) = 8$

$N(p) = [1, 2] = 3$
$N(q) = [1, 4] = 5$
$N(\underline{f}) = 1+2+4+8 = F$
$N(\sim p) = F-3 = 12$
$N(\sim q) = F-5 = 10$

Hasta 3 variables

$N(p \vee q \vee r) = 1$
$N(p \vee q \vee \sim r) = 2$
$N(p \vee \sim q \vee r)$
....

$N(p) = F$
$N(q) = 33$
$N(r) = 55$
$N(\underline{f}) = FF$

hasta 4 variables

$N(p \vee q \vee r \vee s) = 1$
....
....
....
$N(\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s) = 8.000$

$N(p) = FF$
$N(q) = F0F$
$N(r) = 3.333$
$N(s) = 5.555$
$N(\underline{f}) = F.FFF$

hasta 5 variables

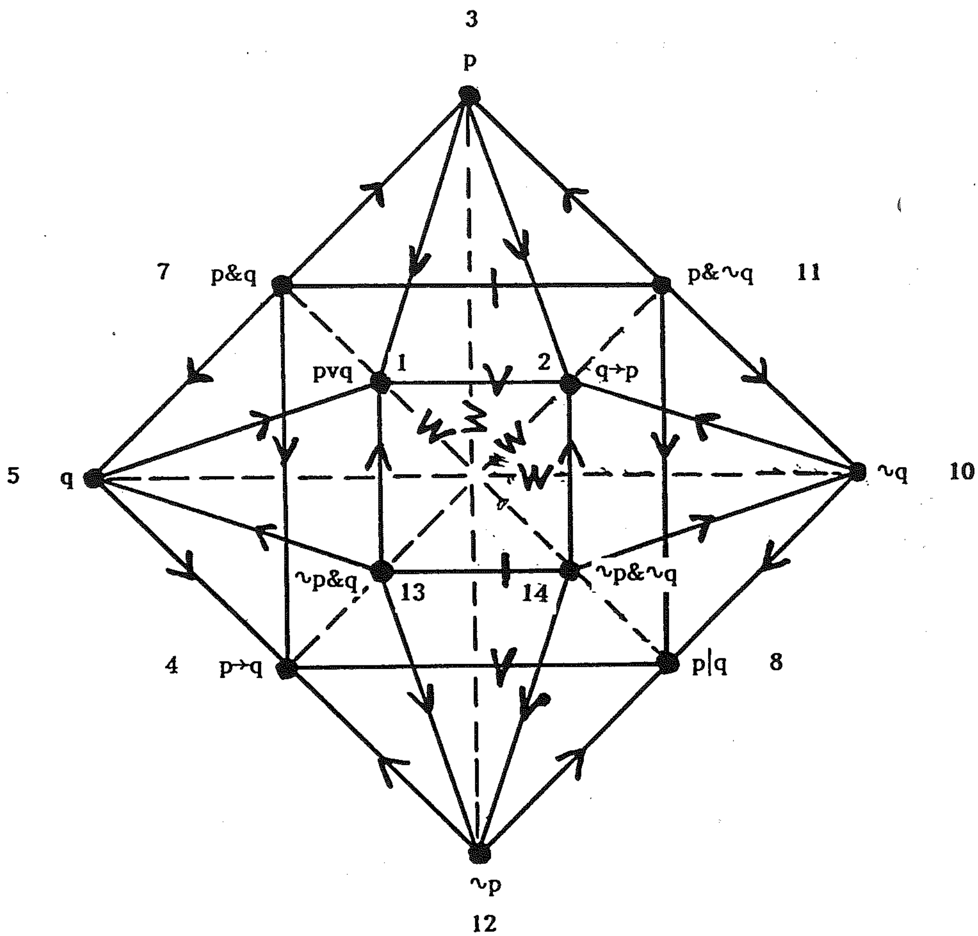
$N(p \vee q \vee r \vee s \vee t) = 1$
....
....
....
....
$N(\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s \vee \sim t) = 80.000.000$

$N(p) = F.FFF$
$N(q) = FF0.0FF$
$N(r) = F.0F0.F0F$
$N(s) = 33.333.333$
$N(t) = 55.555.555$
$N(\underline{f}) = FF.FFF.FFF$

CUADRO VI.

Aritmetización de la lógica proposicional clásica.

Traducción de las relaciones lógicas entre las funciones de verdad del cálculo proposicional clásico por relaciones aritméticas entre los números asociados a tales funciones.

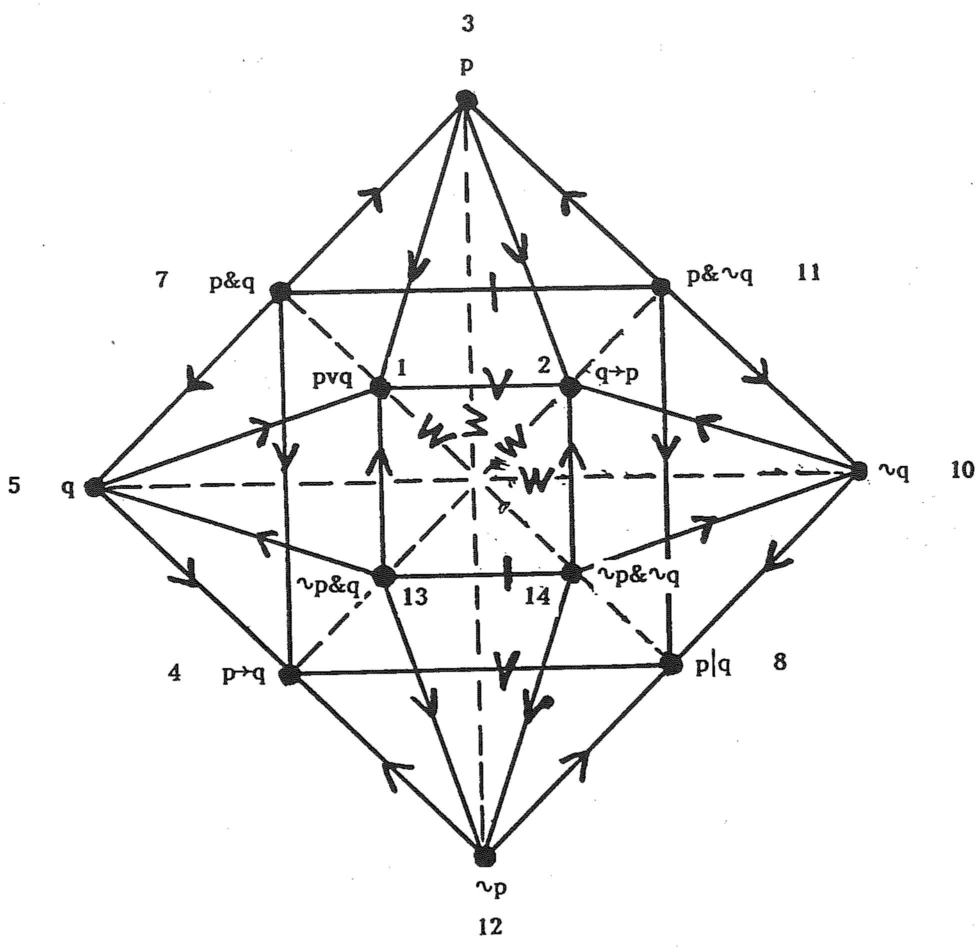


Relación lógica entre dos fórmulas p_1 y p_2			Relación aritmética entre sus números asociados $N(p_1)$ y $N(p_2)$	
implicación	$p_1 \rightarrow p_2$	si y sólo si	$N(p_1) \div N(p_2)$	absorción
incompatibilidad	$p_1 \mid p_2$	si y sólo si	$[N(p_1), N(p_2)] = F$	supremo = F
contradicción	$p_1 \text{ w } p_2$	si y sólo si	$N(p_1)+N(p_2) = F$	suma = F
alternativa	$p_1 \vee p_2$	si y sólo si	$(N(p_1), N(p_2)) = 0$	ínfimo = 0

CUADRO VI.

Aritmetización de la lógica proposicional clásica.

Traducción de las relaciones lógicas entre las funciones de verdad del cálculo proposicional clásico por relaciones aritméticas entre los números asociados a tales funciones.



Relación lógica entre dos fórmulas p_1 y p_2			Relación aritmética entre sus números asociados $N(p_1)$ y $N(p_2)$	
implicación	$p_1 \rightarrow p_2$	si y sólo si	$N(p_1) \div N(p_2)$	absorció
incompatibilidad	$p_1 \mid p_2$	si y sólo si	$[N(p_1), N(p_2)] = F$	supremo =
contradicción	p_1 w p_2	si y sólo si	$N(p_1)+N(p_2) = F$	suma =
alternativa	$p_1 \vee p_2$	si y sólo si	$(N(p_1), N(p_2)) = 0$	ínfimo =

CUADRO VII.

Verificación aritmética de algunas fórmulas clásicas de equivalencia utilizando los invariantes numéricos de las clases de equivalencia.

La verificación aritmética de fórmulas de hasta 3 variables se basa en la asociación siguiente:

Variables proposicionales	Números asociados
p	N(p) = F
q	N(q) = 33
r	N(r) = 55

Operaciones lógicas		Operaciones aritméticas	
negación	∿p	FF-N(p)	complementario
disyunción	p v q	(N(p), N(q))	ínfimo
conjunción	p & q	[N(p), N(q)]	supremo
implicación	p → q	(FF-N(p), N(q))	

Sobre esta base verificaremos las equivalencias siguientes:

Equivalencias	Verificación
(p→q)←→(∿q)→∿p) (PM, 4.1.)	N(p→q) = (FF-F, 33) = (F0, 33) = 30 N(∿p→∿q) = (FF-(FF-33), FF-F) = (33, F0) = 30
(p&q→r)←→(p&∿r→∿q) (PM, 4.14)	N(p&q→r) = (FF-[F, 33],55)=(FF-3F,55)=(C0,55)=40 N(p&∿r→∿q)=(FF-[F,FF-55],FF-33)=(FF-[F,AA],CC)=(50,CC)=40
∿(p&q)←→∿pv∿q (PM, 4.51)	N(∿(p&q))=FF-[F,33]=FF-3F=C0 N(∿pv∿q)=(FF-F,FF-33)=(F0,CC)=C0
pv(q&r)←→(pvq)&(pvr) (PM, 4.41)	N(pv(q&r))=(F,[33,55])=(F,77)=7 N((pvq)&(pvr))=[(F,33),(F,55)]=[3,5]=7

CUADRO VIII.

Evaluación o verificación aritmética del axioma establecido por Meredith en 1953 para axiomatizar con su sola ayuda el cálculo proposicional

El axioma, que utiliza 5 variables proposicionales distintas, además de la constante $\underline{f}$ de falsedad, es el siguiente:

$$\boxed{((((p\to q)\to(r\to \underline{f}))\to s)\to t)\to((t\to p)\to(r\to p))}$$

Como ya se ha establecido, los números que quedan asociados a las 5 variables y a la constante de falsedad son los siguientes:

$N(p)$ = F.FFF
$N(q)$ = FF0.0FF
$N(r)$ = F.0F0.F0F
$N(s)$ = 33.333.333
$N(t)$ = 55.555.555
$N(\underline{f})$ = FF.FFF.FFF

A partir de esos números característicos y de la operación aritmética asociada a la implicación, la evaluación de esa fórmula en nuestro lenguaje aritmético es la siguiente:

Recordemos que, para todo número X, $\overline{X}$ (complemento binario de X) es igual a FF.FFF.FFF-X y sea N(f) el número asociado a una fórmula f. Tendremos entonces:

$N(p\to q)=(\overline{\mathrm{F.FFF}},\ \mathrm{FF0.0FF})=(\mathrm{FF.FF0.000},\ \mathrm{FF0.0FF})=$	FF0.000
$N(r\to \underline{f})=(\overline{\mathrm{F.0F0.F0F}},\ \mathrm{FF.FFF.FFF})=(\mathrm{F0.F0F.0F0},\ \mathrm{FF.FFF.FFF})=$	F0.F0F.0F0
$N(t\to p)=(\overline{\mathrm{55.555.555}},\ \mathrm{F.FFF})=(\mathrm{AA.AAA.AAA},\ \mathrm{F.FFF})=$	A.AAA
$N(r\to p)=(\overline{\mathrm{F.0F0.F0F}},\ \mathrm{F.FFF})=(\mathrm{F0.F0F.0F0},\ \mathrm{F.FFF})=$	F.0F0
$N((p\to q)\to(r\to \underline{f}))=(\overline{\mathrm{FF0.000}},\mathrm{F0.F0F.0F0})=(\mathrm{FF.00F.FFF},\mathrm{F0.F0F.0F0})=$	F0.00F.0F0
$N(((p\to q)\to(r\to \underline{f}))\to s)=(\overline{\mathrm{F0.00F.0F0}},\mathrm{33.333.333})=(\mathrm{F.FF0.F0F},\mathrm{33.333.333})=$	3.330.303
$N((((p\to q)\to(r\to \underline{f}))\to s)\to t)=(\overline{\mathrm{3.330.303}},\mathrm{55.555.555})=(\mathrm{FC.CCF.CFC},\mathrm{55.555.555})=$	54.445.454
$N((t\to p)\to(r\to p))=(\overline{\mathrm{A.AAA}},\mathrm{F.0F0})=(\mathrm{FF.FF5.555},\mathrm{F.0F0})=$	5.050
$N(((((p\to q)\to(r\to \underline{f}))\to s)\to t)\to((t\to p)\to(r\to p)))=(\overline{\mathrm{54.445.454}},\mathrm{5.050})=(\mathrm{AB.BBA.BAB},\mathrm{5.050})=$	0

Al ser, pues, igual a cero el número asociado al axioma de Meredith y al ser cero precisamente el invariante numérico de la clase de equivalencia de las tautologías, el axioma de Meredith es una tautología. **Q.E.D.**

CUADRO IX.A.

Cálculo de los números asociados a las proposiciones categóricas que pueden figurar como premisas o conclusiones de silogismos categóricos.

Asociamos inicialmente una suma de dos potencias de 2 a cada una de las 8 fórmulas siguientes del cálculo de predicados, formadas por una disyunción elemental precedida de cuantificador universal:

Fórmulas lógicas	Números asociados
d_1 = (x) m(x) v p(x) v s(x)	$N(d_1)$ = 1.00 + 1 = 1.01
d_2 = (x) m(x) v p(x) v ∿s(x)	$N(d_2)$ = 2.00 + 2 = 2.02
d_3 = (x) m(x) v ∿p(x) v s(x)	$N(d_3)$ = 4.00 + 4 = 4.04
d_4 = (x) m(x) v ∿p(x) v ∿s(x)	$N(d_4)$ = 8.00 + 8 = 8.08
d_5 = (x) ∿m(x) v p(x) v s(x)	$N(d_5)$ = 10.00 + 10 = 10.10
d_6 = (x) ∿m(x) v p(x) v ∿s(x)	$N(d_6)$ = 20.00 + 20 = 20.20
d_7 = (x) ∿m(x) v ∿p(x) v s(x)	$N(d_7)$ = 40.00 + 40 = 40.40
d_8 = (x) ∿m(x) v ∿p(x) v ∿s(x)	$N(d_8)$ = 80.00 + 80 = 80.80

A partir de los números asociados a las fórmulas anteriores, pueden deducirse los números asociados a todos los tipos de proposiciones categóricas universales que pueden figurar como premisas o como conclusiones de silogismos categóricos, ya que cualquiera de las citadas proposiciones puede expresarse en forma de una conjunción de dos de las precedentes fórmulas.

Obtenemos así los números característicos siguientes:

N(Amp) = $N(d_5)$ + $N(d_6)$ = 10.10 + 20.20 = 30.30

N(Apm) = $N(d_3)$ + $N(d_4)$ = 4.04 + 8.08 = C.0C

N(Emp) = N(Epm) = $N(d_7)$ + $N(d_8)$ = 40.40 + 80.80 = C0.C0

N(Ams) = $N(d_5)$ + $N(d_4)$ = 10.10 + 40.40 = 50.50

N(Asm) = $N(d_2)$ + $N(d_4)$ = 2.02 + 8.08 = A.0A

N(Esm) = N(Ems) = $N(d_6)$ + $N(d_8)$ = 20.20 + 80.80 = A0.A0

N(Asp) = $N(d_2)$ + $N(d_8)$ = 2.02 + 20.20 = 22.22

N(Esp) = $N(d_4)$ + $N(d_8)$ = 8.08 + 80.80 = 88.88

En cuanto a los números asociados a las proposiciones categóricas particulares -cada una de ellas contradictoriamente opuesta a una de las anteriores- que también pueden figurar como premisas o como conclusiones de silogismos categóricos, se obtendrán del modo siguiente:

N(Omp) = 2ª sección de FF.FF-N(Amp) = CF

N(Omp) = 2ª sección de FFF-N(Apm) = F3

N(Imp) = N(Ipm) = 2ª sección de FFF-N(Emp) = 3F

N(Oms) = 1ª sección de FFF-N(Ams) = AF.00

N(Osm) = 1ª sección de FFF-N(Asm) = F5.00

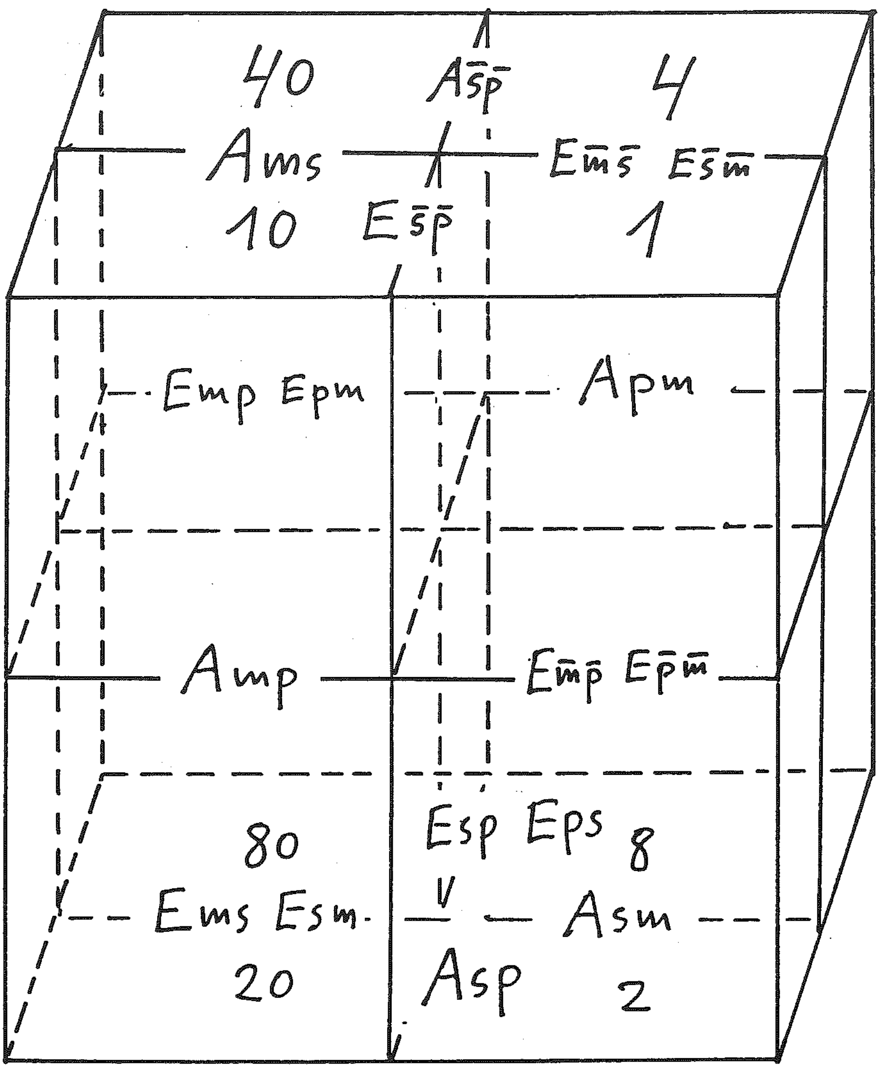
N(Ism) = N(Ims) = 1ª sección de FFF-N(Ems) = 5F.00

N(Osp) = cualquiera de las secciones de FFF-N(Asp) = DD o DD.00

N(Isp) = cualquiera de las dos secciones de FFF-N(Esp) = 77 o 77.00

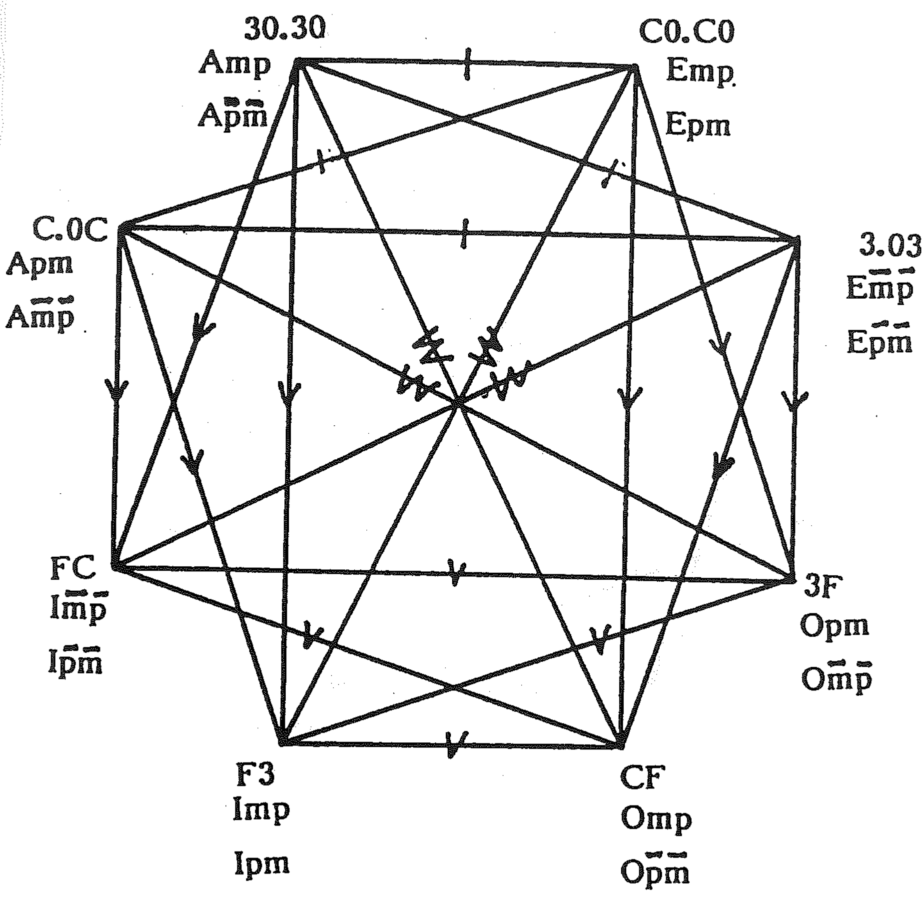
CUADRO IX.B.

EL CALCULO ARITMETICO DE LAS CONCLUSIONES SILOGISTICAS PRESENTADO COMO UN JUEGO DE COMBINACIONES DE DADOS NUMERADOS CON POTENCIAS DE 2 ESCRITAS EN HEXADECIMAL



CUADRO X.
JUEGO DE MAYORES.

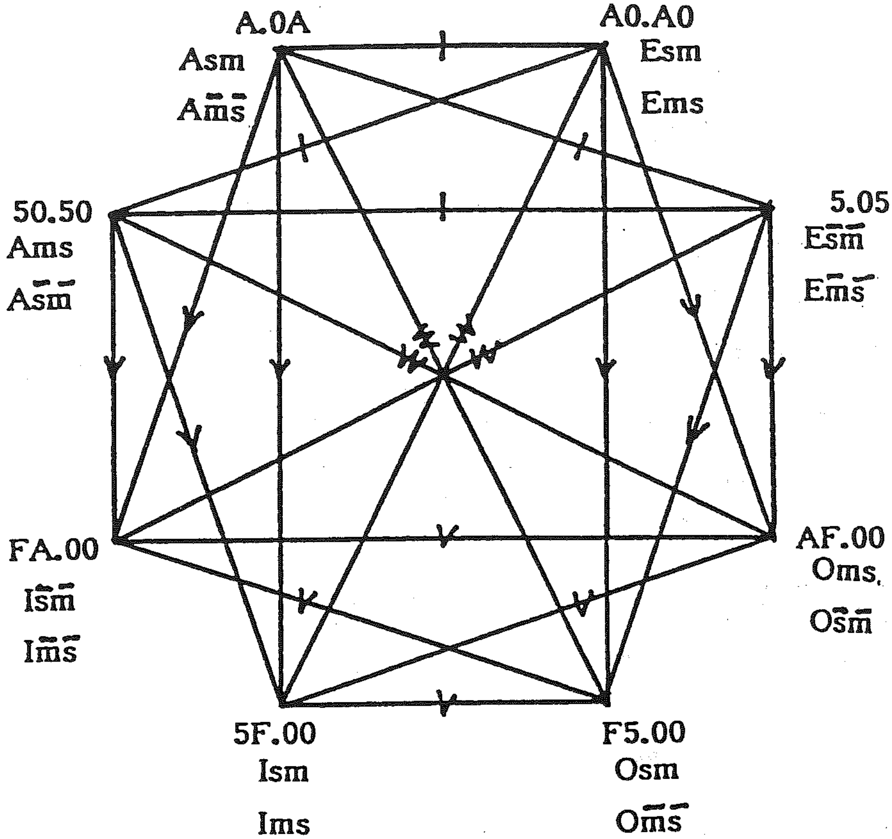
Octógono de Hacker para las clases de equivalencia de las proposiciones categóricas en m y p (mayores) con sus números característicos



CUADRO XI.

JUEGO DE MENORES.

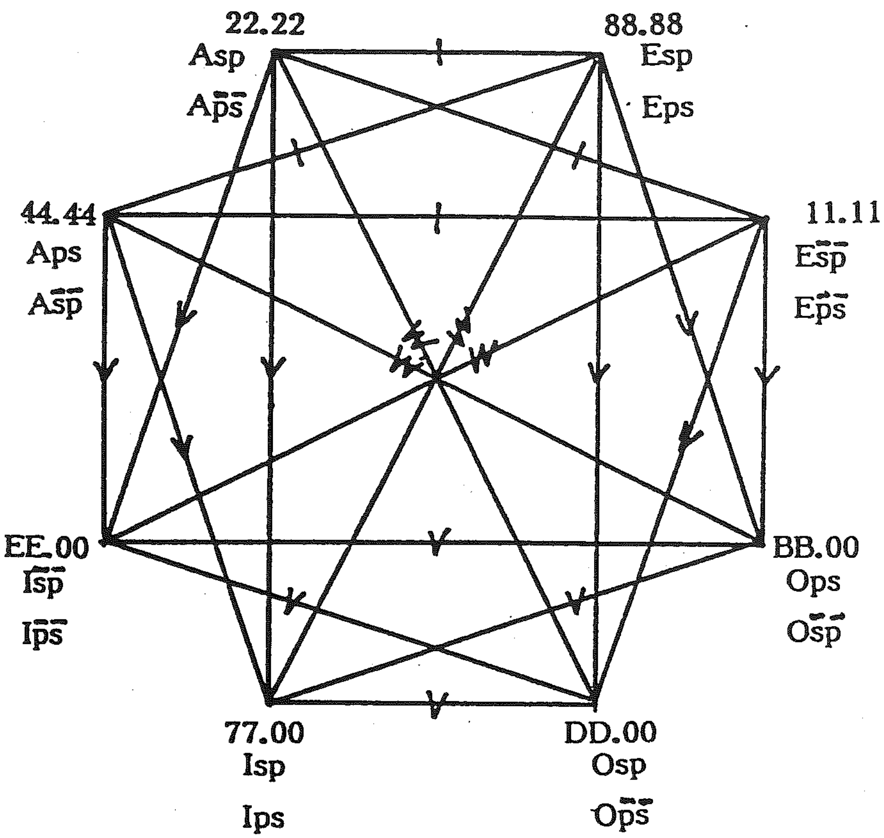
Octógono de Hacker para las clases de equivalencia de las proposiciones categóricas en m y s (menores) con sus números característicos



CUADRO XII.

JUEGO DE CONCLUSIONES.

Octógono de Hacker para las clases de equivalencia de las proposiciones categóricas en s y p (conclusiones) con sus números característicos.



CUADRO XIII.

TABLA ARITMETICA DE LA SILOGISTICA

La conclusión es válida si y sólo si el supremo binario de los números asociados a las premisas absorbe binariamente el número asociado a la conclusión. Los silogismos fundados en la "conversio per accidens" (designada por la p de su nombre) sólo son válidos si se admite expresamente la condición de existencia del término m (Imm) o p (Ipp).

Mayor / Menor	Amp 30.30	Apm C.0C	Emp Epm C0.C0	Imp Ipm 3F	Omp CF	Opm F3
Ams 50.50	DARAPTI 30.30 50.50 F.0F Imm 7F.7F 77 Isp	BAMALIP C.0C 50.50 33 Ipp 5C.7F 77 Isp	FELAPTON C0.C0 50.50 F.0F Imm DF.DF DD Osp FESAPO idem	DISAMIS 3F 50.50 50.7F 77 Isp DIMATIS idem	BOCARDO CF 50.50 50.DF DD Osp	F3 50.50 50.F3 no hay conclusièn
Asm A.0A	BARBARA 30.30 A.0A 3A.3A 22.22 Asp	C.0C A.0A E.0E no hay conclusièn	CELARENT C0.C0 A.0A CA.CA 88.88 Esp CESARE idem	3F A.0A A.3F no hay conclusièn	CF A.0A A. CF no hay conclusièn	F3 A.0A A.FB no hay conclusièn
Esm A0.A0 Ems	30.30 A0.A0 B0.B0 no hay conclusièn	CAMESTRES C.0C A0.A0 AC.AC 88.88 Esp CALEMES	C0.C0 A0.A0 D0.D0 no hay conclusièn	3F A0.A0 A0.BF no hay conclusièn	CF A0.A0 A0.EF no hay conclusièn	F3 A0.A0 A0.F3 no hay conclusièn

Ism 5F.00 Ims	DARII 30.30 5F.00 7F.30 77.00 Isp DATISI Idem	C.0C 5F.00 5F.0F no hay conclusièn	FERIO, FESTINO C0.C0 5F.00 DF.C0 DD.00 Osp FERISON, FRESISON Idem	3F 5F.00 5F.3F no hay conclusièn	CF 5F.00 5F.CF no hay conclusièn	F3 5F.00 5F.F3 no hay conclusièn
Oms AF.00	30.30 AF.00 BF.30 no hay conclusièn	C.0C AF.00 AF.00 no hay conclusièn	C0.C0 AF.00 EF.C0 no hay conclusièn	3F AF.00 AF.3F no hay conclusièn	CF AF.00 AF.CF no hay conclusièn	F3 AF.00 AF.F3 no hay conclusièn
Osm F5.00	30.30 F5.00 F5.30 no hay conclusièn	BAROCO C.0C F5.00 FD.0C DD.00 Osp	C0.C0 F5.00 F5.C0 no hay conclusièn	3F F5.00 F5.3F no hay conclusièn	CF F5.00 F5.CF no hay conclusièn	F3 F5.00 F5.F3 no hay conclusièn

NUMEROS ASOCIADOS A LAS CONCLUSIONES

N(Asp) = 22.22 N(Esp) = 88.88 N(Isp) = 77.00 y 77 N(Osp) = DD.00 y DD

CUADRO XIV.

SISTEMA EQUIVALENCIAL DE LOGICA DEONTICA (ESDL).

Axiomas.

A0. Todas las tautologías de la lógica proposicional cuyas variables hayan sido sustituídas por fórmulas deónticas del ESDL. $t_i(d)$

A1. $P(p \vee q) \leftrightarrow Pp \vee Pq$

A2. $P(p \& q) \leftrightarrow Pp \; \& \; Pq \; \& \; \Delta(p \& q)$

A3. $P(p \vee \sim p) \leftrightarrow \underline{t}$

A4. $\Delta(p \& \sim p) \leftrightarrow \underline{f}$

Definiciones.

D1. $Op =_{df} \sim P \sim p$

D2. $Php =_{df} \sim Pp$

D3. $Fac\ p =_{df} Pp \; \& \; P\sim p$

Reglas de inferencia.

R1. Una variable puede ser sustituida por otra variable o por un compuesto molecular de variables.

R2. La regla de derivación usual (modus ponens).

R3. Fórmulas equivalentes según la lógica proposicional pueden sustituirse recíprocamente en el ESDL.

ECUACIONES ASOCIADAS A LA BASE AXIOMATICA DEL SISTEMA

A0*. PARA TODO I, $N(t_i(d)) = 0$

A1*. $N(P(p \vee q)) = (N(Pp), N(Pq))$

A2*. $N(P(p \& q)) = [N(Pp), N(Pq), N(\Delta(p \& q))]$

A3*. $N(P(p \vee \sim p)) = 0$

A4*. $N(\Delta(p \& \sim p)) = FFF$

D1*. $N(Op) = FFF - N(P\sim p)$

D2*. $N(Php) = FFF - N(Pp)$

D3*. $N(Fac\ p) = [N(Pp), N(P\sim p)]$

CUADRO XV.

SISTEMA DE LOGICA DEONTICA

PARA NORMAS DE PRIMER ORDEN

(presentado por Von Wright en Florencia en 1981 en el Segundo Congreso de "Lógica, Informática, Derecho")

Axiomas

A0. Todas las tautologías del cálculo proposicional cuyas variables se hayan sustituido por fórmulas deónticas.

A1. $P(p \vee q) \leftrightarrow Pp \vee Pq$

A2. $P(p \vee \sim p)$

A3. $O(p \vee \sim p)$

A4. $Op \leftrightarrow \sim P \sim p$

CUADRO XVI.

ARITMETIZACION DEL ESDL.

1. Asociación entre fórmulas deónticas componentes del ESDL y potencias de 2 (en hexadecimal).

N(P(pvq)) $=2^0=1$	N(Ppv∿Fac q)) $=2^4=10$	N(Δ(p&q)) $=2^8=100$
N(P(pv∿q)) $=2^1=2$	N(P∿pv∿Fac q)) $=2^5=20$	N(Δ(p&∿q)) $=2^9=200$
N(P(∿pvq)) $=2^2=4$	N(Pqv∿Fac p)) $=2^6=40$	N(Δ(∿p&q)) $=2^A=400$
N(P(∿pv∿q)) $=2^3=8$	N(P∿qv∿Fac p)) $=2^7=80$	N(Δ(∿p&∿q)) $=2^B=800$

2. Asociación entre operaciones, relaciones y constantes lógicas, de un lado y aritméticas, de otro.

Fórmulas deónticas:	d,e,...	N(d),N(e),...≤FFF	Números naturales
Operaciones lógicas		Operaciones aritméticas	
Negación:	∿d	FFF-N(d)	Complemento binario
Disyunción:	d v e	(N(d), N(e))	Infimo binario
Conjunción:	d & e	[N(d), N(e)]	Supremo binario
Relaciones lógicas		Relaciones aritméticas	
Implicación:	d → e	N(d) ÷ N(e)	Absorción binaria
Equivalencia:	d ↔ e	N(d) = N(e)	Igualdad
Constantes lógicas		Constantes aritméticas	
Tautología:	t	0	Cero
Contradicción:	f	FFF = 2^C-1	Supremo de todos los números

3. Método aritmético de decisión.

Una fórmula deóntica es una tautología (resp., una contradicción) si y sólo si el número asociado a ella es igual a 0 (resp., igual a FFF). Una fórmula deóntica implica (resp., es equivalente a) otra si y sólo si el número asociado a la primera absorbe (resp., es igual a) el número asociado a la segunda.

CUADRO XVII.

CALCULO DE LOS NUMEROS CARACTERISTICOS DE LAS FORMULAS DEONTICAS FUNDAMENTALES DEL ESLD.

Permisiones

N(Pp) =[1,2,10] =13
N(P∿p) =[4,8,20] =2C
N(Pq) =[1,4,40] =45
N(P∿q) =[2,8,80] =8A
N(P(p&q)) =[13,45,100] =157
N(P(p&∿q)) =[13,8A,200]=29B
N(P(∿p&q)) =[2C,45,400]=46D
N(P(∿p&∿q))=[2C,8A,800] =8AE

Obligaciones

N(O∿p) =N(∿Pp) =FFF-N(Pp) =FFF-13 =FEC
N(Op) =N(∿P∿p) =FFF-N(P∿p) =FFF-2C =FD3
N(O∿q) =N(∿Pq) =FFF-N(Pq) =FFF-45 =FBA
N(Oq) =N(∿P∿q) =FFF-N(P∿q) =FFF-8A =F75
N(O(∿pv∿q)) =N(∿P∿(∿pv∿q)) =N(∿P(p&q)) =FFF-157 =EA8
N(O(∿pvq)) =N(∿P∿(∿pvq)) =N(∿P(p&∿q))=FFF-29B=D64
N(O(pv∿q)) =N(∿P∿(pv∿q)) =N(∿P(∿p&q))=FFF-46D=B92
N(O(pvq)) =N(∿P∿(pvq)) =N(∿P(∿p&∿q))=FFF-8AE=751

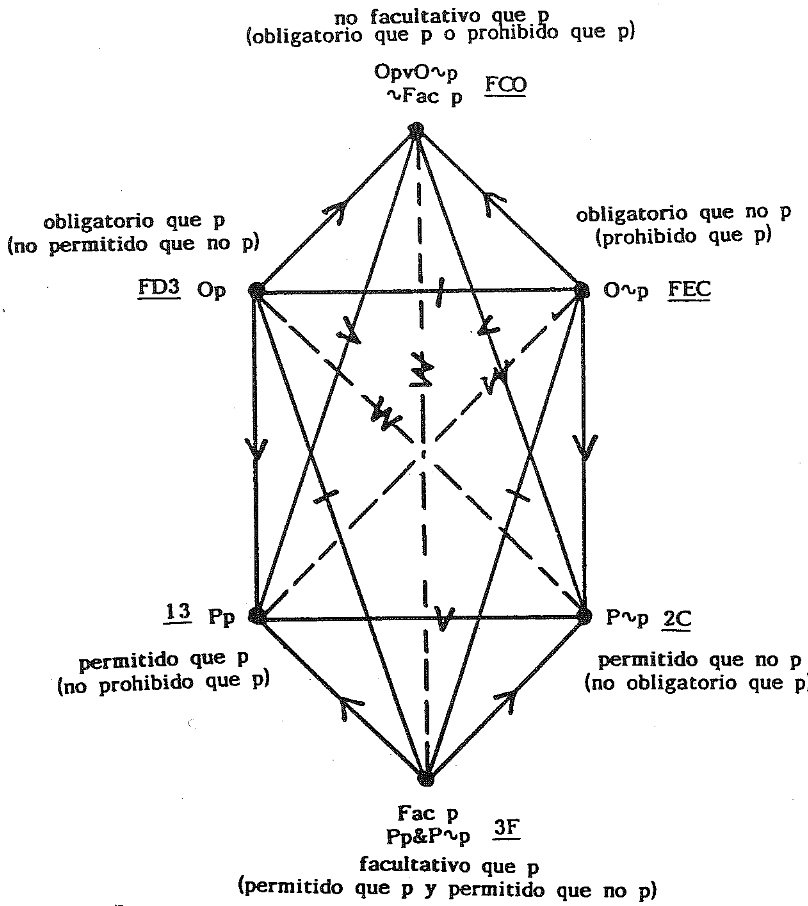
Obligaciones de conjunciones de dos acciones

N(O(p&q)) = N(∿P∿(p&q)) = N(∿P(∿pv∿q)) = FFF-N(P(∿pv∿q)) =FFF-8 =FF7
N(O(p&∿q)) = N(∿P∿(p&∿q)) = N(∿P(∿pvq)) = FFF-N(P(∿pvq)) =FFF-4 =FFB
N(O(∿p&q)) = N(∿P∿(∿p&q)) = N(∿P(pv∿q)) = FFF-N(P(pv∿q)) =FFF-2 =FFD
N(O(∿p&∿q)) = N(∿P∿(∿p&∿q)) = N(∿P(pvq)) = FFF-N(P(pvq)) =FFF-1 =FFE

CUADRO XVIII.

Lógica deóntica clásica.

Relaciones lógicas entre funciones deónticas de un argumento proposicional p (que expresa la ejecución de una acción cualquiera por un agente cualquiera).

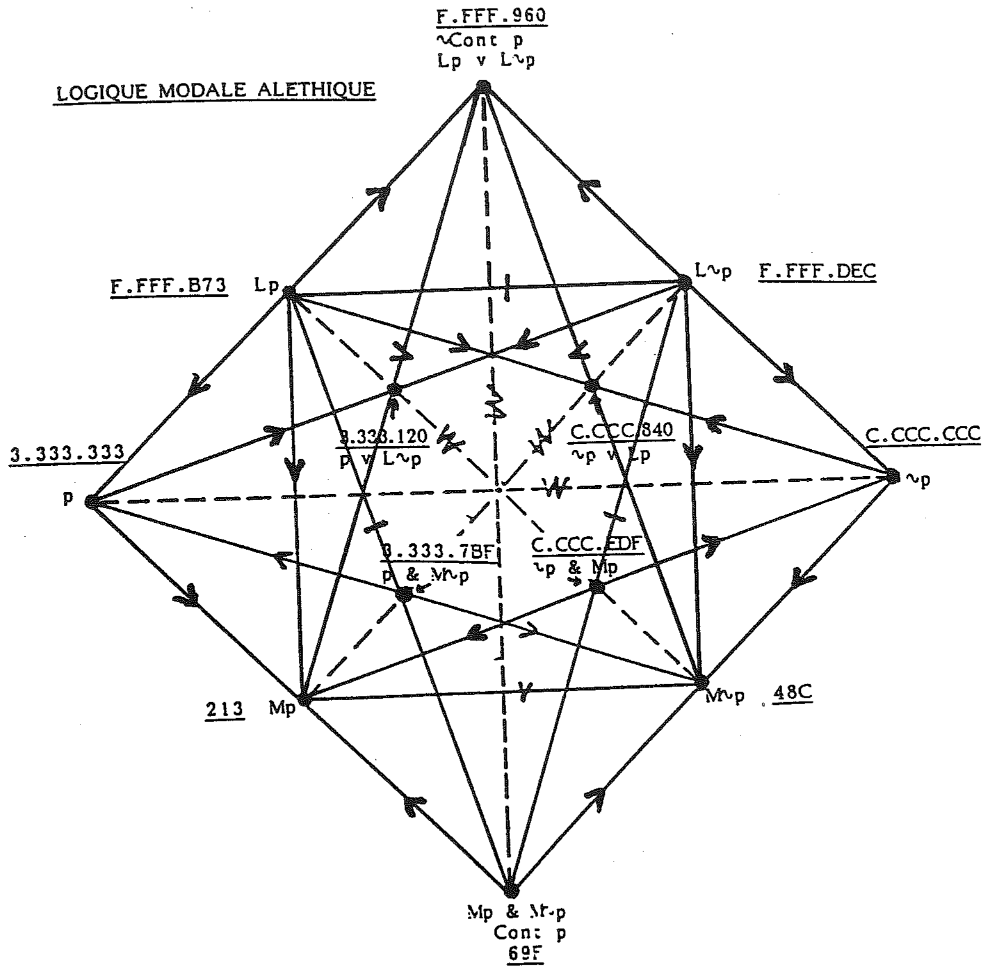


Relación lógica entre dos fórmulas p_1 y p_2			Relación aritmética entre sus números asociados $N(p_1)$ y $N(p_2)$	
implicación	$p_1 \to p_2$	si y sólo si	$N(p_1) \div N(p_2)$	absorción
incompatibilidad	$p_1 \mid p_2$	si y sólo si	$[N(p_1), N(p_2)] = FFF$	supremo = FFF
contradicción	$p_1 \; w \; p_2$	si y sólo si	$N(p_1)+N(p_2) = FFF$	suma = FFF
alternativa	$p_1 \vee p_2$	si y sólo si	$(N(p_1), N(p_2)) = 0$	ínfimo = 0

CUADRO XIX.

LOGICA MODAL ALETICA

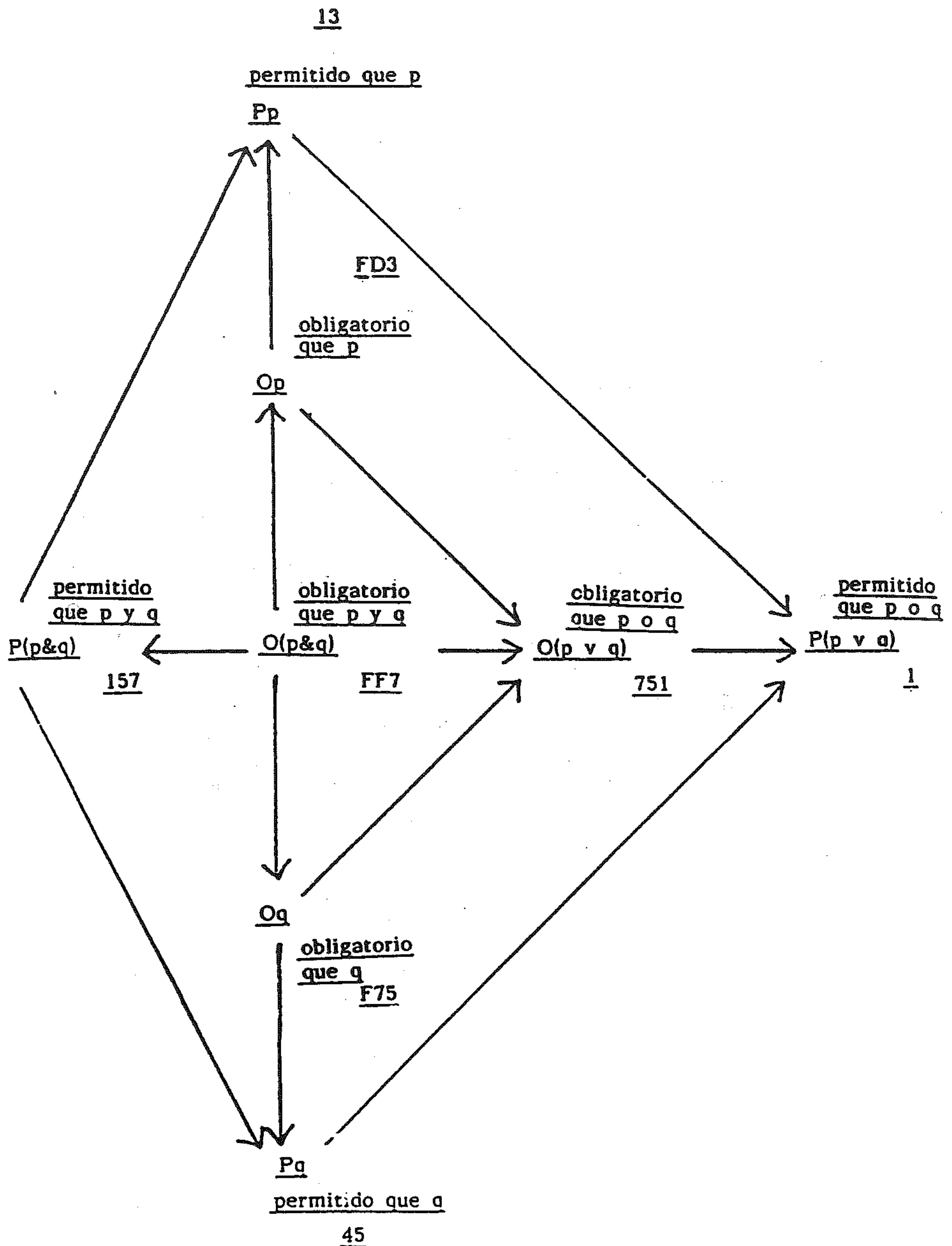
Traducción de las relaciones lógicas entre funciones de p por relaciones aritméticas entre sus números asociados



Relaciones lógicas entre dos fórmulas g y h		Relaciones aritméticas entre sus números asociados N(g) y N(h)
g → h	si y sólo si	N(g) ÷ N(h)
g¦h	si y sólo si	[N(g), N(h)] = F.FFF.FFF
g w h	si y sólo si	N(g) + N(h) = F.FFF.FFF
g v h	si y sólo si	(N(g), N(h)) = 0

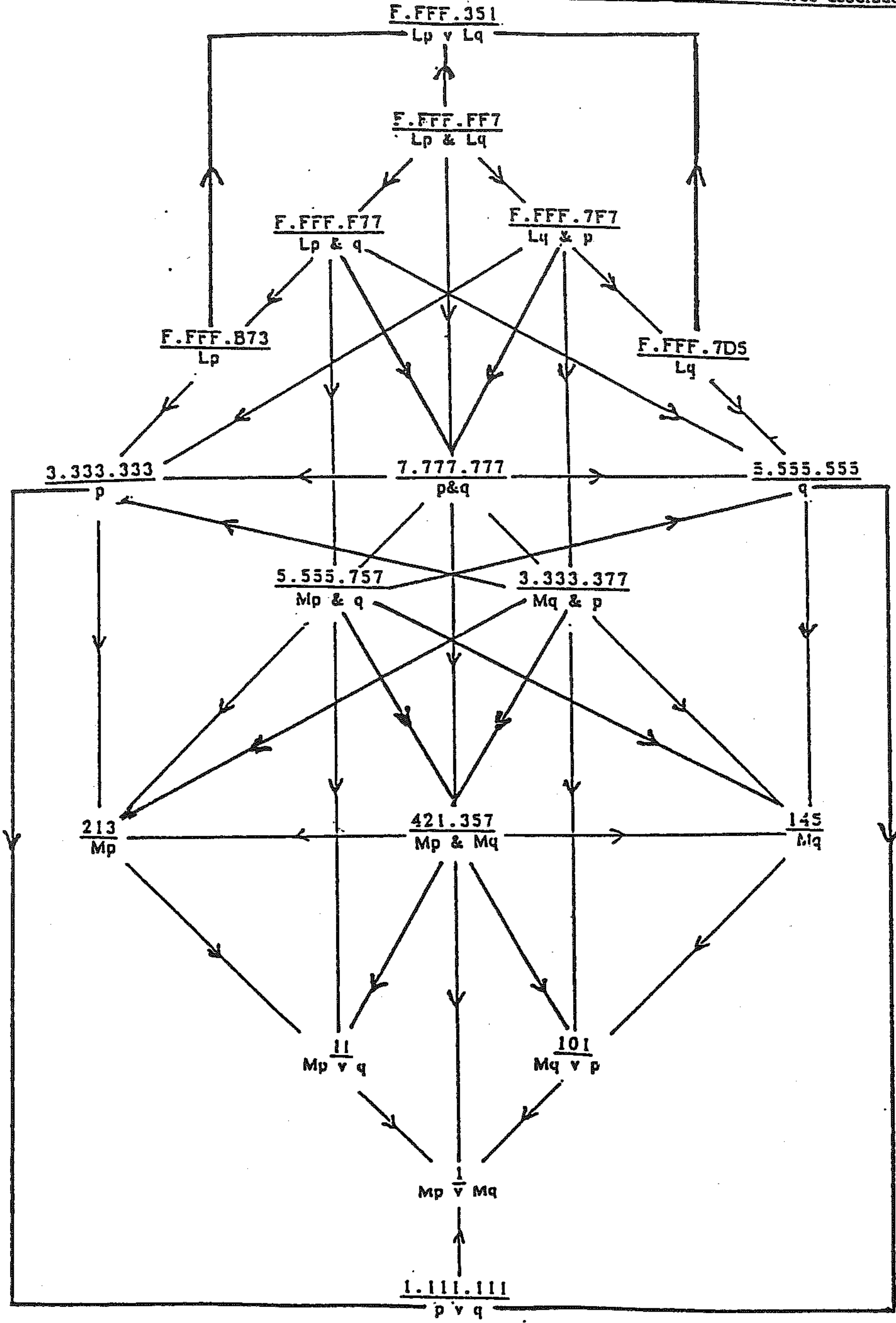
CUADRO XX.A.

CADENAS DE IMPLICACIONES A PARTIR DEL VERTICE LOGICO O(p&q) Y DE ABSORCIONES DESDE EL VERTICE ARITMETICO ASOCIADO FF7.



CUADRO XX.B.

Cadenas de implicaciones entre fórmulas y de absorciones entre números asociados



NOTAS

1 Llamamos **antítesis** de un **sistema** a toda fórmula contradictoria de cualquier **tesis** del mismo.

2 Véanse a este respecto en **SÁNCHEZ-MAZAS [1986]**, pp. 798-799 o en **SÁNCHEZ-MAZAS [1987a]**, pp. 203-204, las **condiciones aritméticas** necesarias y suficientes para que una red deóntica de un **sistema jurídico positivo** sea, respectivamente, **completa** y **coherente** (**consistente**). Véase también en **SÁNCHEZ-MAZAS [1986]**, p. 799 o en **SÁNCHEZ-MAZAS [1987a]**, p. 204 y p. 218, Cuadro VIII, la **verificación aritmética**, respectivamente, de la **consistencia** y de la **completitud** de la red deóntica analizada para ilustración de la teoría, a saber, la red definida por los **requisitos del matrimonio** en el **Código civil español** actualmente en vigor.

3 Decimos, en esta esfera, que una red deóntica de un **sistema jurídico positivo** es **completa** si y sólo si todo **caso saturado** de la misma tiene en ella, al menos, una **solución maximal** y que es **incompleta** en caso contrario. Cfr. a este respecto **SÁNCHEZ-MAZAS [1987a]**, p. 224, nota 11.

4 De acuerdo con la doctrina y las precisas definiciones formuladas en **ALCHOURRÓN and BULYGIN [1971]** (traducción española: Introducción a la metodología de las ciencias jurídicas y sociales, Buenos Aires: Astrea, 1974), que aquí seguimos salvo en las excepciones explícitamente formuladas en **SÁNCHEZ-MAZAS [1987a]**, especialmente en las pp. 185-187, no constituyen **lagunas** de la ley solamente los **casos saturados** (en el contexto de Alchourrón y Bulygin: los **casos elementales**) que no están en **correlación normativa** con **ninguna solución**, sino también todos aquéllos que sólo lo están con **soluciones minimales** (pero no con **soluciones maximales**).

5 Decimos también, en esta esfera, que una red deóntica de un **sistema jurídico positivo** es **coherente** (**consistente**) si y sólo si todo **caso saturado** -y, por lo tanto, a fortiori, todo **caso**, a secas, de la misma tiene, como máximo, una **solución maximal** y que es **incoherente** (**inconsistente**) en caso contrario. Véase a este respecto **SÁNCHEZ-MAZAS [1987a]**, p. 224, nota 12.

6 **Soluciones maximales** son las que establecen el carácter **obligatorio**, **prohibido** o **facultativo** (**bilateralmente permitido**) de una **acción** o **función de acciones**, mientras que **minimales** son las que establecen el carácter **unilateralmente permitido** (permisión positiva o permisión negativa, ésta última equivalente a no obligación) de una acción o función de acciones.

7 No es posible resumir siquiera aquí la sucesión de razones históricas, lógicas y filosóficas -todas ellas con una raíz comun en la **Característica numérica** y los **cálculos lógico-aritméticos** de Leibniz- que me ha llevado a la concepción y sucesivos desarrollos y

formulaciones de mi noción de **número lleno** o **hipersaturado**, en cuya necesidad -o, cuando menos, conveniencia- en todo **modelo aritmético** simple y eficaz de un **sistema** de base **intensional**, como **asociado** permanente de todo **concepto** (y, eventualmente, de toda **fórmula**) **contradictorio** o, en la terminología leibniziana, **falso** o correspondiente a su noción de **non-Ens** -equivalente **intensional** de la **clase vacía**- me he venido reafirmando desde que formulé esa noción hace diez años en SÁNCHEZ-MAZAS [1977].

La finalidad principal de ese trabajo era demostrar **de modo constructivo** la plena viabilidad teórica y práctica de los geniales intentos leibnicianos -formulados por primera vez de modo claro en sus siete famosos opúsculos de LEIBNIZ [1903], pp. 42 a 89- de **aritmetización** de un **sistema de términos lógicos** y de la **silogística** desde una perspectiva **intensional**, refutando, de paso, los falaces argumentos opuestos a esos intentos en COUTURAT [1901].

En ese contexto, donde, para seguir de cerca a Leibniz, el **sistema de números naturales** por mi elegido para representar un **sistema de términos lógicos** es un **conjunto de números cerrado** respecto del **mínimo común múltiplo** (asociado a la **combinación de términos**), el **máximo común divisor** (asociado a la **alternativa de términos**) y el **cociente** Φ/N del **número hipersaturado** Φ por el **número característico de un término** (asociado a la **negación** de éste), la expresión de dicho **número lleno** o **hipersaturado**, asociado a todo término **irreal**, **falso** o **contradictorio** tenía que ser (véase la p. 366 del citado trabajo) el **mínimo común múltiplo de todos los números del sistema** o lo que es lo mismo el **producto de todos los números primos del sistema**.

En SÁNCHEZ-MAZAS [1979], el **número lleno** es definido de la misma manera en la p. 52 y asociado a la **noción imposible**, correspondiente al al concepto intensional leibniciano de **non-Ens**, que posee **predicados contradictorios** y, por ello, incluso **todos los predicados**.

En SÁNCHEZ-MAZAS [1980], el **número lleno** es definido también en la p. 176 como el **producto de todos los números primos** del **sistema numérico** y asociado a la **noción falsa o irreal**.

Igualmente en SÁNCHEZ-MAZAS [1981], pp. 47-49, el número asociado a la **noción falsa o irreal**, que **contiene intensionalmente todas las nociones** -siendo **única**, como su correspondiente **noción extensional**, la **clase vacía**-, es definido como el **producto de todos los números primos del sistema**.

Es en SÁNCHEZ-MAZAS [1978], trabajo donde por primera vez se pasa de los **números primos** a las **potencias de 2** como generadores del **sistema numérico** asociado a un **sistema lógico** o **normativo**, y de las operaciones **mínimo común múltiplo**, **máximo común divisor** y Φ/N a las respectivamente correspondientes **supremo binario**, **ínfimo binario** y $\Phi-N$, donde el **número hipersaturado** ha de ser definido en consecuencia, en la p. 186, como la **suma de todas las potencias de 2 del sistema numérico** o, lo que es lo mismo, como el **supremo de todos los números** del mismo.

En ese trabajo se señala, por otra parte, que un **sistema numérico** generado por **números primos** y dotado de las tres operaciones citadas en primer lugar tiene **la misma estructura** que (o **es isomorfo de**) un **sistema numérico** generado por **potencias de 2** y dotado de las operaciones citadas en segundo lugar (nota 21, pp. 187-188 y nota 22, páginas 188-189 del citado trabajo), por lo cual los dos pueden ser utilizados indistintamente, siempre que tengan **el mismo número de dimensiones**, para representar o traducir el mismo **sistema lógico** o **normativo.**

En mis trabajos posteriores siempre he utilizado, sin embargo, el segundo tipo de **sistema numérico** (a pesar de que Leibniz, que fué, junto con los chinos, el descubridor del **sistema binario** de numeración, nunca lo utilizó en el contexto que ahora nos ocupa) y sólo en los cuatro trabajos **SÁNCHEZ-MAZAS [1987b]**, **[1987c]** **[1988a]** y **[1988b]** lo he hecho eligiendo la forma de expresión **hexadecimal.**

8

Como ya he señalado en la nota anterior, Louis Couturat, que fué el descubridor, en **COUTURAT [1901]**, y editor, en **LEIBNIZ [1903]**, entre otras cosas, de algunos de los más importantes **cálculos lógicos** del filósofo y matemático de Leipzig y, sin duda, el primer gran especialista en los mismos, pretendió invalidar en La Logique de Leibniz los repetidos intentos leibnicianos por conseguir **representaciones matemáticas** adecuadas de las **operaciones** y **relaciones lógicas,** cuando éstas se consideran desde una perspectiva **intensional** o **comprehensiva,** alegando, entre otras cosas, que "les **rapports de compréhension** ne sont pas **susceptibles de figuration géométrique** comme les **rapports d'extension,** et...il ne suffit pas de renverser ou d'intervertir ceux-ci pour en tirer ceux-là. Leibniz **s'était donc trompé** en croyant que les uns étaient purement et simplement inverses des autres...Cette **erreur** a entaché ses essais de Calcul logique et a contribué à les faire **avorter**"(**COUTURAT [1901]**, p. 32).

Esta posición de Couturat, que siempre he considerado infundada, a pesar de lo mucho que influyó para que lógicos posteriores renunciaran a seguir a Leibniz por esa vía, concentrando sus investigaciones en la perspectiva opuesta, la **extensional,** ha sido por mi ampliamente desmentida, principalmente mediante el perfeccionamiento y conclusión de alguno de los mencionados intentos, pero, además, específicamente refutada con la demostración en **SÁNCHEZ-MAZAS [1977]** nota 10, pp. 381-382, del grave error cometido por Couturat en su **pretendida prueba** (en la p. 28 de su obra La Logique de Leibniz) de la inviabilidad de una representación geométrica del silogismo **Celarent,** considerado según la perspectiva **intensional.** Mi demostración de que esa suerte de **contra-ejemplo** a las tesis **intensionalistas** leibnicianas se basa en una representación flagrante y descaradamente **incorrecta** (a pesar de que durante más de tres cuartos de siglo nadie lo había advertido) de las **relaciones intensionales** por parte de Couturat fué enseguida recogida y aceptada sin reservas por importantes lógicos actuales como Christian Thiel, Profesor de Lógica de la Universidad de Erlangen, en la R.F.A., quien en su ponencia **THIEL [1979]**, pp. 18-19, dice, a propósito del juicio de Couturat y de mi refutación: "**Meiner Kenntnis hat Miguel Sánchez-Mazas das Verdienst, dieses Urteil berichtigt zu haben, indem er auzeigte das Couturat bei seiner Argumentation ein Fehler unterlaufen ist, der seine Folgerungen als verfrüht, wenn nicht als überhaupt unbegründer erweist** (p. 18)...**Sánchez-Mazas hat gegenüber Couturat Recht**" (p. 19).

Por otra parte, el interés por seguir la orientación **intensional** de Leibniz es creciente entre los lógicos de todo el mundo. Un ejemplo significativo de ese interés fué el importante **Simposio** celebrado en la **Leibniz-Gesellschaft** de Hannover en Noviembre de 1978 sobre el tema "**Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart**", al que fueron presentadas, entre otras, las citadas ponencias SÁNCHEZ-MAZAS [1979] y THIEL [1979].

Sobre la polémica **extensión-intensión** en la **lógica de Leibniz** puede consultarse muy especialmente, entre otros muchos trabajos que no podemos enumerar aquí, la obra KAUPPI [1960].

9 Véase, por ejemplo, SÁNCHEZ-MAZAS [1978], p. 176 y SÁNCHEZ-MAZAS [1987a], pp. 197 y 214.

10 Estos trabajos se realizan en virtud de un acuerdo internacional de carácter inicialmente bilateral entre el **Istituto per la Documentazione Giuridica** del C.N.R. en Florencia, por parte italiana, y el CALIJ por parte española, extendido, no obstante, a la participación de otros países gracias a la colaboración y asesoramiento de expertos norteamericanos, como la del Profesor L.E. Allen de la **Law School** de la Universidad de Michigan (Ann Arbor) -véase, a este respecto ALLEN [1983]-, argentinos de la **escuela analítica** del Profesor Alchourrón, franceses del IRETIJ de Montpellier, etc. Las reacciones y comentarios publicados sobre nuestras propuestas y modelos en este contexto, entre 1982 y 1985, se han enumerado en SÁNCHEZ-MAZAS [1987a], nota 2, p. 222.

11 Decimos que un **caso** de una red deóntica está **saturado** en la misma si y sólo si es **determinante** en ella o, sin haber llegado a ser **determinante**, es un **caso elemental** (en la terminología de ALCHOURRÓN and BULYGIN [1971]) o lógico-deductivamente equivalente a un caso elemental. Un **caso saturado** en una red deóntica es, además, **estrictamente saturado** en la misma si y sólo si ninguna parte propia del caso dado es, a su vez, un **caso saturado**. Cfr. a este respecto SÁNCHEZ-MAZAS [1987a], pp. 180-182.

12 **Números saturados**, en nuestro contexto actual, son todos los números naturales iguales a $\Phi-2^p$, donde el exponente p es cualquier número natural inferior al **número de dimensiones** n de la **red numérica** y Φ es el **número hipersaturado**, igual a 2^n-1. Un **número saturado** tiene la propiedad (formalmente análoga a la propiedad correspondiente de un **caso saturado**) de que **absorbe aritméticamente** siempre **uno y sólo uno** de los números de todo **par** de **números complementarios** de la red numérica. Cfr. SÁNCHEZ-MAZAS [1987a], pp. 201 y 214.

13 Véase SÁNCHEZ-MAZAS [1987a], pp. 198-199 y 214.

14 Designamos aquí mediante la expresión '[X, Y]' el **supremo binario** de dos números naturales X e Y.

15 Designamos aquí mediante la expresión '(X, Y)' el **ínfimo binario** de dos números naturales X e Y.

16 Designamos aquí mediante la expresión '$\tilde{X}$' o la expresión 'Φ-X' el **complemento binario** de un número natural X.

17 Designamos aquí mediante la expresión 'X≑Y' la relación aritmética X **absorbe (binariamente) Y.**

18 Tomamos de **DOPP [1965]**, p. 272 la expresión de este famoso **axioma único** de Meredith para la **lógica proposicional.** Podrá encontrarse una expresión análoga en J.D. Monk, Mathematical Logic, New York/Heidelberg/Berlin: Springer, 1976, p. 132.

19 En el Capítulo V de su obra **ŁUKASIEWICZ [1954]**, dedicado al **problema de la decisión** en la **silogística,** el gran lógico polaco, tras haber constatado que existen **fórmulas silogísticas** significativas que son **indecidibles** en su **sistema axiomático** (es decir, que no pueden ser **demostradas** ni **refutadas** en el mismo), y después de haber evocado, como posible auxiliar en esta tarea, la **regla de rechazo** ("**rule of rejection**") de su compatriota Slupecki, valora la importancia de los **sistemas de números característicos** concebidos por Leibniz, principalmente en los siete ensayos a los que nos hemos referido en el segundo párrafo de la nota 7, y su posible papel como instrumento para la **verificación aritmética** no sólo de la **validez** de ciertas conclusiones, sino también de la **invalidez** de otras, mediante la construcción de **contra-ejemplos** en forma **numérica.**

Dice así Łukasiewicz: "**There exist significant expressions for instance CIabCNAabAba, which can neither be proved by our axioms and rules of assertion nor disproved by our axioms and rules of rejection. I call such expressions undecidable with respect to our basis. Undecidable expressions may be either true in Aristotelian logic or false. The expression CIabCNAabAba is, of course, false**" (l.c., p. 100).

En mi ponencia **SÁNCHEZ-MAZAS [1980]**, presentada al **III Congreso Internacional Leibniz** en Hannover, apliqué el método de los **números característicos,** por mi perfeccionado, precisamente a esa fórmula, propuesta por Łukasiewicz como **indecidible** en su sistema y demostré su **invalidez** mediante la construcción de un **contra-ejemplo numérico** (l.c., pp. 178-179).

Coincido así plenamente con esta conclusión del gran maestro de Lwow: "**Leibniz once said that scientific and philosophical controversies could allways be settled by a calculus. It seems to me that his famous 'calculemus' is connected with the above arithmetical interpretation of syllogistic rather than his ideas on mathematica logic**" (l.c., p. 129).

Sobre este problema véase también, entre otros, **CASTAÑEDA [1976]**, **RESCHER [1954]**, **MARSHALL [1977]** y **CORCORAN [1978]**.

20 Mis primeros intentos de perfeccionamiento y conclusión de los ensayos leibnicianos de **aritmetización de la silogística** se remontan al año 1952 en que publiqué en el Nº 1 de la revista **THEORIA** un artículo de 2 páginas en el que ya proponía el empleo del **mínimo común múltiplo** -en lugar de la **multiplicación,** propuesta por Leibniz -, como operación aritmética más adecuada para **representar** la **combinación** de términos lógicos, así como el del **máximo común divisor** para **representar** la **alternativa** o **adición lógica** que, como muy justamente había observado Couturat (**COUTURAT [1901]**, pp. 343-344), Leibniz jamás logró **representar aritméticamente** a la vez que la **combinación** o **producto lógico** dentro de un

único sistema de **representación aritmética de la lógica**, de tal modo que las **operaciones aritméticas** que quedaran, respectivamante **asociadas** a la **combinación** y a la **aternativa** fueran, como éstas, **duales**, recíprocamente **distributivas**, etc.

El articulito SÁNCHEZ-MAZAS [1952] venía, pues, a llenar un primer hueco palpable en el edificio de la **aritmetización** leibniciana de la **lógica**. Otros le seguirían con análoga finalidad.

En trabajos posteriores, ofrecí distintas formas de **representación algebráica** o **aritmética** de la **silogística**, demostrando **more mathematico** tanto los 19 **silogismos** universalmente válidos, como aquéllos cuya **conclusión** se basa en la **'conversio per accidens'** y aplicando siempre a éstos, como puede verse en el CUADRO XIII la exigencia, compartida por muchos lógicos modernos, de una **condición de existencia** del **término** involucrado en la **subalternación y conversión**, exigencia que equivale a una **tercera premisa**, como lo ha entendido HILBERT-ACKERMANNN [1949], en cuya página 48, por ejemplo, el **modo** DARAPTI es presentado con **tres premisas**, siendo la tercera la **condición de existencia del término medio**, de acuerdo con el alcance **existencial** de las **premisas categóricas** estudiado, entre otros, por CHURCH [1964].

De la **representación algebráica** de la **silogística** se ha ocupado también GERICKE [1952] y de la **aritmética**, muy recientemente, en el último **Congreso Internacional de Lógica**, celebrado en Moscú, el ruso BAKHTIYAROV [1987].

Por otra parte, con el fin de estudiar su posible utilidad en el marco de los intentos de **formalización** y **aritmetización** de las **estructuras lógicas** en la **esfera jurídica**, MARETTI [1976] dedicó en Informatica e Diritto un largo estudio a distintos **modelos algorítmicos de estructuras silogísticas**, ocupándose en el mismo especialmente de los modelos del lógico austríaco Von Freytag-Löringhoff, del italiano Annibale Pastore y de los mios, a los que consagra la tercera parte de su estudio (pp. 68-75), refiriéndose particularmente a SÁNCHEZ-MAZAS [1963], [1968] y [1973].

21 HACKER [1975] establece las **clases de equivalencia** de las **proposiciones categóricas** y sitúa las 4 **proposiciones** de cada una de esas **clases** en uno de los **vértices** de un **octógono**, marcando los símbolos de las **relaciones lógicas** que vinculan **dos proposiciones** en los **lados** o **diagonales** que unen los **vértices** en que aquéllas están situadas.

Hacker incluye entre las **proposiciones categóricas** también aquéllas que tienen como **sujeto** y/o como **predicado** algún **término negativo** como $\bar{s}$ (no-s) o $\bar{p}$ (no-p), etc. (que designan, por ejemplo, **no-hombre, no-animal, no-piedra**, etc.), situándose así en el marco de una **silogística ampliada** a tales **términos**, como la expuesta en THOMAS [1949], que extiende a éstos últimos el **sistema silogístico** de BOCHEŃSKI [1948], o en GERICKE [1952] o en MENNE [1962].

Este último demuestra que en ese marco hay **modos silogísticos** con **dos premisas negativas** que son **concluyentes**, como, entre otros (GARDERÖNT, HELENÏ, LIBERÖ, ..., véase l.c., p. 62), su **modo** NOVERÏ (CKOmpEsmI$\bar{s}\bar{p}$), cuya **verificación aritmética** en mi **modelo** se expone en SÁNCHEZ-MAZAS [1981], p. 50.

En nuestros CUADROS X, XI y XII, **para simplificar, sólo tomamos, como representantes de cada clase de equivalencia de Hacker, dos proposiciones distintas.**

22 Véase Von WRIGHT [1982], pp. 17-18.

23 Cfr. SÁNCHEZ-MAZAS [1987b] y SÁNCHEZ-MAZAS [1987c], especialmente pp. 85-92.

24 Desde nuestro punto de vista intensional o conjuntivo, los componentes elementales buscados deben ser, evidentemente, disyunciones elementales.

25 El símbolo 'Fac' está tomado de ALCHOURRÓN and BULYGIN [1971], p. 14: "The expressions P (permitted), O (obligatory), Ph (prohibited) and F (facultative...) are the deontic characters".

26 El símbolo "Ph" está tomado también de Alchourrón y Bulygin. Véase la nota anterior.

27 He aquí la prueba de la inclusión del mencionado sistema de Von Wright en nuestro sistema equivalencial:

- Los axiomas A0 y A1 son los mismos en ambos sistemas;
- Nuestro axioma A3 equivale al axioma A2 de Von Wright, que hemos puesto en forma equivalencial;
- El axioma A4 de Von Wright es nuestra definición D1;
- Finalmente, el axioma A3 de Von Wright puede ser fácilmente deducido de nuestros axiomas A2 y A4, del modo siguiente:

1. $P(p\&q) \leftrightarrow Pp \ \& \ Pq \ \& \ \Delta(p\&q)$	A2
2. $P(p\&{\sim}p) \leftrightarrow Pp \ \& \ P{\sim}p \ \& \ \Delta(p\&{\sim}p)$	1, ${\sim}p/q$
3. $\Delta(p\&{\sim}p) \leftrightarrow \underline{f}$	A4
4. $P(p\&{\sim}p) \leftrightarrow Pp \ \& \ P{\sim}p \ \& \ \underline{f}$	2, 3
5. $P(p\&{\sim}p) \rightarrow \underline{f}$	4, cálculo proposicional
6. ${\sim}P(p\&{\sim}p)$	5, cálculo proposicional
7. ${\sim}P{\sim}(p \vee {\sim}p)$	6, De Morgan
8. $O(p \vee {\sim}p)$ Von Wright, A3, q.e.d.	7, D1

28 Véase BLANCHÉ [1966], donde se propone el hexágono lógico (p. 56 y ss.) para completar el cuadrado lógico clásico incluido en él y se intenta luego aplicar a las modalidades (Capítulo VI) y a los imperativos, valores y modos subjetivos (Capítulo VII), entre los cuales se incluyen las modalidades deónticas, cuya estructura asimétrica, tanto en Von WRIGHT [1951a], como en ANDERSON [1967], es criticada por Blanché (l.c., pp. 93-96), quien en BLANCHÉ [1972] aplica su hexágono tanto a las modalidades aléticas (p. 577), como a las epistémicas (p. 579) y a las deónticas (p. 580). Véase también KALINOWSKI [1967], que propone una axiomatización y formalización de la teoría hexagonal de Blanché, así como KALINOWSKI [1972] (trabajo que se publicó en 1953 en Studia Logica), en cuya p. 33 el tetraedro de Kalinowski, precursor del hexágono de Blanché, es estudiado a la vez en su interpretación deóntica y modal alética.

29 Véase, por ejemplo, SÁNCHEZ-MAZAS [1978], p. 177, así como mi ponencia "Sistemas normativos, sistemas de Bertalanffy y redes numéricas binarias" en 3º Congresso Internazionale, sul tema: L'Informatica Giuridica e le Comunità Nazionali ed Internazionali, Roma, 9-14 de Mayo de 1983, Sesión III, Nº 18, 2, pp. 1-49.

30 Pueden observarse en la figura 15 relaciones lógicas entre fórmulas deónticas, a saber, 6 implicaciones, 3 incompatibilidades (exclusiones), 3 contradicciones y 3 alternativas, así como 15 relaciones aritméticas, asociadas a las primeras, entre los números asociados a las mencionadas fórmulas.

31 En esta figura pueden observarse 28 relaciones lógicas entre fórmulas modales aléticas, a saber, 18 implicaciones, 3 incompatibilidades (exclusiones), 4 contradicciones y 3 alternativas, así como 28 relaciones aritméticas, asociadas a las primeras, entre los números asociados a las mencionadas fórmulas.

32 El proceso de construcción del modelo aritmético de un sistema de lógica modal alética para fórmulas de primer grado modal y, más precisamente, el proceso de cálculo de los invariantes numéricos que deben quedar asociados a las clases de equivalencia de las fórmulas de tal sistema -invariantes utilizados en el CUADRO XIX. y en el CUADRO XX.B.- queda enteramente descrito y explicado en nuestra obra, de próxima aparición, SÁNCHEZ-MAZAS [1988b] y, más concretamente en su Capítulo 10, cuya versión francesa: "Identification et Analyse des Classes d'Équivalence de la Logique Modale par des Invariants Numériques" acaba de ser aceptada para su publicación en un número próximo de la revista Logique et Analyse, del Centre National de Recherches de Logique de Bélgica.

33 Véase ISTITUTO PER LA DOCUMENTAZIONE GIURIDICA (C.N.R.): Analisi Automatica della Legislazione. Sviluppi della ricerca dal 1981 al 1984, Firenze, dicembre 1984, donde se analizan mis aportaciones al programa de investigación colectivo, las experiencias realizadas con las mismas y su desarrollo.

34 Véase SÁNCHEZ-MAZAS [1978] y sus prolongaciones SÁNCHEZ-MAZAS [1982], [1986] y [1987a].

35 Véase WROBLEWSKI [1984], pp. 128-129: "Mathematization of law, proposed by M. Sánchez-Mazas, is used to describe legal system, to control some of its features, and to determine its consequences...These propositions are practically applied and verified".

36 Véase SÁNCHEZ-MAZAS [1978], Introduzione, p. 165 y su versión castellana: "Modelos aritméticos para la informática jurídica (Introducción)", Teorema, VIII /1, 1978, pp. 19-27. La referencia a un "derecho analítico" se encuentra en la p. 21.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] **ALCHOURRON, C.E. and BULYGIN, E. [1971]**: Normative Systems, Wien: Springer.

[2] **ALLEN, L.E. [1983]**: "Two Modes of Representing Sets of Legal Norms: Normalization and an Arithmetic Model", en 3º Congresso Internazionale sul tema: L'Informatica Giuridica e le Comunità Nazionali ed Internazionali, Roma, 9-14 de Mayo de 1983, Sesión III, Nº 16, pp. 1-61.

[3] **ANDERSON, A.R. [1967]**: "The Formal Analysis of Normative Systems" en N. Rescher (ed.): The Logic of Decision and Action, University of Pittsburgh Press, pp. 147-213.

[4] **BAKHTIYAROV, C.I. [1987]**: "Arithmetization of Assertoric and Modal Syllogistics", 8 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Moscow, USSR, 17-22 August 1987, Abstracts, Vol. I, Section 5, pp. 202-205.

[5] **BECKER, O. [1952]**: Untersuchungen über den Modalkalkül, Meisenheim: Hain.

[6] **BLANCHE, R. [1966]**: Structures intellectuelles, Paris: Vrin.

[7] **BLANCHE, R. [1972]**: "Sur la trivelence", Logique et Analyse, XV, 59-60, pp. 568-582.

[8] **BOCHENSKI, I.M. [1948]**: "On the Categorical Syllogism", Dominican Studies, I, pp. 35-37.

[9] **BRAINARD, B. [1974]**: reseña de **SANCHEZ-MAZAS, M. [1972b]** en Mathematical Reviews, XLVII, p. 1.065.

[10] **CASTAÑEDA, H.N. [1976]**: "Leibniz Syllogistico-Propositional Calculus", Notre Dame Journal of Formal Logic, XVII, pp. 481-500.

[11] **CHURCH, A. [1964]**: "The History of Question of Existential Import of Categorical Propositions", Proceedings of the 1964 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Jerusalem, August 26-September 2, 1964, Amsterdam: North-Holland, pp. 417-424.

[12] **CORCORAN, J. [1978]**: reseña de **MARSHALL, D., Jr. [1977]**, Mathematical Reviews, LVI.

[13] **COUTURAT, L. [1901]**: La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits, Paris: F. Alcan.

[14] **CURRY, H.B. [1976]**: reseña de **SANCHEZ-MAZAS, M. [1972a]**, Mathematical Reviews, L, p. 587.

[15] **DOPP, J. [1965]**: Notions de Logique Formelle, Louvain/Paris: Nauwelaerts.

[16] **DÜRR, K. [1949]**: "Die mathematische Logik von Leibniz", Studia Philosophica, VII, pp. 87-102.

[17] **FEYS, R. [1965]**: Modal Logics, Edited with some complements by Joseph Dopp, Louvain: Nauwelaerts; Paris: Gauthier-Villars.

[18] **GERICKE, H. [1952]**: "Algebraische Betrachtungen zu den Aristotelischen Syllogismen", Archiv der Mathematik, III, pp. 421-433.

[19] **HACKER, E.A. [1975]**: "The Octagon of Opposition", Notre Dame Journal of Formal Logic, XVI, 3, pp. 352-353.

[20] **HANSSON, B. [1971]**: "An Analysis of Some Deontic Logics", en R. Hilpinen (ed.): Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings, Dordrecht: Reidel, pp. 121-147.

[21] **HILBERT, D. und ACKERMANN, W. [1949]**: Grundzüge der theoretischen Logik, dritte, verbesserte, Auflage, Berlin: Springer.

[22] **HUGHES, G.E. and CRESSWELL, M.J. [1972]**: An Introduction to Modal Logic, reprinted with corrections, London: Methuen.

[23] **KALINOWSKI, G. [1967]**: "Axiomatisation et formalisation de la théorie hexagonale de l'opposition de M. Blanché (Système B)", Les études philosophiques, XXII, 2, pp. 203-209.

[24] **KALINOWSKI, G. [1972]**: "Théorie des propositions normatives", en G. Kalinowski: Etudes de Logique Déontique I (1953-1969), préface de Robert Blanché, Paris: Librairie Générale de Droit et Jurisprudence, pp. 3-53.

[25] **KALINOWSKI, G. et GARDIES, J.L. [1974]**: "Un logicien déontique avant la lettre: Gottfried Wilhelm Leibniz", Archiv für Rechts- und Sozialphilosophie, LX, 1, pp. 79-111.

[26] **KANGER, S. [1971]**: "New Foundations for Ethical Theory" en R. Hilpinen (ed.): Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings, Dordrecht: Reidel, pp. 36-58.

[27] **KAUPPI, R. [1960]**: Über die Leibnizsche Logik; mit besonderer Berücksichtigung des Problems der Intension und der Extension, Helsinki: Societas Philosophica (Acta Philosophica Fennica, Fasc. 12).

[28] **KRIPKE, S.A. [1959]**: "A Completeness Theorem in Modal Logic", The Journal of Symbolic Logic, XXIV, 1, pp. 1-14.

[29] **LEIBNIZ, G.W. [1903]**: Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre par Louis Couturat, Paris: Félix Alcan.

[30] **LEIBNIZ, G.W. [1930]**: "Elementa juris naturalis", en Sämtliche Schriften und Briefe, hrsg. von der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Darmstadt: Otto Reichl, 6 Reihe, 1 Band, pp. 465-485.

[31] **LEWIS, C.I. and LANGFORD, C.H. [1959]**: Symbolic Logic, Second Edition, New York/London: Dove.

[32] **ŁUKASIEWICZ, J. [1954]**: Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic, Oxford: Clarendon Press.

[33] **MARETTI, E. [1976]**: "Modelli algoritmici di strutture sillogistiche", Informatica e Diritto, II, 1, pp. 51-112.

[34] **MARSHALL, D., Jr. [1977]**: "Łukasiewicz, Leibniz and the arithmetization of the syllogism", Notre Dame Journal of Formal Logic, XVIII, 2, pp. 235-242.

[35] **MATES, B. [1983]**: "A Numerical Model of the Possible Worlds", IV Internationaler Leibniz-Kongress, Hannover, 14-19 November 1983, Vorträge, pp. 473-484.

[36] **MENNE, A. [1962]**: "Some results of investigation on the syllogism and their philosophical consequences", en A. Menne (ed.): Logico-Philosophical Studies, Dordrecht: Reidel, pp. 55-63.

[37] **PIAGET, J. [1972]**: Essai de logique opératoire, établie par Jean-Blaise Grize, Paris: Dunod.

[38] **PIAGET, J. et GARCIA, R. [1987]**: Vers une logique des significations, préface de Bärbel Inhelder, Genève: Murionde, Collection Science Nouvelle.

[39] **PRIOR, A.N. [1956]**: "Modality and Quantification in S5", The Journal of Symbolic Logic, XXI, 1, pp. 60-62.

[40] **RESCHER, N. [1954]**: "Leibniz's interpretation of his logical calculi", The Journal of Symbolic Logic, XIX, pp. 1-13.

[41] **SERRES, M. [1968]**: Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques, Paris: Presses Universitaires de France.

[42] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1952]**: "Notas preliminares para la fundamentación de una lógica matemática comprehensiva", Theoria (primera época), I, 1, pp. 25-26

[43] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1955]**: Formalización de la lógica según la perspectiva de la comprehensión, Madrid: Departamento de Filosofía e Historia de la Ciencia del C.S.I.C. (Cuadernos de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia, 4).

[44] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1963]** : Fundamentos matemáticos de la Lógica Formal, Caracas: Universidad Central de Venezuela.

[45] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1968]**: "Preliminary ideas concerning an automatic computation of 'qualities'", Information Processing 68, Amsterdam: North-Holland, Vol. I, pp. 224-230.

[46] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1972a]**: "Calcul arithmétique des propositions", International Logic Review, 6, pp. 222-245.

[47] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1972b]**: "Calcul automatique des normes et propositions juridiques", Teorema, 6, pp. 25-56.

[48] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1973]**: Cálculo de las Normas, Barcelona: Ariel.

[49] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1977]**: "Un modèle mathématique de la logique peut-il se fonder sur l'intension?", Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles, Berne, pp. 361-387.

[50] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1978]**: "Modelli aritmetici per l'informatica giuridica", en A.A. Martino, E. Maretti, C. Ciampi (eds.): Logica, Informatica, Diritto, 2 volúmenes monográficos de Informatica e Diritto, volumen I, IV, 2, pp. 163-215.

[51] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1979]**: "Simplification de l'arithmétisation leibnitienne de la syllogistique par l'expression arithmétique de la notion intensionnelle du 'Non Ens'", en A. Heinekamp und F. Schupp (hrsg.): Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart, Symposion der Leibniz-Gesellschaft Hannover, 10. und 11. November 1978, Wiesbaden: Steiner, pp. 46-58.

[52] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1980]**: "La Caractéristique numérique de de Leibniz comme méthode de décision", en Theoria cum Praxi, Akten des III. Internationalen Leibnizkongresses, Hannover, 12. bis 17. November 1977, Wiesbaden: Steiner, pp. 168-182.

[53] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1981]**: "Un modelo aritmético de la silogística", en Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia, Actas del Seminario del I.N.C.I.E. (1979), Ministerio de Educación y Ciencia, pp. 35-53.

[54] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1982]**: "Algebraic and Arithmetical Translations of Normative Systems and Applications in Legal Informatics", en A.A. Martino (ed.): Deontic Logic, Computational Linguistics and Legal Information Systems, Amsterdam: North-Holland, pp. 169-201.

[55] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1984]**: "An Arithmetic Model for Modal Logic (Feys' T system and Von Wright's M system)", Meeting of the Association for Symbolic Logic, Florence, Italy, 1982, abstract en The Journal of Symbolic Logic, XLIX, pp. 704-705.

[56] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1986]**: "The 'Ars Judicandi' Programme",

en A.A. Martino and F. Socci Natali (eds.): Automated Analysis of Legal Texts, Amsterdam: North-Holland, pp. 773-819.

[57] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1987a]**: "El programa 'Ars Judicandi'" en A.E. Pérez Luño (ed.): Problemas actuales de la documentación y la informática jurídica, Actas de Coloquio Internacional organizado en la Universidad de Sevilla (5 y 6 de marzo de 1986) por el CALIJ y el Departamento de Filosofía del Derecho, Madrid: Tecnos, pp. 174-225.

[58] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1987b]**: "A New Arithmetical Decision Method for Equivalential Deontic Systems", VIII International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Moscow, USSR, 17-22 August 1987, Vol. I, Section 5, abstract, pp. 321-324.

[59] **SANCHEZ-MAZAS, M. [1987c]**: "Une nouvelle méthode arithmétique de décision immédiate pour la logique déontique", Revue européenne des sciences sociales, XXV, 77 (Pensée naturelle: logique et langage, hommage à Jean-Blaise Grize), pp. 75-113.

[60] **SANCHEZ-MAZAS, M.** (aparecerá en) **[1988a]**: "Essai de représentation par des nombres réels d'une analyse infinie des notions individuelles dans une infinité de mondes possibles", en Argumentation et Logique, numero especial de Argumentation (Centre Européen pour l'Etude de l'Argumentation), Dordrecht: Reidel.

[61] **SANCHEZ-MAZAS, M.** (aparecerá en) **[1988b]**: Lógica, aritmética, derecho, Madrid: Alianza Editorial (Capítulo 10: "Identificación y análisis de las clases de equivalencia de la lógica modal por invariantes numéricos").

[62] **THIEL, Chr. [1979]**: "Die Quantität des Inhalts. Zu Leibnizens Erfassung der Intensionsbegriffs durch Kalküle und Diagramme" en A. Heinekamp und F. Schupp (hrsg.): Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart, Symposion der Leibniz-Gesellschaft Hannover, 10. und 11. November 1978, Wiesbaden: Steiner, pp. 10-23.

[63] **THOMAS, I. [1949]**: "CS(n): An Extension of CS", Dominican Studies, II, 2, pp. 145-160.

[64] **WRIGHT, G.H. von [1951a]**: "Deontic Logic", Mind, LX, 237, pp. 1-15.

[65] **WRIGHT, G.H. von [1951b]**: An Essay in Modal Logic, Amsterdam: North-Holland.

[66] **WRIGHT, G.H. von [1967]**: "Deontic Logics", American Philosophical Quarterly, 1967, 4, pp. 136-143.

[67] **WRIGHT, G.H. von [1981a]**: "Problems and Prospects in Deontic Logic: A Survey", en E. Agazzi: Modern Logic: A Survey, Dordrecht: Reidel, pp. 399-423.

[68] **WRIGHT, G.H. von [1981b]**: "On the Logic of Norms and Actions" en R. Hilpinen (ed.): New Studies in Deontic Logic, Dordrecht: Reidel, pp. 3-35.

[69] **WRIGHT, G.H. von [1982]**: "Norms, Truth and Logic", en A.A. Martino (ed.): Deontic Logic, Computational Linguistics and Legal Information Systems, Amsterdam: North-Holland, pp. 3-20.

[70] **WROBLEWSKI, J. [1984]**: "Informatics and ideology of judicial decision making", Informatica e Diritto, X, 3 (Diritto e nuove tecnologie: l'organizzazione della società nell'era telematica. Riflessi nell'esperienza giuridica), pp. 117-128.

Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad del País Vasco (San Sebastián)