INTRODUCCION A LA MEDICION AXIOMATICA EN LAS CIENCIAS COMPORTAMENTALES I. ESTRUCTURAS DE ORDENACION*

Constancio de CASTRO

ABSTRACT

There is a frequent attitude of scholars against the quantification of Social Sciences. Our purpose here consists of describing the central topic of quantification, namely the measurement topic by the axiomatic method. We emphasize the significance of measurement axioms for building the laws of experimental knowledge. The first step which seems unavoidable for every measuring process, thus the order structure, is presented as the initial topic which must be followed up by the more sophisticated topics in the future. The above mentioned attitude against the quantification is disclosed as a prejudice without any rational support given the actual scientific development of measurement.

LA PERDURACION DE UN PREJUICIO ANTICUANTITATIVO.

Desde que la ciencia advino como un conocimiento de consenso establecido sobre los hechos observables (ZIMAN, 1968) se ha planteado una jerarquía de los saberes científicos[1]. Figuran en primer lugar indiscutible las ciencias de la Naturaleza. A su vera, y como aliméntandose de una savia viajera que se extiende a través de raíces ocultas hacia ámbitos aledaños, brotan aquí y allí conocimientos varios. Entre ellos con denodado ímpetu un conocimiento que pretende organizarse bajo los nombres de ciencia social, ciencia del comportamiento u otra etiqueta de presentación. Hay una pretensión innegable de los tiempos actuales hacia unas ciencias del comportamiento; pero no está muy claro si estas ciencias para llamarse tales hayan de invocar o no el consabido modelo de las ciencias naturales. De hecho se han planteado polémicas al respecto. Desde fines del siglo pasado y a través del actual resurge

THEORIA - Segunda Época - Año II
Curso 1986-87, nº 5-6, pp. 401-426

como un ave fénix de sus propias cenizas el reclamo de un modelo propio no supeditado al modelo de las ciencias naturales. El reclamo se hizo en los tiempos de RICKERT (1943) y DILTHEY (1957) para las ciencias de la Cultura y después de ha ido extendiendo el reclamo para nuevas advocaciones tales como ciencias sociales o ciencias del comportamiento. En torno a la disputa pululan ciertos tópicos con diferente perfil de agresividad: uno de estos es el tópico de la medición. ¿Cómo va a ser posible -se preguntan quienes se sitúan en el flanco divergente de las ciencias naturales- llevar a cabo la medición del evento social, del comportamiento humano a la manera de las observaciones físicas? Incluso, en ocasiones, en medio de una encendida atmósfera de apasionamiento no han faltado los calificativos de desdén como el de la cuantofrenia y testomanía referidos al campo de los test mentales[2].

Es una creencia que recorre todos los segmentos de los saberes sociales contemporáneos la de que medir es una pretensión tosca y básicamente alejada de los contenidos con que trabajan estos saberes. Se argumenta en estos casos con la eterna contraposición del número y la cualidad, de lo cuantitativo y lo cualitativo. Nuestra idea al respecto es de que estamos ante un gigantesco prejuicio mantenido en los sectores cultos y aún académicos de la sociedad. El prejuicio tiene como los icebergs una punta ostensible que es la que se difunde en textos escritos de toda índole exhibiendo la silueta mostrenca de los tópicos. Abunda en estos textos el reclamo de toda la gama de saberes sociales hacia el tratamiento de lo cualitativo como "terra incógnita" para la medición.

Pero una buena porción del prejuicio yace sumergida; es la que corresponde a una tradición de enseñanzas y conceptos que se asimilan en nuestros años jóvenes de educación formal. Precisamente por sernos tan entrañables los esquemas aprendidos (un psicólogo diría hoy "tan internalizados") carecemos de conciencia crítica frente a ellos. Cuando se entra a desmontar las piezas de un prejuicio importa mucho más que discutir la faz ostensible de la punta del iceberg desvelar, sacar a la superficie visible los mecanismos soterrados. Entre estos mecanismos que dominan a las mentes cultas de nuestro tiempo figura la idea de que los objetos propios de la aritmética no son otros que los entes físicos. De ahí que las operaciones aritméticas, la suma por ejemplo, se visualiza una acumulación o agregación de entes observables de la naturaleza física. La operación de sumar, lejos de manejarse como una forma propia de entes abstractos, se concibe como una observación más de ciertas manipulaciones que han lugar en el mundo físico. No está tan claro conforme a este contexto que podamos sumar una alegria con otra aunque se nos otorgue para ello licencia poética, o un indicador de status con otro. Las alegrias sobreviniendo unas sobre otras contribuyen a reforzar un estado de ánimo, de la misma manera que los indicadores sociales tienden a asociarse constituyendo quizás un núcleo apiñado distintivo. De aquí obviamente el rechazo a expresar mediante números el vasto campo de las observaciones comportamentales.

Lo que estamos debatiendo aquí tiene el sabor de un problema ya debatido, aunque no suficientemente difundido, y que pertenece a los fundamentos de la Aritmética. Véase por ejemplo el siguiente texto de FREGE (1885):

> *Mill entiende el signo "+" de tal manera que por medio de él se expresen las relaciones de las partes de un cuerpo físico o de un montón respecto de la totalidad pero no es éste el sentido del signo.*
> "5 + 2= 7" *no significa que si se vierten sobre* 5 *volúmenes de un líquido* 2 *volúmenes del mismo, se obtienen* 7 *volúmenes de líquido, sino que esto es una aplicación del primer enunciado, aplicación que se cumple únicamente cuando no aparece una modificación del volumen a consecuencia de un fenómeno químico por ejemplo. Mill confunde siempre las aplicaciones que se pueden hacer de un enunciado aritmético, las cuales frecuentemente son físicas y presuponen hechos observados, con el enunciado puramente matemático mismo. El signo de la suma puede parecer ciertamente en algunas aplicaciones que corresponde a la formación de un mónton; pero no es esta su referencia pues en el caso de otras aplicaciones no puede ni hablarse de montones, agregados o de la relación de un cuerpo físico con sus partes; por ejemplo cuando el cálculo se refiere a acontecimientos.* (O.C. pág. 35).

La posición conceptual que Frege atribuye al filósofo Stuart Mill viene a introducirnos en realidad en el meollo de la posición prejuiciosa que tratamos de esclarecer. Se trata sin duda de una posición con amplio respaldo no ya en las masas populares sino en círculos cultos de la sociedad contemporánea. La matemática y la física no sólo lucen compatibles sino parece la una el lenguaje apropiado y exclusivo de la otra. Indudablemente el espectacular avance del conocimiento físico estriba en buena parte en su matematización, hecho éste que ha acarreado el prestigio del saber matemático. Pero cualquier intento de traspasar las fronteras de lo físico por parte de la matemática es visto como un abuso de este poderío tecnológico.

Esta creencia mantiene un desconocimiento craso sobre la medición. El nuevo concepto de la medición que puede considerarse como conquista moderna de la ciencia, aleja definitivamente los antagonismos de lo cualitativo y lo cuantitativo secularmente aducidos. Es verdad que se siguen manteniendo esas objecciones, pero son ni más ni menos indicativas de un desconocimiento, de una ignorancia que carece de justificación. Por eso no hemos dudado en señalarlas como prejuicio.

IRRUMPE EN LA HISTORIA LA MEDICION AXIOMATICA.

Lo primero que cabe decir sobre la medición es que su formulación en términos axiomáticos es muy reciente; tiene apenas veinticinco años de vida histórica. Es verdad que pueden rastrearse antecedentes muy notables pero de acuerdo a lo que viene a ser un consenso generalizado la teoría de la medición axiomática entra de lleno en la historia de la Ciencia con una publicación de "Basic Measurement Theory "(SUPPES & ZINNES, 1963)[3]. Tampoco creo que deba pasarse por alto que esta publicación tiene lugar en un volumen de Psicología Matemática ya que este hecho le otorga a las teorías de la medición el abolengo y la paternidad correspondientes.

Este dato nos conduce a ubicar la problemática de la medición en un contexto que no es ni de matemática pura ni de ciencias físicas sino de ciencias comportamentales. El problema no nace sin duda en una atmósfera de especulación matemática porque tiene raices y pretensiones empíricas. De otro lado no se advierte conciencia de este problema en el campo de la ciencia física y esto obedece a una razón muy simple. El comportamiento de las operaciones aritméticas y de los objetos del mundo físico no presentan entre sí discrepancias. Resulta llamativo que la creciente especulación matemática que desemboca en los números imaginarios encuentra su escenario adecuado de comportamiento en la física cuántica y en las teorías electromagnéticas (BELL 1940). Nada de esto en cambio sucede en las ciencias sociales y comportamentales; hasta el punto de que el divorcio entre mundo matemático y mundo empírico amenaza con radicalizarse tal como se viene anunciando desde fines del siglo pasado. Ha sido esta una situación harto conflictiva que ha originado un rio de tópicos, los cuales han creado un vasto movimiento de opinión contra el uso de las matemáticas más allá de las fronteras físicas y naturales del conocimiento. Así por ejemplo, la posición preconizada por CAMPBELL (1920). Justo es señalar sin embargo, que ha habido algunas voces disidentes en medio de esta corriente de opinión dominada por el prejuicio. Uno de estos nombres es el del psicólogo STEVENS (1946) quien tuvo atisbos certeros en la década del 40 y puede considerarse antecedente legítimo de la medición axiomática. En el campo de la Antropología destaca la posición de Claude LEVI-STRAUSS quien en 1954 clamaba por unas "matemáticas del hombre". En estos momentos con el año 1986 avanzado pueden contarse varios volúmenes publicados sobre Teoría de la Medición Axiomática (ELLIS, 1966; PFANZAGL, 1968; KRANTZ et alia, 1971; ROBERTS, 1979; NARENS, 1985) además de ser multitud los artículos y capítulos sueltos que han ido apareciendo en revistas especializadas y libros. Entre las revistas es importante mencionar "JOURNAL OF MATHEMATICAL PSYCHOLOGY" que se viene publicando trimestralmente desde 1964, la cual insiste sobre los temas de medición con renovada frecuencia.

LA INICIATIVA REPRESENTACIONAL DE LOS MODELOS MATEMATICOS.

El núcleo central de la medición axiomática consiste en *comparar* - dos estructuras relacionales abriendo así una vía de representar a una por la otra. Toda esta operación se hace guardando las formas de un lenguaje lógico estricto. Así por ejemplo el concepto de estructura relacional y el concepto de representación se definirán ajustándose a una forma rigurosa que más adelante detallaremos. Introduciremos de momento la idea de dualidad que subyace y da soporte a la medición.

Hablamos efectivamente de dos mundos en concreto un mundo de hechos observables en el más estricto sentido del conocimiento positivo y un mundo de formas artificialmente construidas. Se tienen por ejemplo hechos acontecidos en el escenario de la naturaleza o en el escenario del comportamiento humano. La respuesta del sujeto humano decidiéndose a favor de una opción entre varias alternativas es un hecho en la categoria de observable como lo es la caída de los cuerpos en el vacío. Frente al mundo de los hechos observables la inteligencia humana ha sido capaz de diseñar entes abstractos carentes de corporeidad observable. Se nos vienen a la mente de inmediato los números como ejemplo destacado de esta actividad intelectual, pero igualmente pueden aducirse los entes de la geometría, los símbolos fonéticos, el alfabeto, etc... A quien le quepa alguna duda de lo que estamos diciendo le reconmendamos la lectura de cualquier texto de fonología (MOSTERIN, 1981; MALMBERG, 1971). La lingüística moderna distingue perfectamente la plataforma observable de los sonidos articulados por la voz humana y su representación. El evento único e irrepetible en que cada sonido articulado consiste no tiene representación; lo que se representa es una *clase* determinada de sonidos, vg. un sonido nasal. El lenguaje matemático guarda pues con el lenguaje fonético la similitud de ser ambos un producto formal, una exhibición de la capacidad humana para generar *formas*. Pero a su vez estas consideraciones nos dan pie para un ulterior análisis. Es evidente que el único propósito de la fonética es representar; la razón de ser de las formas fonéticas consiste en representar la producción de sonidos articulados. Puesto que la representación conlleva implícitamente la tarea de reducir los sonidos articulados a clases, de ahí que se opera de inmediato una gigantesca reducción del mundo observable infinitamente variado a unas pocas formas. En el mundo matemático los números y los objetos de la geometría se nos presentan hoy aparentemente divorciados de una vinculación representacional. Lo más peculiar de la expresión matemática consiste en su propia autonomía para generar sistemas de alta coherencia. Sin embargo, no se puede descartar en los actuales momentos una incesante actividad de diseñar modelos matemáticos. Lo más característico de esta actividad es su pretensión por dotar a los sistemas formales matemáticos de una validez de representación con respecto a las observaciones de un mundo empírico. Véanse a este respecto TATSUOKA (1968) y BJORK

(1973). Un punto de partida común a todos los modelos matemáticos es un modelo y escala de medición, sin lo cual dejaría de tener significación precisa la pretendida representación. De la misma manera que el uso de la medición en el ámbito de los enseres cotidianos nos proporciona una alta confiabilidad, así también debe suceder en el ámbito de los conceptos científicos.

EL CONCEPTO DE ESTRUCTURA RELACIONAL.

La primera pieza de la Teoría de la Medición es la que lleva por nombre estructura relacional. Para esto son necesarias unas definiciones iniciales: conjunto y relación. Para no extendernos en exceso en estas definiciones remitimos al lector a un texto cualquiera sobre Conjuntos. Bástenos señalar aquí que nos referimos siempre a un conjunto no-vacío de elementos y a la relación entendida en su expresión más simple o binaria como par ordenado de elementos. También es importante señalar una definición adicional, la operación, la cúal puede verse como una modalidad de relación no ya binaria sino de tres términos, pero que a veces será expresamente aludida para construir la estructura relacional. Por lo que llevamos dicho un conjunto, una relación y una operación se entiende perfectamente lo que son en el plano matemático; por ejemplo, un conjunto de segmentos rectilíneos y una relación de perpendicularidad pertenecen al bagage de los rudimentos escolares. Del mismo modo el conjunto de los números naturales, la operación aditiva y la relación de desigualdad "mayor que". Notemos de paso que la operación aditiva consiste en componer con dos elementos un tercer elemento, de manera que surge así la relación entre tres elementos del conjunto. Las estructuras relacionales son o consisten en un conjunto no-vació y una o varias relaciones definidas dentro del conjunto. La estructura $<\mathbb{N}, >>$ alude al conjunto de los números reales, $\mathbb{N}$, y a la relación usual aritmética $>$ definida dentro de los números reales.

La Teoría de la Medición se interesa en estructuras relacionales construidas en dos planos, el plano numérico perteneciente al mundo matemático y el plano empírico perteneciente al mundo de las observaciones. Es decir, no es objetivo de la medición limitarse a la especulación matemática y es por eso que los tratadistas de la medición acostumbran denominar su campo de trabajo como matemática aplicada. Nos queda ahora por ilustrar lo que se puede entender por estructura relacional en un plano empírico. En primer lugar, el conjunto de hechos observables es definido por el investigador; las preocupaciones de éste señalan un contexto que adquiere una delimitación precisa en la medida en que avanza en sus observaciones. Nadie como el propio investigador sabe rechazar las observaciones como no pertinentes respecto del contexto. El conjunto de hechos observables tiene por tanto carácter finito o cuando menos enumerable. Además los hechos son o están individualizados de manera que cada hecho es idéntico a sí mismo y distinto de los demás; de aquí una segunda característica de toda observación que designamos como discreta. Los hechos de observación que nos interesa destacar son los que arrojan siempre propiedades de objetos y algún tipo de relación entre los mismos. Por ejemplo, una observación elemental consiste en pesar los cuerpos físicos. Si tenemos el conjunto $\{a,b,c,...\}$ de cuerpos físicos y los pesamos en una balanza de dos platillos quiere decir que establecemos una relación de cada uno frente a otro anotando cual es el platillo que cede. Esta operación de la balanza es una primera aproximación al fenómeno del peso, el cúal hoy día se lleva a efecto mediante mecanismos de precisión más avanzados. Sin embargo, no debe desaparecer en nuestra atención la relación comparativa que brota del comportamiento de los platillos y que siempre está involucrada en cualquier mecanismo sofisticado. Tendremos que $b \succ a$ siempre que el platillo de $<b>$ se incline y descienda ante el platillo de $<a>$. De este modo se construye una estructura relacional empírica $<A, \succ>$, en donde A: {conjunto de cuerpos} y $\succ$ es el símbolo de "más pesado que". Debe notar el lector la diferencia existente entre el símbolo aritmético $>$ y el símbolo perteneciente a las observaciones físicas $\succ$ diferencia que es plenamente intencional. Tenemos pues en conclusión dos estructuras relacionales, una empírica propia de cuerpos físicos $<A, >$ y otra formal perteneciente al conjunto de los números reales $<Re, >>$.

CONDICIONES RESTRICTIVAS DE UNA ESTRUCTURA OBSERVABLE: LOS AXIOMAS.

Es fácil percatarse de cierta correspondencia entre ambas estructuras. Al conjunto de objetos físicos corresponde el conjunto de números reales y a la relación de peso la desigualdad aritmética. Si en verdad existe tal correspondencia podríamos estar en capacidad de definir una función de A hacia $\mathbb{N}$. Por ejemplo, si para cualquier par de objetos a, b en A existe una función Φ en los números reales, tal que

$$b \succ a \Longleftrightarrow \Phi(b) > \Phi(a)$$

tendremos la posibilidad de acercarnos a una representación. Para perfilar adecuadamente esta representación es imprescindible contar con ciertas condiciones que pueden dotar la estructura de una mayor rigidez en cuanto a grados de libertad. Estas condiciones resultan de observar ciertas regularidades en el mundo físico hasta el punto de que esas regularidades nos inspiran la existencia de leyes. Por ejemplo, observamos en el pesaje de los cuerpos que

si se da $b \succ a$ no se da $a \succ b$

Esta condición elevada a categoria de ley o necesidad es la que llamamos asimetría. Las observaciones cubren como decía POPPER (1962) la falsabilidad de la ley, es decir, ellas de por sí no otorgan el carácter de necesidad; ésta más bien brota en la mente del investigador y siempre será susceptible de contrastación. Del mismo modo puede verse una segunda condición que surge de la consideración de tres elementos a, b, c en A

si $b \succ a$ y $a \succ c$ entonces $b \succ c$

Esta condición recibe el nombre de transitividad. Ambas condiciones, la de asimetría y transitividad, imponen a la estructura empírica un cauce de regularidad que reduce, como decíamos antes, los grados de libertad de la estructura empírica. Son condiciones aceptables para la sensibilidad del investigador, es decir, no son condiciones utópicas o excesivamente alejadas de la realidad que se tiene entre manos. En razón de su carácter de necesidad no se pueden probar como tales, sino en todo caso se someten a un proceso de falsabilidad a través de la observación. Debido a esta resistencia a ser probadas en el más auténtico sentido del vocablo, llevan en sí un carácter impositivo y por eso reciben la denominación de axiomas.

Los tratadistas de la medición han apuntado un doble carácter en los axiomas; está por un lado el carácter legal del proceso científico, es decir, el descubrimiento o desvelamiento de leyes. Llámanse estos axiomas que no hacen sino dibujar con trazo firme ciertas relaciones pertenecientes al mundo de la observación *axiomas universales*. Pero hay tambien axiomas que postulan la existencia de nuevos elementos en el campo de la observación para conferirle a ésta cierta regularidad; estos axiomas reciben el nombre de *axiomas existenciales*.

Los primeros juegan un importante rol en la construcción de la teoría científica y por eso se diseñan a veces experimentos muy trabajosos para contrastarlos. La asimetría y transitividad son axiomas de este tipo. Los segundos, o sea los axiomas existenciales en nada sirven para caracterizar una teoría científica; en otra oportunidad se hará mención del axioma arquimidiano como un claro exponente de este tipo.

Si proseguimos en desmenuzar el ejemplo del peso, inmediatamente advertimos que pueden darse objetos o cuerpos fisicos que mantienen la balanza en posicion inalterada. Por esta razón vamos a corregir la estructura relacional invocando esta posibilidad. Decimos pues que estamos ante una relación compuesta ("por lo menos tan pesado como") que se da en el producto cartesiano $A \times A$ (para A: $\{a,b...\}$) cuando nos hallamos ante las posibilidades siguientes:

$$a \sim b \Longleftrightarrow a \succsim b \ \& \ b \succsim a$$
$$a \succ b \Longleftrightarrow a \succsim b \ \& \ \text{no}(b \succsim a)$$

Estas dos relaciones componen la parte simétrica y asimétrica de $\succsim$, puesto que en un caso, el de $a \sim b$ tendremos las condiciones específicas de $\sim$ que son las siguientes:

Reflexividad $(\forall a \in A;\ a \sim a)$

Simetría $(\forall a, b \in A;\ a \sim b \Longrightarrow b \sim a)$

Transitividad $(\forall a,b,c, \in A;\ a \sim b \ \&\ b \sim c \Longrightarrow a \sim c)$

En el otro caso, el de $a \succ b$, tendremos condiciones de

Asimetria $(\forall a,b \in A;\ a \succ b \Rightarrow \text{no}\ (b \succ a)$

Transitividad $(\forall a,b,c \in A;\ a \succ b \ \&\ b \succ c \Longrightarrow a \succ c)$

HOMOMORFISMO COMO FUNCION DE REPRESENTACION NUMERICA. LOS TEOREMAS DE REPRESENTACION Y UNICIDAD.

El ejemplo del peso nos ha conducido a establecer una estructura de *ordenación débil* la cual viene a constituir una pieza básica en todos los modelos de medición. Esta estructura nos permite de momento definir un cúmulo de observaciones significativas bajo condiciones de regularidad que se expresan a manera de axiomas. Henos aquí ante la

Definición 1: Ordenación Débil

Sea A un conjunto no-vacío y $\succsim$ una relación binaria en A, o lo que es lo mismo, un subconjunto en $A \times A$. Se denomina la estructura relacional $\langle A, \succsim \rangle$ una ordenación débil siempre que para todo $a,b,c \in A$ se satisfacen los siguientes axiomas:

.Conectividad: $a \succsim b$ y/o $b \succsim a$

.Transitividad: si $a \succsim b$ y $b \succsim c$ entonces $a \succsim c$

En esta definición se contempla la posibilidad de que dos objetos a, b aún siendo individualmente distintos sin embargo sean equivalentes en peso, por lo que en ese caso estaríamos ante $a \succsim b \ \&\ b \succsim a$. La definición 1 comprende esta situación particular, por lo que el axioma de conectividad se considera que incluye en unos casos pero no en todos la condición antisimétrica que se expresa del modo siguiente:

$$\forall a,b \in A; a \succsim b \ \&\ b \succsim a \Longrightarrow a \sim b$$

Repetimos que esta condición de antisimetría no es de todos los casos y por tanto no se pueden plantear como axioma generalizable a toda la cobertura de la definición 1. Tenemos efectivamente los casos en donde $a \succsim b$ & no $(b \succsim a)$, los cuales se dan tambien dentro de la definición 1. A partir de aquí se construye el teorema de representación

Teorema de Representación

Si se da $A, \succsim$ como una estructura de ordenación débil conforme a la definición 1, entonces existe una función Φ de valor real sobre A, tal que para todo $a,b \in A$

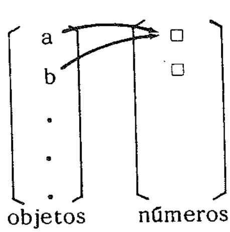
$$a \succsim b \Longleftrightarrow \Phi(a) \geq \Phi(b)$$

Este teorema en otras palabras establece que cuando se tiene una estructura empírica $< A, \succsim >$ satisfaciendo los axiomas de conectividad y transitividad de la definición 1, existe entonces un homomorfismo Φ desde dicha estructura empírica hacia una estructura numérica $< \mathbb{N}, \geq >$. La noción homomorfismo proviene del campo matemático y está vinculada estrechamente a la de isomorfismo que puede expresarse así (SUPPES, 1957)

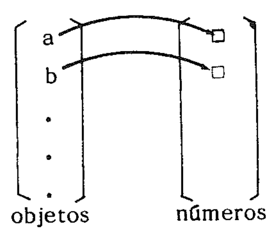
> *Una estructura de relación $< A, R >$ es isomórfica con respecto a otra estructura de relación $< B, S >$ si y sólo si existe una función f tal que*
>
> (i) $\mathcal{D}(f) = A \,\&\, \mathcal{R}(f) = B$
>
> (ii) f es biunívoca
>
> (iii) si $x, y \in A$ entonces $x R y \Longrightarrow f(x) \, S \, f(y)$

Las designaciones $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$ se refieren a dominio y rango de la función respectivamente. Cuando se maneja una estructura empírica como conjunto de partida de la función puede resultar inadecuado exigir la biunivocidad. En el ejemplo del peso si tenemos dos objetos a, b equivalentes en peso quiere decir que su representación numérica será $\Phi(a) = \Phi(b)$ aún cuando cada objeto mantenga su individualidad respectiva. Es decir, este caso plantea una aguda discrepancia con la biunivocidad conforme a la expresión gráfica siguiente

EJEMPLO DEL PESO



FUNCION BIUNIVOCA



La ruptura de la condición uno-a-uno es la razón de introducir el término homomorfismo para la representación métrica.

A partir de lo dicho hasta aquí surge un nuevo problema. En la perspectiva empírica de todo investigador se tienen por lo general conjuntos finitos mientras que en la estructura numérica se nos presenta el conjunto de los números reales. Esto sin más quiere decir que para un conjunto finito de objetos puede darse más de una sola expresión numérica que la represente. Quedaría pues inconclusa la medición si no diéramos a la misma una solución de unicidad.

En otras palabras, ante varias expresiones numéricas de una misma estructura empírica podemos y debemos preguntarnos qué es lo que las hace invariantes a todas ellas para que sean igualmente aptas frente a la única estructura empírica que pretenden representar. Tenemos aquí un problema de sabor decimonónico en la historia de la matemática. Este problema se presentó primero en el álgebra y se extendió después a la geometría y la topología. Para cualquier estudiante actual de Secundaria no es noticia el tratamiento de un sistema de ecuaciones por vía matricial. Por esta vía por ejemplo son factibles las transformaciones lineales homogéneas que pueden efectuarse sobre las variables dadas en una forma cuadrática. Esto se traduce a una simple regla para multiplicar determinantes, con lo cual se toma conciencia de que *una misma forma subyace en realidad a distintas transformaciones*. En el campo de la Geometría existía el antecedente de las semejanzas. Citemos a CAMPEDELLI (1972):

> *Las transformaciones en las cuales pensaron por primera vez los matemáticos aunque fuese inconscientemente son las semejanzas: si una figura se cambia en su semejante conserva la misma forma, lo cual se reconoce sin dificultad. Pero los matemáticos introducen otros y más complejos tipos de transformaciones (o grupos como dicen) que aplicados a una figura alteran su aspecto y modifican más o menos profundamente su carácter. ¿Existen aún propiedades circunstancias de la figura que se conserven? ¿Existe una invariante respecto de tales transformaciones? La investigación y el estudio de tales propiedades constituye para cada tipo de transformaciones una nueva rama de la geometría: la geometría asociada a tal grupo de transformaciones.* (Págs. 27 ss.).

En el tema que nos ocupa, la Medición, nos encontramos con distintas expresiones numéricas de una misma estructura relacional empírica. Podemos plantearnos al igual que en el álgebra y la geometría en qué consiste o cómo puede determinarse *el grupo de transformaciones que permite a $\Phi(a)$ y $\Phi'(a)$ valer por la misma representación* supuesto que $\Phi(a)$ y $\Phi(a)$ sean expresiones numéricas distintas. He aquí que necesitamos un segundo teorema para construir la Medición en el contexto de las ordenaciones débiles:

Teorema de Unicidad

Tenemos diversas expresiones $\Phi(a)$, $\Phi'(a)$, $\Phi''(a)$... todas ellas funciones de valor real. Tomemos a dos cualesquiera $\Phi(a)$ y $\Phi'(a)$; para que ambas sean funciones sobre $a \in A$ es condición necesaria y suficiente que exista una función f estrictamente creciente cuyo dominio y rango es Re y que para todo $a \in A$

$$\Phi'(a) = f[\Phi(a)]$$

A las expresiones $\Phi(a)$, $\Phi'(a)$ las hace únicas o invariantes su carácter monotónico, es decir, la preservación del orden correspondiente a la estructura $\langle A, \succsim \rangle$.

SE PONEN AL DESCUBIERTO ALGUNOS PUNTOS QUE EL PREJUICIO CONFUNDE SOBRE LA MEDICION.

Hemos recorrido y descrito pormenorizadamente las piezas que conforman la Teoría de la Medición Axiomática. Lo hemos hecho a través de un ejemplo de fácil captación, las relaciones de ordenación débil que brotan ante la consideración de peso en un conjunto de cuerpos físicos. Las piezas conceptuales han sido las siguientes:

- Estructura relacional empírica y numérica
- Homomorfismo entre estructuras relacionales
- Estructura relacional empírica bajo axiomas
- Teorema de representación
- Teorema de unicidad

No se han expuesto los desarrollos demostrativos que conciernen a los teoremas por considerar que interrumpían el hilo del discurso. En un apéndice podrá encontrarlos el lector acucioso. Una vez asimilado el proceso constructivo de la medición es fácil trasladar el mismo a una perspectiva comportamental. Si en vez de cuerpos físicos se tiene un conjunto de alternativas de elección se puede construir la misma estructura relacional de ordenación débil. Sería el caso en donde A: {conjunto de alternativas} y el símbolo $\succsim$ denotativo de la doble acepción, preferencia para $\succ$ e indeferencia para $\sim$. Se construye de este modo la estructura $\langle A, \succsim \rangle$; en dicha estructura caben perfectamente las situaciones de duda cuando ante dos alternativas a, b, no está decidida la preferencia. En términos formales decimos entonces que se presentan tanto a $\succsim$ b como b $\succsim$ a, lo cual implica una situación de indeferencia que expresamos en forma explícita mediante $a \sim b$.

Por supuesto no siempre es igual de sencillo construir la medición de un fenómeno empírico. Es importante subrayar el hecho de que la medición arranca siempre de una situación empírica sobre la cual el investigador tiene observaciones perfectamente estructuradas.

En esas observaciones no intervienen números todavía; por eso decimos que los axiomas definen aspectos cualitativos de la observación. Se parecen estos axiomas a un anticipo de leyes no cuantificadas. Todo esto quiere decir que no tiene sentido plantearse la medición cuando no se tiene todavía un cúmulo de observaciones bien filtradas en la experiencia del investigador. De estas consideraciones se hace patente que *la cualidad no es irreductible al número y por el contrario la medición consiste en representar leyes cualitativas mediante expresiones numéricas*. Quizás la ausencia de discriminación oportuna entre las operaciones registradas en un plano empírico y las operaciones formales en un plano abstracto ha originado el más grave prejuicio de este momento hacia la cuantificación de las Ciencias Comportamentales; nos referimos al hecho de confundir e identificar como la misma cosa operaciones físicas y aritméticas. De aquí resulta que el prejuicio no tiene clara conciencia de sí mismo puesto que lo que debiera plantear como antagónicos son dos mundos cualitativos: las observaciones del mundo físico frente a las observaciones del mundo comportamental. Descendiendo a los ejemplos ilustrativos tenemos el caso de las relaciones originadas en los platillos de la balanza por un lado; por otro lado, las preferencias puestas de manifiesto ante cada pareja de alternativas. He aquí dos mundos cualitativamente distintos. Según el prejuicio que estamos desenmascarando desconoce o pasa por alto la estructura relacional que hemos presentado con prolijidad de detalle y que tiene plena vigencia en ambas áreas, física y comportamental, de observación.

Donde el prejuicio presenta su mayor beligerancia es en otro nivel de observaciones en donde interviene de lleno una operación aditiva. Por ejemplo, las observaciones que le permiten sumar objetos pesados no así en cambio sumar objetos de preferencia. Nos asoma aquí otro modelo de medición ya que tendríamos una estructura empírica de partida muy diferente de la considerada en la ordenación débil. Sin embargo, el proceso a seguir habría de ser el mismo, a saber:

1) definir una estructura empírica y los axiomas involucrados;
2) establecer un teorema de representación;
3) establecer un teorema de unicidad.

En la estructura empírica tendríamos que considerar $\langle A, \odot, \succsim \rangle$ en donde a los símbolos utilizados hasta aquí estaríamos añadiendo $\odot$, el cual denotaría una operación de agregar objetos de un mismo platillo de la balanza. Bástenos enfrentar dicha estructura netamente empírica a otra numérica plenamente formal, a saber, $\langle \mathbb{N}, +, \geq \rangle$ para poner en evidencia que se trata de dos operaciones muy distintas, la *suma* de objetos pesados y la suma aritmética. Los tratadistas llaman a este un modelo de medición extensiva por considerar que tiene lugar ante atributos extensivos como la longitud y la masa. En términos generales, sin descender al detalle lo cual reservamos para otra oportunidad, podemos presentar a grandes trazos el modelo de medición extensiva. Primero, se plantea un conjunto de supuestos asumidos en torno a la ordenación $\succsim$ y en torno a una operación $\odot$ que recibirá en la literatura respectiva el nombre de *concatenación*.

Estos supuestos se van a formular a manera de axiomas y responden a la implantación de un concepto de ley o necesidad que por su propia naturaleza traspasa el umbral de las observaciones fácticas. A partir de aquí se define una función numérica Φ que satisface

(i) $a \succsim b \Longleftrightarrow \Phi(a) \geq \Phi(b)$

(ii) $\Phi(a \odot b) = \Phi(a) + \Phi(b)$

La representación aditiva de los atributos extensivos se ha convertido en conducta habitual de la vida cotidiana la cual pasa por alto los procesos de construcción lógica inherentes. No nos cansaremos de señalar aquí la raiz fundamental del prejuicio que hemos venido comentando, el cual con demasiada frecuencia toma como única referencia de medición, la medición extensiva. Véase el comentario de KRANTZ et al. (1971)

> *Since the additive representation of mass, lenght and time duration have become a part of our daily experience we tend to take for granted the qualitative laws* (e.g. $a \succsim b$ *whenever* $a \odot c \succsim b \odot c$) *that underlie the numerical representation.* (Pág. 71)

De esta familiaridad con los fenómenos extensivos y su presunta identificación con formas aritméticas procede una repugnancia generalizada en nuestra cultura de hoy a expresar numéricamente los fenómenos no-extensivos. Tal es el caso de las opciones de preferencia cuya representación numérica en un modelo aditivo pareciera incongruente y de tosca elaboración conceptual. Las limitaciones de espacio no nos permiten desmenuzar esta idea pero señalaremos que la operación concatenante $\odot$ nunca debe identificarse con la operación formal +. De este modo dejamos al lector la vía abierta para pensar por su cuenta.

Es nuestro propósito abordar en oportunidades sucesivas modelos de medición para distintas estructuras de comportamiento, entre las cuales daremos cabida a las preferencias. Asimismo será objeto de atención expresa la llamada medición extensiva la cual tiene campo propio de aplicación en el mundo de las observaciones físicas. En este modelo de apariencia sencilla pondremos énfasis en destacar las regularidades de observación que se trasplantan a una formulación de axiomas; mostraremos así la complicada textura que maneja en forma inadvertida la concepción vulgar de la medición física.

APENDICE: DEMOSTRACIONES.

La demostración del teorema de representación para una estructura de ordenación $\langle A, \succsim \rangle$ requiere que descompongamos la relación denotada por $\succsim$. Es importante analizar por separado las dos relaciones involucradas en $\succsim$; una que identificaremos por I y otra que identificaremos por P.

Comenzemos por un sistema clasificatorio $\langle A, I \rangle$ en donde I se define como una relación de equivalencia; esto es, se define I con las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $\forall a \in A;\ a\ I\ a$
2. Simétrica: $\forall a,b \in A;\ a\ I\ b \Longrightarrow b\ I\ a$
3. Transitiva: $\forall a,b,c \in A;\ a\ I\ b\ \&\ b\ I\ c \Longrightarrow a\ I\ c$

De este modo llegamos al sistema A, I, P llamado *cuasi-serie* en la literatura metodológica (HEMPEL, 1952) y definida mediante las siguientes condiciones:

1. $\langle A, I \rangle$ es un sistema clasificatorio
2. P es una relación transitiva
3. $\forall a,b \in A$ se da uno de los siguientes casos: a I b, a P b, b P a.

El resolver el problema de representación para un sistema empírico del tipo $\langle A, I, P \rangle$ consistirá en hallar un homomorfismo con respecto a un sistema numérico. Si tenemos que dos objetos a,b se relacionan mediante a I b, parece razonable hacer la misma asignación numérica a ambos objetos; es decir, nunca podrá tenerse una asignación uno-a-uno de Re hacia A, de donde nace la idea de homomorfismo.

Sin embargo, existe una vía de establecer la representación por isomorfismo si se lleva a cabo una participación de A en ciertos subconjuntos. Haremos así que todos los elementos pertenecientes a un determinado subconjunto o partición reciban la misma asignación numérica y a su vez que cada partición tenga una asignación numérica diferente.

Necesitamos para esto introducir la noción de "clases bajo equivalencia de I"; estas clases forman subconjuntos disyuntos entre sí y a la vez exhaustivos con respecto al conjunto A. Por ejemplo, definamos

A: {conjunto de personas nacidas en España}
I: relación de haber nacido en la misma provincia

Tendremos según esto millones de elementos en A y solamente 52 clases bajo equivalencia de I. Al conjunto de las clases o particiones las designaremos mediante A/I; por lo tanto sólo existirán 52 elementos en el conjunto A/I. El lector deberá tener presente este matiz que distingue los conjuntos A y A/I en todo el desarrollo que sigue.

Puesto que anteriormente definimos una relación P en el conjunto A, antes de seguir adelante deberemos definir una relación parecida en el conjunto A/I; la designaremos mediante P* y la definiremos por equivalencia lógica como sigue:

$$\text{DEF 1: } [a]\ P^*[b] \Longleftrightarrow a\ P\ b$$

en donde [a] y [b] designan elementos en A/I, mientras que a, b A. Es decir, [a] y [b] designan conforme a lo que llevamos dicho dos clases de equivalencia de I.

Para proseguir libres de imprecisión será bueno excluir toda posibilidad de que para algún elemento $a' \in [a]$ así como algún otro $b' \in [b]$ se pueda simultanear b' P a' y a P b. Para ello estableceremos como paso intermedio los teoremas:

TEOREMA 1: Si a P b & a' I a entonces a' P b
TEOREMA 2: Si a P b & b' I b entonces a P b'

La demostración de estos teoremas se hace obvia si se busca coherencia con las definiciones más arriba dadas de sistema clasificatorio $\langle A, I \rangle$ y de cuasi-serie $\langle A, I, P \rangle$. En efecto, en el teorema 1 se están asumiendo

a P b
a' I a

A su vez según se definió en la condición 3 de la cuasi-serie tenemos como excluyentes las siguientes opciones

o bien a' I b
o bien a' P b
o bien b P a'

Si se diera a' I b al estar asumiendo en el Teorema a' I a. y debido a las propiedades simétrica y transitiva de I tendríamos

$$a'\ I\ a \Longrightarrow a\ I\ a'$$
$$a\ I\ a'\ \&\ a'\ I\ b \Longrightarrow a\ I\ b$$

lo cual entraría en contradicción con lo que se está asumiendo en el

Teorema 1, a saber, a P b (conforme a la condición 3 del sistema $<A, I, P>$ son mutuamente excluyentes a I b y a P b).

Si se diera b P a' tendríamos

$$a\ P\ b\ \&\ b\ P\ a' \Longrightarrow a\ P\ a'$$

lo cual tambien entra en contradicción con lo asumido en el Teorema 1 concretamente con a' I a. (Por simetría de I tendríamos a' I a $\Longrightarrow$ a I a' y conforme a la condición 3 del sistema $<A, I, P>$ se muestran excluyentes a I a' y a P a')

Por consiguiente la única opción correcta de las tres resulta ser a' P b con lo que queda demostrado el Teorema 1. De modo similar puede demostrarse el Teorema 2. De ambos Teoremas, 1 y 2, tomados conjuntamente se deriva que si se tiene a P b entonces para cualquier elemento $a' \in [a]$ y cualquier elemento $b' \in [b]$ se ha de seguir necesariamente a' P b'.

Llegamos al sistema relacional $<A/I, P^*>$ el cual se construyó a partir de la cuasi-serie $<A, I, P>$. Mediante los Teoremas 1 y 2 se eliminaron las posibilidades de inconsistencia. A un sistema relacional concebido como $<A/I, P^*>$ se le puede establecer una representación numérica por isomorfismo; concretamente se puede resolver su representación mediante una serie numérica. El concepto de serie numérica, que no debe confundirse con cualquier serie de términos numéricos se basa en el concepto lógico de serie. Se define como tal un sistema binario $<A, R>$ en donde

1. R es asimétrico en A
2. R es transitivo en A
3. R está conectado en A

A partir de aquí habrá de entenderse por serie numérica un sistema relacional numérico $<\mathbb{N}, R>$ en donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números reales y R denota una de ambas relaciones aritméticas bien sea "mayor que" o bien "menor que" con respecto al conjunto N.

De lo que llevamos dicho se pone de manifiesto que el sistema relacional definido por $<A/I, P^*>$ encaja en el concepto de serie ya que por las condiciones fijadas en la cuasi-serie $<A, I, P>$ asi como en la Definición 1 se puede deducir fácilmente que P* es una relación asimetrica, transitiva y conectada en A/I. Segun esto no debe ser difícil demostrar que existe un isomorfismo de representacion entre $<A/I$,

$P^{*}\rangle$ y $\langle \mathbb{N}, R \rangle$. Estableceremos el teorema de representación para una situación generalizada de sistemas relacionales en donde cabe la concepción de ambos, tanto de $\langle A/I, P^{*}\rangle$ como de $\langle \mathbb{N}, R\rangle$.

Sería ésta una situación amplia haciendo pleno reconocimiento a las ideas básicas de CANTOR (1895), ya que los axiomas planteados por el ilustre matemático describen perfectamente las propiedades de orden de los números racionales. La definición de una estructura bajo las condiciones impuestas por CANTOR es la siguiente:

DEF 2: Se dice que H: $\langle X, \succsim \rangle$ es una estructura ordinal del tipo η siempre que X sea un conjunto no-vacío y $\succsim$ una relación binaria definida mediante los siguientes axiomas:

(i) Ordenación total bajo $\succsim$

(ii) Densidad: para cada $x, y \in X$, si $x \succ y$ entonces se da alguna $z \in X$ tal que $x \succ z \succ y$

(iii) No existen puntos límites: para cada $x \in X$, existen $y, z \in X$ tales que $y \succ x \succ z$

(iv) X es enumerable

Es cuestión de *asumir* que $\langle X/I, P^{*}\rangle$ y $\langle \mathbb{N}, R\rangle$ encajan en una estructura ordinal del tipo η para demostrar el isomorfismo de representación entre ambas. Con objeto de simplificar el lenguaje vamos a hablar de estructuras $\langle X, \succsim\rangle$ $\langle Y, \succsim^{*}\rangle$ ambas sujetas a los axiomas de la Definición 2. Enunciaremos el teorema del siguiente modo:

TEOREMA 3 (Representación): Supongamos que $\langle X, \succsim\rangle$ y $\langle Y, \succsim^{*}\rangle$ sean estructuras de ordenación del tipo η conforme a la Definición 2. Entonces $\langle X, \succsim\rangle$ y $\langle Y, \succsim^{*}\rangle$ son isomorfas.

Procedemos a la demostración. Ya que tanto X como Y son enumerables tendremos

$X: \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$

$Y: \{y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots\}$

El isomorfismo *se construye* mediante una serie de etapas y debe entenderse que una determinada etapa habrá de ser omitida siempre que al elemento considerado en la misma se le haya asignado su correspondiente función

Etapa 1: $\not{\ell}(x_1) = y_1$
Etapa 2: $\not{\ell}^{-1}(y_1) = x_1$

El elemento x_1 divide el conjunto X en dos secciones ($\{x/x \succsim x_1\}$ & $\{x/x_1 \succ x\}$). De modo semejante y_1 divide el conjunto Y en otras dos secciones. Obviamente las secciones de X e Y se corresponden (por ej. $\{x/x \succsim x_1\}$ se corresponde con $\{y/y \succsim y_1\}$)

Etapa 3: Sea $\not{\ell}(x_2)$ el primer elemento (con arreglo a la indexación $\{y_1, y_2, \dots y_n, \dots\}$ de Y) que siendo diferente de $\not{\ell}(x_1)$ se encuentre en la sección de Y correspondiente a la sección de X que contiene a x_2.

Etapa 4: Sea $\not{\ell}^{-1}(y_2)$ el primer elemento que siendo diferente de $\not{\ell}^{-1}(y_1)$ se encuentre en la sección de X correspondiente a la sección de Y que contiene a y_2.

Los elementos x_1, x_2, dividen el conjunto X en tres secciones al mismo tiempo que y_1, y_2, dividen al conjunto Y en otras tres secciones.

Etapa 5: Definiremos aquí $\not{\ell}(x_3)$. Sea $\not{\ell}(x_3)$ siempre que no haya sido definido previamente el primer elemento que siendo diferente de $\not{\ell}(x_1)$ y de $\not{\ell}(x_2)$ se encuentre en la sección de Y correspondiente a la sección de X que contiene a x_3.

Etapa 6: Sea $\not{\ell}^{-1}(y_3)$ siempre que no haya sido definido previamente el primer elemento que siendo diferente de $\not{\ell}^{-1}(y_1)$ y de $\not{\ell}^{-1}(y_2)$ se encuentre en la sección de X correspondiente a la sección de Y que contiene a y_3.

De este modo cubrimos 2n etapas. A través de las mismas definimos funciones $\not{\ell}$ sobre un conjunto $\{x_1, \dots x_n\}$. Dichas funciones han de ser necesariamente uno-a-uno y preservan la ordenación. Esto quiere decir que si se definen $\not{\ell}(u)$, $\not{\ell}(v)$ entonces $u \succsim v \Longleftrightarrow \not{\ell}(u) \succsim^* \not{\ell}(v)$.

Etapa 2n+1: Sea $f(x_{n+1})$ siempre que no haya sido definido previamente el primer elemento que siendo diferente de $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... $f(x_n)$ se encuentra en la sección de Y correspondiente a la sección de X que contiene a x_{n+1}.

Etapa 2n+2: Sea $f^{-1}(y_{n+1})$ siempre que no haya sido definido previamente el primer elemento que siendo diferente de $f^{-1}(y_1)$ ... $f^{-1}(y_n)$ se encuentra en la sección de X correspondiente a la sección de Y que contiene a y_{n+1}.

Se produce de este modo el isomorfismo de las estructuras $<X, \succsim>$ $<Y, \succsim>$. Toda la fuerza de la demostración estriba en la Definición 2 que toma en consideración las ideas de Cantor para establecer una estructura ordinal del tipo η. En la medida en que las estructuras $<A/I, P^*>$ y $<\mathbb{N}, R>$ se asimilan y encajan en la definición de Cantor se hace posible construir un isomorfismo.

Nos queda por ver el teorema de unicidad el cual puede enunciarse del modo siguiente:

> TEOREMA 4 (UNICIDAD): Dado que la estructura empírica $<A/I, P^*>$ admite más de una representación mediante series numéricas se tiene que dos series numéricas cualesquiera que admitan la representación isomórfica de $<A/I, P^*>$ han de estar relacionadas entre sí por una transformación monótona.

Sean $<N_1, R_1>$ $<\mathbb{N}_2, R_2>$ dos series numéricas isomórficas respecto de $<A/I, P^*>$. Las relaciones R_1, R_2 pueden ser indistintamente la relación aritmética "mayor que" o "menor que". Se trata de encontrar una función Φ tal que su dominio sea $\mathbb{N}_1$ y su rango $\mathbb{N}_2$, o sea

$$\mathcal{D}(\Phi): N_1$$
$$\mathcal{R}(\Phi): N_2$$

y además

$$\forall x, y \in \mathbb{N}_1;\ x\ R_1\ y \Longrightarrow \Phi(x)\ R_2\ \Phi(y)$$

Esto es lo mismo que definir una función monótona de $\mathbb{N}_1$ sobre $\mathbb{N}_2$.

Sean f_1 y f_2 dos funciones que satisfacen la hipótesis de representación isomórfica; es decir, f_1 mapea isomórficamente $<A/I, P>$ en la serie numérica $<\mathbb{N}_1, R_1>$; del mismo modo f_2 mapea isomórficamente $<A/I, P>$ en la serie numérica $<\mathbb{N}_2, R_2>$. Según esto tómense en cuenta los dominios y rangos de f_1 y f_2 así como de sus inversas

$$\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f_2) = \mathcal{R}(f_1^{-1}) = \mathcal{R}(f_2^{-1}) = A/I$$
$$\mathcal{R}(f_1) = \mathcal{D}(f_1^{-1}) = \mathbb{N}_1$$
$$\mathcal{R}(f_2) = \mathcal{D}(f_2^{-1}) = \mathbb{N}_2$$

Si se compone una nueva función mediante $f_2 \circ f_1^{-1}$ se tendrá

$$\mathcal{D}(f_2 \circ f_1^{-1}) = \mathbb{N}_1$$
$$\mathcal{R}(f_2 \circ f_1^{-1}) = \mathbb{N}_2$$

Supongamos ahora x, y $\in \mathbb{N}$ dando lugar a $x R y$. Entonces se tendrá

$$f_1^{-1}(x) \; P^* \; f_1^{-1}(y)$$

Partiendo de la definicion de f_2

$$f_2 [f_1^{-1}(x)] \; R_2 \; f_2 [f_1^{-1}(y)]$$

Esta última expresión equivale a utilizar la función compuesta que anteriormente definimos, con lo que se tiene

$$[f_2 \circ f_1^{-1}](x) \; R_2 \; [f_2 \circ f_1^{-1}](y)$$

Por consiguiente la función monótona Φ ha sido hallada en la función compuesta.

NOTAS

* Agradezco al Profesor José A. LÓPEZ CEREZO la lectura y observaciones de que fue objeto el presente artículo.

1 La obra de ZIMAN *Public Knowledge*; Cambridge University Press 1968 se cita en este artículo al igual que otras publicaciones no en virtud de algún pasaje particular, sino en función de la tesis central mantenida a lo largo de la obra. La idea de ZIMAN consiste en que a diferencia de otros saberes, el saber científico se nos aparece sustentado en la observación positiva y como tal asequible a cualquier mente disciplinada. La aparición del conocimiento científico en el horizonte de la historia rompe con las pretensiones esotéricas de los saberes tradicionales y se abre a un público indiscriminado. El fortalecimiento de un consenso de procedencia indiscriminada (es decir, no sectaria) hace avanzar la Ciencia.

2 En un luminoso prólogo con el que Gino GERMANI introdujo para los lectores de habla hispana el libro de Wright MILLS (1961) decía en nota de la página 19: "*Paradójicamente los latinoamericanos están más familiarizados con las críticas dirigidas a la moderna Metodología que con la Metodología misma*" y señalaba a continuación como síntoma inequívoco de esta actitud la simultaneidad de algunas traducciones como la de SOROKIN (1957) con las fechas de publicación original.

3 Si queremos fijar un punto de partida en la historia de la Medición Axiomática es seguro que habrían de surgir dudas. Pero si queremos establecer el momento en el que el tema se consagra y sirve de pauta a los desarrollos posteriores, ahí cabrían menos dudas. Seguramente el Citation Index nos ayudaría a esclarecer la situación; personalmente me inclino hacia la obra de SUPPES & ZINNES. El anterior trabajo de Dana Scott en colaboración con Suppes, así como otros trabajos en la medición axiomática de la utilidad en la década de los 50 son indicativos de lo que se estaba madurando en la escuela de Stanford, pero no presentan ni el desarrollo conceptual acabado ni las ambiciones de sustentación para las Ciencias Comportamentales que se ponen de manifiesto algo más tarde. Esto sucede al afiliarse al grupo un físico convertido a la Psicología; caso de Joseph ZINNES.

BIBLIOGRAFIA CITADA

BELL, E.T.: *The Development of Mathematics*; McGraw Hill 1940.

BJORK, R.A.: "Why Mathematical Models", *American Psychologist*, (1973) p. 426-433.

CAMPBELL, N.R.: *Physics: the Elements*, Cambridge Univ. Press 1920.

CAMPEDELLI, L.: *Fantasía y Lógica en la Matemática*; Barcelona, LABOR 1972.

CANTOR, G.: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, 1895. (Traducido al inglés por Jourdain, Open Court Publishing Co. 1915).

DILTHEY, W.: *Introducción a las Ciencias del Espíritu*, Fondo de Cultura Económica 1949.

ELLIS, B.: *Basic Concepts of Measurement*, Cambridge Univ. Press 1966.

FREGE, G.: *Fundamentos de la Aritmética*, 1885; traduc. Carlos U. Moulines. Barcelona, Laia 1972.

HEMPEL, C. *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science*, The Univ. of Chicago Press 1952.

KRANTZ <u>et al</u>: *Foundations of Measurement*, Academic Press, New-York 1971.

LEVI-STRAUSS, C.:: "Vers unes Mathematiques de l'homme", *Bull. Inter. Sciences Sociales*, Unesco, Paris. 1954.

MALMBERG, B.: *Les domaines de la Phonetique*, P.U.F. 1971.

MILLS, Ch.W.: *La imaginación sociológica*, Fondo de Cultura Económica 1961.

MOSTERIN, J.: *La ortografía fonémica del español*, Madrid, Alianza 1981.

NARENS, L.: *Abstract Measurement Theory*, MIT Press 1985.

PFANZAGL, J.: *Theory of Measurement*, J. Wiley 1968.

POPPER, K.R.: *La Lógica de la Investigación Científica*, Madrid, Tecnos 1962.

RICKERT, H.: *Ciencia cultural y ciencia natural* , Barcelona, Espasa-Calpe, colec. Austral 1943.

ROBERTS, F.: *Measurement Theory with Applications to Decision Making, Utility and the Social Sciences*, Addison-Wesley 1979.

SOROKIN, P.: *Achaques y manías de la Sociología contemporánea*, Aguilar 1957.

STEVENS, S.S.: "On the Theory of Scales of Measurement", *Science* 103, (1946), pp. 677-680.

SUPPES, P.: *Introduction to Logic*, Van Nostrand 1957.

SUPPES, P., & ZINNES, J.: "Basic Measurement Theory". en Luce, Bush & Galanter (eds.): *Handbook of Mathematical Psychology*, vol. I, pp. 1-76, J. Wiley 1963.

TATSUOKA, M.: "Mathematical Models in the Behavioral and Social Sciences". En D.K. Witla: *Handbook of Measurement and Assessment in Behavioral Sciences*. pp. 3-59, Addison-Wesley 1968.

ZIMAN, J.: *Public Knowledge*, Cambridge University Press 1968.

Profesor Emérito de la
Universidad Central de Venezuela