SOBRE PREORDENES Y OPERADORES DE CONSECUENCIAS DE TARSKI

Juan Luis CASTRO* y Enric TRILLAS**

0. INTRODUCCION

Este trabajo tiene por objetivo demostrar la equivalencia entre el concepto de operador de consecuencia de Tarski, de naturaleza puramente lógica, con el de preorden, de naturaleza algebraica, sin más que exigir que exista una operación binaria "y" sobre el conjunto, de forma que sea un ínfimo respecto al preorden y que sea coherente respecto al operador.

1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PRELIMINARES

Un preorden sobre un conjunto X es una relación binaria "R" sobre dicho conjunto, que verifique las propiedades

i) Reflexiva: aRa $\forall a \in X$

ii) Transitiva: aRb y bRc $\Rightarrow$ aRc, $\forall a, b, c \in X$.

Diremos que $i \in X$ es un ínfimo del par no ordenado formado por $a, b \in X$ si se verifica

i) iRa e iRb

ii) Si es cRa y es cRb, entonces es cRi; $\forall c \in X$.

Es inmediato que si i e i´ son dos ínfimos para a y b, entonces es iRi´ y es i´Ri. Además, si es i un ínfimo para a, b y es i´ un ínfimo para a´, b´, entonces

aRa´ y bRb´ implica que iRi´.

Una operación binaria, asociativa y conmutativa, ".", sobre X, se dice una operación "y" respecto a R, si se verifica

$\forall a, b \in X$; a.b es un ínfimo de a, b.

THEORIA - Segunda Epoca - Año IV
Curso 1988-1989, Nº 11, pp. 419-425

A un par (X,R) donde X es un conjunto cualquiera y R es un preorden sobre X, lo llamaremos un conjunto preordenado.

A una terna (X,R,.) donde (X,R) es un conjunto preordenado y "." es una operación "y" respecto a R, lo llamaremos un conjunto y-preordenado.

Un morfismo entre dos conjuntos preordenados, (X,R) e (Y,S) es una aplicación f de X en Y verificando

Si es aRb, entonces es f(a)Sf(b)

Evidentemente los conjuntos preordenados con estos morfismos forman una categoría que, denotaremos CP, donde la composición es la composición de las aplicaciones y las identidades son las aplicaciones identidad.

Un morfismo entre dos conjuntos y-preordenados, (X,R,.) e (Y,S,:), es una aplicación f de X en Y tal que f es un morfismo de conjuntos preordenados, y además f(a.b) es un ínfimo de {f(a), f(b)}.

Evidentemente, los conjuntos y-preordenados, con estos morfismos, forman una categoría, que denotaremos CYP, donde la composición es la composición de aplicaciones y las identidades son las aplicaciones identidad.

Un operador de consecuencia de Tarski sobre un conjunto X es una aplicación C, del conjunto de las partes del conjunto X en si mismo de forma que:

i) $\forall A \subseteq X$, sea $A \subseteq C(A)$.

ii) Si es $A \subseteq B \subseteq X$, entonces sea $C(A) \quad C(B)$.

iii) $\forall A \subseteq X$, sea $C(C(A)) = C(A)$.

Se dice que verifica la condición de compacidad, si

iv) $\forall x \in C(A)$, $\exists B \subseteq A$ finito tal que $x \in C(B)$.

Dada una operación binaria asociativa y conmutativa "." definida sobre X, se dice que es y-compatible con C si se verifica

a) Si es $a \in C(B)$ y es $b \in C(B)$, es $a.b \in C(B)$.

b) $a \in C(\{a.b\})$ y $b \in C(\{a.b\})$, para cualesquiera $a, b \in X$.

A un par (X,C) donde C es un operador de consecuencia de Tarski sobre X, lo llamaremos una estructura de consecuencias.

A una terna (X,C,.) donde (X,C) es una estructura de consecuencias, C verifica la condición de compacidad y , "." es una operación compatible con C, lo llamaremos una estructura de y-consecuencias.

Un morfismo entre dos estructuras de consecuencias (X,C) e (Y,C'), es una aplicación f de X en Y de manera que

$f(C(A)) \subseteq C'(f(A)), \quad \forall A \subseteq X,$

esto es, lleve consecuencias en consecuencias.

Es evidente que las estructuras de consecuencias con estos morfismos forman una categoría, que denotaremos EC, donde la composición coincide con la composción de aplicaciones y en donde las identidades son la aplicación identidad.

Un morfismo entre dos estructuras de y-consecuencias es un morfismo de estructuras de consecuencias que respete la operación. Con esta definición de morfismo, las estructuras de y-consecuencias forman una categoría que denotaremos EYC.

2. RELACION ENTRE PREORDENES Y OPERADORES DE CONSECUENCIAS

TEOREMA 2.1. Sea X un conjunto y sea R un preorden sobre X. La aplicación de partes de X en sí mismo, C_r, definida por

$C_r(A) = \{ x \in X \;/\; \exists a \in A \text{ tal que } aRx \}$

es un operador de consecuencia de Tarski.

En efecto.

A partir de la definición de C_r se sigue de manera obvia que A C_r y que si son A B, entonces $C_r(A)$ $C_r(B)$. Aplicando este último resultado obtenemos que $C_r(A)$ $C_r(C_r(A))$. Si $x \in C_r(C_r(A))$, entonces

$\exists b \in C_r(A)$ tal que bRx luego

$\exists a \in A$ tal que aRb y bRx

y aplicando la propiedad transitiva llegamos a que $x \in C_r(A)$.■

TEOREMA 2.2. Sea X un conjunto, y sea C un operador de consecuencia de Tarski sobre X. Entonces la relación binaria R_c definidad por

aR_cb si y sólo si $b \in C(a)$

es un preorden sobre X.

En efecto.

La propiedad reflexiva es inmediata a partir de $A \subseteq C(A)$. Por otra parte si son $aR_c x$ y $xR_c b$, entonces $x \in C(a)$ y $b \in C(x)$, luego $b \in C(C(a)) = C(a)$ y, en consecuencia $aR_c b$.■

TEOREMA 2.3. Sea X un conjunto y sea R un preorden sobre X. Entonces $R_{c_r} = R$.

En efecto.

Es $aR_{c_r} b$ cuando y sólo cuando es $b \in C_r(a)$, y esto a su vez ocurre si y sólo si es aRb.■

Observese que si partimos de un operador de Tarski C, no necesariamente se da que $C_{r_c} = C$, puesto que no toda consecuencia de un conjunto tiene por qué ser consecuencia de un solo elemento del conjunto. Lo que si es normal exigir, es que toda consecuencia de un conjunto sea consecuencia de un subconjunto finito suyo (ya que el ser humano sólo puede razonar con un conjunto finito de premisas), lo cual se traduce en que C verifique la condición de compacidad respecto de la yuxtaposición. Esto motiva el siguiente teorema.

TEOREMA 2.4. Sea $(X,R,.)$ un ínfimo semiretículo. Entonces, la aplicación de partes de X en sí mismo C'_r, definida por

$$C'_r(A) = \{\, x \in X / \ \exists a_1,a_2,\dots,a_n \in A \text{ tal que } a_1.a_2.\ \ .a_n R x \,\}$$

verifica que $(X,C,.)$ es una estructura de y-consecuencias.

En efecto.

Por la propiedad reflexiva de R, se deduce que $A \subseteq C'_r(A)$, además, si son $A \subseteq B$, entonces es evidente por la definición de C'_r que es $C'_r(A) \subseteq C'_r(B)$. Sólo resta demostrar que $C'_r(C'_r(A)) = C'_r(A)$. Sea $x \in C'_r(C'_r(A))$, entonces

$$\exists\, b_1,b_2,\dots,b_m \in C'_r(A) \text{ tal que } b_1.b_2.\dots.b_m R x$$

Para cada $i = 1,2,\dots,n$

$$\exists\, b^i_1,b^i_1,\dots,b^i_{n_i} \subset A \text{ tal que } b^i_1.b^i_2.\dots.b^i_{n_i} R b_i.$$

luego

$$b^1_1.b^1_2\dots b^1_{n_1}.b^2_1.b^2_2\dots b^2_{n_2}\dots.b^m_1,b^m_2,\dots,b^m_{n_m} R x$$

y por tanto $x \in C'_r(A)$.

Es claro que C'_r es y-compatible con la operación ".", y que verifica la condición de compacidad por su propia definición.■

LEMA 2.5. Sea $(X,C,.)$ una estructura de y-consecuencias. Entonces para cualesquiera $a_1,a_2,\dots,a_n \in X$ se cumple

$$C(\{a_1,a_2,\dots,a_n\}) = C(\{a_1.a_2. \; .a_n\})$$

En efecto.

Por la parte a) de la propiedad de ser y-compatible, esta

$$\{a_1,a_2,\dots,a_n\} \subseteq C(a_1.a_2\dots a_n), \quad \text{así}$$

$C(\{a_1,a_2,\dots,a_n\}) \subseteq C(C(a_1.a_2\dots a_n)) = C(a_1.a_2\dots a_n)$.

Reciprocamente, por la condición b) $a_1.a_2\dots a_n \in C(\{a_1,a_2,\dots,a_n\})$ y por tanto es $C(a_1.a_2\dots a_n) \subseteq C(\{a_1,a_2,\dots,a_n\})$.■

TEOREMA 2.6. Sea $(X,C,.)$ una estructura de y-consecuencias. Entonces, $(X,R_c,.)$ es un ínfimo semiretículo.

En efecto.

Como $a \in C(\{a,b\})$ y $b \in C(\{a,b\})$, $a \in C(\{a.b\})$ y $b \in C(\{a.b\})$, así es $a.bR_c a$ y es $a.bR_c b$. Por otra parte, si es $dR_c a$ y es $dR_c b$, será $a \in C(\{d\})$ y $b \in C(\{d\})$, luego será $a.b \in C(\{d\})$ y así $dR_c(a.b)$.■

TEOREMA 2.7. Sea $(X,R,.)$ un ínfimo semiretículo.
Entonces, $R_{c'_r} = R$.

En efecto.

$aR_{c'_r}b$ si y sólo si $b \in C'_r(a)$, y esto ocurre cuando y sólo cuando aRb, puesto que $a.a. \overset{n)}{\dots} .aRa$ y $aRa.a. \overset{n)}{\dots} .a$. ■

TEOREMA 2.8. Sea $(X,C,.)$ una y-estructura de consecuencias.
Entonces, $C'_{r_c} = C$.

En efecto.

Sea $x \in X$, $x \in C'_{r_c}(A)$ si y sólo si $\exists\, b_1,b_2,\dots,b_m \in A$, tal que $b_1.b_2\dots b_m R_c x$, es decir, $x \in C(\{b_1.b_2\dots b_m\})$, pero como

$$C(\{b_1,b_2,\dots,b_m\}) = C(\{b_1.b_2\dots b_m\})$$

esto ocurre cuando y sólo cuando $x \in C(A)$ (por verificar C la condición de comp acidad respecto a ".").■

TEOREMA 2.9. Sean (X,R) e (Y,R) dos conjuntos preordenados. Sea f una aplicación de X en Y. Si f es un morfismo de conjuntos preordenados, entonces es un morfismo de estructuras de consecuencias entre (X,C_r) e (Y,C_r).

En efecto.

Sea $f(C_r(A))$, entonces $\exists$ y e $C_r(A)$ tal que $f(y) = x$, así será aRy para algún a e A, luego será f(a)Rf(y) y, en consecuencia es x = f(y) e C(f(A)).■

TEOREMA 2.10. Sean (X,R,.) e (Y,X,.) dos ínfimo-semiretículo. Sea f un morfismo entre ellos. Entonces f es un morfismo de estructuras de y-consecuencias entre $(X,C_r^{\prime},.)$ e $(Y,C_s^{\prime},.)$.

En efecto.

Ya sabemos que preserva la operación, sólo falta pues demostrar que es un morfismo de operadores de consecuencia. Si es x e $f(C_r^{\prime}(A))$, $\exists\, b_1,b_2,\dots b_m$ e A tal que $b_1.b_2\dots b_m$ Ry con F(y) = x, luego $f(b_1)$: $f(b_2)$:...: $f(b_m)$Sf(y), así x = f(y) e $C_s^{\prime}(f(A))$.■

TEOREMA 2.11. Sean (X,C) e (Y,D) dos estructuras de consecuencias. Sea f un morfismo entre ambas. Entonces f es un morfismo de conjuntos preordenados entre (X,R_c) e (Y,R_d).

En efecto.

Si es aR_cb, entonces b e C({a}), luego f(b) e D({f(a)}), así es $f(a)R_df(b)$.■

TEOREMA 2.12. Sean (X,C,.) e (Y,D,:) deos estructuras de y-consecuencias, y sea f un morfismo entre ellas. Entonces f es un morfismo de ínfimo-semiretículos $(X,R_c,.)$ e $(Y,R_d,:)$.

En efecto.

Como a,b e C({a.b}), tenemos que f(a), f(b) e D({f(a.b)}), luego f(a) : f(b) e D({f(a.b)}). Como a.b e C({a,b}), f(a.b) e D({f(a),f(b)}) = D({f(a) : f(b)}). Así $f(a.b)R_d(f(a) : f(b))$ y $(f(a) : f(b))R_df(a.b)$, luego f(a.b) es un ínfimo de f(a) : f(b).■

Podemos resumir todo el trabajo en los dos siguientes teoremas, cuya demostración ha sido el objetivo buscado:

TEOREMA 2.13. El funtor entre CP y EC dado por la correspondecia entre los objetos

$$(X,R) \longrightarrow (X,C_r)$$

y la identidad sobre los morfismos es un monomorfismo de categorías, cuyo funtor (épim-orfismo) inverso viene dado por

$$(X,C) \longrightarrow (X,R_c)$$

sobre los objetos, y la identidad sobre los morfismos.

TEOREMA 2.14. El funtor entre CYP y EYP dado por la correspondencia entre los objetos

$$(X,R,.) \longrightarrow (X,C'_r,.)$$

y la identidad sobre los morfismos es un isomorfismo de categorías, cuyo inverso viene dado por

$$(X,C,.) \longrightarrow (X,R_c,.)$$

sobre los objetos, y la identidad sobre los morfismos.

BIBLIOGRAFIA

A. TARSKI. **Logic, semantics, metamathematics.** Clarendon Press, Oxford, 1956.

J. PLA I CARRERA. **Contribucio´ a l´estudi de les Estructures Algebraiques dels Sistemes Lógics Deductius.** Tesis Doctoral (Universidad de Barcelona), 1976.

***Dep. Ciencias Computación e I.A.(Univ. de Granada).**

****Dep. Inteligencia Artificial (Univ.Politécnica de Madrid).**