LOGICAS VECTORIALES: UNA APROXIMACION A LAS BASES NEURALES DEL PENSAMIENTO LOGICO

Eduardo MIZRAJI*

ABSTRACT

In this article we describe the logical performances displayed by a context-dependent associative memory model. This model requires the existence of a network able to construct the Kroneker product of two vectors, and then to send the composed vector to a correlation distributed memory. This system of nets is capable to sustain all the operations of the classical propositional calculus. This fact implies the existence of vector logics where the logical functions are displayed by matrix operators constructed using the properties of the Kronecker product. When the basic binary matrix operators act on fuzzy inputs, a probabilistic many-valued logic emerges. The present approach implies the potential existence of alternative vector logics. We describe a vector Shefferian "logic", and we comment the potentialities of multidimensional vector logics.

1. INTRODUCCION

Los mecanismos utilizados por el sistema nervioso de un ser humano para sustentar las operaciones llamadas "lógicas" son aún inciertos. El trabajo pionero de George Boole [1] creó un vínculo metodológico entre ciertas operaciones algebraicas y las aptitudes lógicas del pensamiento humano. Posteriores investigaciones en el ámbito de la fisiología, demostraron que la señal esencial utilizada por las neuronas en diversos procesos de transmisión es el potencial de acción [2]. Esta señal está determinada por un complejo mecanismo biofísico [3] y se caracteriza por tener una duración y una amplitud prácticamente constante (para escalas de tiempo y de amplitud de órdenes de milisegundo y milivoltio, respectvamente). Estas propiedades del potencial de acción, sintetizadas en el nombre "ley del todo o nada", fueron conocidas hacia la década de los 30, y prontamente fueron relacionadas con las variables binarias requeridas por el álgebra de Boole para representar a las operaciones lógicas del pensamiento humano.

La formalización de la idea de que las neuronas eran dispositivos binarios, condujo a la publicación en 1943 del modelo de McCulloch y Pitts [4], uno de los primeros y más influyentes modelos de redes neuronales. La casi concomitante construcción de algunos de los primeros computadores electrónicos "binarios",

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, Nº 16-17-18, tomo A, 123-140

comprendieron, las redes de McCulloch-Pitts eran excesivamente dependientes de la integridad funcional de sus unidades constitutivas. La noción de que la función del sistema nervioso suele permanecer elativamente eficiente luego de la destrucción de cierta cantidad de neuronas, era apoyada por la experiencia de los neurólogos clínicos y por los experimentos de los fisiólogos [5].

La invención por parte de Denis Gabor de la holografía y los avances en el campo de la física del láser [6], mostraron un procedimiento físico concreto capaz de almacenar imágenes en forma distribuída; además, estas imágenes holográficas eran capaces de permanecer relativamente íntegras ante destrucciones parciales del soporte físico. Esta fiabilidad de los procedimientos de almacenamiento distribuído de información, inspiró el diseño de diversos modelos de memorias biológicas (ver [7]). Estos modelos asumían que las estructuras en las que se codificaba la información eran extensos vectores cuyas componentes eran las señales generadas por cada una de las neuronas que intervenían en el proceso (usualmente estas señales son frecuencias de potenciales de acción). En el interior del sistema nervioso central, un vector primario proveniente de los receptores sensoriales, sería recodificado múltiples veces. En este marco interpretativo, el sistema nervioso es concebido como un dispositivo capaz de procesar en paralelo y continuamente miles de señales no binarias.

En varios de los modelos [8 - 12] se asumía que una memoria era un operador capaz de asociar pares arbitrarios de vectores; uno de los vectores oficiaba de entrada y otro de salida. Los modelos de Anderson [9] y de Kohonen [10] mostraron que una amplia clase de memorias distribuídas era representable por matrices de correlación. Estas matrices exhibían varias propiedades interesantes, como la persistencia de asociaciones nítidas aún luego de la destrucción de algunos componentes de la memoria, y la capacidad de reconocer (y reconstruír) configuraciones parciales o ruidosas [11]. Estas memorias de correlación tenían un parentesco cercano con el modelo de Perceptrón de Frank Rosenblatt [7] y heredaron parte de sus virtudes, pero también parte de sus insuficiencias. Una de las limitaciones de este tipo de modelo era su incapacidad para modular las asociaciones por medio de contextos vectoriales arbitrarios. El problema siguiente ilustra esta incapacidad: dado un vector que codifica una palabra en castellano, asígnese el par de vectores que se corresponden con su traducción en inglés y en francés. Este tipo de asociación disyuntiva, modulable por un contexto (en este caso el idioma al que se pide se traduzca), no es satisfactoriamente resoluble por las memorias de correlación aisladas. Esta inhabilidad de las memorias de correlación es equivalente a la incapacidad de los perceptrones de ejecutar la operación lógica o-exclusivo (inequivalencia) [13].

Recientemente, he mostrado que existe un sistema, construible mediante dos redes neuronales, capaz de sustentar memorias de correlación distribuídas y modulables por contextos [14]. En este sistema, una primera red construye el producto de Kronecker entre un vector entrada y un vector contexto. El vector producto de Kronecker es luego introducido en una memoria de correlación que asocia este vector compuesto a una salida arbitraria. Una de las propiedades de este tipo de memoria, es la capacidad de implementar las operaciones del cálculo proposicional (incluyendo al o-exclusivo). El correlato algebraico de esta capacidad del modelo es una representación vectorial para la lógica binaria basadaen las propiedades del producto de Kronecker. En este tipo de representación vectorial, a cada operación del cálculo proposicional clásico corresponde una clase de operadores matriciales. En esta representación, ciertas tautologías clásicas del cálculo proposicional, como las leyes de De Morgan o la Ley de Contraposición, se transforman en igualdades entre operaciones matriciales. Una propiedad particularmente sugestiva es que en presencia de entradas interpretables como portadoras de información difusa, los operadores matriciales correspondientes al cálculo proposicional binario, generan un sistema de lógica polivalente; este sistema parcialmente abarca a las lógicas trivalentes de Lukasiewicz y Kleene, y es idéntico a uno de los sistemas de lógica probabilística estudiados, entre otros, por Keynes y Reichenbach [15]. Por otra parte, existen construcciones vectoriales alternativas para representar al cálculo proposicional clásico: una lógica vectorial binaria basada en la conectiva de Sheffer, genera una "lógica" polivalente no-probabilística y con una negación no involutoria.

En este artículo expodremos algunas propiedades de estas lógicas vectoriales sustentadas por memorias contexto-dependientes. Mostraremos que para estas memorias, la identificación de operaciones entre conjuntos es algebraicamente equivalente a la ejecución de las operaciones del cálculo proposicional. Mostraremos también la generación no programada de lógicas polivalentes cuando los operadores matriciales binarios se "enfrentan" a decisiones inciertas. Describiremos luego una lógica vectorial shefferiana. Finalmente, comentaremos algunas posibles vinculaciones de las lógicas vectoriales con la biología del conocimiento.

2. MEMORIAS DE CORRELACION MODULABLES POR CONTEXTOS

Las memorias de correlación surgen como respuesta ante el problema siguiente [Problema de los pares asociados]: dados los pares arbitrarios de vectores columna (f_i, g_i) con $f_i \in V_N$ y $g_i \in V_M$, i=1, ..., K, encontrar un operador M tal que ante la entrada f_i produzca la salida g_i. Este problema tiene soluciones aproximadas, óptimas en el sentido de los cuadrados mínimos, expresables mediante matrices pseudoinversas de Moore-Penrose [11]. Una solución exacta sencilla surge cuando el conjunto { f_i } es ortonormal. En este caso, el operador M es una matriz de correlación.

$M = \Sigma g_i f_i^T$

(la sumatoria se extiende sobre los K pares de vectores); la respuesta ante un vector $f_k \in \{ f_i \}$ es

$Mf_k = \Sigma <f_i, f_k> g_i = g_k$.

En general, W^T representa a la traspuesta de la matriz W, y $<u, v> = u^T v$ representa al producto escalar entre dos vectores columna u y v. La matriz de correlación M representa una memoria distribuída porque trazas de los pares de vectores almacenados se dispersan en los diferentes coeficientes de la matriz. Además, esta memoria utiliza la superposición de los datos, ya que cada coeficiente de la matriz se construye adicionando trazas de los diferentes pares almacenados; esto provoca potenciales interferencias entre distintos pares.

Imaginemos la existencia de una red multiplicativa tal que, dados un vector que codifica una entrada y un vector que codifica un contexto, sea capaz de construir su producto de Kronecker. Entonces, si este nuevo vector es enviado a una memoria de correlación, emerge un dispositivo con potencialidades novedosas: este sistema constituído por dos clases de redes, es capaz de modular las asociaciones por medio de contextos [14]. La red multiplicativa que construye el producto de Kronecker debe estar dotada de una conectividad particular. En el caso en que los vectores entrada y contexto son ortonormales, la memoria de correlación puede realizar una discriminación perfecta si tiene la estructura siguiente

$M = \Sigma \Sigma g_{ij} (h_i \times p_{ij})^T$,

donde h_i representa a la entrada, p_{ij} representa a los diversos contextos que modulan a la entrada h_i, y g_{ij} es la salida asociada al par (h_i , p_{ij}); en general, A x B representa el producto de Kronecker entre dos matrices (o vectores).

Estas memorias muestran varias performances interesantes; pueden, por ejemplo, almacenar sucesiones de vectores capaces de desplegarse temporalmente en presencia de un contexto, que actúa como "compuerta semántica" [14]. Otra de las propiedades de este sistema de redes es su aptitud para representar todas las operaciones del cálculo proposicional; en esta situación, los vectores h, p y g, codifican versiones vectoriales de los valores veritativos.

3. ESQUEMA DEL CALCULO PROPOSICIONAL

Sea un sistema de clasificación que asigna a cada proposición un valor de verdad. Para estos valores de verdad se asignan los dos valores clásicos: verdadero, T, o falso, F. Sea $\tau = \{T, F\}$. La estructura básica de este cálculo está dada por dos clases de funciones, una función "negación", $N: \tau \rightarrow \tau$, y las funciones lógicas binarias $B: \tau \otimes \tau \rightarrow \tau$ ($\tau \otimes \tau$: producto cartesiano de τ).

La función negación cumple con las dos propiedades siguientes: N(T) = F y N(F) = T. En el simbolismo usual, la negación de una proposición p es representada por -p. Las tablas siguientes especifican algunas de las 16 conectivas lógicas [16, 17]; p y q representan proposiciones arbitrarias.

p	q	Conjunción p & p	Disyunción p v q	Implicación $p \rightarrow q$	Conectiva de Sheffer p | q	Conectiva de Peirce $p \downarrow q$
T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T	T

p	q	Equivalencia $p \equiv q$	O-Exclusivo $p \equiv q$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

4. EL PRODUCTO DE KRONECKER

El producto de Kronecker [18, 19] se define para matrices rectangulares arbitrarias, como sigue. Dadas una matriz A = $[a_{ij}]$ de orden (m x n) y una matriz B = $[b_{ij}]$ de orden (p x q), el producto de Kronecker (también llamado producto directo) es una matriz C = $[c_{ij}]$ de orden mp x nq) definida en forma particionada por

$$C = [a_{ij} B].$$

Las propiedades básicas de esta operación se muestran a continuación:

i) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C,$

ii) $(A + B) \times (C + D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$,
iii) $(A \times B)(C \times D) = (AC) \times (BD)$.

Las propiedades ii) y iii) requieren matrices conformables. A partir de la propiedad iii), resulta que dados dos vectores a y c de dimensión m, y dos vectores b y d de dimensión n, se verifica

$(a \times b)^T(c \times d) = (a^Tc) \times (b^Td) = \langle a,c\rangle\langle b,d\rangle$.

Un concepto importante es el de "potencia de Kronecker" $A^{[k]}$ [18], definida por

$A^{[2]} = A \times A$,
$A^{[k+1]} = A \times A^{[k]}$
y que cumple con las propiedades siguientes:
$A^{[k+r]} = A^{[k]} \times A^{[r]}$
$(AB)^{[k]} = A^{[k]}B^{[k]}$.

5. LOGICA VECTORIAL BASICA

Asumamos que los valores de verdad T y F se corresponden, respectivamente, con dos vectores s y n, $s,n \in V_N$; V_N es un espacio vectorial N-dimensional definido sobre el campo de los números reales. Supondremos, para simplificar los argumentos, que s y n son vectores columna mutuamente ortonormales. Por lo tanto, los posibles productos escalares son $\langle s,n\rangle = \langle n,s\rangle = 0$, y $\langle s,s\rangle = \langle n,n\rangle = 1$.

Mostraremos a continuación que un conjunto binario de vectores {s,n} define una base sobre la cual construir operadores matriciales que ejecutan las operaciones del cálculo proposicional clásico. La negación es representable por una matriz cuadrada. Las operaciones binarias son representables por matrices rectangulares cuya construcción utiliza las propiedades del producto de Kronecker entre vectores.

Describiremos a continuación los operadores lógicos matriciales.

a) Negación. La matriz

$N = ns^T + sn^T$

verfica $Nn = s$ y $Ns = n$, siendo $N^2 = I$ (I es la matriz identidad). Por consiguiente, esta matriz tiene la propiedad involutoria de la negación clásica (--p eq p).

b) Conjunción. La matriz C corresponde a la conjunción p & q:

$C = s(s \times s)^T + n(s \times n)^T + n(n \times s)^T + n(n \times n)^T$,

con

$C(s \times s) = s$,
$C(s \times n) = C(n \times s) = C(n \times n) = n$.

c) Disyunción. La matriz D representa a la disyunción p v q:

$D = s(s \times s)^T + s(s \times n)^T + s(n \times s)^T + n(n \times n)^T$,

que verifica

$D(s \times s) = D(s \times n) = D(n \times s) = s$,
$D(n \times n) = n$.

d) Implicación. La implicación $p \rightarrow q$ es realizada por la matriz L:

$L = s(s \times s)^T + n(s \times n)^T + s(s \times s)^T + s(n \times n)^T$.

Por consiguiente,

$L(s \times s) = L(n \times s) = L(n \times n) = s$,
$L(s \times n) = n$.

e) Conectiva de Sheffer. La conectiva p | q está representada por la matriz S:

$S = n(s \times s)^T + s(s \times n)^T + s(n \times s)^T + s(n \times n)^T$,

con

$S(s \times s) = n$,
$S(s \times n) = S(n \times s) = S(n \times n) = s$.

f) Conectiva de Peirce. La conectiva $p \downarrow q$ se corresponde con la matriz P:

$P = n(s \times s)^T + n(s \times n)^T + n(n \times s)^T + s(n \times n)^T$;

por tanto

$P(s \times s) = P(s \times n) = P(n \times s) = n$,

$P(n \times n) = s.$

g) <u>Equivalencia</u>. La equivalencia $p \equiv q$ es descrita por la matriz E:

$$E = s(s \times s)^T + n(s \times n)^T + n(n \times s)^T + s(n \times n)^T,$$

con

$$E(s \times s) = E\,(n \times n) = s,$$
$$E(s \times n) = E(n \times s) = n.$$

h) <u>O-exclusivo</u>. El o-exclusivo p q es producido por una matriz X:

$$X = n(s \times s)^T + s(s \times n)^T + s(n \times s)^T + n(n \times n)^T,$$

y

$$X(s \times s) = X(n \times n) = n,$$
$$X(s \times n) = X(n \times s) = s.$$

<u>Ejemplo</u>: si definimos

$$s \equiv (1/\sqrt{2})[1 \quad 1]^T \quad , n \equiv (1/\sqrt{2})[1 \quad -1]^T,$$

entonces, los operadores negación N, disyunción o-exclusivo e implicación, s

$$N = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{matrix}$$

$$L = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

Es importante señalar que para dos vectores no ortogonales arbitrarios s, n $\in$ V_N, todas estas operaciones lógicas pueden ser construídas usando productos de Kronecker y matrices inversas generalizadas de Moore-Penrose.

6. RELACIONES ENTRE OPERADORES

Mostraremos a continuación cómo algunas de las leyes básicas del cálculo proposicional clásico son satisfechas por las operaciones matriciales mostradas en la sección previa.

La conjunción y la disyunción son operaciones conmutativas:

p & q eq q & p,
p v q eq q v p.

(eq representa a la equivalencia lógica). A partir de las propiedades del producto de Kronecker se prueba fácilmente que, para cualquier par de vectores u, v $\in$ V_N, se verifica

$$C(u \times v) = C(v \times u),$$
$$D(u \times v) = D(v \times u).$$

La Ley de Equivalencia para la Implicación y la Disyunción,

p $\rightarrow$ q eq -p v q,

tiene una versión matricial inmediata

$$L = D(N \times I).$$

Las Leyes de De Morgan,

p & q eq -(-p v -q),
p v q eq -(-p & -q),

corresponden las siguientes igualdades

$C = ND(N \times N)$
$D = NC(N \times N)$.

La Ley de Contraposición

$p \rightarrow q$ <u>eq</u> $-q \rightarrow -p$,

es verficada por el operador L para todo par u, v $\in$ V_N :

$L(u \times v) = L(Nv \times Nu)$.

[Demostración: $L(u \times v) = D(N \times I)(u \times v) = D(Nu \times v) = D(v \times Nu) = D(N \times I)(Nv \times Nu) = L(Nv \times Nu)$].

Las conectivas de Sheffer y de Peirce satisfacen las equivalencias siguientes

$p \mid q$ <u>eq</u> $-p \vee -q$,
$p \downarrow q$ <u>eq</u> $-p \,\&\, -q$,

a las que corresponden las ecuaciones matriciales

$S = D(N \times N) = NC$,
$P = C(N \times N) = ND$.

Los operadores que corresponden a la equivalencia y al o-exclusivo, están muy simplemente conectados:

$X = NE$.

En esta representación vectorial del cálculo proposicional, las tautologías se transforman en igualdades algebraicas.

7. <u>REPRESENTACION VECTORIAL DE LAS OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS</u>

A partir de un conjunto C definamos una función característica del conjunto de la forma siguiente:

$f(z\,;\,C) =$ s si $z \in C$

n si $z \notin C$.

Entonces, fácilmente se comprueba que si C es el conjunto complementario de C, entonces

$f(z\ ;\ C) = Nf(z\ ;\ C)$,

donde N es la matriz negación.

Dados dos conjuntos A y B, y dada una operación binaria entre esos conjuntos, $C = \Gamma(A, B)$, nos proponemos buscar un operador matricial H_r que satisfaga la ecuación

$$f(z\ ;\ C) = H_r[f(z\ ;\ A) \times f(z\ ;\ B)].$$

Los resultados que se muestran a continuación, pueden ser inmediatamente comprobados:

$C = A \cap B \quad \Rightarrow \quad H_r = C,$
$C = A \cup B \quad \Rightarrow \quad H_r = D,$
$C = A \cup B \quad \Rightarrow \quad H_r = L.$

El diagnóstico, por medio de funciones vectoriales y operadores matriciales de las operaciones conjuntistas de complementación, intersección y unión, genera los mismos operadores matriciales que las operaciones lógicas negación, conjunción y disyunción.

8. LOGICA POLIVALENTE E INFORMACION INCIERTA

Una entrada incierta puede ser definida como un vector con la estructura

$$f(z\ ;\ C) = \gamma s + (1 - \gamma)n\ ,\ \gamma \in\ (0, 1).$$

La función $f(z\ ;\ C)$ puede ser interpretada como una función vectorial de pertenencia a un conjunto difuso (o borroso [fuzzy]) [20].

El procesamiento de entradas difusas por parte de operadores lógicos matriciales binarios, engendra sistemas de lógica polivalente. Definamos ahora una función $\mu_\Omega(h) : V_N \rightarrow [0, 1]$, que mide la longitud de la proyección de un vector h, salida de un operador lógico Ω, sobre el vector s:

$$\mu_\Omega(h) = s^T h.$$

Designemos a esta función $\mu_\Omega(h)$, "proyección segmental de Ω". Mostraremos a continuación las proyecciones segmentales para algunos de los operadores básicos. Utilizaremos los vectores u y v, definidos como sigue:

$u = \alpha s + (1-\alpha)n$, $v = \beta s + (1-\beta)n$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

a) Negación.

$\mu_N(h) = s^T N u \equiv \mu_N(\alpha)$,
$\mu_N(\alpha) = 1 - \alpha$.

b) Conjunción.

$\mu_C(h) = s^T C(u \times v) \equiv \mu_C(\alpha, \beta)$,
$\mu_C(\alpha, \beta) = \alpha\beta$.

c) Disyunción.

$\mu_D(h) = s^T D(u \times v) \equiv \mu_D(\alpha, \beta)$,
$\mu_D(\alpha, \beta) = \alpha + \beta - \alpha\beta$.

d) Implicación.

$\mu_L(h) = s^T L(u \times v) \equiv \mu_L(\alpha, \beta)$,
$\mu_L(\alpha, \beta) = 1 - \alpha(1-\beta)$.

e) Equivalencia.

$\mu_E(h) = s^T E(u \times v) \equiv \mu_E(\alpha, \beta)$,
$\mu_E(\alpha, \beta) =' (1-\alpha)(1-\beta) + \alpha\beta$.

Es interesante destacar que la lógica producida por las proyecciones segmentales de los operadores N, C, D y L, es una de las lógicas polivalentes conocidas (a veces llamada "lógica probabilística"). Este es un sistema de lógica basado en ideas desarrolladas sobre todo por Keynes y Reichenbach. [21 - 23]. Para entradas que representen incertidumbres simétricas, correspondientes a valores intermedios $\alpha = \beta = 1/2$, esta lógica tiene estrechos puntos de contacto con las lógicas trivalentes de Lukasiewicz y de Kleene [24, 25].

Es importante señalar que algunas equivalencias válidas en el cálculo proposicional clásico, dejan de ser válidas en esta lógica vectorial. Por ejemplo, definiciones alternativas de la función "equivalencia" están dadas por las siguientes tautologías:

D1) $p \equiv q$ <u>eq</u> $(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)$
D2) $p \equiv q$ <u>eq</u> $(p \& q) \vee (-p \& -q)$

La versión matricial de D1 es

$$E1(u, v) = C[L(u \times v) \times L(v \times u)],$$

siendo su proyección segmental

$$\mu_{E1}(\alpha, \beta) = (1-\alpha)(1-\beta) + \alpha\beta[1 + (1-\alpha)(1-\beta)].$$

La versión matricial correspondiente a D2 es

$$E2(u, v) = D[C(u \times v) \times C(Nu \times Nv)],$$

y su proyección es

$$\mu_{E2}(\alpha, \beta) = (1-\alpha)(1-\beta) + \alpha\beta[1 - (1-\alpha)(1-\beta)].$$

Por consiguiente, las proyecciones segmentales correspondientes a las tres versiones matriciales de la conectiva equivalencia, vistas hasta aquí, están ordenadas como sigue: $\mu_{E2} \leq \mu E \leq \mu_{E1}$.

9. LAS TAUTOLOGIAS CLASICAS EN LA LOGICA VECTORIAL

Mostraremos a continuación las proyecciones segmentales correspondientes a algunas de las tautologías clásicas del cálculo proposicional binario.

<u>Tercero excluído</u>. En la lógica binaria, p v -p siempre es verdadero, pero esto no es así en la lógica vectorial básica. La versión matricial de esta relación es

$$h = D(I \times N)(u \times u) = L(u \times u),$$

y su proyección segmental resulta

$$\mu_{em}(\alpha)\ 1 - \alpha(1-\alpha).$$

Adviértase que $\mu_{em} \geq 0.75$.

$\mu_{em}(\alpha)$ 1 - $\alpha(1-\alpha)$.

Adviértase que $\mu_{em} \geq 0.75$.

Modus ponens. En el cálculo clásico, la expresión [p & (p → q)→ q] es siempre verdadera. Su expresión matricial es

$$h = L\{C[p \times L(p \times q)] \times q\},$$

por lo que su proyección segmental es

$$\mu_{mp}(\alpha, \beta) = \beta + (1-\alpha)(1-\beta) + \alpha^2(1-\beta)^2 .$$

Señalemos que la versión matricial del "modus tollens" genera una proyección segmental idéntica.

Silogismo hipotético. Para la lógica binaria, la expresión [(p → r) & (r → q)] → (p → q) siempre es verdadera. Su versión matricial

$$h = L\{C[L(u \times w) \times L(w \times v)] \times L(u \times v)\},$$

donde $w = \delta s + (1-\delta)n$, $\delta \in [0, 1]$, produce la siguiente proyección segmental

$$\mu_{hs}(\alpha, \delta, \beta) = 1 - \alpha(1-\beta)[1 - \alpha(1-\delta)][1 - \delta(1-\beta)].$$

10. "LOGICA" VECTORIAL SHEFFERIANA

En el cálculo proposicional binario, la conectiva de Sheffer es suficiente para construir todas las otras funciones lógicas. Esto conduce a que nos preguntemos: ¿tiene la matriz S, definida previamente, un rol similar en el marco de las lógicas vectoriales? En lo que sigue mostraremos el resultado de construir diversas operaciones lógicas utilizando sólo la matriz shefferiana S.

a) Negación. Mediante la conectiva de Sheffer, la negación -p se expresa (p|p). La versión matricial de la negación y su correspondiente proyección son

$$N_S(u) = S(u \times u) = Su^{[2]}$$
$$\mu_{SN}(\alpha) = 1 - \alpha^2.$$

b) Conjunción. En la lógica binaria, la conjunción p & q equivale a (p|q) | (p|q). La representación matricial shefferiana y la proyección segmental resultan

$$C_S(u, v) = S[S(u \times v) \times S(u \times v)] = S[S^{[2]}(u \times v)^{[2]}],$$

$\mu_{SC}(\alpha, \beta) = 1 - (1-\alpha\beta)^2.$

c) Disyunción. En el cálculo proposicional, la disyunción p v q es equivalente a la expresión (p|p) | (q|q); la versión matricial shefferiana y su proyección son

$D_S(u, v) = S[S(u \times u)\ S(v \times v)] = S[S^{[2]}(u^{[2]} \times v^{[2]})].$
$\mu_{SD}(\alpha, \beta) = 1 - (1-\alpha^2)(1-\beta^2).$

d) Implicación. Una de las expresiones de la implicación $p \rightarrow q$ en términos de la conectiva de Sheffer es p | (q|q). A esta expresión corresponden la siguiente representación matricial y su proyección segmental

$L_S(u, v) = S[u \times S(v \times v)] = S(u \times sv^{[2]})$
$\mu_{SL}(\alpha, \beta) = 1 - \alpha(1-\beta^2).$

Una observación destacable es que si en las expresiones de las proyecciones segmentales shefferianas μ's imponemos para los exponentes la transformación $2 \rightarrow 1$, resulta en general que $\mu_S \rightarrow \mu$, es decir que las proyecciones segmentales shefferianas se transforman en las proyecciones segmentales de la lógica vectorial básica [eg. $\mu_{SD}(\alpha, \beta) \rightarrow \mu_D(\alpha, \beta)$]. Es necesario también destacar que esta "lógica" tiene una negación no involutoria. La proyección segmental de esta negación $\mu_{SN} = 1-\alpha^2$ tiene un punto fijo $\alpha^* = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618$ [nótese que este número es la inversa del famoso "número de oro"]. Fuera de este punto fijo, sucesivas iteraciones de la negación "empujan" a los valores segmentales alternativamente hacia los valores extremos 0 y 1.

11. LOGICAS MULTIDIMENSIONALES

Notemos que las lógicas vectoriales polivalentes mostradas hasta ahora, son el resultado de aplicar operadores matriciales binarios sobre entradas inciertas. Estas entradas son combinaciones lineales de los dos vectores s y n que constituyen la base sobre la que se definieron los operadores. Por consiguiente, lógicas con infinitos valores de verdad, como la lógica probabilística o como la lógica shefferiana, son lógicas bidimensionales. Esta observación sugiere la potencial existencia formal de lógicas vectoriales multidimensionales. Por ejemplo, un sistema tridimensional podría ser sustentado por una base de tres vectores ortogonales {s, n, r} tales que r "niegue" tanto a la afirmación s como a la negación n. Un sistema tetradimensional {s, s', n, n'} podría constar de dos afirmaciones s y s', y dos negaciones n y n', con diversos posibles vínculos entre sí.

La importancia matemática (o física) de tales extensiones vectoriales es difícil de anticipar, pero este es un tópico que quizá merezca cierta investigación ulterior.

12. COMENTARIOS FINALES

Las actividades mentales del cerebro humano representan un fenómeno colectivo sostenido por extensas y complejas redes neuronales. Estas redes están conformadas por células capaces de codificar información mediante eventos electroquímicos. Los modelos usuales de memorias distribuídas suponen que la actividad neural es representable por extensos vectores y que la información se almacena mediante modificaciones relativamente permanentes de la actividad sináptica [9 - 12].

El modelo de memoria contexto-dependiente propuesto por el autor [14], genera la posibilidad de instalar, en redes neuronales modelo, a todas las operaciones del cálculo proposicional clásico. Una consecuencia de esto, es la existencia de una representación matricial de los operadores lógicos, que usa abundantemente de las propiedades del producto de Kronecker. El acceso a las decisiones de los operadores lógicos, supone la preexistencia de sistemas neurales capaces de clasificar las aferencias sensoriales en un conjunto discreto de estructuras conceptuales. La habilidad del sistema nervioso humano para transformar el flujo caso contínuo de perceptos, en un conjunto discontínuo de conceptos ha sido admirablemente analizada por William James [26]. Presumiblemente las aptitudes matemáticas que los seres humanos son capaces de desarrollar, tienen en esta habilidad su punto de partida. Un estudio reciente [27] muestra que las memorias distribuídas tienen también, en ciertas condiciones, la capacidad de simular la construcción de sistemas conceptuales.

Está generalmente admitido que los seres humanos no actúan como "máquinas lógicas" en sus procesos mentales usuales; presumiblemente, su desempeño ante los obstáculos cotidianos que le opone la realidad, apele a asociaciones simples y habituales (véase [28]). Por consiguiente, la estructura matemática estudiada en este trabajo, y los modelos que la sustentan, representan sólo la aptitud que tienen ciertas redes, adecuadamente programadas, para ejecutar las operaciones de la lógica formal. Señalemos que el ejercicio de la lógica formal es quizá una actividad trabajosamente adquirida a través de siglos de evolución cultural [29].

Es interesante que un modelo sumamente simple de memoria sensible a contextos sea capaz de proponer operadores lógicos binarios que, en presencia de decisiones inciertas, produzca dictámenes similares a los generados, ante situaciones inciertas, por el pensamiento de investigadores como Lukasiewicz y Kleene. Este paralelismo no buscado entre las decisiones de un modelo y los descubrimientos de investigadores humanos con una lógica binaria instalada en sus sistemas nerviosos, sugiere que el mecanismo de memoria contexto-dependiente presentado en [14], podría capturar algún fragmento de la realidad de la función neural.

*Sección de Biofísica, Facultad de Ciencias,
Montevideo (Uruguay)

REFERENCIAS

1. BOOLE, G. **An Investigation of the Laws of Thought**. Dover, New York (1958).
2. KANDEL, E.R., SCHWARTZ, J.H. **Principles of Neural Sciences**. (Segunda Ediciôn), Elseiver, New York (1985).
3. SCOTT, A.C. **Neurophysics**. Willey, New York (1977).
4. McCULLOCH, W.S., PITTS, W. "A logical calculus immanent in nervous activity". **BULL. MATH. BIOPHYS.**, 5, 115-133 (1943).
5. LASHLEY, K.S. **Brain Mechanisms and Intelligence**. Dover, New York (1963).
6. WILLSHAW, D.J. "Holography, Associative Memory, and Inductive Generalization", en **Parallel Models of Associative Memory**, HINTON, G.E., ANDERSON, J.A. (Eds.) Hillsdale, New Jersey (1989).
7. ANDERSON, J.A., ROSENFELD, E. **Neurocomputing**. MIT Press, Cambridge (1988).
8. WILLSHAW, D.J., BUNEMAN, O.P., LONGUET-HIGGINS, H.C. "Non-holographic Associative Memory". **NATURE**, 222, 960-962 (1969).
9. ANDERSON, J.A. "A simple neural network generating an interactive memory". **MATHEMATICAL BIOSCIENCES** 14, 197-220 (1972).
10. KOHONEN, T. "Correlation matrix memories". **IEEE TRANS. ON COMPUTERS** C-21, 353-359 (1972).
11. KOHONEN, T. **Associative Memory: A System Theoretical Approach**. Springer, New York (1977).
12. COOPER, L.N. "A possible organization of animal memory and learning", in **PROCEEDINGS OF THE NOBEL SYMPOSIUM OM COLLECTIVE PROPERTIES OF PHYSICAL SYSTEMS**, pp. 252-264, B. LUNDQUIST & S. LUNDQUIST (Eds.), Academic Press, New York (1974).
13. MINSKY, M.L., PAPERT, S.A. **Perceptrons. Expanded Edition**. MIT Press, Cambridge (1988).
14. MIZRAJI, E, "Context-dependent associations in linear distributed memories". **BULL. MATH. BIOL.**, 51, 195-205 (1989).

15. GRIZE, J.-B. "Historia, Lógica de las Clases y las Proposiciones. Lógica de los predicados. Lógicas modales", en **Tratado de Lógica y Conocimiento Científico**. PIAGET, J. (Ed.) Paidós, B. Aires (1979).

16. SUPPES, P. **Introduction to Logic**. Van-Nostrand-Reinhold, New York (1957).

17. KORFHAGE, R.R. **Logic and Algorithms**. Wiley, New York (1966).

18. BELLMAN, R. **Introduction to Matrix Analysis**. McGraw-Hill, New York (1960).

19. GRAHAM, A. **Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications**. Ellis Horwood, Chichester (1981).

20. KLIR, G.K., FOLGER, T.A. **Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information**. Prentice-Hall, London (1988).

21. RUSSELL, B. **Human Knowledge.Its Scope and Limits**. Allen & Unwin, London (1948).

22. BLANCHE, R. **Introduction à la Logique Contemporaine**. Armand Colin, Paris (1957).

23. RESCHER, N. **Many-valued Logic**. McGraw-Hill, New York (1969).

24. LUKASIEWICZ, J. "O logice trojwartosciowej", **RUCH FILOZOFICNY**, 5, 170-171 (1920) [Traducción castellana en LUKASIEWICZ, J. **Estudios de Lógica y Filosofía**. Revista de Occidente, Madrid (1957).]

25. KLEENE, S.C. **Introduction to Metamathematics**. Van Nostrand, New York (1952).

26. JAMES, W. **Some Problems of Philosophy**. Longmans & Green, New York-London (1911).

27. KNAPP, A.G., ANDERSON, J.A. "Theory of categorization based on distributed memory storage". **JOURNAL OF EXPERIMENTAL PSYCHOLOGY: LEARNING, MEMORY AND COGNITION**, 10, 616-637 (1984).

28. ANDERSON, J.A. "Cognitive and Psychological Computation with Neural Models". **IEEE TRANS. ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS**, 13, 799-815 (1983).

29. LUKASIEWICZ, J. "Z historii logiki zdan", **PRZEGLAD FILOZOFICZNY**, 37, 417-437 (1934) [Traducción castellana en LUKASIEWICZ, J. **Estudios de Lógica y Filosofía**. Revista de Occidente, Madrid (1957)].