CALCULO AXIOMATICO DE LA PROBABILIDAD LOGICA

Andrés RIVADULLA*

ABSTRACT

The probability calculus is very often used in the philosophy of science in order to support or to analyse epistemological points of view. The aim of this paper is to present in a summary the usual axioms of this calculus, as well as its most common consequences and theorems, which the philosopher of science in his arguments ressorts to.

I. **Los axiomas.**- Si h y e son enunciados de un lenguaje L de primer orden, la *probabilidad lógica* $p(h,e)$ o $p(h|e)$ de una hipótesis dada h en base a un informe observacional e, designa el grado de creencia en la verdad de h, condicionado a la verdad de e. Por su parte, $p(h)$ denota la *probabilidad inicial* o *a priori* de h, o sea, la *probabilidad de h, dada la tautología t*: $p(h)= p(h,t)$. Los axiomas de la probabilidad lógica son:

A 1. (*intervalo de valores*) $0 \leq p(h,e) \leq 1$

A 2. (*equivalencia*) Si h_i y e_i son respectivamente equivalentes a h_j y e_j, entonces $p(h_i,e_i)= p(h_j,e_j)$

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, Nº 16-17-18, tomo A, 165-170

A 3. (*implicación*) Si $h \vdash e$ entonces $p(e,h)= 1$

A 4. (*axioma especial de adición*) Si $e \vdash \neg(h_i \wedge h_j)$, e. d. h_i y h_j son lógicamente incompatibles, dada e, entonces

$$p(h_i \vee h_j, e)= p(h_i, e) + p(h_j, e).$$

A 5. (*axioma general de multiplicación*) Si $e_i \wedge e_j$ no es lógicamente falsa, entonces

$$p(h \wedge e_i, e_j)= p(h, e_i \wedge e_j) . p(e_i, e_j).$$

A 6. (*independencia*) h y e_j son mutuamente independientes, si la verdad de uno de ellos no afecta para nada a la verdad o la falsedad del otro, o sea:

$$p(h, e_i \wedge e_j)= p(h, e_i)$$

y $$p(e_j, h \wedge e_i)= p(e_j, e_i).$$

De estos axiomas se siguen inmediatamente las siguientes consecuencias:

C 1. Sea $C=\{h_i, h_j, \ldots , h_n\}$ un conjunto de n hipótesis mutuamente exclusivas y exhaustivas de L. Obviamente $t= h_i \vee \ldots \vee h_n$ es la tautología. Luego, por A4

$$p(h_i \vee \ldots \vee h_n, e)= p(h_i, e)+ \ldots + p(h_n, e) = 1$$

C 2. Si $e \vdash \neg h$, entonces por A3, $p(\neg h, e)= 1$. Luego, por C1:

$$p(h, e)= 1-p(\neg h, e)= 0$$

y $$p(\neg h, e) = 1-p(h, e) .$$

C 3. Para cualesquiera enunciados h y e de L vale, por A5:

$$p(h \wedge e, t)= p(h, e \wedge t) . p(e, t)$$

Así pues, $p(h \wedge e)= p(h, e) . p(e)$ y

$$p(h,e)=\frac{p(h\wedge e)}{p(e)},$$

expresión que representa la *probabilidad condicional* o *relativa* de h en base a e.

C 4. Si h y e_j son independientes, entonces por A5

$$p(h\wedge e_i,e_j)=p(h,e_i\wedge e_j).p(e_i,e_j)=p(h,e_i).p(e_i,e_j).$$

Análogamente,

$$p(h\wedge e_j)=p(h,e_j).p(e_j)=p(h).p(e_j).$$

II. Teorema general de adición.- Sean h_i y h_j dos hipótesis del conjunto C mencionado en C1. Como

1) $\vdash h_i \vee h_j \Leftrightarrow [h_i \vee (h_j \wedge \neg(h_i \wedge h_j))]$

y 2) $\vdash h_j \Leftrightarrow [(h_i \wedge h_j) \vee (h_j \wedge \neg(h_i \wedge h_j))]$,

entonces, respectivamente, por A4

(i) $p(h_i \vee h_j,e)=p(h_i,e)+p[h_j \wedge \neg(h_i \wedge h_j),e]$

y (ii) $p(h_j,e)=p(h_i \wedge h_j,e)+p[h_j \wedge \neg(h_i \wedge h_j),e]$.

Luego de (ii) resulta que

$$p[h_j \wedge \neg(h_i \wedge h_j),e]=p(h_j,e)-p(h_i \wedge h_j,e).$$

Y sustituyendo en (i), tendremos

(T.G.A.) $$p(h_i \vee h_j,e)=p(h_i,e)+p(h_j,e)-p(h_i \wedge h_j,e).$$

Corolario. Si $h_i \vdash h_j$, entonces $p(h_i,e) \leq p(h_j,e)$.

En efecto, sea $h_j=h_i \vee t$, siendo t= tautología. En este caso es, por el teorema anterior, y suprimiendo e por comodidad,

$$p(h_i \vee t) = p(h_i) + p(t) - p(h_i \wedge t).$$

Y como $p(t)=1$, entonces

$$p(h_i \vee t) = p(h_i) + [1 - p(h_i \wedge t)] \geq p(h_i).$$

Luego $p(h_i) \leq p(h_i \vee t)$,

y $p(h_i, e) \leq p(h_j, e)$. Q. E. D.

III. Teorema de Bayes.- Por C3, $p(h \wedge e) = p(h,e).p(e)$ y también $p(e \wedge h) = p(e,h).p(h)$. De manera que $p(h,e).p(e) = p(e,h).p(h)$. Luego, siempre que $p(e) \neq 0 \neq p(e,h)$,

$$p(h,e) = \frac{p(h).p(e,h)}{p(e)}.$$

Sea, como en C1, $t = h_1 \vee \ldots \vee h_n$. Consiguientemente, $e = (h_1 \vee \ldots \vee h_n) \wedge e$. Luego

$$\begin{aligned} p(e) &= p[(h_1 \vee \ldots \vee h_n) \wedge e] \\ &= p(h_1 \wedge e) + \ldots + p(h_n \wedge e) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(h_i).p(e,h_i). \end{aligned}$$

De manera que

$$\text{(T.B.)} \qquad p(h_i, e) = \frac{p(h_i).p(e,h_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(h_i).p(e,h_i)}.$$

IV. Criterio de relevancia.- Decimos que una evidencia e es *positivamente relevante* para una hipótesis h, si y sólo si la probabilidad de h en base a e es mayor que la probabilidad inicial de h. O sea

$$e\left\{\begin{array}{l}\text{confirma a}\\ \text{apoya probabilísticamente a}\\ \text{es positivamente relevante para}\end{array}\right.\quad h \ \textit{syss}\ p(h,e)>p(h).$$

Obviamente e es negativamente relevante para (desconfirma a) h *syss* $p(h,e)<p(h)$. Y es irrelevante para h *syss* $p(h,e)=p(h)$.

Corolarios.-

CR 1. Si $h \vdash e$, entonces, por A3,

$p(h,e)>p(h)$ *syss* $0<p(h)<p(e)<1$.

Pero si no ocurre que h implica lógicamente a e, entonces

$p(h,e)>p(h)$ *syss* $0<[p(h).p(e,h)]<p(e)<1$.

CR 2. Si $p(h,e) \overset{>}{\underset{<}{=}} p(h)$, entonces $p(e,h) \overset{>}{\underset{<}{=}} p(e)$

Esto se sigue de que, según el *Teorema de Bayes*, es

$$p(e,h)=\frac{p(h,e).p(e)}{p(h)}.$$

CR 3. Si e confirma a h, entonces desconfirma a $\neg h$.
En efecto, por C2, $p(\neg h,e)=[1-p(h,e)]$. Ahora bien, como por hipótesis es $p(h,e)>p(h)$, entonces es

$p(\neg h,e)=[1-p(h,e)] < [1-p(h)]=p(\neg h)$

y $p(\neg h,e) < p(\neg h)$.

CR 4. Si e confirma a h, entonces $\neg e$ desconfirma a h.
En efecto, si e confirma a h, entonces, por CR 2, h confirma a e; luego, por CR 3, h desconfirma a $\neg e$; y, por CR 2 de nuevo, $\neg e$ desconfirma a h.

V. Consecuencias probabilísticas de la implicación lógica.-

Si $h \vdash e$, entonces

i) $p(h \wedge e) = p(h)$.

En efecto, por C4 y el *Teorema de Bayes* es

$$p(h,e) = \frac{p(h \wedge e)}{p(e)} \qquad \text{y} \qquad p(h,e) = \frac{p(h).p(e,h)}{p(e)}$$

entonces sucede que

$$\frac{p(h \wedge e)}{p(e)} = \frac{p(h).p(e,h)}{p(e)}.$$

O sea, que $p(h \wedge e) = p(h).p(e,h)$. Y como, por A3, es $p(e,h)=1$, entonces $p(h \wedge e) = p(h)$.

ii) $p(h \vee e) = p(e)$.

En efecto, $p(h \vee e) = p(h) + p(e) - p(h \wedge e)$
$= p(h) + p(e) - p(h)$
$= p(e)$.

iii) $p(h \rightarrow e) = p(\neg h \vee e) = p(\neg h) + p(e) = 1 - p(h) + p(e)$

iv) $p(e \rightarrow h) = 1 - p(e) + p(h)$.

* Universidad Complutense. Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia. E - 28040 MADRID