A OBRA DE N. C. A. DA COSTA EM LOGICA

Decio KRAUSE* / Jair MINORO ABE**

ABSTRACT

In this paper we present an overview of Professor Newton C. A. da Costa's work in logic, emphasizing the main results obtained by him in the several areas of his research activity. The text furnish a detailed bibliographic reference of his works, which are listed in the last section.

Sumário

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
Nº 16-17-18, Octubre 1992, 347-386

Introdução

O filósofo peruano Francisco Miró-Quesada sustenta que os trabalhos do Prof. Newton C. A. da Costa em Lógica Paraconsistente quebram o paradigma caracterizado pela lógica de tradição aristotélica. Segundo Miró-Quesada, "*um novo paradigma está començando a se impor, um paradigma no qual se pode aceitar a validade de teorias inconsistentes e a coexinténcia de sistemas lógicos incompativeis entre si*" (48)[1]. Para os afeitos à epistemologia kuhniana (37), é fácil perceber a importância que uma tal afirmação acarreta, não só em Lógica, como bem observa Miró-Quesada, mas na Ciência como um todo[2].

As lógicas paraconsistentes, no entanto, não constituem a única contribuição do Prof. da Costa para a Lógica. O objetivo deste artigo é refletir em parte o alcance de sua obra neste dominio do saber, a influência que exerce em diversos países e regiões, e a **escola de lógica** que com ele se originou no Brasil, e que contribuiu para formar pesquisadores, muitos deles hoje em dia com reconhecida autonomia e projeção internacional.

Este artigo é essencialmente descritivo, não provendo qualquer análise crítica dos trabalhos do Prof. da Costa, quer em lógica deductiva, quer em lógica inductiva. Os detalhes técnicos são relegados a um mínimo necessário. Ademais, afim de que se dê uma visão mais ampla do trabalho deste que é o primeiro lógico brasileiro de projeção internacional, algumas breves palavras acerca de sua carreira científica serão colocadas na Seção seguinte. Ao final (Seção 5), incluímos uma lista dos principais trabalhos do Prof. da Costa; ao longo do texto, os números entre colchetes referem-se às publicações desta lista. As citções de outros autores, cujas obras são arroladas nas Referências, serão denotadas fazendo-se uso de parênteses.

1. Alguns dados sobre a carreira científica do Prof. da Costa

Em seus estudos de graduação, o Prof. da Costa diz ter recebido influênca do estatístico protugês João Rémy Teixeira Freire (que na época lecionava em Curitiba), do matemático brasileiro Leopoldo Nachbin e de Milton Carneiro, professor de História da Filosofia da Universidade Federal do Paraná. O contato com outros centros foi fundamental em sua formação, principalmente em virtude da influência de matemáticos da Facultade de Filosofia, Ciências e Letras da USP, como o Prof. Edison Farah, que o Prof. da Costa aponta como um dos que o orientaram nos estudos de pós-graduação [170].

Já a partir da década de 50, publica trabalhos que marcariam os rumos de suas perquirições em Lógica, notadamente no sentido das Lógicas Paraconsistentes, como veremos na sequência. Ainda em Curitiba, trabalha com o matemático francês Marcel Guillaume, da Universidade de Clermont-Ferrand, e lidera um grupo de professores desta cidade que se interessavam por lógica e por matemática (54); dentre eles, estava Ayda I. Arruda, que o Prof. da Costa orientou em matemática (7). A Profª. Arruda foi uma das pessoas que contribuíram significativamente para o desenvolvimento da lógica em nosso país, em particular das lógicas paraconsistentes [129].

Ainda em Curitiba (em 1963) é publicada a sua tese de cátedra na disciplina Análise Matemática e Análise Superior [25], na Universidade Federal do Paraná, que contém seus principais sistemas de lógica paraconsistente, aos quais nos referiremos na Seção 2.1.

Já em 1960, o Prof. da Costa lecionou como Professor Visitante no Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), em São Paulo, e, a partir de 1964, também como Professor Visitante, no antigo Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo. Transferiu-se para o Instituto de Matemática e Estatística da mesma universidade em 1970, como Professor Titular. No período 1968-1969, lecionou no recém criado IMECC da Unicamp e no Departamento de Filosofia dessa Universidade em 1982 e 1985.

Orientou vários pesquisadores a nivel de mestrado e doutorado, como L de Moraes, A. M. Sette, L. P. de Alcântara, I. M. L. D'Ottaviano, E. H. Alves, W. A. Carnielli, dentre outros, muitos deles tendo contribuído de modo efetivo para o progresso da Lógica brasileira. Ao todo, são 20 os orientados do Prof. da Costa no Brasil, havendo mais 3 em conclusão de curso, além de alguns no exterior [170].

No exterior, o Prof. da Costa foi Conferencista, Professor, Professor Visitante, 'Visiting Scholar' ou pesquisador em inúmeras instituições, cuja lista seria longa demais para ser aqui reproduzida. Mencionamos tão somente as Universidades de Paris, Montpellier, Varsovia, Munique, Califórnia, Stanford, Buenos Aires, Nacional Autônoma do México, Lima Santiago, Colômbia, Venezuela, Sidney, Melbourne, Turin, Florença, Milão, Nova de Lisboa e Nacional do Uruguay, dentre outras.

No exterior, como dissemos, o Prof. da Costa orientou várias teses em Lógica; teve seus trabalhos traduzidos para o italiano, o búlgaro, o russo, o espanhol e o chinês. Diz ele conhecer mais de 800 citações de seus trabalhos; vários textos especializados dizem respeito de modo direto à sua obra, como o volume 43 (1989), 1-2 de **Studia logica**, inteiramente dedicado à lógica paraconsistente, ou o volume 94 das Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, editado pela Marcel Dekker em sua homenagem (5).

2. Principais aspectos dos trabalhos em Lógica Deductiva

Os trabalhos do Prof. da Costa em Lógica Dedutiva abarcam fundamentalmente as Lógicas Não-Clássicas, os Fundamentos da Teoria dos Conjuntos, a Lógica Algébrica, e a Teoria dos Modelos, além de aplicações da Lógica, como, por exemplo, à Teoria da Computação e à Informática em geral, às Ciências Jurídicas, à Matemática, à Física e à Biologia.

Afim de podermos dar uma idéia acerca do conteúdo de tais trabalhos, cabe mencionar que, por *lógica clássica*, o Prof. da Costa entende essencialmente o usual

Cálculo de Predicados, Cl'ssico de Primeira Ordem (com ou sem igualdade) e algumas de suas extensões, como o Cálculo de Predicados de Ordem Superior (Teoria dos Tipos) ou mesmo sistemas de Teoria de Conjuntos, como Zermelo-Fraenkel, von-Neumann-Bernays-Gödel ou o sistema ML de Quine-Wang [88][3]. Um sistema de lógica que não pertença à classe dos sistemas clássicos é denominado de *não-clássico ou heterodoxo.*

Assim sendo, há basicamente duas categorias de sistemas não-clássicos: em primeiro lugar estão os sistemas lógicos *complementares* dos sistemas clássicos, que não lhes alteram substancialmente o escopo, mas tão somente (em geral) ampliam sua capacidade de expressão, fundamentando-se em linguagens mais ricas em poder expressivo, tal como ocorre, por exemplo, com os sistemas Modais, Deônticos, Epistêmicos, com as lógicas Intensionais, Temporais, Imperativas, e assim por diante[4].

A outra categoria de sistemas não-clássicos consiste nos *rivais* dos clássicos, tendo sido elaborados com o fito de substituir os sistemas clássicos em determinadas situações; dentre estes, se pensarmos em algum tipo de limitação no alcance dos três grandes princípios da lógica tradicional (não-contradição, terceiro excluído e identidade), encontram-se como grandes grupos as lógicas paraconsistentes, as paracompletas e as não-reflexivas. Vários sistemas, como iremos expor no que se segue, enquadram-se de um ou de outro modo nestas denominações (por exemplo, as lógicas polivalentes e a lógica intuicionista podem ser consideradas, em um sentido preciso, lógicas paracompletas). Como sistemas rivais dos clássicos, pode-se enquadrar ainda as lógicas *fuzzy*, as lógicas quânticas, assim como os sistemas *free.* O Prof. da Costa tem contribuições significativas em vários destes campos, como iremos ver.

2.1. Lógica Paraconsistente

Uma teoria dedutiva T, cuja linguagem contenha um símbolo de negação, é dita *inconsistente* se o conjunto de seus teoremas contém ao menos dois deles, um dos quais sendo a negação do outro (neste caso, sendo $\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{A}$ tais teoremas, deriva-se normalmente em T uma *contradição* , isto é, uma expressão da forma $\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}$; caso isto não aconteça, T é *consistente.* T é chamada *trivial* se o conjunto de suas fórmulas coincide com o de seus teoremas, ou seja, dito informalmente, se tudo o que puder ser expresso na linguagem de T puder ser provado em T.

Observemos inicialmente que se uma teoria T tem por base uma lógica de índole da tradicional, a presença em T de uma contradição *trivializa* T, isto é, prova-se que se a linguagem subjacente a T é algum sistema de lógica clássica (ou mesmo algum outro sistema, como certas lógicas polivalentes ou a lógica intuicionista), se forem derivadas duas sentenças, uma das quais sendo a negação da outra, então qualquer sentença exprimível na linguagem de T pode ser derivada em T. Dito ainda de outro modo, nas lógicas que não se distingüam de modo conveniente da lógica clássica, por exemplo com respeito ao conceito de negação, em geral é válido o esquema $\mathbf{A} \Rightarrow (\neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$, *ex falso sequitur quodlibet*: de uma contradição, qualquer coisa pode ser concluída (a recíproca é evidente: se tudo pode ser derivado, em particular pode ser derivada uma contradição); em resumo, uma teoria *contraditória* ou *inconsistente* é trivial.

Este fato, aparentemente, tira todo o interesse em uma tal teoria, uma vez que, podendo-se provar qualquer coisa, não se poderá, em particular, distingüir-se o verdadeiro (demonstrável) do falso. Peculiaridades como esta sustentam determinadas posições filosóficas relativas ao *status* das contradições, como a de Popper, para quem "*se uma teoria contém uma contradição, ela implica tudo –por conseguinte, nada. Uma teoria que acrescente a toda informação que afirma sua respectiva negação não nos informará nada. Assim, uma teoria que implique uma contradição é inteiramente inútil como teoria*" (45). Como se sabe, é neste ponto que reside a principal crítica do filósofo austríaco contra a dialética[5].

Essencialmente por este motivo, ao nível abstrato das disciplinas formais a **consistência** sempre foi tida de modo natural (mesmo que implicitamente) como condição necessária para a **existência** dos objetos aos quais se refere uma teoria, como aliás foi colocado explicitamente por D. Hilbert (36). Não há registro histórico de que contradições da forma $\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}$ pudessem ser suportadas no âmbito das disciplinas matemáticas, ferindo o requisito da consistência.

Em 1958, o Prof. da Costa publica um trabalho intitulado **Nota Sobre o Conceito de Contradição** [9], no qual sustenta que não se deve excluir como destituídas de interesse teorias inconsistentes meramente por serem inconsistentes, uma vez que uma possivel mudança da lógica subjacente poderia vir a sustentar sistemas inconsistentes como tão relevantes, do ponto de vista matemático, quanto os consistentes. Isto é, operando-se a nivel da lógica, poder-se-ia eventualmente resgatar a credibilidade de teorias inconsistentes. Disse ele:

> *"De maneira imediata, decorre que, sob os aspectos sintático e semântico, uma linguagem objeto onde aparecem contradições não pode ser a priori excluída. Neste caso, é evidente, não seria conveniente ulilizar, na estruturação da linguagem em apreço, o cálculo tradicional, pois (...) isso a transformaria (...) em algo destituído de qualquer relevância. No entanto, se modificarmos convenientemente as regras 'lógicas' a utilizar, evitar-se-ia essa dificultade e nada a diferenciaria em esência das teorias consistentes. Desejamos, no momento, apenas frisar que (...) (não se) pode deixar de lado as teorias inconsistentes unicamente por serem inconsistentes". (da Costa, op.cit.).*

Em 1959, publica **Observações Sobre o Conceito de Existência em Matemática** [14], no qual flexibiliza o critério da consistência como requisito essencial para a existência em matemática, admitindo a "não-trivialidade"; isto é, para da Costa, *existência* em matemática passava a ser sinônimo de *não-trivialidade*. Mas, se no escopo da lógica clássica, inconsistência e trivialidade são conceitos equivalentes (isto é, um deles 'implica' o outro), que mudança seria esta que deveria ser imposta à lógica subjacente de modo a se poder admitir, ao menos no plano matemático, inconsistência sem trivialidade?

Seus estudos neste sentido prosseguem atéa publicação, em 1963, de **Sistemas Formais Inconsistentes** [25], tese de Professor Catedrático em Análise Matemática e Análise Superior (Universidade Federal do Paraná), na qual apresenta os cálculos paraconsistentes C_n, $1 \leq n \leq \omega$, que podem fundamentar teorias inconsistentes, porém não triviais. Vejamos com algum vagar as idéias fundamentais que subjazem a tais lógicas; como comentamos, não daremos os detalhes técnicos a não ser os absolutamente necessários.

O Principio da Contradição pode ser formulado de várias maneiras, nem sempre equivalentes entre sí. Em geral, quando se fala do referido princípio, entende-se, como o fazem da Costa e Marconi [110] qualquer uma das seguintes asserções: (a) de duas proposições contraditórias (*i.e.*, uma das quais é a negação da outra), uma delas é falsa; (b) $\neg(A \wedge \neg A)$; (c) um predicado não pode simultaneamente pertencer e não pertencer a um mesmo objeto. Um sistema lógico é então considerado como paraconsistente de se algum modo restringe a força deste princípio [*ib.*], e se não tem como válido o esquema acima apontado de *ex falso sequitur quodlibet* e princípios análogos, que acarretam que de **A** e ¬**A** se pode deduzir qualquer **B**. Isto faz com que vários sistemas lógicos possam ser classificados como paraconsistentes e permite resgatar as origens históricas deste tipo de lógica.

Segundo o Prof. da Costa ([81], p. 148), o lógico polonês J. Łukasiewicz, em seus estudos sobre a silogística aristotélica, por volta de 1910, percebendo que certos princípios da lógica tradicional poderiam desempenhar um papel semelhante àquele do postulado das paralelas na geometria, teria vislumbrado a possibilidade de, pelo menos em princípio, se estudar sistemas lógicos nos quais tais princípios não vigorassem, em particular, o Princípio da Contradição.

De maneira independente e na mesma época, o russo N. A. Vasil'év sugeriu coisas do mesmo teor, chegando a expressar as características de um sistema lógico no qual certas 'contradições' pudessem ser suportadas. Por ter elaborado um sistema lógico denominado de *lógica imaginária*, Vasil'év é considerado por A. I. Arruda como o primeiro precursor da lógica paraconsistente (9).

S. Jaśkowski, a partir de idéias de Łukasiewicz, elaborou um sistema lógico (ao nível proposicional) onde contradições podiam de certa forma ser toleradas sem haver trivialização do sistema (30), (31). Tal lógica foi denominada de lógica *discussiva* (ou *discursiva*). Da Costa e Dubikajtis estenderam a lógica de Jaśkowski além do nível proposicional [49], [65], [71]; com J. Kotas, o Prof. da Costa ampliou a lógica discursiva de modo a poder obter uma lógica discursiva associada a um operador de qualquer sistema modal [72], [74], [76], [78], ao passo que Jaśkowski só tratou da lógica discussiva referente ao sistema S5 de Lewis. Os sistemas se Jaśkowski são hoje em dia considerados como um caso particular de lógica paraconsistente.

No entanto, como afirma Arruda, "*podemos dizer que um tipo especial de lógica principia a aparecer após a elaboração de, ao menos, o cálculo de predicados de primeira ordem. É de acordo com este ponto de vista que podemos dizer que a lógica paraconsistente é um campo da lógica criado pelo lógico brasileiro N. C. A. da Costa em 1963*" (9). Isto se afigura razoável, uma vez que os trabalhos de Prof. da Costa se deram de forma independente e foram, por assim dizer, muito além do dos referidos precursores teóricos e mesmo do de Jaśkowski, envolvendo o Cálculo de Predicados e a Teoria de Conjuntos.

Além da mencionada tese, os primeiros trabalhos do Prof. da Costa sobre a estruturação de diversos cálculos proposicionais que podem servir de base a sistemas dedutivos inconsistentes, mas não triviais, apareceram na revista francesa **Comptes Rendus**, da Academia de Ciências de Paris. Tais cálculos, como mencionamos acima, foram designados C_n, $1 \leq n \leq \omega$. À guisa de ilustração, teceremos algums comentários sobre o cálculo C_1 (observações semelhantes podem ser feitos relativamente aos demais cálculos da hierarquia descrita).

O cálculo C_1 contém os conectivos usuais $\neg$ (não), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implica) e $\Leftrightarrow$ (equivalência), além de bom número de esquemas e de regras de dedução do cálculo clássico, satisfazendo as seguintes condições: (*i*) em C_1 não é válido, em geral, o Princípio da Contradição $\neg(A \wedge \neg A)$. (*ii*) de duas proposições contraditórias não deve ser em geral possível deduzir qualquer proposição, isto é, o esquema *ex sequitur falso quodlibet* não é válido em geral.

Se denotarmos por C_0 o cálculo proposicional clássico, obtém-se a seguinte hierarquia de cálculos: $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots, C_\omega$, sendo que cada um deles, a partir do segundo, é estritamente mais fraco do que os precedentes. Informalmente, em cada cálculo, exceto C_ω, a classe das proposições é decomposta em proposições de dois tipos: na classe das **bem comportadas**, toda fórmula válida do cálculo clássico também o será nos cálculos da hierarquia. Se **A** for uma fórmula da classe das fórmulas **mal comportadas**, tem-se $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$.

No estudo sobre a *trivialidade* de teorias, da Costa introduziu um conceito interessante, a saber, a noção de *teoria infinitamente trivializável*. Em linhas gerais, a idéia é a seguinte: um sistema formal **T** denomina-se **finitamente trivializável** quando existir pelo menos uma fórmula que o trivializa, ou seja, em outras palavras, quando existir pelo menos uma fórmula que, acrescentada a **T** como um novo axioma, torna-a trivial. Por exemplo, num sistema formal baseado na lógica clássica, qualquer fórmula do tipo $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ torna-o trivial, como já vimos anteriormente. Mesmo num sistema lógico baseado no cálculo C_1, se **A** for uma fórmula bem comportada, a introdução de $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ como novo axioma trivializa o sistema (e isto é válido para todos os cálculos da hierarquia, exceto C_ω).

Um sistema formal **T** diz-se **infinitamente trivializável** quando não for finitamente trivializável; em outras palavras, caso não exista fórmula **A** que, a ele adicionada como um novo axioma, torne-o trivial. Da Costa mostrou que o cálculo C_ω é infinitamente trivializável. Outros exemplos de sistemas infinitamente trivializáveis que podem ser citados são a lógica intuicionista implicativa e a lógica proposicional positiva clássica.

Além dos sistemas mencionados acima, o Prof. da Costa também edificou os cálculos de predicados correspondentes $\mathcal{C}_0^*$, $\mathcal{C}_1^*$, ..., $\mathcal{C}_n^*$, ..., $\mathcal{C}_\omega^*$. Dentre os resultados notáveis temos que se um esquema não for proposicionalmente válido em $\mathcal{C}_n$, não será válido no cálculo de predicados correspondente. Provou-se ademais que os cálculos de predicados paraconsistentes são indecidíves. Além disso, edificou ele cálculos de predicados com identidade os quais gozam de propriedades similares às dos cálculos de predicados e proposicionais considerados. Nesses trabalhos iniciais, o Prof. da Costa ainda apresentou uma teoria das descrições, cujos postulados são essencialmente os da teoria tradicional na versão de Rosser (50). Sobre os sistemas descrito nestes últimos parágrafos, pode-se consultar [29], [30], [31], [32] e [33].

As lógicas paraconsistentes têm sido divulgadas em um grande número de países, e desempenham hoje em dia papel de relevo no discurso científico em várias áreas do saber, como se verá na sequência.

2.1.1. Teorias Paraconsistentes de Conjuntos

O Principio da Abstração na teoria informal dos conjuntos estabelece (falando sem muito rigor) que qualquer propriedade determina um conjunto, precisamente o conjunto dos objetos que satisfazem a referida propriedade. Por exemplo, "Ser um número natural maior que 5 e menor que 8" de imediato implica a existência do conjunto cujos elementos são os números naturais 6 e 7.

Este princípio, se utilizado livremente, conduz a determinados *paradoxos*, como ao famoso Paradoxo de Russell. O referido paradoxo é originado pelo *conjunto de Russell,* $\mathcal{R} = \{x : x \notin x\}$ que é obtido a partir do Princípio da Abstração, tomando-se a propriedade "*Ser um conjunto que não é membro de sí próprio*". Em outras palavras, o *conjunto* de todos os conjuntos que não são membros de sí próprios leva a uma contradição, como se deu conta B. Russell em 1901. Com efeito, deduz-se facilmente que $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \wedge \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

Afim de aparentemente se evitar tais inconvenientes, as recontruções usuais (axiomáticas) da teoria de conjuntos impõem algum tipo de restrição ao Princípio da Abstração, como por exemplo exigindo que os elementos que irão compor o conjunto dos objetos que satisfazem a uma dada propriedade sejam selecionados dentre os elementos de um conjunto já previamente existente (às vezes dita "solução de Zermelo"), ou restringir o tipo de "propriedade" que pode ser considerada (no sistema $\mathcal{NF}$ de Quine-Rosser, impõe-se que a fórmula que establece o que intuitivamente estamos chamando de "propriedade" no Princípio da Abstração, seja de um tipo particular, que Quine chamou de *fórmulas estratificadas* –ver o livro de Rosser (55)).

Tendo-se em mente as lógicas paraconsistentes, no entanto, não há por que ter horror a determinadas contradições. Em particular, pode-se investigar a possibilidade de se admitir a existência de entidades como o conjunto de Russell, sem que sua presença colapse o sistema. Logo, um problema que se colocou de imediato, como uma espécie de extensão das lógicas paraconsistentes, consistia em se erigir teorias de conjuntos tendo tais lógicas por linguagem subjacente. Dito de outro modo, estudar o Princípio da Abstração da teoria dos conjuntos, em particular enfraquecer as restrições a ele impostas na Solução de Zermelo e de outros autores e investigar até que ponto teorias inconsistentes (mas não triviais) de conjuntos podem ser elaboradas, sem dúvida apresentou-se como uma extensão natural da elaboração das lógicas paraconsistentes ([81], p. 149). Acerca deste ponto, o Prof. da Costa evidenciou em seus trabalhos que em certas teorias de conjuntos que têm uma lógica paraconsistente por lógica subjacente, pode-se **liberar** o Princípio da Abstração. Disse ele:

> *"Graças à lógica paraconsistente, temos hoje uma idéia melhor da natureza dos paradoxos conjuntistas: ela tem mostrado que há teorias paraconsistentes de conjuntos que são fortes, contento teoremas contraditórios. Portanto, ao nível abstrato e formal, a existência de contradições não pode ser contestada"* [88].

Isto significa que nas teorias paraconsistentes de conjuntos, pode-se em certo sentido **conviver** com conjuntos como o de Russell. Os sistemas $\mathcal{NF}_i$, $0 \leq i \leq \omega$, propostos inicialmente pelo Prof. da Costa (ver [25], [33], [35], [37], [57], [102], [164]) têm como lógica subjacente os cálculos $\mathcal{C}_i^=$, $0 \leq i \leq \omega$ (onde $\mathcal{C}_0^=$ denota o Cálculo de Predicados Clássico com Igualdade, e $\mathcal{NF}_0$ denota o sistema clássico de Quine-Rosser). Em $\mathcal{NF}_1$, para darmos um exemplo, os axiomas específicos são os de $\mathcal{NF}_0$ acrescido de um postulado de Existência de Classes de Russell que, como dissemos, podem ser agora toleradas.

Dentre os resultados notáveis que advém deste sistemas, pode-se destacer os seguintes (para detalhes, o leitor interessado deve consultar os trabalhos mencionados).

1) na hierarquia $\mathcal{NF}_1$, $\mathcal{NF}_2$, ..., para j>k, $\mathcal{NF}_j$ é mais forte que $\mathcal{NF}_k$.

2) se $\mathcal{NF}_i$, $1 \leq i \leq \omega$ é não trivial, então $\mathcal{NF}_0$ é consistente. Isto significa que os sistemas paraconsistentes de conjuntos são, como diz o Prof. da Costa, "*tão seguros quanto os clássicos*" ([163], [102]), uma vez que, se fossem triviais, as teorias clássicas seriam inconsistentes.

3) $\mathcal{NF}_i$, $1 \leq i \leq \omega$ é inconsistente. Isto é, conjuntos de Russell existem em $\mathcal{NF}_i$; com efeito, é um teorema de tais sistemas que $\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \notin x)$.

Analogamente ao que se fez tomando por base o sistema de Quine-Rosser, pode-se partir do sistema $\mathcal{ZF}$ (Zermelo-Fraenkel); o Prof. da Costa mostrou como podem ser estruturados os sistemas $\mathcal{ZF}_i$, $1 \leq i \leq \omega$ e também, aproveitando características tanto de $\mathcal{ZF}$ quanto de $\mathcal{NF}$, desenvolveu (com L. P. de Alcântara) os sistemas $\mathcal{NZF}_i$, onde, dentre outras coisas, pode-se desenvolver duas espécies de aritmética, uma de acordo com as idéias de Frege-Russell, outra de acordo com as de von Neumann [169].

Os mencionados trabalhos sem dúvida abrem novos campos de investigação em matemática, uma vez que inauguram a investigação de teorias de conjuntos e, *a fortiori*, de matemáticas onde a lógica subjacente não seja a clássica [137]. Partindo desta idéia seminal, cabe também investigar sistemas paracompletos de conjuntos, onde a lógica subjacente seja algum tipo de lógica paracompleta ou mesmo "sistemas não-aléticos de conjuntos". Alguns passos já foram dados também relativamente à fundamentação de teorias de conjuntos a partir de lógicas não-reflexivas, como comentaremos à frente.

2.1.2. Aspectos filosóficos da paraconsistência e das lógicas não-clássicas em geral

No artigo **The Philosophical Import of Paraconsistent Logic** [88], o Prof. da Costa discorre sobre alguns pontos acerca da lógica não-clássica em geral, que seria interessante relembrar aqui, ainda que por alto.

Diz ele que problemas filosóficos relacionados às lógicas não-clássicas em geral e às paraconsistentes em particular surgem já a partir do questionamento de tais sistemas como lógicas *verdadeiras*, ou *reais*.

> *"Há autores, como Quine em sua* ***Philosophy of Logic****, que pensam que, na tentativa de se mudar de lógica, estamos na realidade mudando de assunto, e não mais falando da própria lógica. Além disso, a recusa em se aceitar as lógicas heterodoxas como lógicas verdadeiras vai de encontro ao fato de que algumas delas (como certos sistemas paraconsistentes), apesar de divergindo profundamente dos sistemas clássicos, podem ser postos em uso, como alternativa, em todas as situações onde as últimas podem ser utilizadas. Aqui, a situação é inteiramente similar ao que acontece com a geometria não euclidiana: alguns de tais sistemas podem ser empregados na solução de questões geométricas usuais, uma vez que coincidem* ***localmente*** *com a geometria euclidiana"* (*op.cit.* p. 3).

No entanto, diz ainda, tanto as lógicas complementares quanto as heterodoxas são fundamentadas em alicerces tão seguros quanto os da lógica clássica, ou seja:

> *"um sistema lógico pode ser encarado como um formalismo matemático ou como uma parte do campo da ciência. No primeiro caso, ele é claramente modificável; no outro, constitui essencialmente um conjunto de regras de inferência baseado em um conjunto de categorias. O conhecimento científico é realmente conhecimento conceitual; os conceitos mais gerais da ciência (ou de um dado domínio científico) são as categorias da ciência, (ou do domínio). Uma vez que a lógica, como ramo da ciência, depende destas categorias e desde que*

nada pode garantir que estas categorias são imutáveis, segue-se que a lógica, como instrumento da ciência, não pode ser imutável. Em resumo, a lógica está em igualdade de condições com as outras disciplinas científicas. Não obstante, devido ao seu caráter muito peculiar, não está tão aberta a revisões como as teorias científicas mais especiais. Portanto, a existência de lógicas não-clássicas parece não somente pragmaticamente justificada, mas também sensata do ponto de vista filosófico" (*ib.*, p. 4).

Ainda mais, a existência das lógicas não-clássicas impele a uma revisão de determinados pressupostos ontológicos; como diz o Prof. da Costa (com Steven French), uma lógica constitui-se essencialmente num sistema muito geral de categorias sobre as quais temos um **organon** de inferência e, tendo-se em vista que a *ontologia* pode ser descrita como um conjunto de princípios que relacionam as características mais gerais de tudo o que existe, fica patente o vínculo entre a lógica e a ontologia:

"certos princípios, tais como as leis da identidade, contradição e terceiro excluído têm formulações tanto do ponto de vista lógico quanto ontológico (ver [81], pp. 95ss) *e portanto, como conseqüência, uma alteração em nossa ontologia, e vice-versa. Parafraseando Quine, podemos dizer que ser é ser o valor de uma variável em uma linguagem particular com uma determinada lógica subjacente. Logo, assim como há distintas geometrias baseadas em distintos conjuntos de axiomas, podemos delinear várias ontologias distintas baseadas nos diferentes tipos de lógica. Em particular, as lógicas paraconsistentes permitem-nos acomodar teorias ontológicas estritamente inconsistentes porém não triviais, as quais podemos chamar 'ontologias dialéticas'* (*cf.* (47))" [133].

Os exemplos mais contundentes, dizem os autores, são a dialética hegeliana e a teoria dos objetos de Meinong (ver abaixo), as quais "*têm sido criticadas por envolverem um tratamento liberal de contradições que não podem ser aceitas pela lógica clássica. Claramente, o uso de sistemas paraconsistentes remove o tormento de tais objeções*" [*ib.*].

Especificamente se referindo à lógica paraconsistente, o Prof. da Costa arrola os principais aspectos do impacto deste tipo de lógica no campo filosófico. Inicialmente, o que chamou de *aspectos* **positivos**: (*a*) melhor elucidação de alguns conceitos básicos da lógica, como os de negação, de contradição e do papel do esquema da abstração na teoria de conjuntos; (*b*) compreensão mais profunda de certas teorias, principalmente a dialética e a teoria dos objetos de Meinong; (*c*) prova da possibilidade de teorias fortemente inconsistentes mas não triviais; como corolário, os paradoxos comuns estão agora sendo vistos sob perspectivas novas; (*d*) elaboração de esquemas ontológicos distintos dos da ontologia tradicional.

Relativamente ao ítem 1, já nos referimos anteriormente ao Princípio da Abstração; pode-se ver o mencionado texto do Prof. da Costa para uma discussão dos outros ítens. Quanto ao ítem 2, o Prof. da Costa menciona que um dos obstáculos que usualmente dificultam a elaboração de determinadas teorias, como a dialética ou a teoria dos objetos de Meinong (53) consiste precisamente no fato de tais teorias requererem um tratamento liberal das contradições e, como já discutimos brevemente acima, isto foge ao que a lógica clássica pode permitir. Bertrand Russell, lembra o Prof. da Costa, criticou severamente a teoria de Meinong precisamente por que esta infringia o Princípio da Contradição; Popper, como vimos, criticou a dialetica sobretudo pela assunção, em determinadas linhas desta concepção, de contradições *reais*. À luz das lógicas paraconsistentes, como já deve ter ficado claro ao leitor, todos estes pontos podem ser repensados.

Dentre os *efeitos* **negativos**, destaca os seguintes: (a) prova de que algumas críticas formuladas à dialética, como a de Popper, são pouco sólidas; (b) prova de que os requisitos metodológicos padrão impostos às teorias científicas (como a consistência) são muito rigorosos e poderiam ser liberalizados e (c) evidência que a concepção usual de verdade *a la* Tarski não implica que as leis da lógica clássica (mesmo do cálculo de predicados de primeira ordem) devam ser válidas sem alguma suposição extra.

Com relação às críticas de Popper à dialética, já fizemos menção anteriormente; cabe apenas acrescentar que, como assevera o Prof. da Costa, face à lógica paraconsistente, "*parece lícito dizer, com a devida cautela, que a dialética não pode ser criticada apenas* ***logicamente***" ([88]; ver também [79]). Com relação à concepção usual de verdade, sustenta o Prof. da Costa que, contrariamente à idéia geral de que a definição semântica de verdade de Tarski acarreta as leis da lógica clássica, a existência de semânticas paraconsistentes (como foram evidenciadas por da Costa e Arruda [69]), além de mostrar haver várias formas de verdade paraconsistente, conduzem à conclusão de que os métodos tarskianos não determinam de modo único a noção de verdade. Em tais semânticas paraconsistentes, há proposições (ditas *mal comportadas*) que não se submetem às leis clássicas usuais, como a da contradição.

Sobre detalhes acerca dos desenvolvimento que foram feitos notadamente a partir dos cálculos C_n, assim como para se fazer uma idéia das pessoas que trabalharam no tema, pode-se ver (23), (24), (25), (45) e [110]. Não reproduziremos mais citações aqui afim de não tornar o texto excessivamente longo.

2.1.3. O Programa Paraconsistente

No final de um de seus artigos sobre teoria paraconsistente de conjuntos [102], o Prof. da Costa delineia algumas idéias que, partindo da teoria de conjuntos, se inserem em vários domínios da investigação, em especial no da aplicação das lógicas paraconsistentes a *problemas concretos*. Como veremos na Seção 4, as palavras abaixo antecipam acontecimentos que se deram principalmente a partir se 1987. Disse ele:

*"A importância maior da teoria paraconsistente de conjuntos não consiste todavia em tornar possivel a existência, e portanto a investigação, de alguns conjuntos que causam desconforto à teoria intuitiva de conjuntos, tais como o conjunto de Russell, as relações de Russell e o conjunto de todos os conjuntos não-**k**-circulares (**k**=1,2,...). Pelo contrário, a característica mais importante das teorias paraconsistentes de conjuntos é a de que elas permitem-nos manipular as extensões de predicados 'inconsistentes'. os quais podem existir no mundo real ou serem enerentes a algum universo do discurso, no campo das ciências e da filosofia. De acordo com vários pensadores da linha dialética, por exemplo, há contradições reais no mundo, e precisamos da lógica paraconsistente para lidar com elas. Analogamente, contradições devem ser levadas em consideração em algumas teorias psicoanalíticas: o assim chamado discurso analítico é concebido como inconsistente ou a 'metateoria' deste discurso é considerada como sendo necessariamente envolvida em contradições. Na filosofia, algumas reconstruções da teoria dos objetos de Meinong também rerquerem a lógica paraconsistente. De fato, a lógica paraconsistente não pode por sí própria provar que tais construções teóricas são legítimas e que alguns domínios do conhecimento estão de fato envolvidos em contradições insuperáveis. A contribuição da lógica paraconsistente é mais modesta, apesar de ser de garnde importância: ela mostra que inconsistências podem nem sempre ser consideradas como dificultades aparentes, elimináveis em princípio como falácias ou erros, unicamente pelo apêgo à lógica. Em outras palavras, se contradições podem sempre ser subjugadas sem os indesejáveis resíduos, então é impossível estabelecer este fato restringindo-se unicamente a pressupostos lógicos.*

*"O que estou tentando dizer é que o programa paraconsistente não seria julgado unicamente pelas características matematico-formais das teorias paraconsistentes de conjuntos (por exemplo, se elas permitem que se demonstre a existência de uma infinidade de conjuntos 'patológicos', se o conjunto de Russell existe ou não e, suposta a sua existência, se ele é ou não idêntico ao conjunto universal), mas acima de tudo pela sua aptidão em dominar problemas **concretos**. Isto é, problemas originados das vicissitudes da inquirição nos domínios da ciência e da filosofia, tais como os mencionados acima. (...)*

*"Resumindo, o programa paraconsistente, ao menos em sua conexão com a teoria de conjuntos, tem duas espécias de motivação: uma matemático-formal, relacionada com problemas 'abstratos', e outra 'concreta', vinculada a questões científicas e filosoficas existentes. Talvez a segunda espécie de motivação seja mais fértil do que a primeira, constituindo-se em uma fonte de relevantes **insights** paraconsistentes".*

Como se vé, o advento da lógica paraconsistente e, de maneira geral, o Programa Paraconsistente, de certo modo concretizam a **profecia** de L. Wittgenstein, feita em 1930:

> *"...indeed, even at this stage, I predict a time when there will be mathematical investigations of calculi containing contradictions, and people will actually be proud of having emancipated themselves from contradiction"* (61).

2.2. Lógica Paracompleta

Pode-se dizer que a lógica paracompleta é **dual** da lógica paraconsistente. Sem rigor, naquela o Princípio do Terceiro Excluído é derrogado, enquanto que, nesta, é infringida a Lei da Contradição. Logo, em um sistema paracompleto, duas proposições **A** e $\neg$**A** podem ser ambas falsas. Como exemplos, podemos citar a lógica intuicionista e vários sistemas de lógica polivalente[6].

A motivação para o estudio das lógicas paracompletas está conectado com o fato de que há situações em que o Terceiro Excluído é infringido. Por exemplo, se P é um predicado vago e a é um indivíduo fronteiriço (*berderline individual*), pode ocorrer que, módulo uma interpretação conveniente, ambas, $P(a)$ e $\neg P(a)$ sejam falsas. Similarmente, se p for uma proposição contingente e F o operador 'futuro', podemos então pensar que $F(p)$ e $\neg F(p)$ podem ser hoje falsas, segundo idéias de Aristóteles e Łukasiewicz. Mesmo em determinadas teorias filosóficas, como a de Hegel, uma proposição e sua negação são algumas vezes aceitas como falsas, segundo alguns autores. Em geral, uma lógica paracompleta pode ser concebida como a lógica subjacente a teorias incompletas em sentido forte, *i.e.*, teorias onde uma proposição e sua negação possam ser ambas falsas.

Em [108] e [119], da Costa, juntamente com D. Marconi, fundamentou a teoria geral e a sistematização de semelhantes sistemas lógicos, tratando de suas sintaxes, semânticas e versões algébricas. Outros campos de aplicação das lógicas paracompletas são a Lingüística, a Ética, o Direito e a Informática.

Neste domínio, o Prof. da Costa ainda elaborou sistemas fortes de teorias de conjuntos bem como (com D. Marconi) sistemas que são, ao mesmo tempo, paraconsistentes e paracompletos, os quais Miró Quesada sugeriu que fossem denominados de **não-aléticos**. Sobre estes últimos, consultar [119].

2.3. Lógica Não-Reflexiva

Uma das teses centrais que o Prof. da Costa defende no livro **Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica** [81] é a de que não há, em Lógica, o que se poderia chamar de *verdades eternas*, ou seja, princípios que devam ser supostos sempre verdadeiros em todos os domínios do discurso, tal como se dava, segundo comenta, com vários pressupostos da lógica tradicional, em particular com os princípios da Identidade, Contradição e Terceiro Excluído.

Com efeito, como vimos acima, hoje em dia pode-se supor como perfeitamente lícitos, ao menos do ponto de vista matemático, sistemas lógicos onde os princípios da Contradição e/ou do Terceiro Excluído não valham em geral. De modo evidente, cabe investigar a questão relativamente ao Princípio da Identidade.

O Princípio da Identidade, assim como os da Contradição e do Terceiro Excluído, admite várias formulações, tanto sintáticas quanto semânticas, muitas delas não equivalentes entre sí. Uma das versões diz que "*Todo objeto é idêntico a sí mesmo*", que pode espelhada na linguagem do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem com Igualdade pela expressão $\forall x(x=x)$. Pensar-se em **derrogar** (no sentido de *negar*) um princípio como este pode à primeira vista parecer um despropósito; não obstante, o mesmo era dito, como nos referimos acima, em relação ao Princípio da Contradição, e isto não impediu que as lógicas paraconsistentes se mostrassem férteis sob vários aspectos.

Investigar sistemas lógicos nos quais o Princípio da Identidade seja derrogado foi então, no referido livro, proposto pelo Prof. da Costa como algo lícito de ser realizado e, afim de mostrar explicitamente o que queria dizer com isso, apresentou as principais características de um sistema de primeira ordem, o qual denominou de Lógica de Schrödinger, onde a expressão $\forall x(x=x)$ não é válida em geral. Denominou então de lógicas não-reflexivas aqueles

> *"... sistemas lógicos nos quais o princípio da identidade não é válido em geral, em parte porque se julga que a relação de identidade carece de significado para certos objetos. Como este princípio também se denomina lei reflexiva da identidade (note-se que ele fazia referência à expressão* $\forall x(x=x)$*, as lógicas em apreço podem ser batizadas de lógicas não-reflexivas"* [121].

O nome Lógica de Schrödinger, dado a um tipo particular destas lógicas, tem a ver com a motivação intuitiva que o Prof. da Costa buscou para servir de heurística à elaboração do sistema. O físico Erwin Schrödinger, em um livro chamado **Science and Humanism** (55), disse que a **identidade** carece de sentido para as partículas elementares da física moderna. Isto significa que, uma vez observado um eletrón, por exemplo em uma câmara de Wilson, e, feita uma nova observação instantes depois, mesmo que em um lugar muito próximo de onde foi feita a primeira observação, ainda que tenhamos todas as evidências para afirmar que se trata da mesma partícula anteriormente observada, não há sentido preciso em tal afirmação. Em resumo, como disse Schrödinger, a expressão **o mesmo** carece inteiramente de significado nestas circunstâncias; "*é indubitável que* (no que concerne às partículas elementares) *a questão da **identidade** real e verdadeiramente carece de sentido*" (*op.cit.*, p. 18).

Escreve o Prof. da Costa:

> *"E. Schrödinger insistiu em que a noção de identidade não possui sentido pleno para os elétrons e, em geral, para as partículas elementares. Não se trata de não se poder saber quando um elétron é idêntico ou diferente de outro: trata-*

se, isto sim, da circunstância de que não parece ter sentido exato afirmar-se que um elétron é idêntico a outro, ou que é distinto de outro. Porém o princípio da identidade mostra-se válido, entre limites, para os objetos macroscópicos" [121].

O sistema de primeira ordem apresentado por ele incorpora os símbolos lógicos usuais (incluindo-se entre eles o símbolo de identidade), mas a linguagem é bissortida e, na definição das fórmulas, estabelece-se que $x=y$ é uma expressão bem formada da linguagem se e somente se x e y forem variáveis de uma das espécies (da segunda, digamos) consideradas. Com isso, nada se afirma acerca da identidade de entidades denotadas pelos termos de primeira espécie e então, como conseqüência, a expressão $\forall x(x=x)$ não é válida em geral.

Uma semântica para este sistema pode ser estabelecida seguindo-se os procedimentos usuais, como mostra o Prof. da Costa. Tomando-se dois conjuntos **C** e **D** (com $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}$) e interpretando-se as contantes de primeira espécie em **D** e as de segunda em **C** (à relação de igualdade faz-se corresponder a diagonal de **C**), a semântica resulta correta e completa. No entanto, o Prof. da Costa levanta uma questão relativamente à esta semântica que vai se mostrar de grande importância para outros desenvolvimentos: trata-se de que, à luz do sistema proposto, **D** não pode ser considerado como um **conjunto** *stricto sensu*, uma vez que os seus elementos não podem ser distingüidos uns dos outros (pois carece de sentido a afirmativa de que são iguais ou distintos). Ou seja, a matemática utilizada na metalinguagem, para que se fundamente a semântica, não condiz com a idéia intuitiva das Lógicas de Schrödinger; propõe ele então que uma teoria de *quase-conjuntos*, que incorpore os conjuntos usuais como um caso particular, seja elaborada afim de que semânticas mais afeitas à intuição que subjaz a tais lógicas possa ser estabelecida.

Esses resultados, estabelecidos enicialmente para se argumentar a favor da tese de que o Princípio da Identidade tem um *status* análogo aos demais princípios da lógica, originam problemas extremamente interessantes e, acreditamos, de importância não só para a Lógica em si, no sentido de se completar o estudo dos sistemas heterodoxos que se desviam dos três "grandes" princípios da lógica clássica mas, de certo modo retornando às idéias de Schrödinger, para os fundamentos da Física.

Uma análise mais detalhada das lógicas de Schrödinger e das não-reflexivas em geral foi relizada por um dos autores deste artigo (33), (34); o que se percebeu foi que a relevância do ponto de vista de possíveis aplicações deste tipo de lógica aos domínios da física das partículas implica na consideração não somente da derrogação (negação) do Princípio da Identidade, em certas de suas possíveis formulações, mas no modo pelo qual o conceito de identidade é incorporado à lógica e à matemática usuais. Por exemplo, o que os físicos querem em geral dizer com "*conjunto de n partículas idênticas*" fere duplamente a matemática (tradicional) subjacente ao discurso; as concepção tradicional (leibniziana[7]), pois então seriam **o mesmo** objeto e, ademais, se são (como se supõe) "indistingüíveis", sua coleção não pode ser considerada um *conjunto*, pelo menos como determinado pelas teorias usuais de conjuntos, como Zermelo-Fraenkel. Este fato foi analisado também por M. L. Dalla Chiara e G. Toraldo di Francia (18)[8].

Tudo isso levou a uma "redefinição" do que se entende por lógica não-reflexiva; hoje, são consideradas como tal todas aquelas lógicas que *divirjam* de um ou de outro modo da concepção tradicional da identidade, tal como incorporada pela lógica e pela matemática tradicionais, em particular derrogando o Princípio da Identidade em qualquer de suas formulações, ou então incorporando uma noção *não-leibniziana* de identidade, tal como ocorre, para mencionar um exemplo, com determinadas "teorias quânticas de conjuntos" (19). Também se incluem entre as lógicas não reflexivas aquelas lógicas que derrogam outras formas do Princípio da Identidade, não diretamente relacionadas com a igualdade, como a forma $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}$ no Cálculo Proposicional.

2.4. Lógica Modal e Lógica Deôntica

O Prof. da Costa introduziu o estudo sistemático dos *vbto*'s em Lógica Modal, isto é, dos operadores que formam termos ligando variáveis de fórmulas [84]. Também tratou da formalização de certas teorias de conjuntos modais [102] e de suas possíveis aplicações, como na Lingüística, a título de instrumento alternativo da lógica intensional de ordem superior da gramática de Montague. Com J. Kotas, formulou problems alternativos à modalidade, obtendo resultados novos especialmente no tocante à independência e à completude de regras [78], [85].

A lógica deôntica, por sua vez, investiga (sob um ponto de vista *lógico*) conceitos como os de obrigação e proibição, por exemplo; nesta área, o Prof. da Costa tem realizado numerosas pesquisas. Esta lógica remonta a E. Mally, mas tem origem contemporânea na obra de G. H. von Wright; atualmente, é bastante utilizada na análise de um grande número de questões relacionadas aos chamados *paradoxos deônticos* e à possibilidade do tratamento dos *dilemas morais*, dentre outros.

Os dilemas deônticos surgem, por exemplo, na questão do aborto não espontâneo[9], particularmente quando o feto e a mãe competem pela sobrevivência, isto é, quando apenas um deles poderá sobreviver. Se denotarmos por $\mathbb{O}\alpha$ a sentença "α é obrigatório", então um dilema deôntico pode ser expresso por $\mathbb{O}\alpha \wedge \mathbb{O}\neg\alpha$, isto é, são obrigatórios tanto α quanto a sua negação. É sabido que a lógica deôntica tradicional não permite a existência de dilemas deônticos reais; os motivos são análogos aos já mencionados acerca da lógica clássica e a existência de contradições. Com efeito, as lógicas deônticas contém o teorema $(\mathbb{O}\alpha \wedge \mathbb{O}\neg\alpha) \Rightarrow \mathbb{O}\beta$, ou seja, um dilema deôntico implica que qualquer coisa será obrigatória, o que colapsa o sistema.

Outros exemplos podem ser citados, mas o que já se disse talvez seja suficiente para evidenciar a relevância de alguns trabalhos do Prof. da Costa sobre a lógica deôntica [107], [109], [113], [116]. Com discípulos (W. Carnielli e L. Z. Puga). edificou sistemas deônticos paraconsistentes onde dilemas deônticos não sejam encarados como dilemas apenas *prima facie*. Como comenta p Prof. da Costa, tais investigações (referindo-se não só às suas, como a de outros que trabalharam no assunto concomitantemente) "*provocaram uma revolução na filosofia da ética, permitindo que se aborde os temas éticos de uma nova perspectiva*", como por exemplo, edificar-se sistemas éticos em lógicas paraconsistentes, levando-se em conta que a vaguidão de certos conceitos éticos pode eventualmente gerar contradição [170].

Suas incursões vão também ao campo da lógica jurídica; como diz o Prof. da Costa, "*o problema da lógica jurídica é, formalmente, análogo ao da lógica deôntica e da ética*" [170]. Evidenciou ele (com L. Z. Puga) que a lógica paraconsistente pode se aplicar aos códigos jurídicos, que via de regra são inconsistentes ([112], [113], [116]). "*Além do mais, diz, dado o fato de que tal lógica acaba de ser aplicada à computação e à informática* (ver a Seção 4.1), *em particular aos sistemas especialistas, encontramo-nos, no momento, em presença de um problema nuclear: tratar de desenvolver uma informática jurídica paraconsistente. Isto abre novos campos em lógica, jurisprudência e informática*" [170". Com L. Z. Puga e R. Vernengo, o Prof. da Costa procurou estruturar lógicas que fossem capazes de auxilar na axiomatização de teorias jurídicas fortes, como as teorias tridimensionais do direito, o que os obrigou a trabalhar simultaneamente com vários tipos de modalidades ([123], [161], [149], [150], [151]). Trata-se, sem duvida, de uma das mais promissoras áreas de aplicação da lógica, em particular das lógicas não-clássicas.

2.5. Teoria dos Modelos

O trabalho do Prof. da Costa em Teoria dos Modelos abrange três ítens: (*i*) operadores que formam termos ligando variáveis de fórmulas, os chamados **vbtos** (*variable binding term operators*), (*ii*) a Teoria das Valorações e (*ii*) a Verdade Pragmática.

2.5.1. Vbtos

Independentemente de Corcoran, Hatcher e Herring (17), o Prof. da Costa obteve o teorema básico da teoria tradicional de modelos com os *vbtos*, como o descritor ou o símbolo ε de Hilbert. Ademais, generalizou os teoremas mais importantes da teoria dos modelos para a teoria que incorpora tais operadores (*v.g.*, os teoremas de Löwenheim-Skolem, de Łos-Suzco, de Tarski, de Pádoa-Beth e de Craig, este último sob certas condições restritivas). Tais desenvolvimentos se encontram em [64], [84] e [93]; pode-se consultar também os livros de Hatcher (28) e (29). Neste estudo, colaboraram com ele especialmente I. de F. Druck e C. Mortensen.

2.5.2. Teoria das Valorações

A Teoria das Valorações constitui uma técnica nova para se obter semânticas para sistemas lógicos, especialmente quando os mesmos não possuem uma semântica recursiva. Esta técnica estende o escopo das semânticas conhecidas; o Prof. da Costa provou que qualquer sistema lógico possui semântica de valorações com respeito à qual é correto e completo. Outros autores que tiveram idéias semelhantes foram D. Scott, R. Suzco, J. Kotas, R. Wójcicki e E. G. K. López-Escobar.

Dentre outras, podemos enumerar as seguintes motivações para o estudio da Teoria das Valorações: (*i*) introduzir algum tipo de **ordem** na lógica clássica e não-clássica, no sentido da caracterização das mesmas. (*ii*) tratamento das interconexões dos conceitos de *valoração* e de *decidibilidade* de modo orgânico. Com a ajuda da semântica de valorações, pode-se, em vários casos, obter-se métodos que realmente constituam-se em uma extensão natural do método de decisão pelas tabelas de verdade bivalentes do cálculo proposicional clássico. Este procedimento é tão promissor que da Costa chegou a conjecturar que qualquer cálculo que seja decidível clássicamente é decidível, de modo não trivial, pelas semânticas correspondentes de valorações.

Por fim, (*iii*): esclarecimento do conceito de *semântica*. Por meio da semântica de valorações, pode-se mostrar que qualquer sistema lógico possui uma semântica de valorações bivalorada que é correta e completa, e que se constitui essencialmente em uma generalização da semântica 'standar'. Assim, a semântica de valorações satisfaz as condições de Tarski de *adequação material* e de *correção formal* para a definição de **verdade**.

A partir de conceitos muito gerais, o Prof. da Costa derivou, na Teoria das Valorações, as noções usuais de implicação, de negação, de algebrização, etc. Seus principais trabalhos nesta linha são [66], [69], [70]; um texto que apresenta as idéias gerais é o de Grana (25). Foram seus principais colaboradores nesta linha de pesquisa E. H. Alves, A. I. Arruda e A. Loparic.

2.5.3. Verdade Pragmática

Em [103], juntamente com I. Mikenberg e R. Chuaqui, o Prof. da Costa definiu o conceito de **verdade pragmática**, e estendeu a teoria existente de modelos. Apresentaram eles a matematização de uma concepção pragmática de verdade (denominada por eles de *quase-verdade*) e, embora não encarem o seu trabalho como uma exegese das idéias de C. S. Peirce e de outros filósofos pragmatistas, a definição por eles dada capta aspectos relevantes e significativos da doutrina da verdade pragmática, especialmente na linha de Peirce.

Seguindo Tarski, a definição de verdade pragmática ou de quase-verdade, como concebida por Mikenberg, Chuaqui e da Costa, só pode ser feita com relação a uma determinada linguagem, interpretada em uma estrutura conveniente. Uma das grandes novidades desta concepção reside na circunstância de que as estruturas nas quais a linguagem é interpretado não são estruturas *totais*, como no caso da Teoria de Tarski, mas certas estruturas ditas *parciais*.

Uma teoria generalizada de modelos é também desenvolvida pelos autores mencionados, que encontrou várias aplicações na lógica e na matemática [103], bem como na Teoria da Ciência (*cf.* [105], [117], [160] e [126]). Uma exposição elementar da quase-verdade encontra-se em (4).

2.6. Lógica Algébrica

Na Lógica aparecem, naturalmente, diversas estruturas matemáticas que desempeham papel deveras importante. Isto é, verdadeiro especialmente no tocante à lógica algébrica. Assim, por exemplo, na lógica algébrica clássica são utilizadas estruturas como semi-reticulado, álgebra de Boole, álgebra monádica e álgebra poliádica, além da de espaço topológico.

Em geral, as estruturas algébricas que ocorrem na lógica clássica resultam de passagens ao quociente: tem-se um sistema lógico, escolhe-se uma relação de equivalência conveniente, compatível com as noções lógicas básicas e passa-se ao quociente, obtendo-se estrutura que algebriza o sistema. Por este processo, mostra-se, *v.g.*, que os conceitos de álgebra de Boole e de álgebra de Heyting constituem algebrizações, respectivamente, do cálculo proposicional clássico e do cálculo proposicional intuicionista.

Todavia, em lógicas não-clássicas, nem sempre se pode utilizar o método acima descrito, pois, às vezes, acontece que no sistema lógico que se está considerando não há nenhuma relação de congruência significativa. Isto sucede, para citar um exemplo, com certos cálculos paraconsistentes.

No entanto, mesmo na lógica clássica, nem sempre se afigura conveniente que se passe ao quociente. Com efeito, a passagem ao quociente não nos permite tratar 'algebricamente', de maneira apropiada, determinados conceitos lógicos, como os de tableaux de Smullyan e de conjunto de Hintikka no cálculo proposicional clássico, como patenteou Eytan em (22) e que há muito tempo havia sido observado pelo Prof. da Costa.

Em conseqüência, a utilização de pré-álgebras se impõe em questões relevantes da lógica :(*a*) quando não há (ou não se conhece) uma relação de congruência razoável; em particular quando a relação de equivalência básica escolhida não é compatível com todas as operações lógicas. (*b*) em situações em que, mesmo que se disponha de uma congruência, não se quer passar ao quociente para não mascarar fatos significativos. No primeiro caso, surgem as estruturas que chamamos de álgebras de Curry; no segundo, apenas lançamos mão de pré-álgebras no sentido comum da palavra.

A noção de sistema de Curry foi introduzida pelo Prof. da Costa para sistematizar uma teoria geral da algebrização dos sistema lógicos. Na realidade, todas as estruturas de interesse no tratamento 'matemático' da lógica se enquadram dentro dessa noção. Mais ainda, enriquecendo-se ou modificando-se o conceito de sistema de Curry, obtém-se, como casos particulares, estruturas tais como as de matriz lógica, de modelo de Kripke e de estrutura da teoria usual de modelos, que não se encontram relacionadas diretamente com problemas de algebrização.

Tudo o que acabamos de dizer comprova o interesse do conceito de sistema de Curry. Além disso, este conceito sugere a investigação de novas estruturas como as em que há várias relações de equivalência, uma delas podendo ser a igualdade; estruturas dessa espécie estão correlacionadas com a teoria das matrizes lógicas e a lógica polivalente.

Certas estruturas levam o nome do lógico norte-americano H. B. Curry não só em sua homenagem, mas, também, porque foi ele um dos grandes defensores do uso sistemático de estruturas pré-algébricas no domínio da lógica.

Sem muito exagero, podemos asseverar que, do ponto de vista matemático usual, a lógica se reduz ao estudo dos sistemas de Curry.

Os trabalhos do Prof. da Costa sobre a algebrização de sistemas paraconsistentes encontram-se em [42], [43], [45], [50] e [126], com a colaboração de A. M. Sette e J. M. Abe. Sobre a algebrização de sistemas paracompletos, consultar [109], [122] e (54). O Prof. da Costa também dedicou-se, com C. M. de Barros e J. M. Abe, a questões correntes da teoria dos sisteams ordenados (ver [122]).

2.7. Fundamentos da Teoria das Categorias e da Teoria dos Conjuntos

Como se sabe, a Teoria das Categorias, erigida por S. Mac Lane e S. Eilenberg por volta de 1945 não pode ser fundada nas teorias correntes de conjuntos. Falando por alto, isto se deve ao fato de que, em tal teoria, lida-se com entidades tais como *todos os espaços vetoriais* ou *todos os grupos*, que não são **conjuntos**, no sentido usual do termo (a fundamentação no sistema de von Neumann-Bernays-Gödel, que a princípio poderia classificar tais entidades como classes próprias, também não se mostra proveitosa –ver o livro de Hatcher (29) para uma introdução ao assunto). O Prof. da Costa foi um dos primeiros lógicos a se ocupar do tema, mais ou menos ao mesmo tempo que uma plêiade de lógicos e matemáticos como A. Grothendieck, C. Ehresmann, P. Dedecker, J. Sonner, Houdebine e W. Obershelp. Suas pesquisas giraram em torno de questões centrais, tais como: (*i*) edificar novas teorias de conjuntos, mais fortes que as usuais, capazes de servirem de alicerce para a Teoria das Categorias (ver [39], [44], [47], [53], [61] e também (21)). (*ii*) Introdução de novos tipos de universos, diferentes dos de Tarski-Sonner-Grothendieck, que incorporassem a idéia de *Urelemente*; por esse caminho, da Costa chegou à teoria dos universos de Ehresmann-Dedecker (*cf.* [48], [54], [56], [58], [60], [67], e também (28), (29) e (39)).

Como subproduto de tais perquirições, da Costa foi levado a novas formulações da teoria cumulativa dos tipos e a vários resultados referentes à lógica polissortida, tais como teoremas de completude nos quais os domínios estão sujeitos a certas relações booleanas (*cf.* [39], [44], [53] e [60]).

Com C. M. de Barros, mostrou como os problemas oriundos da fundamentação da Teoria das Categorias podem ser superados por uma teoria de conjuntos que tem por lógica subjacente o cálculo de predicados de ordem superior (*cf.* o resumo [IX]. Os trabalhos do Prof. da Costa nesta área são muito citados, como em (28) e (29), Mendelson (39) e Dedecker (21)).

2.8. Outros tópicos

Muitos tópicos, abrangidos pelos estudos de Prof. da Costa podem ser mencionados apenas superficialmente, pois uma descrição detalhada é impratívável para os objetivos deste texto, não obstante a relevância dos mesmos. Por exemplo, poderíamos mencionar os *cálculos relevantes* que elaborou com A. I. Arruda (*cf.* (8), [41], [95]), sobre os quais foram construídas teorias de conjuntos onde o Princípio da Separação é liberado de restrições [95], ou (com A. Loparic) a tentativa de fundamentar lógicas indutivas não-clássicas: "*uma vez que há lógicas dedutivas não-clássicas, haverá lógicas indutivas não-clássicas*" [101]. Tentam então erigir cálculos adequados para expressar formalmente determinados conceitos da lógica indutiva, como uma teoria dos métodos e Mill *à la* von Wright (60).

Com S. French, o Prof. da Costa abordou aspectos da lógica da crença, aplicando-as ao ploblema da "self-deception": partindo do pressuposto de que na "self-deception" há uma situação contraditória (uma pessoa acredita simultaneamente em B e em $\neg$B), analisam-na a partir das lógica paraconsistentes [158], [134].

Seus trabalhos estão sempre, como ele mesmo diz [170], voltados para uma preocupação eminentemente filosófica, procurando entender as limitações e a naturaleza do ato de conhecer, "*em especial, a essência do esforço da ciência*" (*ib.*) Acerca de uma visão mais geral da obra do Prof. da Costa mais voltada para os aspectos filosóficos, veja-se (32).

Com relação à História da Lógica, por exemplo, o Prof. da Costa tratou de autores brasileiros como V. F. da Silva [27] e A. I. Arruda [129], assim como da obra do lógico russo N. A. Vasil'ev [125] (ver (8), (9)). Alèm disso, tratou da história da lógica paraconsistente [110] e da dos operadores que formam termos ligando variáveis de fórmulas [93]. Com E. H. Aves e L. H. L. dos Santos, ocupou-se da silogística de Aristóteles, de Hamilton, de Gergone e de de Morgan [160].

Atualmente, ocupa-se, como ele mesmo diz, em "*reinterpretar a obra lógica de H. Spencer, como uma teoria da analogia, o que se mostra deveras surpreendente, tendo-se em mente os avanços atuais da lógica indutiva e da inteligência artificial*" (*cf.* [155]; ver [120]). Com C. P. da Silva e D. Krause, ocupa-se da história da lógica no Brasil, desde os primeiros registros da existência de cursos de lógica em nossa terra (início do século XIX), até a publicação do livro **O sentido da nova lógica**, de Quine, na década de 40.

3. Lógica Indutiva e Probabilidade

O tema da **indução** tem sido uma preocupação permanente do Prof. da Costa. Acredita ele que há uma lógica indutiva que arrola, probabiliza e avalia as inferências indutivas, isto é, não demonstrativas. O caminho para se superar as objeções usuais que se opõem à elaboração de uma lógica indutiva se resume, para da Costa, na teoria da verdade pragmática, descrita anteriormente (em 2.5.3).

Com apoio nessa teoria, definiu o conceito de *probabilidade pragmática*, chegando a uma versão própria da concepção subjetiva da probabilidade; a partir daí, conseguiu estabelecer um sistema de lógica indutiva extremamente forte, que está intimamente relacionado com a teoria da ciência e com questões de natureza aplicada, como, para citar um exemplo, o mecanismo da analogia em Inteligência Artificial. Pode-se dizer que as indagações de da Costa em lógica indutiva coroam o que autores com Aristóteles, Bacon, Whewell, Stuart Mill, Jevons, Keynes e Carnap fizeram, bem como completam e estendem as expopsições constantes de textos tradicionais, como os de Bain, Rabier, Goblot e Jhonson.

Seus principais trabalhos nesta linha são [97], [101], [105], [111], [117], [118], [160], [121] e [128]. Colaboradores diretos são A. Loparic e S. French. Nota ele ainda que o cálculo de probabilidades pragmáticas dá nascimento a uma teoria da decisão pragmática e a uma estatística bayesiana.

Da Costa ainda mostrou que existem sistemas lógicos indutivos diferentes do clássico, do mesmo modo que há lógicas dedutivas nã0-clássicas (*cf.* [94] e [101]). Desde modo, há uma teoria das condições paraconsistente, precisamente como há a teoria clássica, segundo von Wright (59), como comentamos anteriormente. Um panorama geral da lógica indutiva envolvendo as idéias da da Costa encontra-se em (2).

4. Outras aplicações da Lógica

Pelo exposto, deve ter ficado claro ao leitor, não obstante a superficialidade do relato, a grande aplicação da lógica (tanto dedutiva quanto indutiva) a vários campos da investigação, como por exemplo na filosofia, no direito, ou nos fundamentos da teoria dos conjuntos. Destacamos abaixo algumas outras aplicações, notadamente no âmbito das ciências reais, que têm sido muito estudadas recentemente pelo Prof. da Costa e discípulos.

4.1. Aplicações à Ciência da Computação

Uma das aplicações mais interessantes da lógica paraconsistente foi feita na Ciência da Computação, especificamente na teoria dos Sistemas Especialistas, quando há que se manipular corpos de informações que podem encerrar contradições. Isto ocorre, principalmente, com bases de dados, conhecimentos e crenças.

Os primeiros sistemas paraconsistentes utilizados para a teoria de programação foram feitos por H. Blair e V. S. Subrahmanian (56) e (3). Posteriormente, com a colaboração de V. S. Subrahmanian, da Costa estudou contrapartes sistática e semântica das lógicas que foram denominadas de *lógicas anotadas*, tratando da correção e completude de tais lógicas e demonstrando vários resultados a respeito da mesma.

Pesquisas subseqüentes mostraram que a teoria anotada geral de conjuntos é extremamente forte, envolvendo como caso particular a teoria dos conjuntos *fuzzy* (*cf.* [152]). Um dos autores deste trabalho dedicou-se, em sua tese de doutorado, ao estudo da teoria dos modelos e da teoria de conjuntos de tais lógicas (3). Além de H. Blair, V. S. Subrahmanian e J. M. Abe, trabalham com o Prof. da Costa, nesta área C. Vago, J. J. Lu e L. J. Henschen.

4.2. Aplicações aos Fundamentos da Biologia

A contribução do Prof. da Costa aos fundamentos da Biologia, juntamente com N. Papávero e J. M. Abe, foi o de propor um novo conceito de categoria que englobe o conceito tradicional de categoria aristotélica.

Em [163] os autores em apreço propuseram que **qualquer maneira** de se "ver" um determinado objeto (biológico), ou seja, qualquer modo de se apreender a realidade de um objeto, ou de predicação, fosse considerada uma *categoria*. A idéia básica do formalismo lógico correspondente é a de considerar, intuitivamente falando, um **universo** de conjuntos e átomos (*Urelemente*) de tal sorte que satisfaçam os axiomas usuais da teoria de conjuntos (por exemplo, de Zermelo-Fraenkel), acrescido de um número finito de universos "menores" $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n (n \geq 1)$, tais que cada $\mathcal{E}_i$ seja um modelo da teoria de conjuntos com átomos. A novidade consiste em se postular os axiomas usuais da Mereologia (lógica das partes e do todo em geral) sobre o conjunto dos átomos dos universos $\mathcal{E}_i$. Isto permite que cada universo $\mathcal{E}_i$ (que são "universos de Dedecker") possa ser considerado como **um ponto de vista**, ou *categoria*. Tal formalismo técnico é apresentado em [163]. Uma exposição introdutória pode ser vista em (42).

4.3. Aplicaçoes aos Fundamentos da Física

Uma das áreas de investigação à qual o Prof. da Costa tem dado destacada atenção nos ultimos anos refere-se à fundamentação matemática das teorias da Física; seus trabalhos nesta área têm sido realizados conjuntamente com F. A. Doria.

Falando por alto, a idéia básica que norteia tais investigações é a seguinte. De acordo com a linha de pensamento de P. Suppes (57), o Prof. da Costa aceita que uma teoria científica *T* pode ser conceituada como constituindo-se de três componentes básicas: (*a*) uma estrutura matemática, (*b*) um domínio de aplicação e (*c*) um conjunto de regras de conexão.

O domínio de aplicação de T é uma proção do Universo à qual T se aplica. Por exemplo, a Mecânica Newtoniana está correlacionada a fenômenos relativos a movimentos de baixas velocidades. As regras de conexão são artifícios verbais e metodológicos que permitem correlacionar a teoria com o seu domínio de aplicabilidade. Por sua vez, a estrutura matemática de T trata-se de uma **estrutura** (conjuntista) no sentido de N. Bourbaki (14) ou "predicado de Suppes" (57) (ver também [127], [131], [142], [153]). Por exemplo, na Mecânica Quântica Não-Relativística, a estrutura subjacente é um espaço de Hilbert, satisfazendo determinadas condições suplementares.

Tendo em vista a constatação da existência de várias matemática possíveis, *v.g.*, daquela que pode ser erigida no modelo de Solovay, entende o Prof. da Costa que é tarefa essencial investigar as estruturas subjacentes às diversas teorias científicas (notadamente das disciplinas da Física) sob a perspectiva destas diferentes matemáticas; ou seja, investigar o tratamento axiomático de tais disciplinas levando-se em consideração a possibilidade da utilização de modelos de teoria de conjuntos distintos dos usuais. Os principais trabalhos do Prof. da Costa nesta linha são [127], [131], [142], [153] e outros de 1990, ainda não dados à publicação.

5. Relaçao dos principais trabalhos do Prof. da Costa

Nesta Seção, relacionamos os trabalhos do Prof. da Costa não só em lógica, procurando dar uma visão de suas publicações. A Seção está dividida da seguinte forma: a) livros e artigos divididos por ano de publicação, b) resumos.

5.1. Livros e artigos

1954

1. "A natureza dos juizos matemáticos", **Anais do Congresso Internacional de Filosofia de São Paulo**, v. III, 807-811.

1955

2. "Nota sôbre o teorema de Wilson", **An. Soc. Paran. Mat.** 2, 5-6.

1956

3. "Une généralisation du théorème de Bouniakowski", **An. Soc. Paran. Mat.** 3, 12-16.
4. "Alguns teoremas elementares sôbre divisibilidade", **An. Soc. Paran. Mat.** 3, 60-63.
5. "O estado atual da filosofia da matemática", **An. Soc. Paran. Mat.** 3, 17-27.
6. **O Círculo de Viena**, Edições Prata de Casa, Curitiba.

1957

7. "Considerações sôbre o cálculo de Heyting", **An. Soc. Paran. Mat.** 4, 42-46.

8. "Kurt Gödel e os problemas da matemática atual", **An. Soc. Paran. Mat.**4, 53-60 (com L. Barsotti).

1958

9. "Nota sôbre o conceito de contradição", **An. Soc. Paran. Mat.** 1, NS, 6-8.
10. "Uma questão de filosofia da matemática", **An. Soc. Paran. Mat.** 1, NS, 21-27.
11. "Sobre a teoria lógica da linguagem", **Rev. Brasileira de Filosofia** 8, 58-70.
12. "Uma propriedade dos números primos", **Revista Fac. Fil. Católica do Paraná** 3, 272-273.
13. "Nota sôbre a lógica de Brouwer-Heyting", **An. Soc. Paran. Mat.** 1, NS, 9-10.

1959

14. "Observações sôbre o conceito de existência em matemática", **An. Soc. Paran. Mat.** 2, NS, 16-19.
15. "O significado da obra de Kurt Gödel para os fundamentos da matemática", **Rev. Brasileira de Filosofia** 9, 310-319.
16. **Espaços Topológicos e Funções Contínuas**, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
17. "Lógica e linguagem", **Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Filosofia**, 225-228.

1960

18. "Conceptualización de la filosofía científica", **Rev. Filosofía**, Universidad de Costa Rica 11, 363-366.
19. "Correções ao artigo 'Considerações sôbre o cálculo de Heyting'", **An. Soc. Paran. Mat.** 3, NS, 1-11.

1961

20. **Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos**, tradução de um curso ministrado pelo Prof. E. H. Spanier na Universidade de Chicago, Soc. Paran. Mat.

1962

21. **Introdução aos Fundamentos da Matemática**, Globo, Porto Alegre.
22. "Sobre a natureza dos juízos matemáticos", **Rev. Brasileira de Filosofia** 12, 207-208.
23. "Um currículo para a formação do Professor de Matemática do Ensino Secundário", **Boletim Soc. Parana. Mat.** 5, 45-47.
24. " A situação atual da lógica", **Anais do Quarto Congresso Brasileiro de Filosofia**, 437-441.

1963

25. **Sistemas Formais Inconsistentes**, Tese de Professor Catedrático de Análise Matemática e Análise Superior, Facultade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Federal do Paraná.
26. "A situação atual da teoria dos conjuntos", **Boletim Soc. Paran. Mat.** 6, 40-43.
27. "Vicente Ferreira da Silva e a lógica", **Rev. Brasileira de Filosofia** 14, 499-508.
28. **Lições de Análise Matemática**, cinco fascículos, Facultade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Federal do Paraná (mimeografado).
29. "Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 257, 3790-3793.

1964

30. "Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 258, 27-29.
31. "Calculs de prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 258, 1111-1113.
32. "Calculs de descriptions pour les systèmes formels inconsistants", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 258, 1366-1368.
33. "Sur un système inconsistant de théorie des ensembles", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 258, 3144-3147.
34. "Sur un théorème de Hilbert et Bernays", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 258, 6311-6312 (com A. I. Arruda).
35. "Sur une hiérarchie de systèmes formels", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 259, 2943-2945 (com A. I. Arruda).
36. "Sur les calculs $\mathcal{C}_n$ ", **Anais Acad. Brasil. Ciências** 36, 379-382 (com M. Guillaume).

1965

37. "Sur les systèmes formels $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_i^*$, $\mathcal{C}_i^=$, $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{NF}_i$", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 260, 5427-5430.
38. "Négations composées et loi de Peirce dans les systèmes $\mathcal{C}_n$", **Portugalia Math.** 24, 201-210 (com M. Guillaume).
39. "On two systems of set theory", **Proceedings Konenkl. Ak. Wetens.** 68, 95-99.

1966

40. "Trasformadas no cálculo restrito de predicados", **Anais Acad. Brasil. Ciências** 38, 385-390 (com A. I. Arruda).
41. "O paradoxo de Curry-Moh Schaw Kwei", **Bol. Soc. Mat. São Paulo** 18, 83-89 (com A. I. Arruda).

42. "Opérations non monotones dans les treillis", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 263, 429-432.

1967

43. "Filtres et idéaux d'une algèbre $\mathcal{C}_n$", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 264, 549-552.
44. "Two formal systems of set theory", **Proceedings Konenkl. Ak. Wetens.** 70, 45-51.
45. **Algebras de Curry**, Universidade de São Paulo, São Paulo.
46. "Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistantes", **Publications du Départment de Mathématiques**, Université de Lyon 4, 2-8.
47. "Un nouveau système formel suggéré par Dedecker", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 265, 85-88.
48. "Remarques sur les univers d'Ehresmann-Dedecker", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 265, 761-763 (com A. De Caroli).

1968

49. "Sur la logique discursive de Jaśkowski", **Bull. Acad. Polonaise des Sciences** 15, 551-557 (com L. Dubikajtis).

1969

50. "Les algèbres $\mathcal{C}_n$", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 268, 1011-1014 (com A. M. Sette).
51. "On a set theory suggested by Dedecker and Ehresmann", **Proc. Japan Academy of Sciences** 45, 880-888.

1970

52. "Sur un problème de Jaśkowski", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 270, 1349-1353 (com I. M. D'Ottaviano).
53. "On the underlying logic of two systems of set theory", **Proceedings Konenkl. Ak. Wetens.** 73, 1-8.
54. "Sur les systèmes $\mathcal{D}^*$ suggéré par Dedecker", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 270, 841-844 (com D. Brignole).
55. "Sur le schéma de la séparation", **Nagoya Math. Journal** 38, 71-84 (com A. I. Arruda).

1971

56. "On supernormal Ehresmann-Dedecker universes", **Math. Zeitschrift** 122, 342-350 (com D. Brignole).
57. "Remarques sur les systèmes $\mathcal{NF}_1$", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 272, 1149-1151.

1972

58. "Modèles et univers de Dedecker", **C. R. Acad. Sc. Paris**, 275, 483-486.

1973

59. "Sobre o conceito de transformada no cálculo restrito de predicados", IME-USP, **Série Mat.** 2, 53-57.

1974

60. "α-models and the systems T and T^*", **Notre Dame J. of Formal Logic** 14, 443-454.
61. "Remarques sur les calculs $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_n^*$, $\mathcal{C}_n^=$ et $\mathcal{D}_n$", **C. R. Acad. Sc. Paris,** 278, 819-821.
62. "Le schèma de la séparation dans les systèmes $\mathcal{J}_n$", **Math. Japonicae** 19, 183-186 (com A. I. Arruda).
63. "On the theory of inconsistent formal systems", **Notre Dame J. of Formal Logic** 15, 497-510.

1975

64. "Sur les 'vbtos' selon M. Hatcher", **C. R. Acad. Sc. Paris,** 281, 741-743 (com I. F. Druck).
65. "Remarks on Jaśkowski's discussive logic", **Reports on Math. Logic** 4, 7-16.

1976

66. "Une sémantique pour le calcul $\mathcal{C}_1$", **C. R. Acad. Sc. Paris,** 283, 729-731 (com E. H. Alves).
67. "Sur le système $\mathcal{D}^*$ de théorie des ensembles", **C. R. Acad. Sc. Paris,** 282, 5-7 (com M. F. Dias).
68. "α-logic and infinitary languages", **Zeitschrift Math. Logik u. Grundl. d. Math.** 29, 105-112 (com C. Pinter).

1977

69. "Une sémantique pour le calcul $\mathcal{C}_1^=$", **C. R. Acad. Sc. Paris,** 284, 279-282 (com A. I. Arruda).
70. "A semantical analysis of the calculi $\mathcal{C}_n$", **Notre Dame J. of Formal Logic** 18, 621-630 (com E. H. Alves).
71. "On Jaśkowski discussive logic", in **Non-Classical Logics, Model Theory and Computability,** A. I. Arruda, N. C. A. da Costa e R. Chuaqui, eds., North-Holland, pp. 37-56 (com L. Dubikajtis).
72. "On some modal logical systems defined in connection with Jaśkowski's problem", ib. pp. 57-73 (com J. Kotas).
73. **Non-Classical logics, Model Theory and Computability,** editor, com A. I. Arruda e R. Chuaqui, North-Holland.

1978

74. "On the problem of Jaśkowski and the logics of Łukasiewicz", in **Mathematical Logic: Proceedings of the First Brazilian**

Conference, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa e R. Chuaqui, eds., Marcel Dekker, pp. 127-139 (com J. Kotas).

75. **Mathematical Logic: Proceedings of the First Brazilian Conference**, editor, com A. I. Arruda e R. Chuaqui, Marcel Dekker.

1979

76. "A new formulation of discussive logic", **Studia Logica** 38, 429-445 (com J. Kotas).

1980

77. "A model-theoretical approach to variable binding term operators", in **Mathematical Logic in Latin America**, A.I. Arruda, R. Chuaqui e N. C. A. da Costa, eds., North-Holland, pp. 133-162.
78. "Some problems on logical matrices and valorizations", in **Proceedings of the Third Brazilian Conference on Math. Logic**, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa e A. M. Sette, eds., Soc. Bras. Lógica, 131-146 (com J. Kortas).
79. "Studies in paraconsistent logic I: the dialectical principle of the unity of opposites", **Philosophia** 9, 189-217 (com R. G. Wolf).
80. "El símbolo ε de Hilbert", **Lecturas Matemáticas** 1, 1-13.
81. **Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica**, Hucitec, São Paulo.
82. **Mathematical Logic in Latin America**, editor, com A. I. Arruda e R. Chuaqui, North-Holland.
83. **Proceedings of the Third Brazilian Conference on Math. Logic** editor, com A. I. Arruda e A. M. Sette, Soc. Bras. Lógica, São Paulo.

1981

84. "Variable binding term operators in modal logic", a aparecer em **Atas da Soc. Brasileira de Mat.** 10, D. G. Figueiredo, A. F. Izé e C. S. Hönig, eds. (com C. Mortensen).
85. "Problems of modal and discussive logics", **Trabalhos de Departamento de Matemática** n.11, IME-USP, 35 pp. (com J. Kotas).
86. "Relations between paraconsistent logic and many-valued logic", **Bull. Sect. Logic, Polish Acad. Sc.** 10, 185-191 (com E. H. Alves).
87. **Lógica Indutiva e Probabilidade**, IME-USP.

1982

88. "The philosophical import of paraconsistent logic", **Journal of Non-Classical Logic** 1, 1-19.
89. "Ciencia y Verdad", **Informe técnico**, Fac. de Mat., Universidad Católica de Chile, 15pp.
90. "On a paraconsistent calculus", in **Collected Papers Dedicated to Professor Edison Farah on the Occasion of his Retirement**, O. T.

Alas, N. C. A. da Costa e C. S. Hönig, eds., IME-USP, pp. 83-90 (com E. H. Alves).

91. **Collected Papers Dedicated to Professor Edison Farah on the Occasion of his Retirement**, editor, com O. T. Alas e C. S. Hönig, eds., IME-USP, Sao Pãulo.

92. "Logic and Ontology", **Pré-publicações do CLE-UNICAMP**, n. 3, 200 pp. (Versão búlgara apareceu na revista **Ciência**, 4 (1988), 25-34).

1983

93. "Notes on the theory of variable binding term operators", **History and Philosophy of Logic** 4, 63-72 (com C. Mortensen).

1984

94. "Paraconsistency, paracompleteness, and valuations", **Logique et Analyse** 106, 119-131 (com A. Loparic).

95. "On the relevant systems P and P^* and some related systems", **Studia Logica** 43, 33-49 (com A. I. Arruda).

96. "On BCK logic and set theory", a aparecer (com M. Bunder).

1985

97. "Ciência e verdade", **Bol. Soc. Paran. Mat.** 2a. série 6, 79-93 (tradução de M. Yamashita).

98. "Studies in paraconsistent logic II: quantification and the unity of opposites", **Rev. Colombiana de Matemáticas** 19, 56-67 (com R. G. Wolf).

99. "Interpretaciones y modelos en ciencia", **Revista Universitaria**, Universidad Católica de Chile 16, 72-79 (com R. Chuaqui).

100. "The logic of pragmatic truth", a aparecer (com R. Chuaqui).

1986

101. "Paraconsistency, paracompleteness, and induction", **Logique et Analyse** 113, 73-80 (com A. Loparic).

102. "On paraconsistent set theory", **Logique et Analyse** 115, 361-371.

103. "Pragmatic truth and approximation to truth", **The Journal of Symbolic Logic** 51, 201-221 (com I. Mikenberg e R. Chuaqui).

104. "Tarski, Sebastião e Silva e o conceito de estrutura", **Bol. Soc. Paran. Mat.** 2a. série 7, 137-145.

105. "Pragmatic probability", **Erkenntnis** 25, 141-162.

106. "A note on type theory", **C. R. Acad. Bulgare des Sciences** 39, 5-7 (com L. P. de Alcantara).

107. "On paraconsistent deontic logic", **Philosophia** 16, 293-305 (com W. A. Carnielli).

108. "A note on paracomplete logic", **Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei** 80, 504-509 (com D. Marconi).

109. "Kantian and non-Kantian logics", a aparecer em **Logique et Analyse** (com L. Z. Puga e W. A. Carnielli).

1987

110. "An overview of paraconsistent logic in the 80s", **Monografías Soc. Paran. Mat.**, n.5, 39 pp.
111. "An outline of a system of inductive logic", **Theoria** 7, 3-13.
112. "Sobre a lógica deôntica não-clássica", **Crítica** 29, 19-36 (com L. Z. Puga).
113. "Logic with deontic and legal modalities. Preliminary account", **Bull. of the Sect. of Logic**, Polish Academy of Sciences 16, 71-75 (com L. Z. Puga).
114. "Remarks on higher-order modal logic", **Acta Científica Venezolana** 38, 282-284 (com L. P. de Alcantara).
115. "O conceito de estrutura em ciência", **Bol. Soc. Paran. Mat.** 2a. série 8, 1-22.
116. "Lógica deôntica e direito", **Bol. Soc. Paran. Mat.**, 2a. série 8, 141-154 (com L. Z. Puga).
117. "Logic and pragmatic truth", a aparecer nos **Proceedings of the 8th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science**, Moscou.
118. "Acceptance and probability", a aparecer nos **Proceedings of the 8th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science**, Moscou.
119. "Paraconsistent and paracomplete logic", a aparecer em **Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei.**
120. "Remarks on analogy", a aparecer em **Teoría** (com A. M. Sette).
121. **Introduçao à Lógica Elementar com o Símbolo de Hilbert**, Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 66 pp. (com R. Carrion).
122. **Tópicos de Teoria dos Sistemas Ordenados**, a aparecer (com C. M. de Barros e J. M. Abe), três volumes.

1988

123. "New systems of predicate deontic logic", **Journal of Non Classical Logic** 5, 75-80.
124. "Belief and Contradiction", **Crítica** 20, 3-11 (com S. French).
125. "On the imaginary logic of N. A. Vasilev", **Zeitschrift für Math. Logik und Grund. der Math.** 34, 205-211 (com L. Z. Puga).
126. "Cause as an implication", **Studia Logica** 47, 413-428 (com R. Sylvan).
127. "On Suppes' set theoretical predicates", **Erkenntnis** 29, 95-112 (com R. Chuaqui).

128. "Pragmatic probability, logical omniscience and the Popper-Miller argument", **Fundamenta Scientiae** 9, 43-53 (com S. French).

129. "The scientific work of A. I. Arruda", **Contemporary Mathematics** 69, 1-15 (com L. P. de Alcantara).

130. "Aspectos de la Filosofía de la lógica de L. Peña", **Arbor** 132, 9-32.

131. "Structures, Suppes predicates and Boolean-valued models in physics", a aparecer em livro em homenagem ao Prof. V. Smirnov (com F. A. Doria).

132. "A new approach to deontic logic", **Anais do Congresso Internacional de Filosofia de Córdoba**, Argentina, pp. 1261-1272.

133. "Ontology of paraconsistency", a aparecer em **Handbook of Ontology and Metaphysics**, Philosophia Verlag, Berlim (com S. French).

134. "La filosofía de la lógica de Francisco Miró Quesada", a aparecer em livro dedicado ao filósofo peruano F. M. Quesada, que será publicado em Lima.

135. "On Russell's principle of induction", a aparecer em **Synthese** (com S. French).

1989

136. "On the logic of belief", **Philosophy and Phenomenological Research** 49, 431-446 (com S. French).

137. "Matemática e paraconsistência", **Monog. Soc. Paran. Mat.** n.7, 26 p.

138. "A note on temporal logic", **Bulletin of the Section of Logic**, Polish Acad. of Sciences 18, 51-56 (com S. French).

139. "Pragmatic truth and the logic of induction", **British Journal for the Ph. of Science** 40, 333-356 (com S. French).

140. "Relativism, partial structures and the model theoretic approach in science", a aparecer (com S. French).

141. "Self-referential systems with involution", a aparecer (com J. Zimbarg Sobrinho e A. P. Hiller).

142. "Suppes predicates for first-quantized physics", a aparecer (com F. A. Doria).

143. "Paraconsistent logics as a formalism for reasoning about inconsistent knowledge bases", **Artificial Intelligence in Medicini** 1, 167-174 (com V. S. Subrahmanian).

144. "The paraconsistent logics Pτ", a aparecer (com V. S. Subrahmanian e C. Vago).

145. "A formally undecidable statement in classical eletromagnetic theory", a aparecer (com F. A. Doria e J. A. Barros).

146. "Jaśkowski's logis and the foundations of physics", a aparecer (com F. A. Doria).

147. "Lógica e inteligência artificial", a aparecer em **Atas do Simpósio Internacional sobre Comunicaçao, Significado e Conhecimento**, Lisboa.

148. "Automatic theorem proving in paraconsistent logics: foundations and experimental results", a aparecer (com V. S. Subrahmanian, L. J. Henschen e J. J. Lu).

1990

149. "Lógica, moral e direito", a aparecer (com L. Z. Puga e R. Vernengo)
150. "Etica, direito e valor", a aparecer (com L. Z. Puga e R. Vernengo)
151. "Observaciones sobre la lógica deóntica", a aparecer (com R. Vernengo)
152. "Remarks on annotated logic", a aparecer (com J. M. Abe e V. S. Subrahmanian).
153. "A Suppes predicate for general relativity and set-theoretically generic space-time", a aparecer em **The Journal of Theoretical Physics** (com F. A. Doria e J. A. Barros).
154. "Conjetura e quase-verdade", a aparecer em livro em homenagem ao Prof. M. Reale.
155. "Hobbling the hobgoblin: creativity and consistency in Mathematics", a aparecer (com S. French).
156. "Rationality, natural reasoning and the model theoretic approach", a aparecer (com S. French).
157. "Corrections and additions to the paper 'Pragmatic probability, logical omniscience and the Popper-Miller argument'", a aparecer em **Fundamenta Scientiae** (com S. French).
158. "Belief, Contradiction, and the Logic of Self-Deception", **American Philosophical Quarterly**, 179-197 (com S. French).
159. "The model-theoretical approach in the philosophy of science", **Philosophy of Science**, 248-265 (com S. French).
160. "On the syllogism I", IFCH-UNICAMP (com L. H. L. dos Santos e E. H. Alves).
161. "Novos Fundamentos para a lógica deôntica", **Bol. Soc. Paran. Mat.** 2a. série 11, 5-9.
162. "Undecidability and incompleteness in classical mechanics", a aparecer (com F. A. Doria).
163. "Set-theoretical foundations of categories in biology", a aparecer (com J. M. Abe e N. Papavero).
164. "Suppes randomness in abstract spaces", a aparecer (com F. A. Doria).
165. "On non-Parmenidean logic", a aparecer.
166. "Consistency, omniscience and truth", a aparecer (com S. French).
167. "Non-computability and two conjectures by Penrose and Scarpellini", a aparecer (com F. A. Doria).
168. "Meinong's theory of objects and Hilbert's ε-symbol", a aparecer (com F. A. Doria e N. Papavero).

169. "On paraconsistent set theories", a aparecer em **Bol. Soc. Paran. Mat.** (com L. P. Alcantara).
170. "Memorial Científico". Não Publicado.

5.2. Resumos

1962

I. "Sobre um subsistema do cálculo proposicional clássico", Resumo das comunicações, XIV Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, p. 1.

1965

II. "Some properties of two systems of set theory", Notices Am. Math. Society 12, n.4, p. 472.

III. "Non-monotone operations in lattices", Notices Am. Math. Society 12, n.5, pp. 601-602.

1967

IV. "On Jaśkowski's propositional calculus", Notices Am. Math. Society 14, n.5, p. 712 (com L. Dubikajtis).

V. "Universes of Ehresmann-Dedecker", Notices Am. Math. Society 14, n.5, p. 2.

1968

VI. "Nota sobre la teoría de los tipos", Revista de la Unión Matemática Argentina XXIII, n.4, p. 199 (com A. I. Arruda).

VII. "On the postulate of separation", Notices Am. Math. Society 15, n.2, pp. 399-400 (com A. I. Arruda).

VIII. "Further considerations on the postulate of separation", Notices Am. Math. Society 15, n.3, p. 555 (com A. I. Arruda).

1969

IX. "The predicate calculus of order ω as the underlying logic of set theory", Notices Am. Math. Society 16, n.5, p. 845 (com C. M. de Barros).

1970

X. "On Ehresmann-Dedecker universes", Notices Am. Math. Society 17, n.2, pp. 453-454 (com D. Brignole).

XI. "On supernormal Ehresmann-Dedecker universes", Notices Am. Math. Society 17, n.5, p. 833 (com D. Brignole).

1971

XII. "On the systems T and T^*", The Journal of Symbolic Logic 36, n.3, p. 578.

1978

XIII. "On Jaśkowski's discussive logic", The Journal of Symbolic Logic 43, n.2, pp. 354-355 (com L. Dubikajtis).

XIV. "On some modal logical systems defined in connection with Jaśkowski's problem", The Journal of Symbolic Logic 43, n.2, p. 354 (com J. Kotas).

XV. "On Jaśkowski's problem and the logics of Łukasiewicz", Bulletin of the Section of Logic, Polish Academy of Sciences 7, n.2, p. 91 (com J. Kotas).

1981

XVI. "A modal theoretical approach to variable binding term operators", The Journal of Symbolic Logic 46, n.1, p. 184.

1983

XVII. "Semantical remarks on modal logic", The Journal of Symbolic Logic 48, n.3, pp. 885-886.

XVIII. "Studies in paraconsistent logic II. Quantifiers and the unity of opposites", The Journal of Symbolic Logic 48, n.3, p. 89 (com R. G. Wolf).

1984

XIX. "Pragmatic probability", The Journal of Symbolic Logic 49, n.4, p. 1432.

XX. "Pragmatical truth and approximation to truth", The Journal of Symbolic Logic 49, n.4, p. 1432 (com I. Mikenberg e R. Chuaqui).

1987

XXI. "Cause as an implication", The Journal of Symbolic Logic, a aparecer (com R. Sylvan).

*Departamento de Matemática. UFPR e CEFER/PR, Brasil.
**Departamento de Matemática. UNESP-RIO CLARO, Brasil

NOTAS

1 O nome "paraconsistente", que literalmente significa "ao lado da consistência" foi sugerido por Miró-Quesada durante o terceiro Simpósio Latino Americano de Lógica Matemática, em Campinas, 1976.

2 Já se percebe mudanças de comportamento de certos cientistas, os quais pode-se dizer que de certa forma fazem ciência normal no novo paradigma, como Dalla-Chiara e Guiuntini (20) o próprio da Costa em Matemática [143], ou em Ciência da Computação, como apontam Blair e Subrahmaniam (11), (56).

3 Alguns subsistemas parcias dos sistemas mencionados são também considerados como sistemas clássicos, como o Cálculo Proposicional Clássico ou a lógica positiva clássica de primeira ordem. Ele ainda observa que tal caracterização da lógica clássica não é precisa e nem exacta, e que "isto não é uma peculiaridade da lógica, mas é inerente ao domínio de qualquer ciência, seja ela formal ou empírica" [ib.].

4 Ver o **Statement of Purpose**, escrito pelo Prof. da Costa, para o primeiro número do **The Journal of Non-Classical Logic** (1982), (pp. i-vi).

5 Determinadas concepções da corrente hegeliana-marxista aceitam a existência de contradições no mundo real. Para uma análise de tal corrente de pensamento à luz das lógicas paraconsistentes, ver [79], [110] e também [81].

6 Aqui, as formulações pertinentes do Terceiro Excluído e da Contradição são respectivamente as seguintes: "De duas proposições contradictórias, uma é verdadeira" e "De duas proposições contradictórias, uma delas é falsa".

7 Para Leibniz, não pode haver duas entidades que se assemelhem em todas as qualidades: se têm todas as características em comum, são a mesma entidade. Para uma discussão mais detalhada, ver (33) e (34).

8 Estes autores apresentam uma teoria que considera entidades que são também denominadas de "quase-conjuntos", mas sua motivação visa tratar de coleções de entidades indistingüíveis de um modo que poderia, em certo sentido, ser dito "intensional".

9 R. Barcan Marcus comenta que os filósofos são freqüentemente criticados por inventar exemplos e contra-exemplos bizzaros para enfatizar um ponto de interesse filosófico: mas, como diz ela, referindo-se ao caso particular do aborto, "nenhum exemplo inventado pode igualar a complexidade e os quebra-cabeças gerados pelas circunstâncias existentes da concepção fetal, do parto e do nascimento de um ser humano" (**apud** [107]).

Referências Bibliográficas

(1) Abe, J. M. "A note on Curry algebras". **Bull. of Section of Logic.** Polish Academy of.Sciences **16** nº4 (1987), 151-158.

(2) Abe, J. M. "A lógica inductiva". **Rev. Bras. Fil. 38** Fasc.155 (1989), 202-209.

(3) Abe, J. M. **Fundamentos da lógica anotada.** Tese, FFLCH-USP, 1990.

(4) Abe, J. M. "Verdade Pragmática". A aparecer em **Estudos Avançados.**

(5) Alcântara, L. P. de (ed.) **Mathematical Logic and Formal Systems – A collection of papers in honor of Professor Newton C. A. da Costa. M.** Dekker, 1985.

(6) Anderson, A. R. and Belnap Jr., N. D. **Entailment.** Princeton Un. Press, 1976.

(7) Arruda, A. I. **Considerações sobre os sisteams formais NF_n.** Tese, Un. Federal do Paraná, 1964.

(8) Arruda, A. I. "A survey of paraconsistent logic". (in) Arruda, A. I., da Costa, N. C. A. and Chuaqui, R. (eds.) **Mathematical Logic in Latin America.** North-Holland, 1980, 1-41.

(9) Arruda, A. I. "Aspects of the historical development of paraconsistent logic". (in) Priest, G., Routley, R. and Norman, J. (eds.) **Paraconsistent logic. Essays on the inconsistent.** Philosophia Verlag, 1989.

(10) Bauks, D. und Sinsel, J. **Syntaktiche und Semantische Underschung Parakonsistentes Logiken.** Diplomarbleit, Karl-Marx Universiteit, 1980.

(11) Blair, H. and Subrahmanian, V. S. "Paraconsistent foundations for logic programming", A aparecer em **J. of Non-Classical Logic.**

(12) Bottura, P. **Logiche Paracoerenti. Tese de Laurea**. Universidade de Milão, 1982.

(13) Bottura, P. **Logica e contraddizioni**. Biblioteca Civica Varense, 1983.

(14) Bourbaki, N. **Theory of sets**. Hermann and Addison-Wesley, 1968.

(15) Bunder, M. "On Arruda and da Costa's logics J_1 to J_5". **J. of Non Classical Logic 2** (1983), 43-48.

(16) Chuaqui, R. "Discurso de recepción del Professor Newton da Costa como miembro de la Academia de Ciencias de Chile". **Informes Soc. Paran. Mat. 2** (1985), 31-35.

(17) Corcoran, J., Hatcher, W. S. and Herring, J. "Variable binding term operators". **Zeistschrift für Math. Logik und Grund. der Math. 18** (1972), 177-182.

(18) Dalla Chiara, M. L. and Toraldo di Francia, G. "Individuals, kinds and names in physics" **Versus 40** (1985), 29-50.

(19) Dalla Chiara, M. L. (1986). "Quantum Logic" (in) D. Gabbay and F. Guenthner (eds.) **Handbook of Philosophical Logic**, Vol.III, pp. 427-469. D. Reidel Pu. Co.

(20) Dalla Chiara, M. L. and Guiuntini, R. "Paraconsistent quantum logics". **Found. of Physics 19** (1989), 891-904.

(21) Dedecker, P. **Algèbre Catégorique**. Un. de Lile, 1966.

(22) Eytan, M. "Tableaux de Smullyan, ensembles de Hintikka et tout ça: un point de vue algébrique". **Math. Sci. Humaines 48** (1975), 21-27.

(23) Grana, N. **Logica paraconsistente**. Loffredo, 1983.

(24) Grana, N. **Contraddizione e incompletezza**. Ligouri, 1990.

(25) Grana, N. **Sulla teoria delle valutazioni di N.C.A. da Costa**. Ligouri, 1990.

(26) Grana, N. **Logica deontica paraconsistente**. Ligouri Ed., 1990.

(27) Graziozi, L. **Il metodo de la valutazioni in logica**. Tese de Laurea, Un. de Milão, 1985.

(28) Hatcher, W. S. **Foundations of mathematics**. Saunders, 1968.

(29) Hatcher, W. S. **The logical foundations of mathematics**. Pergamon, 1982.

(30) Jaskowski, S. "Rachunek zdán dla systemóv dedukcyjnych sprzeczcych". **Studia Societatis Scientiaram Torunensis. A,** I (1948), 55-57.

(31) Jaskowski, S. "O konjuncji dyskusyjnej w rachemku zdán dla systemóv dedukcyjnych sprzeczcych". **Studia Scientiaram Torunensis A,** I (1949), 171-172.

(32) Krause, D. "A filosofia da ciência de Newton C. A. da Costa". **Rev. Bras. Fil. 39** Fasc. 158 (1990), 117-144.

(33) Krause, D. **Não-reflexividade, indistingüibilidade e agregados de Weyl**. Tese. FFLCH-USO, 1990.

(34) Krause, D. "Uma caracterização para as lógicas não-reflexivas". A aparecer em **Estudos Avançados.**

(35) Krause, D. "A 'dialetização' da Teoria Tradicional da Identidade". A aparecer no **Bol. Soc. Paran. Mat.**

(36) Kreisel, G. "Hilbert's Programme". **Dialectica 12** 3/4 (1948), 346-372.

(37) Kuhn, T. S. **"The structure of scientific revolutions"**. Chicago Un. Press, 1962.

(38) Marconi, D. (ed.) **La formalizzazione della Dialettica**. Rosenberg & Sellier, 1979.

(39) Mendelson, E. **Introduction to mathematical logic**. Van Nostrand, 2nd. ed., 1979.

(40) Mussini, L. S. Tesi di Laurea. Un. Bologna, 1985.

(41) Narski, I. S. **Dialektischer Widerspruch und Erkenntnislogik**. VEB, 1973.

(42) Papávero, N. e Abe, J. M. "Categorias e biologia". A aparecer.

(43) Peña, L. "Critical study of da Costa's foundations of logic". **Logique et Analyse 25** (1982), 447-466.

(44) Petrov, S. "Paradoksi v filosofskoj intérprétacii". **Voprosy Filosofii 1** (1972).

(45) Popper, K. R. "Que é a Dialética?" (in) Popper, K. R. **Conjecturas e Refutações**. Ed. UnB, 1972.

(46) Priest, G., Routley, R. and Noeman, J. (eds.) **Paraconsistent logic. Essays on the inconsistent**. Philosophia Verlag, 1989.

(47) Priest, G. **"In contradiction: a study of the transconsistent"**. Martinus Nijhoff Pu., Dordrecht, 1987.

(48) Quesada, F. M. "La filosofia de la lógica de Newton C. A. da Costa". **Crítica 14** (1982), 65-85.

(49) Raggio, A. A. "Algunas observaciones sobre la filosofia de la lógica de Newton C. A. da Costa". **Rev. Hispanoamericana Fil. 9** (1983), 237-241.

(50) Rosser, B. **Logic for mathematicians**. McGraw-Hill, 1953.

(51) Routley, R. and Plumwood, V. **Moral dilemmas and the logic of deontic notions**. The Australian Nac. Un., RSSS, 1984.

(52) Routley, R. and Loparic, A. "A semantical study of Arruda-da Costa P systems and adjacent non-replacement systems". **Bull. Section of Logic**. Polish Academy of Science 6 (1977), 144-146.

(53) Routley, R. **Exploring Meinong's jungle and beyond**. The Australian Nac. Un., 1980.

(54) Santa Rosa, A. de "O Grupo de Curitiba" (in) **Documentación Crítica Iberoamericana de Filosofía y Ciencias Afines**, ano III, números 6-7, Publ. do Centro de Estudios de Filosofía, Sevilla, Enero-Junio, 1-2/1966, pp. 201-204.

(55) Schrödinger, E. **Science and humanism**. Cambridge Un. Press, 1952.

(56) Subrahmaniam, V. S. and Blair, H. "Paraconsistent logic programming". Pré-Print, Syracuse University, NY.

(57) Suppes, P. **Set theoretical structures in science**. Stanford Un. (mimeografado), 1967.

(58) Urbas, I. **On Brazilian paraconsistent logics**. PhD Tesis, Australian Nac. Un., RSSS, 1987.

(59) von Wright, G. H. "Truth, negation and contradiction". **Synthese 66** (1986), 3-14.

(60) von Wright, G. H. **A treatise on induction and probability**. Littlefeld, Adams & Co., 1960.

(61) Wittgenstein, L. **Philosophical remarks**. Blackwell, 1964.