LA GENESIS DE LAS DIMENSIONES EN PLATON

Juan de Dios BARES*

ABSTRACT

This paper deals with the ontological genesis of the series point-line-plane-solid in Plato's philosophy. The texts of the *Dialogues* concerning this subject are presented, and passages of the Unwritten Doctrines that we know from Aristotle and other sources are specially considered. Certain problems within this context, such as the postulation of indivisible lines, or the relation between each of the dimensions and the figures that can be placed in them, are considered in detail.

La Génesis de las Dimensiones en Platón.

La dialéctica platónica inauguró en el mundo griego la posibilidad de desplegar una filosofía de la matemática. Los geómetras y los versados en aritmética, decía Platón en la *República*, "dan por supuestos los números impares y pares, las figuras, tres clases de ángulos y otras cosas emparentadas con éstas y distintas en cada caso; las adoptan como hipótesis, procediendo igual que si las conocieran, y no se creen ya en el deber de dar ninguna explicación ni a sí mismos ni a los demás con respecto a lo que consideran como evidente para todos"[1]. Explicar los presupuestos de las matemáticas es reconducir las entidades que se admiten en ese discurso a un plano superior, a los principios de los que dependen y por los que son generadas. En el caso de las entidades geométricas, es manifiesto que lo que todas ellas tienen en común es su carácter de cosas extensas, el tener una posición y, por lo tanto, estar en una relación espacial con otras figuras. Ahora bien, no es fácil derivar esta propiedad de lo ideal, que no es extenso, ni de las cosas empíricas, porque las figuras que son objeto de la geometría no son mudables y cambiables como lo empírico. Aristóteles entendió que Platón hizo de este tipo de realidades intermediarias entre lo sensible y lo ideal, (en las que se engloban también los números, ya que su multiplicidad les distingue de la unidad de las ideas) un género aparte[2]. Las entidades propias de este género descenderían, en última instancia, de los principios que componen todo lo real, del principio responsable de la unidad, lo Uno, y del principio responsable de la multiplicidad, la Díada Indefinida. La extensión es entendida así como un modo de la multiplicidad, es la multiplicidad que crece en dimensión, en una o varias direcciones del espacio.

La concepción platónica de las dimensiones y el espacio ha de encuadrarse dentro del contexto griego, bastante lejano de la representación del espacio absoluto newtoniano. Es preciso hacer notar que ningún griego abordó directamente el concepto de espacio, para el que no hay una palabra en la lengua helena. No es de extrañar, pues, que las nociones de lugar y espacio se confundan y se interpenetren, lo cual sucedía desde las primeras reflexiones griegas. Ni siquiera el vacío atomista es una excepción aquí: aunque la idea de κένον presupone una concepción previa del

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
Nº 16-17-18, Octubre 1992, 451-471

espacio[3], común al vacío y a los átomos, puesto que las características de los átomos también son espaciales, sin embargo, nada nos dicen los fragmentos antiguos sobre él. Por todo ello, es más correcto hablar de lugar que de espacio en la perspectiva platónica. Esto hace que la idea de espacio sea indisoluble de la de cuerpo extenso, y que hablar de la generación del espacio sea hablar de la generación de los cuerpos espacialmente extensos.

Platón se ocupa extensamente en el *Timeo* de exponer su pensamiento acerca de la estructura del mundo físico, en la que el lugar, las dimensiones y la geometría tienen una gran importancia. La segunda parte de este diálogo, τὰ ἐξ ἀναγκῆς γιγνόμενα[4], presenta la conformación del mundo físico infralunar a partir de tres principios: las ideas, la χώρα y la plasmación de las ideas en la materia. Allí se describe, entre otras cosas, la génesis de los elementos, que es presentada como una versión matematizada del atomismo democriteano. Toda la realidad será analizable en términos de cuatro elementos[5], y estos cuatro, a su vez, pueden ser descompuestos en figuras elementales, planas y no estereométricas. Platón lleva adelante su descomposición hasta acabar en dos tipos de triángulos elementales, el rectángulo isósceles y un tipo determinado de rectángulo escaleno[6]. Y añade: "Pero los otros principios anteriores a éstos los conoce Dios y aquél de entre los hombres que es amado por él"[7]. Nuestro filósofo se niega a conectar con los principios la estructura de los triángulos elementales, no porque sea una empresa inaccesible al pensamiento, sino porque es inconsistente con el método y el contenido del discurso que le ocupa. Puesto que en el curso de la exposición se forman los sólidos a partir de triángulos elementales mediante la mera unión de los triángulos por sus vértices formando ángulos tridimensionales, aquello que había de conectar los principios con los triángulos elementales habría de incluir la generación de las dimensiones. En efecto, como en Euclides, las dimensiones son algo que se da por supuesto. Platón no hace más que emplear la definición de ángulo sólido en la composición de las figuras tridimensionales, y no se propone definir, reconduciendo a los principios, la tridimensionalidad. Naturalmente, la primera parte del *Timeo* establece cuál es la proporción que había de abarcar a todos los sólidos, i.e., la interposición de dos medias geométricas. Sin embargo, la perspectiva es allí parcial e incardinada en un contexto mítico, pues desde el principio, el Demiurgo realiza operaciones que involucran la dimensión y lo espacial.

Aunque aparezca como algo dado en el *Timeo*, el espacio, sin embargo, no es algo "dado" para Platón. No es un absoluto, como en la perspectiva newtoniana, sino, antes bien, algo que está en íntima conexión con los cuerpos. El hecho de que existan unas proporciones básicas que permiten armonizar las figuras que se despliegan en cada una de las dimensiones, como se refleja en *Timeo* 31 b-c[8] implica que el espacio supone un orden y proporción determinados para los cuerpos que se sitúan en él, es algo que posee propiedades. Estas proporciones que deben guardar los cuerpos situados en el espacio no forman parte de la χώρα[9], dado que ésta es un ámbito de diversidad absoluta en la que no puede fijarse de modo duradero ninguna proporción definida. La configuración de lo espacial en la dirección de las diferentes dimensiones no se limita entonces al receptáculo, sino que ha de derivarse también de la acción de lo ideal sobre la materia. Las dimensiones, como los elementos, presuponen un orden que se establece en lo real, no son una manifestación inmediata de la multiplicidad, sino un compuesto que ha de derivarse de los principios.

Este trabajo se propone adentrarse en ese tema que en el *Timeo* queda fuera de tratamiento, aquello que está más arriba de los triángulos elementales, o dicho de otra manera, se trata de rellenar el hueco existente entre los principios de los Ἄγραφα Δόγματα de Platón y los átomos matemáticos que aparecen en el *Timeo*. Para ello trataremos tanto de los *Diálogos* como de las noticias indirectas que poseemos sobre el pensamiento platónico, intentando mostrar que, al menos en este tema, ambas fuentes se complementan de un modo preciso. Trataremos también, en el camino, de desechar algún importante error que ha oscurecido la comprensión de estos temas y que hoy vale como verdad general.

I. La Serie de las Dimensiones en los Diálogos de Platón.

Aunque no encontramos en los *Diálogos* ningún tratamiento directo del tema que nos ocupa, sí que pueden advertirse importantes alusiones a este respecto. La primera de ellos aparece en el catálogo de las ciencias de la *República*. Allí se proponen como ciencias la aritmética, la geometría plana (ἐπίπεδον), y antes de tomar en cuenta la astronomía, ciencia de los sólidos en movimiento, se plantea la necesidad de dar cabida a otra ciencia intermedia entre ambas:

> "lo correcto es tomar, después del segundo desarrollo, el tercero. Y esto versa, según creo, sobre el desarrollo de los cubos y lo que participa de profundidad".[10]

Ha de repararse en el término con que se designa la inclusión de cada una de las ciencias, αὔξη, desarrollo o crecimiento. El empleo de este término, que se da también en un pasaje de las *Leyes*, delata que la estructura jerárquica de las ciencias en la formación de los futuros gobernantes se corresponde con una diferencia de rango ontológico entre sus objetos, como intentaré probar más adelante. Por otra parte, resulta difícil asignar un sentido preciso a la tercera dimensión tal y como la caracteriza Platón, como algo que tiene que ver con los cubos. Resuena aquí también la antigua aritmología pitagórica, donde los números cúbicos son lo que determinan el volumen en la serie de los números-producto. Pero hay algo más: Fernández Galiano y Pabón entienden, como la mayoría de los especialistas, que se refieren estas palabras se refieren al famoso problema de la duplicación del cubo[11], i.e., de encontrar dos medias proporcionales entre dos números dados[12]. Ya hemos visto cómo, en el pasaje del *Timeo* citado más arriba, se plantea la armonización de los sólidos en términos de encontrar entre ellos dos medias proporcionales, y la vinculación de este planteamiento del enigma del cubo con la estructura de todos los sólidos es algo que atestiguan también los textos matemáticos antiguos[13]. La introducción de orden y proporción juega, pues, un importante papel en la configuración de los cuerpos.

En las *Leyes*, en el libro VII, también se habla de la necesidad de una ciencia geométrica en la formación de los ciudadanos, una ciencia enunciada como μετρητική δὲ μήκους καὶ ἐπιπέδου καὶ βάθους[14], ciencia de lo largo, lo ancho y lo profundo, y se hace residir la clave de este estudio en la conmensurabilidad de estas tres dimensiones[15]. Con ello se reflejan los estudios de Teodoro y Teeteto en el campo de los irracionales, que preparan la distinción entre ἄλογον ψ ἄρρετον en Euclides. Asímismo, podemos poner este pasaje en relación con el *excursus* acerca de las dos ciencias de la medida en el *Político,* lo que implica que la conmensurabilidad de las dimensiones, además de ser considerada en la relación de éstas entre sí, han de ser considerada también por su relación con la justa medida[16], i.e., ha de proporcionarse, más allá de una explicación geométrica, o de una indagación de las propiedades y relaciones mutuas de las diferentes figuras que podemos trazar en el espacio, una explicación ontológica de las mismas, sobre la cual, desgraciadamente, no se dan precisiones en los *Diálogos.*

Que el orden que guarda la geometría se corresponde con el orden real de la generación de sus entidades aparece directamente implicado en otro célebre pasaje de las *Leyes*:

> "¿Qué ocurrencia hace falta, en efecto, para la generación de una cosa cualquiera? Es claro que esta se dará cuando el principio de ella tomando incremento realice su primera transformación y de ésta pase a la inmediata, y llegando a la tercera, se haga perceptible a los que tienen percepción"[17]

Esta compleja observación se incardina en el contexto de una enumeración de los diez diferentes tipos de movimiento, donde el movimiento del alma, aquel que se mueve a sí mismo y puede mover a las demás cosas sin ser movido a su vez, es el primero en rango ontológico y aquel del que dependen los demás. Los otros movimientos se engloban dentro de la categoría del que mueve a las cosas, sin poder moverse a sí mismo. Todos los procesos que se dan en el mundo físico pueden entenderse dentro de este segundo tipo: tanto el movimiento circular como el de traslación no circular, la mezcla y la separación, el crecimiento y la disminución, el llegar a ser y el perecer[18]. Hay una cadena deductiva entre los movimientos: el movimiento circular determina los otros no circulares, los movimientos de traslación explican a su vez la mezcla y la separación de los cuerpos al encontrarse en sucesivos choques, y el crecimiento y la disminución se explican como consecuencia de los procesos de separación y disminución. Por último, el llegar a ser y el perecer se entienden en términos de crecimiento. En el marco cosmológico, decimos que experimenta una génesis aquello que crece desde la primera dimensión (lo lineal) a la segunda (lo plano) para alcanzar por último la tercera (la corpórea y sensible). La destrucción puede producirse por cualquier proceso que haga que el cuerpo así constituido pierda su carácter.

La distinción de los tipos de movimiento de las *Leyes* profundiza la doctrina platónica del cambio y el movimiento en un aspecto fundamental. El movimiento había sido dividido en el *Teeteto* en dos géneros, traslación y cambio, φορά y ἀλλοίωσις, división que no es contradictoria con ésta más amplia que encontramos en las *Leyes*. Lo que se muestra ahora es la primacía del movimiento local para una explicación general del cambio, extremo que también consignará Aristóteles, y que permite una explicación unitaria de todos los procesos naturales en términos de transmisión de movimiento[19], y, por tanto, el establecimiento de una física. No es ésta, sin embargo, una conquista de Platón ni de su discípulo Aristóteles, sino que estaba prefigurada ya en el tratamiento pitagórico de hechos cualitativos como el sonido en términos de choques entre movimientos, y, sobre todo, en el atomismo democriteano. Ahora bien, la consideración de un movimiento que se mueve a sí mismo sin ser movido, y que es ontológicamente superior a todos los movimientos que se producen en la esfera de lo físico preserva a esta doctrina del reduccionismo a que se veía abocada en el atomismo. Así, Platón puede mantener en el *Timeo* una versión matematizada del atomismo en el plano físico, sin tener por ello que atribuir todos los procesos naturales en ese ámbito al mero azar. Cuando en el análisis de los real se llega a los átomos físicos, Platón no detiene el análisis, sino que encuentra los principios de los átomos corpóreos en lo ideal. Ello constituye, según conocemos por testimonios indirectos[20], una reducción de la pluralidad sensible a los elementos primeros de todo lo que es, lo Uno y la Díada Indefinida. Naturalmente, esta reducción no está contenida en los *Diálogos*. El *Timeo* sólo llega hasta el análisis de los cuerpos en figuras planas elementales, cuya posibilidad de combinación en ángulos sólidos presupone ya la tridimensionalidad. Sin embargo, en las *Leyes* se alude al proceso de génesis de los cuerpos físicos, diciendo que su principio "crece" y experimenta una "transformación" en cada una de las dimensiones sucesivas, hasta llegar a ser un cuerpo sólido perceptible. Estas palabras presuponen que al menos la distinción entre geometría plana y geometría sólida de las ciencias de la *República* no es solamente curricular, sino que se corresponde con estadio de la génesis ontológica de lo real. Cabe suponer que tratar de las dimensiones como "incrementos" puede estar vinculado, en su origen, a la aritmología pitagórica, en la que un plano se genera por el incremento o acumulación[21] de los puntos en una línea, pero la concepción platónica es más compleja y no da un tratamiento homogéneo a cada una de las dimensiones, como meros agregados de corpúsculos elementales, sino que cada una de ellas está situada en un Plano ontológico diferente (presupone una ςτρανσφορμαχι'νς, μετάβασις) y participa correspondientemente de modo diferente en el principio responsable de la pluralidad.

El texto de las *Leyes* es ininteligible, por lo tanto, sin recurrir a las explicaciones que conocemos de modo indirecto acerca de la génesis de las dimensiones en las *Doctrinas no Escritas* de Platón. Es cierto, sin embargo, que no constituye más que una breve alusión, pero es suficiente como para mostrar que las doctrinas implicadas no tienen por qué estar en contraposición con los *Diálogos*, sino que representan un estadio diferente del pensamiento platónico perfectamente complementario con éstos.

En general, el Platón de los *Diálogos* va poco más allá de afirmar que el estudio de la geometría ha de incluir las tres dimensiones. En el *Timeo* vemos cómo la bidimensionalidad de los triángulos conforma las tres figuras tridimensionales básicas, y que la profundidad se da por supuesta, y no se prueba jamás. Pero muestran también claros indicios de que la visión platónica del espacio, y la de la geometría euclidiana, por tanto, no es una visión *naïf*, que tome como dadas las dimensiones espaciales, sino que éstas son derivables de los principios.

II. Las Doctrinas no Escritas de Platón.

En los textos de la tradición indirecta sobre la filosofía platónica, encontramos una serie de afirmaciones que ofrecen en conjunto una imagen definida -aunque problemática- de aquello que está más allá de los principios.

La serie de las dimensiones es vista por Aristóteles en conexión con el *Timeo*:

> "Del mismo modo también Platón en el *Timeo* hace el alma desde los elementos; pues lo semejante es conocido por lo semejante, y las cosas son desde los principios. Parecidamente explica en los llamados *De la filosofía* el animal en sí desde la idea de lo uno en sí y de la primera longitud, anchura y profundidad [ἐξ αὐτῆς τῆς τοῦ ἑνὸς ἰδέας καὶ τοῦ πρώτου μήκους καὶ πλάτους καὶ βάθους], y las demás cosas de modo semejante".[22]

La construcción del alma del mundo que lleva a cabo el Demiurgo en el *Timeo*, y cuyo sentido, a partir de las ideas de identidad, diversidad, etc, es desde antiguo discutida, es "semejante" a la construcción de la serie de las dimensiones. Para la mayoría de los intérpretes, la construcción del Animal en sí a partir de la primera longitud, anchura y profundidad es una doctrina platónica, que había de figurar en las Doctrinas no Escritas sobre el Bien. Cabría preguntarse si la alusión de Aristóteles al περὶ φιλοσοφίας es o no en realidad una alusión al περὶ τ'ἀγαθοῦ, donde con toda seguridad se trataba este tema, o lo es al diálogo Aristotélico sobre la filosofía, o incluso, a las opiniones filosóficas de Platón[23]. En cualquier caso, se trata de una alusión a una doctrina platónica, pues en la transición de la primera frase citada a la segunda nada permite suponer que Aristóteles haya cambiado de sujeto (Platón por Jenócrates)[24]. Ciertamente, el reconocimiento de este extremo abre un abanico de graves dificultades, porque las palabras de Aristóteles, muy condensadas, son fuertemente equívocas. Para arrojar luz sobre este texto hemos de recurrir a otros.

Así, Alejandro, en su comentario a la *Metafísica*, nos informa:

> "Platón y los pitagóricos consideraban que los principios de los seres son los números, porque les parecía que es principio lo primero y lo no compuesto, y que los principios de los cuerpos [τῶν δὲ σώματων] son las superficies [τὰ ἐπίπεδα] (pues las cosas más simples y que no se destruyen conjuntamente son anteriores por naturaleza), y las líneas [γραμμαὶ] lo son de las superficies por la misma razón, y los puntos [στιγμαὶ] de las líneas, a los que los matemáticos llaman signos [σημεῖα], y ellos unidades [μονάδας],siendo enteramente no compuestos y no teniendo nada por delante de ellas; ahora bien, las unidades son números, y los números son los principios de los seres".[25]

Y prosiguiendo más adelante, relata que los principios de los números son los principios de todo lo real, esto es, lo Uno y la Díada indefinida.

Hay una relación de anterioridad ontológica de abajo a arriba entre los elementos de la serie sólido-plano-línea-punto (σώμα-ἐπίπεδον- γραμμή-στιγμή), relación que presupone un *plus* ontológico en cada uno de los escalones de esta serie, y que está constituido por la inclusión de una nueva dimensión. Es sin duda a esta serie (invertida, porque allí se contemplaba desde el orden de la generación) a la que se refería la serie uno en sí-primera longitud- primera anchura-primera profundidad (ἕν- μῆκος-πλάτος-βάθος) del texto de Aristóteles. El pasaje del *De Anima* y el de Alejandro podrían llevar a confundir lo Uno con el punto (que es lo uno en la serie de las dimensiones, pero no lo Uno como principio). El primero de ellos proporciona una denominación abstracta de cada una de las dimensiones, pero la terminología más usual es la que emplea Alejandro.

Una vez indicados cuáles son los planos ontológicos en que se despliega la generación de las dimensiones, hemos de intentar presentar ésta. A primera vista podría pensarse que Platón podría haber incluido en su doctrina la generación de las figuras en términos del tratamiento pitagórico de los números figurados: bastaría representarse la generación del punto desde lo Uno y la Díada indefinida, y posteriormente el punto daría lugar a la línea por adición, y ésta al plano, y éste al sólido[26]. Sin embargo, un procedimiento así serviría para dar cuenta de la disposición de las figuras en el espacio, pero no para la generación de las dimensiones espaciales, que se darían por supuestas. Una solución semejante sólo vale en el contexto de la aritmología de números formados por puntos rodeados de una χώρα. La drástica escisión entre esta manera de considerar las cantidades y las magnitudes geométricas, producida tras el descubrimiento de las magnitudes irracionales, vuelve esta explicación anacrónica para tiempos de Platón. Platón entendió que cada una de las sucesivas dimensiones era el resultado de una génesis ontológica en un nivel distinto, lo que suponía la limitación por parte de lo Uno de sucesivos subgéneros del principio de diversidad, lo Grande y lo Pequeño. Así tendríamos la longitud constituida a partir de lo Corto y lo Largo, la superficie a partir de lo Ancho y lo Estrecho, y los sólidos a partir de lo Profundo y lo Superficial[27]. Con la postulación de un principio apropiado para cada una de las series dimensionales se aseguraba la continuidad de cada dimensión dentro de sí misma, y además, no se establecía una figura determinada en cada una de las dimensiones.

Sin embargo, estas ventajas no dejaban de comportar -a los ojos de Aristóteles al menos- graves inconvenientes: En primer lugar, ¿Cómo asegurar la relación entre los sucesivos géneros?[28]; y por otra parte, en segundo lugar, ¿Cuál es el *status* de tales entidades?[29] Ambas objeciones son resultado de una mala comprensión de Aristóteles.

La primera objeción desvela, más que un error de Platón, un hecho geométrico. No hay, para la matemática euclidiana, ninguna posibilidad de establecer una relación matemáticamente expresable entre una línea y una superficie, o entre una superficie y un sólido. Los progresos por parte de Teeteto y Eudoxo en el campo de los irracionales, con la clasificación de los diferentes irracionales y la definición de inconmensurabilidad (ἄλογον) como una relación entre dos magnitudes que no es la de un número a un número, habían permitido a los geómetras (y a Platón, por tanto), operar matemáticamente en un mismo plano con magnitudes que no podían reducirse a una unidad. Bastaba que pudieran sobrepasarse mutuamente[30]. Todas las líneas, o todas las superficies, entran dentro de esta categoría[31], y Platón expresa esto ontológicamente indicando que derivan de los mismos principios, esto es, que están en el mismo plano.

La segunda tampoco es una objeción sólida, pues está conectada con la visión estrecha de Aristóteles de la doctrina platónica de los números ideales. En efecto, la serie de las dimensiones, si es que su rango es ideal, habría de estar constituida por números ideales, puesto que las ideas son números. Pero esto es confundir los números ideales (Uno en sí, Dos en sí, Tres en sí, etc.) con el carácter numérico (como compuesto proporcional de unidad y multiplicidad) de toda idea[32]. Aún si se entendiera, con Teofrasto, que Platón daba a las sucesivas Ideas de números un papel preponderante en el conjunto de las ideas como modelo para las demás[33], no puede entenderse la matematización de la teoría de las ideas como indicando que toda idea es un número sin más.

Con todo, sí que puede establecerse una analogía entre la serie numérica (uno, dos, tres, cuatro) y la serie de las dimensiones (punto,línea, plano, sólido), puesto que ambas involucran el antes y el después[34]. El texto de *De Anima* citado antes expresaba tal relación, no solamente de la serie numérica con la serie dimensional, sino también con las diferentes facultades cognoscitivas (intelecto, ciencia, opinión, sensación). Los intérpretes se encuentran aquí también divididos entre quienes admiten que estas tesis son de Platón y quienes piensan que son desarrollos posteriores de Jenócrates. Es muy posible que en Jenócrates la serie de las Ideas de números tuviera un papel menos analógico y más estructural en el campo de la generación ontológica de lo real, pero no veo motivos para no atribuir al menos la primera de las doctrinas mencionadas -la vinculación de los números con la serie dimensional- a Platón.

Otra cuestión vinculada con ésta es que la generación de las dimensiones nos ha proporcionado cuatro planos ontológicos (puntos, líneas, planos, superficies, sólidos) y sólo hemos hablado de tres pares de principios derivados de la díada capaces de generarlos (largo y corto, ancho y estrecho, profundo y superficial). Los puntos, por su parte, provienen de lo poco y lo mucho, que no es un género espacial, sino meramente cuantitativo, lo que hace que su pertenencia a la serie dimensional sea dudosa. La serie dimensional está basada sobre la noción de πρότερον φύσει, que presupone que cada escalón de la gradación ontológica es el elemento de la siguiente. Es anterior por naturaleza aquello que no puede ser eliminado sin eliminar también aquello que le es derivado[35]. Lo anterior se entiende como elemento de lo que le sigue. Así, lo sólido incluye dentro de sí como un componente suyo lo plano. Aunque la noción de anterioridad ontológica está emparentada con el esquema de la adición propio de la aritmología pitagórica, la noción platónica de elemento es más elaborada, y entiende el plano como el límite de lo sólido, y por esto como su principio[36]. Esta es la razón para interponer géneros intermedio entre la Díada y las dimensiones: dado que las sucesivas dimensiones no resultan de una mera adición de los componentes de la dimensión anterior, han de participar de modos diferentes en el principio de multiplicidad, la Díada.

Podríamos ilustrar esto en las definiciones 2 y 3 del libro I de los *Elementos* de Euclides: "la línea es longitud sin anchura"[37], y "los límites de la línea son puntos"[38]. La primera de estas definiciones pone de relieve el carácter de principio de la longitud con respecto a la anchura. Sin ser la anchura, la longitud es un componente básico sin el que la anchura no puede darse. La otra, por su parte, incide en la dependencia ontológica de la línea con respecto al punto. Sin ser punto, la recta no podría darse sin puntos, que son sus límites. Y es el límite lo que pone lo ideal, lo que se aplica a lo indefinido para generar las estructuras ontológicamente estables. Ahora bien, esta última definición conlleva un difícil compromiso. La recta no es, en modo alguno, una suma de puntos, ni el plano una suma de líneas, ni el sólido una suma de planos, desde el momento en que sus propiedades matemáticas no pueden reducirse al plano anterior. Sin embargo, el esquema ontológico de la anterioridad por naturaleza está constituido sobre la idea de adición y sustracción, a partir de un modelo analítico en que las partes constituyen el todo. En la línea hay puntos, pero la línea no es una suma de puntos. Y aunque así se admitiera, el hecho de que los puntos puedan sumarse en longitud[39], o paralelamente, que las líneas puedan adicionarse en una dirección determinada (en anchura) para formar un plano, y no simplemente en longitud, es una particularidad que presupone un plus ontológico. En última instancia, la línea no se compone de puntos, porque los puntos son discontinuos, y la línea no lo es. En Aristóteles, los puntos son divisiones, cortes de la línea, pero no entidades subsistentes. Son términos que podemos marcar en la línea, del mismo modo que, en la serie temporal, el ahora, que constituye el tiempo, no es un trozo del tiempo, esto es, el tiempo no está construido por una mera suma de ahoras.

Esta evolución había comenzado ya en la reflexión platónica. Prueba de ello es su negativa a admitir la presencia del punto en la serie dimensional:

> "Además, ¿A partir de qué existen los puntos? En efecto, Platón combatió también este género como siendo una opinión de los geómetras, y llamaba principio de la línea -esto lo establece en muchas ocasiones- a las líneas insecables (Y sin embargo es necesario que éstas tengan algún límite, de tal manera que por la misma razón por la que existe la línea, existe también el punto)".[40]

El pitagorismo había unido matemática y ontología, y había hecho de sus puntos entidades matemáticas al mismo tiempo que constituyentes mínimos de la realidad. Pero el descubrimiento de los irracionales en matemáticas, y las paradojas del movimiento en física, habían probado que es imposible representarse la extensión como discontinua. El punto, o cualquier otra entidad indivisible quedaba así definitivamente desterrado del catálogo de realidades ontológicas. Demócrito, sin embargo, creyó aún poder zanjar la cuestión negando la divisibilidad infinita a los componentes de la realidad[41]. Es posible que también Platón estuviera a medio camino en este recorrido que llevaba a la doctrina del continuo aristotélica. Se niega a aceptar el punto como algo extenso, pero su postulación de la línea insecable podría comprometerle aún con la existencia de *quanta* discontinuos en la realidad. La línea insecable constituye un intento de salvaguardar la continuidad de la línea, y sigue siendo, en este sentido, extensión en una dirección, sólo que reducida al mínimo. Es posible que Platón sólo quisiera significar con esta opinión que por mucho que dividamos la línea, no encontraremos, en la mera partición geométrica, una entidad de rango diferente, y seguiremos teniendo una línea, pero hablar de una línea insecable implica también que esa división ha de tener un fin. Ello consuma el divorcio entre aritmética y geometría, pero no libra a la geometría de los problemas por los cuales este divorcio llegó a producirse. A este respecto quisiera añadir dos consideraciones:

a) Cabe la tentación de entender al principio de la línea, la línea insecable, no como un concepto geométrico, sino como una entidad ideal. Así como los números ideales son insumables, las magnitudes geométricas ideales podrían ser indivisibles, aunque ejemplifiquen figuras divisibles, ya que ésta es la propiedad más característica de la extensión. Esta hipótesis es atractiva porque permitiría dar cuenta de la extraña separación entre entidades geométricas ideales y matemáticas, ese "cuarto género" del que habla Aristóteles. Existen textos que nos permiten relacionar las líneas insecables con la idea de línea, como el segundo argumento del *De Lineis Insecabilibus*:

> "Además, si hay una idea de la línea, y la idea es anterior a las cosas que le son sinónimas, y la partes son anteriores al todo por naturaleza, la línea en sí sería indivisible, y de la misma manera el cuadrado y el triángulo y las demás figuras, en conjunto, lo plano en sí y el cuerpo. pues, en caso contrario, sucedería que habría cosas anteriores a cada uno de ellos".[42]

Este texto resulta profundamente sugerente, al hacer confluir el término del análisis de lo real en sus partes constituyentes con lo ideal. Ciertamente, los átomos, o los elementos últimos que se postulan como principios de lo real, no son sensibles, sino sólo pensables. Sin embargo, la mayoría de los textos que se refieren al problema de las líneas insecables (incluido el tono general del *De Lineis*), entienden el problema como referido a un problema geométrico, que afecta a la posibilidad de llegar a un término último en la división de la longitud. Este problema se mantiene, sea cual sea el *status* ontológico que se les dé a las líneas insecables.

b) Por otra parte, resultaría atractivo hacer a Platón más coherente de lo que ahí hemos expuesto, y pretender que la idea de línea insecable implica a pesar de su denominación una divisibilidad infinita de la extensión. Esto supondría hacer de la línea insecable un infinitésimo. Hay signos suficientes como para admitir que Platón tenía una noción clara de la falta de continuidad que existía entre la aritmética y la geometría, y de que todas las magnitudes extensas no tenían una traducción aritmética. ¿No es contradictorio entonces hacerle seguir sosteniendo una visión discontinua de la extensión? La doctrina de las líneas insecables viene a responder al problema de la relación entre aritmética y geometría postulando unas entidades del mismo tipo de la unidad aritmética en el ámbito geométrico, capaces de "cubrir" a entidades como $\sqrt{2}$ y 1. ¿Es verosímil que Platón no hubiera tenido conocimiento de los avances de Eudoxo, quien renunciaba a encontrar una medida común como criterio de conmensurabilidad, contentándose con tratar como racionales aquellas magnitudes con las que se puede operar continuamente? Tal vez pensaba, ante la presencia de procedimientos aproximativos empleados en matemáticas, también por el mismo Eudoxo (como el método de exhaustión) que las limitaciones de la matemática en este respecto no habían de influir en la ontología.

Entonces, las críticas aristotélicas a la concepción discontinuista, basadas sobre todo en los problemas del movimiento podrían aplicarse a Platón.

Lo sorprendente del asunto es que la visión aristotélica del continuo, que surge de sus análisis de la extensión y -sobre todo- del tiempo, se halla preparada por el mismo Platón. He aludido antes al paralelismo existente entre la continuidad del tiempo y la del espacio en Aristóteles. Platón nos habla en el Parménides del instante, el ἐξαιφνής en unos términos que permiten suponer la continuidad del tiempo:

> "El instante parece significar algo así como aquello desde donde se cambia hacia uno u otro estado. Pues no es del reposo todavía inmóvil de donde surge el cambio, ni tampoco de lo que se mueve y está todavía en movimiento. Esa extraña naturaleza del instante, situada en el intermedio entre el movimiento y el reposo, y que no está en tiempo alguno, es aquello hacia lo cual y desde lo cual cambia al reposo lo que está en movimiento, y al movimiento lo que está en reposo".[43]

Aunque no se emplea la palabra, el instante es un límite del tiempo. El tiempo está constituido de instantes, pero no es en modo alguno una agrupación de instantes, una suma de ellos, sino que es al mismo tiempo término del estadio inmediatamente anterior a él y principio del siguiente. Platón afirma que en el momento del cambio, el instante no está en ningún tiempo. Como límite, no es un eslabón de la serie temporal. ¿Podemos extender este análisis del tiempo como continuo al espacio? En tal caso, la línea insecable sería un límite de la extensión, esto es, no una parte de la extensión, sino principio de una parte y final de la otra al mismo tiempo, y como tal inextensa, i.e., indivisible. La terminología platónica (ἀρχή γραμμῆς, ἄτομον γραμμή), induce a confusión y Aristóteles pudo entender la línea insecable en términos atomistas, como una magnitud alícuota mínima dada. De hecho, el texto del *Parménides* permite aplicar este esquema de explicación diseñado para el tiempo a todo tipo de procesos donde se da un cambio, al llegar a ser y al perecer, y también al crecimiento y a la dismininución[44]. Y, ¿No era llamado el paso de una dimensión a otra en la *República* y en las *Leyes* αὔξη?

La consideración de la extensión como un *continuum* no excluye, desde luego, que ésta tenga partes, sino que existan unas partes mínimas. Si la línea insecable es un límite de la línea, ésta no puede ser un constituyente de ella, y no puede preguntarse entonces por sus límites, como hace Aristóteles en el texto citado. No podemos, sin embargo, hacer llevar la capacidad de incomprensión malintencionada de Aristóteles al extremo de no reconocer en la doctrina platónica un tratamiento de la extensión que a todas luces es idéntico al suyo. Bien pudiera ser que Jenócrates, de quien sabemos que sostuvo la doctrina de las líneas insecables, hubiera malcomprendido la doctrina, y le hubiera dado a estas líneas insecables el carácter de átomos que consitutyen la línea. Dado el carácter de Jenócrates de representante del platonismo ortodoxo en tiempos de Aristóteles, la crítica de éste podría ir dirigida contra sus contemporáneos en la Academia, cualquiera que fuera el sentido original de la interpretación platónica.

Pero es también posible que Platón no tuviera una idea clara al respecto, y que no se preocupara por hacer compatible hasta sus últimos detalles las consecuencias de los roces entre el método reduccionista o elementarizante heredado del pitagorismo para situar ontológicamente las dimensiones y la necesidad de considerar a las líneas, las superficies y los sólidos como continuos y no como discretos. La terminología empleada por Platón, ἄτομον γραμμή, señala en esta dirección. Platón podría haberse limitado a excluir el punto de la serie de las dimensiones, porque el divorcio entre aritmética y geometría era ya manifiesto, y porque el punto, obviamente, no constituye una dimensión, es un principio de multiplicidad, pero no involucra una dirección de esa multiplicidad, que es el carácter básico de lo extenso.

Es en todo caso en tiempos de Platón cuando debe situarse la concepción de las entidades de la serie dimensional como continua. Sexto, Proclo, Aristóteles y otros autores nos hablan de una definición del punto como ῥύσις σημείου. Como tendremos ocasión de ver más adelante, el paso de unas dimensiones a otras se entiende en esta perspectiva en términos de movimiento, lo que indica que la preocupación por explicar la serie de las dimensiones salvando la continuidad de la extensión no es algo exclusivo de Platón.

Por último, nos queda por explicar por qué se habla de una línea insecable y no de una superficie insecable, en lugar de una línea, o de un sólido insecable, en lugar de la superficie.

En la serie dimensional, cada término se define en función de su carácter de principio de lo anterior. La definición platónica de línea que aparece en los *Elementos* de Euclides es la de longitud sin anchura, la del plano la de longitud y anchura sin profundidad, y la del sólido como lo que tiene longitud, anchura y profundidad. La definición euclídea del punto como lo que no tiene partes[45] está claramente fuera de esta serie. Proclo añade aquí[46] un comentario fuertemente indicativo: la definición de punto es negativa, mientras que la de línea es positiva, aunque incluya también un elemento negativo, puesto que es a partir de ella como se produce la siguiente dimensión. Geométricamente hablando, el único sentido del punto es generar la línea. En aritmética, la acumulación de unidades (que los pitagóricos habían identificado como puntos) da lugar a cantidades. En geometría, como veremos, la línea no se genera por acumulación de puntos, sino, en todo caso, por el desplazamiento de un punto. Platón entendió que esta manera de generar las líneas a partir de los puntos, propuesta seguramente por pitagóricos muy próximos a él, mantenía la posibilidad de confusión con la aritmética -cosa que no ocurre en los demás escalones de la serie-, y prefirió denominar a los límites de la línea líneas insecables. Se trata en el fondo sólo de una cuestión semántica. Euclides sigue hablando de puntos, pero no los define en términos del pitagorismo antiguo, como μόνας ἔχουσα θέσιν[47], sino como οὗ μέρος οὐδέν, definición que vale igualmente para la línea insecable en el ámbito de la geometría. Por eso no es de extrañar que algunos textos que se refieren inequívocamente a Platón mantengan en la serie de las dimensiones al punto. La precisión terminológica de Platón tiene por objeto desterrar al punto como entidad extensa común a la aritmética y a la geometría. Si el punto no es entendido así, no hay ningún problema en seguir empleándolo en el tratamiento de la extensión.

III. La Serie de las Dimensiones y las entidades dentro de cada dimensión.

La terminología griega es sumamente imprecisa con respecto a la serie dimensional. En los diferentes textos encontramos diversas denominaciones para cada una de las dimensiones. Ya hemos mencionado que Aristóteles habla de μῆκος, πλάτος y βάθος en el *De Anima*, pero la serie más habitual es γραμμή, ἐπίπεδον y σῶμα[48]. Como variante de ἐπίπεδον encontramos también σχῆμα, φιγυρα[49], y como variante de σῶμα, στέρεον, sólido, y también ὄγκος, un término de raigambre pitagórica que significaba en un principio "masa" o "corpúsculo"[50]. Estas denominaciones nos hacen ver que lo que llamamos siguiendo la tradición "serie de las dimensiones" no es tal en realidad. Platón no piensa en la generación de una dimensión como longitud, anchura o profundidad en abstracto, pues concibe las dimensiones en íntima correspondencia con los cuerpos que están situados en ellas[51]. Más propio sería hablar de la generación de la línea en general[52], la figura plana en general, y del cuerpo sólido en general. No se trata tanto de la dimensión en tanto dirección del espacio, como de aquello que tienen en común todas las figuras que se dan en cada una de las dimensiones respectivas. Pero en manera alguna se trata tampoco de que la serie de las dimensiones se identifique con la formación de unas figuras determinadas, que serían primarias con respecto a las demás en cada dimensión. Esa era la manera de ver el asunto en el pitagorismo antiguo, aún comprometido con una visión discontinuísta de la geometría.

Sexto Empírico, en *Adv. Math.* X incrusta, sin embargo, esta explicación, como ilustración de la vinculación entre los números y la serie dimensional, en el contexto de la doctrina platónica. Este interesante texto añade, asímismo, la mención de otra doctrina que explica el tránsito de una dimensión a la otra mediante el expediente de la ῥύσις:

> "Y seguidamente, el punto está dispuesto según la razón de la unidad; pues así como la unidad es algo indivisible, así también lo es el punto, y de la misma manera que la unidad es un cierto principio en los números, así también el punto es cierto principio en las líneas. De tal manera que el punto tendría la razón de la unidad; sin embargo la línea se contemplaría según la especie de la díada; pues la díada y la línea se piensan por transición (κατα μετάβασιν).
> Dicho de otro modo: la línea es la longitud sin anchura pensada entre dos puntos. Por tanto, la línea estará según la díada, el plano según la tríada, pues no sólo se contempla la longitud misma como en la díada, sino que también requeriría una tercera dimensión, la anchura. Colocando tres puntos, dos desde una distancia contraria, y el tercero en la mitad de la línea que se traza entre ambos, de nuevo según otra distancia, se realiza la superficie. La figura sólida y el cuerpo, como lo que tiene forma de pirámide, se disponen según la tétrada. Pues permaneciendo los tres puntos como ya se ha dicho, colocando algún otro punto arriba se realiza la figura piramidal de un cuerpo sólido. Así pues, tiene ya las tres dimensiones, longitud, anchura y profundidad.

> Algunos dicen que el cuerpo es construido por un punto, y que este punto deslizándose realiza la línea, y que la línea al ser movida genera el cuerpo extendido en tres dimensiones".[53]

Alude Sexto a que la vinculación de la unidad con el punto se da por su carácter de principio de las entidades geométricas, en paralelismo con la unidad en la geometría. La Díada da lugar a la línea (el paso a la cual se da κατα μετάβασιν, como en *Leyes* X). La línea estaría además relacionada con el dos no tanto porque alude a dos dimensiones (la longitud, que es su dimensión propia, y la anchura, de la que es principio) como por estar delimitada por dos puntos en sus extremos. La explicación que se proporciona para vincular lo plano con el tres y lo sólido con el cuatro, que una superficie viene definida por tres puntos y un cuerpo por cuatro, y que alude al triángulo como la figura primaria de las planas, así como el tetraedro de las sólidas, puede recordar al *Timeo*, pero, a pesar de la posible confusión de Sexto, es *sólo* una ilustración, no la razón de la vinculación de la serie numérica con la dimensional, porque en el mismo *Timeo* se describe el surgimiento de las figuras concretas después de que se admitan como dadas las dimensiones. La confusión a que podría inducir el texto se debe a que probablemente, hubo antes de la doctrina platónica concepciones pitagóricas que sí vincularon los números (puntos extensos) de la tétrada con la formación de determinadas figuras concretas cuya composición creaba las demás. Platón es, desde luego, heredero de esa tradición, y también las figuras más simples son primeras y elementos de las demás en su concepción, pero al incluir estos desarrollos en su filosofía ya ha separado la formación de las dimensiones de la de los cuerpos. Así como el surgimiento de la línea no es el de una línea concreta (finita o infinita, recta o curva), tampoco el de la figura es el de una figura concreta, ni el de los sólidos el de un sólido concreto. Lo lineal, lo plano o lo sólido son aquello que tienen en común todos las figuras de cada una de las dimensiones respectivas. Y aunque, por ejemplo, todas las figuras planas puedan reducirse a dos tipos básicos de triángulos, el interés de Teeteto en incluir tanto las figuras planas en el círculo como los sólidos regulares en la esfera[54] muestra que hay algo más en la bidimensionalidad y la tridimensionalidad, que permite intentar relacionar todas las figuras que se dan en una dimensión dada, ya sea a partir de líneas curvas, rectas o mixtas, y que consiste en la esencia de lo plano.

Una concepción en términos continuísticos de la geometría está abocada a esta separación entre las dimensiones y cualesquiera figuras básicas. De no ser así, el agregado de las figuras atómicas para componer las demás nos obligaría a admitir un espacio discreto.

Esto vale también para la doctrina de la ῥύσις, que menciona Sexto a continuación, y que se halla muy cercana a la doctrina platónica: también ella entiende en términos de movimiento la doctrina de las dimensiones. Los textos con que contamos acerca de ésta[55] no nos permiten distinguir muy netamente entre esta doctrina y la platónica de la αὔξη de unas dimensiones a otras. Ambas introducen el movimiento como causa de la discontinuidad matemática entre las dimensiones, y al mismo tiempo, de la continuidad de cada dimensión. La doctrina de la ῥύσις, sin embargo, debió de ser más simple y de estar más apegada a la fraseología pitagórica y conceder mayor interés al punto como origen de la serie dimensional. Mientras que, como hemos visto, para Platón se hacía preciso en cada nivel dimensional la participación en géneros diversos (Largo y Corto, Ancho y Estrecho, Profundo y Superficial) que explicitaban las diferentes características de cada dimensión, es posible que el planteamiento del deslizamiento de un punto para generar la línea, y el de una línea para generar un plano, así como el de un plano para generar un sólido, obviara esos aspectos. Importante es, de todos modos, que esta doctrina también se compromete claramente con una concepción continua del espacio y las figuras geométricas que lo conforman, y que los movimientos respectivos del punto, la línea y el plano, que generan lo lineal, lo superficial y lo sólido, no pueden tratarse como la generación de una figura concreta, sino como una explicación de la capacidad de generar figuras en una dirección, ya sea a lo largo, a lo ancho o en profundidad.

En esta doctrina se vuelve aún más manifiesto que no puede existir una identificación entre figuras concretas y cada una de las dimensiones. Cornford, en su *Plato & Parmenides* estableció[56] en su comentario del pasaje de Sexto, que allí se implicaba que el punto fluye en una línea (recta), la línea en un cuadrado, y el cuadrado en un cubo. En ello ha sido seguido por otros intérpretes y es un dato que aparece hoy como seguro en los mejores manuales[57]. Sin embargo, en ningún momento realiza Sexto en este texto mención alguna de que el punto sólo pueda moverse a lo largo de una línea recta uniforme[58], ni de que deban hacerlo de la misma manera la misma línea, el cuadrado o el cubo. Si lo entendemos así, obtendremos una teoría absolutamente incoherente de la formación de lo real. A partir del cuadrado no se pueden generar todas las figuras planas, ni a partir del cubo las sólidas, y lo que es más grave, no pueden formarse siquiera las figuras de los sólidos elementales. El cubo es, precisamente, el peor candidato posible al puesto de sólido elemental. Platón admite en el *Timeo* que los diferentes elementos pueden transformarse unos en otros, a excepción de la tierra, cuya figura corresponde al cubo, y que no puede transformase en ninguno de los otros tres, ni los otros tres en ella[59]. No tenemos mención alguna en ninguno de los doxógrafos antiguos de que haya existido alguna vez un pensador que haya construido el mundo a partir de cuadrados y cubos ínfimos[60]. Habría que pensar entonces en la posibilidad de división del cuadrado para dar lugar al triángulo, y la del cubo para dar lugar a la pirámide. Pero entonces las verdaderas figuras elementales seguirían siendo el triángulo y la pirámide, y, por ende, que la primera generación de una figura plana o un sólido depare una figura derivada, y no una de las figuras elementales, va absolutamente en contra de lo que sabemos de la noción de principio y de génesis ontológica en los pitagóricos antes y después de Platón.

Dos elementos, íntimamente conectados, son esenciales en la doctrina de la ῥύσις: la negación de una geometría basada en la adición de unidades discretas, y la consideración del sólido como aquello que es limitado por un plano, la del plano como lo que es limitado por una línea, y la de línea como aquello que es limitado por un punto. Tanto la noción de continuo como la de límite, coordinada con ella, obligan a pensar el paso de unas dimensiones a otras en términos no aritméticos, y a ampliar el expediente de la adición (que es también un tipo de αὔξη, crecimiento) a través de la consideración del movimiento. El movimiento como tal no se puede cuantificar, pero no ha de olvidarse que no deja de ser un procedimiento matemático: baste con recordar el uso intensivo de proyecciones, aplicaciones, etc., de que hace gala la matemática griega[61]. Por otra parte, cuando Platón en el Timeo busca las figuras geométricas elementales lo hace a través del análisis de las figuras sólidas. La composición y descomposición de las figuras no es incompatible con una representación de la geometría en términos de magnitudes continuas. Lo importante es el tipo de figuras que se añaden, figuras, y no conjuntos de puntos. La doctrina de la fluxión es entonces un modo de entender el *crecimiento* de las figuras, que no se mueve en el terreno de las figuras concretas que se proponen. Las primeras figuras en cada dimensión son siempre las más simples: línea recta, triángulo, tetraedro. Lo que interesa en tiempos de Platón no es tanto determinar unas figuras concretas de cuya composición resulten las demás, como identificar las proporciones que son comunes a todas ellas (i.e., son planas todas aquellas magnitudes entre las que se puede establecer una media geométrica, son sólidas aquellas entre las que se pueden establecer dos). La noción de elemento ha variado, y de ello es prueba el que se presenten en el *Timeo* dos triángulos elementales y no uno como principios de las figuras planas. No es el estar compuestos a partir de un elemento lo que hace que las figuras planas sean una unidad, sino el que guarden una determinada proporción.

Puesto que podemos proyectar una figura sólida en un plano, podemos imaginar ese movimiento a la inversa, y generar el sólido a partir de su proyección plana. Por supuesto, el caso más simple es el de una línea que en proyección ortogonal produce un cuadrado. Pero nada nos dice que ese movimiento ha de ser uniforme, ni que esta sea la única proyección que hemos de usar para generar las figuras, lo cual es sencillamente imposible, porque no pueden obtenerse todas a partir de puntos, líneas, cuadrados y cubos. Es, pues, significativo el hecho de que no se presente nunca en los textos una serie dimensional de figuras concretas junto a la doctrina de la ῥύσις, y que cuando se presentan ejemplos, se aluda a las figuras elementales tradicionales[62].

La vinculación de la doctrina de la fluxión del punto con la serie punto-línea recta-cuadrado-cubo no es, por lo tanto, sino un bonito caso de mito histórico creado y extendido a tenor de la combinación entre el siempre conveniente crédito a los intérpretes y la siempre reprochable falta de atención a las fuentes.

Es muy posible que la doctrina de la ῥύσις pueda en realidad ser una versión académica más que pitagórica del surgimiento de la serie dimensional[63]. Es más, aunque Sexto la contrapone a la que sabemos con certeza que sostuvo Platón, no debemos olvidar que a lo largo de todo el capítulo X de *Adversus Mathematicos* se trata de doctrinas con toda seguridad platónicas atribuyéndolas a los pitagóricos, y que Sexto, al reformular parcialmente su fuente, confunde la visión platónica de la generación de las magnitudes con la más arcaica propia de la aritmología pitagórica. Pero puesto que Sexto niega que esta doctrina empleara los principios platónicos de lo Uno y la Díada para la generación del punto, y dado que no disponemos de ninguna fuente que nos permita identificar ambas, parece más probable la hipótesis de que el autor de la teoría de la fluxión del punto fuera un pitagórico contemporáneo de Platón, como podría muy bien serlo Arquitas, que un platónico. Los motivos que aduce Frank[64], sin embargo, para atribuir esta doctrina a Arquitas se basan en su empleo de medios mecánicos para la resolución del problema del cubo de Delos, lo cual es como mínimo débil. En realidad, los mismos títulos podría tener cualquier pitagórico relevante del siglo IV para hacerse acreedor a ese honor[65]. Pero quizás la mención de Arquitas no sea del todo desafortunada. La música pitagórica entendía los diferentes tonos de la escala musical en términos de movimientos que se encuentran y producen un sonido[66]. La manera de tratar matemáticamente estos movimientos consistía en el establecimiento de proporciones entre los diferentes intervalos musicales, y es el mismo procedimiento el que usa Platón en el *Timeo* para la construcción del Universo y para describir la estructura de las dimensiones[67].

El texto de Sexto coincide con el *De Anima* en vincular la serie de las dimensiones con la serie numérica. Si concedemos que refleja las posturas de Platón, habida cuenta de su independencia de la tradición aristotélica, constituye un refuerzo de la atribución de esta vinculación al pensamiento de Platón.

En conjunto, de los testimonios indirectos acerca de las doctrinas orales de Platón se desprende una concepción de la serie de las dimensiones que convierte a éstas en grados diversos de despliegue de la multiplicidad constitutiva del principio de la Díada a través de la participación en la limitación aportada por lo Uno, y que se traduce en los géneros de lo Corto y lo Largo, lo Ancho y lo Estrecho, y lo Profundo y lo Superficial. Por participación en cada uno de estos géneros se dan, respectivamente, la línea, la figura y el sólido en general, y cada uno de estos géneros está determinado por la presencia de unas relaciones proporcionales que dan unidad a todas la figuras que pueden darse en cada una de las respectivas dimensiones. Con ello conseguía Platón separar la generación de las dimensiones -o, más exactamente, de las figuras en general dentro de cada dimensión- de los procedimientos de composición de las diferentes figuras a partir de la adición de otras más elementales. Procedimientos que, sin embargo, siguen siendo válidos para dar cuenta de la pluralidad de figuras que existen en una dimensión, pero que no constituyen ontológicamente ésta.

Esta concepción, que supone un gran avance al incluir un tratamiento de la realidad como continua en su génesis ontológica, hubo de realizarse a costa de la separación entre aritmética y geometría. Espero haber conseguido probar que han de entenderse como manifestaciones de la dificultad que supuso la superación de la metafísica pitagórica en estos aspectos, tanto la doctrina de las líneas insecables, como los intentos de entender en términos de "movimiento" el corte ontológico entre las distintas dimensiones.

*Universidad de Valencia

NOTAS

1 *Rep.*, 510 c. Trad. de Pabón y Fernández Galiano.

2 Aristóteles, *Metafísica*, 987 b 14 ss.

3 Löbl, *Demokrits Atomphysik*, Ed. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1987, p. 131 ss.

4 *Timeo*, 47 e ss.

5 Aunque hasta el *Epínomis* no se habla de un quinto elemento, puede decirse que éste se halla ya prefigurado en el *Timeo*. Cf.Cornford, *Plato's Cosmology*, Ed. Routledge & Kegan Paul, Londres, 1937, p.221.

6 *Timeo*, 53 c.

7 *Id.*,53 d:τὰς δ᾽ἔτι τούτων ἀρχὰς ἄνωθεν θεὸς οἶδεν καὶ ἀνδρῶν ὅς ἂν ἐκείνῳ φίλος ᾖ.

8 El vínculo más bello es aquél que puede lograr que él mismo y los elementos por él vinculados alcancen el mayor grado posible de unidad. La proporción es la que por naturaleza realiza esto de la manera más perfecta. En efecto, cuando de tres números cualesquiera, sean enteros o cuadrados, el término medio es tal que la relación que tiene el primer extremo con él, la tiene él con el segundo, y a la inversa, la que tiene el segundo extremo con el término medio, la tiene éste con el primero; entonces, puesto que el medio se ha convertido en principio y fin, y el principio y fin, en medio, sucederá necesariamente que así todos son lo mismo, y, al convertirse en idénticos unos a otros, todos serán uno. Si el cuerpo del universo hubiera tenido que ser una superficie sin profundidad, habría bastado con una magnitud media que se uniera a sí misma con los extremos; pero, en realidad, convenía que fuera sólido y los sólidos nunca son conectados por un término medio, sino siempre por dos" (Trad. F. Lisi). Vid. el comentario en Cornford, *Plato's Cosmology*. La necesidad de incluir dos medias proporcionales para armonizar todos los sólidos está relacionada con el famoso problema del cubo de Delos.

9 Por ese motivo, la traducción de χώρα por "space" que emplean Cornford y otros autores ingleses, y también la de "espacio" de F. Lisi en su versión castellana (Ed. Gredos, Madrid, 1992) no dejan de constituir un anacronismo. Es en principio preferible la de Rivaud, "lieu" (Les Belles Lettres, París, 1963).

10 *República*, 528 b: ὀρθῶς δὲ ἔχει ἑξῆς μετὰ δευτέραν αὔξεν τρίτην λαμβάνειν. ἔστι δέ που τοῦτο περὶ τὴν τῶν κύβων αὔξην καὶ τὸ βάθους μετέχον.

11 Nota a la apostilla de Glaucón al texto citado, p. 392 de la ed. de la traducción de la *República* de ambos autores en Alianza, Madrid, 1988.

12 La reconducción del problema de la duplicación del cubo al de encontrar dos medias proporcionales entre dos magnitudes dadas fue llevada a cabo por Hipócrates de Quíos (cf. Ivor Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, ed. Harvard U.P.-W. Heinemann, Londres, 1957, T. I, p. 257 ss). Bajo esta forma enfrentaron el problema todos los grandes matemáticos de la Antigüedad.

13 P. ej. la carta de Eratóstenes a Ptolomeo: "Se dieron, pues, a investigar los geómetras el modo de duplicar un sólido dado, conservando la misma figura, y se llamó a este problema duplicación del cubo, porque en el cubo investigaron el problema de la duplicación" (Eutocio, *Comm. in Arquim. de Sphaera et Cyl.* II, Archim., Ed. Heiberg III 88, 4 ss; en I. Thomas, *op. cit.*, p. 258.

14 *Leyes*, 817 e.

15 *Id.*, 819 d ss.

16 *Político*, 283 c ss.

17 Leyes X, 894 a: γίγνεται δὴ πάντων γένεσις, ἡνίκ᾽ἂν τί πάθος ᾖ δῆλον ὡς ὁπόταν ἀρχὴ λαβοῦσα αὔξην εἰς τὴν δευτέραν ἔλθῃ μετάβασιν καὶ ἀπὸ ταύτης εἰς τὴν πλησίον, καὶ μέχρι τριῶν ἐλθοῦσα αἴσθησιν σχῇ τοῖς αἰσθανομένοις. Texto y trad. de Pabón y Hernández Galiano.

18 La identificación de los diez tipos de movimientos la realizan los diversos intérpretes de modo ligeramente diferente. Para Ritter (a quien sigo en la distribución), se trataba (además del movimiento por sí y por otro), de einfache Kreisbewegung, gradlinig fortschreitende, Verbindung, Trennung, Wachstum, Abnahme, Entstehen, Vergehen (p. 538 de la ed. de Teubner). Para Gaiser, son: Rotation, gleitende Bewegung, rollende Bewegung, Wachstum, Schwund, Zugrundegehen, Entstehen,

Vergeben, Selbsbewegung, Bewegtwerden duch anderes (*Platons ungeschriebene Lehre*, Ed. Ernst Klett, Stuttgart, 1962, p. 176).

19 Esto es, en la capacidad de mover y ser movido, que delimita el ámbito de las realidades físicas. Düring, *Aristoteles*, ed. Carl Winter, Heidelberg, esp. p. 299 ss.

20 Sexto Empírico, *Adv. Math.*, 251 ss.

21 El sentido matemático de ἄυξη es, propiamente, el de multiplicación. Cf. el empleo por Platón de τρὶς αὐξηθεὶς en *República*, 546 c.

22 Arist, *De Anima*, I,2, 404 b 16 ss.

23 Desde la obra de Saffrey, *Le ΠΕΡΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ D'Aristote et la Théorie Platonicienne des Idées Nombres*, Ed. E. J. Brill, Leiden, 1955, pp. 7 ss., existe un cierto acuerdo en que Aristóteles cita aquí, efectivamente, su propio diálogo. Esta es, de todas formas, una cuestión que interesa quizá más a los estudiosos del joven Aristóteles que a los de Platón. Lo que sí es interesante es a quién cita Aristóteles, si a Jenócrates o a Platón. Pero para decidirse sobre ese punto es necesario atender al contenido del texto.

24 Sin embargo, Cherniss (Aristotle's Criticism of Plato and the Academy, p. 565 ss), Vlastos (Gnomon 35, 1963, p. 648), M Isnardi-Parente (ΤΑ ΜΕΤΑ ΤΑΣ ΙΔΕΑΣ; en Graeser, A.(ed., *Mathematics and Methaphysics in Aristotle*, Ed. Paul Haupt, Bern y Stuttgart, p. 265 ss.) entre otros, se inclinan por atribuir estas ideas a Jenócrates. El apoyo fundamental de estos autores es que Temistio, en su comentario al *De Anima*, atribuye la paternidad de estas doctrinas a Jenócrates. Sin embargo, este comentarista no tuvo acceso directo a las obras del discípulo de Platón, y su testimonio vale sólo como interpretación. A favor de la atribución a Platón están la mayoría de los intérpretes, como Stenzel, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, ed. H. Gentner, Darmstadt, 1959, pp. 94 ss.; L. Robin, *La Théorie Platonicienne des Idées et des Nombres d'Après Aristote*, ed. Georg Olms, 1963, p.305 ss., Ross, Teoría de las Ideas de Platón, Ed. Cátedra, Madrid, 1986, p. 247 ss.,Gaiser, "Quellenskritische Probleme der indirekten Platonüberlieferung", en Gadamer,(ed.) *Idee und Zahl*, Ed. Carl Winter, Heidelberg, p. 49 ss; Krämer "Retraktationen zum Problem des esoterischen Platon, Mus. Helv., 21, 1964, etc. Menos seguro es, sin duda, que lo que sigue en el texto a la parte citada, introducido con las palabras ἐτι δὲ καὶ ἄλλως pertenezca también a Platón.

25 Alej. Aphr., *In Arist. Met.*, 55, 20 ss, Hayduck. Cf. Alej. Aphr. apud Simpl. *In Ph.* 454, 20 ss.

26 Este es el esquema que emplea todavía Espeusipo (en Falco, *Theologumena Arithmeticae*, 84, 10 ss.

27 Aristóteles, *Metafísica*, 992 a 10 ss., 1085 a 7 ss., 1089 b 11 ss.; Alejandro, *In Met.*, 117, 22 ss. y 777, 9, 21 Hayduck etc.

28 Met. 992 a 10 ss: "Queriendo reconducir las esencias a los principios constituimos la longitud a partir de los Corto y lo Largo, desde algo Pequeño y Grande, y la superficie a partir de lo Ancho y lo Estrecho, y el cuerpo a partir de lo Profundo y lo Superficial. Sin embargo, ¿Cómo contendrá la superficie a la línea o lo sólido a la línea y a la superficie? pues son géneros diferentes lo Ancho y lo Estrecho y lo Profundo y lo Superficial. Como en efecto tampoco existe el número en éstos, puesto que lo Mucho y lo Poco es diferente de éstos, es claro que ninguno de los que están por encima existirán en los que están por debajo. Pero tampoco es lo Ancho el género de lo Profundo, pues el cuerpo sería entonces una cierta superficie)".

29 *Met*, 1090 b 21 ss: "...hacen las magnitudes a partir de la materia y el número, las longitudes a partir de la díada, y las superficies quizás a partir del tres, y los sólidos a partir del cuatro o bien de los demás números, tanto da. Pero, ¿Estas cosas serán ideas, o cuál será su modo de ser, y qué aportan a los demás seres?", así como 992 b 13 ss: "Y en cuanto a las cosas posteriores a los números, es decir, las longitudes, las superficies y los sólidos, tampoco hay ninguna explicación ni de cómo son o serán ni de qué potencia tienen. Estas cosas, en efecto, ni pueden ser ideas (pues no son números), ni los entes intermedios (pues éstos son matemáticos), ni los corruptibles,

sino que nuevamente aparece éste como cuarto género" . Ross (*op. cit.* p.243) toma este texto excesivamente al pie de la letra. A mi juicio, no se trata de que las entidades geométricas tengan para Platón un *status* específico como un género a añadir a los enunciados en *Metafísica* A 6, sino de una observación crítica de Aristóteles.

[30] Eucl., *Elementos*, L. V, def. IV, debida a Eudoxo. Sobre el particular, P.H. Michel, de Pytagore à Euclide, p.455 ss.

[31] Con alguna excepción: no existe relación posible entre una recta finita y otra infinita, por ejemplo. Cf. Heath, *The Thirtheen Books of Euclid's Elements*, Ed. Dover Publications, N. York, 1956, p. 120.

[32] El mismo tipo de confusión está a la base de las críticas de Aristóteles que aducen el conjunto de los números ideales, que según él Platón limitaba a diez, no basta para cubrir el conjunto de entidades ideales. P. ej., *Metafísica*, 1084 a 12-17: "Pero si efectivamente el número llega hasta la década, como algunos dicen, en primer lugar, pronto faltarán las ideas -por ejemplo, si la tríada es el hombre en sí, ¿Qué número será el caballo en sí? Pues la serie de los números en sí llega hasta la década y es ciertamente necesario que sea alguno de los números de la década (pues éstos son esencias e ideas). Pero del mismo modo faltarán (pues las especies del animal excederán).

[33] Teofrasto, *Metafísica*, 6 a 11 ss.: Platón, efectivamente, al reconducir a los principios parecería tratar de las demás cosas atribuyéndolas a las ideas, y éstas a los números, y a partir de éstos a los principios..."

[34] Arist., *Met.*, 1090 b 5 ss.

[35] Arist., *Met.*, 1018 b 37 ss.: "Todavía, se llaman anteriores las afecciones de los sujetos anteriores; por ejemplo, la rectitud es anterior a la tersura; aquélla, en efecto es afección de la línea en cuanto tal, y ésta, de la superficie. Así pues, unas cosas se llaman anteriores y posteriores así, y otras, según la naturaleza y la sustancia; las últimas son las que pueden existir sin otras, mientras que estas otras no pueden existir sin ellas; esta división la usó Platón".

[36] Arist, *Met.*, 1090 b 5 ss: Hay quienes, porque el punto es límite y extremo de la línea, y la línea, de la superficie, y ésta del sólido, piensan que necesariamente han de existir tales naturalezas". La misma concepción se refleja en Nicómaco, *Intr. Arith.,*, 86, 9: "El punto es en el principio el comienzo de la extensión, pero no extensión, y éste es también principio de la línea, pero no línea. Y la línea es principio de la superficie, pero no extensión, y principio de lo que se extiende en dos dimensiones. Y verosímilmente la superficie es principio del cuerpo, pero no cuerpo, y es ella misma principio de la tercera dimensión pero no algo con tres dimensiones". La noción de límite tiene, por otra parte, un importante papel en la geometría de este tiempo. Baste recordar la definición de σχῆμα en el Menón, ὃ τε τὸ στερεὸν περαίνει (*Menón,* 76 a).

[37] γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές, def. 2.

[38] γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα,def. 3.

[39] Lo que refleja la definición alternativa de línea en Προχλο χομο μέγεθος ἐφὲν διαστατόν. Cf. Heath, *op. cit.*, p. 158, quien subraya el parentesco de esta definición con la aristotélica de μοναχῇ διαιρετόν.

[40] Aristóteles, *Metafísica*, 992 a 20 ss.

[41] Me refiero a la postulación de los átomos. No deseo entrar en la cuestión de si Demócrito se enfrentó ya con el problema de las líneas insecables (ya que se le atribuye una obra con el título περὶ ἄτομων γραμμῶν καὶ ναστῶν), ni tomar partido en el debate sobre si los átomos son o no incompatibles con la divisibilidad geométrica infinita. Sobre el tema, Guthrie, *op. cit.*, t II, pp. 491 ss; Löbl, *op. cit.*, pp. 140 ss.

[42] *De Lin. Insec.*, 968 a 10-15.

[43] Platón, *Parménides*, 156 d-e. Trad. G.R. de Echandía.

[44] Id., 156 e- 157 b.

[45] Euclides, *Elementos*, Libro I, def. 1.

[46] En la pág. 93, 18 de su comentario.

[47] *Metafísica*, 1080 b 19-20.

[48] Sobre las diferentes connotaciones de estos términos, Saffrey, *op.cit.*, p. 15-16.

[49] Cf. las interesantes observaciones acerca del alcance del significado de σχῆμα en A.D. Steele, "Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik", Quellen u. Studien zur Gesch. der Math., Astr. u. Phy., Abt. B, t.3, 1936, p. 329-30.

[50] Sobre el sentido de ὄγκος en relación con *Timeo* 32 b-c, L. Brisson, *Le Même et l'Autre dans la Structure Ontologique du Timée de Platon*, ed. Klincksieck, París, 1974, pp. 369 ss.

[51] En el *Timeo*, (49 e ss.) Platón ha de recurrir a la noción de lugar para definir la χώρα.

[52] El sentido de γραμμή es más el de "segmento" que el de línea recta. Las rectas infinitas son para Euclides un caso particular de γραμμή. Cf. la ya mencionada def. 3 del Libro I de los *Elementos* de Euclides.

[53] Sexto Empírico, *Adv. Math.*, 278-282.

[54] E. Sachs, *Die fünf platonischen Körper*, Ed. Weidmannsche Buchhandlung, Berlín, 1917.

[55] Además de Sexto, Aristóteles, *De Anima*, 409 a 4; Proclo, *op. cit.*, 97, 7; Plotino, *Enéadas*, III, 7,3; Jámblico, *In Nic.*, 57, 8; Simplicio, *In Phys*, 722, 27 ss.

[56] Cornford, *Plato & Parmenides*, Ed. Routledge & Kegan Paul, 1969, pág, 12.

[57] Guthrie, Historia de la Filosofía Griega, t. I, Ed. Gredos, Madrid, 1984, p.253; Kirk y Raven, *Los Filósofos Presocráticos*, Ed. Gredos, Madrid, 1974, p. 357-8,etc.

[58] Para Proclo (*op. cit.*, 103, 21 ss.), Platón admitía dos tipos iniciales (ἁπλούστατα καὶ ἀρχοειδέστατα) de líneas, la curva y la recta, por mezcla de las cuales se formaban las demás. Ambas, naturalmente, habían de formarse por movimiento a partir de un punto, ya que no derivan una de la otra.

[59] *Timeo*, 54 b-c.

[60] A no ser que quiera considerarse como prueba la tardía y confusa mención del "cubo monádico ígneo" de que habla Anatolio en *Sobre los Números hasta el Diez*, 30, citado en Guthrie, *op. cit.*, p. 279. Otra remota posibilidad sería relacionar expedientes de generación de la serie numérica a partir de cuadrados y cubos de números dados (Hipólito, *Philosophumenon*, 2, 19 ss, en Diels, *Doxographi Graeci*, Ed. Walter de Gruyter, Berlin, 1965, p. 556-7) con expedientes cosmogónicos.

[61] Platón expresa en la *República* (527 a) sus reparos contra el empleo de expresiones excesivamente empíricas en la geometría de su tiempo. Sabemos también que criticó el uso de medios mecánicos para solucionar el problema del cubo de Delos (Plutarco, *Vita Marcelli*, 14, 5-6, p. 305 e).

[62] Filópono, *In de An.* 404 b 16-30, p. 77, 30 ss. Hayduck.

[63] Cherniss, *op. cit.*, pp. 396 ss. lo atribuye a Espeusipo.

[64] E. Frank, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Ed. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1962, p. 370. También realiza esta atribución Burkert, Weisheit und Wissenschaft, p. 60-61, y Gaiser, *op. cit.*, p. 355- 6.

[65] Incluso pitagóricos de una generación anterior a Platón, como Filolao. El hecho de encontremos en los fragmentos de Filolao la serie punto-línea- triángulo-tetraedro (Diels-Kranz, 44 A 13) no entraña su compromiso con la arcaica aritmología pitagórica.

[66] Arquitas, Fr. 47 B 1 Diels-Kranz.

[67] La relación de estos aspectos del *Timeo* con la teoría musical pitagórica la desarrolla Frank, *op. cit.*, pp. 161 ss., y 181 ss.