NOTA SOBRE LOS TRABAJOS EN TOPOLOGÍA DE A.I.FLORES

J.M.AROCA*

Presentamos en esta nota unos comentarios a los trabajos (que hemos podido localizar) de A.I. Flores de Lemus en Topología. El Prof. J. de Lorenzo (a quien agradecemos la oportunidad que nos ha proporcionado de conocer la obra de Flores de Lemus) consiguió el primero de ellos por medio de una referencia de Kuratowski [[1]] y posteriormente hemos podido localizar a través de las recensiones del Zentralblatt hasta cuatro, tres de ellos publicados en los Ergebnisse eines mathematischen Kolloquium volumen 5 pp. 17-24 y volumen 6 pp. 2-4 y 4-7 (Leipzig 1933 ,1935) y un cuarto en la Revista Matemática Hispano-Americana (1932).

Acompañamos esta nota de la traducción de dos de esos artículos, primero y tercero de los citados, dedicados al mismo problema: la imposibilidad de sumergir un complejo genérico n-dimensional en un espacio de dimensión 2n. Las razones para seleccionar estos dos artículos son las que siguen:

a) Son los que han alcanzado mayor resonancia constituyendo, desde su publicación hasta nuestros días, cita obligada en todos los textos que tratan de inmersiones topológicas.

b) Permiten apreciar una clara evolución en los conocimientos de Topología de Flores de Lemus, ambos contienen rasgos magníficos de ingenio en las demostraciones, pero el segundo denota un conocimiento muy profundo de los resultados de algunos de sus coetáneos: Van Kampen, Borsuk, Kuratowski, Lefschetz, etc. Este conocimiento permite a Flores, en su segundo artículo, una notable simplificación en técnicas y razonamientos y una mayor generalidad de los resultados. La noción «universal» de complejo absolutamente autoenlazado, establecida en este articulo, es un ejemplo excelente de utilización de una técnica de definición (por medio de una «propiedad universal» es decir no relativa al objeto en sí, sino a su relación con una categoría de objetos) que no tuvo un uso sistemático en Matemáticas hasta la década de los sesenta.

En la traducción de estos artículos hemos respetado completamente el «sabor» de la topològía de la época, sin utilizar ni terminología ni resultados actuales.

El primero y mas antiguo de los artículos de Flores (**Sobre la orientabilidad del espacio proyectivo**) es una demostración elemental de que los espacios proyectivos reales son orientables si y sólo si son de dimensión

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, N° 16-17-18, tomo A, - 511-515

impar. La demostración es una modificación de otras conocidas y no aporta nada esencialmente nuevo (esta es también la opinión del recensor del artículo para el Zentralblatt que se limita a dar noticia del título y lugar de publicación).

De los artículos traducidos hablaremos con detalle mas adelante. El restante artículo de los Ergebnisse (**Über stetige Selbstabbildungen der S_n**) esta dedicado en parte a resultados anunciados en el primero y su contenido consiste esencialmente en variaciones sobre el hoy llamado Teorema de Borsuk-Ulam [2]. Dichos resultados van a ser utilizados por Flores en su siguiente articulo de los Ergebnisse, y muestran los contactos existentes entre Flores y Borsuk (Véase [2] p.178). Este articulo contiene tres Teoremas (Véase [3]):

$\mathbf{I}_n$: Para toda aplicación continua de la esfera S_n en $\mathbb{R}_n$ existe en S_n al menos un par de puntos con la misma imagen

$\mathbf{II}_n$:Toda aplicación continua de S_n en si mismo que transforma puntos diametralmente opuestos en puntos diamentralmente opuestos es esencial (Para definición y propiedades de estas aplicaciones véase por ejemplo [4])

$\mathbf{III}_n$: Toda aplicación continua de S_n en si mismo que transforma puntos diametralmente opuestos en puntos distintos, es esencial.

El proceso de demostración de Flores, radicalmente distinto al seguido en la demostración de Borsuk (los dos primeros teoremas están ya demostrados en el trabajo original de Borsuk [2] y el primero de ellos según señala el propio Flores fue conjeturado previamente por Ulam) se basa en probar las implicaciones:

$$\mathbf{I}_{n+1} \Rightarrow \mathbf{II}_n \Rightarrow \mathbf{III}_n \Rightarrow \mathbf{I}_{n+1}$$

(de las cuales la tercera es trivial) para demostrar así la equivalencia de los tres resultados, en la prueba juega un papel esencial la técnica para el calculo del grado desarrollada por Flores en su primer articulo de los Ergebnisse .

Pasamos a continuación a hacer un comentario mas extenso de los métodos y resultados de los dos artículos a cuya traducción acompañan estas notas:

Se puede probar fácilmente [1] que un complejo n-dimensional admite una realización topológica en un espacio euclídeo de dimensión 2n+1, sin embargo, aún hoy, continua siendo un problema abierto el de caracterizar las dimensiones de los complejos realizables topológicamente en un espacio dado de dimensión arbitraria n. Como se observa en [5] «Entre los diversos resultados en esta línea el mas destacable es sin duda el de van Kampen y Flores, que fueron los primeros en probar la existencia de complejos n-dimensionales no realizables topológicamente en un espacio de dimensión 2n.»

Desde el punto de vista actual hay tres métodos para resolver el problema: el primero basado en los trabajos de Alexander [6],[7], que consigue, para cada complejo C sumergido en $\mathbb{R}_n$, relacionar propiedades topológicas de $\mathbb{R}^n$ - C y de C (dualidad de Alexander), así en términos de los numeros de Betti y de torsión de C se pueden dar condiciones necesarias para su realización en un espacio de dimensión arbitraria.

El segundo, establecido muy posteriormente por Whitney [8], consiste en analizar las relaciones entre C y un entorno tubular suyo en el espacio ambiente. Este método da lugar a las clases de Stiefel-Whitney, generalizadas posteriormente por Pontrjaguin, que juegan un papel esencial en la Topología Diferencial de nuestros días.

El método de van Kampen [9] y Flores consiste en forzar una realización de un complejo n-dimensional C en un espacio de dimensión 2n. Para ello se comienza aplicando C sobre el espacio de modo «casi inyectivo», es decir de modo que los puntos de la imagen con más de un original sean aislados y estén en el borde de símplices de dimensión máxima. Se presentan entonces «singularidades» es decir puntos de autointersección del complejo, y se trata de obtener de ellas invariantes independientes de la realización, para determinar cuando pueden ser suprimidas por deformación. Esbozaremos la construcción del invariante debido a van Kampen [10], con objeto de que pueda ser comparada con la construcción de Flores. En ella no usaremos la inmersion en el espacio afín real, traslación de vectores al origen etc. utilizados en la época para evitar manejar el concepto (muy posterior) de $\mathbb{Z}$-modulo libre generado por un conjunto. Dicha construcción es el siguiente:

Sea C un complejo n-dimensional, representemos por S^k_j a los k-símplices de C y llamemos $\mathbb{L}$ al $\mathbb{Z}$-modulo libre generado por los conjuntos $\{i,j\}$ correspondientes a símplices separados (de cierres disjuntos) S^n_i y S^n_j. Entonces a cada par S^{n-1}_l, S^n_t se le puede asociar el vector de $\mathbb{L}$, $v_{l,t}$ que tiene como coeficiente de $\{i,j\}$ el 0 si: ambos índices son distintos de l, o si uno de ellos coincide con l y el símplice correspondiente al otro no es una cara de S^{n-1}_l. En el caso restante el coeficiente es +1 ó -1 según las orientaciones de los símplices concuerden ó no.Estos vectores generan un submódulo de $\mathbb{L}$, $\mathbb{H}$ y podemos formar el módulo cociente $\mathbb{L}/\mathbb{H}$. Si tomamos ahora una «casi-realización» de C en $\mathbb{R}_{2n}$ (es decir tomamos una subdivisión de C y la aplicamos sobre $\mathbb{R}_{2n}$ de modo que las posibles singularidades se limiten a puntos aislados intersección de imágenes de símplices de dimensión n) cada par de n-símplices tiene un numero de intersección, y, tomando este como coeficiente del par de índices correspondiente se obtiene un elemento de $\mathbb{L}/\mathbb{H}$ que Van Kampen demuestra es independiente de la realización. Además demuestra que la anulación de este elemento es condición necesaria y suficiente para la realizabilidad del complejo en dimensión 2n. (lamentablemente la demostración de que la condición es suficiente no es correcta, Shapiro [10] da la primera demostración completa del resultado). Como se observa el invariante de van Kampen es una clase de cohomologia entera del cuadrado reducido del complejo C.

El método de trabajo de Flores es distinto, como el mismo indica en su comentario de la recensión de Aleksandrov a su primer trabajo en una nota a pie de página del segundo. Para empezar, su construcción, al contrario de la de van Kampen, depende de la inmersion previa del complejo en $\mathbb{R}_{2n+1}$ (aunque Flores cree lo contrario) pero en cambio,como hace observar W.W. Tsun [6],Flores define una clase cohomologia de dimensión máxima de la esfera, que es un invariante de isotopía de la realización del complejo lo que le confiere excepcional importancia. Van Kampen se mueve por tanto «salvo homeomorfismos» mientras que Flores lo hace «salvo homotopía».

Como aplicación, Flores describe dos familias de complejos n-dimensionales, que no admiten una realización en dimensión 2n, la primera generaliza la configuración tetraédrica de Menger y fue descrita previamente por van Kampen, pero la segunda es especialmente interesante por su sencillez. La idea de esta construcción de Flores se comprende fácilmente a partir del complejo K_1, consistente en todos los segmentos que unen dos a dos de todas las maneras posibles 5 puntos en posición general de $\mathbb{R}_3$. Es claro que este complejo no puede realizarse topológicamente en $\mathbb{R}_2$, ya que los tres primeros puntos describen un triángulo y, por el teorema de la curva de Jordan, los dos restantes deben estar simultáneamente dentro o fuera de dicho triángulo (no puede haber intersecciones de símplices) entonces uno de ellos determina tres triángulos y el restante debe quedar forzosamente separado de uno de los otro cuatro puntos por el borde de uno de los triángulos.*

Observemos para terminar que la noción de absolutamente autoenlazado sirve también a Flores para probar el teorema de invariancia de la dimensión y posteriormente varios autores la han utilizado para estudiar realizaciones topológicas de complejos en esferas —la nota final de Flores hace suponer que conocía resultados en esa dirección— desarrollando una versión «cuantitativa» de la teoría de Adkisson-Mc.Lane [11].

*Departamento de Algebra, Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

* . Nota editorial: Omitimos por razones de impresión una figura ilustrativa al respecto.

BIBLIOGRAFÍA

1. Kuratowski K. Topology. Vol.2 Academic Press New York 1968 (segunda edición americana traducida de la edición polaca de 1961).

2. Borsuk K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. Fundam. Math. 20 pp.177-190 (1933).

3. Aleksandrov P.S. Recensiones de los artículos de A.I.Flores. Math. Zentralblatt. (1933) p. 368 (1935) p. 38.

4. Aleksandrov P.S. Combinatorial Topology. Vol. 1. Graylock Press Rochester N.Y. 1956.

5. Wu Wen Tsun. On the realization of Complexes in euclidean Spaces. I,II . A.M.S.Translations, Ser. 2, Vol 78,(1968) pp.137-184,185-208 (traducción de artículos publicados en Acta Matemática Sinica en 1958, también recopilados en el libro que sigue)

A Theory of Imbedding, Inmersion, and Isotopy of Polytopes in a euclidean Space. Science Press Peking 1965.

6. Alexander J.W., Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928) pp. 275-306.

7. The combinatorial theory of complexes. Ann. of Math. 31 (1930) pp. 294-322.

8. Whitney H., The selfintersections of a smooth n-manifold in 2n space. Ann. of Math. 45 (1944) pp.220-246.

9. Van Kampen E.R. Komplexe in euklidische Räumen. Abh.Math.Sem.Hamb. 9 (1932) pp. 72-78. Corrección de errores ibid.pp. 152-153.

10. Shapiro A. Obstruction to the imbedding of a Complex in a euclidean Space. Ann of Math. 66 (1957), pp.256-269.

11. S.Mc.Lane, V.W.Adkisson. Extensions of homeomorphisms on the Sphere. Lectures in Topology, Univ. Michigan Press, 1941 pp.223-236.