SOBRE LA EXISTENCIA DE COMPLEJOS N-DIMENSIONALES, QUE NO SON REALIZABLES TOPOLÓGICAMENTE EN R_{2n}[1]

A.I.FLORES

El teorema de inmersión de Menger-Nobeling, establece que todo espacio métrico separable n-dimensional es homeomorfo a una parte del espacio Cartesiano (2n+1)-dimensional $\mathbf{R}_{2n+1}$. Menger[2] ha planteado la pregunta de si es posible disminuir la cota 2n+1. Para n = 1, la pregunta tiene evidentemente una respuesta afirmativa, ya que existen curvas que no son topológicamente sumergibles en el plano (véase por ejemplo la configuración tetraédrica[3] de Menger). Sin embargo hasta el momento no se conoce la respuesta a esta pregunta en el caso n = 2 [4]. En lo que sigue daremos una respuesta positiva al problema de Menger, probando que: *Para todo n existe un conjunto n-dimensional (incluso un complejo) que no es homeomorfo a ninguna parte de R_{2n}.*

1.- Una parte **A** del espacio **R** se llama *autoenlazada en **R***, si no existe ninguna familia continua de aplicaciones continuas $\{f_t, 0 \leq t \leq 1\}$ de **A** sobre partes $f_t(\mathbf{A})$ de **R** de modo que f_0 sea la identidad, $f_t(\mathbf{A})$ sea disjunto de **A** para todo $t \neq 0$ y $f_1(\mathbf{A})$ se reduzca a un punto. Se verifica que: *Una parte A de un Hiperplano de R_k no es nunca autoenlazada en R_k.* En efecto, sea $x_k = 0$ la ecuación del hiperplano considerado, llamemos **p** a un punto del hiperplano $x_k = 1$ y para $0 \leq t \leq 1$ sea $f_t(\mathbf{A})$ la proyección de **A** desde **p** sobre el hiperplano $x_k = t$, así se tiene una familia continua de imágenes continuas de **A** que no existiría si **A** fuese autoenlazado.

2.- El espacio **A** se dice *absolutamente autoenlazado en el espacio **R*** si toda parte de **R** homeomorfa con **A** es autoenlazada en **R**. De **1** se sigue

[1]. Traducción del artículo : "Über die Existenz n-dimensionaler Komplexe , die nicht in den R_{2n} topologisch einbettbar sind" publicado en Erg. Math. Kolloqu. 5 (1933) s.17-24,. (Traducido por J.M.Aroca).

[2]. V. Dimensionstheorie, 1928.V. Erg.Math.Kolloqu. 1 pp. 3.

[3]. V. Erg. Math. Kolloqu.2 pp.30.

[4]. Menger (loc.cit.) se pregunta si el producto de dos configuraciones tetraédricas es topologicamente sumergible en R_4.

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, Nº 16-17-18, tomo A, - 517-523

inmediatamente que: *Un espacio A absolutamente autoenlazado en R_k no es nunca homeomorfo a una parte de R_{k-1}.*

3.- Sea **A** un complejo, esto es, suma de un número finito de símplices, tales que cada dos tienen como intersección un símplice de su borde (el conjunto vacío se considera un símplice de dimensión -1), llamaremos *cuadrado reducido de A* al conjunto **B** de todos los pares ordenados compuestos por puntos del complejo **A** pertenecientes a símplices disjuntos en el mismo (en particular, si $\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ pertenece a **B**, $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son distintos). **B** es también un subcomplejo del cuadrado de **A**.

4.- Sea φ(A) una realización topológica[5] del complejo A en $\mathbf{R}_k$, entonces podemos definir una aplicación con dominio en el cuadrado reducido **B** de A mediante el siguiente proceso: llevamos cada punto $\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ de **B** sobre el vector $\mathbf{v}_b$ que tiene como origen $\varphi(\mathbf{a}_1)$ y como extremo $\varphi(\mathbf{a}_2)$ (como $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son distintos, $\varphi(\mathbf{a}_1)$ y $\varphi(\mathbf{a}_2)$ lo son también, y $\mathbf{v}_b$ no es el vector cero para ningún punto **b** de **B**) trasladamos $\mathbf{v}_b$ al origen de $\mathbf{R}_k$ y llamamos $\bar{\varphi}(\mathbf{b})$ al punto intersección de la semirrecta determinada por $\mathbf{v}_b$ con la esfera unidad $\mathbf{S}_{k-1}$ de $\mathbf{R}_k$. De esta manera construimos una aplicación $\bar{\varphi}$ evidentemente continua de **B** sobre una parte de $\mathbf{S}_{k-1}$, que recibe el nombre de *aplicación asociada a φ sobre el cuadrado reducido B de A.*

5.- Hipótesis: 1. *El complemento de $\varphi(A)$ en R_k es conexo por arcos* (lo cual sucede por ejemplo si **A** es un complejo de dimensión a lo mas k-2). 2. *El cuadrado reducido B de A es un ciclo mod.2.* Tesis: Si φ(A) no es autoenlazado entonces el grado mod.2 de la aplicación asociada a φ es 1.
Demostración: Puesto que φ(A) no es autoenlazada en $\mathbf{R}_k$, existe una familia continua de aplicaciones continuas $\{f_t,\ 0 \leq t \leq 1\}$ de modo que $f_0(A) = \varphi(A)$, $f_t(A)$ es disjunto de **A** para todo $t \neq 0$ y $f_1(A)$ se reduce a un punto $\mathbf{p}_1$. $f_0(A)$ esta acotado, por ser imagen continua de un complejo, por tanto está contenido en una bola **S** de $\mathbf{R}_k$. Sea $\mathbf{p}_2$ un punto exterior a **S**, puesto que $\mathbf{R}_k$ - $f_0(A)$ es conexo por arcos, existe un arco **C** que une $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ y es disjunto con $f_0(A)$.Podemos suponer **C** parametrizado por $1 \leq t \leq 2$, de modo que a 1 corresponde $\mathbf{p}_1$ y a cada valor t el punto $\mathbf{p}_t$ de **C**. Sea ahora f_t, para cada t, $1 \leq t \leq 2$, la aplicación continua que lleva **A** al punto $\mathbf{p}_t$. Así hemos construido una familia continua de aplicaciones continuas $\{f_t,\ 0 \leq t \leq 2\}$ con las siguientes propiedades: $f_0(A) = \varphi(A)$, $f_t(A)$ es disjunto con $\varphi(A)$ para todo $t \neq 0$, y, $f_2(A)$ es un punto $\mathbf{p}_2$ exterior a la bola **S** que contiene a φ(A). Definimos ahora para cada t, con $0 \leq t \leq 2$ una aplicación $\bar{f}_t$ de **B** sobre una

---

[5]. Usaremos los terminos actuales realización topologica ,realización simplicial en lugar de la traducción literal aplicación topologica o simplicial (n.del t.).

parte de $\mathbf{S}_{k-1}$, asociando a cada punto $\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ de $\mathbf{B}$ el vector que une $f_0(\mathbf{a}_1)$ con $f_t(\mathbf{a}_2)$ (este vector,que coincide con $\mathbf{v}_B$ si $t = 0$, es distinto de cero por ser disjuntos $f_0(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A})$ y $f_t(\mathbf{A})$), y llamando $\bar{f}_t(\mathbf{b})$ a la intersección de $\mathbf{S}_{k-1}$ con la semirrecta que define dicho vector una vez trasladado al origen de coordenadas. Obviamente $\bar{f}_0$ es la aplicación asociada a f_0 y las $\{\bar{f}_t, 0 \leq t \leq 2\}$ forman una familia continua de aplicaciones continuas del ciclo B (Hipótesis 2) sobre subconjuntos de $\mathbf{S}_{k-1}$, todas tienen entonces el mismo grado mod.2 que la aplicación $\bar{f}_0$ asociada a φ, y en particular esto sucede con $\bar{f}_2$, pero el grado mod.2 de esta aplicación es 0, pues para ningún punto $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$ el punto de $\mathbf{S}_{k-1}$ diametralmente opuesto a $\bar{f}_2(\mathbf{b})$ puede ser imagen por $\bar{f}_2$ de algún punto de $\mathbf{B}$, ya que, en caso contrario, habría vectores de direcciones opuestas uniendo puntos de $f_0(\mathbf{A})$ con $\mathbf{p}_2$ lo cual es imposible al estar $f_0(\mathbf{A})$ contenido en la bola $\mathbf{S}$ y ser $\mathbf{p}_2$ exterior a dicha bola.

6.- Sea $\mathbf{T}$ un subconjunto de $\mathbf{R}_{2n+1}$ compuesto por $3n+3$ puntos con la propiedad de que cada dos símplices de dimensión a lo mas n con sus vértices en $\mathbf{T}$ y sin ningún vértice común sean disjuntos. Escribimos $\mathbf{T}$ como unión disjunta de $n+1$ ternas de puntos $\mathbf{T}_i=\{1_i,2_i,3_i\}$ $(i=0,1,2. \dots n)$ y llamamos[6] $\mathbf{M}_n$ a la suma de todos los n-símplices que tienen un vértice común con cada uno de los $n+1$ $\mathbf{T}_i$. Cada uno de estos símplices puede representarse entonces en la forma $[j_0,j_1. \dots j_n]$ donde j es uno de los tres números 1,2,3. Así $\mathbf{M}_0$ es la terna de puntos $\{[1_0],[2_0],[3_0]\}$ y $\mathbf{M}_1$ es homeomorfo a la configuración tetraédrica de Menger. Afirmamos que: ***M_n no es homeomorfo a ninguna parte de R_{2n}***. Para probar esta afirmación, y teniendo en cuenta **2** y **5**, basta probar que: 1.El cuadrado reducido $\mathbf{A}_{2n}$ de $\mathbf{M}_n$ es un ciclo mod.2, y 2. Para cada realización topológica φ de $\mathbf{M}_n$ en $\mathbf{R}_{2n+1}$ la aplicación asociada $\bar{\varphi}$ de $\mathbf{A}_{2n}$ en $\mathbf{S}_{2n}$ tiene grado mod.2 igual a 1. En lo que sigue probaremos estas afirmaciones.

7.- El hecho de que $\mathbf{A}_{2n}$ es un ciclo mod.2, se sigue de que cada célula (2n-1)-dimensional del borde de $\underline{\mathbf{A}}_{2n}$ pertenece a dos y solo dos células adyacentes 2n-dimensionales: Por ejemplo en la celula $([i_1,i_2,\dots i_n],[j_0,j_1,\dots j_n])$ se cortan exactamente las células $([i_0,i_1,\dots i_n],[j_0,j_1,\dots j_n])$ en las que i_0 toma los dos valores distintos de j_0 en la terna $\mathbf{T}_0$.

8.- <u>Teorema auxiliar:</u> <u>Hipótesis</u>: *Sea $I = [i_0,i_1,\dots i_n]$ un símplice de M_n, sean φ y ψ dos realizaciones topológicas de una subdivisión simplicial de M_n*

---

[6]. Durante la elaboración del presente trabajo encontré que van Kampen (Abh. Hamb. Math. Sem. **9** pp.32) había definido el complejo $\mathbf{M}_n$ probando que no puede realizarse simplicialmente en $\mathbf{R}_{2n}$ y además consigue demostrar la hipótesis de Menger (loc.cit.) de que el cuadrado de la configuración tetraédrica no es realizable en $\mathbf{R}_4$.

en R_{2n+1} idénticas sobre M_n - I y que llevan el interior de I sobre conjuntos disjuntos de R_{2n+1}. Tesis: *Los grados mod.2 de las aplicaciones asociadas $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ coinciden.*

Demostración: Sea **M** un subconjunto de un espacio euclídeo homeomorfo a S_k (siendo la dimensión del espacio mayor o igual que k+2). Si unimos todos los puntos **m** de **M** con dos puntos fijos **p** y **q** genéricos respecto de **M** mediante segmentos **mp**, **mq**, y elegimos estos puntos de modo que **mp** y **mq** tengan solo en común el punto **m** y que para cada par de puntos distintos **m**, **h** de **M** los arcos **mp** + **mq** y **hp** + **hq** se corten únicamente en **p** y **q**, entonces la suma de todos estos segmentos es homeomorfa a S_{k+1} . De aquí se sigue del mismo modo, por inducción sobre n, que la suma de todos los símplices de $\mathbf{M_n}$, $[j_0, j_1, \ldots j_n]$, disjuntos de **I** es homeomorfa a S_n. Esta suma contiene obviamente a todos los productos de símplices disjuntos de $\mathbf{M_n}$ uno de cuyos factores coincide con **I** (esto es los productos del tipo **I** × **S** ó **S** × **I**). Designemos con α la diferencia entre los grados mod.2 de $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ como aplicaciones de $\mathbf{A_{2n}}$ en $\mathbf{S_{2n}}$ y para un punto **p** de $\mathbf{S_{2n}}$, que no esté ni en la imagen por $\bar{\varphi}$ ni en la imagen por $\bar{\psi}$ del borde de **I** × **S** + **S** × **I**, por $\alpha_{\bar{\varphi}(I \times S)}$, $\alpha_{\bar{\varphi}(S \times I)}$, $\alpha_{\bar{\psi}(I \times S)}$ y $\alpha_{\bar{\psi}(S \times I)}$ respectivamente a los grados mod.2 en **p** de las restricciones de $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ a **I** × **S** y **S** × **I**. Se verifica, teniendo en cuenta la hipótesis de que $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ coinciden fuera de **I** × **S** + **S** × **I**, que:

$$\alpha \equiv \alpha_{\bar{\varphi}(I \times S)} + \alpha_{\bar{\varphi}(S \times I)} + \alpha_{\bar{\psi}(I \times S)} + \alpha_{\bar{\psi}(S \times I)} \ (\text{mod.}2)$$

Designemos ahora respectivamente con Φ y Ψ a las imágenes por φ y ψ de **I.** Entonces las aplicaciones inversas φ^{-1} y ψ^{-1} generan aplicaciones simpliciales:

$$\mathbf{\Phi \times S \to I \times S, \ \Psi \times S \to I \times S, \ S \times \Phi \to S \times I, \ S \times \Psi \to S \times I}$$

Hagamos actuar ahora $\bar{\varphi}$ a continuación de las aplicaciones primera y tercera y $\bar{\psi}$ tras de las aplicaciones segunda y cuarta, tenemos así cuatro aplicaciones[7]: δ, definida sobre $\mathbf{\Phi} \times \mathbf{S}$, δ, definida sobre $\mathbf{\Psi} \times \mathbf{S}$, σ, definida sobre $\mathbf{S} \times \mathbf{\Phi}$ y σ, definida sobre $\mathbf{S} \times \mathbf{\Psi}$, con valores todas ellas en $\mathbf{S_{2n}}$, y, con las notaciones anteriores se tiene:

$$\alpha_{\bar{\varphi}(I \times S)} = \alpha_{\delta(\Phi \times S)}, \ \alpha_{\bar{\psi}(S \times I)} = \alpha_{\sigma(S \times \Phi)}, \ \alpha_{\bar{\psi}(I \times S)} = \alpha_{\delta(\Psi \times S)}$$

$$\alpha_{\bar{\psi}(S \times I)} = \alpha_{\sigma(S \times \Psi)}$$

y por tanto se verifica que:

---

[7]. La razón de utilizar la misma letra para designar a cada dos de estas aplicaciones es que sus dominios coinciden solamente en puntos del borde, y sobre éstos las dos aplicaciones coinciden.

$$\alpha = \alpha_{\delta(\Phi \times S)} + \alpha_{\sigma(S \times \Phi)} + \alpha_{\delta(\Psi \times S)} + \alpha_{\sigma(S \times \Psi)} \ (\text{mod}.2)$$

Ahora bien, $\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi} = \mathbf{Z}$ es un ciclo (una esfera topológica) y las aplicaciones $\delta,\delta,\sigma,\sigma$ se pegan para dar lugar a dos aplicaciones Δ y Σ sobre $\mathbf{Z} \times \mathbf{S}$ y $\mathbf{S} \times \mathbf{Z}$ para las cuales:

$$\alpha_{\Delta(Z \times S)} = \alpha_{\delta(\Phi \times S)} + \alpha_{\sigma(\Psi \times S)},\ \alpha_{\Sigma(S \times \Psi)} = \alpha_{\delta^*(S \times \Phi)} + \alpha_{\sigma^*(S \times \Psi)}$$

$$\alpha = \alpha_{\Delta(Z \times S)} + \alpha_{\Sigma(S \times Z)} \ (\text{mod}.2)$$

Por definición de aplicación asociada sobre el cuadrado reducido, las imágenes por $\bar{\varphi}$ de $\mathbf{I} \times \mathbf{S}$ y $\mathbf{S} \times \mathbf{I}$ son simétricas, es decir, para cada punto **(i,s)** de $\mathbf{I} \times \mathbf{S}$ $\bar{\varphi}$**(i,s)** y $\bar{\varphi}$**(s,i)** son diametralmente opuestos, y lo mismo sucede con $\bar{\psi}$. Se sigue entonces que $\Delta(\mathbf{Z} \times \mathbf{S})$ y $\Sigma(\mathbf{S} \times \mathbf{Z})$ son también simétricos y por tanto sus grados son iguales, en consecuencia α es cero modulo 2.

9.- Sea φ una realización topológica de $\mathbf{M_n}$ en $\mathbf{R_{2n+1}}$, las imágenes de dos símplices disjuntos de $\mathbf{M_n}$ están a distancia positiva, entonces existe una cota inferior positiva para los módulos de los vectores que aparecen en la definición de la aplicación asociada a φ sobre el cuadrado reducido de $\mathbf{M_n}$, además pequeñas deformaciones de φ producen pequeñas modificaciones en las direcciones de estos vectores, y por tanto por una pequeña deformación de esta aplicación no puede producirse la substitución de un vector por su opuesto y en consecuencia no se altera el grado de la aplicación asociada. Entonces, puesto que $\mathbf{M_n}$ es un complejo n-dimensional y toda realización topológica de $\mathbf{M_n}$ se puede transformar por una pequeña deformación en una realización simplicial, para demostrar que $\bar{\varphi}$ tiene grado 1 modulo 2, se puede suponer sin perdida de generalidad que φ es una realización simplicial.

10.- Sean ahora φ_1 y φ_2 dos realizaciones simpliciales de $\mathbf{M_n}$ en $\mathbf{R_{2n+1}}$, entonces se puede deformar $\varphi_2(\mathbf{M_n})$de modo que la realización topológica resultante φ' coincida en los símplices del borde $[\mathbf{i_0},\mathbf{i_1},..\mathbf{i_{k-1}},\mathbf{i_{k+1}},..\mathbf{i_n}]$ de $\mathbf{M_n}$ con φ_1, y que el paso de φ_2 a φ'sea simplicial a trozos y sin singularidades, para que al mismo tiempo no cambie el grado de las aplicaciones asociadas, entonces $\bar{\varphi}_1$ y $\bar{\varphi}_2$ tienen el mismo grado mod.2. Por tanto para probar que para toda realización topológica de $\mathbf{M_n}$ en $\mathbf{R_{2n+1}}$ el grado mod.2 de su aplicación asociada es 1, basta probar que existe una realización simplicial con esta propiedad.

11.- Este resultado se prueba por inducción completa. Se comprueba fácilmente que para toda aplicación inyectiva del conjunto de tres puntos $\mathbf{M_0}$ en el espacio $\mathbf{R_1}$ el grado mod.2 de la aplicación asociada es 1. Hacemos ahora la hipótesis de inducción de que φ_0 es una realización simplicial del complejo $\mathbf{M_{n-1}}$

en el espacio $\mathbf{R}_{2n-1}$ cuya aplicación asociada $\bar{\varphi}_0$ tiene grado 1 mod.2. Consideremos $\mathbf{R}_{2n-1}$ como subespacio de $\mathbf{R}_{2n+1}$ definido por las ecuaciones $x_{2n} = x_{2n+1} = 0$, de la hipótesis de inducción se sigue que existe un punto **S** de la esfera unidad de $\mathbf{R}_{2n-1}$ imagen por $\bar{\varphi}_0$ de un número impar de puntos $(\mathbf{p}^*_1,\mathbf{q}^*_1),\ldots,(\mathbf{p}^*_{2k+1},\mathbf{q}^*_{2k+1})$ del cuadrado reducido $\mathbf{A}_{2n-2}$ del complejo $\mathbf{M}_{n-1}$ y precisamente de puntos que no están en las células del borde, y cuyas componentes pertenecen por tanto al interior de símplices disjuntos (n-1)-dimensionales de $\mathbf{M}_{n-1}$. Además por definición de la aplicación asociada, estos puntos son exactamente los únicos pares de puntos **(p,q)** de $\mathbf{M}_{n-1}$ tales que el segmento (orientado) que une $\bar{\varphi}_0(\mathbf{p})$ con $\bar{\varphi}_0(\mathbf{q})$ es paralelo a la semirrecta **G** que une el origen de coordenadas con **S** y tiene la misma dirección que dicha semirrecta. Entonces se hace lo siguiente: Se desplaza el complejo $\bar{\varphi}_0(\mathbf{M}_{n-1})$ paralelamente a si mismo en las dos direcciones definidas por la semirrecta G tomándose en cada una de ellas 2k+1 copias de este complejo, precisamente sobre los puntos $\bar{\varphi}_0(\mathbf{p}_i^*)$ y $\bar{\varphi}_0(\mathbf{q}^*_i)$. Se llama $\varphi^*_{1/2}(\mathbf{M}_{n-1})$ y $\varphi^*_{-1/2}(\mathbf{M}_{n-1})$a dos de estas copias que esten separadas por un hiperplano, al que llamamos **H**, de $\mathbf{R}_{2n-1}$, y para cada punto **p** de $\mathbf{M}_{n-1}$ y cada t con $0\leq t \leq 1/2$ llamamos $\varphi^*_t(\mathbf{p})$ (resp. $\varphi^*_{-t}(\mathbf{p})$) al punto que divide al segmento de extremos $\varphi_0(\mathbf{p})$, $\varphi^*_{1/2}(\mathbf{p})$ (resp.$\varphi_0(\mathbf{p})$, $\varphi^*_{-1/2}(\mathbf{p})$) en la razón t: 1/2 - t. Entonces la ecuación $\varphi^*_t(\mathbf{p}) = \varphi^*_{-t}(\mathbf{q})$ tiene exactamente 2k+1 soluciones en t,**p**,**q** (en las cuales **p**,**q** son precisamente los puntos $\mathbf{p}^*_i$, $\mathbf{q}^*_i$. Ahora se demuestra fácilmente la existencia de un $\epsilon > 0$ con la propiedad siguiente: Designemos con $\varphi_{1/2}(\mathbf{M}_{n-1})$ y $\varphi_{-1/2}(\mathbf{M}_{n-1})$ dos complejos definidos a partir de $\varphi^*_{1/2}(\mathbf{M}_{n-1})$ y $\varphi^*_{-1/2}(\mathbf{M}_{n-1})$ por desplazamiento de los vértices una distancia menor que ϵ y definamos la aplicación topológica simplicial φ_t de modo análogo a como definimos φ^*_t para que la ecuación $\varphi_t(\mathbf{p}) = \varphi_{-t}(\mathbf{q})$ tenga exactamente 2k+1 soluciones, tras este desplazamiento con $0 < t < 1/2$, $\{t_i,\mathbf{p}_i,\mathbf{q}_i\}$ (i = 1, 2, ..., 2k+1). Los complejos que hemos obtenido están, respecto de H, en la misma posición de los anteriores (siempre si ϵ es suficientemente pequeño). Ciertamente los puntos,$\mathbf{p}_i$,$\mathbf{q}_i$ son, caso de que ϵ sea suficientemente pequeño, tan próximos como se quiera a los puntos $\mathbf{p}^*_i$,$\mathbf{q}^*_i$, por tanto pueden tomarse también como pertenecientes al interior de símplices (n-1)-dimensionales disjuntos de $\mathbf{M}_{n-1}$.

Tomamos ahora dos puntos **P** y **Q** sobre la recta soporte de **G** situados a lados distintos del hiperplano **H** (además se puede suponer que **P** esta en la misma región que $\varphi_{1/2}(\mathbf{M}_{n-1})$ y **Q** en la misma que $\varphi_{-1/2}(\mathbf{M}_{n-1})$ y lo suficientemente alejados de H para que cada vértice y con ello cada punto de $\mathbf{M}_{n-1}$ verifique que su imagen por $\varphi^*_{1/2}$ (resp. $\varphi^*_{-1/2}$) esta a distancia $> \epsilon$ del segmento que une su imagen por φ_0 con **P** (resp. con **Q**). Ahora, para cada punto **p** de $\mathbf{M}_{n-1}$ y cada t con $0 \leq t \leq 1$ llamamos $\varphi_t(\mathbf{p})$ (resp. $\varphi_{-t}(\mathbf{p})$) al punto que divide al segmento de extremos $\varphi_0(\mathbf{p})$, **P** (resp.$\varphi_0(\mathbf{p})$, **Q**) en la razón t: 1 - t. Entonces para cada t con $0\leq t \leq 1$ la aplicación φ_t es una aplicación simplicial sobre $\mathbf{M}_{n-1}$ y puesto que para cada t con $1/2 \leq t \leq 1$ los complejos $\varphi_t(\mathbf{M}_{n-1})$ y $\varphi_{-t}(\mathbf{M}_{n-1})$ están separados por **H**, son también disjuntos y se sigue de la definición de ϵ que la ecuación $\varphi_t(\mathbf{p}) = \varphi_{-t}(\mathbf{q})$, ahora con $t > 0$, tiene exactamente $2k+1$ soluciones $\{t_i,\mathbf{p}_i,\mathbf{q}_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, 2k+1$) donde para cada i, los puntos, $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{q}_i$ pertenecen al interior de símplices (n-1)-dimensionales disjuntos de $\mathbf{M}_{n-1}$ y $t_i > 0$.

Definimos ahora la aplicación buscada φ sobre $\mathbf{M}_n$ de la manera siguiente: para cada punto $\mathbf{p}$ que pertenezca al complejo $\mathbf{M}_{n-1}$ generado por los puntos del conjunto unión de las ternas $\mathbf{T}_i=\{\mathbf{1}_i,\mathbf{2}_i,\mathbf{3}_i\}$ ($i=0,1,2. \ldots n-1$) hacemos $\varphi(\mathbf{p}) = \varphi_0(\mathbf{p})$, con ello $\varphi(\mathbf{M}_{n-1}) \subset \mathbf{R}_{2n-1} \subset \mathbf{R}_{2n+1}$, al punto $\mathbf{1}_n$, le asignamos como imagen un punto de $\mathbf{R}_{2n+1}$ con la ultima coordenada cero y la penúltima negativa. Si los puntos $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ tienen coordenadas en $\mathbf{R}_{2n-1}$, $(x^P_1,x^P_2,\ldots x^P_{2n-1})$ y $(x^Q_1,x^Q_2,\ldots x^Q_{2n-1})$ respectivamente, asignamos a los puntos 2_n, 3_n los puntos de coordenadas $(x^P_1,x^P_2,\ldots x^P_{2n-1},1,0)$ y $(x^Q_1,x^Q_2,\ldots x^Q_{2n-1},1,1)$. Para demostrar que el grado mod.2 de la aplicación asociada a φ es 1, basta demostrar que el número de pares de puntos $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ tales que el segmento que une sus imágenes $\varphi(\mathbf{p})$ y $\varphi(\mathbf{q})$ es paralelo al eje x_{2n+1} es impar, y que estos puntos son interiores a símplices disjuntos de $\mathbf{M}_n$. Puesto que la coordenada 2n de $\varphi(\mathbf{1}_n)$ es negativa y por el contrario las de $\varphi(\mathbf{2}_n)$ $\varphi(\mathbf{3}_n)$ son positivas, los puntos $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ buscados solo pueden estar en símplices de $\mathbf{M}_n$ con vértices en $\mathbf{2}_n$ o $\mathbf{3}_n$. Por otra parte la aplicación φ por la forma en que fué construida verifica la propiedad que sigue: Sea $\mathbf{p}$ un punto arbitrario del símplice $[\mathbf{i}_0,\mathbf{i}_1,\ldots\mathbf{i}_{n-1},\mathbf{2}_n]$ entonces $\mathbf{p}$ determina unívocamente un punto $\mathbf{p}'$ del símplice $[\mathbf{i}_0,\mathbf{i}_1,\ldots\mathbf{i}_{n-1}]$ y un número s ente 0 y 1 tal que $\mathbf{p}$ divide al segmento que une $\mathbf{p}'$ con $\mathbf{2}_n$ en la razón s: 1-s ;sean ahora$(x_1,x_2,\ldots x_{2n-1})$, las coordenadas de $\varphi_s(\mathbf{p}')$ en $\mathbf{R}_{2n-1}$ entonces $\varphi(\mathbf{p})$ tiene las coordenadas $(x_1,x_2,\ldots x_{2n-1},s,0)$ análogamente si $\mathbf{q}$ es un punto arbitrario del símplice $[\mathbf{i}_0,\mathbf{i}_1,\ldots\mathbf{i}_{n-1},\mathbf{3}_n]$ entonces $\mathbf{q}$ determina unívocamente un punto $\mathbf{q}'$ del símplice $[\mathbf{i}_0,\mathbf{i}_1,\ldots\mathbf{i}_{n-1}]$ y un número t ente 0 y 1 tal que $\mathbf{q}$ divide al segmento que une $\mathbf{q}'$ con $\mathbf{3}_n$ en la razón t: 1-t, y si $(x_1,x_2,\ldots x_{2n-1})$ son las coordenadas de $\varphi_t(\mathbf{q}')$ en $\mathbf{R}_{2n-1}$ entonces $\varphi(\mathbf{q})$ tiene las coordenadas $(x_1,x_2,\ldots x_{2n-1},t,t)$. De este modo la condición necesaria y suficiente para que el segmento que une las imágenes por φ de los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ de $\mathbf{M}_n$ sea paralelo al eje x_{2n+1} es que $s = t > 0$ y $\varphi_s(\mathbf{p}') = \varphi_{-t}(\mathbf{q}')$. Ahora bien, como hemos visto antes, el número de soluciones de esta ecuación es $2k+1$ y el par de puntos de cada solución cumple la condición de que sus componentes pertenecen al interior de símplices disjuntos de $\mathbf{M}_{n-1}$ (por ser $t<1$). Con ello queda probado el resultado.

12.- En la que precede y por razones de brevedad hemos trabajado con el grado mod.2 de $\varphi(\mathbf{A}_{2n})$. Pero puesto que $\mathbf{A}_{2n}$ es un ciclo propio (más aún una variedad) se podría haber trabajado también con la orientación. Otros resultados sobre este tipo de problemas serán objeto de otra comunicación.