SOBRE LOS COMPLEJOS N-DIMENSIONALES, QUE ESTÁN ABSOLUTAMENTE AUTOENLAZADOS EN R_{2n+1}[1]

A.I.FLORES

1.- Sea **C** un complejo n-dimensional, diremos que dos símplices de **C** están *separados* si no tienen ningún vértice común. Sea **C'** otro complejo homeomorfo a **C**, llamaremos **U(C)** al complejo compuesto por todos los (2n+1)-símplices **V(a,b')** y sus caras, donde: **a** es un n-símplice de **C**, **b'** es la imagen en **C'** de un n-símplice **b** de **C** separado de **a** y **V(x,y)** representa la unión simplicial ("join") de los símplices **x** e **y**.

2.- Sea ahora **P** el complejo 0-dimensional compuesto por un único punto y formemos el cono **V(C,P)**. El conjunto de pares ordenados, compuestos por un punto de un n-símplice **s** de **C** o de una de sus caras y otro de la unión simplicial de **P** con otro n-símplice, separado de **s**, **t** (o con una de sus caras), se puede metrizar de modo natural. Al espacio resultante le llamaremos **L(C)**. Diremos que dos puntos de **L(C)** son *simétricos* si difieren solo en el orden de sus componentes.

3.- *L(C) y U(C) son homeomorfos.* Tomemos un punto (α,β) de **L(C)** tal que α y β pertenezcan a **C**. El segmento $(\alpha,V(\beta,P)) = \{(\alpha,x) \mid x \in V(\beta,P)\}$ de **L(C)** se aplica afínmente sobre la mitad del segmento $V(\alpha,\beta')$ limitado por α y β'en **U(C)**, de modo que (α,P) vaya sobre el punto α y el punto (α,β) sobre el punto medio de $V(\alpha,\beta')$. Del mismo modo el segmento $(V(\alpha,P),\beta)$ se aplica sobre la otra mitad de $V(\alpha,\beta')$ de modo que (α,β) vaya de nuevo sobre el punto medio de $V(\alpha,\beta')$ y (P,β) sobre β'. Se comprueba fácilmente que de este modo queda definido un homeomorfismo, y que las imágenes por él de los pares de puntos de **U(C)** homólogos por el homeomorfismo de **C** en **C'**, son pares de puntos simétricos en **L(C)**. Diremos que dos puntos de **U(C)** son ***simétricos*** cuando lo son sus imágenes en **L(C)**.

---

[1]. Traducción del articulo : "Über n-dimensionale Komplexe , die im $\mathbb{R}_{2n+1}$ absolut selbstverschlungen sind" publicado en Erg. Math. Kolloqu. **6** (1935) s.4-7. (Trad. **J.M.Aroca**).

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, N° 16-17-18, tomo A, - 525-527

4.- El complejo **C** se dice *absolutamente autoenlazado* [2], cuando f(**C**) y f(**V**(**C**,**P**) - **C**) no son disjuntos para ninguna realización topológica f(**V**(**C**,**P**)) de **V**(**C**,**P**) en $\mathbf{R}_m$ por una aplicación f que sea topológica sobre **C**. Obviamente ningún subconjunto de $\mathbf{R}_{m-1}$ es absolutamente autoenlazado en $\mathbf{R}_m$, por tanto ningún complejo absolutamente autoenlazado en $\mathbf{R}_m$ es sumergible topológicamente en $\mathbf{R}_{m-1}$.

5.- Para cada realización topológica **S** = f(**V**(**C**,**P**)) de **V**(**C**,**P**) en $\mathbf{R}_m$ se puede construir otra g(**L**(**C**)) de **L**(**C**) en el mismo espacio, tomando, para cada punto (α,β) de **L**(**C**) el vector que une $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ y desplazándolo paralelamente a si mismo hasta que su origen coincida con el origen de coordenadas, entonces se toma su extremo como $g(\alpha,\beta)$. Obviamente, las imágenes de puntos simétricos de **L**(**C**) son ahora puntos simétricos respecto del origen de coordenadas. Es claro que **C** es absolutamente autoenlazado en $\mathbf{R}_m$, y por tanto no realizable topológicamente en $\mathbf{R}_{m-1}$, si y solo si para toda realización topológica f(**V**(**C**,**P**)) el origen de coordenadas pertenece a g(**L**(**C**)).

6.- Este es siempre el caso cuando **U**(**C**) es homeomorfo a S_{2n+1} (superficie de la Bola (2n+2)-dimensional), las imágenes de los puntos simétricos de **U**(**C**) son los puntos diametralmente opuestos en S_{2n+1}, y, $m = 2n+1$. Entonces para cada aplicación continua de S_m en $\mathbf{R}_m$ existen al menos dos puntos diametralmente opuestos con la misma imagen [3].

7.- Los complejos: $\mathbf{K}_n$, compuesto por todos los símplices de dimensión a lo mas n con vértices en un conjunto dado de 2n+3 puntos, y $\mathbf{M}_n$, definido inductivamente como $\mathbf{M}_n = \mathbf{V}(\mathbf{M}_{n-1},\mathbf{M}_0)$, siendo $\mathbf{M}_0$ un conjunto de tres puntos [4], cumplen las condiciones de **6** y no son por tanto realizables topológicamente en $\mathbb{R}_{2n}$ [5]. Para demostrar este hecho para $\mathbf{K}_n$, se toman como vértices de $\mathbf{K}_n$ los 2n+3 vértices del (2n+2)-símplice regular inscrito en S_{2n+1} y sus puntos diametralmente opuestos como vértices de K'_n. Se forman todos los grupos de a lo mas 2n+2 puntos elegidos de entre los 4n+6 vértices de $\mathbf{K}_n$ y $\mathbf{K'}_n$ de modo que ninguno contenga dos puntos diametralmente opuestos, $\mathbf{U}(\mathbf{K}_n)$ está formado entonces por todos los símplices con vértices contenidos

---

2. V. estos Ergebnisse **5** (1933) s.18 (también traducido en este numero).

3. Este Teorema conjeturado por Ulam, fue probado por Borsuk, Fund.Math.**20** p.178.

4. van Kampen, Abhandl.Math.Sem.Hamb.**9** (1932), p.72. Además M_1 es la configuración tetraédrica de Menger (v.estos Ergebnisse **2** p.30). K_1 y M_1 fueron hallados por Kuratowski, Fund Math. **15**.

5. En lo que sigue, daré una nueva, por lo que a mi respecta, demostración de la no realizabilidad topológica de los complejos K_n y M_n en $\mathbb{R}_{2n}$. Además, por lo que a mi toca no comparto la afirmación de Alexandroff en Zb.de que la demostración de la no realizabilidad topológica de M_n que damos en estos Ergebnisse (loc.cit) tenga puntos en común con la de van Kampen (loc.cit). (n.t. esta afirmación de Flores es correcta como hacemos observar en el comentario al artículo).

en uno de estos grupos de puntos. La proyección sobre S_{2n+1} desde su centro es un homeomorfismo que transforma los puntos simétricos de $\mathbf{U}(\mathbf{K}_n)$ en puntos diametralmente opuestos de S_{2n+1}. Por lo que concierne a $\mathbf{M}_n$, es claro que $\mathbf{M}_0$ y $\mathbf{K}_0$ son homeomorfos. Hagamos la hipótesis de inducción de que $\mathbf{U}(\mathbf{M}_{n-1}) \approx S_{2n-1}$, entonces es:
$\mathbf{U}(\mathbf{M}_n) \approx \mathbf{U}(\mathbf{V}(\mathbf{M}_{n-1},\mathbf{M}_0)) \approx \mathbf{V}(\mathbf{U}(\mathbf{M}_{n-1}),\mathbf{U}(\mathbf{M}_0)) \approx \mathbf{V}(S_{2n-1},S_1) \approx \mathbf{V}(S_{2n})$
Mediante estas formulas se demuestra también que las imágenes de puntos simétricos de $\mathbf{U}(\mathbf{M}_n)$ son puntos diametralmente opuestos de S_n. Además es fácil demostrar que los complejos $\mathbf{V}(\mathbf{K}_m,\mathbf{K}_{n-m-1})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{K}_m,\mathbf{M}_{n-m-1})$ cumplen las condiciones de **6**.

8.- Kuratowski ha demostrado que un complejo unidimensional es realizable topológicamente en el plano, si y solo si no contiene ninguna parte homeomorfa a $\mathbf{K}_1$ o a $\mathbf{M}_1$ [6]. Se dice que un subcomplejo $\mathbf{T}$ de $\mathbf{U}(\mathbf{C})$ es simétrico cuando el simétrico de cada punto de $\mathbf{T}$ está en $\mathbf{T}$. De lo que precede, se sigue que la condición necesaria y suficiente para que un complejo unidimensional $\mathbf{G}$ sea realizable en el plano es que no contenga ninguna copia, simétricamente situada, de S_3.

9.- De la existencia de complejos n-dimensionales absolutamente autoenlazados en $\mathbb{R}_{2n+1}$ se sigue inmediatamente el Teorema de Lebesgue - Brouwer de la *invariancia de la dimensión*[7]. Si $\mathbf{R}_m$ fuese homeomorfo con una parte de $\mathbf{R}_n$ para $m > n$, entonces $\mathbf{R}_{n+1}$ se podría sumergir topológicamente en $\mathbf{R}_n$, y si $n = 2k$ un complejo absolutamente autoenlazado en $\mathbf{R}_{2k+1}$ podría sumergirse en $\mathbf{R}_{2k}$, y si $n = 2k+1$ se llega a contradicción tomando un complejo $\mathbf{C}$ absolutamente autoenlazado en $\mathbf{R}_{2k+1}$ y un complejo $\mathbf{P}$ compuesto de un solo punto, entonces $\mathbf{V}(\mathbf{C},\mathbf{P})$ seria realizable topológicamente en $\mathbf{R}_{2k+2}$ y no en $\mathbf{R}_{2k+1}$.

[6]. L.c. Fund.Math. 15 (1930) pp.271.

[7]. Para una demostración directa, a partir del Teorema de Ulam - Borsuk v. Flores, Über stetige Selbstalbildungen der S_n. Erg. Math. Kolloqu. **6** (1935) p.3.