Instituciones y heterogeneidad

Joan B. Climent Vidal
Jesús Alcolea Banegas
Universitat de València
Apartado 22.109
E-46020 València

Abstract. The paper presents and discusses an example, namely a version of heterogeneous first-order logic and uses the classical theorem of Herbrand-Schmidt-Wang about the reduction of heterogeneous first-order logic to homogeneous first-order logic, in order to obtain two transformations between heterogeneous and homogeneous first-order logic which are different from the institution morphisms defined by Goguen and Burstall. Moreover, by considering a type of 2-cell among institution morphisms it is obtained a 2-category and also a 2-functor from this to another 2-category.

Indice.

Introducción.

En ciertos contextos teóricos es necesario, o al menos conveniente, usar dos o más universos de discurso. Por ejemplo, en su axiomatización de la geometría, Hilbert introdujo tres universos de discurso (puntos, rectas y planos) y tres tipos de variables para referirse a los individuos en los respectivos universos. Lo mismo sucede con la teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays-Gödel, en la cual se distingue entre conjuntos y clases propias, con la teoría de autómatas, en la que se distinguen entradas, salidas y estados, así como con multitud de otras teorías matemáticas. Todo ello sugiere que la lógica subyacente adecuada para dar cuenta de las deducciones en esas teorías debe ser una lógica con dos o más tipos de variables, a la que llamaremos lógica heterogénea, distinta de la lógica ordinaria u homogénea, que posee un sólo tipo de variables.

Ahora bien, según el teorema de Herbrand-Schmidt-Wang [16, 26, 29], dada una signatura de primer orden heterogénea $\mathcal{A}$ y una $\mathcal{A}$-teoría heterogénea T, se cumple que hay un algoritmo tal que dada una sentencia de T y una demostración de la misma en T, determina una demostración en la homogeneización, T', de T, de la homogeneizada de la sentencia dada de T; y recíprocamente, hay un algoritmo tal que dada una sentencia de T', si tal sentencia es la homogeneizada de alguna sentencia de T, y dada una demostración de ella en T', determina una demostración en T de la sentencia de T asociada a la dada de T'.

Este resultado induce a diversos autores (p. ej., Barwise [3], Enderton [4], Gallier [9], Monk [24]) a afirmar que no hay una diferencia esencial entre las teorías heterogéneas y las homogeneizaciones de dichas teorías. Sin embargo, a partir de lo puesto de manifiesto por Feferman [5] para el caso de los teoremas de interpolación y más recientemente por Hook [17] para el caso de las demostraciones de consistencia (de acuerdo con el cual hay dos teorías heterogéneas T_0 y T_1 y una interpretación de T_0 en T_1, pero la homogeneizada T'_0 de T_0 no es interpretable en la homogeneizada T'_1 de T_1), podemos concluir que las teorías heterogéneas no son una variación inesencial de las teorías homogéneas, al menos en la medida que garantizar la consistencia de una teoría no lo ha sido desde Hilbert.

Una vez confirmado formalmente el hecho de que la heterogeneidad y la homogeneidad no son una y la misma cosa, pero entre las que sin embargo subsisten ciertos vínculos, y a fin de enmarcar la teoría de las instituciones de Goguen y Burstall [14, 15], consideramos oportuno recordar que ya en el ámbito de la lógica matemática, según Feferman [7]: "The subject of abstract model theory blossomed from the work by A. Mostowski on cardinality quantifiers in the late 1950s; the work of A. Tarski, his colleagues and students on infinitary logics into the mid-1960s; and, finally, that stemming from the results of P. Lindström on generalized quantifiers and abstract characterizations of first-order logic in the late 1960s as a unified and illuminating framework in which to organize, compare, and seek out the properties of the many stronger logics which had then come to be recognized".

A partir de una situación caótica similar a la antes descrita, pero esta vez en la ciencia de la computación, Goguen y Burstall, considerando evidente, tal como dicen en [14], que "Much of programming methodology is actually completelly independent of what underlying logic is chosen", y teniendo como precedentes a Barwise [2] y Feferman [6], entre otros muchos investigadores, han construido la teoría de las instituciones.

Esta teoría es una formalización categorial de la parte semántica de la noción intuitiva de "sistema lógico", y tiene como objetivos, según Goguen y Burstall [14], ni más ni menos que los siguientes: "To support as much computer science as possible independently of the underlying logical system, to facilitate the transfer of results (and artifacts such as theorem provers) from one logical system to another, and to permit combining a number of different logical systems".

Como siempre, al menos desde la entrada en vigencia del programa de categorización de la matemática, sucesor natural del de algebrización, una vez definidos los objetos de interés, en este caso las instituciones, Goguen y Burstall, en [14, 15], siguiendo el imperativo "categorial", definen la que parece ser, para ellos, la única noción admisible de morfismo entre instituciones.

Aparentemente, tal noción de morfismo ha sido obtenida por esos autores (por abstracción) a partir de la comparación de la institución canónicamente asociada a la lógica de primer orden con igualdad heterogénea y la asociada a la lógica ecuacional heterogénea. Ahora bien, fundamentar la noción de morfismo entre instituciones, o cualquier otro concepto, sobre el estudio de un único ejemplo, por relevante que éste sea, puede ser innecesariamente autolimitativo y conducente a desestimar, sin más justificación que la fe ciega en la bondad de una elección cuasi-apriorística, la posibilidad de otras nociones de morfismo tan naturales como la propuesta por Goguen y Burstall.

Pero quizás lo más sorprendente del asunto sea que las instituciones comparadas en tal ejemplo, sobre el que explícitamente se fundamenta la noción de morfismo de Goguen y Burstall, tengan precisamente la misma naturaleza, ser heterogéneas, lo cual es un caso extremo y no necesariamente representativo. En nuestra opinión, lo que se debe hacer para intentar captar la verdadera naturaleza de las cosas es intentar comparar mundos cuya naturaleza no sea necesariamente del mismo tipo (p. ej., la matemática clásica y la intuicionista, o la heterogeneidad y la homogeneidad), porque al proceder de ese modo puede muy bien quedar al descubierto que hay una multiplicidad de transformaciones diferentes entre los mismos y de deformaciones entre tales transformaciones.

El plan de este trabajo es el siguiente: En la primera sección recordamos tanto la noción de institución, como la de morfismo entre las mismas y observamos, además, que dan lugar, como no podía ser menos, a una categoría. Por otra parte, en esa sección ejemplificamos la noción de institución con las instituciones heterogénea y homogénea asociadas resp. a la lógica de primer orden con igualdad heterogénea y a la lógica de primer orden con igualdad homogénea, ya que éstas serán usadas posteriormente para mostrar que no hay una única noción natural de morfismo entre instituciones. La descripción que de esas instituciones se hace tal vez pueda parecer excesivamente prolija, pero es técnicamente necesaria para evitar las arbitrariedades que se encuentran en el proceso de unificación de dominios, p. ej., en Enderton [4] y Monk [24], y lograr naturalidad.

En la segunda sección mostramos que la primera parte del teorema de Herbrand-Schmidt-Wang nos lleva a considerar un tipo de morfismo entre instituciones no contemplado por Goguen y Burstall, mientras que la segunda parte del mismo nos fuerza a considerar, según creemos, con todas sus consecuencias, la noción de parcialidad, de manera que, generalizando a functores parciales, podemos establecer otra comparación natural entre las instituciones del ejemplo del trabajo, la cual, a su vez, tampoco coincide con la noción de morfismo propuesta por Goguen y Burstall.

Pero lo esencial, según nuestro criterio, no es ni que los primeros, ni que la generalización mediante functores parciales, coincidan o no con la noción de morfismo de Goguen y Burstall o con cualquier otra, sino que hay resultados de la lógica matemática, p. ej. el teorema de Herbrand-Schmidt-Wang, que nos obligan a considerar un espectro de posibilidades, entre ellas a la parcialidad, en el ámbito de las instituciones y que nos llevan a creer en la verosimilitud de la hipótesis de que no exista una única u optimal teoría de las instituciones (en el sentido 2-categorial), de forma análoga a lo que ocurre en la teoría de la recursión, en la que junto a la teoría de la recursión clásica (en la que, para captar la noción intuitiva de función mecánicamente calculable, las aplicaciones recursivas primitivas se generalizan a aplicaciones recursivas y éstas a su vez a aplicaciones parciales recursivas) se dispone de diferentes teorías de la recursión generalizada, o en el álgebra universal, en la que además de las álgebras universales (homogéneas o heterogéneas, con o sin tipos ordenados) y homomorfismos entre ellas, se tienen las álgebras universales parciales (homogéneas o heterogéneas, con o sin tipos ordenados) y algún tipo de homomorfismo parcial entre ellas.

De manera que, reiterando, el asunto no es, a nuestro parecer, el de la elección, a priori, de una única noción de morfismo entre instituciones, sino el de la admisión, como consecuencia del estudio de diversos casos concretos, de diferentes alternativas, estando la corrección o adecuación de las mismas en función de la estructura interna de las instituciones que se trate de comparar.

En la última sección completamos la teoría de Goguen y Burstall hasta una 2-categoría, introduciendo para ello una noción de deformación entre morfismos de instituciones. Para las deformaciones entre transformaciones de instituciones, como es obvio, también vale la observación anterior.

Terminología.

En lo que sigue U denota un universo de Grothendieck, arbitrario pero fijo. Por una U-categoría entendemos una categoría $\underline{C}$ tal que $\mathrm{Ob}(\underline{C}) \subseteq U$ y para cada par de objetos x e y de $\underline{C}$, $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(x,y) \in U$, de modo que $\underline{\mathrm{Cat}}$ designa la categoría de las U-categorías y functores entre ellas. Por otra parte, $\underline{\mathrm{Set}}$ denota la categoría asociada al conjunto U y si X es un conjunto y $\underline{C}$ una categoría, $\underline{C}^X$ es la categoría functorial asociada a la categoría discreta determinada por X y a $\underline{C}$. Finalmente, a los objetos de la categoría $\underline{\mathrm{Set}}^X$ los denominamos X-conjuntos, y a los morfismos de $\underline{\mathrm{Set}}^X$, X-aplicaciones.

1. Instituciones y morfismos entre instituciones.

Definición ([14, 15]). Una institución es un cuádruplo ordenado $\underline{I}=(\underline{\mathrm{Sig}},\mathrm{Str},\mathrm{Sent},\models)$, en el que $\underline{\mathrm{Sig}}$ es una U-categoría, Str un functor contravariante de $\underline{\mathrm{Sig}}$ en $\underline{\mathrm{Cat}}$, Sent un functor de $\underline{\mathrm{Sig}}$ en $\underline{\mathrm{Cat}}$ y $\models$ una familia indexada por los objetos de $\underline{\mathrm{Sig}}$, $(\models_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{S} \in \mathrm{Ob}(\underline{\mathrm{Sig}}))$, tal que para cada objeto $\mathcal{S}$ de la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}$, $\models_{\mathcal{S}} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathrm{Str}(\mathcal{S})) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{Sent}(\mathcal{S}))$, y que cumple las siguientes condiciones:

Inst. 1. Para cada morfismo $i:\mathcal{S}\rightarrow\mathcal{S}'$ de Sig, cada objeto $\underline{A}'$ de $\mathrm{Str}(\mathcal{S}')$, cada objeto φ de $\mathrm{Sent}(\mathcal{S})$, $\mathrm{Str}(i)(A')\models_{\mathcal{S}}\varphi$ si y sólo si $A'\models_{\mathcal{S}'}\mathrm{Sent}(i)(\varphi)$.

Inst. 2. Para cada objeto $\mathcal{S}$ de Sig, cada objeto $\underline{A}$ de $\mathrm{Str}(\mathcal{S})$ y cada morfismo $\mathcal{D}:\varphi\rightarrow\psi$ de $\mathrm{Sent}(\mathcal{S})$, si $\underline{A}\models_{\mathcal{S}}\varphi$, entonces $\underline{A}\models_{\mathcal{S}}\psi$.

Ahora, como ejemplos de la noción anterior, y debido a que serán usadas posteriormente, procedemos a la descripción de las instituciones heterogénea y homogénea. Pero antes de eso, convenimos que en lo que sigue V (el conjunto de las variables) es un conjunto U-pequeño, i.e., $V\in U$, infinito numerable, arbitrario pero fijo.

La institución heterogénea. Denotamos por $\underline{\mathrm{Htg}}=(\underline{\mathrm{Sig}}^{\mathrm{Htg}},\mathrm{Str}^{\mathrm{Htg}},\mathrm{Sent}^{\mathrm{Htg}},\models^{\mathrm{Htg}})$ aquella institución, denominada la institución heterogénea, en la que sus componentes vienen descritas progresivamente como sigue:

[I] La categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\mathrm{Htg}}$ es la U-categoría definida como:

Objetos (de $\underline{\mathrm{Sig}}^{\mathrm{Htg}}$): Las signaturas de primer orden heterogéneas U-pequeñas, en lo que sigue abreviado como "signaturas heterogéneas", i.e., los séptuplos ordenados $\mathcal{S}=(S,j,\Sigma,\mathrm{ar},\mathrm{car},\Pi,\mathrm{rk})$, en los que S (el conjunto de los tipos) es un conjunto U-pequeño no vacío y a lo sumo infinito numerable, j una aplicación sobreyectiva de V en S tal que para cada tipo s de S, la fibra de j en s, denotada por V_s, es un conjunto infinito numerable, Σ (el conjunto de los símbolos de operación) y Π (el conjunto de los símbolos de relación) conjuntos U-pequeños, ar una aplicación de Σ en $\mathrm{Ml}(S)$, siendo $\mathrm{Ml}(S)$ el conjunto subyacente del monoide libre sobre S, que a cada símbolo de operación de Σ le asigna su ariedad, car una aplicación de Σ en S, que a cada símbolo de operación de Σ le asigna su coariedad, y rk una aplicación de Π en $\mathrm{Ml}(S)$, que a cada símbolo de relación de Π le asigna su rango.

Nota. En el contexto anterior, el monoide libre sobre S puede ser reemplazado, sin pérdida de generalidad, por el monoide abeliano libre sobre S, que es incluso más conveniente cuando se consideran las operaciones polinómicas y algebraicas heterogéneas.

Morfismos (de $\underline{\mathrm{Sig}}^{\mathrm{Htg}}$): Dadas dos signaturas heterogéneas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, un morfismo de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}'$ es un triplo ordenado $i=(\mathcal{S},(i_0,i_1,i_2),\mathcal{S}')$, en el que $i_0:S\rightarrow S'$, $i_1:\Sigma\rightarrow\Sigma'$ e $i_2:\Pi\rightarrow\Pi'$, que cumple las siguientes condiciones:

(1) El diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\mathrm{ar}"'] & \Sigma' \arrow[d, "\mathrm{ar}'"] \\ \mathrm{Ml}(S) \arrow[r, "\mathrm{Ml}(i_0)"'] & \mathrm{Ml}(S') \end{tikzcd}$$

conmuta,

siendo $\mathrm{Ml}(i_0)$ la aplicación subyacente del único homomorfismo de monoides $\underline{\mathrm{Ml}}(i_0)$ de $\underline{\mathrm{Ml}}(S)$ en $\underline{\mathrm{Ml}}(S')$ para el que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\eta_S"'] & S' \arrow[d, "\eta_{S'}"] \\ Ml(S) \arrow[r, "Ml(i_0)"'] & Ml(S') \end{tikzcd}$$ conmuta,

siendo η_S, resp. $\eta_{S'}$, la aplicación canónica de S en Ml(S), resp. de S' en Ml(S').

(2) El diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "car"'] & \Sigma' \arrow[d, "car'"] \\ S \arrow[r, "i_0"'] & S' \end{tikzcd}$$ conmuta.

(3) El diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "rk"'] & \Pi' \arrow[d, "rk'"] \\ Ml(S) \arrow[r, "Ml(i_0)"'] & Ml(S') \end{tikzcd}$$ conmuta.

(4) El diagrama:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "j'"] & \\ S \arrow[rr, "i_0"'] & & S' \end{tikzcd}$$ conmuta.

Nota. Esta última condición tiene como consecuencia inmediata que para cada tipo s de S, la fibra de j en s, V_s, está incluida en la fibra de j' en $i_0(s)$, $V'_{i_0(s)}$, y que i_0 es sobreyectiva.

La composición y las identidades en $\underline{Sig}^{\underline{Htg}}$ se definen del modo evidente.

□

[II] $Str^{\underline{Htg}}$ es el functor contravariante de $\underline{Sig}^{\underline{Htg}}$ en $\underline{Cat}$ definido como:

Sobre los objetos ($Str^{\underline{Htg}}$): Dada una signatura heterogénea $\mathcal{S}$, $Str^{\underline{Htg}}(\mathcal{S})$ es la U-categoría definida como:

Objetos (de $Str^{\underline{Htg}}(\mathcal{S})$): Las estructuras algebraico-relacionales $\mathcal{S}$-heterogéneas punteadas U-pequeñas, en lo que sigue abreviado como "estructuras $\mathcal{S}$-heterogéneas", i.e., los cuádruplos ordenados $\underline{A}$=(A,F,R,a), en los que A es un S-conjunto, i.e., un objeto de la categoría $\underline{Set}^S$, tal que para cada tipo s de S, $A_s \neq \emptyset$, F una $Ml(S)\times S$-aplicación del $Ml(S)\times S$-conjunto $(\Sigma_{w,s} | (w,s) \in Ml(S)\times S)$, donde, para $(w,s) \in Ml(S)\times S)$, $\Sigma_{w,s}$ es el conjunto de los símbolos de operación cuya ariedad es w y cuya coariedad es s, en el $\mathrm{Ml}(S)\times S$-conjunto $(\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Set}}}(A_w,A_s)|(w,s)\in \mathrm{Ml}(S)\times S)$, donde, para $w\in \mathrm{Ml}(S)$, con $w=(s_j|j\in n)$, A_w es $\prod(A_{s_j}|j\in n)$, R una $\mathrm{Ml}(S)$-aplicación del $\mathrm{Ml}(S)$-conjunto $(\Pi_w|w\in \mathrm{Ml}(S))$, donde, para $w\in \mathrm{Ml}(S)$, Π_w es el conjunto de los símbolos de relación cuyo rango es w, en el $\mathrm{Ml}(S)$-conjunto $(\mathrm{Rel}_w(A)|w\in \mathrm{Ml}(S))$, donde, para $w\in \mathrm{Ml}(S)$, $\mathrm{Rel}_w(A)$ es el conjunto potencia de A_w y, por último, $a\in \prod(A_s|s\in S)$.

<u>Morfismos</u> (de $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{A})$): Dadas dos estructuras $\mathcal{A}$-heterogéneas $\underline{A}$ y $\underline{A}'$, un morfismo de $\underline{A}$ en $\underline{A}'$ es un triplo ordenado $\underline{f}=(\underline{A},f,\underline{A}')$, en el que f es una S-aplicación de A en A', tal que:

(1) Para cada $(w,s)\in \mathrm{Ml}(S)\times S$ y $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_w \arrow[r, "F_\sigma"] \arrow[d, "f_w"'] & A_s \arrow[d, "f_s"] \\ A'_w \arrow[r, "F'_\sigma"'] & A'_s \end{tikzcd} \qquad \text{conmuta,}$$

donde hemos abreviado $F_{w,s}(\sigma)$ hasta F_σ y $F'_{w,s}(\sigma)$ hasta F'_σ.

(2) Para cada $w\in \mathrm{Ml}(S)$, $\pi\in\Pi_w$ y $x\in A_w$, si $x\in R_\pi$, entonces $f_w(x)=f\circ x\in R'_\pi$, donde hemos abreviado $R_w(\pi)$ hasta R_π y $R'_w(\pi)$ hasta R'_π.

(3) Para cada tipo s de S, $f_s(a_s)=a'_s$.

<u>Sobre los morfismos</u> ($\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$): Dado un morfismo $i:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ de la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$, $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)$ es el functor de la categoría $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{A}')$ en la categoría $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{A})$ definido como:

<u>Sobre los objetos</u> ($\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)$): Dada una estructura $\mathcal{A}'$-heterogénea $\underline{A}'$, $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)(\underline{A}')$ es la estructura $\mathcal{A}$-heterogénea cuya primera componente es $\underline{\mathrm{Set}}^{i_0}(A')$, donde Set^{i_0} es el functor de $\mathrm{Set}^{S'}$ en Set^{S} canónicamente asociado a la aplicación $i_0:S\to S'$, cuya segunda componente es $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(i_0)\times i_0}(F')$, donde $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(i_0)\times i_0}$ es el functor de $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(S')\times S'}$ en $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(S)\times S}$ canónicamente asociado a la aplicación $\mathrm{Ml}(i_0)\times i_0:\mathrm{Ml}(S)\times S\to \mathrm{Ml}(S')\times S'$, cuya tercera componente es $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(i_0)}(R')$, donde $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(i_0)}$ es el functor de $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(S')}$ en $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(S)}$ canónicamente asociado a la aplicación $\mathrm{Ml}(i_0):\mathrm{Ml}(S)\to \mathrm{Ml}(S')$, y cuya última componente es $(a_{i_0(s)}|s\in S)$.

<u>Sobre los morfismos</u> ($\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)$): Dado un morfismo $\underline{f}$ de una estructura $\mathcal{A}'$-heterogénea $\underline{A}'$ en otra $\underline{B}'$, $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)(\underline{f})$ es simplemente el triplo ordenado $(\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)(\underline{A}'),\underline{\mathrm{Set}}^{i_0}(f),\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)(\underline{B}'))$.

Es evidente que, así definido, $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ es un functor contravariante de $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ en $\underline{\mathrm{Cat}}$.

□

[III] $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ es el functor de $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ en $\underline{\mathrm{Cat}}$ definido como:

<u>Sobre los objetos</u> ($\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$): Dada una signatura heterogénea $\mathcal{A}$, obtenemos a partir del S-conjunto $(V_s|s\in S)$, denotado por (V,j), en el que, recordemos, para cada tipo s de S, V_s es la fibra de j en s, la $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea libre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(V,j)$ sobre (V,j), siendo $\underline{\Sigma}=(\Sigma,\mathrm{ar},\mathrm{car})$ la signatura algebraica S-heterogénea U-pequeña subyacente de $\mathcal{A}$.

Por otra parte, sea $\mathrm{At}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$ el conjunto de todas las $\mathcal{S}$-fórmulas atómicas heterogéneas, i.e., el conjunto definido explícitamente como:

$$\mathrm{At}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S}) = \bigcup_{\pi\in\Pi}\{\pi\}\times \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(V,j)_{\mathrm{rk}(\pi)},$$

y entonces sea $\mathrm{Form}_{\Delta(\mathcal{S})}(\mathrm{At}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S}))$, o simplemente $\mathrm{Form}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$, el conjunto de las $\mathcal{S}$–fórmulas heterogéneas, i.e., el conjunto subyacente de la $\underline{\Delta}(\mathcal{S})$-álgebra (homogénea) libre $\underline{\mathrm{Form}}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$ sobre el conjunto $\mathrm{At}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$, siendo $\underline{\Delta}(\mathcal{S})$ la signatura algebraica definida como:

$$\Lambda_1(\mathcal{S})=\{\neg\}\cup\{\forall(v,s)\mid(v,s)\in \bigcup_{s\in S}V_s\times\{s\}\},$$
$$\Lambda_2(\mathcal{S})=\{\wedge,\vee,\rightarrow\},\ \text{y}$$
$$\Lambda_n(\mathcal{S})=\varnothing,\ \text{si } n\neq 1, 2.$$

Sea ahora $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$ la categoría definida como:

Objetos (de $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$): Las $\mathcal{S}$–sentencias heterogéneas, i.e., las $\mathcal{S}$–fórmulas heterogéneas sin variables libres.

Morfismos (de $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$): Dadas dos $\mathcal{S}$–sentencias heterogéneas φ y ψ, un morfismo de φ en ψ es un triplo ordenado $(\varphi,\mathcal{D},\psi)$, en el que $\mathcal{D}$ es una demostración de la sentencia $\varphi\rightarrow\psi$.

Nota. Por descontado, suponemos dado un sistema axiomático para la $\mathcal{S}$–lógica heterogénea tal como, p. ej., el presentado por Schmidt [26].

La composición en $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$ es la determinada por la regla de corte y las identidades son las evidentes.

Sobre los morfismos ($\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$): Dado un morfismo $i:\mathcal{S}\rightarrow\mathcal{S}'$ de la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$, $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)$ es el functor de la categoría $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$ en la categoría $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S}')$ definido como:

Sobre los objetos ($\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(i)$): Puesto que $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(V,j')$ es un S'-conjunto, precisamente el S'-conjunto subyacente de la $\underline{\Sigma}'$-álgebra heterogénea libre sobre el S'-conjunto (V,j'), haciendo uso del functor $\underline{\mathrm{Set}}^{i_0}$ de $\underline{\mathrm{Set}}^{S'}$ en $\underline{\mathrm{Set}}^{S}$, obtenemos el S-conjunto $\underline{\mathrm{Set}}^{i_0}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(V,j'))$, cuya coordenada s-ésima, con s en S, es simplemente $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(V,j')_{i_0(s)}$. Ahora dotamos al S-conjunto $\underline{\mathrm{Set}}^{i_0}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(V,j'))$ de la estructura de $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea que se obtiene de la estructura de $\underline{\Sigma}'$-álgebra heterogénea sobre $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}'}(V,j')$, mediante el functor $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(i_0)\times i_0}$ de la categoría $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(S')\times S'}$ en la categoría $\underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{Ml}(S)\times S}$. De este modo obtenemos a partir de la $\underline{\Sigma}'$-álgebra heterogénea libre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'}(V,j')$, una (única) $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea, a la que denotamos por $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'}(V,j')\restriction_{\underline{\Sigma}}$.

Ahora bien, puesto que i es un morfismo de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}'$, se cumple que el S-conjunto (V,j) está incluido en el S-conjunto $\underline{\mathrm{Set}}^{i_0}(V,j')$ y denotamos entonces por $\mathrm{in}_{j,j'}$ la inclusión canónica del primero en el segundo. Sea entonces $\underline{\mathrm{in}}^{\#}_{j,j'}$ el único homomorfismo de la $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea libre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(V,j)$ en la $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}'}(V,j')\restriction_{\underline{\Sigma}}$, tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (V,j) & \xrightarrow{\eta_{(V,j)}} & Fr_{\underline{\Sigma}}(V,j) \\ {\scriptstyle in_{j,j'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle in^{\#}_{j,j'}} \\ Set^{i_0}(V,j') & \xrightarrow[Set^{i_0}(\eta_{(V,j')})]{} & Set^{i_0}(Fr_{\underline{\Sigma}}(V,j')) \end{array} \quad \text{conmuta,}$$

siendo $\eta_{(V,j)}$ la S-aplicación canónica de (V,j) en $Fr_{\underline{\Sigma}}(V,j)$ y $\eta_{(V,j')}$ la S'-aplicación canónica de (V,j') en $Fr_{\underline{\Sigma}'}(V,j')$.

A continuación consideramos una Π-familia de aplicaciones $(g_\pi|\pi\in\Pi)$, en la que, para $\pi\in\Pi$, g_π es una aplicación de $Fr_{\underline{\Sigma}}(V,j)_{rk(\pi)}$ en $At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}')$, que nos permitirá obtener, en virtud de la propiedad universal del coproducto, una única aplicación de $At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B})$ en $At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}')$.

Dado un $\pi\in\Pi$ tal que $rk(\pi)=(s_j|j\in n)$ y dado un $(t_j|j\in n)\in Fr_{\underline{\Sigma}}(V,j)_{rk(\pi)}$, sea $g_\pi(t_j|j\in n)$ la $\mathcal{B}'$-fórmula atómica heterogénea $(i_2(\pi),(t'_j|j\in n))$ en la que $(t'_j|j\in n)$ es el miembro de $Fr_{\underline{\Sigma}'}(V,j')_{rk(i_2(\pi))}$, siendo $rk(i_2(\pi))=(i_0(s_j)|j\in n)$, definido como:

Para cada $j\in n$, $t'_j=(in^{\#}_{j,j'})_{s_j}(t_j)$.

Sea entonces $At^{\underline{Htg}}(in_{j,j'})$ la única aplicación de $At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B})$ en $At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}')$ tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Fr_{\underline{\Sigma}}(V,j)_{rk(\pi)} & \xrightarrow{in_\pi} & At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}) \\ & {\scriptstyle g_\pi}\searrow & \downarrow{\scriptstyle At^{\underline{Htg}}(in_{j,j'})} \\ & & At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}') \end{array} \quad \text{conmuta,}$$

para cada π de Π.

Por otra parte, la S-aplicación $in_{j,j'}:(V,j)\rightarrow \underline{Set}^{i_0}(V,j')$ determina evidentemente un morfismo de la signatura algebraica homogénea $\underline{\Lambda}(\mathcal{B})$ en la signatura algebraica homogénea $\underline{\Lambda}(\mathcal{B}')$, luego hay un functor (de olvido) de la categoría $\underline{\Lambda}(\mathcal{B}')$-$\underline{Alg}$ en la categoría $\underline{\Lambda}(\mathcal{B})$-$\underline{Alg}$. Denotamos por $\underline{Form}^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}')\mid_{\mathcal{B}}$ la $\underline{\Lambda}(\mathcal{B})$-álgebra homogénea imagen, bajo el functor de olvido de la categoría $\underline{\Lambda}(\mathcal{B}')$-$\underline{Alg}$ en la categoría $\underline{\Lambda}(\mathcal{B})$-$\underline{Alg}$, de la $\underline{\Lambda}(\mathcal{B}')$-álgebra homogénea $\underline{Form}^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}')$. Entonces podemos afirmar que existe un único $\underline{\Lambda}(\mathcal{B})$-homomorfismo, denotado por $\underline{At}^{\underline{Htg}}(in_{j,j'})^{\#}$, de la $\underline{\Lambda}(\mathcal{B})$-álgebra libre $\underline{Form}^{\underline{Htg}}(\mathcal{B})$ en la $\underline{\Lambda}(\mathcal{B})$-álgebra $\underline{Form}^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}')\mid_{\mathcal{B}}$ tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\eta_{At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B})}} & Form^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}) \\ {\scriptstyle At^{\underline{Htg}}(in_{j,j'})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle At^{\underline{Htg}}(in_{j,j'})^{\#}} \\ At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}') & \xrightarrow[\eta_{At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}')}]{} & Form^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}')\mid_{\mathcal{B}} \end{array} \quad \text{conmuta.}$$

Puesto que la imagen directa bajo $\mathrm{At}^{\underline{Htg}}(\mathrm{in}_{j,j'})^{\#}$ del conjunto de las $\mathcal{A}$-sentencias heterogéneas está incluido en el conjunto de las $\mathcal{A}'$-sentencias heterogéneas, hay una única aplicación , denotada por $\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(i)$, de $\mathrm{Ob}(\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(\mathcal{A}))$ en $\mathrm{Ob}(\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(\mathcal{A}'))$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}(\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(\mathcal{A})) \arrow[r, "\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(i)"] \arrow[d, "\mathrm{in.can.}"'] & \mathrm{Ob}(\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(\mathcal{A}')) \arrow[d, "\mathrm{in.can.}"] \\ \mathrm{Form}^{\underline{Htg}}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{At}^{\underline{Htg}}(\mathrm{in}_{j,j'})^{\#}"'] & \mathrm{Form}^{\underline{Htg}}(\mathcal{A}')|_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

conmuta.

<u>Sobre los morfismos</u> ($\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(i)$): Dada una demostración $\mathcal{D}=(\vartheta_j|j\in n)$ de la $\mathcal{A}$–sentencia heterogénea $\varphi\rightarrow\psi$, $\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(i)(\mathcal{D})$ es la demostración de la $\mathcal{A}'$–sentencia heterogénea $\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(i)(\varphi)\rightarrow\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}(i)(\psi)$, que se obtiene de $\mathcal{D}$ transformando cada ϑ_j en $\mathrm{At}^{\underline{Htg}}(\mathrm{in}_{j,j'})^{\#}(\vartheta_j)$.

Es evidente que $\mathrm{Sent}^{\underline{Htg}}$, así definido, es un functor de <u>Sig</u>$^{\underline{Htg}}$ en <u>Cat</u>.

□

[IV] Por último, sea $\models^{\underline{Htg}}$ la familia indexada por los objetos de la categoría <u>Sig</u>$^{\underline{Htg}}$, $(\models^{\underline{Htg}}_{\mathcal{A}}|\mathcal{A}\in\mathrm{Ob}(\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{Htg}}))$, en la que para una signatura heterogénea $\mathcal{A}$, una estructura $\mathcal{A}$-heterogénea $\underline{A}=(A,F,R,a)$ y una $\mathcal{A}$-sentencia heterogénea φ, $\underline{A}\models^{\underline{Htg}}_{\mathcal{A}}\varphi$ si y solo si $(A,F,R)\models_{\mathcal{A}}\varphi$, siendo $\models_{\mathcal{A}}$ la relación de satisfacción de Tarski.

□

Con esto acaba la descripción de las componentes de la institución heterogénea <u>Htg</u>. La demostración de que es de hecho una institución no presenta ninguna dificultad.

□

La institución homogénea. Denotamos por $\underline{\mathrm{Hmg}}=(\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{Hmg}},\mathrm{Str}^{\underline{Hmg}},\mathrm{Sent}^{\underline{Hmg}},\models^{\underline{Hmg}})$ aquella institución denominada la institución homogénea, en la que <u>Sig</u>$^{\underline{Hmg}}$ es la U-categoría definida como:

<u>Objetos</u> (de <u>Sig</u>$^{\underline{Hmg}}$): Las signaturas de primer orden homogéneas U-pequeñas, en lo que sigue abreviado como "signaturas homogéneas", i.e. los séxtuplos ordenados $\mathcal{A}=(S,\Sigma,\mathrm{ar},\Pi,\mathrm{rk},(\pi_s|s\in S))$ en los que S es un conjunto U-pequeño no vacío y a lo sumo infinito numerable, Σ (el conjunto de los símbolos de operación) y Π (el conjunto de los símbolos de relación) son conjuntos U-pequeños, ar una aplicación de Σ en N, rk una aplicación de Π en N y $(\pi_s|s\in S)$ una aplicación inyectiva de S en Π tal que para cada s de S, $\mathrm{rk}(\pi_s)=1$.

<u>Morfismos</u> (de <u>Sig</u>$^{\underline{Hmg}}$): Dadas dos signaturas homogéneas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ un morfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$ es un triplo ordenado $i=(\mathcal{A},(i_0,i_1,i_2),\mathcal{A}')$, en el que $i_0:S\rightarrow S'$ es una aplicación sobreyectiva, $i_1:\Sigma\rightarrow\Sigma'$ e $i_2:\Pi\rightarrow\Pi'$, que cumple las siguientes condiciones:

(1) El diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[rr, "i_1"] \arrow[dr, "ar"'] & & \Sigma' \arrow[dl, "ar'"] \\ & N & \end{tikzcd}$$ conmuta.

(2) El diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[rr, "i_2"] \arrow[dr, "rk"'] & & \Pi' \arrow[dl, "rk'"] \\ & N & \end{tikzcd}$$ conmuta.

(3) El diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "(\pi_s|s\in S)"'] & S' \arrow[d, "(\pi'_{s'}|s'\in S')"] \\ \Pi \arrow[r, "i_2"'] & \Pi' \end{tikzcd}$$ conmuta.

□

Las otras componentes de Hmg se definen de modo similar al caso de la institución heterogénea, pero con las estructuras algebraico-relacionales homogéneas, abreviado en lo que sigue como "estructuras homogéneas", definidas de modo que si $\mathcal{S}=(S,\Sigma,ar,\Pi,rk,(\pi_s|s\in S))$ es una signatura homogénea, entonces en cada estructura $\mathcal{S}$-homogénea $\underline{A}$ se tenga una aplicación a de S en A tal que para cada s en S, $a_s\in R_{\pi_s}$, siendo R_{π_s} la realización del símbolo de relación unario π_s en A, y con similares observaciones respecto de la relación de satisfacción.

□

Definición ([14, 15]). Dadas dos instituciones $\underline{I}$ e $\underline{I}'$, un morfismo de instituciones de $\underline{I}$ en $\underline{I}'$ es un triplo ordenado $\Psi=(\underline{I},(F,\alpha,\beta),\underline{I}')$, en el que F es un functor de Sig en Sig', α una transformación natural de Sent'$\circ$F en Sent, y β una transformación natural de Str en Str'$\circ F^{op}$, que cumple la siguiente condición:

Mor.Inst. Para cada objeto $\mathcal{S}$ de Sig, cada objeto $\underline{A}$ de Str($\mathcal{S}$) y cada objeto φ' de Sent'(F($\mathcal{S}$)), $\underline{A}\models_{\mathcal{S}}\alpha_{\mathcal{S}}(\varphi')$ si y sólo si $\beta_{\mathcal{S}}(\underline{A})\models'_{F(\mathcal{S})}\varphi'$.

Proposición. Dados dos morfismos de instituciones $\Psi=(\underline{I},(F,\alpha,\beta),\underline{I}')$ y $\Psi'=(\underline{I}',(F',\alpha',\beta'),\underline{I}'')$, $\Psi'\circ\Psi=(\underline{I},(F'\circ F,\alpha\bullet(\alpha'*id_F),(\beta'*id_{F^{op}})\bullet\beta),\underline{I}'')$ es un morfismo de instituciones de $\underline{I}$ en $\underline{I}''$, denominado la composición de Ψ y Ψ', siendo $*$ la composición horizontal y $\bullet$ la composición vertical de transformaciones naturales. Además, esa composición es asociativa y, para cada institución $\underline{I}$, $Id_{\underline{I}}=(\underline{I},(Id_{\underline{Sig}},id_{Id_{Sent}},id_{Id_{Str}}),\underline{I})$ es un endomorfismo de $\underline{I}$ y es neutro para la composición.

□

Corolario. Las instituciones junto con los morfismos de instituciones constituyen una categoría.

□

2. Unificación de dominios.

En esta sección mostramos que el teorema de Herbrand-Schmidt-Wang nos lleva de una manera natural a considerar dos tipos distintos de morfismos entre instituciones, que no caen bajo el concepto de morfismo de instituciones propuesto por Goguen y Burstall (en [14, 15]) y que uno de ellos, además, nos fuerza a considerar la parcialidad referida a los functores.

Para alcanzar tales objetivos, definimos en primer lugar un functor UD (de unificación de dominios) de la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ en la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{Hmg}}}$.

Sobre los objetos (UD): Dada una signatura heterogénea $\mathcal{A}=(S,j,\Sigma,ar,car,\Pi,rk)$, sea $UD(\mathcal{A})$ la signatura homogénea $(S,\Sigma,ar^{UD},\Pi\amalg S,rk^{UD},in_S)$, en la que ar^{UD} es la aplicación de Σ en N obtenida componiendo $ar:\Sigma\rightarrow Ml(S)$ y la aplicación subyacente, lt, del único homomorfismo de monoides $\underline{lt}$ de $\underline{Ml}(S)$ en $\underline{N}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta_S"] \arrow[dr, "\kappa_1"'] & Ml(S) \arrow[d, "lt"] \\ & N \end{tikzcd}$$

conmuta,

siendo κ_1 la aplicación de S en N cuya imagen es $\{1\}$ y rk^{UD} la única aplicación de $\Pi\amalg S$ en N tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "in_\Pi"] \arrow[dr, "lt\circ rk"'] & \Pi\amalg S \arrow[d, "rk^{UD}"] & S \arrow[l, "in_S"'] \arrow[dl, "\kappa_1"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Convenimos en denotar por π_s la imagen bajo in_S de $s\in S$, que es un símbolo de relación unario.

Así pues, al actuar sobre una signatura heterogénea $\mathcal{A}$, la unificación de dominios tiene como resultado, en esencia, la adición de tantos símbolos de relación unarios como de cuantos tipos se disponga.

Sobre los morfismos (UD): Dado un morfismo $i=(\mathcal{A},(i_o,i_1,i_2),\mathcal{A}')$ de una signatura heterogénea $\mathcal{A}$ en otra $\mathcal{A}'$, sea $UD(i)=(UD(\mathcal{A}),(i_o,i_1,i_2\amalg i_o),UD(\mathcal{A}'))$.

Es evidente que UD es un functor de la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ en la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{Hmg}}}$.

□

A continuación definimos, haciendo uso del teorema de Herbrand-Schmidt-Wang, una transformación natural β del functor contravariante $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ en el functor contravariante $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Hmg}}}\circ UD^{op}$.

Sea $\mathcal{S}$ una signatura heterogénea. Entonces $\beta_{\mathcal{S}}$ es el functor de $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ en $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Hmg}}}(\mathrm{UD}(\mathcal{S}))$ definido como:

<u>Sobre los objetos</u> ($\beta_{\mathcal{S}}$): Dada una estructura $\mathcal{S}$–heterogénea $\underline{A}=(A,F,R,a)$, $\beta_{\mathcal{S}}(\underline{A})$ es la estructura $\mathrm{UD}(\mathcal{S})$-homogénea $(\coprod A, F^*, R^*, a^*)$, en la que sus tres últimas componentes vienen descritas como sigue:

(1) Si el símbolo de operación $\sigma\in\Sigma$ es tal que $\mathrm{ar}(\sigma)=(s_j|j\in n)$ y $\mathrm{car}(\sigma)=t$,

entonces F^*_σ es la operación n-aria sobre $\coprod A$ definida como:

$$(\coprod A)^n \xrightarrow{\quad F^*_\sigma \quad} \coprod A$$

$$((aj,sj)|j\in n) \longmapsto F^*_\sigma((aj,sj)|j\in n)=\begin{cases} F_\sigma(a_j|j\in n), \text{si } \forall j\in n, a_j\in A_{s_j} \\ (a_t,t), \quad \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

(2) Si el símbolo de relación $\pi\in\Pi$ es tal que $\mathrm{rk}(\pi)=(s_j|j\in n)$, entonces $R^*_{(\pi,o)}$

es la relación n-aria sobre $\coprod A$ definida como:

$$R^*_{(\pi,o)}=\{x\in(\coprod A)^n|\exists r\in R_\pi(\forall j\in n(x_j=(r_j,s_j)))\},$$

mientras que para $s\in S$, $R^*_{\pi_s}=A_s\times\{s\}$.

(3) $a^*=((a_s,s)|s\in S)$.

<u>Sobre los morfismos</u> ($\beta_{\mathcal{S}}$): Dado un homomorfismo $\underline{f}$ de estructuras $\mathcal{S}$–heterogéneas de $\underline{A}$ en $\underline{A}'$, $\beta_{\mathcal{S}}(\underline{f})$ es simplemente el triplo ordenado $(\beta_{\mathcal{S}}(\underline{A}),\coprod f,\beta_{\mathcal{S}}(\underline{A}'))$.

Es evidente que $\beta_{\mathcal{S}}$ es un functor de la categoría $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$ en la categoría $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Hmg}}}(\mathrm{UD}(\mathcal{S}))$ y que, además, β es una transformación natural de $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ en $\mathrm{Str}^{\underline{\mathrm{Hmg}}}\circ\mathrm{UD}^{\mathrm{op}}$.

□

Por otra parte, el teorema de Herbrand-Schmidt-Wang nos permite obtener una transformación natural α del functor $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}$ en el functor $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Hmg}}}\circ\mathrm{UD}$.

Sea $\mathcal{S}$ una signatura heterogénea. Entonces $\alpha_{\mathcal{S}}$ es el functor de $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathcal{S})$ en $\mathrm{Sent}^{\underline{\mathrm{Htg}}}(\mathrm{UD}(\mathcal{S}))$ definido como:

<u>Sobre los objetos</u>($\alpha_{\mathcal{S}}$): Si denotamos por $\underline{\Sigma}^{\mathrm{UD}}$ la signatura algebraica $(\Sigma,\mathrm{ar}^{\mathrm{UD}})$, entonces el S-conjunto $(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}^{\mathrm{UD}}}(V)|s\in S)$ (cuyas coordenadas son todas idénticas al conjunto subyacente de la $\underline{\Sigma}^{\mathrm{UD}}$-álgebra (homogénea) libre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}^{\mathrm{UD}}}(V)$ sobre V) está dotado, de manera natural, de una estructura de $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea, y obtenemos entonces un único homomorfismo de la $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea libre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(V,j)$ sobre el

S-conjunto (V,j), en la $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea que acabamos de mencionar, determinado unívocamente por la S-aplicación $(\eta_V \circ in_s | s \in S)$ del S-conjunto (V,j) en el S-conjunto $(Fr_{\underline{\Sigma}}\mathrm{UD}(V) | s \in S)$, en la que, para $s \in S$, $in_s : V_s \to V$, y η_V es la aplicación canónica de V en $Fr_{\underline{\Sigma}}\mathrm{UD}(V)$.

Es evidente que a partir de la S-aplicación subyacente del único homomorfismo anterior, y en virtud de la propiedad universal del coproducto, se obtiene una única aplicación de $At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B})$ en $At^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$.

Por otra parte, el conjunto $Form^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$, subyacente de la $\underline{\Delta}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$-álgebra libre $\underline{Form}^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$ sobre $At^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$, siendo $\underline{\Delta}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$ la signatura algebraica que coincide en todo con $\underline{\Delta}(\mathcal{B})$, salvo que en lugar de contener al conjunto $\{\forall(v,s) | (v,s) \in \bigcup_{s \in S} V_s \times \{s\}\}$, contiene al conjunto $\{\forall v | v \in V\}$, está dotado, de manera natural, de una estructura de $\underline{\Delta}(\mathcal{B})$-álgebra, considerando sobre él, ademas de los operadores comunes a $\underline{\Delta}(\mathcal{B})$ y $\underline{\Delta}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$, por cada par $(v,s) \in \bigcup_{s \in S} V_s \times \{s\}$, en lugar de los operadores unarios $\forall(v,s)$, los operadores algebraicos unarios $\forall v(\pi_s(v) \to ?)$. Entonces la aplicación objeto de $\alpha_{\mathcal{B}}$ es simplemente la restricción a $Ob(Sent^{\underline{Htg}}(\mathcal{B}))$ y $Ob(Sent^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B})))$ de la plicación subyacente del único homorfismo de la $\underline{\Delta}(\mathcal{B})$-álgebra libre $\underline{Form}^{\underline{Htg}}(\mathcal{B})$) en la $\underline{\Delta}(\mathcal{B})$-álgebra que acabamos de mencionar, que extiende a la composición de la aplicación de $At^{\underline{Htg}}(\mathcal{B})$ en $At^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$, y la aplicación canónica de $At^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$ en $Form^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$.

De modo que, dada una $\mathcal{B}$-sentencia heterogénea φ, $\alpha_{\mathcal{B}}(\varphi)$ se obtiene de φ substituyendo simultaneamente cada subfórmula de φ de la forma $\forall(v,s)\psi$, con v en V_s, para algun s en S, por una fórmula de la forma $\forall v(\pi_s(v) \to \alpha_{\mathcal{B}}(\psi))$.

<u>Sobre los morfismos</u> $(\alpha_{\mathcal{B}})$. La acción de $\alpha_{\mathcal{B}}$ sobre los morfismos viene dada por la primera parte del teorema de Herbrand-Schmidt-Wang, teniendo presente que a los axiomas lógicos se adjunta el siguiente conjunto de $\mathrm{UD}(\mathcal{B})$-sentencias homogéneas:

(1) $\exists v \pi_s(v)$, para cada $s \in S$;

(2) $\forall v_0,\ldots,v_{n-1}(\&_{j \in n}\pi_{s_j}(v_j) \to \pi_t(\sigma(v_0,\ldots,v_{n-1})))$, para cada símbolo de operación σ cuya ariedad sea $(s_j | j \in n)$ y cuya coariedad sea t, con $v_j \in V_{s_j}$, para cada j en n.

Denotamos ese conjunto de axiomas adicionales por $\Phi(\mathcal{B})$.

Es evidente que $\alpha_{\mathcal{B}}$ es un functor de la categoría $Sent^{\underline{Htg}}(\mathcal{B})$) en la categoría $Sent^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{B}))$ y que, ademas, α es una transformación natural de $Sent^{\underline{Htg}}$ en $Sent^{\underline{Hmg}} \circ \mathrm{UD}$.

A esto añadimos que, en virtud del teorema mencionado se cumple que para cada signatura heterogénea $\mathcal{B}$, cada estructura $\mathcal{B}$–heterogénea $\underline{A}$ y cada $\mathcal{B}$–sentencia heterogénea φ, $\underline{A} \models^{\underline{Htg}}_{\mathcal{B}} \varphi$ si y sólo si $\beta_{\mathcal{B}}(\underline{A}) \models^{\underline{Hmg}}_{\mathrm{UD}(\mathcal{B})} \alpha_{\mathcal{B}}(\varphi)$ y que además la estructura $\mathrm{UD}(\mathcal{B})$-homogénea $\beta_{\mathcal{B}}(\underline{A})$ es un modelo del conjunto $\Phi(\mathcal{B})$.

De este modo hemos obtenido, basándonos en el teorema de Herbrand-Schmidt-Wang, un triplo ordenado $(\underline{Htg},(\mathrm{UD},\alpha,\beta),\underline{Hmg})$, que establece una comparación natural entre la institución heterogénea y la homogénea, pero que no cae bajo el concepto de morfismo de instituciones propuesto por Goguen y Burstall en [14, 15], porque el sentido de α es el opuesto al de la misma componente en esos autores.

□

Por abstracción a partir de lo anterior, se puede proponer que se consideren también como morfismos de instituciones aquellos triplos ordenados $(\underline{I},(F,\alpha,\beta),\underline{I}')$, en los que F sea un functor de $\underline{Sig}$ en $\underline{Sig}'$, α una transformación natural de Sent en Sent'$\circ$F y β una transformación natural de Str en Str'$\circ F^{op}$, que cumplen la siguiente condición:

Para cada objeto $\mathcal{A}$ de $\underline{Sig}$, cada objeto $\underline{A}$ de Str($\mathcal{A}$) y cada objeto φ de Sent($\mathcal{A}$), $\underline{A}\models_{\mathcal{A}}\varphi$ si y sólo si $\beta_{\mathcal{A}}(\underline{A})\models'_{F(\mathcal{A})}\alpha_{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Nota. Definiendo del modo evidente la composición de estos nuevos morfismos de instituciones, se obtiene una categoría.

Consideramos conveniente señalar que, respecto del functor de unificación de dominios UD, el teorema de Herbrand-Schmidt-Wang obstruye la existencia de una transformación natural del functor contravariante $\mathrm{Str}^{\underline{Hmg}}\circ\mathrm{UD}^{op}$ en el functor contravariante $\mathrm{Str}^{\underline{Htg}}$ y la razón esencial de ello reside en que no siempre se puede asociar de manera natural una estructura heterogénea a una estructura homogénea; sin embargo, en virtud del mismo teorema, obtenemos, por cada signatura heterogénea $\mathcal{A}$, un functor parcial $\beta^{\S}_{\mathcal{A}}$ de $\mathrm{Str}^{\underline{Hmg}}(\mathrm{UD}(\mathcal{A}))$ en $\mathrm{Str}^{\underline{Htg}}(\mathcal{A})$ y, además, la familia $\beta^{\S}=(\beta^{\S}_{\mathcal{A}}\mid\mathcal{A}\in\mathrm{Ob}(\underline{Sig}^{\underline{Htg}}))$ que se obtiene es natural en $\mathcal{A}$. En efecto, $\beta^{\S}_{\mathcal{A}}$ es el functor parcial definido como:

Sobre los objetos ($\beta^{\S}_{\mathcal{A}}$): El dominio de definición de la aplicación objeto del functor parcial $\beta^{\S}_{\mathcal{A}}$ es el conjunto de todas aquellas estructuras UD($\mathcal{A}$)-homogéneas $\underline{B}$ que son modelo del conjunto de UD($\mathcal{A}$)-sentencias homogéneas $\Phi(\mathcal{A})$ considerado previamente. (Téngase presente que para cada estructura $\mathcal{A}$-heterogénea $\underline{A}$, $\beta_{\mathcal{A}}(\underline{A})$ es un modelo del conjunto $\Phi(\mathcal{A})$, i.e., que $\beta_{\mathcal{A}}(\underline{A})\in\mathrm{Dom}(\beta^{\S}_{\mathcal{A}})$, pero que $\mathrm{Dom}(\beta^{\S}_{\mathcal{A}})$ no tiene por qué constar sólo de esas entidades).

Entonces, dado un modelo $\underline{B}=(B,F,R,b)$ de $\Phi(\mathcal{A})$, sea $\beta^{\S}_{\mathcal{A}}(\underline{B})$ la estructura $\mathcal{A}$-heterogénea cuyas componentes vienen descritas como sigue:

(1) El S-conjunto subyacente de $\beta^{\S}_{\mathcal{A}}(\underline{B})$ es aquél cuya coordenada s-ésima es R_{π_s}, para cada $s\in S$.

(2) Si $\sigma\in\Sigma$ es tal que $\mathrm{ar}(\sigma)=(s_j\mid j\in n)$ y $\mathrm{car}(\sigma)=t$, entonces $F^{\S}_{\sigma}$ es la única aplicación de $\prod(R_{\pi_{s_j}}\mid j\in n)$ en R_{π_t} tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod(R_{\pi_{s_j}}\, j\in n) \arrow[r, "F^{\S}_{\sigma}"] \arrow[d, "\text{in.can.}"'] & R_{\pi_t} \arrow[d, "\text{in.can.}"] \\
B^n \arrow[r, "F_{\sigma}"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(3) Si $\pi \in \Pi$ es tal que $rk(\pi)=(s_j|j \in n)$, entonces $R^{\S}_{\pi}$ es la intersección de $R_{(\pi,0)}$ y $\prod(R_{\pi_{s_j}}|j \in n)$.

(4) $b^{\S}$ se obtiene de b, que, recordemos, es una aplicación de S en B tal que para cada s en S, $b_s \in R_{\pi_s}$ restringiendo a S y a $\bigcup_{s \in S} R_{\pi_s}$.

Sobre los morfismos ($\beta^{\S}_{\mathcal{S}}$): Como dominio de definición de la aplicación morfismo del functor parcial $\beta^{\S}_{\mathcal{S}}$ tomamos el conjunto de todos los homomorfismos entre modelos de $\Phi(\mathcal{S})$, entonces la acción de $\beta^{\S}_{\mathcal{S}}$ sobre un homomorfismo de modelos de $\Phi(\mathcal{S})$, $\underline{f}:\underline{B}\to\underline{B}'$, se define haciendo uso de la S-aplicación que se obtiene de f al considerar las restricciones de f a los pares de conjuntos R_{π_s} y R'_{π_s}.

Es evidente que $\beta^{\S}_{\mathcal{S}}$ es un functor parcial de la categoría $Str^{\underline{Hmg}}(UD(\mathcal{S}))$ en la categoría $Str^{\underline{Htg}}(\mathcal{S})$ y que $\beta^{\S}$ es una transformación natural de $Str^{\underline{Hmg}} \circ UD^{op}$ en $Str^{\underline{Htg}}$.

Además, en virtud del teorema de Herbrand-Schmidt-Wang, se cumple que para cada signatura heterogénea $\mathcal{S}$, cada modelo $\underline{B}$ de $\Phi(\mathcal{S})$ y cada $\mathcal{S}$-sentencia heterogénea φ, $\beta^{\S}_{\mathcal{S}}(\underline{B}) \models^{\underline{Htg}}_{\mathcal{S}} \varphi$ si y sólo si $\underline{B} \models^{\underline{Hmg}}_{UD(\mathcal{S})} \alpha_{\mathcal{S}}(\varphi)$.

De este modo hemos obtenido un triplo ordenado ($\underline{Htg}$,(UD,α,$\beta^{\S}$),$\underline{Hmg}$) que establece una comparación natural entre la institución heterogénea y la homogénea, pero que no cae tampoco bajo el concepto de morfismo de instituciones propuesto por Goguen y Burstall en [14,15], porque además de ser los sentidos de α y $\beta^{\S}$ los opuestos a los de las mismas componentes en esos autores, se ha de reemplazar $\underline{Cat}$ por una categoría de categorías y functores parciales. Concretamente, como categoría de valores se ha de considerar, en este caso, la categoría $\underline{Cat}_{pf}$, que tiene como objetos las U-categorías, y en la que dadas dos U-categorías $\underline{C}$, $\underline{D}$, los morfismos de $\underline{C}$ en $\underline{D}$ son aquellos functores parciales de $\underline{C}$ en $\underline{D}$, i.e., los triplos ordenados $F=(\underline{C},(F_0,F_1),\underline{D})$, en los que F_0, la aplicación parcial objeto, es una aplicación parcial de $Ob(\underline{C})$ en $Ob(\underline{D})$ y F_1, la aplicación parcial morfismo, una aplicación parcial de $Mor(\underline{C})$ en $Mor(\underline{D})$, que cumplen las siguientes condiciones:

1. $Dom(F)=(Dom(F_0),Dom(F_1))$ es una subcategoría plena de $\underline{C}$.
2. Para cada morfismo $f \in Dom(F_1)$, $d_0(F_1(f))=F_0(d_0(f))$ y $d_1(F_1(f))=F_0(d_1(f)$.
3. Para cada objeto $x \in Dom(F_0)$, $F_1(id_x)=id_{F_0(x)}$.
4. Para cada par $(f,g) \in Mor(\underline{C})^2$, si $d_0(f)=d_1(g)$ y $(f,g) \in Dom(F_1)^2$, entonces $F_1(fg)=F_1(f)F_1(g)$.

La composición y las identidades se definen del modo evidente.

□

Por abstracción, tomando en consideración lo anterior, se puede proponer que se consideren también como morfismos de instituciones (suponiendo que se ha reemplazado la noción de institución por otra en la que la categoría de valores sea $\underline{Cat}_{pf}$) aquellos triplos ordenados ($\underline{I}$,(F,α,β),$\underline{I}'$), en los que F sea un functor de $\underline{Sig}$ en $\underline{Sig}'$, α una transformación natural de Sent en Sent'$\circ$F y β una transformación natural de Str'$\circ F^{op}$ en Str, que cumplen la siguiente condición:

Para cada objeto $\mathcal{S}$ de $\underline{\mathrm{Sig}}$, cada objeto $\underline{B}$ de $\mathrm{Str}'(F(\mathcal{S}))$ y cada objeto φ de $\mathrm{Sent}(\mathcal{S})$, si $\underline{B}$ está en el dominio de definición de la aplicación objeto de $\beta_{\mathcal{S}}$, entonces $\beta_{\mathcal{S}}(\underline{B}) \models_{\mathcal{S}} \varphi$ si y sólo si $\underline{B} \models'_{F(\mathcal{S})} \alpha_{\mathcal{S}}(\varphi)$.

Nota. Definiendo del modo evidente la composición de estos nuevos morfismos, se obtiene una categoría.

Nota. Consideramos que todo el asunto de la parcialidad que está involucrado en esta parte del trabajo no es gratuito y ello en virtud de las siguientes consideraciones. En primer lugar, desde un punto de vista metodológico, si es razonable tomar en consideración estructuras con operaciones parciales (p. ej., las categorías o los cuerpos), ¿por qué no lo habría de ser considerar algún tipo de homomorfismo parcial entre tales estructuras?. Y en segundo lugar, teniendo en cuenta el teorema de Herbrand-Schmidt-Wang, creemos que en lo anterior no se está forzando nada ni se está yendo contra natura al considerar la parcialidad, porque se está dando cuenta, formalmente, de un hecho natural (claro está, en el "zoológico" de las entidades matemáticas), para el que tal concepto parece ser el adecuado; y el que se haya hecho uso de la categoría $\underline{\mathrm{Cat}}_{\mathrm{pf}}$ no significa, ni mucho menos, que tal categoría sea la única a considerar ni la óptima, en general. Es más, el problema es que si se es metodológicamente coherente, el espectro de posibilidades (relativas a la parcialidad) es muy amplio y consideramos que todavía es necesario llevar a cabo mucho trabajo de carácter "experimental", para poder decidir acerca de la relevancia o conveniencia de unas u otras nociones de parcialidad (referidas a los functores y a las transformaciones naturales) y que, además, éstas forzarán a generalizar a su vez la noción de categoría (y de 2-categoría) de modo que cada objeto tenga asociado un conjunto de "sub-identidades" y cada triplo de objetos x, y, z tenga asociada una aplicación parcial del conjunto $\mathrm{Hom}(y,z)\times\mathrm{Hom}(x,y)$ en el conjunto $\mathrm{Hom}(x,z)$, y todo ello sujeto a ciertas condiciones.

3. Dos 2-categorías y un 2-functor en la teoría de Goguen y Burstall.

En esta sección completamos la teoría de las instituciones de Goguen y Burstall hasta una 2-categoría, mediante la definición de una noción de morfismo, o deformación, entre dos morfismos de una institución en otra.

Recordemos que dadas dos instituciones (en el sentido de Goguen y Burstall) $\underline{I}$ e $\underline{I}'$, un morfismo (en el sentido de los mismos autores) de $\underline{I}$ en $\underline{I}'$ es un triplo ordenado $\Psi=(\underline{I},(F,\alpha,\beta),\underline{I}')$, en el que $F:\underline{\mathrm{Sig}}\rightarrow\underline{\mathrm{Sig}}'$, α una transformación natural de $\mathrm{Sent}'\circ F$ en Sent y β una transformación natural de Str en $\mathrm{Str}'\circ F^{op}$, de modo que se cumple cierta condición, establecida explícitamente en la última definición de la primera sección. Ahora bien, puesto que de la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}$ en la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}'$ no hay, en general, necesariamente un único functor, parece natural que, en una primera aproximación, dados dos morfismos Ψ y Ψ' de una institución $\underline{I}$ en otra $\underline{I}'$, consideremos a las transformaciones naturales del functor F en el functor F', que sean "compatibles" con los pares de transformaciones naturales (α,β) y (α',β'), como deformaciones del morfismo Ψ en el morfismo Ψ'.

Definición. Dadas dos instituciones $\underline{I}$ e $\underline{I}'$ y dos morfismos de instituciones $\Psi=(\underline{I},(F,\alpha,\beta),\underline{I}')$ y $\Psi'=(\underline{I},(F',\alpha',\beta'),\underline{I}')$ de $\underline{I}$ en $\underline{I}'$, un morfismo de Ψ en Ψ' es un triplo ordenado $\text{Ч}=(\Psi,\delta,\Psi')$ en el que δ es una transformación natural de F en F', que cumple las siguientes condiciones:

$$\text{Mor.1.}\qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Sent}'\circ F"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Sent}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \alpha'\cdot(\mathrm{id}_{\mathrm{Sent}'} * \delta)"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Sent}'\circ F"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Sent}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \alpha"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd}$$

$$\text{Mor.2.}\qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}}^{op} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Str}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Str}'\circ F'^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, (\mathrm{id}_{\mathrm{Str}'} * \delta^{op})\cdot\beta"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}}^{op} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Str}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Str}'\circ F'^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \beta'"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd}$$

Proposición. Dadas dos instituciones $\underline{I}$ e $\underline{I}'$, tres morfismos de instituciones $\Psi=(\underline{I},(F,\alpha,\beta),\underline{I}')$, $\Psi'=(\underline{I},(F',\alpha',\beta'),\underline{I}')$ y $\Psi''=(\underline{I},(F'',\alpha'',\beta''),\underline{I}')$ de $\underline{I}$ en $\underline{I}'$, un morfismo Ч$=(\Psi,\delta,\Psi')$ de Ψ en Ψ' y un morfismo Ч$'=(\Psi',\delta',\Psi'')$ de Ψ' en Ψ'', Ч$'\bullet$Ч$=(\Psi,\delta'\bullet\delta,\Psi'')$ es un morfismo de Ψ en Ψ'', llamado la composición vertical de Ч y Ч$'$. Además, esa composición vertical es asociativa y para un morfismo de instituciones $\Psi=(\underline{I},(F,\alpha,\beta),\underline{I}')$, $\mathrm{id}_\Psi=(\Psi,\mathrm{id}_F,\Psi)$ es un endomorfismo de Ψ y es neutro para la composición vertical.

Demostración. Puesto que Ч$=(\Psi,\delta,\Psi')$ es un morfismo de Ψ en Ψ', tenemos que

$$(1)\qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Sent}'\circ F"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Sent}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \alpha'\cdot(\mathrm{id}_{\mathrm{Sent}'} * \delta)"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Sent}'\circ F"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Sent}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \alpha"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd} \qquad \text{y}$$

$$(2)\qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}}^{op} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Str}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Str}'\circ F'^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, (\mathrm{id}_{\mathrm{Str}'} * \delta^{op})\cdot\beta"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}}^{op} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Str}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Str}'\circ F'^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \beta'"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd}$$

Puesto que Ч$'=(\Psi',\delta',\Psi'')$ es un morfismo de Ψ' en Ψ'', también tenemos que:

$$(1')\qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Sent}'\circ F'"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Sent}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \alpha''\cdot(\mathrm{id}_{\mathrm{Sent}'} * \delta')"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Sent}'\circ F'"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Sent}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \alpha'"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd} \qquad \text{y}$$

$$(2')\qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}}^{op} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Str}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Str}'\circ F''^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, (\mathrm{id}_{\mathrm{Str}'} * \delta'^{op})\cdot\beta'"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sig}}^{op} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Str}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Str}'\circ F''^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \beta''"] & \underline{\mathrm{Cat}} \end{tikzcd}$$

Por consiguiente, de (1) y (1'), en virtud de las reglas de Godement, obtenemos que:

$$\alpha''\bullet(\mathrm{id}_{\mathrm{Sent}'}*(\delta'\bullet\delta))=\alpha,$$

y de (2) y (2'), en virtud de las mismas reglas, que:

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{Str}'} * (\delta'^{op} \bullet \delta^{op})) \bullet \beta = \beta''.$$

Por consiguiente, $\text{Ч}' \bullet \text{Ч} = (\Psi, \delta' \bullet \delta, \Psi'')$ es un morfismo de Ψ en Ψ''.

Las demostraciones de las otras partes de la proposición son igual de sencillas.

□

Proposición. Dadas tres instituciones $\underline{I}$, $\underline{I}'$ e $\underline{I}''$, dos morfismos de instituciones $\Psi = (\underline{I}, (F, \alpha, \beta), \underline{I}')$ y $\hat{\Psi} = (\underline{I}, (\hat{F}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}), \underline{I}')$ de $\underline{I}$ en $\underline{I}'$, dos morfismos de instituciones $\Psi' = (\underline{I}', (F', \alpha', \beta'), \underline{I}'')$ y $\hat{\Psi}' = (\underline{I}', (\hat{F}', \hat{\alpha}', \hat{\beta}'), \underline{I}'')$ de $\underline{I}'$en $\underline{I}''$, un morfismo $\text{Ч} = (\Psi, \delta, \hat{\Psi})$ de Ψ en $\hat{\Psi}$ y un morfismo $\text{Ч}' = (\Psi', \delta', \hat{\Psi}')$ de Ψ' en $\hat{\Psi}'$, $\text{Ч}' * \text{Ч} = (\Psi' \circ \Psi, \delta' * \delta, \hat{\Psi}' \circ \hat{\Psi})$ es un morfismo de $\Psi' \circ \Psi$ en $\hat{\Psi}' \circ \hat{\Psi}$, llamado la composición horizontal de Ч y Ч'. Además, esa composición horizontal es asociativa y, para una institución dada $\underline{I}$, $\mathrm{id}_{\underline{I}} = (\mathrm{Id}_{\underline{I}}, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\underline{\mathrm{Sig}}}}, \mathrm{Id}_{\underline{I}})$ es un endomorfismo de $\mathrm{Id}_{\underline{I}}$ y es neutro para la composición horizontal.

Demostración. Por hipótesis tenemos, en particular, que

$$\hat{\alpha} \bullet (\mathrm{id}_{\mathrm{Sent}'} * \delta) = \alpha \text{ y } \hat{\alpha}' \bullet (\mathrm{id}_{\mathrm{Sent}''} * \delta') = \alpha'.$$

Luego, en virtud de las reglas de Godement, obtenemos que

$$\alpha \bullet (\alpha' * \mathrm{id}_F) = (\hat{\alpha} \bullet (\hat{\alpha}' * \mathrm{id}_{\hat{F}})) \bullet (\mathrm{id}_{\mathrm{Sent}''} * (\delta' * \delta)).$$

Del mismo modo obtenemos que:

$$(\hat{\beta}' * \mathrm{id}_{\hat{F}^{op}}) \bullet \hat{\beta} = (\mathrm{id}_{\mathrm{Str}''} * (\delta'^{op} * \delta^{op})) \bullet ((\beta' * \mathrm{id}_{F^{op}}) \bullet \beta).$$

Por consiguiente, $\text{Ч}' * \text{Ч}$ es un morfismo de $\Psi' \circ \Psi$ en $\hat{\Psi}' \circ \hat{\Psi}$.

Las demostraciones de las otras partes de la proposición son igual de sencillas.

□

Corolario. Si se toman como 0-células las instituciones, como 1-células los morfismos de instituciones y como 2-células los morfimos entre morfismos de instituciones, se obtiene una 2-categoría.

□

Nota. Del mismo modo que se ha definido, en una primera aproximación, una noción de morfismo o deformación de un morfismo de instituciones en otro entre las mismas, también se pueden proponer nociones de deformación para aquellos morfismos de instituciones que fueron introducidos en la segunda sección, obteniendose resultados similares a los aquí establecidos.

Así, como ejemplo, un tanto trivial, de la noción de deformación, pero relativa al primer tipo de morfismo de instituciones de la segunda sección, se puede considerar el siguiente: si denotamos por $\underline{\mathrm{EcHtg}}$ la institución asociada a la lógica ecuacional heterogénea, y por $\underline{\mathrm{EcHmg}}$ aquella asociada a la lógica ecuacional homogénea, entonces, además del functor de unificación de dominios UD, convenientemente restringido, disponemos, p. ej., del functor de homogeneización, definido por Matthiessen en [21], de la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{EcHtg}}}$, de las signaturas algebraicas heterogéneas U-pequeñas, en la categoría $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{EcHmg}}}$, de las signaturas algebraicas homogéneas U-pequeñas, y es el caso que hay una transformación natural de la restricción del functor de unificación de dominios a $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{EcHtg}}}$ y a $\underline{\mathrm{Sig}}^{\underline{\mathrm{EcHmg}}}$, en el functor de homogeneización de Matthiessen. Además, esa transformación natural determina una deformación del primer tipo de morfismo de instituciones de la segunda sección, restringido a $\underline{\mathrm{EcHtg}}$ y a $\underline{\mathrm{EcHmg}}$, en otro del mismo tipo, entre las mismas instituciones, obtenido mediante el procedimiento de homogeneización de Matthiessen.

Por último, tal como señalan Goguen y Burstall en [14,15], cada institución I determina una categoría Th(I), de I-teorías y morfismos entre I-teorías, y cada morfismo de instituciones Ψ de una institución I en otra I' induce un functor Th(Ψ) de la categoría Th(I) en la categoría Th(I'). A esto se puede añadir que cada morfismo Ч de Ψ en Ψ', siendo $\Psi,\Psi':I\rightarrow I'$, determina una transformación natural Th(Ч) del functor Th(Ψ) en el functor Th(Ψ'). De modo que tomando como 0-células las categorías de la forma Th(I), con I una institución, como 1-células los functores de la forma Th(Ψ), con $\Psi:I\rightarrow I'$, y como 2-células las transformaciones naturales de la forma Th(Ч), con Ч=(Ψ,δ,Ψ') una deformación de Ψ en Ψ', obtenemos una 2-categoría, que no es más que el rango del 2-functor Th definido sobre la 2-categoría previamente descrita.

Post Scriptum (Diciembre de 1991).

Este trabajo fue remitido a la revista Theoria en Julio de 1988 y recibimos el informe sobre el mismo en Octubre de 1991. En virtud de la oportunidad que nos brinda la revista y en atención al referee, al cual agradecemos sus diversas sugerencias, adjuntamos los siguientes comentarios.

En el año 1989 fue publicado el interesantísimo trabajo de Meseguer [23]. En él la teoría de las instituciones de Goguen y Burstall fue generalizada, completada y refinada hasta una teoría de las lógicas generales, en la que, en particular, además de dar cuenta de la semántica, mediante la noción de institución y una profunda modificación de la noción de transformación entre instituciones de Goguen y Burstall, se toma en consideración la parte deductiva de la noción intuitiva de sistema lógico, a través de la noción de "entailment system" y de la de morfismo entre tales constructos, y todo ello con el fin de proponer una axiomatización de la noción de programación lógica.

Meseguer propone que se consideren como morfismos de una institución I en otra I', los triplos ordenados (Φ,α,β), en los que α es una transformación natural de Sent en Sent'$\circ\Phi$, Φ un functor α-sensible de Th_0 en Th'_0, y β una transformación natural de Str'$\circ\Phi^{op}$ en Str, que cumplen una condición similar a la de Goguen y Burstall, de manera que, salvo las condiciones sobre Φ, la principal diferencia, tal como señala el propio Meseguer, respecto de la noción de Goguen y Burstall, reside en que el sentido de α y β es precisamente el contrario del de estos autores (obsérvese que, salvo por lo que respecta a Φ y a la parcialidad, los sentidos de las transformaciones naturales α y β en Meseguer, y los de las transformaciones naturales α y $\beta^{\S}$ de la segunda sección de este trabajo coinciden). Además, Meseguer dice, refiriéndose a la noción de morfismo de instituciones de Goguen y Burstall y a la por él definida para esos constructos, que "Both notions of mapping will probably be needed to account for all relevant examples". Así pues, cuanto menos, coincidimos con Meseguer en la necesidad de admitir varias nociones de morfismo entre instituciones.

Por otra parte, observamos que tanto Goguen y Burstall como Meseguer en sus teorías sólo usan functores totalmente definidos, y no parece que consideren necesario tomar en consideración algun tipo de functor parcial ni tampoco proponen alguna noción de 2-célula para cada una de las transformaciones (entre las estructuras lógicas) que definen. Actualmente, consideramos que los trabajos de Gentzen [10], Glivenko [11], Gödel [12, 13], Kolmogorov [18], McKinsey-Tarski [22], Sette-Szcerba [27] y Krynicki [19], que no fueron tomados en consideración cuando se elaboró este trabajo, muestran de manera casi irrefutable, por una parte, la necesidad de modificar la noción de institución, admitiendo, al menos, que el functor contravariante estructural Str de tal constructo lógico pueda estar sólo parcialmente definido sobre la categoría de signaturas y que la categoría codominio del mismo sea una categoría de categorías y functores parciales (de algún tipo), así como la de modificar, concomitantemente, todos aquellos constructos lógicos definidos por Meseguer en los que intervenga tal noción; y por otra parte, la de admitir una multiplicidad de nociones de deformación entre morfismos de instituciones (u otros constructos lógicos en los que intervenga la noción de institución) (por descontado, menos ingenuas que las propuestas en la última sección de este trabajo y cuya finalidad fue la de completar la teoría de las instituciones de Goguen y Burstall hasta una 2-categoría) y que estas nociones de deformación sean acordes con las diversas clases naturales existentes de morfismos de instituciones, como ha sido reconocido y puesto en práctica por Meseguer, tal como se ha indicado antes, y a lo cual, en parte, este trabajo estuvo dirigido.

Respecto de las deformaciones consideramos oportuno añadir que su interés no sólo radica, a nuestro juicio (como se tendrá oportunidad de comprobar en una próxima publicación al respecto), en el hecho, puramente formal, de que dotan a la teoría de las lógicas generales de Meseguer, y también, por descontado, a la teoría de las instituciones de Goguen y Burstall, de una estructura bidimensional, que de por sí ya sería relevante, aunque sólo sea por la mayor riqueza matemática que esto supone, sino también en el de que, y éste es el fundamental, constituyen una formalización categorial que corresponde a las relaciones que subsisten entre las diversas transformaciones que se pueden considerar de una lógica dada en otra.

En definitiva, consideramos que aún cuando las nociones propuestas por Meseguer son extremadamente clarificadoras y constituyen de hecho una importante aportación, entre otras, a la teoría de modelos abstracta, las lógicas generales, teniendo presentes los trabajos de los autores antes mencionados, no son tan generales como sería de desear, debido a que no se puede dar cuenta de ciertos resultados lógico-matemáticos relevantes, como los que ocurren, p. ej., en Sette-Szcerba [27] y Krynicki [19], mediante tales lógicas generales.

Agradecimiento. Los autores quieren expresar su más sincero agradecimiento al doctorando Juan Carlos Soliveres Tur por el interés mostrado por las teorías en que se enmarca este trabajo, como se ha puesto de relieve en las discusiones mantenidas sobre el mismo, y por la colaboración que les ha prestado con sus profundos conocimientos informáticos.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AVRON: Simple consequence relations. Inf. and comp., 92 (1991), 105-139.

[2] J. BARWISE: Axioms for abstract model theory. Annals of math. logic, 7 (1974), 221-265.

[3] J. BARWISE: An introduction to first-order logic. En Handbook of math. logic. Ed. by J. Barwise. North-Holland, 1977, 5-46.

[4] H. ENDERTON: A mathematical introduction to logic. Academic Press, 1972.

[5] S. FEFERMAN: Lectures on proof theory. En Proc. of the summer school of logic (Leeds, 1967). Ed. by M. H. Löb. Springer, 1968, 1-107.

[6] S. FEFERMAN: Two notes on abstract model theory, I. Fundamenta mathematicae, 82 (1974), 153-165.

[7] S. FEFERMAN: Preface. En Model-theoretic logics. Ed. J. Barwise and S. Feferman. Springer, 1985, VII-X.

[8] J. FIADEIRO & A. SERNADAS: Structuring theories on consequence. En Selected papers from the fifth workshop on specification of A. D. T. Ed. by D. Sannella and A. Tarlecki. Springer, 1988, 44-72.

[9] J. GALLIER: Logic for computer science. Harper & Row, 1986.
[10] G. GENTZEN: Untersuchungen über das logische Schliessen. Mathematische Zeitschrift, 39 (1934), 176-210, 405-431.
[11] V. I. GLIVENKO: Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. Académie royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences (5), 15 (1929), 183-188.
[12] K. GÖDEL: Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 4 (1933), 34-38. Reimpreso con traducción inglesa en Collected works. Vol. I. Clarendon Press, 1986, 286-295.
[13] K. GÖDEL: Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 4 (1933), 39-40. Reimpreso con traducción inglesa en Collected works. Vol. I. Clarendon Press, 1986, 300-303.
[14] J. GOGUEN & R. BURSTALL: Introducing institutions. En Logic of programs. Workshop, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, June 6-8, 1983. Ed. by E. Clarke and D. Kozen. Springer, 1984, 221-256.
[15] J. GOGUEN & R. BURSTALL: A study in the foundations of programming methodology: Specifications, institutions, charters and parchments. En Category theory and computer programming tutorial and workshop. Guilford, U. K., September 1985. Proceedings. Ed. by D. Pitt et alii. Springer, 1986, 313-333.
[16] J. HERBRAND: Recherches sur la théorie de la démonstration. Thèse à l'Université de Paris. Reimpreso en Ecrits logiques. P. U. F., 1968, 35-153.
[17] J. HOOK: A note on interpretations of many-sorted theories. J. of symbolic logic, 50 (1985), 372-374.
[18] A. KOLMOGOROV: On the principle of the excluded middle. En From Frege to Gödel. Ed. by J. van Heijenoort. Harvard University Press, 1967, 414-437.
[19] M. KRYNICKI: Notion of interpretation and nonelementary languages. Zeitschrift für math. Logik und Grund. der Mathematik, 34 (1988), 541-552.
[20] A. MAL'CEV: Model correspondences. En The metamathematics of algebraic systems. Collected papers: 1936-1967. North-Holland, 1971, 66-94.
[21] G. MATTHIESSEN: Theorie der heterogenen Algebren. Dissertation. Bremen, 1976.
[22] J. C. C. MCKINSEY & A. TARSKI: Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. J. of symbolic logic, 13 (1948), 1-15.
[23] J. MESEGUER: General logics. En Logic colloquium '87. Ed. by H. Ebbinghaus et alii. North-Holland, 1989, 275-329.
[24] J. D. MONK: Mathematical logic. Springer, 1976.
[25] J. PORTE: Recherches sur la théorie générale des systèmes formels. Gauthier-Villars, 1965.
[26] A. SCHMIDT: Ueber deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen. Mathematischen Annalen, 115 (1938), 485-506.
[27] M. SETTE & L. SZCZERBA: Characterizations of elementary interpretations in category theory. En Mathematical logic. M. Dekker, 1985, 243-292.
[28] A. TARLECKI: Bits and pieces of the theory of institutions. En Category theory and computer programming tutorial and workshop. Guilford, U. K., September 1985. Proceedings. Ed. by D. Pitt et alii. Springer, 1986, 334-363.
[29] H. WANG: Logic of many-sorted theories. J. of symbolic logic, 17 (1952), 105-116.