PRODUCTOS DE L_t-TIPOS PARA ESPACIOS T_3

Juan Carlos MARTINEZ*

ABSTRACT

It is a well known fact that the finite products of Hintikka-Fraissé types for sentences of quantifier rank n give rise to the set of atoms of a finite boolean algebra. In this paper we consider the class of $(L_{ww})_t$-types introduced in [4], which caracterizes in a pure topological way the $(L_{ww})_t$-equivalence for T_3 spaces. We define for every nonempty family $<a_i>_I$ of n-types a product $x^n_I a_i$ in such a way that if $<A_i>_I$ is a family of T_3 spaces, $X_I A_i$ denotes its product with the box topology and $(a_i)_I \in X_I A_i$ we have that if the n-type of a_i is a_i $(i \in I)$, then the n-type of $(a_i)_I$ is $x^n_I a_i$. We then prove that, for every $n \geq 1$, it is possible to define a lineal order $<^n$ on the set of satisfiable n-types such that, for every nonempty family $<\alpha_i>_I$ of satisfiable n-types and every $J \subset I$, we have $x^n_J \alpha_j \leq^n x^n_I \alpha_i$. We also prove that these results for Ziegler's types can be generalized, if we consider the class of $(L_{\omega_1\omega})t$-types introduced in [6], which permits to characterize the $(L_{\omega_1\omega})t$-equivalence for a wide class of T_3 spaces.

§0. Introducción

El objetivo de la teoría de modelos topológicos es el estudio de las estructuras topológicas utilizando lenguajes formales. Una estructura topológica es un par (A,σ) donde A es una estructura algebraica en el sentido usual y σ es la clase de abiertos de una topología sobre el universo de A. El lenguaje topológico de primer orden $(L_{\omega\omega})_t$ se obtiene a partir del lenguaje de primer orden clásico $L_{\omega\omega}$, añadiendo el símbolo de pertenencia $\in$ y variables de conjunto X, Y, ... El lenguaje $(L_{\omega\omega})_t$ se obtiene a partir de las fórmulas y reglas de $L_{\omega\omega}$, tomando como nuevas fórmulas atómicas a todas las expresiones de la forma $t \in X$ donde t es un término y X es una variable de conjunto, y añadiendo las dos siguientes reglas de formación:

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, Nº 16-17-18, tomo A, 105-121

(ii) Si t es un término y φ es una fórmula positiva en X, entonces $\forall X\, (t \in X \rightarrow \varphi)$ es una fórmula.

El que una fórmula φ sea positiva (respect. negativa) en una variable de conjunto X significa que si consideramos a φ escrita en forma normal negada, es decir, de tal forma que el símbolo de negación interviene únicamente delante de fórmulas atómicas, entonces toda interpretación libre de X en φ es de la forma $t \in X$, donde $t \in X$ no está precedida por el símbolo de negación (respect. es de la forma $\neg(t\ X)$). Intuitivamente, las cuantificaciones sobre conjuntos en $(L_{\omega\omega})_t$ son cuantificaciones sobre entornos suficientemente pequeños de un punto. Cuando una fórmula φ de $(L_{\omega\omega})_t$ se interpreta en una estructura topológica (A,σ), las variables de conjunto de φ varían sobre los abiertos de σ.

Se demuestra en [4] que el lenguaje $(L_{\omega\omega})_t$ verifica los teoremas de compacidad, completitud y Löwenheim-Skolem para la clase de estructuras topológicas, y que en muchas ocasiones es posible dar un tratamiento paralelo a la teoría de modelos clásica y a la teoría de modelos topológicos. La propiedad crucial que verifican las fórmulas de este lenguaje es que son invariantes. Es decir, para saber si una sentencia φ de $(L_{\omega\omega})_t$ se cumple en una estructura topológica (A,σ) no hace falta considerar todos los abiertos de σ, sino que basta con tomar la clase de abiertos de una cualquiera de sus bases. La noción de propiedad invariante es muy utilizada en consideraciones topológicas. Por ejemplo, para saber si un espacio topológico es Hausdorff, es suficiente comprobar si, fijada una base cualquiera, dos puntos distintos del espacio tienen entornos dosjuntos de dicha base.

De manera paralela a como se hace en el contexto clásico, se introducen a partir de $(L_{\omega\omega})_t$ los lenguajes topológicos infinitarios. El lenguaje $(L_{\omega_1\omega})_t$, que será estudiado en el presente trabajo, se define entonces a partir de las fórmulas y reglas de $L_{\omega\omega}$, añadiendo la siguiente regla de formación:

"Si Σ es un conjunto numerable de fórmulas, $\vee\Sigma$ y $\wedge\Sigma$ son fórmulas".

En los últimos años se han realizado diversos trabajos en los que se estudia el poder de expresión de los lenguajes topológicos para espacios T_3 (es decir, regulares y Hausdorff). La referencia [3] es un trabajo de recopilación sobre dichos resultados.

Todos los espacios que consideremos en este trabajo son espacios T_3, los cuales son denotados por A, B, ... El símbolo I denotará siempre un conjunto de índices no vacío. Si $\langle A_i \rangle_I$ es una familia de espacios T_3, denotaremos por $X_I A_i$ al producto de los espacios A_i con la topología-caja.

PRODUCTOS DE L_t-TIPOS PARA ESPACIOS T_3

Consideraremos la clase de los $(L_{\omega\omega})_t$-tipos introducida por Ziegler en [4], que permite caracterizar la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia para espacios T_3. Demostraremos algunos resultados de preservación para productos de espacios T_3 con la topología caja. Definiremos, para todo $n \geq 1$, una función x^n sobre la clase de todas las familias no vacías de n-tipos de tal forma que, para cualquier familia $<A_i>_I$ de espacios T_3 y cualquier $(a_i)_I \in X_I A_i$, se tiene que si el n-tipo de a_i en A_i es α_i ($i \in I$), entonces el n-tipo de $(a_i)_I$ en $X_I A_i$ es $x^n_I \alpha_i$. Demostraremos que es posible definir para todo $n \geq 1$ un orden lineal $<^n$ sobre el conjunto de n-tipos satisfacibles de tal manera que se cumple la siguiente condición:

(+) Para toda familia $<a_i>_I$ de n-tipos satisfacibles y todo $J \subset I$, se tiene que $x^{j}_{n}\alpha_j \leq^n x^n_I \alpha_i$.

Este resultado es en algún sentido más fuerte que el que conocemos en el contexto clásico para los tipos de Hintikka-Fraissé que caracterizan la equivalencia elemental, ya que es sabido que los productos finitos de estos tipos dan lugar a un álgebra de Boole (véase [1, capítulo 6]). Se tiene además que el orden lineal $<^n$ no es único en general con respecto a la condición (+). Demostraremos también que es posible construir mediante la función x^n una función efectivamente computable que verifica el teorema de Feferman-Vaught expuesto en [2, Theorem 6.6] para productos de espacios T_3 con la topología-caja. Por otra parte, se deduce de inmediato que si consideramos productos de espacios T_3 con la topología usual, no es posible encontrar una función que cumpla dicho teorema.

Estudiaremos también la clase de los $(L_{\omega_1\omega})_t$-tipos introducida en [6], que permite caracterizar la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia de una amplia clase de espacios T_3. Demostraremos que, al igual que ocurre con los $(L_{\omega\omega})_t$-tipos, es posible definir para todo $n \geq 1$ una función x^n que determina el n-tipo de $(a_i)_I$ en $X_I A_i$ a partir del n-tipo de a_i en A_i ($i \in I$). Demostraremos entonces que es también posible definir para todo $n \geq 1$ un orden lineal $<^n$ sobre el conjunto de n-tipos satisfacibles que cumple la condición (+).

Los resultados concernientes a productos de $(L_{\omega\omega})_t$-tipos están expuestos con más detalle en [5].

§1. $(L_{\omega\omega})_t$-tipos para espacios T_3.

Los tipos elementales para el estudio de la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia para espacios T_3 son introducidos en [4]. Utilizando el operador de derivada de Cantor, se divide un espacio en clases de puntos del mismo tipo. Todos los puntos del espacio tienen el mismo 0-tipo. Y dos puntos tienen el mismo n+1-tipo, si son puntos de acumulación de los mismos n-tipos. Para todo $n \in \omega$ se define el conjunto de n-tipos T_n por inducción sobre n:

$T_0 = \{*\}$,
$T_{n+1} = P(T_n)$, el conjunto de partes de T_n.

Para todo espacio A, $a \in A$ y $n \in w$ se define el n-tipo de a en A, en símbolos $t_n(a,A)$, por inducción sobre n:

$t_0(a,A) = *$,
$t_{n+1}(a,A) = \{\alpha \in T_n$: en todo entorno U de a existe un $b \in U$ con $b \neq a$ y $t_n(b,A) = \alpha\}$.

Tenemos dos 1-tipos, $\varnothing$ y $\{*\}$. Si $t_1(a,A) = \varnothing$, a es punto aislado. Si $t_1(a,A) = \{*\}$, a es punto de acumulación. Tenemos cuatro 2-tipos, que son $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{*\}\}$ y $\{\varnothing,\{*\}\}$. Si $t_2(a,A) = \varnothing$, a es punto aislado. Si $t_2(a,A) = \{\varnothing\}$, a es punto de acumulación únicamente de puntos aislados. Si $t_2(a,A) = \{\{*\}\}$, a es punto de acumulación únicamente de puntos de acumulación. Y si $t_2(a,A) = \{\varnothing,\{*\}\}$, a es punto de acumulación de puntos aislados y de puntos de acumulación.

Si $m < n$ y $a \in A$, el n-tipo de a determina el m-tipo de a. Para todo $m,n \in \omega$ con $m \leq n$ y $\alpha \in T_n$, se define el m-tipo $(\alpha)_m$ de la forma siguiente:

$(\alpha)_0 = *$,
$(\alpha)_{m+1} = \{(\beta)_m : \beta \in \alpha\}$.

Se puede comprobar entonces que para todo espacio A, $a \in A$ y $m,n \in \omega$ con $m \leq n$, se tiene que $t_m(a,A) = (t_n(a,A))_m$.

Para todo espacio A y $n \in \omega$, se define la función $K_n^A : T_n \to \omega \cup \{\infty\}$ por $K_n^A(\alpha)$ = número de puntos de A de n-tipo α. Se puede comprobar que $K^A = \bigcup_{n \geq 0} K_n^A$ es una función. El siguiente resultado es el teorema de caracterización de la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia para espacios T_3.

1.1. Teorema. (Ziegler). Sean A, B espacios T_3. Entonces, A y B son $(L_{\omega\omega})_t$-equivalentes si y sólo si $K^A = K^B$.

Para todo espacio A y $n \in \omega$, se define la función $K_n^A|n+1 : T_n \to \{o,....,n+1\}$ por $K_n^A|n+1(\alpha)$ = mínimo $\{K_n^A(\alpha), n+1\}$. El siguiente resultado, que nos será de utilidad más adelante, es una consecuencia de la demostración de 1.1.

1.2. Corolario. Para toda sentencia φ de $(L_{\omega\omega})_t$ podemos encontrar de manera efectiva un cierto $n_0 \in \omega$ y ciertas sentencias de la forma "$K_{n_0}|n_0+1 = h$", de tal forma que, en espacios T_3, φ es equivalente a la disyunción de dichas sentencias.

§2. Productos de $(L_{\omega\omega})_t$-tipos.

Para todo $n \geq 1$ definimos la función x^n, sobre la clase de las familias no vacías de n-tipos, por inducción sobre n.

Si $<\alpha_i>_I$ es una familia de 1-tipos, ponemos

$$x_I^1 \alpha_i = \begin{cases} \{*\}, \text{ si } \alpha_i = \{*\} \text{ para algún } i \in I. \\ \\ \emptyset, \text{ si } \alpha_i = \emptyset \text{ para todo } i \in I. \end{cases}$$

Si $n \geq 2$ y $<\alpha_i>_I$ es una familia de n-tipos, definimos

$$x_I^n \alpha_i = \bigcup_{\substack{J \subset I \\ J \neq \emptyset}} \{x_I^{n-1} \beta_i \; ; \text{(a)} \;\; \beta_i \in \alpha_i \;\; \text{si } i \in J$$

$$\text{(b)} \;\; \beta_i = (\alpha_i)_{n-1} \;\; \text{si } i \notin J\}.$$

Por consiguiente, si $n \geq 2$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in T_n$ tenemos que

$$\alpha_1 x^n \alpha_2 = \{ \beta_1 x^{n-1} \beta_2 : b_1 \in \alpha_1, \beta 2 \in \alpha_2 \} \cup$$

$$\cup \; \{ (\alpha_1)_{n-1} \, x^{n-1} \beta_2 \; : \; \beta_2 \in \alpha_2 \} \; \cup$$

$$\cup \; \{ \beta_1 \, x^{n-1} (\alpha_2)_{n-1} \; : \; \beta_1 \in \alpha_1 \}.$$

Las tablas de multiplicación para x^1 y x^2 son las siguientes:

x^1	ø	{*}
ø	ø	{*}
{*}	{*}	{*}

x^2	ø	{ø}	{ø{*}}	{{*}}
ø	ø	{ø}	{ø{*}}	{{*}}
{ø}	{ø}	{ø{*}}	{ø{*}}	{{*}}
{ø{*}}	{ø{*}}	{ø{*}}	{ø{*}}	{{*}}
{{*}}	{{*}}	{{*}}	{{*}}	{{*}}

Si $n \geq 2$ y $\alpha, \beta \in T_n \cap T_{n+1}$, no es cierto en general que $\alpha\ x^n\ \beta$ coincida con $\alpha\ x^{n+1}\ \beta$, debido a que $(\alpha)_n$ puede ser distinto de $(\alpha)_{n-1}$. Por ejemplo,

$\{ø\}\ x^2\ \{ø\} = \{ø\ x^1\ ø\} \cup \{ø\ x^1\ \{*\}\} = \{ø\{*\}\}$,

$\{ø\}\ x^3\ \{ø\} = \{ø\ x^2\ ø\} \cup \{ø\ x^2\ \{ø\}\} = \{ø\{ø\}\}$.

Teniendo en cuenta que T_n es un conjunto finito, es fácil demostrar por inducción sobre n el siguiente resultado, que será utilizado sin mención explícita.

2.1. Lema. Sean $\langle A_i \rangle_I$ una familia de espacios T_3 y $(a_i)_I \in X_I A_i$. Entonces, para todo $n \geq 1$, se tiene que $t_n((a_i)_I, X_I A_i) = \overset{n}{X_I}\, t_n(a_i, A_i)$.

Para todo $n \in \omega$ definimos el n-tipo γ_n por $\gamma_0 = *$, $\gamma_{n+1} = \{\gamma_n\}$. Obsérvese que si A es un espacio sin puntos aislados, entonces $t_n(a,A) = \gamma_n$ para todo $n \geq 0$ y $a \in A$. Por consiguiente, si $\langle A_i \rangle_I$ es una familia infinita de espacios T_3 tal que $card(A_i) \geq 2$ para infinitos índices i y A es el producto de los espacios A_i con la topología usual, entonces $t_n(a,A) = \gamma_n$ para todo $n \geq 0$ y $a \in A$.

El siguiente lema se demuestra fácilmente por inducción sobre n. Para probar (b), obsérvese que $(\gamma_n)_{n-1} = \gamma_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

2.2. Lema. Sean n1 y <ai>I una familia de n-tipos. Se tiene:

(a) Sea $J = \{i \in I : \alpha_i \neq \emptyset\}$. Si $J \neq \emptyset$, entonces $x_I^n \alpha_i = x_J^n \alpha_j$.

(b) Si $\alpha_i = \gamma_n$ para algún $i \in I$, entonces $x_I^n \alpha_i = \gamma_n$.

Un n-tipo α es satisfacible en un espacio A, si existe un $a \in A$ tal que $t_n(a,A) = \alpha$. Y un n-tipo a es satisfacible, si existe un espacio A, tal que α es satisfacible en A. Denotamos por T_n^+ al conjunto de los n-tipos satisfacibles. Obsérvese que si $\alpha \in T_n^+$ y $\alpha \notin \{\emptyset, \gamma_n\}$, entonces $\emptyset \in \alpha$, ya que todo punto de tipo a tiene que ser punto de acumulación de puntos aislados.

2.3. Teorema. Para todo n1 es posible definir una relación de orden lineal $<^n$ sobre T_n^+ tal que, para toda familia $<\alpha_i>_I$ de n-tipos satisfacibles y todo $J \subset I$ con $J \neq \emptyset$, se tiene que $x_J^n \alpha_j \leq^n x_I^n \alpha_i$.

Demostración. Por inducción sobre $n \geq 1$ definimos la relación de orden lineal $<^n$ de la siguiente forma:

$\emptyset <^1 \{*\}$.

Supongamos que $n \geq 2$. Entonces, ponemos a $\emptyset$ como el primer elemento de $<^n$ y a γ_n como el último elemento de $<^n$. Sean $\alpha, \beta \in T_n^+$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha, \beta \notin \{\emptyset, \gamma_n\}$. Pongamos $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ y $\beta = \{\beta_1, ..., \beta_r\}$ con $\alpha_1 <^{n-1} \cdot ... <^{n-1} \alpha_l$ y $\beta_1 <^{n-1} .... <^{n-1} \beta_r$. Como $\alpha \neq \beta$, existe un $k \geq 0$ tal que $\alpha_{l-k} \neq \beta_{r-k}$. Sea m = mínimo $\{k: \alpha_{l-k} \neq \beta_{r-k}\}$. Si $\alpha_{l-m} <^{n-1} \beta_{r-m}$ definimos $\alpha <^n \beta$; y si $\beta_{r-m} <^{n-1} \alpha_{l-m}$ definimos $\beta <^n \alpha$.

Supongamos ahora que $<\alpha_i>_I$ es una familia de n-tipos satisfacibles y J es un subconjunto no vacío de I. Queremos probar que $x_J^n \alpha_j \leq^n x_I^n \alpha_i$. El caso $n = 1$ es inmediato. Supongamos entonces que $n \geq 2$. Si $\alpha_j = \emptyset$ para todo $j \in J$, tenemos $\emptyset = x_J^n \alpha_j \leq^n x_I^n \alpha_i = \gamma_n$. Supongamos que no nos encontramos en ninguno de estos dos casos. Obsérvese que, para todo $i \in I$, $\alpha_i \neq \emptyset$ implica $\emptyset \in \alpha_i$. Por tanto $\emptyset \in x_J^n \alpha_j$, con lo cual $x_J^n \alpha_j \neq \gamma_n$.

Sea $\beta = x_J^{n-1} \quad \beta_j \quad x_J^n \alpha_j$. Para todo $i \in I$ definimos

β_i, si $i \in J$.

$b_i' =$

$\emptyset$, si $i \notin J$.

Se sigue que $x_I^{n-1} \; b_i' \in x_I^n \alpha_i$. Por 2.2. (a), $\beta = x_I^{n-1} \; b_i'$. Por tanto, $x_J^n \alpha_j \leq^n x_I^n \alpha_i$.
- |

Vamos a comprobar ahora que la relación de orden lineal $<^n$ definida en la demostración de 2.3. no es única en general. No es difícil verificar que el conjunto de los 3-tipos satisfacibles es el formado por los siguientes elementos:

$1 = \emptyset$

$2 = \{\emptyset\}$

$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$4 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{*\}\}\}$

$5 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{*\}\}\}$

$6 = \{\emptyset, \{\{*\}\}\}$

$7 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{*\}\}\}$

$8 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{*\}\}, \{\{*\}\}\}$

$9 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{*\}\}, \{\{*\}\}\}$

$10 = \{\{\{*\}\}\}$

Es claro que $1 <^3 2 <^3 \ldots <^3 9 <^3 10$. Tenemos la siguiente tabla de multiplicación:

x^3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	5	5	5	9	9	9	9	10
3	3	5	5	5	5	9	9	9	9	10

4	4	5	5	4	5	8	9	8	9	10
5	5	5	5	5	5	9	9	9	9	10
6	6	9	9	8	9	8	9	8	9	10
7	7	9	9	9	9	9	9	9	9	10
8	8	9	9	8	9	8	9	8	9	10
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Es claro que la siguiente relación de orden lineal $<'$ cumple lo requerido.

$1 <' 7 <' 2 <' 3 <' 4 <' 5 <' 6 <' 8 <' 9 <' 10$

Nuestro objetivo ahora es dar una demostración, a partir de la función x^n, del teorema de Feferman-Vaught para productos de espacios T^3 con la topología-caja. La idea clave, expresada con precisión en el siguiente lema, es que el producto de una familia de n-tipos satisfacibles se estabiliza a partir de un cierto subconjunto finito de índices.

2.4. Lema. Sean $n \geq 1$ y $<\alpha_i>_I$ una familia de n-tipos satisfacibles. Entonces, existe un subconjunto finito I_0 de I tal que, para todo $I' \subset I$ con $I_0 \subset I'$, se tiene que $x^n_I \alpha_i = x^n_{I'} \alpha_i$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es inmediato. Supongamos que $n \geq 2$. Si $\alpha_i = \varnothing$ para una cantidad cofinita de índices i ó $\alpha_i = \gamma_n$ para algún i, es claro, por 2.2., que se cumple lo requerido. Supongamos ahora que no estamos en estos dos casos. Entonces, para todo $i \in I$, $\alpha_i \neq \varnothing$ implica $\varnothing \in \alpha_i$. Como $x^n_I \alpha_i$ es un conjunto finito, aplicando la hipótesis de inducción y 2.2. (a), encontramos un subconjunto finito I_0 de I tal que, para todo $I' \subset I$ con $I_0 \subset I'$, $x^n_I \alpha_i = x^n_{I'} \alpha_i$. -|

Para todo espacio A y $n \geq 1$ definimos:

$T_n(A) = \{\alpha \in T_n : \alpha \text{ es satisfacible en } A\}$,

$$K_n(A) = \{(\alpha, K_n^A \mid n+1\ (\alpha)) : \alpha \in Tn\}.$$

2.5. <u>Teorema</u>. Sea φ una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$. Entonces, podemos encontrar de manera efectiva un número natural m_0 tal que, para cualquier familia $<A_i>_I$ de espacios T_3, se tiene:

$X_I A_i \models \varphi$ implica existe $I_0 \subset I$ con $\text{card}(I_0) \leq m_0$ tal que, para todo $I' \subset I$ con $I_0 \subset I'$, $X_{I'} A_i \models \varphi$.

<u>Demostración</u>. Sea "$K_{n_0} | n_0+1 = h_0$ "v ... v" $K_{n_0} | n_0+1 = h_r$" la disyunción de sentencias equivalente a φ en espacios T_3, dada por 1.2. Sea $r_0 =$ mínimo $\{k \in \omega : 2^k \geq n_0+1\}$. Podemos entonces

$$m_0 = \text{card}\,(T^+_{n_0}) + r_0.$$

Se demuestra en [4, II.1.41] que existe un procedimiento de decisión para saber si un n-tipo es satisfacible. Por tanto, m_0 puede ser obtenido de manera efectiva. Supongamos que $X_I A_i \models \varphi$. Entonces, para algún $k \in \{1, ..., r\}$,

$$K_{n_0}(X_I A_i) = \{(\alpha, h_k(\alpha) : \alpha \in T_{n_0}\}.$$

Distinguimos los dos siguientes casos:

<u>Caso 1</u>. Existe $i_0 \in I$ tal que A_i no tiene puntos aislados.
Se sigue por 2.2 (b) que

$$K_{n_0}(X_I A_i) = \{ (\gamma_{n_0}, n_0+1) \} \cup \{ (\alpha, 0) : \alpha \in T_{n_0}, \alpha \neq \gamma_0 \}$$

Entonces, si $i_0 \in I' \subset I$ tenemos que $K_{n_0}(X_I A_i) = K_{n_0}(X_{I'} A_i)$, con lo cual $X_{I'} A_i \models \varphi$.

<u>Caso 2</u>. Para todo $i \in I$, A_i tiene algún punto aislado.
A partir de 2.4 y 2.2 (a) obtenemos que existe un $I'_0 \subset I$ con $\text{card}(I'_0) \leq \text{card}(T^+_{n_0}$ tal que, para todo $I' \subset I$ con $I'_0 \subset I'$, $T_{n_0}(X_I A_i) = T_{n_0}(X_{I'} A_i)$.
Por consiguiente, existe $I_0 \subset I$ con $\text{card}(I_0) \leq m_0$ tal que, para todo $I' \subset I$ con $I_0 \subset I'$, $K_{n_0}(X_I A_i) = K_{n_0}(X_{I'} A_i)$ -|

Se puede demostrar asimismo que es posible optimizar de una manera efectiva cualquier función decidible que cumpla el teorema de Feferman-Vaught para productos de espacios T_3 con la topología caja (véase [5]).

Por otra parte, obsérvese que el producto con la topología usual de una familia infinita de espacios infinitos discretos no es un espacio discreto. Por tanto, el teorema de Feferman-Vaught no se cumple para productos de espacios T_3 con la topología usual.

§3. $(L\omega_1\omega)_t$-tipos para espacios T_3.

Se demuestra en [6] que, estudiando el comportamiento de la convergencia por medio de un juego topológico con dos contrincantes, es posible refinar la noción de n-tipo de Ziegler e introducir de esta forma una clase de $(L\omega_1\omega)$-tipos, que permite caracterizar la $(L\omega_1\omega)$-equivalencia para una amplia clase de espacios T_3.

Sean A un espacio T_3 y X un subconjunto de A. Se define el juego G(X,A) de infinitos movimientos entre dos contrincantes, I y II, de la siguiente forma. En la primera jugada, I elige un subconjunto finito X_1 de A y entonces II elige un entorno U_1 de X_1. En la segunda jugada, I elige un subconjunto finito X_2 de A y entonces II elige un entorno U_2 de X_2. Y así sucesivamente. El jugador I vence la partida si, para algún $n \in \omega$, $X \subset U_1 \cup ... \cup U_n$. Entonces, decimos que X es <u>accesible</u>, si I tiene una estrategia de victoria en el juego G(X,A). Y decimos que X es inaccesible, en caso contrario.

El que un conjunto X sea accesible en un espacio significa que el jugador I tiene una estrategia que le permite, en el desarrollo de una partida del juego, ir eligiendo secuencias finitas de puntos del espacio tales que, por pequeños que sean los entornos de esos puntos elegidos por el jugador II, llegará un momento en la partida en que el conjunto X quedará cubierto por la unión de los entornos elegidos por II.

Si X es un subconjunto de un espacio A y $a \in A$, decimos que X converge hacia a, en símbolos $X \to a$, si a es un punto de acumulación de X. La noción de conjunto accesible es de utilidad para estudiar el comportamiento de la convergencia. Supongamos que X es un subconjunto de un espacio A y $a \in A$. Si $X \to a$, consideramos los dos siguientes <u>tipos de convergencia</u>:

(i) $X \to^0 a$, si para todo entorno U de a se tiene que $X \cap U$ es inaccesible.

(ii) $X \to^1 a$, si existe un entorno U de a tal que $X \cap U$ es accesible.

Para todo $n \in \omega$ definimos <u>el conjunto S_n</u> de n-tipos por inducción sobre n:

$S_0 = \{*\}$,

$$S_{n+1} = P\left(\bigcup_{\lambda=0,\,1} \{(\alpha, \lambda) : \alpha \in S_n\} \right),$$

donde P es el operador que a un conjunto le asigna su conjunto de partes.

Para todo espacio A, $a \in A$ y $n \in \omega$, definimos <u>el n-tipo de a en A</u>, en símbolos $s_n(a, A)$, de la siguiente forma:

$$s_0(a, A) = *,$$

$$s_{n+1}(a, A) = \bigcup_{\lambda=0,\,1} \{(\alpha, \lambda) : \alpha \in S_n \text{ y } A\alpha \xrightarrow{\lambda} a\},$$

donde $A\alpha = \{a \in A : s_n(a, A) = \alpha\}$.

Si $m < n$, el n-tipo de un punto a determina el m-tipo de a. Para todo $m, n \in \omega$ con $m \leq n$ y $a \in Sn$, se define <u>el m-tipo $(\alpha)_m$</u> de la siguiente forma. Ponemos $(\alpha)_0 = *$. Supongamos $m \geq 1$. Si $\alpha = \emptyset$, $(\alpha)_m = \emptyset$. Si $\alpha = \{(\alpha_1, \lambda_1), \ldots, (\alpha_r, \lambda_r)\}$, entonces

$(\alpha)_m = \{ (\beta, \lambda_\beta)$: el conjunto J de todos los i tales que $l \leq i \leq r$ y $(\alpha_i)_{m-1} = \beta$, y $\lambda_\beta = 0$ si $\lambda_i = 0$ para algún $i \in J$, $\lambda_\beta = 1$ en caso contrario$\}$.

Se demuestra entonces que, para todo espacio A, $a \in A$ y $m, n \in \omega$ con $m \leq n$, $s_m(a,A) = (s_n(a,A))_m$.

Definimos ahora la clase de espacios para la cual, utilizando estos tipos, podemos caracterizar la $(L\omega_1\omega)_t$-equivalencia. Un espacio A es <u>de tipo finito</u> si, para algún $n_0 \in w$, $s_{n_0}(a, A) = s_{n_0}(a', A)$ implica $s_n(a, A) = s_n(a', A)$ para todo $n > n_0$ y $a, a' \in A$. Se puede demostrar que, si nos restringimos a la clase de espacios de tipo finito, los tipos que hemos definido son $(L\omega_1\omega)_t$-definibles.

Para todo espacio A y $n \in \omega$, definimos la función $E_n^A : S_n \to \omega \cup \{\infty\}$ por $E_n^A(\alpha)$ = número de puntos de A de n-tipo α. Se puede comprobar que $E^A = \bigcup_{n\geq 0} E_n^A$ es una función.

Se dice que dos espacios A y B son <u>a-equivalentes</u>, si para todo a $\bigcup_{n\geq 0} S_n$ se tiene:

(i) $E^A(\alpha) = E^B(\alpha)$ y

(ii) $A\alpha$ es accesible si y sólo si $B\alpha$ es accesible.

El siguiente resultado es el teorema central de [6].

3.1. Teorema. Sean A, B espacios numerables metrizables de tipo finito. Entonces, A y B son homeomorfos si y sólo si A y B son a-equivalentes.

Como consecuencia de 3.1. se obtiene que si A y B son espacios de tipo finito, entonces A y B son $(L\omega_1\omega)_t$-equivalentes si y sólo si A y B son a-equivalentes.

§4. Productos de $(L\omega_1\omega)_t$-tipos.

Para todo $n \geq 1$ vamos a definir una función x^n para los n-tipos definidos en §3. Demostraremos que en este contexto es posible obtener un resultado paralelo a 2.3. Vamos a probar primeramente algunas propiedades de los conjuntos accesibles para productos, que nos serán de utilidad más adelante.

4.1. Lema. Sean A, B espacios T_3. Sean X un subconjunto accesible de A e Y un subconjunto accesible de B. Entonces XxY es un subconjunto accesible de AxB.

Demostración. A partir de sendas estrategias de victoria del jugador I en G(X, A) y G(Y, B), podemos encontrar una estrategia de victoria del jugador I en el juego G(XxY, AxB) de la siguiente manera. El número de jugadas de una partida en el juego G(XxY, AxB) será de la forma $r = n_1 +...+ n_k$. Para todo $i \in \{1, ..., r\}$, en la jugada i, I escoge un subconjunto finito $X_i x Y_i$ de AxB y II escoge un entorno $U_i x V_i$ de $X_i x Y_i$. Pongamos $n_0 = 0$. Entonces, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, se deben cumplir las siguientes condiciones:

(i) Para todo $j, j' \in \{n_{i-1}+1, ..., n_i\}$, $X_j = X_{j'}$.

(ii) X_{n_i} es un subconjunto finito de A elegido por I en la jugada i-ésima según su estrategia de victoria en G(X, A), y $U_{n_1} \cup ... \cup U_{n_k} = X$.

(iii) $Y_{n_{i-1}+1}$, ..., Y_{n_i} son subconjuntos finitos de B elegidos por I según su estrategia de victoria en G(Y, B), de tal forma que $V_{n_{i-1}+1} \cup ... \cup V_{n_i} = Y$. -|

Por tanto, el producto finito de conjuntos accesibles es accesible en el espacio producto. Sin embargo, un producto infinito de conjuntos accesibles es generalmente inaccesible en el espacio producto. Para comprobar este punto, basta considerar el espacio 2^ω con la topología-caja, el cual es claramente inaccesible.

4.2. Lema. Sea $\langle A_i \rangle_I$ una familia de espacios T_3. Entonces:

(a) Para todo $i \in I$ sea Z_i un subconjunto de A_i. Supongamos que, para algún $i \in I$, Z_i es un subconjunto inaccesible de A_i. Entonces, $X_I Z_i$ es un subconjunto inaccesible de $X_I A_i$.

(b) Para todo $i \in I$ sea Z_i un subconjunto de A_i. Supongamos que, para infinitos índices i, $card(Z_i) \geq 2$. Entonces, $X_I Z_i$ es un subconjunto inaccesible de $X_I A_i$.

(c) Sea $a^1, \ldots, a^n, \ldots$ una secuencia infinita de puntos de $X_I A_i$. Pongamos $a^n = \langle a_i^n \rangle_I$ para todo $n \in \omega$. Supongamos que, para todo $i \in I$, el conjunto $\{a_i^n : n \in \omega\}$ es finito. Entonces, $\{a^n : n \in \omega\}$ es un subconjunto inaccesible de $X_I A_i$.

Demostración. (a) y (b) son inmediatos. Para probar (c), obsérvese que el conjunto $\{i \in I : a_i^m \neq a_i^n$ para algún $m, n \in \omega\}$ es infinito. Entonces, es fácil encontrar una estrategia del jugador II en el juego $G(\{a^n : n \in \omega\}, X_I A_i)$ tal que, para todo $k \in \omega$, después de k jugadas únicamente un subconjunto finito de $\{a^n : n \in \omega\}$ queda cubierto por los entornos elegidos por II. -|

Vamos a definir para todo $n \geq 1$ una función producto x^n sobre S_n de tal manera que se cumplirá el siguiente resultado.

4.3. Lema. Sean $\langle A_i \rangle_I$ una familia de espacios T_3 y $(a_i)_I \in X_I A_i$. Entonces, para todo $n \geq 1$, $s_n((a_i)_I, X_I A_i) = x_I^n\, s_n(a_i, A_i)$.

Definimos la función x^n de la siguiente forma. Si $\langle a_i \rangle_I$ es una familia de 1-tipos, ponemos:

$$x_I^1 \alpha_i = \begin{cases} \emptyset, \text{ si } \alpha_i = \emptyset \text{ para todo } i \in I, \\ \{(*, 0)\}, \text{ si } \alpha_i = \{(*, 0)\} \text{ para algún } i \in I, \\ \{(*, 0)\}, \text{ si } \alpha_i = \{(*, 1)\} \text{ para infinitos } i \in I, \\ \{(*,1)\}, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Si $n \geq 2$ y $\langle \alpha_i \rangle_I$ es una familia de n-tipos, definimos:

$x_I^n \alpha_i = \{(\beta, \lambda_\beta) :$

(a) existe $\eta = <(\beta_j, \lambda_j)>_J$ con $J \subset I$ y $J \neq \emptyset$ tal que $(\beta_j, \lambda_j) \in \alpha_j$ para todo $j \in J$, y $\beta = x_I^{n-1} \beta_i$ donde $\beta_i = (\alpha_i)_{n-1}$ para todo $i \notin J$.

(b)

$\lambda_\beta =$

0, si existen infinitas secuencias η que cumplen (a).

0, si existe una secuencia infinita η que cumple (a).

0, si existe una secuencia $\eta = <(\beta_j, \lambda_j)>$ que cumple (a) y tal que $\lambda_j = 0$ para algún $j \in J$.

1, en otro caso. }.

A partir de 4.1. y 4.2. es fácil demostrar, por inducción sobre n, 4.3.

Para todo $n \in \omega$ definimos <u>el n-tipo</u> γ_n por $\gamma_0 = *$, $\gamma_{n+1} = \{ (\gamma_n, 0) \}$. Obsérvese que si A es un espacio sin puntos aislados, entonces $s_n(a,A) = \gamma_n$ para todo $a \in A$ y $n \in \omega$. Es fácil verificar que $(\gamma_n)_{n-1} = \gamma_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Entonces, podemos demostrar por inducción sobre n el siguiente resultado, que es paralelo a 2.2.

4.4. <u>Lema</u>. Sean $n \geq 1$ y $<\alpha_i>_I$ una familia de n-tipos. Se tiene:

(a) Sea $J = \{i \in I : \alpha_i \neq \emptyset\}$. Si $J \neq \emptyset$, entonces $x_I^n \alpha_i = x_J^n \alpha_j$.

(b) Si $\alpha_i = \gamma_n$ para algún $i \in I$, entonces $x_I^n \alpha_i = \gamma_n$.

El concepto de n-tipo satisfacible se define aquí de la misma forma que en §2. Denotamos por S_n^+ al conjunto de los n-tipos satisfacibles. Obsérvese que si $a \in S_n^+ - \{\emptyset, \gamma_n\}$, entonces $(\emptyset, 0) \in \alpha$ ó $(\emptyset, 1) \in \alpha$.

4.5. <u>Teorema</u>. Para todo $n \geq 1$ es posible definir una relación de orden lineal $<^n$ sobre S_n^+ tal que, para toda familia $<\alpha_i>_I$ de n-tipos satisfacibles y todo $J \subset I$ con $J \neq \emptyset$, se tiene que $x_J^n \alpha_j \leq^n x_I^n \alpha_i$.

Demostración. Definimos por inducción sobre $n \geq 1$ la relación de orden lineal $<^n$ de la siguiente forma:

$$\varnothing <^1 \{ (*, 1) \} <^1 \{ (*, 0) \}.$$

Supongamos que $n \geq 2$. Ponemos a $\varnothing$ como el primer elemento de $<^n$ y a γ_n como el último elemento de $<^n$. Sean $\alpha, \beta \in S_n^+$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha, \beta \notin \{\varnothing, \gamma_n\}$. Pongamos $\alpha = \{ (\alpha_1, \lambda_1), \ldots, (\alpha_l, \lambda_l) \}$ y $\beta = \{ (\beta_1, \upsilon_1), \ldots, (\beta_r, \upsilon_r) \}$ con $\alpha_1 <^{n-1} \ldots <^{n-1} \alpha_l$ y $\beta_1 <^{n-1} \ldots <^{n-1} \beta_r$. Como $\alpha \neq \beta$, existe un $k \geq 0$ tal que $(\alpha_{l-k}, \lambda_{l-k}) \neq (\beta_{r-k}, \upsilon_{r-k})$. Sea m el menor k con esta propiedad. Entonces definimos $\alpha <^n \beta$, si $\alpha_{l-m} <^{n-1} \beta_{r-m}$ ó bien $\alpha_{l-m} = \beta_{r-m}$, $\lambda_{l-m} = 1$ y $\upsilon_{r-m} = 0$. Y definimos $\beta <^n \alpha$, en caso contrario.

Es claro que para $n = 1$ se cumple lo requerido. Supongamos ahora que $<\alpha_i>_I$ es una familia de n-tipos satisfacibles con $n \geq 2$ y $J \subset I$ con $J \neq \varnothing$. Si $a_j \neq \varnothing$ para todo $j \in J$ ó $\alpha_i = \gamma_n$ para algún $i \in I$, es claro que $x^n_J \alpha_j \leq^n x^n_I \alpha_i$. Supongamos que no nos encontramos en ninguno de estos dos casos. Entonces, para todo $i \in I$, $\alpha_i \neq \varnothing$ implica $(\varnothing, 0) \in \alpha_i$ ó $(\varnothing, 1) \in \alpha_i$. Es fácil ver que si $(\beta, \lambda) \in x^n_J \alpha_j$ entonces (β, λ') $x^n_I \alpha_i$ para $\lambda' \leq \lambda$. Por tanto, $x^n_J \alpha_j \leq^n x^n_I \alpha_i$. -|

Veamos por último que la relación de orden lineal $<^n$ que hemos definido en la demostración de 4.5. no es única. Para $n \geq 2$ podemos también definir $<^n$ de la siguiente manera. Ponemos a $\varnothing$ como el primer elemento de $<^n$ y a γ_n como el último elemento de $<^n$. Sean $\alpha, \beta \in S_n^+$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha, \beta \notin \{\varnothing, \gamma_n\}$. Pongamos $\alpha = \{ (\alpha_1, \lambda_1), \ldots, (\alpha_l, \lambda_l) \}$ y $\beta = \{ (\beta_1, \upsilon_1), \ldots, (\beta_r, \upsilon_r) \}$ con $\alpha_1 <^{n-1} \ldots <^{n-1} \alpha_l$ y $\beta <^{n-1}$ $<^{n-1} \beta_r$. Si existe un $k \geq 0$ tal que $\alpha_{l-k} \neq \beta_{r-k}$, tomamos m igual al menor k con esta propiedad. Entonces, si $\alpha_{l-m} <^{n-1} \beta_{r-m}$, ponemos $\alpha <^n \beta$. Y si $\beta_{r-m} <^{n-1} \alpha_{l-m}$, ponemos $\beta <^n \alpha$. Supongamos ahora que no existe un $k > 0$ con $\alpha_{l-k} \neq \beta_{r-k}$. Sea m el menor k tal que $\lambda_{l-k} \neq \upsilon_{r-k}$. Entonces, si $\lambda_{l-m} = 0$ y $\upsilon_{r-m} = 1$, ponemos $\beta <^n \alpha$. Y si $\lambda_{l-m} = 1$ y $\upsilon_{r-m} = 0$, ponemos $\alpha <^n \beta$.

*Universidad de Barcelona

BIBLIOGRAFIA

[1] C.C. CHANG - H. J. KEISLER. **Model Theory**, North-Holland, Amsterdam (1973).

[2] S. FEFERMAN - R.L. VAUGHT. "The first order properties of products of algebraic systems". **Fundamenta Mathematicae** 47 (1959), 57-103.

[3] J. FLUM. "Formal languages and topological spaces". Se publicará próximamente.

[4] J. FLUM - M. ZIEGLER. **Topological Model Theory**. Lecture Notes in Mathematics 769, Springer-Verlag, Berlin (1980).

[5] J.C. MARTINEZ. **L_t-equivalencia**. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid (1983).

[6] J.C MARTINEZ. " Accesible sets and $(L\omega_1\omega)$-equivalence for T_3 spaces". **The Journal of Symbolic Logic** 49 (1984), 961-967.